



Title	複雑系数理の新展開 : 津田一郎教授退職記念研究集会報告集
Author(s)	津田, 一郎; KUBO, Hideo; 斉藤, 朝輝 他
Description	編者: 黒田 茂, 行木 孝夫, 山口 明宏, 山口 裕
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 172, 1-63
Issue Date	2018-01-12
DOI	https://doi.org/10.14943/81533
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/68097
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech172.pdf



複雑系数理の新展開

津田一郎教授退職記念研究集会報告集

編者： 黒田 茂，行木 孝夫，山口 明宏，山口 裕

Series #172. January, 2018

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.
- #151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第8回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.
- #152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第20回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.
- #153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.
- #154 N. Hu, Doctoral thesis "Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces", 69 pages. 2012.
- #155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.
- #156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第21回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.
- #157 D. Suyama, T. Ito, M. Kuroda, Y. Goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagawa, 第9回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.
- #158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.
- #159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka, Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.
- #160 M. Kuroda, Y. Goto, K. Sasaki, S. Futakuchi, D. Funakawa, T. Yamashita, and K. Wada, 第10回数学総合若手研究集会, 335 pages. 2014.
- #161 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 39th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 147 pages. 2014.
- #162 D. Funakawa, T. Kagaya, Y. Kabata, K. Sasaki, H. Takeda, Y. Chino, A. Tsuchida, T. Yamashita, and K. Wada, 第11回数学総合若手研究集会, 359 pages. 2015.
- #163 S. Jimbo, S. Goto, Y. Kohsaka, H. Kubo, Y. Maekawa, and M. Ohnuma, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation - International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday - , 47 pages. 2015.
- #164 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 122 pages. 2015.
- #165 A. Tsuchida, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, Y. Kabata, H. Saito, F. Nakamura and S. Honda, 第12回数学総合若手研究集会, 373 pages. 2016.
- #166 S.-I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 110 pages. 2016.
- #167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.
- #168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodriguez Mulet, 第13回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.
- #169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.
- #170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.
- #171 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations - In memory of Professor Taira Shirota - , 102 pages. 2017.

津田一郎教授退職記念研究集会

複雑系数理の新展開

日時: 2017 年 2 月 15 日(水) 10:00~2 月 16 日(木) 16:00

会場: 北海道大学大学院 理学研究院数学部門 4-501 教室

プログラム

2/15 (水) 10:00~16:40

9:30 開場

10:00 開会

第一セッション (座長: 松本 健司)

10:05-10:55 長山 雅晴 (北海道大学電子科学研究所)

樟脳円盤の集団運動と反応拡散系

10:55-11:45 行木 孝夫 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

複雑系と量子酔歩

第二セッション (座長: 山口 裕)

13:00-13:50 久保 英夫 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

拘束条件による機能分化の数理解モデルに関する考察

13:50-14:40 中村 文彦 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

ノイズが加えられた南雲・佐藤モデルの漸近的周期性

第三セッション (座長: 黒田 茂)

15:00-15:50 齊藤 朝輝 (はこだて未来大学システム情報科学部)

真軌道計算とカオス

15:50-16:40 中垣 俊之 (北海道大学電子科学研究所)

絨毛虫の学習行動

2/16 (木) 10:30~16:00

第一セッション (座長: 塚田 啓道)

10:30-11:00 藤堂 真澄 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

レビー小体型認知症の視覚性幻覚に関する数理モデル

11:00-11:30 渡部 大志 (北海道大学大学院理学院数学部門)

数学でニューロンをつくる

11:30-11:50 豊川 永喜 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

Absolutely continuous invariant measures for non-Markov fibred system
deriving from Banach limits

第二セッション (座長: 山口 明宏)

13:00-13:50 塚田 啓道 (沖縄科学技術大学院大学)

マーモセットの構造的・機能的 MRI データを用いた数理モデル

13:50-14:40 只木 孝太郎 (中部大学工学部)

An operational characterization of the notion of probability by
algorithmic randomness and its applications

最終セッション (座長: 行木 孝夫)

15:00-16:00 津田 一郎 (北海道大学大学院理学院数学部門)

脳と心の普遍言語: 数学の拡がりを目指して

16:00 閉会

世話人

黒田茂(北大)、佐藤譲(北大)、只木孝太郎(中部大)、田所智(北大)、塚田啓道
(OIST)、藤堂真澄(北大)、行木孝夫(北大)、松本健司(北大)、山口明宏(福工大)、
山口裕(福工大)、渡部大志(北大)

津田一郎教授は1993年10月に九州工業大学より北海道大学理学部数学科へ赴任され、以後、脳科学、複雑系科学、非線形物理学を切り開くバイオニアとして活躍されました。大学運営においても数学連携研究センター長をはじめとして北海道大学の数理科学研究のプレゼンスを確立する立場から深く貢献されました。近年はクレスト数学領域、ヒューマンフロンティアプロジェクト及び新学術領域研究を通して研究はもとより若手研究者の育成にも尽力されています。北海道大学の定年を機に中部大学創発学術院へ異動されますので、ゆかりのある方々に講演をいただいて記念研究集会を開催いたしました。本講究録はその記録として発行します。

世話役一同

編者：黒田茂、行木孝夫、山口明宏、山口裕

目次

脳と心の普遍言語：数学の拡がりを求めて	1
津田一郎（中部大学創発学術院）	
NOTE ON THE BODY-IMAGE TOWARD ITS MATHEMATICAL MODELING	11
Hideo KUBO (Department of Mathematics, Hokkaido University)	
テント写像の真軌道計算とその擬似乱数生成への応用	18
斉藤朝輝（公立はこだて未来大学システム情報科学部）	
複雑系と量子酔歩	24
行木孝夫（北海道大学大学院理学研究院数学部門）	
ノイズが加えられた南雲・佐藤モデルの漸近的周期性	34
中村文彦（北海道大学大学院理学院数学専攻）	
情報量最大化によるアンチヘブ則と幻覚	42
藤堂真登（北海道大学大学院理学院数学専攻）	
数学でニューロンを作る	48
渡部大志（中部大学創発学術院），伊藤孝男（北海道警察），津田一郎（中部 大学創発学術院）	
Absolutely continuous invariant measures for non-Markov fibred systems deriving from Banach limits	56
Hisayoshi TOYOKAWA (Graduate School of Science, Hokkaido University)	
マーモセットの構造的・機能的 MRI データを用いた数理モデル	62
塚田啓道（沖縄科学技術大学院大学）	

脳と心の普遍言語：数学の拡がりを探求めて

津田一郎 中部大学創発学術院

天地は万物の逆旅、光陰は百代の過客 (李白)

1 はじめに

上の李白の言葉は空間と時間の関係を端的に表している。私は、カオスと脳の研究を通じて特に時間に興味を持ってきた。研究や人生の骨格になった考え方は荘子の因循主義と万物斉同の原理である。前者は“自然に従う”、後者は“すべてのものは平等である”ということである。退職したら“竹林の七賢人”よろしく“竹林の一愚人”でありたいと思っていたが、縁あって中部大学に総長特区で出来た創発学術院でもうひと働きすることになった。北大には23年間お世話になったが、むろんベースは数学教室であった。途中他部局に一時的に移籍したが、マインドはいつも数学にあった。数学、特に非線形力学系、とりわけカオスを基盤にして脳科学の研究をしてきた。私のやってきた分野を一言で言えば、次の式で表される。

(カオス力学系+脳科学)ⁿ. ただし、 $n=0$ だとあまりにも悲しいし、 $n=1$ だとやはりさびしい。自分自身では $n \geq 2$ を目指し、 $n=2$ くらいはやれたのではないかと考えている。今後はもっと高次の非線形項が現れるようにしていきたいと思っている。

最終講義とつぎの日の退職記念ワークショップではともに学生のころの興味や大学院生のときに行ったB-Z(Belousov-Zhabotinsky) 反応の数学モデルと実験データにカオスを発見したこと、それが一次元写像の一径数族で見事に説明できたこと、さらに実験では未発見だった複雑な振動状態をパラメーター空間上に予測できたこと、それが実験家によって実証されたこと、B-Z反応に潜む周期解の構造をひとつのルールで表現できることを発見したこと、この一次元写像に外部ノイズを印加してnoise-induced orderを発見したことなどを述べた。

ワークショップ後に、うれしいニュースが入った。noise-induced orderがイタリア人とブラジル人の共同研究で証明されたのである。私たちが発見してから35年後である。ただし、証明されたのはリアプノフ指数がノイズの振幅を大きくしていくと正から負へ転移するという部分だけである。私たちはノイズによるK-S (Kolmogorof-Sinai) エントロピーの低下、ノイズによる軌道の局在も数値的には完璧に調べたのだが、これらについてはまだ証明されていない。若い数学者のチャレンジを待ちたい。

2 カオスの計算不可能性

最近ではカオスが当たり前の現象になり、脳科学でも神経科学者が力学系の諸概念やカオスという言葉を使うようになってきた。その反面、専門家がカオスの超越性について語らなくなってきたように思われる。ここで、復習しておくことも無駄ではないと考える。私自身の考え方の根底にこのカオスの計算不可能性がある。

1. 生成系：

ある初期値から出発した軌道を例えばマルコフ分割のような分割（生成分割）によって細胞に分割し各細胞に記号を与えることで、軌道の表現としての記号列を得る（記号力学系）。無限に長い記号列を得たとき初めて初期値を正確に知ることができる。

2. 擬軌道追跡性の破れ：

真のカオス軌道は擬軌道で追跡できる（擬軌道追跡性）という性質が破れる重要なカオス力学系が多く存在する：ロジスティック写像；エノン写像；それらをポアンカレ写像として持つベクトル場：例）レスラーモデル；ロレンツモデル、カオス遍歴を生成する力学系

3. 構造安定性が適用できないカオス力学系の族が存在：

- (1) あるカオス力学系の任意の近傍にはそれと位相共役な力学系が存在するが、数値計算ではそれらは全く性質が異なる解を持つ（例：ロジスティック写像やBZ写像の一径数族）。
- (2) 数値計算の結果として同じ位相的性質を持つカオス解に見えるが、位相共役でないようなカオス力学系が存在する（例：ロレンツ方程式やある種の神経方程式）。

これらのことから有限の計算のもとではカオスの認知に限界があることになり、無限を内包した数学理論によってのみ理解が得られることになる。また他方で、脳の中にカオス現象が発見されているので、脳の認知活動に対する認識には有限の立場、すなわち計算論の立場からは限界がある。そこで、カオスの持つ無限性を生かすには“カオスで脳の認知活動を見る”研究が有効だと考えた。

また、擬軌道追跡性にヒントを得て、力学系の記述安定性を定義した [1]。

2.1 記述安定性

まず近似可能性を定義し、そのうえで記述安定性を定義する。最初の二つはそれぞれ α 擬軌道と β 追跡の言い換えである。

定義：瞬間近似可能性

コンパクト空間 W 上の連続写像、 F と $\tilde{F}$ を考えよう。初期値 y_0 に対して、 $\{F^{(n)}(y_0)\}$ と $\{\tilde{F}^{(n)}(y_0)\}$ はともに W 上の軌道を表す。任意の i に対して、 $F \circ \tilde{F}^{(i-1)}(y_0)$ が $\tilde{F}^{(i)}(y_0)$ の

α 近傍にあるような α が存在するならば、 $(\tilde{F}, W)$ は (F, W) の α 程度の瞬間近似可能な力学系という。

定義：連続近似可能性

ある初期値 $x \in W$ に対して、任意の n で $F^{(n)}(x)$ が $\tilde{F}^{(n)}(y_0)$ の β 近傍にあるような $\beta > 0$ が存在するならば、 $(\tilde{F}, W)$ は (F, W) を β 程度に連続近似するという。

定義：集団近似可能性

二つの軌道の集合、 $\{F^{(n)}\}_n$ と $\{\tilde{F}^{(n)}\}_n$ の $\{\tilde{F}^{(n)}\}_n$ から見た $\{F^{(n)}\}_n$ へのハウスドルフ距離が十分近いとき、力学系 $(\tilde{F}, W)$ は力学系 (F, W) を集団近似するという。力学系 (F, W) は上の意味でのハウスドルフ距離が十分近い任意の力学系によって集団近似される時、集団近似可能な力学系といわれる。

定義：記述安定性

F と $\tilde{F}$ が連続写像として近傍にあり、 (F, W) が任意の $\tilde{F}$ に対して集団近似可能であるならば、力学系 (F, W) は記述安定であるという。

若干の応用については、拙著、「脳の中に数学を見る」[1]を参照してほしい。

3 カオスのメカニズムへのコメント

カオスのメカニズムについてもいまさらという感じがしないでもないが、知られているものをいくつか議論した。この中で、S. スメイルの馬蹄形写像による不変集合の典型例は J. ヨークらが提案した chaotic saddle であろう。馬蹄形写像によって作られる自明でない非遊走集合は不変集合としてのカントル集合であり、その上の運動がカオス的である。また、任意の周期の周期軌道、非周期軌道、自分自身に漸近する軌道の存在が証明される。ベクトル場のカオスモデルであるレスラーモデルやロレンツモデルから得られる解軌道の集合から確かにアトラクター上の領域が伸ばされ折りたたまれる、あるいは伸ばされカットされる様子が観測される。これは典型的な双曲型の馬蹄形写像の変換であるが、その不変集合は chaotic saddle である。レスラーモデルやロレンツモデルの不変集合とは異なっている。もちろん、このアトラクターの厚み方向はカントル集合が生じているはずだから、類似のことは起きているだろう。しかし、レスラーモデルなどは明らかに非双曲的な性質を持っている。上田アトラクターや池田アトラクターはポアンカレ写像上で馬蹄が散逸しないでそのまま残っている。なぜだろうか。

非双曲型カオス力学系は由利美智子 (例えば、[3]) や J. ペシン他によって研究されており、その典型例としてのエノン写像は荒井迅他によって研究されている。さらに、このクラスの力学系でさらに高次元のカオスを研究した。それがカオス遍歴である。高次元カオスは O. E. レスラーによって複数の独立な次元への折りたたみによって生じるカオスをハイパーカオスと呼んで数値的に研究された。ハイパーカオスは二つ以上の正のリアプノフ指数を持つようなカオスであり、一般的な概念である。私たちは、その中で、低次元のア

トラクター間のカオス的な遷移に着目し、これをカオス遍歴と呼んで研究した。カオス遍歴のリアプノフスペクトルの特徴はゼロ近傍のリアプノフ指数が多数現れると言ってよいかもしれない。

3.1 カオス遍歴のシナリオ

現在のところ、5つのシナリオを考えている [2]

シナリオ 1

三つ組み（カオス的な不変集合、ミルナーアトラクター、リドルドベイシン）はアトラクター痕跡間のカオス的遷移を生み出す。

ミルナーアトラクターはそれ自体が不変集合だから、そこからの遷移は外部からの摂動がなければ起こりえない。ノイズであるとか、他の力学系からの相互作用が遷移の引き金になる。GCMは結合力学系による摂動の典型例を与える [4]。また、ミルナーアトラクターは位相的な定義によるアトラクターを拡張する意図を持って導入されたが、ミルナーアトラクターでないが位相的にはアトラクターであるものや位相的にはアトラクターではないがミルナーアトラクターであるものが存在する。この論稿を通じて、位相的にはアトラクターではないミルナーアトラクターをとりあげている。

GCMは次のように定義される。 N 個の同一の一次元写像 $g^{(i)} : R \rightarrow R$ ($1 \leq i \leq N$) に対して、 $G : R^N \rightarrow R^N, x_{n+1} = G(x_n)$ が次によって決められる：

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)g^{(i)}(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{(N-1)} \sum_{j \neq i} g^{(j)}(x_n^{(j)}), \quad (1 \leq i \leq N), \quad (1)$$

ここで、 n は離散時間、 i, j は写像のインデックス、 N は要素写像の数である。

GCMは要素写像の入れ替え s に対して不変である。言い換えると、群作用 s は力学則 h と可換である： $hs = sh$ 。この意味で、GCMは対称な力学系である。この関係から、実際に力学則を働かせなくても、上の群に不変な集合を見つければそれがGCMの不変集合となる。次の命題が得られる。

命題 1

対称力学系 (M, h) において、群作用のもとで不変な集合は力学系の発展に対しても不変である。 [5].

証明は簡単なので省略する。

シナリオ 2

不動点のミルナーアトラクターが複数相互作用することでトーラスや局所的なカオス間のカオス的遷移が生み出される。

シナリオ 3

ヘテロ次元サイクルはカオス遍歴を生み出す可能性がある。

このシナリオは荒井迅氏のコメントをもとに考察した結果である。

シナリオ 4

法双曲型不変多様体はカオス遍歴を生み出しうる。

シナリオ 5

フラクタルなベイシン境界を持つミルナーアトラクターはノイズに誘起されたカオス遍歴を起こす。

4 脳の解釈学

4.1 脳の基本原理

脳研究を始めたとき、1. 脳とはどのような生物学的器官であるのか、2. その脳を研究するにはどのような方法論をとるべきか、の二点を考えた。詳しくは拙著「カオスの脳観」に譲るが、1. に対しては、脳は自ら作ったモデルを使って外界を解釈する器官である、という作業仮説を考えた。2. に対しては、解釈学的な方法論が必要だという考えに至った [6, 7]。

解釈の公理：感覚/知覚に関する公準

感覚情報は不完全であるので脳がこれらの情報を解釈し統一的な知覚世界を形成するためには条件が必要である。この条件は解釈学の先行的理解と等価である。

先行的理解の第一原理

脳は世界の内側にいながら世界の外から世界を観測できるようになる。主観と客観の共形成可能性。

先行的理解の第二原理

脳は物体の連続性、空間移動に対する不変性を獲得でき、それが普遍であることを知る。脳にとって物理学はアプリオリに真である— H. Poincare の仮説

視覚情報処理に関する基本先行的理解

第一：自己中心座標と物体中心座標の間に変換が存在する。主客変換。このとき、自己は境界に位置する。

第二：世界の境界は正曲率である。

第三：世界に存在する物体は円柱や球で近似できる（D. Marr の仮説）

第四：物体の一次変換に対して体性感覚で獲得される不変性は物体によらない普遍性を持つ。

第五：光は斜め上方から差し込む。

以上の基本的な原則をもとに、脳の高次機能、特に記憶のダイナミクス、思考・推論の脳活動ダイナミクスについてカオス力学系をもとに理論を構築し、またいくつかの数理モデルを提案してきた。特に脳研究に関しては、脳の五人組とさまざまな問題を議論し進めてきた。脳の五人組とは塚田稔、藤井宏、奈良重俊、合原一幸と筆者であり、脳のダイナミクスに興味のある研究者で1994年塚田の穂高山荘において結成された。当初は国内だけの活動であったがそれを徐々に海外に広げ、Dynamic Brain Forum(DBF)を開催してきた。海外ではこの5人組はJapanese Gang of Fiveと呼ばれた。この活動がもとになり、DBFに当初から参加していた中国人が中心となり、Cognitive Neurodynamicsという学術誌が発刊され、国際会議 ICCN が隔年で開催されるようになった。

4.2 記憶のダイナミクス

記憶の中でエピソード記憶、意味記憶、場所や時間に関する記憶は海馬という場所で形成過程が担われていることが分かっている。海馬 CA3 と大脳新皮質の局所的な神経回路構造は爬虫類から哺乳類への進化的な理由で大変似ていて、ともに興奮性細胞である錐体細胞の反回生回路（リカレントネット）に抑制性細胞がネガティブフィードバックをかけた構造になっている。私たちの1987年の論文 [8] 以前は記憶のモデルで抑制性細胞を導入したものではなく、初めての試みであったが、神経解剖学の多くの論文を読むことで、自信を持ってモデル化したが、この考えはいまや（私たちの論文を引用しないで）定番になっている。このとき記憶間のカオス的遷移現象を見つけていたが、これがきっかけで後に金子、池田他と討論して「カオス遍歴」という概念を協働で提唱することができた。1991年 [9] と1992年 [10] の論文には chaotic itinerancy という名称を使った。

短期記憶に関しては心理学の分野で G. ミラーによる“マジック数7プラス・マイナス2”が知られていた。瞬時に覚えられる数の桁数、瞬間的に物事をカテゴリーわけするときのカテゴリーの数、入れ子になった階層的な文章を読んだときに瞬時に理解できる入れ子の数などがこのクラスに入るといわれていた。私と J.S. ニコリスはカオス力学系からこの 7 ± 2 を導いた [11]。

海馬 CA1 へは CA3 からの一方向性の入力と CA3 を介さない直接的な入力がある。CA1 の回路構造を調べると、錐体細胞のリカレントネットはほとんどなく錐体細胞とそれを抑制する細胞のセットが CA3 からの情報を受け取る構造になっている。つまり、CA1 は状態空間が縮小する安定な回路であり、そこにエピソードの情報を持ったカオス的な入力が入ってくるということが予想された。つまり、力学系的な見方をすると、CA3 と CA1 の力学系を合成したものは斜積変換で記述される。カオスで駆動された縮小力学系の相空間にはカントル集合が現れるはずである。しかも、カントル集合の各点はカオス力学系が生成する各初期値から出発する異なるカオス軌道を表現している。脳の問題としては次のように言える。CA3 のカオス遍歴によって各事象間の遷移を解して事象列が生成される。これがエピソードの動的な表現である。これが CA1 において、カントル集合の各点にコードされる。時間情報が空間に変換された。私たちはデコードの方式も予測することができた。このことは、黒田茂、山口裕らとともに多くの論文で公表してきた [12]。福島康弘と塚田稔らによってラット海馬のスライス実験においてこのことは実証された。つまり、海馬は私たちの理論の通りエピソード記憶に対応する入力時系列をカントルコーディングする能力があるということは実証された。しかしながら、生きた動物や人においてエピソード記憶がどのように脳内表現されているかはまだ未解明である。

他方で、カオス遍歴による状態のカオス的遷移は W.J. フリーマンや L. ケイらがラビットやラットの嗅球ならびに嗅球—嗅皮質—嗅内野のようなにおい情報処理系において発見した。匂いに関する脳の電氣的活動に対応するアトラクターの間の遷移が未知の匂い入力やにおいを知覚し行動決定に向けての判断を行う過程で見いだされた。

また、最近では特別な入力が存在しないときでも脳は動的に働いていることが分かってきた。ある特定の入力が存在するときの脳活動の状態がある程度は同定されている。これをデフォルトモードということにすると、入力が存在しないときには、脳活動は異なるデフォルトモード間を複雑に遷移するようなダイナミックなものになる事が分かってきた。このダイナミクスがカオス遍歴のように見えるのである。詳細な研究が待たれる。

4.3 推論実験との関連で

思考・推論の数理理論の構築とそれに基づくニホンザルの推論実験を行った。理論に関しては、畠山元彦が動物実験の条件付き反応課題に関する実験をラティスの構造にあてはめることに成功し、それと動物実験で得られたニューロン活動の対応を得ることができた [13]。また、理論から得られた実験システムそれ自身の構造解析の結果と実際に実験で得られているニューロンの型を比較することで、実験では得られていない型のニューロンの存在を予測することができ、実際そのような型のニューロンが存在することが後に分かった。この理論をもとに、私たちはニホンザルの推論実験を行った。サルの推論実験を行うきっかけは塚田稔との議論であった。人間とサルの違いは何かという問いに答えるという形で私と塚田との間ではそれが推論形式にあるだろうという合意がなされ共同研究をすることに

なった。坂上雅道、シャオチャン・パン、塚田稔とともに実験を行い、報酬を手掛かりにすることでサルも因果的に推論を行うことが分かった。また、対応するニューロン活動も記録し、前頭葉背外側部にこれに関わる複数の型のニューロンが多数存在することが分かった [14]。この推論は次のようなものである。 A, B, C をそれぞれ異なるカテゴリーのパタンの集合としたとき、 $a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C, (i = 1, 2)$ に対して、 $a_i \rightarrow b_i$ と $b_i \rightarrow c_i, (i = 1, 2)$ を独立に学習させる。ただし、 c_1 には報酬を与え、 c_2 には報酬を与えない。これとは別に、 $b'_i \in B, (b'_i \neq b_i), c'_i \in C, (c'_i \neq c_i), (i = 1, 2)$ に対して、 $b'_i \rightarrow c'_i, (i = 1, 2)$ を学習させる。ただし、 c'_1 には報酬を与え、 c'_2 には報酬を与えない。このようにして、 $a_i \rightarrow c_i, (i = 1, 2)$ を実行するか否かを調べる。実際、サルはかなり高確率でこの試行を実行できることが分かった。

4.4 拘束条件付き自己組織化

脳のような生命系の機能発現の過程はどのような原理によって支配されているのだろうか。このような観点から自己組織化の問題を調べ直してみた。従来の自己組織化理論は、ミクロな原子分子の相互作用によってマクロな時空間の秩序形成が出現する原理に関するものであった。機能分化の問題はこれとは異なり、システムにある種の拘束条件が課せられた時にシステム内に機能部品が形成される問題である。すなわち、初めから部品の機能は決まっておらず、それは拘束条件を満足するようにシステムが発展した時に決まるような設定になっている。この理論を構築しようと試みているところである [15]。脳の機能モジュールの分化に関するモデル [16, 17] など、いくつかの準備的な数理モデルを構築しているところである。

また、一つの応用問題として、幻覚の神経機構の解明のための数理モデルを考えている。レビー小体型認知症の患者が特異的に見る幻覚として背景の視覚像とは相関のない人、虫、動物などの統一された明確な像が視野の一部（中心視野）にのみ繰り返し現れる幻覚がある [19]。この神経回路モデルを塚田啓道、藤井宏、合原一幸とともに構築した [18]。これを現在変分問題として研究している。

謝辞

京都大学物理学教室でカオスの研究を開始して、新技術開発事業団 ERATO プロジェクト、九州工業大学情報工学部、北海道大学数学教室、同電子科学研究所と色々な機関に所属して物理、数学、情報学、脳科学、哲学の融合する領域で研究ができたことは誠に幸運であった。素晴らしい師や諸先輩方、また優れた同僚、学生に恵まれた。これらの人たちに感謝したい。また、研究を支えてくださった秘書の方たち、また教室の事務の方たちにも感謝したい。これらの方たちのサポートがなければ研究は進まなかったことは間違いない。北大在籍時には新学術領域研究のような大型研究プロジェクトの領域代表をさせていただき、個人研究とはまた異なる面白さを味わわせていただいた。また、HFSPのよ

うな海外共同研究アワードもいただくことができた。数学と諸分野連携のために儀我美一先生と計画を立て、文科省やJ S Tの心ある官僚とともに奮闘したことも懐かしい。そのうちのいくつかは実を結んだが、まだまだ十分とは言えない。こういった研究とは別次元の活動はもともとあまり価値を置いていなかったが、やはり世界と日本のあまりの違いにいてもたってもいられなくなって行動を開始した。今、北大を去り中部大学に新設された創発学院に来て半年がたとうとしている。中部大学からCRESTを通すことができたことは新しい船出として最良のものとなりホッとしている。CRESTでは拘束条件付き自己組織化の問題を新しい人工知能につなげる研究をする計画である。数学を核として情報科学、脳科学、霊長類学、実験社会科学、ロボット工学を融合した研究を共同研究という形で行っていくことになった。新しい数学の芽が出れば最良であるが、そうでなくても数学が諸分野を有機的に、あるいは融通無碍につなぐ事ができる言語体系であることを示すことができればこれに勝る喜びはない。

参考文献

- [1] 津田一郎、脳の中に数学を見る、共立出版、2016年
- [2] I. Tsuda Hypotheses on the functional roles of chaotic transitory dynamics *CHAOS* **19** (2009)015113:1-10 (2009).
- [3] M. Yuri, Statistical properties for non-hyperbolic maps with finite range structure, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**(2000), 2369 - 2388.
- [4] K. Kaneko, Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements. *Physica D* **41** (1990) 137-172.
- [5] J. Buescu, *Exotic attractors: from Liapunov stability to riddled basins*. (Birkhäuser-Verlag, Basel, Switzerland, 1997).
- [6] A hermeneutic process of the brain *Prog.Theor.Phys.*, **Suppl.79**(1984), 241-259.
- [7] I. Tsuda, Toward an interpretation of dynamic neural activity in terms of chaotic dynamical systems. *Behavioral and Brain Sciences* **24** (2001) 793-847.
- [8] I. Tsuda, E. Kořner and H. Shimizu, Memory dynamics in asynchronous neural networks. *Prog. Theor. Phys.* **78** (1987) 51-71.
- [9] I. Tsuda, Chaotic itinerancy as a dynamical basis of Hermeneutics of brain and mind. *World Futures* **32** (1991) 167-185.

- [10] I. Tsuda, Dynamic link of memories—chaotic memory map in nonequilibrium neural networks. *Neural Networks* **5** (1992) 313-326.
- [11] J.S. Nicolis and I. Tsuda, Chaotic dynamics of information processing: The magic number seven plus-minus two revisited *Bulletin of Mathematical Biology*, **47**(1985) 343-365.
- [12] <http://www.isc.chubu.ac.jp/tsuda/>
- [13] M. Hatakeyama and I. Tsuda, Internal logic viewed from observation space: Theory and a case study *BioSystems* **90**(1)(2007)273-286.
- [14] X. Pan, K. Sawa, I. Tsuda, M. Tsukada and M. Sakagami, Reward prediction based on stimulus categorization in primate lateral prefrontal cortex *Nature Neuroscience* **11** (2008)703-712.
- [15] I. Tsuda, Y. Yamaguti and H. Watanabe, Self-Organization with Constraints—A Mathematical Model for Functional Differentiation. *Entropy*, **18** (2016)74:1-10.
- [16] Y. Yamaguti and I. Tsuda, Mathematical Modeling for Evolution of Heterogeneous Modules in the Brain, *Neural Networks*, **62** (2015)3-10.
- [17] Y. Yamaguti, I. Tsuda and Y. Takahashi, Information flow in heterogeneously interacting systems, *Cognitive Neurodynamics*, **8**(1) (2014)17-26.
- [18] H. Tsukada, H. Fujii, K. Aihara and I. Tsuda Computational model of visual hallucination in dementia with Lewy bodies *Neural Networks*, **62** (2015)73-82.
- [19] D. Collerton, J.-P. Taylor, I. Tsuda, H. Fujii, S. Nara, K. Aihara and Y. Katori, How Can We See Things That Are Not There? Current Insights into Complex Visual Hallucinations *Journal of Consciousness Studies*, **23**, No.7-8, (2016)195-227.

NOTE ON THE BODY-IMAGE TOWARD ITS MATHEMATICAL MODELING

HIDEO KUBO

ABSTRACT. This note reports our recent study concerning the body-image which is a high dimensional vector space, and whose element is a set of indices to be chosen for creating a peculiar motion. Our aim is to understand how we can make some motion by bottom-up algorithm. In other words, we wish to know how we can find a set of indices which create the desired motion. We try to explain the mechanism by using the stochastic feedforward model and the self-organizing map.

1. INTRODUCTION

In the field of mathematical science, one of the most interesting phenomenon is the self-organization, which leads to the emergency of order in various fields. It actually provides macroscopic orders as a result of the interaction among elements in the microscopic level, (Turing pattern, BZ reaction, Bernard convection are known as examples of the self-organization). In other words, the self-organization is a purely bottom-up process. Moreover, it helps us to understand the mechanism of such a phenomenon that appears without any top-down algorithm. However, we encounter different kinds of phenomena which cannot be explained by the principle of the self-organization in the usual sense. This observation is a starting point of an ambitious project with Professor Ichiro Tsuda. Of course, although the work has not yet been completed, the author would like to report the progress done for these years, on the occasion of his retirement from Hokkaido University.

Our target in this project consists of two folds which are closely related to each other. The one is the **functional differentiation**, such as the differentiation to the cerebral cortex, the frontal cortex, the cerebellum, etc. in the brain. The other is the **immediate adaptation**, which is a necessary ability in order to modify the ordered activity according to an unexpected stimulus or situation. The main feature of these phenomena is the presence of the interaction between the underlined system and its surroundings, in addition to the interaction among the elements belonging to the system. We name such

Key words and phrases. Body-image, Self-organization with constraints, Self-organizing maps.

The author was partially supported by Grant-in-Aid for Science Research (No.16KT0015), JSPS.

a kind of phenomenon “**Self-organization with constraints**” and try to understand its mechanism (see [5]).

To tackle the tough problem, we have built up an inter-disciplinary team. We wish to introduce the members and express the author’s gratitude to them. Professor Koh Hosoda is a specialist of humanoid robotics which moves by the air tube and has many sensors. Professor Makoto Nishibe studies the evolutionary economics, especially, the rule ecological dynamical system which involves the micro-meso-macro loop. These topics are mainly connected with the functional differentiation. Professor Yasuko Funabiki is a specialist of new characterization of autism, which tells us that the most essential difficulty for autism disorder is to adapt unexpected situation. Professor Johan Lauwereyns studies the relationship between animal’s decision and their learning by constructing a paradigm and making psychological experiment based on it. Professor Simona Settepanella studies the hyperplane arrangement which has an application on the decision making. These topics are strongly related to the immediate adaptation. We have developed mutual understanding and share the idea of the self-organization with constraints.

This note is organized as follows. In Section 2, we briefly review stochastic feedforward models based on the work of Todo [4]. In Section 3, self-organizing maps due to Kohonen is discussed. In Section 4, we try to apply these mathematical models to the body-image which is used to control of our own body. Some conjectures related to this attempt are also given. Section 5 is devoted to concluding remarks.

2. STOCHASTIC FEEDFORWARD MODELS

We are seeking for mathematical models of the self-organization with constraints. But constraints are assumed even for the standard self-organization. So, the point should be whether the constraint affects in the macroscopic level or not.

One important example has been obtained by a work of Todo [4]. More concretely, a learning process for a neural network (a stochastic feedforward model) was considered under some constraint on the mutual information. Mathematically speaking, a stochastic feedforward model is a map from $X = \{0, 1\}^M$ to $Y = \{0, 1\}^N$, where M and N are integers representing the number of neurons. The element $x = (x_1, \dots, x_M) \in X$ is a vector-valued random variable associated with the probability $P(x)$. For a given $x \in X$, the conditional probability for the i -th component y_i of $y \in Y$ is determined by

$$P(y_i|x) = f(x, y_i; \{w_{ij}\}),$$

where f is a suitably chosen function and w_{ij} ($1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$) are parameters to be reinforced, and for $y \in Y$

$$P(y|x) = \prod_{i=1}^N f(x, y_i; \{w_{ij}\}),$$

In addition, we have

$$P(x, y) = P(y|x)P(x), \quad P(y) = \sum_{x \in X} P(x, y).$$

Now we can define the mutual information between X and Y by

$$I(X, Y) = \mathbb{E}_x[-\log P(x)] + \mathbb{E}_y[-\log P(y)] - \mathbb{E}_{x,y}[-\log P(x, y)],$$

where $\mathbb{E}_x$ denotes the expectation value, i.e.,

$$\mathbb{E}_x[-\log P(x)] = \sum_{x \in X} -P(x) \log P(x),$$

for instance.

In his model, the function f is defined by

$$f(x, y_i; \{w_{ij}\}) = \frac{1}{1 + \exp(-(2y_i - 1) \sum_{j=1}^M w_{ij} x_j)}.$$

Besides, the following consuming energy for firing taken into account of the definition of the cost function $L(X, Y)$:

$$E(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N P(y_i = 1) \right)^2.$$

In fact, our problem is described as the maximization of the mutual information $I(X, Y)$ keeping the consuming energy $E(X, Y)$ to be low, so that the cost function would be

$$L(X, Y) = I(X, Y) - \lambda E(X, Y),$$

where λ is a parameter. To realize this, we reinforce the parameters $\{w_{ij}\}$ by

$$(1) \quad w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t + \alpha \frac{\partial L(X, Y)}{\partial w_{ij}}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

where $\alpha (\geq 0)$ is the rate of study.

It is of our special interest that the combination $(x_j, y_i) = (1, 0)$ enhances the effect of the gradient of the cost function $\frac{\partial L(X, Y)}{\partial w_{ij}}$ in (1), while $(x_j, y_i) = (1, 1)$ does not, so that the learning process can be viewed as the anti-Hebb rule. Indeed, one can computed the gradient as

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L(X, Y)}{\partial w_{ij}} \\ &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} (2y_i - 1) x_j P_i(x, y) f(x, y_i; w_{ij}) (1 - f(x, y_i; w_{ij})) \log \left(\frac{P(y)}{P(x, y)} \right), \end{aligned}$$

where we put $P_i(x, y) = \prod_{k \neq i} f(x, y_k; \{w_{kj}\}) P(x)$.

Moreover, he found by the aid of computer simulation that the learning scheme (1) stabilize as t becomes large enough in such a way that for the

same input $x \in X$, one receives the same output $y \in Y$ almost surely, that is, $P(y|x) \sim 1$.

3. SELF-ORGANIZING MAPS

As a simple model, which leads to the functional differentiation, we focus on the self-organizing map introduced by Professor Kohonen. His idea is to mimic the function of the brain by using the artificial neural net, instead of trying to understand the real mechanism of the brain. Specifically, we mimic how the human recognizes objects in real world. To identify some object, we use information on the properties of the object. If we wish to have more subtle identification, we need more information about its properties. By regarding the set of properties as a N -dimensional vector with N being large enough, this cognition process can be characterized by such a map that similar objects $x, x' \in \mathbb{R}^N$ are sent to positions which are close to each other. In particular, the self-organizing map $S : \mathbb{R}^N \rightarrow \Gamma \times \mathbb{R}^N$ is constructed in the following manner, where $\Gamma = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i, j \leq M\}$ with an integer M .

Suppose that we have a large number of input data: $x(0), x(1), \dots, x(T) \in \mathbb{R}^N$. Here T stands for the number of trials. For each $z \in \Gamma$ and $t = 0, 1, \dots, T$, we associate a reference vector $m(z, t)$ as follows: The initial values of $m(z, 0)$ are freely chosen. For a given $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$), let $c(t) \in \Gamma$ be a victory position determined by

$$c(t) = \operatorname{argmin}\{|m(z, t) - x(t)| : z \in \Gamma\}.$$

Then we inductively define reference vectors $m(z, t)$ by

$$(2) \quad m(z, t) = m(z, t-1) + \alpha(1 - \frac{t}{T})h(z, c(t-1))(x(t-1) - m(z, t-1)),$$

for $z \in \Gamma, t = 1, 2, \dots, T$,

where $\alpha \in (0, 1)$ is the rate of study, and

$$h(z, c(t)) = \begin{cases} \exp(-\frac{|z - c(t)|^2}{r(t)^2}) & \text{if } |z - c(t)| < r(t), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

with $r(t) = r_0(1 - \frac{t}{T})$. This means that we modify the values of $m(z, t)$ only when z is close to the victory position $c(t-1)$. Finally, the map S is defined by $S(\{x(t)\}_{t=0}^T) = (c(T), m(c(T), T))$.

It should be noticed that in the above scheme, there exists freedom to choose the distance between the reference vector $m(z, t)$ and the input $x(t)$ (or to choose the divergence used in the information geometry, instead of the distance). We also remark that $m(z, t)$ plays a similar role to $w_{i,j}^t$ appeared in the model due to Todo [4] (see (1) and (2)). Both factors serve to make the underlined system to be optimized so that we have a “stable output” for the same input. However, this kind of method related to the gradient of some functional has an essential difficulty called “trapping of the local minimum”. This means

that the reinforcement procedure of $\{m(z, t)\}$ or $\{w_{i,j}^t\}$ may fail to arrive at the global minimum and that the system might not give any proper response. It's a big issue in mathematics, but there exist arguments which allow us to avoid such a problem at least on the practical level. For instance, global optimization algorithm based on the probability theory is one of the practical ways (see, e.g., [4]). Simulated annealing is also one way, but its convergence is rather slow in general. (see, e.g., [2]). Another kind of approach has been done by a work of Sumiya, et all [3], in which local minimum are regarded as vortices of a graph and are connected by edges with some weight of the graph. The weights are determined by taking into account of the transition rate, that is, how often the state in the local minimum transfers to other local minimum connected by the edge. They proposed an algorithm to contract the graph by neglecting some vortices from which the state can be escaped easily. Professor Settepanella and her corroborators studied similar problems related to decision making in more theoretical way. We hope that rather clear picture around this issue will be obtained in near future.

4. BODY-IMAGE

As an application of the stochastic feedforward model and the self-organizing map, we consider the body-image. To make some motion, say, throwing a ball, pushing a door, or just walking, we need to adapt many indices in a suitable way. Indeed, to throw a ball, we should to decide how high we lift our arm up, how fast we move our arm forward, in which point we release the ball, and so on. One can regard a set of these indices as a data in a cyber space or in a vector space with large number of dimensions. In this way, we have a correspondence between the data in the cyber space and actions in the physical space:

$$\boxed{\text{Cyber space (Data)}} \longrightarrow \boxed{\text{Physical space (Action)}}$$

We have already known which data leads to some desired action through experience. By using the knowledge, it's possible to teach children or robots how they make some task to be successful by top-down algorithm. This type of process is called "supervised learning".

On the other side, we learn many things by ourselves. As a particular example, let us imagine how babies are able to recognize efficient way of their own bodies for moving forward, rolling, and so on. This process is called "unsupervised learning" and is organized by bottom-up algorithm.

Conjecture 1. To identify some data in the cyber space for a specific action, we use a stochastic feedforward model.

On the other hand, we underline that it would be inconvenient to find a desired data in the cyber space, because similar actions may not correspond to close points in the cyber space. This may cause a problem for our brains, because their resource is strictly limited. For this reason, the self-organizing

map comes into play. In fact, the self-organizing map has a function to extract feature of objects so that the corresponding data for similar objects are sent to close positions. We wish to name the image of the self-organizing map the “**dual cyber space**”, because its elements have a relationship with objects in the real world, although it is still in a virtual space.

$$\boxed{\text{Dual cyber space (Feature)}} \longleftarrow \boxed{\text{Cyber space (Data)}}$$

The advantage to create the dual cyberspace is to diminish the load of brains, provide the following conjecture is true.

Conjecture 2. If we could suitably construct a self-organizing map, then the dual cyber space associated with the map has nice correspondence to objects. In other word, we can construct a kind of inverse of the stochastic feedforward model.

It seems quite difficult to check whether such a correspondence exists in our brains or not. But we will be able to check Conjecture 2 by using humanoid robots which are produced by the laboratory of Professor Hosoda. Actually, for some action, the data of indices such as pressure of the muscle, velocity, angle, and so on can be collected. Based on those data, we shall find a suitable distance which determine a self-organizing map so that it is an inverse of the stochastic feedforward model.

Up to now, we have not yet considered any feedback mechanism. Let us turn to the example of babies and discuss a bit on this issue. Suppose that s/he wants to do some specific action. Then, according to Conjecture 2, s/he need to choose a corresponding feature in the dual cyber space so that the corresponding data to the action in the cyber space can be found. However, the choice does not always lead to the desired action due to some error in the stochastic feedforward model. In such a case, we have to modify the correspondence between a data in the cyber space and an action in the physical space. Moreover, if the baby grows up, then the established correspondence may not work well. Therefore, we need to consider feedback mechanism to solve this type of problems. It would be useful to adapt an idea of the rule ecology dynamics proposed by Professor Nishibe. To realize the feedback mechanism in our attempt is quite important for understanding the plasticity.

5. CONCLUDING REMARKS

In this note we first summarize the stochastic feedforward model and the self-organizing map. Based on these notion, we try to understand how we can make some motion as we wish. A basic idea for this question is to construct an inverse of the stochastic feedforward model as a self-organizing map. In addition, we wish to find mechanism of plasticity by using the rule ecology dynamics. Once these attempts are affirmatively established, we could apply the result not only to the motion but also to the psychological problems, say,

the reinforcement study with exploration studied by Professor Lauwereyns, and the adaptation to the real world for autisms studied by Professor Funabiki.

We believe that our attempt will be useful to get the description of the functional differentiation and the immediate adaptation, although many steps are still left in front of us. The importance of the problem for trapping the local minimum is also pointed out. We hope that all these interesting problems will be solved in collaboration of our team.

REFERENCES

- [1] H. Imai, H. Konno, N. Takahashi, *Global optimization algorithms based on multistart local search (1)* (in Japanese) , Journal of Hokkaido University of Education (Natural Sciences), **58** (2008), 1-10
- [2] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr, M. P. Vecchi, *Optimization by Simulated Annealing*, Science, 220 (1983), 671680.
- [3] Y. Sumiya, Y. Nagahata, T. Komatsuzaki, T. Taketsugu, S. Maeda, *Kinetic Analysis for the Multistep Profiles of Organic Reactions: Significance of the Conformational Entropy on the Rate Constants of the Claisen Rearrangement*, The Journal of Physical Chemistry A, **119** (2015), 11641-11649.
- [4] M. Todo, *A Mathematical Model for Complex Visual Hallucination* (in Japanese), Master Thesis in Hokkaido University (2017).
- [5] I. Tsuda, *Self-Organization with Constraints A Mathematical Model for Functional Differentiation* , Entropy, **18** (2015), 74.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO 060-0810, JAPAN

E-mail address: kubo@math.sci.hokudai.ac.jp

テント写像の真軌道計算とその擬似乱数生成への応用

齊藤 朝輝 *

公立はこだて未来大学システム情報科学部

概要. 我々が提案した区分的線形写像および区分的 1 次分数写像の真軌道計算法を用いることにより, テント写像のカオス的な真軌道が得られることを示す. また, テント写像の真軌道を使った擬似乱数生成についても紹介する.

1. はじめに

カオス系の特徴は, 微視的スケールでの摂動が, 巨視的スケールでの系の振る舞いに大きな影響をあたえることである. そのような対象を, 数学的方法のみによって理解することは通常難しく, シミュレーションを使った研究が広く行われている. 一方, シミュレーションでは, 通常, 実数は倍精度浮動小数点数などの有限桁の数で近似的に表現される. もしくは, 任意精度の有理数で表現されることもある. これらの数表現の使用によって様々な問題が生じることが知られている (例えば, 文献 [1] 参照). ここではその一例として, テント写像のカオス的軌道が生成できないことを見てみよう.

テント写像とは,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \in [0, 1/2] \\ -2x + 2 & \text{if } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

が定める単位閉区間 $[0, 1]$ 上の写像のことである (Fig. 1). 倍精度浮動小数点数を使ってテント写像の軌道を生成すると, Fig. 2 のような結果が得られる. Fig. 2 では, n に対して $x_n = T^n(x_0)$ をプロットしている. ただし, x_0 を $(\sqrt{5} - 1)2^{-1}$ に対応する倍精度浮動小数点数とし, 倍精度浮動小数点演算を使って x_n ($1 \leq n \leq 200$) を計算している. 生成された軌道は $n \geq 50$ で $x_n = 0$ となるが, これはテント写像の固定点 $x = 0$ に対応する終局固定点 (eventually fixed point) が $[0, 1]$ 内の有限 2 進小数と一致するためである. 同様に, テント写像の終局周期点 (eventually periodic point) は $[0, 1]$ 内の有理数と一致するため, 任意精度有理数を使って軌道を生成しても, 得られる軌道は最終的に周期的となる. この

* saito@fun.ac.jp

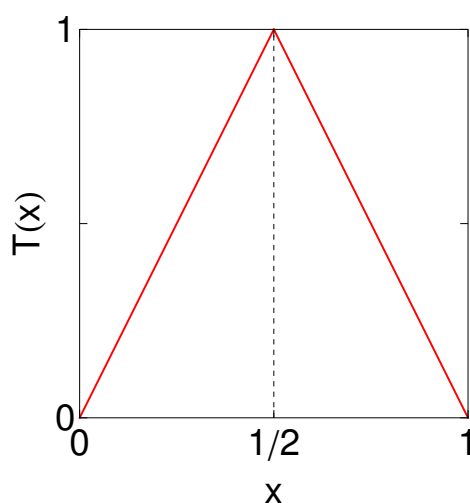


Fig. 1. テント写像

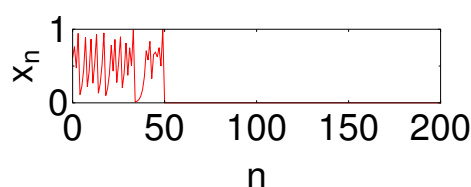


Fig. 2. 倍精度浮動小数点数を使って生成したテント写像の軌道

ように、テント写像はカオス写像の教科書的な例であるにもかかわらず、倍精度浮動小数点数や任意精度有理数を用いる従来のシミュレーション法では、カオスの軌道を生成できない。

一方、我々は、2 次以上の代数的数を使って、有理数係数の区分的線形写像および区分的 1 次分数写像の真軌道を計算する方法を構築した [2,3]。2 次以上の代数的数も有理数（つまり、1 次の代数的数）と同様、計算機で正確に表現でき、また四則演算を計算機で正確に実行できるため、これらの写像の真軌道生成に用いることができる。特に、テント写像のような区分的線形写像の場合には、2 次無理数を使えば、非周期性を保証できることはもちろん、生成された真軌道が典型的な軌道と同じ統計的性質を示すことも実験的に確認できている。テント写像は、0 と 1 に $1/2$ の重みをのせた $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の片側 Bernoulli シフトと、測度論的力学系として同型である。つまり、テント写像は、公平なコイン投げから得られるビット列と等価なビット列を生成できる。よって、テント写像のカオスの真軌道を用いることにより、統計性の極めて良い擬似ランダムビット列が得られると期待できる。

この論文の前半では、2 次無理数を使って、テント写像のカオスの真軌道を生成する方

法について紹介する．また，この論文の後半では，テント写像のカオス的軌道の応用として，擬似乱数生成を扱う．

2. テント写像のカオス的軌道の計算

テント写像のカオス的軌道を計算する最も簡単な方法として，2 次代数的整数を用いる方法を紹介する．2 次代数的整数とは，最高次係数 1 の 2 次既約多項式 $X^2 + bX + c$ (ただし， $b, c \in \mathbb{Z}$) の根となる複素数のことである．テント写像は，単位開区間 $(0, 1)$ 内の 2 次代数的整数を $(0, 1)$ 内の 2 次代数的整数にうつす．ここで，次の事実が成り立つ [4]．

事実 1 $X^2 + bX + c$ ($b, c \in \mathbb{Z}$) の 1 つの根 α が単位開区間 $(0, 1)$ に含まれるとする．このとき， α の次数は 2 (つまり， α は 2 次代数的整数) で， α の共役元 α^σ は $\alpha^\sigma \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ となる．

事実 1 にもとづいて，真軌道および擬似乱数の生成に用いる数表現を導入する． S を $(0, 1)$ 内の 2 次代数的整数の集合とする．また， $\bar{S}$ を $c > 0$ かつ $1 + b + c < 0$ ，もしくは， $c < 0$ かつ $1 + b + c > 0$ をみたす $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ の集合とする (Fig. 3)． $f(X) = X^2 + bX + c$ (ただし， $(b, c) \in \bar{S}$) は， $\text{sgn } f(0) \neq \text{sgn } f(1)$ となるため， $(0, 1)$ 内に重複度 1 の根を 1 つだけもつ．事実 1 から，

- $(b, c) \in \bar{S}$ に対して， $X^2 + bX + c$ の根となる $\alpha \in S$ が一意に定まる
- この対応によって定まる $\bar{S}$ から S への写像 π が全単射となる

ことが容易にわかる．以下では， $\alpha \in S$ を， $(b, c) = \pi^{-1}(\alpha) \in \bar{S}$ で表現することにする．

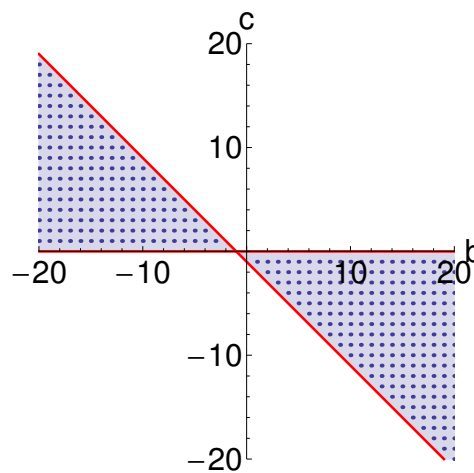


Fig. 3. 集合 $\bar{S}$ (点は $\bar{S}$ の要素を表す)

S 上のテント写像の真軌道を生成するためには, $(b, c) \in \bar{S}$ で表現される $\alpha \in S$ が 2 つの区間 $(0, 1/2)$ と $(1/2, 1)$ のどちらに所属するかを, 正確に判定する必要がある. このような区間判定は, $\operatorname{sgn} f(0)$ と $\operatorname{sgn} f(1/2)$ を評価することにより, 簡単に実行できる. 実際, $\operatorname{sgn} f(0) \neq \operatorname{sgn} f(1/2)$ ならば $\alpha \in (0, 1/2)$, $\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} f(1/2)$ ならば $\alpha \in (1/2, 1)$ となる. このような区間判定は有理数演算のみを使って正確に実行できる.

S 上のテント写像に対応する $\bar{S}$ 上の変換 $\bar{T} = \pi^{-1} \circ T \circ \pi$ が次式であたえられることは容易にわかる.

$$\bar{T}(b, c) = \begin{cases} (2b, 4c) & \text{if } \pi(b, c) \in (0, 1/2) \\ (-2b - 4, 4b + 4c + 4) & \text{if } \pi(b, c) \in (1/2, 1) \end{cases}.$$

結局, α の表現 (b, c) に, 整数演算のみを使って計算可能な上記の変換を施すことによって, $T(\alpha)$ の表現 $\bar{T}(b, c)$ が得られる.

例として, $x_0 = (\sqrt{5} - 1)2^{-1}$ (つまり, $(b_0, c_0) = (1, -1)$) から始まるテント写像の真軌道を生成する場合を考えよう. この真軌道計算の始めの段階を Table 1 に示す. 各 $(b_n, c_n) = \bar{T}^n(b_0, c_0)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対して多項式 $f_n(X) = X^2 + b_n X + c_n$ が定まり, この f_n は $(0, 1)$ 内に唯一の根 x_n をもつ. 数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ はテント写像のダイナミクスに従う. こうして得られたテント写像の真軌道を, Fig. 4 に表示する. 我々の方法によって, テント写像のカオス的な真軌道を生成できることがわかる (Fig. 2 と比較のこと).

Table 1. 真軌道計算の例. 初期条件は $(b_0, c_0) = (1, -1)$.

n	(b_n, c_n)	$f_n(X)$	x_n	ϵ_n
0	(1, -1)	$X^2 + X - 1$	0.618034	1
1	(-6, 4)	$X^2 - 6X + 4$	0.763932	1
2	(8, -4)	$X^2 + 8X - 4$	0.472136	0
3	(16, -16)	$X^2 + 16X - 16$	0.944272	1
4	(-36, 4)	$X^2 - 36X + 4$	0.111456	0
5	(-72, 16)	$X^2 - 72X + 16$	0.222912	0
6	(-144, 64)	$X^2 - 144X + 64$	0.445825	0

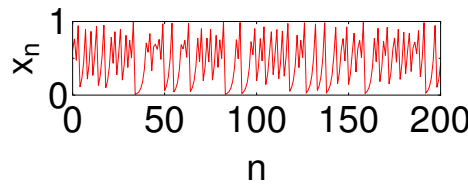


Fig. 4. 2次無理数を使って生成したテント写像の軌道

3. テント写像の真軌道を使った擬似乱数生成

前章でみたように，テント写像の真軌道を生成するには区間判定を行う必要がある． $(b_n, c_n) \in \bar{S}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で表現される $x_n \in S$ が区間 $(0, 1/2)$ に含まれる場合には $\epsilon_n = 0$ ，そうでない場合には $\epsilon_n = 1$ とすることで擬似ランダムビット列 $\{\epsilon_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ が得られる (Table 1 参照)．

$(b_0, c_0) \in \bar{S}$ で表現される x_0 は有理数ではないため， $\{\epsilon_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ の非周期性は保証される．その意味で， $\bar{S}$ の全ての要素は擬似ランダムビット列を生成するための初期点 (seed) として使用できる．

複数の擬似ランダムビット列を生成する場合には，初期点の集合 $\bar{I} \subset \bar{S}$ を用意する必要がある．文献 [4] では，初期点集合として，以下の $\bar{I}_b$ ($b \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 0\}$) を導入した． $b \geq 1$ のとき，

$$\bar{I}_b = \{(b, c) \in \bar{S} \mid -b \leq c \leq -1\}.$$

$b \leq -3$ のとき，

$$\bar{I}_b = \{(b, c) \in \bar{S} \mid 1 \leq c \leq -b - 2\}.$$

この $\bar{I}_b$ に対応する $I_b = \pi(\bar{I}_b) \subset S$ は，初期点集合として以下の良い性質をもつ．

性質 1: b の絶対値が十分大きければ， I_b の要素は単位区間内をほぼ一様に分布する

性質 2: I_b の要素はそれぞれ異なる 2 次体に所属する (つまり， $\alpha, \beta \in I_b$ かつ $\alpha \neq \beta$ ならば， $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ となる)

性質 1 は， I_b の要素が偏りなくサンプルされていることを意味しており，モンテカルロ法などへの応用の面でも望ましい性質と言える．性質 2 は， I_b から得られるビット列同士は，以下の意味で非常に異なることを意味する． F を有理数係数有理関数の集合 (ただし， I_b の要素を有理数にうつす有理関数は除く) とする．性質 2 より， $\alpha, \beta \in I_b$ かつ $\alpha \neq \beta$ ならば，任意の $f, g \in F$ に対して $f(\alpha) \neq g(\beta)$ となる．つまり， F の元で表現可能な任意の操作をビット列に施しても，同じビット列を得ることはない．このような操作は， T^n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で表現可能な n ビットシフト操作以外にも様々な操作を含む．

実際に，我々の方法を使って長さ 10^6 の擬似ランダムビット列を 10^3 個生成し (初期点集合としては， $\bar{I}_{1000}$ を用いた)，米国国立標準技術研究所が公開している乱数検定ソフトウェアツール (NIST statistical test suite, ver. 2.1.2) [5] を使って評価した．結果として，合格率および P 値の一様性に関する 2 次検定には全て合格し，生成された擬似乱数が真の乱数と異なる統計性をもつことを示唆する結果は得られなかった．この意味で，テント写像の真軌道を使った擬似乱数の統計性は良好であると言える．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP15K00342 の助成を受けたものです．

参考文献

- [1] E. Atlee Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991), Vol. 1, Chap. 4.
- [2] A. Saito and S. Ito, Computation of true chaotic orbits using cubic irrationals, *Physica D* **268**, 100–105 (2014).
- [3] A. Saito, S. Yasutomi, J. Tamura, and S. Ito, True orbit simulation of piecewise linear and linear fractional maps of arbitrary dimension using algebraic numbers, *Chaos* **25**, 063103 (2015).
- [4] A. Saito and A. Yamaguchi, Pseudorandom number generation using chaotic true orbits of the Bernoulli map, *Chaos* **26**, 063122 (2016).
- [5] A. Rukhin, J. Soto, J. Nechvatal, M. Smid, E. Barker, S. Leigh, M. Levenson, M. Vangel, D. Banks, A. Heckert, J. Dray, and S. Vo, A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications, NIST Special Publication 800-22 Revision 1a (2010).

複雑系と量子酔歩

行木孝夫

北海道大学 大学院理学研究院 数学部門

nami@math.sci.hokudai.ac.jp

1 概要

量子酔歩（量子ウォーク）は通常の酔歩に相当する量子系である。当初は量子ランダムウォークと呼ばれていたものが量子ウォークと呼ばれるようになった。歴史的には、量子ウォークの研究は2000年代初頭の Ambainis 等による先駆的な研究を嚆矢とする。筆者は今野らと共同で Hadamard ウォークの初期条件と対称性に関する結果 [3] を得た。今野の極限定理 ([2]) は通常の酔歩に対する大数の法則と中心極限定理に相当する。大偏差原理に相当する結果は砂田及び楯によって得られ ([4])、レートの評価には Airy 関数が現れる。量子ウォークは通常の酔歩とは異なる量子確率論的あるいは数理物理的な対象としても重要性は増している。一方で、通常の酔歩を量子ウォークとして与えた例は知られていない。本稿では、量子ウォークによって通常の酔歩をを実現する例を挙げ、古典近似に相当する量子ウォークの族を与え、主結果の概要を示す。

2 量子ウォーク

例として1次元格子上的量子ウォークを考える。1次元格子上に複素数成分2次元ベクトル $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}, v_k \in \mathbb{C}^2$ を与える。初期状態 $v^0 = (v_k^0)$ を $v_0^0 = {}^t(\alpha, \beta)$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $v_k^0 = {}^t(0, 0)$ ($k \neq 0$) とおく。次のようにユニタリな時間発展を定義する。

U を 2×2 のユニタリ行列とする。 U は $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = 1$ によって $U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$ または $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ と書ける。

U から派生する P, Q を次のように与える。

$$P := U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q := U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

あるいは、

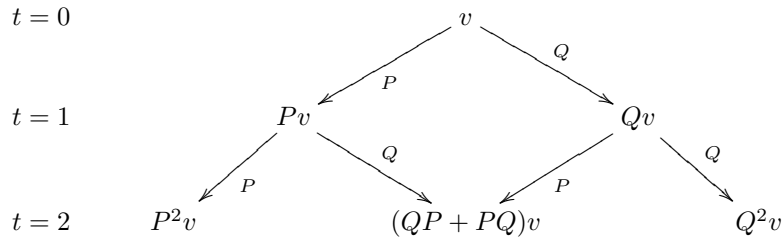
$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U, Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

P, Q によって初期状態 v^0 の時間発展を次で定める。

$$v_k^{t+1} := Pv_{k+1}^t + Qv_{k-1}^t.$$

各 t について X_t を $Prob(X_t = k) := |v_k^t|^2$ と定める。この X_t を U が駆動する 1 次元格子上の 2 状態量子ウォークとよぶ。初期状態と P, Q の構成から $\sum_k |v_k^{t+1}|^2 = \sum_k |v_k^t|^2$ が成立し、時刻 t で確率変数 X_t を定義していることは直ちに確かめられる。

実際、次のように時間発展を記述できる。 P と Q の非可換性から通常の酔歩とは異なる挙動が現れる。



以上の量子ウォークの定義は、通常の酔歩 $p_k^{t+1} = pp_{k+1}^t + (1-p)p_{k-1}^t$ に相当するユニタリなモデルである。この意味で量子ウォークと呼ぶ。一方、定義の中にランダムな項は入っていないことに注意してほしい。量子酔歩はユニタリな決定論的ダイナミクスによって定義されるものである。

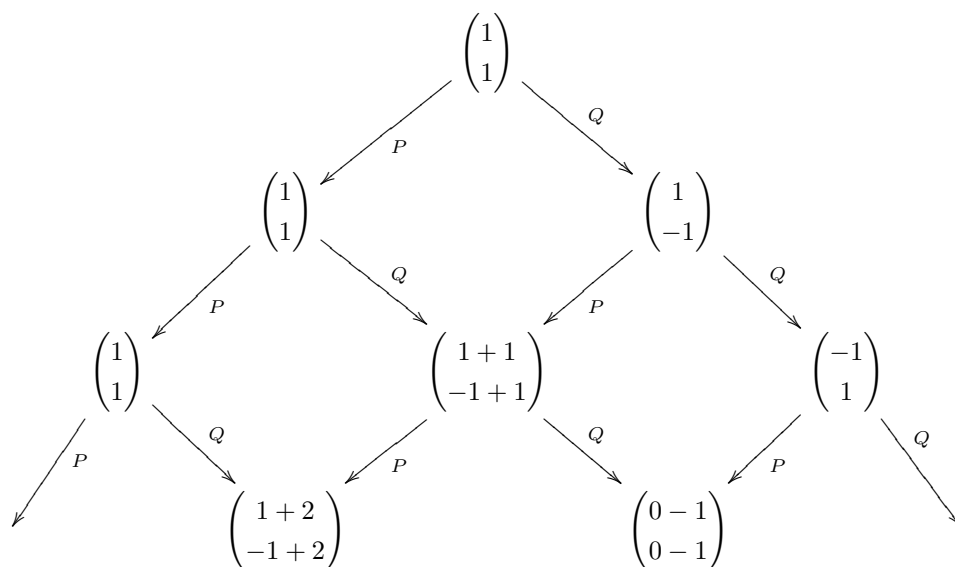
具体的に U を Hadamard 行列として実際の量子ウォークのダイナミクスを観察しよう。

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし、 P, Q は

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

とおく。初期条件は $v_0^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。 P, Q による量子ウォークを 3 ステップ走らせると次図のように時間発展する。ただし、見やすくするために各 t について $\sqrt{2}^{-t}$ を省略した。



さらに長時間の挙動を観察すると図1のように通常の酔歩とは全く異なっている。二箇所に密度関数の発散する点が見られ、その間は振動項が現れる。発散する点の外側は指数関数的に減衰しているように見える。

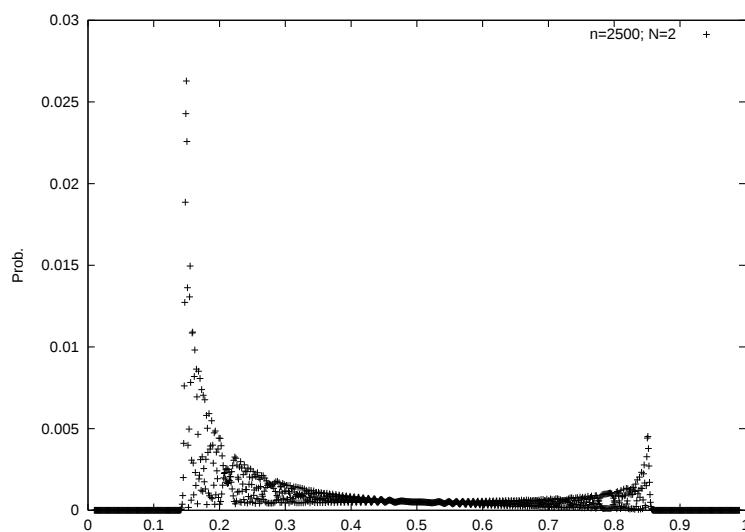


図 1: Hadamard 行列による量子ウォークを初期条件 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1/\sqrt{2})$ として 256 ステップ走らせた後に観察できる確率密度関数。縦軸は $Prob(X_t = k)$ を表す。

このような量子ウォークの長時間経過した挙動に関しては内部自由度が2の場合（2状態の場合）について一般のユニタリ行列 U に対する極限定理が今野 ([2]) によって得られている。通常の大数の法則、中心極限定理とは異なるスケーリングによる極限定理である。

3 問題と動機

前節で見た通り、量子ウォークとはあるヒルベルト空間上のユニタリなダイナミクスである。そこにランダムな構成要素は存在しない。では、ヒルベルト空間を何らかの相空間の上に定義される関数空間として、相空間上のダイナミクスが量子ウォークを定めることはできるだろうか。同時に、ヒルベルト空間を上のように与えることで、通常の酔歩を実現する量子ウォークを定義できるだろうか。さらに、これらの問題を解決したとして古典近似に相当する量子ウォークの族は存在するだろうか。本稿では、この3つの問題を事例を与えることで肯定的に解決する。

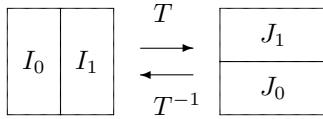
4 パイこね変換の誘導する量子ウォークと単純酔歩

まず、カオス的力学系（一様双曲的力学系）の一つであるパイこね変換を定義する。パイこね変換とは I^2 上の可逆変換 T を次のように定義して定まる力学系である。

定義 4.1 (パイこね変換) 次で与える $T : I^2 \rightarrow I^2$ をパイこね変換とよぶ。

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2) & (x \in I_0 = [0, 1/2]) \\ (2x - 1, (y + 1)/2) & (x \in I_1 = [1/2, 1]) \end{cases}$$

パイこね変換が I^2 に作用する様子は I^2 を下図のように分割して $J_0 = TI_0$, $J_1 = TI_1$, $I_0 = T^{-1}J_0$, $I_1 = T^{-1}J_1$ となっている。 x 方向については2倍に拡大的、 y 方向については $1/2$ で縮小的である。



パイこね変換はルベグ測度を保存するから、通常の内積のもとに $L^2(I^2)$ 上のユニタリ変換を $U_T f(x) := f(Tx)$ で定義することができる。従って、量子ウォークの定義に必要な P_T および Q_T を U_T から $P_T f := U_T(1_{J_0} f)$, $Q_T f := U_T(1_{J_1} f)$ として与えられる。

初期条件を $v_0^0 = 1_{I^2}$ および $v_k^0 = 0$ ($k \neq 0$) とすることで量子ウォークの基本的な定義に従って次の時間発展を定めることができる。

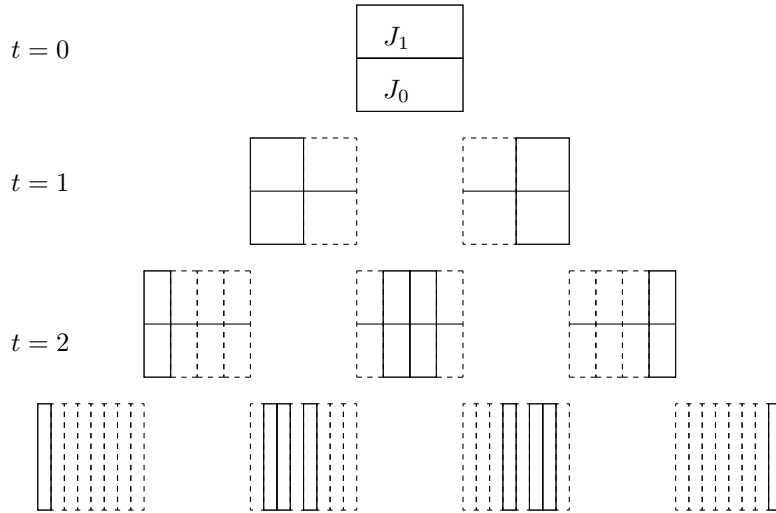
$$v_k^{t+1} := P_T v_{k+1}^t + Q_T v_{k-1}^t$$

確率変数 X_t は L^2 ノルム $|\cdot|$ により $Prob(X_t = k) = |v_k^t|^2$ で定義しよう。

U_T の定める量子ウォークによって、 I^2 を分割した長方形 J_0, J_1 は P_T, Q_T の作用によって細分された長方形に変換される。

$Prob(X_t = k)$ は次の通り具体的に求めることができる。

$$\begin{aligned} |v_k^{t+1}|^2 &= |P_T v_{k+1}^t + Q_T v_{k-1}^t|^2 = |P_T v_{k+1}^t|^2 + |Q_T v_{k-1}^t|^2 \\ &= \frac{1}{2} |v_{k+1}^t|^2 + \frac{1}{2} |v_{k-1}^t|^2. \end{aligned}$$



$Prob(X_t = k) = \binom{t}{k} 2^{-t}$ であり、これは通常の酔歩から得られる二項分布に他ならない。つまり、通常の酔歩を実現する量子ウォークを与えている。

定理 4.1 U_T の誘導する量子ウォークは通常の酔歩を実現する。

5 量子ウォークと複雑系・多重パイこね変換

U_T による量子ウォークを複雑系の文脈に置く。ある系を複雑系とよぶときには、カオス的力学系を結合させた結果として多様な現象が現れる場合に限り、ただ複雑なだけの系は除外する。金子による結合写像系の発見、津田によるカオス的遍歴の提唱が代表的である ([7])。

- Cellular Automata

$$(Tx)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_{i+s})$$

- 結合写像系 (CML)

$$(Tx)_i = (1 - 2\varepsilon)f(x_i) + \varepsilon f(x_{i+1}) + \varepsilon f(x_{i-1})$$

- 大域結合系 (GCM)

$$(Tx)_i = (1 - \varepsilon)f(x_i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i} f(x_j)$$

- 関数写像系

$$f_{n+1}(x) = (1 - \varepsilon)f_n(x) + \varepsilon f_n(f_n(x))$$

この文脈において、パイこね変換の誘導する量子ウォークは決定論的拡散のモデルとして田崎秀一の導入した多重パイこね変換 ([6]) と本質的に同じモデルである。

$$T(x, y, n) := \begin{cases} (2x, y/2, n+1) & (0 \leq x < 1/2) \\ (2(x-1), (y+1)/2, n-1) & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

多重パイこね変換では、特異関数

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha f_\alpha(2x) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)f_\alpha(2x-1) + \alpha & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

による定常一様分布 $F_n(x, y) := f_\alpha(x)f_\alpha(y)$ が存在し、その変形による不変測度、特に安定方向における不変測度の構造から時間の 1 方向性を特徴付けようと試みた。通常のカオス的力学系では不安定方向に射影した力学系の不変測度が軌道の特徴付けることに比べると、安定方向の役割が際立っている。

6 内部自由度の離散化

パイこね変換の誘導する量子ウォークは内部自由度が I^2 であるが、フーリエ級数を利用することで離散化することができる。 $f_{k,l}$ を $f \in L^2(I^2)$ のフーリエ係数とする。 $f(x) = \sum_{k,l} f_{k,l} e^{2\pi i(kx+ly)}$ から $P_T f$ と $Q_T f$ をフーリエ係数によって記述することができる。

$$\begin{aligned} (P_T f)_{k',l'} &= \int_{I^2} e^{-2\pi i(k'x+l'y)} 1_{T^{-1}J_0} \sum_{k,l} e^{2\pi i(k2x+ly/2)} f_{k,l} dx dy \\ &= \sum_{k,l} f_{k,l} \int_{I_0} e^{-2\pi i(k'x+l'y)} e^{2\pi i(k2x+ly/2)} dx dy \\ &= \sum_{k,l} f_{k,l} \int_{I_0} e^{2\pi i x(2k-k') + y(l/2-l')} dx dy \end{aligned}$$

これらを U_T (あるいは P_T, Q_T) の行列要素 $U_{(k',l'),(k,l)}$ などと呼ぶことにする。

7 古典近似

前節の最後に得られた行列要素を有限列とできれば古典近似に相当する量子ウォークの族を決めたといえるだろう。 U_T の各行列要素の定積分を区分求積の形に変形し、極限をとらずに $2N$ 項までの有限和にとどめておくと内部自由度有限のユニタリ行列を得る ($2N$ 項とした理由は技術的なものである)。つまり、フーリエ係数を有限次元の離散フーリエ変換で近似する。この行列を P_N, Q_N と書くことにする。

$(P_N)_{(k',l'),(k,l)}$ については次の通り。まず k, k' について区分求積の形から

$$\int_0^{1/2} e^{2\pi i(2k-k')x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi i(2k-k')x/2N}$$

有限和にとどめることで次の形を得る。

$$\frac{1}{2N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi i(2k-k')x/2N} = \begin{cases} 1/2 & (2k = k') \\ 0 & (2k \neq k', k' : \text{even}) \\ \frac{e^{2\pi i(2k-k')/N} - 1}{2N(e^{2\pi i(2k-k')/N} - 1)} & (k' : \text{odd}) \end{cases}$$

l, l' についても同様に、 $\int_0^1 e^{2\pi i y(l'-l/2)} dy = 2 \int_0^{1/2} e^{2\pi i(l-2l')y} dy$ と書き換えて次を得る。

$$\int_0^{1/2} e^{2\pi i(l-2l')y} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i(l-2l')y/2N}$$

$$\frac{1}{2N} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i(l-2l')y/2N} = \begin{cases} 1/2 & (l = 2l') \\ 0 & (l \neq 2l', l : \text{even}) \\ \frac{e^{2\pi i(l-2l')/N} - 1}{2N(e^{2\pi i(l-2l')/N} - 1)} & (l : \text{odd}) \end{cases}$$

これらを用いて、有限の N について N 次正方行列 P_N と Q_N が次のように定まる。

$$(P_N)_{(l,k),(l',k')} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi i(2k-k')x/2N} \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i(l-2l')y/2N}$$

$$(Q_N)_{(l,k),(l',k')} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{x=N}^{2N-1} e^{2\pi i(2k-k')x/2N} \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i(l-2l')y/2N + l\pi i}.$$

さらに、 F_N を離散フーリエ変換行列、行列要素を $(F_N)_{k,x} = e^{-2\pi i k x} / \sqrt{N}$ とする。

$$V_N = F_{2N} \begin{pmatrix} F_N^{-1} & 0 \\ 0 & F_N^{-1} \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$P_N = F_{2N} \begin{pmatrix} F_N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes {}^t V_N$$

$$Q_N = F_{2N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_N^{-1} \end{pmatrix} \otimes {}^t V_N$$

$U_N = P_N + Q_N$ はユニタリ行列だから U_N は $\mathbb{C}^{2N} \otimes \mathbb{C}^{2N}$ に作用して、量子ウォークを駆動する。

行列 V_N は [5] において quantized baker's transformation と称されている行列と全く同じものである。以上をまとめると、下記の定理を得る。

定理 7.1 U_T の行列成分を決めると U_N の行列成分で近似できる。

$N = 1$ の場合に U_N は Hadamard 行列となり、その誘導する量子ウォークは前節で観測した挙動 (図 1) の通りである。 N を次第に大きくした量子酔歩の挙動のスナップショットは図 2 の通り、通常の酔歩に近くなっていくように観察される。

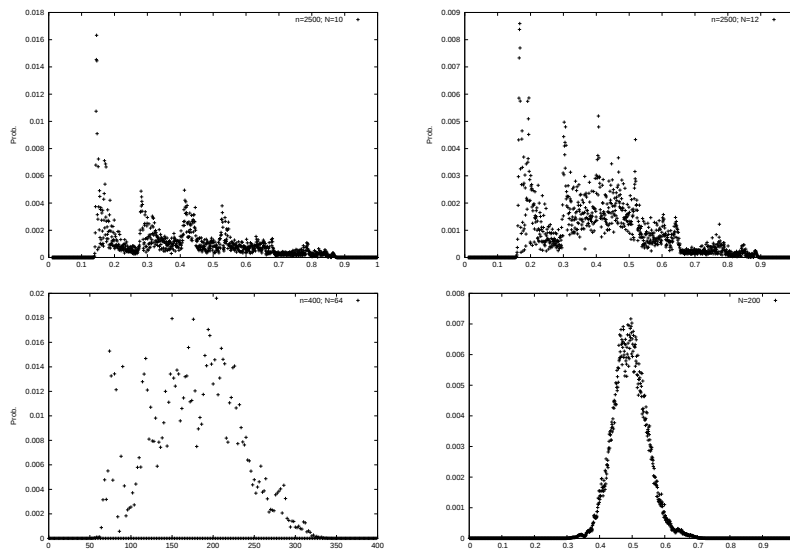


図 2: $N = 4$ (上段左), $N = 16$ (上段右), $N = 64$ (下段左), $N = 128$ (下段右) として U_N の与える量子ウォークを 1024 ステップ走らせたスナップショット。 N が大きくなると通常の酔歩の挙動に近くなる。

8 2次元の場合

以上は 1 次元の量子ウォークに関する結果であるが、2 次元以上に一般化することもやさしい。1 次元写像 $Tx = 4x(\text{mod } 1)$ によるパイコね変換を用いれば 2 次元量子ウォークの各方向への 4 つの作用を与えることができる。d 次元量子ウォークにおける各方向への $2d$ 個の作用であれば、 $Tx = 2dx(\text{mod } 1)$ を用いる。

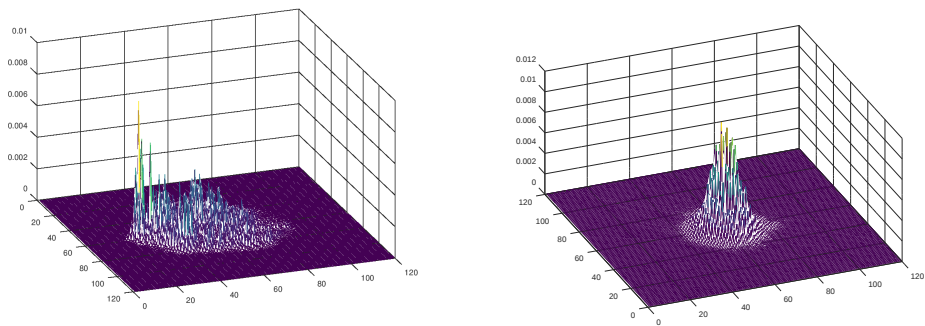


図 3: 2 次元量子ウォーク, 内部自由度 $N = 8$ (左), $N = 24$ (右), 120 step

9 Grover ウォークの場合

3 状態の Grover ウォークを次のように定義する。

ユニタリ行列 $U = 3^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について、 P, C, Q を次のように定める。

$$P = 3^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = 3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, Q = 3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

P, C, Q から次で定まる量子ウォークを 3 状態 Grover ウォークとよぶ。

$$v_k^{t+1} := P v_{k+1}^t + C v_k^t + Q v_{k-1}^t.$$

Grover ウォークの密度関数を数値計算すると下記のようになり、デルタ的な分布が現れる。これを局在化とよぶ。極限分布も存在することがわかっている。

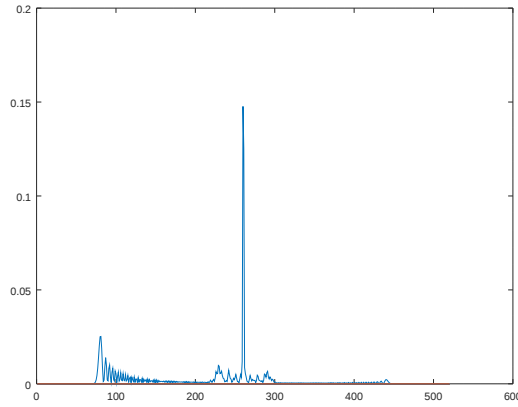


図 4: Grover walk, 520 step

2次元量子ウォークの場合と同様に古典近似を考えることができる。 $Tx = 3x(\bmod 1)$ を 1 対 1 に拡張した力学系の 3 つの枝から P, C, Q を構成する。Grover ウォークにおいても内部自由度を大きく取ることに対応する通常の酔歩に対する古典近似を得ていることがわかる。

10 議論

本稿ではパイこね変換を用いて量子ウォークを構成し、通常の酔歩を実現する量子酔歩になっていることを示した。また、有限次元近似による古典近似を実現する有限自由度の量子ウォークを得ることができた。2次元量子ウォーク、Grover ウォークについても同様の結果を得た。ここで示したものは確率 1/2 で左右に動く単純酔歩との同値性であるが、パイこね変換を変形することで確率 1/3 と 2/3 で左右に動く酔歩を実現すること、およびその有限自由度近似も数値的に観測できている。この確率は有理数であれば実現できる。

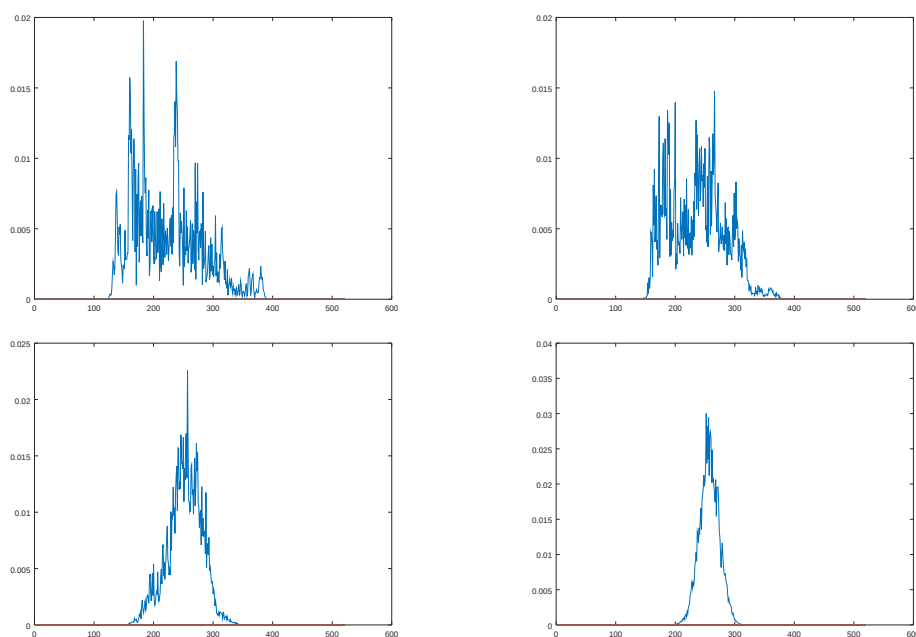


図 5: Grover walk, 内部自由度 $N = 6$ (上段左), $N = 12$ (上段右), $N = 30$ (下段左), $N = 96$ (下段右), 520 step

参考文献

- [1] 今野紀雄『量子ウォークの数理』第 69 巻 1 号, pp. 70-90.
- [2] Norio Konno, *A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk*. J. Math. Soc. Japan 57 (2005), no. 4, 1179-1195. MR2183589
- [3] Norio Konno, Takao Namiki and Takahiro Soshi, *Symmetry of distribution for the one-dimensional Hadamard walk*. Interdiscip. Inform. Sci. 10 (2004), no. 1, 11-22. MR2062188
- [4] Toshikazu Sunada and Tatsuya Tate, *Asymptotic behavior of quantum walks on the line*. J. Funct. Anal. 262 (2012), no. 6, 2608-2645.
- [5] N. L. Balazs and A. Voros, *The quantized baker's transformation*. Ann. Physics 190 (1989), no. 1, 1-31
- [6] Shuichi Tasaki, *Fick's Law and Fractality of Nonequilibrium Stationary States in a Reversible Multibaker Map*, Journal of Statistical Physics, 81(1995), 935-987, MR1361303
- [7] 金子邦彦, 津田一郎『複雑系のカオス的シナリオ』(朝倉書店)

ノイズが加えられた南雲・佐藤モデルの漸近的周期性

中村 文彦*(Fumihiko NAKAMURA)

北海道大学大学院理学院数学専攻 博士課程3年

1 序論

南雲・佐藤 (NS) モデル [1] と呼ばれている区分的な非拡大的線形写像

$$S_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta \pmod{1}, \quad (0 < \alpha, \beta < 1), \quad (1)$$

は、カイヤニエロの神経方程式 [2] を単純化したモデルとして知られ、脳内の単一のニューロンの発火現象を記述するモデルとして研究されている。この写像から作られる $[0, 1]$ 上の力学系 $S_{\alpha,\beta}$ は、ほとんどすべてのパラメータ (α, β) に対して、周期的なふるまいを示すことが知られている。またこの写像は $\alpha + \beta > 1$ のときに、ただ一つの不連続点を $[0, 1]$ 内に持つが、この不連続点が、図 1 にみられる NS モデルの複雑な周期構造を導く要因となる。この周期構造は、 $S_{\alpha,\beta}$ が周期点を持つパラメータ領域を周期数別に分類したもので、ファレイ構造 [3] と呼んでいる。この周期構造の重要な性質は、 m 周期点をもつパラメータ領域と n 周期点を持つパラメータ領域の間には、 $(m + n)$ 周期点を持つパラメータ領域が存在する、ということである。ファレイ構造は NS モデル以外にも、例えば心臓の不整脈モデルを記述する円周写像に対して研究され、“アーノルドの舌 (Arnold tongues)” や “位相同期領域 (phase-locking region)” と呼ばれている。この位相同期領域はパラメータ空間を回転数 (rotation number) で分類した時に見られる葉層構造である。この領域内のパラメータに対しては、力学系の時間発展への小さなノイズの付与によって系の回転数が変化しないという “モード同期 (mode-locking)” と呼ばれる性質を示す [4, 5, 6]。また、我々の NS モデルにおいても [7, 8] で似たような位相同期領域がパラメータ空間内に観測されており、[3] で証明を与えた領域がまさに NS モデルに対する位相同期領域と一致する。つまり、我々は全ての $(0, 1)$ 内の有理数 l/n に対し、 $S_{\alpha,\beta}$ が回転数 l/n を持つパラメータ領域を正確に確定したことになる。これらの領域の定式化を用いて、本講究録では、その各周期領域内からパラメータが選ばれた時に、たとえ力学系の時間発展に小さな摂動が影響しても、元の力学系 $S_{\alpha,\beta}$ の周期性が保たれる、つまり回転数が保たれるということを示す。この事は NS モデルに対して一種のモード同期という現象の存在が数学的に証明されたことを意味する。この事実を示すために本講究録では、NS モデルにノイズが加えられた以下のランダム力学系を考察することにする。

$$x_{t+1} = \alpha x_t + \beta + \xi_t \pmod{1} \quad \text{for } (\alpha, \beta) \in (0, 1)^2, \quad (2)$$

ただし、 $\{\xi_t | t \geq 0\}$ はサポートが $[0, \theta]$ である共通の密度関数をもつ独立な確率変数列である ($0 < \theta < 1$)。そしてシステム (2) から生成されるマルコフ作用素 [9] に対する二つの重要な漸近的な性質、**漸近的な周期性 (asymptotic periodicity)** と **漸近的な安定性 (asymptotic stability)** を議論し、これらの性質が成り立つための十分条件を考察した。これらの漸近挙動は [9, 10, 11, 12] などでも議論されている。[13] によると、システム (2) から生成されるマルコフ作用素は常に漸近的な周期性をもつことが従うが、周期 1 の漸近的周期性が漸近的安定性と同値であることに注意すると我々の主定理 5.5 は、加えるノイズの大きさに応じて、マルコフ作用素が漸近的周期性 (周期 2 以上) と漸近的安定性 (周期 1) のどちらの性質を持つかを区別したことを意味する。つまり、ほとんど全ての $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ に対し、あるノイズの大きさの閾値 $\theta_*(\alpha, \beta)$ が存在

* e-mail: nfumihiko@math.sci.hokudai.ac.jp

し、ノイズの最大値 θ が $\theta_*(\alpha, \beta)$ を超えない場合はマルコフ作用素は漸近的な周期性をもち、 θ が $\theta_*(\alpha, \beta)$ を超えた場合は漸近的な安定性を持つということを示している。Provatas と Mackey[14] はこの結果を周期 2 の場合にのみ証明を与えている。したがって我々の結果は彼らの結果を任意の周期数 $n \geq 2$ へ拡張できたことを意味している。

2 Rational Characteristic Sequence の性質

自然数 n に対し、 $Pr(n) := \{l < n \mid GCD(n, l) = 1\}$ とする。以後 (n, l) や $D_{n,l}$ と書いた場合、常に $n \in \mathbb{N}, l \in Pr(n)$ を満たすものとする。いま (n, l) に対して次式で定義される 01 列 $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$

$$k_m := \left\lfloor \frac{(m+1)l}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{ml}{n} \right\rfloor \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

を Rational characteristic sequence と呼ぶことにする（以下 RCS と書く）。この列は mechanical word や rotation words, Chrstoffel wrod としても知られ [16, 17], また l/n を無理数に置き換えた列は Saturnian word や characteristic sequence として知られている [18, 19]。主定理の証明に大きな役割を果たす数学的ツールの一つは、この RCS を用いた（式 (4) で定義された）関数 $F_{n,l}(i)$ である。この章では、RCS の性質と関数 $F_{n,l}(i)$ の重要な不等式（補題 2.3）を紹介する。

命題 2.1 ([3], Proposition 2.2) $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を (n, l) に対する RCS とすると、以下の性質が成り立つ。

- (i) $k_{m \pm n} = k_m$ for $m \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $k_{n-1-m} = k_m$ for $m \in \mathbb{Z}, m \notin n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z} - 1$,
- (iii) $k_{m-\hat{l}} = k_m$ for $m \in \mathbb{Z}, m \notin n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z} - 1$,

ただし、 $\hat{l} := \min\{t \in \mathbb{N} \mid tl = 1 \pmod{n}\}$ 。ここで、 $k_0 = 0, k_{n-1} = 1$ は明らかにいつでも成り立つ。 $\square$

命題 2.2 ([3], Proposition 2.3) $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}, \{k'_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ をそれぞれ $(n, l), (n', l')$ に対する RCS とする。 $\frac{l}{n} < \frac{l'}{n'}$ かつ $nl' - n'l = 1$ を満たす n, n', l, l' に対し、新たな列 $\{\hat{k}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を、 $m = 0, \dots, n+n'-1$ に対しては、

$$\hat{k}_m := \begin{cases} k_m & \text{for } m = 0, \dots, n-1 \\ k'_{m-n} & \text{for } m = n, \dots, n+n'-1 \end{cases}$$

とし、それ以外の $\bar{m} = m + t(n+n'), t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, m = 0, \dots, n+n'-1$ に対しては、

$$\hat{k}_{\bar{m}} := \hat{k}_m$$

と定める。このとき、列 $\{\hat{k}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ は $(n+n', l+l')$ に対する RCS となる。 $\square$

次に、RCS によって定義された以下の関数を考える。

$$F_{n,l}(i) = \frac{1}{1-\alpha^i} \sum_{m=1}^{i-1} k_m \alpha^m, \quad \text{for } \alpha \in (0, 1) \text{ and } i = 2, \dots, n. \quad (4)$$

ただし、 $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ は (n, l) に対する RCS である。次の補題はこの関数 $F_{n,l}(n)$ に対する性質を与えるが、これが命題 4.1 の証明に重要な役割を果たすことになる。

補題 2.3 (N) すべての (n, l) に対し、以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{\alpha^{n-1} - \alpha^n}{1 - \alpha^n} < F_{n,l}(n) - F_{n,l}(i) < \frac{\alpha^i}{1 - \alpha^i} \quad \text{for } \alpha \in (0, 1) \text{ and } i = 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

$\square$

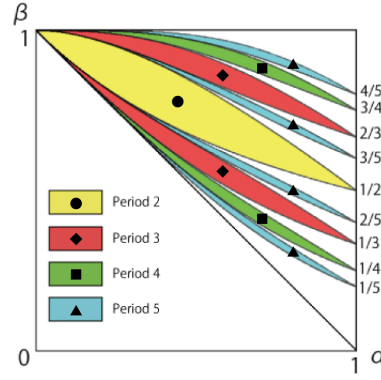


図1 ファレイ構造： $S_{\alpha,\beta}$ が周期数 2 から 5 までの周期点を持つパラメータ領域

3 南雲・佐藤モデルのファレイ構造

この章では、[3] 内で定義されたファレイ構造について紹介する。これは $S_{\alpha,\beta}$ が周期点をもつパラメータ領域を周期数別に分類したもので、図1に見られるような、ファレイ数列（付録A 参照）に基づく層構造を持っている。

各自然数 n に対して、ファレイ構造を以下で定義する。 E を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし、 $\{D_{n,l}\}_{n \in \mathbb{N}, l \in Pr(n)}$ を集合 E の部分集合族で、以下の性質を満たすものとする。各 $\alpha \in \pi_1(E)$ に対して、ある実数 $B_{n,l}^U(\alpha)$, $B_{n,l}^L(\alpha)$ が存在し、

$$\pi_2(D_{n,l} \cap \pi_1^{-1}\{\alpha\}) = [B_{n,l}^L(\alpha), B_{n,l}^U(\alpha)).$$

と書ける。ただし、 $\pi_1(\alpha, \beta) = \alpha$, $\pi_2(\alpha, \beta) = \beta$ である。また、任意の $\alpha \in \pi_1(E)$ に対して $B_{n,l}^U(\alpha) < B_{n',l'}^L(\alpha)$ が成り立つとき、 $D_{n,l} \prec D_{n',l'}$ と書くことにする。ここでは、二つのパラメータをもつ $[0, 1]$ 上の変換 $\{T_{\alpha,\beta} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}_{(\alpha,\beta) \in E}$ を考える。

定義 3.1 $\{T_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$ が E 内に**ファレイ構造 (Farey structure)** を持つとは、あるパラメータ集合族 $\{D_{n,l}\}_{n \in \mathbb{N}, l \in Pr(n)} \subset E$ が存在して、以下を満たすときをいう。

- (i) $Leb(D_{n,l}) > 0$,
- (ii) $(\alpha, \beta) \in D_{n,l}$ のとき、 $T_{\alpha,\beta}$ は周期数 n の周期点を持つ、
- (iii) 任意の自然数 n に対し、 $D_{n+1,1} \prec D_{n,1}$, $D_{n,n-1} \prec D_{n+1,n}$ が成り立つ。また、 $nl' - n'l = 1$ を満たす自然数 $(n, l), (n', l')$ に対して、もし $D_{n,l} \prec D_{n',l'}$ ならば、 $D_{n,l} \prec D_{n+n',l+l'} \prec D_{n',l'}$ が成り立つ。□

$S_{\alpha,\beta}$ がファレイ構造をもつことを示すために、以下のように集合族 $\{D_{n,l}\}_{(n,l)}$ と二つの関数 $B_{n,l}^U(\alpha)$, $B_{n,l}^L(\alpha)$ を与える。

$$D_{n,l} = \{(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2 \mid B_{n,l}^L(\alpha) \leq \beta < B_{n,l}^U(\alpha)\}, \quad (6)$$

$$B_{n,l}^U(\alpha) = (1 - \alpha) \left(\frac{1}{1 - \alpha^n} \sum_{m=1}^{n-1} k_m \alpha^m + 1 \right), \quad (7)$$

$$B_{n,l}^L(\alpha) = (1 - \alpha) \left(\frac{1}{1 - \alpha^n} \sum_{m=1}^{n-1} k_m \alpha^m + 1 - \frac{\alpha^{n-1} - \alpha^n}{1 - \alpha^n} \right), \quad (8)$$

ただし, $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ は (n, l) に対する RSC である. これら (6), (7), (8) によって次の命題が示される.

命題 3.2 ([3], Theorem 4.1) $\{S_{\alpha, \beta}\}_{(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2}$ は $(0, 1)^2$ 内にファレイ構造をもつ. □

注意 3.3 $(\alpha, \beta) \in D_{n, l}$ のとき, 関数 $S_{\alpha, \beta}$ がもつ n 個の周期点の集合は以下で与えられる.

$$\text{Per}_n(S_{\alpha, \beta}) = \left\{ \frac{\beta}{1 - \alpha} - A_i(\alpha) \mid i = 0, \dots, n-1 \right\}, \quad (9)$$

ただし, $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対して,

$$A_i(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha^n} \left(\sum_{m=0}^{i-1} k_m \alpha^{i-m-1} + \sum_{m=i}^{n-1} k_m \alpha^{n+i-m-1} \right). \quad (10)$$

である. □

4 南雲・佐藤モデルの不連続点の逆像に関する性質

不連続点を持つ一次元力学系ではよく不連続点の逆像が議論される. Keener[20] は区分的連続写像の逆像に関する多くの事実を示している. 例えば彼は, 逆像の集合が有限ならば考えている力学系は周期解を持つと言う補題を示している. 次の命題は, $(\alpha, \beta) \in D_{n, l}$ である NS モデルの逆像の集合が有限集合であることを結論付ける, NS モデルのゼロの逆像に関する新しい性質を与えており, これが補題 5.6 の証明に重要な役割を果たす. ここで, ゼロは NS model の不連続点の逆像であることを注意しておく.

命題 4.1 (N) $(\alpha, \beta) \in D_{n, l}$ と仮定する. $i = 1, \dots, n-1$ に対して, $S_{\alpha, \beta}^i$ によるゼロの逆像は

$$S_{\alpha, \beta}^{-i}(0) = \sum_{m=1}^i \frac{k_{n-i+m-1} - \beta}{\alpha^m} \quad (11)$$

と書け, これらはすべて $[0, 1]$ 内に属する. ただし $\{k_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ は (n, l) に対する RCS である.

さらに $i = n$ のときの逆像 $S_{\alpha, \beta}^{-n}(0)$ は $[0, 1]$ に属さない. □

5 ノイズが加えられたシステムの漸近的性質

この章ではまず, 今回考察しているシステム (2) の漸近的な挙動を議論するために必要な道具を準備し, 主定理を述べる. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし, 線形作用素 $P : L^1(X) \rightarrow L^1(X)$ をマルコフ作用素 (Markov operator) とする. すなわち P は任意の非負 L^1 関数に対し, (i) $Pf \geq 0$, (ii) $\|Pf\| = \|f\|$ を満たす. また, $D = \{f \in L^1 \mid f \geq 0, \|f\| = 1\}$ とする. これらのツールの詳細は [9] に書かれている.

定義 5.1 $\{P^t\}$ が漸近的に安定的 (asymptotically stable) であるとは, ある関数 $f_* \in D$ が一意に存在し, 任意の関数 $f \in D$ に対して, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P^t f - f_*\| = 0$ かつ $Pf_* = f_*$ が成り立つときをいう. □

定義 5.2 $\{P^t\}$ が漸近的に周期的 (asymptotically periodic) であるとは, ある自然数 r と 2 つの非負関数列 $g_i \in D$, $h_i \in L^\infty$, ($i = 1, \dots, r$), 作用素 $Q : L^1 \rightarrow L^1$ が存在して, 任意の $f \in L^1$ に対して, Pf が

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(f) g_i(x) + Qf(x), \quad (12)$$

と書けるときをいう. ただし

$$\lambda_i(f) = \int_X f(x) h_i(x) \mu(dx). \quad (13)$$

であり, 更に関数 g_i と作用素 Q が以下の性質を満たす.

- (i) $i \neq j$ なるすべての $i, j \in \{1, \dots, r\}$ に対し $g_i(x)g_j(x) = 0$ が成立;
- (ii) 各自然数 i に対し, ある自然数 $\rho(i)$ が一意に存在し, $Pg_i = g_{\rho(i)}$ が成立. 更に $i \neq j$ なる i, j に対して $\rho(i) \neq \rho(j)$ が成立;
- (iii) 任意の関数 $f \in L^1$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき $\|P^t Qf\| \rightarrow 0$ が成立. $\square$

注意 5.3 $\{P^t\}$ が漸近的に安定的であることは, $\{P^t\}$ が $r = 1$ で漸近的に周期的であることと同値である. $\square$

次に, $[0, 1]$ 上のランダム過程

$$x_{t+1} = S(x_t) + \xi_t \pmod{1}, \quad (14)$$

を考える. ただし, $S: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は可測変換で, $\xi_0, \xi_1, \dots$ は共通の密度 g を持つ, 独立な確率変数列である. このシステムに対するマルコフ作用素 $\bar{P}: L^1([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ は次式で与えられる [13].

$$\bar{P}f(x) = \int_{[0,1]} f(y) \left(\sum_{i=0}^1 g(x - S(y) + i) \right) dy \quad \text{for } f \in L^1. \quad (15)$$

補題 5.4 ([13], Theorem 2.8) 上式 (15) で与えられるマルコフ作用素 $\bar{P}: L^1([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ に対して, $\{\bar{P}^t\}$ は漸近的に周期的である. $\square$

ここで今回考察したいランダム力学系 (2) に話を戻す. 補題 5.4 より, システム (2) から生成されるマルコフ作用素 $\bar{P}$ に対しても, $\{\bar{P}^t\}$ は漸近的に周期的であることがわかっている. 以下の主定理では, 加えるノイズの大きさに対して, $\{\bar{P}^t\}$ が $r > 1$ (漸近的に周期的) となるための十分条件と $r = 1$ (漸近的に安定的) となるための十分条件を与えている.

定理 5.5 (N) $\bar{P}$ をシステム (2) に対するマルコフ作用素 (15) とし, $(\alpha, \beta) \in D_{n,l}$ とする. この時, ある $[0, 1]$ 内の実数 $\theta_*(\alpha, \beta)$ が存在して,

- (i) もし $\theta \leq \theta_*(\alpha, \beta)$ ならば, $r = n > 1$, つまり $\{\bar{P}^t\}$ は漸近的に周期的である (周期数 n).
- (ii) もし $\theta > \theta_*(\alpha, \beta)$ ならば, $r = 1$, つまり $\{\bar{P}^t\}$ は漸近的に安定的である.

ここで r は定義 5.2 内で与えられた自然数である. また, $\theta_*(\alpha, \beta)$ は次式で与えられる.

$$\theta_*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^{n-1}(1-\alpha)^2}{1-\alpha^n} - \beta + B_{n,l}^L(\alpha) \quad (16)$$

$\square$

本講究録では証明は省略するが, (i) の証明のキーとなった補題を以下に記す.

補題 5.6 $(\alpha, \beta) \in D_{n,l}$ のとき, $i = 0, \dots, n-1$ に対して, n 個の区間 G_i を,

$$G_i = \left[\frac{\beta}{1-\alpha} - A_i(\alpha), \frac{\beta+\theta}{1-\alpha} - A_i(\alpha) \right], \quad (17)$$

と定める. ただし, $A_i(\alpha)$ は式 (10) で与えられたものである. この時, 任意の $i = 0, 1, \dots, n-2$ に対して,

$$x_{t+1} \in G_{i+1} \text{ if } x_t \in G_i, \quad \text{and} \quad x_{t+1} \in G_0 \text{ if } x_t \in G_{n-1}, \quad (18)$$

が成り立つ. ただし x_{t+1} はシステム (2) によって決められる. 更に, ある自然数 N が存在し, $t > N$, a.e. $x_0 \in [0, 1]$ に対して, $x_{t+1} \in \bigcup_{i=0}^{n-1} G_i$ が成り立つ. $\square$

最後に, $\beta = B_{n,l}^U(\alpha)$ のときに対する主張を記す. この仮定 $\beta = B_{n,l}^U(\alpha)$ は, ノイズが加える前の NS モデルでは周期点を持たない場合のパラメータとなっていることを意味している. これまで [3, 9] では数値

的に $\alpha = 1/2, \beta = B_{4,1}^U(1/2) = 17/30, \theta = 1/15$ の場合を考察され, また最近ではこの特別なパラメータ $(\alpha, \beta) = (1/2, 17/30)$ に対してのみ, 漸近的に安定的となることが [21] で証明された. よって次の定理 5.7 はこれらの主張を一般化したものである.

定理 5.7 (N) $\bar{P}$ をシステム (2) に対するマルコフ作用素 (15) とし, (α, β) を $\beta = B_{n,l}^U(\alpha)$ を満たすように与える. このとき任意の $\theta > 0$ に対して, $\{\bar{P}^t\}$ は漸近的に安定的である. $\square$

6 数値実験との比較

この章では, 主定理 5.5 の数値的な結果を紹介する. ここで紹介するヒストグラムは近似的にマルコフ作用素による密度関数の変化を与えている. マルコフ作用素の近待に関する詳細は [9] を参照されたい. 図 2 では, システム (2) から生成されるマルコフ作用素 $\bar{P}$ の変化 $\{\bar{P}^t f_0\}$ を, パラメータ $\alpha = 1/2, \beta = B_{3,1}^L(1/2) = 4/7$, ノイズの大きさ $\theta = \theta_*(1/2, 4/7) = 1/14$, 初期密度関数 $f_0 = 1_{[0,1]}$ に対して観測した. 主定理よりこの場合はマルコフ作用素 $\bar{P}$ は周期 3 の漸近的周期性をもつが, 図 2 から t が十分大きい時に (a),(b),(c) を繰り返す挙動が観測できる. 実際 (a) と (d) はほとんど同じ形のヒストグラムを示している.

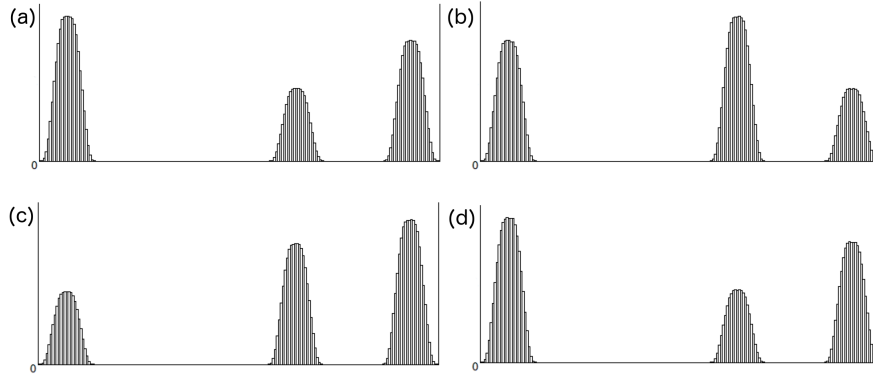


図 2 漸近的周期性を示している. ここでは $[0, 1]$ 内に一様に分布した 5,000,000 個の初期点にシステム (2) による t 回の反復を行い, ヒストグラムの変化を観測した. パラメータは $\alpha = 1/2, \beta = 4/7$, ノイズの大きさは $\theta = 1/14$. 反復回数は (a) $t = 200$; (b) $t = 201$; (c) $t = 202$; and (d) $t = 203$.

一方図 3 では, パラメータを上と同じ $\alpha = 1/2, \beta = B_{3,1}^L(1/2) = 4/7$ とし, ノイズの大きさを上よりわずかに大きく $\theta = \theta_*(1/2, 4/7) + 0.02 = 1/14 + 0.02$ とした. このとき主定理からは, マルコフ作用素 $\bar{P}$ は漸近的安定性をもつことがわかるが, 実際 200 回目以降の反復後には図 3 のようなヒストグラムに収束している様子が観測できる.

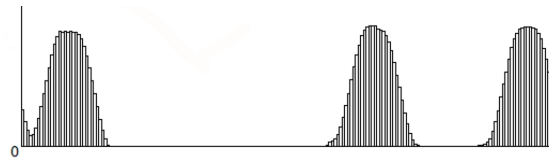


図 3 漸近的安定性を示している. ここでは $[0, 1]$ 内に一様に分布した 5,000,000 個の初期点にシステム (2) による 200 回の反復を行った. パラメータは $\alpha = 1/2, \beta = 4/7$, ノイズの大きさは $\theta = 1/14 + 0.02$.

最後に, 図 4 はパラメータ $\alpha = 1/2, \beta = B_{4,1}^U(1/2) = 17/30$, ノイズの大きさ $\theta = 1/15$ の場合の実験

結果である。定理 5.7 から、マルコフ作用素 $\bar{P}$ は漸近的安定性をもつことがわかるが、実際に実験を行うと 100,000 回目の反復以降でヒストグラムの変化がほとんど見えなくなることが観測された。

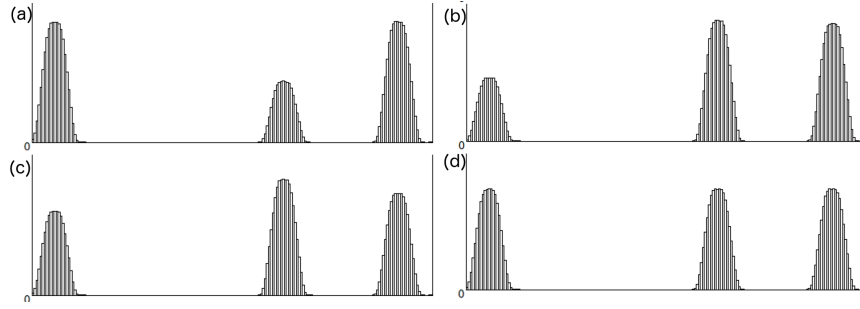


図4 パラメータ $\alpha = 1/2, \beta = 17/30$, ノイズの大きさ $\theta = 1/15$ のときの実験結果である。反復回数は (a)200; (b)1,000; (c)10,000; (d)100,000 である。100,000 回目付近でようやくヒストグラムの変化が見えなくなり、漸近的安定性を持つことが観測できた。

付録 A ファレイ数列

第 n ファレイ数列 F_n とは、分母が n 以下で、0 以上 1 以下のすべての既約分数を小さい順から並べてできる数列である。以下に F_5 までを例示するが、ファレイ数列に関する諸性質は [22] を参照されたい。

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

参考文献

- [1] Nagumo, J., & Sato, S. (1972). On a response characteristic of a mathematical neuron model. *Biological Cybernetics*, 10(3), 155-164.
- [2] Caianiello, E. R. (1961). Outline of a theory of thought-processes and thinking machines. *Journal of theoretical biology*, 1(2), 204-235.
- [3] Nakamura, F. (2015). Periodicity of non-expanding piecewise linear maps and effects of random noises. *Dynamical Systems*, 30(4), 450-467.
- [4] Essl, G. (2006, November). Circle Maps as Simple Oscillators for Complex Behavior: I. Basics. In *ICMC*.
- [5] McGuinness, M., Hong, Y., Galletly, D., & Larsen, P. (2004). Arnold tongues in human cardiorespiratory systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14(1), 1-6.
- [6] Glass, L., Guevara, M. R., Shrier, A., & Perez, R. (1983). Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3), 89-101.
- [7] Ding, E. J., & Hemmer, P. C. (1987). Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map. *Journal of statistical physics*, 46(1-2), 99-110.
- [8] Oku, M., & Aihara, K. (2012). Numerical analysis of transient and periodic dynamics in single and coupled Nagumo-Sato models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(06), 1230021.

- [9] Lasota, A., & Mackey, M. C. (2013). *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics* (Vol. 97). Springer Science & Business Media.
- [10] Lasota, A., Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1984). Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 286(2), 751-764.
- [11] Faranda, D., Freitas, J. M., Guiraud, P., & Vaienti, S. (2016). Statistical properties of random dynamical systems with contracting direction. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(20), 204001.
- [12] Faranda, D., Freitas, J. M., Guiraud, P., & Vaienti, S. (2015). Sampling local properties of attractors via extreme value theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, 74, 55-66.
- [13] Iwata, Y., & Ogihara, T. (2013). Random perturbations of non-singular transformations on $[0, 1]$. *Hokkaido Mathematical Journal*, 42(2), 269-291.
- [14] Provatas, N., & Mackey, M. C. (1991). Noise-induced asymptotic periodicity in a piecewise linear map. *Journal of statistical physics*, 63(3), 585-612.
- [15] Inoue, T. (2012). Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters. *Studia Math.*, 208(1), 11-29.
- [16] Berstel, J. (2007). Sturmian and episturmian words. In *Algebraic informatics* (pp. 23-47). Springer Berlin Heidelberg.
- [17] Berthé, V., De Luca, A., & Reutenauer, C. (2008). On an involution of Christoffel words and Sturmian morphisms. *European Journal of Combinatorics*, 29(2), 535-553.
- [18] Brown, T. C. (1993). Descriptions of the characteristic sequence of an irrational. *Canad. Math. Bull.*, 36(1), 15-21.
- [19] Berstel, J. (1995). Recent Results on Sturmian Words. In *Developments in Language Theory* (Vol. 2, pp. 13-24).
- [20] Keener, J. P. (1980). Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 261(2), 589-604.
- [21] Kaijser, T. (2016). Stochastic perturbations of iterations of a simple, non-expanding, nonperiodic, piecewise linear, interval-map. *arXiv preprint arXiv:1606.00741*.
- [22] Apostol, T. M. (2012). *Modular functions and Dirichlet series in number theory* (Vol. 41). Springer Science & Business Media.

情報量最大化によるアンチヘブ則と幻覚

藤堂真登

1 導入

レビー小体型認知症は、人の認知機能に大きな影響を及ぼす脳の障害の一つである。レビー小体型認知症の大きな特徴として、複合型視覚性幻覚をみるということが知られている。視覚性幻覚とは、外界の世界には視覚的対象が存在しないにも関わらず、そこに視覚的対象を知覚することである [1]。人や動物などの複雑な対象に関する幻覚を特に複合型視覚性幻覚という。この現象から、人間の視覚というのは単に外界の刺激を反映したものではなく、脳の内的な状態を反映したものであるということがわかる。視覚性幻覚の原因として、いくつかの生理学的な事実が知られているが、その原因は未だに判明していない。また、その原因と考えられる詳細なメカニズムを医学的な実験によって明らかにすることは、現在の技術では不可能である。そのため数理的な側面から CVH の十分条件となりえるメカニズムを予測することは意義があると考えている。

従来の視覚認知過程は、外界からの視覚情報が、主に腹側視覚路と呼ばれる特定の視覚野の経路に沿って、段階的に処理されることによって達成されると考えられてきた。しかし近年の研究において、前頭葉を初めとする高次連合野からの情報もまた、視覚認知に影響することが判明している [2]。すなわち我々の視覚認知は、大域的なネットワーク間の情報統合により達成されるといえる。レビー小体型認知症の視覚性幻覚は、そのような視覚認知に関わる大域的なネットワークの一部欠損、そしてその欠損を埋め合わせるための補償機構が働くことによるという説が提案される。

以上の仮説に基づき数理モデルを構築するのだが、その上で大きな骨格となる概念が拘束条件付き自己組織化である [3]。それは、脳のような複雑なシステムが環境に対し適切な反応をするように発展するためには、システム全体に対する何らかの拘束条件の中で巨視的な量を最適化するように、個々の要素が発展していく必要があるということを主張する。この概念に基づく認知機能のための発展様式の一つを提案すると、次のようになる。ニューラルネットワークが全体として外界の情報をうまく表現するように、個々の要素であるニューロン間の結合が発展する一方で、拘束条件としてネットワーク全体のエネルギー消費は抑えるよう発展するというものである。このようなモデルは統計力学の言葉を借りれば、エントロピーを最大にしつつ、エネルギーを最小にすることであり、自由エネルギーの最適化と言えなくもない。さらに、ニューラルネットワークの一部欠損によりネットワーク全体としての情報表現がうまく働かなくなると、それを補うようにさらなる自己組織化が起こる。何らかの条件が揃うと、その結果として幻覚が現れるというシナリオが描かれる。

2 モデルとシミュレーション結果

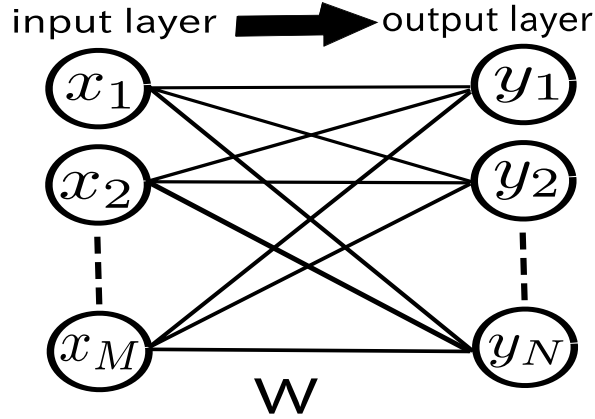


図1 2層のフィードフォワード型ニューラルネットワーク

図1のような入力層と出力層のみの二層からなるフィードフォワード型ニューラルネットワークを考える. ニューロン素子は, とり得る状態が $\{0, 1\}$ に確率的に決まるとする. 入力層, 出力層のニューロンの数をそれぞれ M, N とすると, 入力層, 出力層でそれぞれとり得る全状態は $X = \{0, 1\}^M, Y = \{0, 1\}^N$ となる. 入力層の確率変数を x とし, 入力層の j 番目のニューロンの状態を $x_j \in \{0, 1\}$ とすると $x = (x_1, x_2, \dots, x_M) \in X$ と表される. 同様に出力層の確率変数 y を $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in Y$ とする. このような変数のとり方からも分かるように, 情報の表現はセルアセンブリ, 層全体のニューロンの発火状態の組み合わせで行うと考える. x_j から y_i への結合強度を w_{ij} とする. 状態 x の生成確率を $P(x)$ とする. 入力層が状態 x のとき, 出力層の i 番目のニューロンの状態が 1 になる条件付き確率を $P(y_i = 1|x)$ とすると, 以下のようなシグモイド関数に基づく素子を考える.

$$P(y_i = 1|x) = \frac{1}{1 + \exp(-\sum_{j=1}^M w_{ij}x_j + b)} = f(u_i)$$

ただし b はバイアス項で, 実際のニューロンの動作を反映するために $b = -5$ とする. 以上の定義から, $P(x)$ を与えると, 同時確率 $P(x, y)$ とその周辺確率 $P(y)$ が求められる.

次に発展過程を記述するために, ニューラルネットワーク全体に関する巨視的な量を定義する. まず, 入力層と出力層の情報量として相互情報量 $I(X, Y)$ を以下のように定義する.

$$I(X, Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} p(x, y) \log\left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\right)$$

相互情報量が最小になるとき, 独立性が成り立つ. すなわち入力層の状態を知っても, 出力層の状態に関して何もわからないということである. 直感的にも明らかのように, 任意の結合強度が $w_{ij} = 0$ のときのみ相互情報量は最小になる. 一方, 相互情報量が最大になるとき, 出力層の状態を知ると入力層の状態が完全に分かる. それは出力層が入力層の情報を最適に表現できている状況といえよう.

さらに, エネルギー $E(X, Y)$ を以下のように出力層のニューロンの発火率で定義する.

$$E(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N p(y_i = 1) \right)^2$$

以上の二つの巨視的な量を使って, 目的関数 $L(X, Y)$ を次のように定義する.

$$L(X, Y) = I(X, Y) - \lambda E(X, Y)$$

ただし $\lambda > 0$ の定数で, エネルギーの影響を左右するパラメータである. この目的関数 $L(X, Y)$ を最大化するということは, 相互情報量を大きく, エネルギーを小さくすることである. 言い換えると, 出力層のニューロンは, なるべく発火しないように, 入力層の状態を表現しようとするということである. 目的関数の最大化には, 学習係数 α を用いて, 次のような勾配法を用いる.

$$w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t + \alpha \frac{\partial L}{\partial w_{ij}} \quad (1)$$

数値シミュレーションによる結果を示す. ただし, 以下の結果は $N = M$ のニューラルネットワークにおいて, 任意の入力層の状態 x が等確率で現れる入力を与えたときの結果である. モデルの振る舞いは, 条件付き確率 $P(y|x)$ によって理解できる. 図 2 は, $N = M = 5$ のニューラルネットワークにおける条件付き確率 $P(y|x)$ の値を白黒の濃淡で図示したものである. 左図は結合強度をランダムに選んだ場合の振る舞いで, 右図は提案した学習後の振る舞いを表す. 横軸は入力層の状態 x を表し, 縦軸は出力層 y の状態を表す. ただし, x の各成分は $\{0, 1\}$ なので 2 進数を 10 進数に変換した状態をインデックスと呼ぶ. 例えば $x = (0, 0, 0, 0, 0)$ のインデックスは 0 である. 出力層の状態 y も同様である. ランダムな結合の場合, ある入力層のパターンに対し複数の出力層のパターンが現れることが分かるだろう. 一方, 学習後のネットワークはある入力層のパターンに対し出力層のあるパターンが高確率で現れる. すなわち, 次のことが達成されることが分かった.

Result 1

全ての入力層の状態 x に対し, 以下の条件を満たす出力層の状態 y が存在する.

$$p(y|x) \approx 1$$

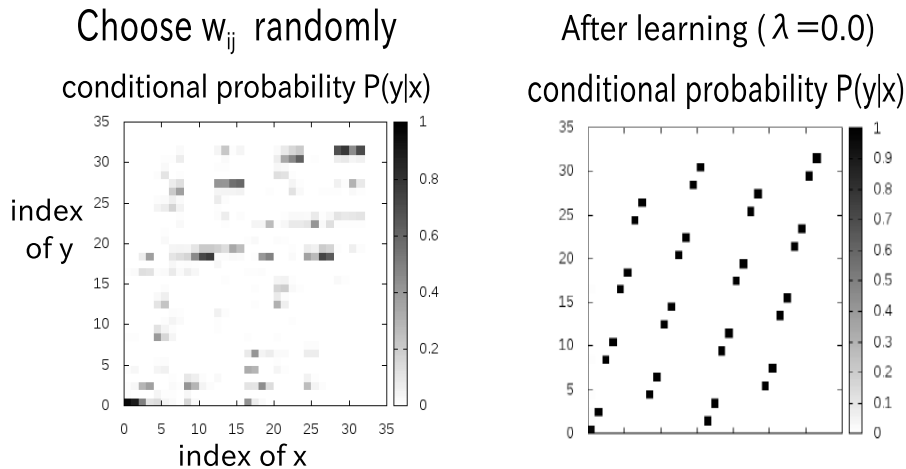


図 2 条件付き確率 $P(y|x)$. w_{ij} をランダムに選んだ場合 (左図) と, 学習後 (右図).

次に学習に対するエネルギーの影響を考える。パラメータ λ は、目的関数に対するエネルギーの影響を反映するため、 λ を変化させたときに学習後の振る舞いを調べる。図 3 は、先の図と同様、条件付き確率を図示したものである。左図が $\lambda = 0$ 、すなわちエネルギーの影響が全くない場合の学習後の振る舞いである。右図が $\lambda = 0.5$ 、エネルギーの影響が多少ある場合の学習後の振る舞いである。エネルギーの影響により、入力と出力の 1 対 1 対応から、入力パターンがクラスタリングされていくことが分かる。さらに λ の影響を調べると、ある定数 λ_c が存在し、次の結果が一般的に言えることがわかった。

Result 2

- $\lambda \leq \lambda_c$ のとき、任意の状態 x^a, x^b がそれぞれある y^a, y^b に対し、 $P(y^a|x^a) \approx 1, P(y^b|x^b) \approx 1$ となっているとき、 $x^a \neq x^b$ ならば、 $y^a \neq y^b$ が成り立つ。
- $\lambda \geq \lambda_c$ のとき、ある状態 y が存在し、 $P(y|x^a) \approx 1, P(y|x^b) \approx 1$ となる状態 x^a, x^b が存在する。

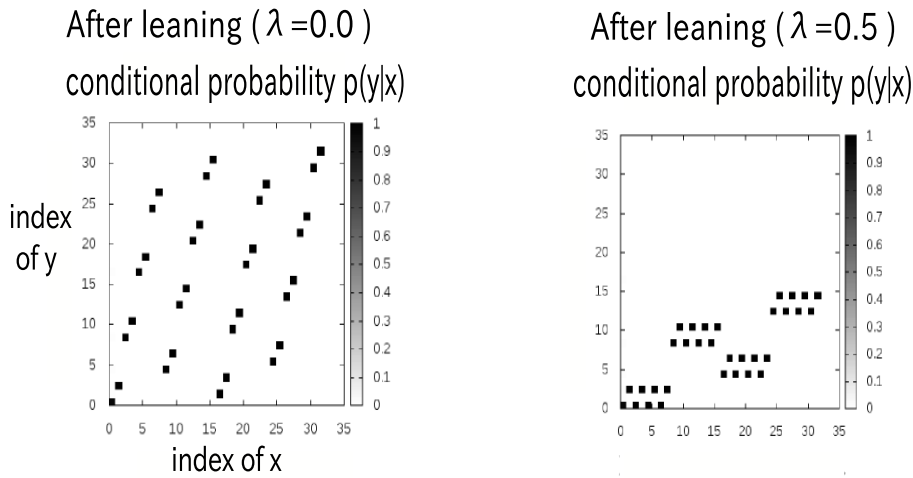


図 3 学習後の条件付き確率 $P(y|x)$. $\lambda = 0.0$ (左図), $\lambda = 0.5$ (右図).

以上の結果をまとめると、提案した学習により出力層のパターンはある入力層のパターンに対してのみ反応するようになる。このことは、出力層のパターンが分かれば入力層のパターンが分かるという意味で、層間で共有する情報量、相互情報量が高いことと同義である。一方で、ニューロンがなるべく発火しないように情報表現をするならば、表現のための容量が減り、複数の入力パターンをクラスタリングすることとなる。このような学習は、生物の認知機能の単純な様式だと考えられる。

3 アンチヘブ則と幻覚

この学習における奇妙な結果と、幻覚との繋がりを考察する。本学習は目的関数の最大化のために、相互情報量の勾配を計算する。それは以下ようになる。

$$\frac{\partial I(X, Y; w)}{\partial w_{ij}} = \sum_{x \in X, y \in Y} D(x, y)$$

$$D(x, y) = -p_i(x, y) f'(z_i) \log \left(\frac{p(y)}{p(x, y)} \right) x_j (2y_i - 1)$$

$$z_i = (2y_i - 1)u_i, \quad p_i(x, y) = \sum_{y_i \in \{0,1\}} p(x, y)$$

ここで $D(x, y)$ の正負は, x_j, y_i によって決まることに気づく. 具体的には次の関係である.

$$\begin{cases} D(x, y) < 0 & ((x_j, y_i) = (1, 1)) \\ D(x, y) > 0 & ((x_j, y_i) = (1, 0)) \end{cases}$$

式 (1) を考慮すると, 相互情報量の最大化に関して, w_{ij} は $(x_j, y_i) = (1, 0)$ となるパターンの影響により増加し, $(x_j, y_i) = (1, 1)$ となるパターンの影響により減少することが分かる. これはアンチヘブ則と呼ばれる現象の一つである. しかしながら, アンチヘブ則によって情報量が最大になるというプロセスは直感的には理解し難い. なぜならアンチヘブ則は, 入力層の状態と出力層の状態からなるパターン対を, $(x_j, y_i) = (1, 1)$ の効果で消すように働くためである. それにも関わらず, そのようなプロセスを経て最終的に得られるニューラルネットワークが, 出力層のパターンが特定の入力層のパターンにのみ反応するものであるということは, 奇妙と言わざるを得ないだろう. 実際に, ヘブ則により相互情報量が高くなることが知られている [4].

ただし従来の学習則は, パターンが現れたらすぐに結合を変化させるというものであるが, この学習は, 全てのパターン対に対する統計的な量 $D(x, y)$ を評価し, それらの足しあわせによって結合が変化していくというものである. そのため, 頻繁に現れるパターンが必ずしも結合の変化に影響を与えとは限らない. それを考慮すると, 学習後に頻繁に現れるパターンに対してアンチヘブ則が効かないのは, $D(x, y) = 0$ であるためだと気づくだろう. さらに, シミュレーションの結果, アンチヘブ則は情報伝達の障害となるようなパターン対に対して効くということがわかった. すなわち, 各時点で情報量の最大化のために邪魔なパターン対を $(x_j, y_i) = (1, 1)$ の効果によって消していき, 最終的に $(x_j, y_i) = (1, 0)$ の効果によって得られる理想的なパターン対のみが残るのである. ちなみに本モデルはニューロンの状態が $\{0, 1\}$ の 2 値であるが, $\{-1, 1\}$ としてもアンチヘブ則が導出される.

さて, 統計的な評価に基づくアンチヘブ則にり情報量が最大化することを説明してきたが, この学習則は, 幻覚や認知症というこれまた奇妙な脳障害をうまく説明できる可能性がある. なぜなら, $(x_j, y_i) = (1, 1)$ の効果は結合強度を減少させることによってパターン対を消すことになるが, 脳に置き換えて述べると, シナプスに記録された記憶が消去されるということになる. これは認知症のように完全に記憶を失う状況に類似する. 同様に $(x_j, y_i) = (1, 0)$ の効果により, 全く反応のないパターン対に対する結合強度が増加することにより, 新たなパターン連想を作り出すということも起こりえる. ただこの状況は誤認知であり, 幻覚というよりパレイドリアのような現象と近いかもしれない. ちなみにレビー小体型認知症ではパレイドリアをよく見ることが知られている [5]. 今後の研究では, ネットワークの一部欠損を起こしたネットワークの再自己組織化により, どのような条件下, どのような理由で何が起こるのかを考察していきたい.

参考文献

- [1] Collerton D, et al., (2012) Why people see things that are not there: a novel perception and Attention Deficit model for recurrent complex visual hallucinations. Behavioral and Brain Sciences, 28, 737-794.
- [2] Bar M, et al., (2003) A cortical mechanism for triggering top-down facilitation in visual object recognition. Journal of Cognitive Neuroscience, 15, 600-609.

- [3] Tsuda I,et al., (2015) Self-Organization with Constraints-A Mathematical Model for Functional Differentiation,Entropy,18,74.
- [4] R. Linsker(1988): Self-Organization in a Perceptual Network, IEEE Computer, 21, 105/117
- [5] Uchiyama M,et al.,(2012) Pareidolias:complex visual illusions in dementia with Lewy bodies,Brain,135,2458-2469.

数学でニューロンを作る

渡部 大志¹, 伊藤孝男², 津田一郎¹

¹ 中部大学創発学術院

² 北海道警察

概要

生物の特徴の一つは機能分化である。工業製品と違って、我々生物はシステム全体の発達過程において機能モジュールと呼ばれる機能単位を作る。この現象は胚細胞の分化および脳の機能分化において典型的に見られる。このような機能分化の根底にあるメカニズムを理解するために、システム全体の動作から機能単位を生み出すことができる数学モデルの構築を試みた。本研究では神経系に焦点を当てる。本研究の目的は、ネットワーク活動から神経機能を生成することである。この目的のために、我々は一方向結合の一次元写像ネットワークを対象に、遺伝的アルゴリズムによって情報伝達能力の最適化を行った。

はじめに

我々の目的は写像の結合系における情報伝達能力の最適化であるが、まずは結合系と情報伝達とは何か。特にカオス写像の結合を中心に先行研究を振り返る。

津田・清水は次式で表される、 k 番目の要素が、離散時刻 n で、連続な状態変数 x の一方向結合の一次元写像[1]を考察した。

$$x_{n+1}^k = f_k(x_n^k) + Cx_n^{k-1} - C'x_n^k \quad (1)$$

ここで C および C' はそれぞれ一つ前の写像からの結合強度、自己抑制結合強度を表している。さらに結合強度 D で、カオス写像 $G(y)$ を外部入力とする力学系を考えた (図 1 参照)。

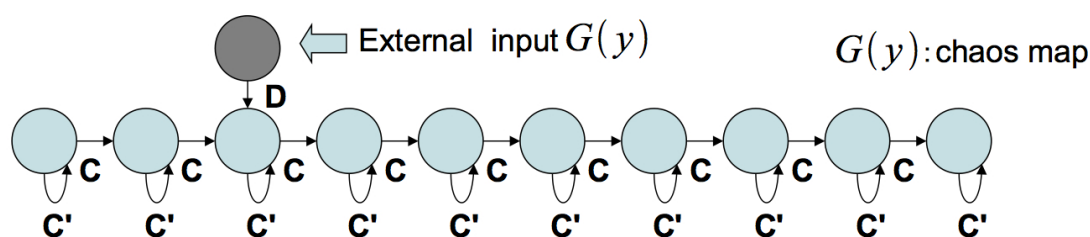


図 1 外部入力 $G(y)$ をとともう一方結合一次元写像の模式図

外部入力 $G(y)$ の情報は上流（図 1 左）から下流（図 1 右）へ流れることになる．この時，情報が時間とともに減衰し下流へ伝わらない写像と，各要素で時間とともに情報が減衰しながらも情報が消失するより前に下流の要素へ情報が伝達する写像が存在する．

よく知られるロジスティクス写像は前者であり，特殊なパラメータ値を除いて情報を下流へ伝える事ができない．情報伝達可能な写像の一つに以下で表される松本・津田（1983）が提唱した単純化 BZ 写像がある[2]．

$$f_k(x) = A[\tan^{-1}(\beta(x - 0.2)) + \tan^{-1}(0.2\beta)]/[1 + (2x)^{19}] + b_k \quad (2)$$

$$A = 0.8(1.0 + 0.7^{19})/[\tan^{-1}(0.15\beta) + \tan^{-1}(0.2\beta)] \quad (3)$$

ここで b_k はシフトパラメータである． $\beta=200$ ， $b=0.19$ の時を図 2 に示す．

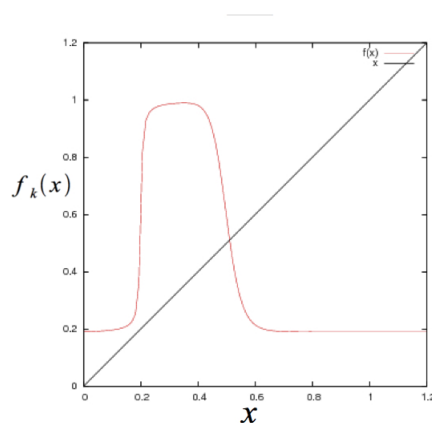


図 2 単純化 BZ 写像（ $\beta=200$ ， $b=0.19$ ）

伝達された外部入力の情報を定量化するために，松本・津田（1987，1988）は入力と k 番目の要素で時間を n ずらした時間付き相互情報量 $I_n(k)$ を下記のように定義した[3，4]．

$$I_n(k) = \sum_j p(j^{(k)}) \log p(j^{(k)})^{-1} - \sum_{i,j} p(i) p_n(j^{(k)}|i) \log p_n(j^{(k)}|i)^{-1} \quad (4)$$

ここで $p(i)$ は外部入力がある状態 i を取る確率, $p(j^{(k)})$ は k 番目の要素が状態 j を取る確率, $p_n(j^{(k)}|i)$ は外部入力がある状態 i を取った時, n 時間後に k 番目の要素が状態 j を取る条件付き確率である. 図 3 はあるシフトパラメータ群での入力との時間付き相互情報量である. 直接入力がある 3 番目の要素が最も相互情報量が高く, それより手前の要素には伝わっていない. これは結合の構造を反映したものである.

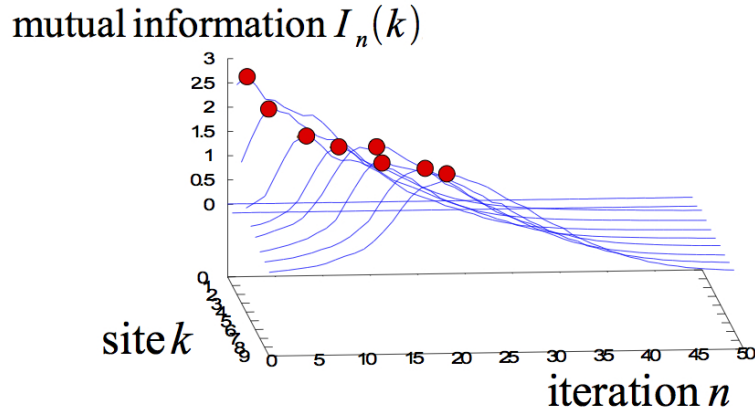


図 3 時間付き相互情報量の例

モデル

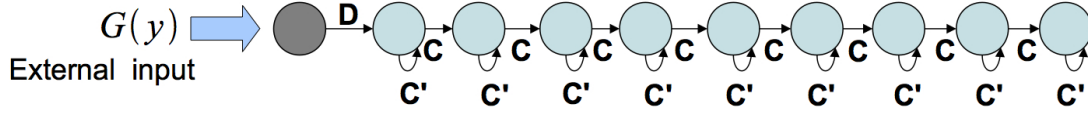
先行研究[3, 4]より, ある種の写像は情報を伝えることが知られていた. では『どのような写像がより情報を伝えられるのか?』という問いに答える為に我々は以下のモデルを考える.

$$x_{n+1}^k = f_k(x_n^k) + \alpha(Cx_n^{k-1} - C'x_n^k) \quad (1 \geq \alpha \geq 0) \quad (5)$$

$$f_k(x) = a_1 \tanh(a_2(x - a_3)) - a_4 \tanh(a_5(x - a_6)) + b_k \quad (6)$$

各要素は先行研究[1]と同様に一方向に結合される (図 4 参照). 先行研究より, 外部から直接入力がある要素より手前には情報が伝わらない事が知られているので, カオス写像 $G(y)$ を最初の要素に結合強度 D で外部から入力した. また 2 つの $\tanh$ の足し合わせである $f_k(x)$ は 7 つの

パラメータを調整することで，定数関数，単調増加関数，単調減少関数，単峰関数，双峰関数とかなり広い範囲の関数を表現できる．また α は結合強度の上限を表すパラメータである．



先の問いは相互情報量を最大にする写像 $f_k(x)$ のパラメータと結合強度 C, C' の組み合わせ $A = (a_1, \dots, a_6, b_i, C, C')$ を探す探索問題に他ならない（ただし，結合強度 C, C' は 0 から 1 までの範囲で，さらに α によって上限が決まっている事に注意）．パラメータの組み合わせが A の時の k 番目の要素と外部入力との時間付き相互情報量を $I_n(A, k)$ とし，系全体での相互情報量の評価のために次の評価関数 $J(A)$ を導入する．

$$J(A) = \sum_k \max_n \{I_n(A, k)\} \quad (7)$$

各 k で $I_n(A, k)$ の最大値を求め（図 5 の丸で示された点），その和を評価値とした．和を評価値とするのは外部入力がある要素やその近傍だけでなく，下流まで情報が伝わっている事を評価するためである．図 5 では左より右の方が高い評価値を得る．

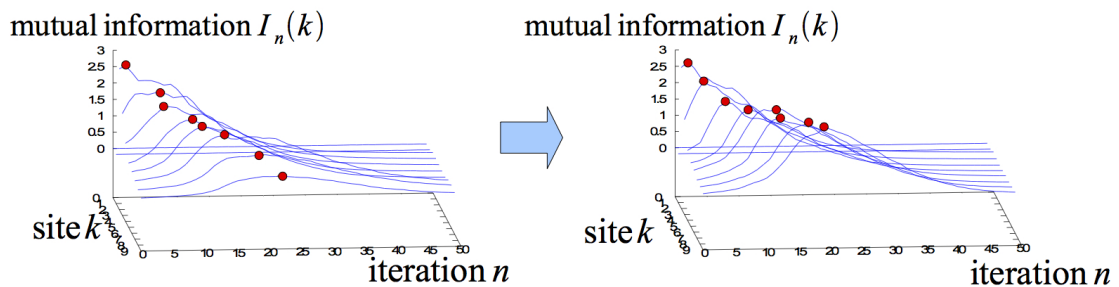


図 5 相互情報量と評価関数の関係（左より右の方が評価値が高い）

上記の評価関数をもとにパラメータの組み合わせ A の探索を行う．本研究ではパラメータの探索方法として，Larry J. Eshelman が提案した CHC という遺伝的アルゴリズムを用いた[5]．

図 6 はランダムな初期値からスタートした実際の探索の例示である．図 6 は各世代の最も評価値が高い個体の関数の形（上段），相互情報量（中段），時系列データ（下段）を表示して

いる。最初期の世代（図6左）ではほぼ情報の伝達が行われておらず，相互情報量も下流ではほぼ0で，時系列データを見ても下流の要素はほぼ不動点に落ちていると思われる。その後中間世代（図6中央）では下流まで情報が伝えられており，最終世代（図6右）では相互情報量の観点からはある要素から先はほぼ情報の損失はみられない。

Example

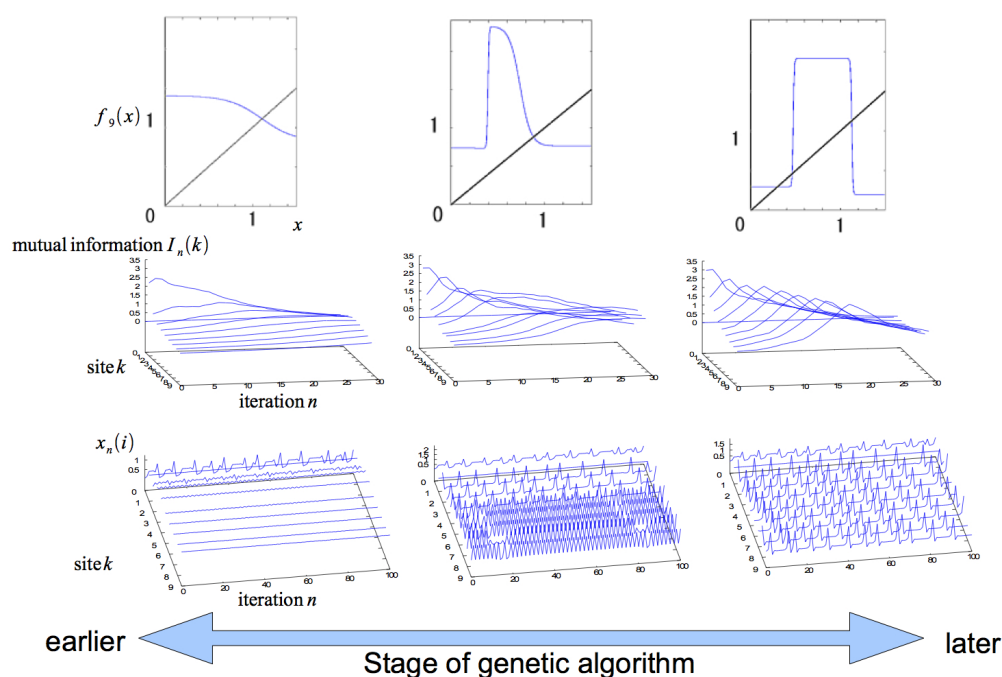


図6 遺伝的アルゴリズムによる写像の最適化の例。左が最初の世代，中央が中間世代，右が最終世代。

結果

結合強度の上限 α を変えながら遺伝的アルゴリズムによる最適化を行った結果， α に応じて以下の3種類の関数が最終的に選ばれた。

1. 透過型（ α が大きい時）

α が大きいときは簡単である。 $C = 1$ ， $C' = 0$ ， $f(x) = 0$ となり，式(5)，(6)より

$$x_{n+1}^1 = DG(y) \quad x_{n+1}^k = \alpha x_n^{k-1} \quad (8)$$

となる．この結果は時刻 n での要素 $k-1$ の状態が，時刻 $n+1$ で要素 $k+1$ へ単純なコピーが行われている事を意味する（図 7 (a) の右参照）．この時外部入力情報が完全に伝達される． α によって上限をつけないと全てこの解になってしまう．

2. 興奮型（ α が中程度の時）

α が中程度の場合，図 7 (b) の左に示される，ステップ関数を組み合わせた様な 3 つの平坦な部分を持つ関数が選ばれる．この関数は 3 つの不動点をもち左端の不動点が安定で，残り 2 つは不安定である．ネットワーク全体でも入力がなければ全ての要素が安定な不動点に吸引される．外部からの入力がある時も，入力が小さければ安定な不動点近傍に留まる．しかし入力がある大きさ以上になり中央の不動点を超えると，中央の平坦部まで増加し，右の平坦部を経由して左の吸引不動点へと大回りして帰ってくる．外部入力がある閾値を超えると，その情報がパルス状に次々下流の要素へ伝わっていく様子が図 7 (b) の右図時系列データから見られる．

3. 振動型（ α が小さい時）

α が小さいときは，図 7 (c) の左に示される関数が選ばれる．この関数は安定な 2 周期点を持ち，入力がなければ系全体で 2 周期振動をしている．入力がある時，2 周期性は保ちつつ，振幅の変化や位相の反転が生じているのが時系列データから見て取れる（図 7 (c) の右図参照）．

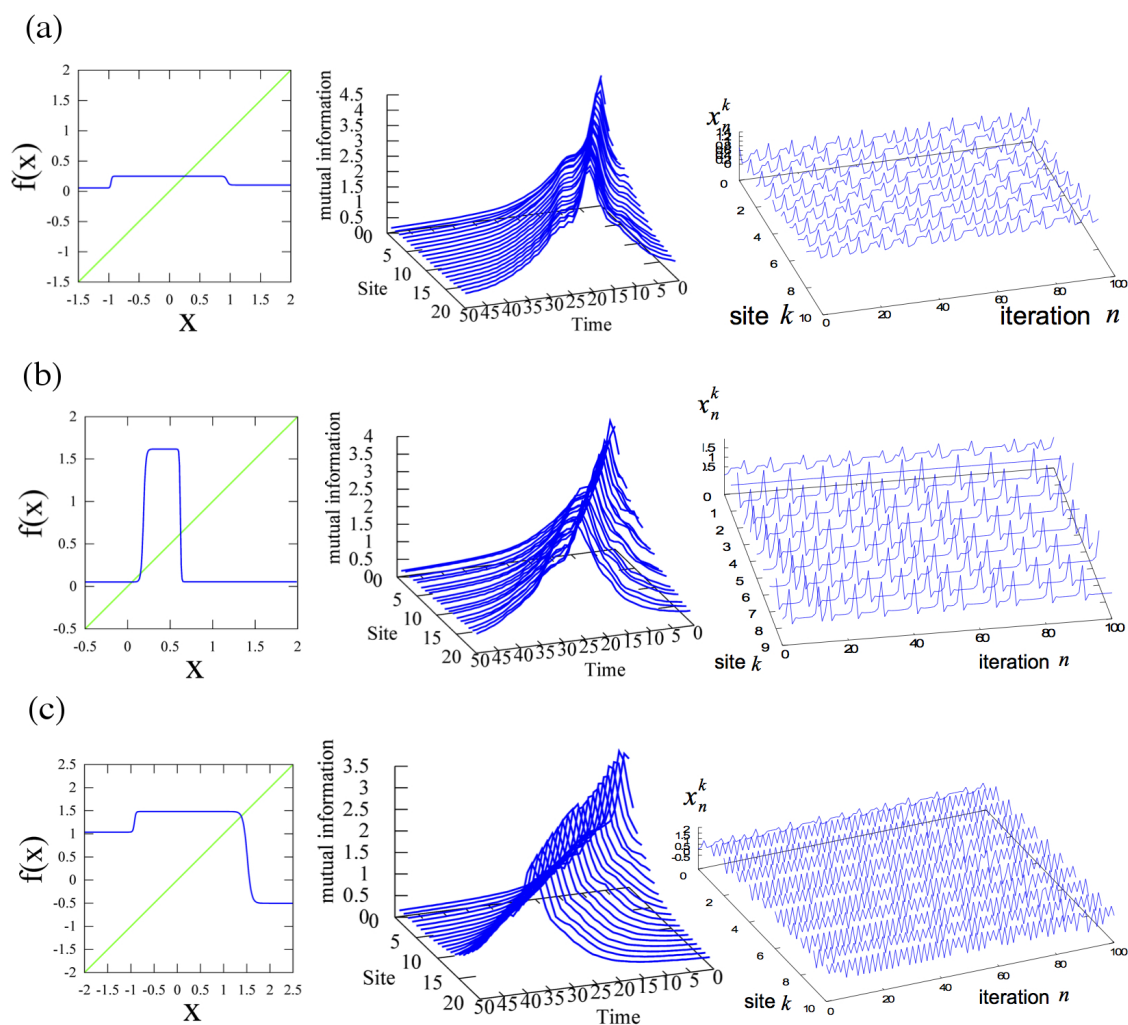


図 7 上から順に透過型，興奮型，振動型のサンプルになっている．また左から順に写像，相互情報量，時系列データを例示している．

ここでは例示しないが、結合強度の他にも最終的に選ばれる関数に影響を与える要素が他にもいくつかあることがこのシミュレーションから明らかになった．一つは外部入力 の性質である．外部入力 が周期的であると その周期と同じ、もしくは倍周期の関数が選ばれる興奮型が現れるのはカオスや乱数などの入力である必要がある．

また、各要素に一様乱数によるノイズを加えると興奮型が選ばれる結合領域が広がる．

結論と今後の課題

相互情報量の最大化というネットワーク全体の機能に対して選択を行った結果、各要素が自己組織的に機能分化した。特に結合強度の上限が中程度以下の場合においては神経細胞の活動電位の様な振る舞いが見られる。この結果は、神経細胞の振る舞いが、進化上情報伝達能力あるいは相互情報量の最大化という拘束条件のもと、自己組織的に現れたものであることを示唆しているものと考ええる。

今後の課題としては一方向結合を拡張し、より複雑なネットワークを対象とした研究が考えられる。また本研究で評価した情報伝達能力に、情報の保持や他の評価方法を組み合わせることで、複雑なネットワークの自己組織化が促されることが期待される。

参考文献

- [1] I. Tsuda and H. Shimizu, "Self-organization of the dynamical channel", *Complex Systems – Operational Approaches in Neurobiology, Physics and Computers* (ed. H. Haken, Springer-Verlag, 1985) 240.
- [2] K. Matsumoto and I. Tsuda, "Noise-induced order", *J. Stat. Phys.* **31** (1983) 87.
- [3] K. Matsumoto and I. Tsuda, "Extended information in one-dimensional maps", *Physica D* **26** (1987) 347.
- [4] K. Matsumoto and I. Tsuda, "Calculation of information flow rate from mutual information", *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988) 1405.
- [5] Larry J. Eshelman, "The CHC Adaptive Search Algorithm: How to Have Safe Search When Engaging in Nontraditional Genetic Recombination", *Foundations of Genetic Algorithms* (Morgan Kaufmann Publishers, 1991)

Absolutely continuous invariant measures for non-Markov fibred systems deriving from Banach limits

Hisayoshi TOYOKAWA

1 Introduction

The existence of a finite invariant measure is one of the most important problem in ergodic theory since the establishment of some ergodic theorem is very interesting problem for ergodic theory and dynamical systems. In this paper, we consider necessary and sufficient conditions for the existence of finite invariant measures by using Banach limits. The method of construction of finite invariant measures by using Banach limits is due to [5] and [11]. They refer only to the existence of an equivalent invariant probability measure. In this paper, we show that equi-uniformly absolute continuity implies the existence of an absolutely continuous finite invariant measure which may be useful to consider dissipative systems.

In section 2, we prepare necessary definitions including the definition of Banach limits. In section 3, we show that equi-uniformly absolute continuity implies a set function deriving from Banach limits is an absolutely continuous finite invariant measure. Further we show that the support of this absolutely continuous finite invariant measure deriving from Banach limits absorbs almost all orbits. We also show the necessary and sufficient conditions for the existence of an equivalent probability measure. In section 4, we consider sufficient conditions for the existence of an absolutely/equivalent finite invariant measure on fibred systems which is partially due to [9].

Throughout this paper, we assume that $(X, \mathcal{F}, m)$ is a measure space where $\mathcal{F}$ is σ -algebra of X and m is a measure on $\mathcal{F}$ and assume that $T : X \rightarrow X$ is a transformation. We do not necessarily assume that the transformation T is invertible. We denote by $\ell^\infty = \{\{a_n\}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \geq 1} |a_n| < \infty\}$ and $\|\{a_n\}_n\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |a_n|$. Then $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ is a Banach space ([7]).

2 Preliminaries

Definitions

Let $(X, \mathcal{F})$ be a measurable space, m, μ, ν_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) be measures on $\mathcal{F}$, and $T : X \rightarrow X$ be a transformation.

1. T is **measurable**. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A \in \mathcal{F}, T^{-1}A \in \mathcal{F}$.

2. T is **nonsingular** with respect to m . $\stackrel{\text{def}}{\iff} [m(A) = 0 \Rightarrow m(T^{-1}A) = 0]$.
3. m is **T -invariant**. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A \in \mathcal{F}, m(T^{-1}A) = m(A)$.
4. (T, m) is **ergodic**.
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} [A \in \mathcal{F}, T^{-1}A = A \pmod{m} \Rightarrow m(A) = 0 \text{ or } m(X \setminus A) = 0]$.
5. μ is **absolutely continuous** with respect to m (which is denoted by $\mu \ll m$).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} [m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0]$.
6. A sequence of measures $\{\nu_n\}_n$ is **equi-uniformly absolutely continuous** with respect to a measure μ (which is denoted by $\{\nu_n\}_n \ll \mu$ (**equi-unif.**)).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, [\mu(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \nu_n(A) < \epsilon]$.
7. μ is **uniformly absolutely continuous** with respect to $\{\nu_n\}_n$ (which is denoted by $\{\nu_n\}_n \gg \mu$ (**unif.**)).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, [\inf_{n \geq 1} \nu_n(A) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \epsilon]$.
8. m and μ are **equivalent** (which is denoted by $m \sim \mu$).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} m \ll \mu \text{ and } \mu \ll m \text{ (unif.)}$.
9. $\{\nu_n\}_n$ and m is **uniformly equivalent**. (which is denoted by $\{\nu_n\}_n \sim m$ (**unif.**)).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \{\nu_n\}_n \ll m \text{ (equi-unif.) and } \{\nu_n\}_n \gg m \text{ (unif.)}$.
10. A linear functional $Lim : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ is a **Banach limit**.
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} Lim$ satisfies the following three conditions:
 - (1) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty, x_n \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow Lim(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \geq 0$;
 - (2) $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty, Lim(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = Lim(\{x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}})$.
 - (3) $Lim(\{1, 1, 1, \dots\}) = 1$.
11. $W \subset X$ is a **wandering set** for T .
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} T^{-k}W \cap T^{-l}W = \emptyset \pmod{m} (\forall k, \forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ with } k \neq l)$
12. $W \subset X$ is a **weakly wandering set** for T (with a **weakly wandering sequence** $\{n_i\}_i$).
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \{n_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, s.t. $T^{-n_i}W \cap T^{-n_j}W = \emptyset \pmod{m} (\forall i, \forall j \in \mathbb{N} \text{ with } i \neq j)$.
13. (T, m) is **conservative**. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall W \in \mathcal{F} : \text{a wandering set, } m(W) = 0$.

Remark A ([10])

It is known that Banach limits exist and for any Banach limit Lim satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+j} \right) \leq Lim(\{x_n\}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \geq 0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+j} \right) \quad (\forall \{x_n\}_n \in \ell^\infty).$$

Moreover, left hand side and right hand side of the above inequality are also Banach limits.

3 The existence of a finite invariant measure

Theorem 3.1

Let $(X, \mathcal{F}, m)$ be a probability space and $T : X \rightarrow X$ be measurable. Assume that $\{m \circ T^{-n}\}_n \ll m$ (equi-unif.). Then, there exists an absolutely continuous T -invariant probability measure μ with respect to m .

Sketch of proof

In general, a set function $\mu(\cdot) = \text{Lim}(\{m \circ T^{-n}\}_n)$ satisfies the following properties:

1. $\mu(X) = 1$ and $\mu(\emptyset) = 0$;
2. μ satisfies finite additivity.
3. $\mu(A) = 0$ if $m(A) = 0$.
4. $\mu \circ T^{-1} = \mu$.

Equi-uniformly absolute continuity of $\{m \circ T^{-n}\}_n$ with respect to m implies that a set function $\mu(\cdot) = \text{Lim}(\{m \circ T^{-n}\}_n)$ satisfies countable additivity.

Proposition 3.2

Let $(X, \mathcal{F}, m)$ be a probability space and $T : X \rightarrow X$ be a measurable and nonsingular transformation. If a set function $\mu(\cdot) = \text{Lim}(\{m \circ T^{-n}(\cdot)\}_n)$ is an absolutely continuous T -invariant probability measure with respect to m . Then, it follows that

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n} \left[\frac{d\mu}{dm} > 0 \right] = X \quad \text{mod } m.$$

Remark B

If there exists finite invariant measure μ and (T, m) is ergodic, then $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n} \left[\frac{d\mu}{dm} > 0 \right] = X \quad \text{mod } m$ holds.

Remark C

Aaronson shows in [1] (p.36,45) the following property. Let $(X, \mathcal{F}, m)$ be a σ -finite measure space and $T : X \rightarrow X$ be a measurable and nonsingular transformation. If (T, m) is conservative and ergodic, then, up to multiplication by constants, there is at most one absolutely continuous σ -finite T -invariant measure with respect to m . Moreover, if there exists such measure μ , then $\mu \sim m$.

Theorem 3.3

Let $(X, \mathcal{F}, m)$ be a probability space and $T : X \rightarrow X$ be measurable and nonsingular with respect to m . Then, the followings are equivalent.

- (A) There exists an equivalent T -invariant probability measure μ with respect to m .
- (B) $m(A) > 0 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} m(T^{-n}A) > 0$.
- (C) $m(A) > 0 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i}A) > 0$.
- (D) $m(A) > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(T^{-i}A) > 0$.
- (E) $m(A) > 0 \Rightarrow A$ is not weakly wandering set.
- (F) $\{m \circ T^{-n}\}_n \sim m$ (unif.).

Remark D

The equivalence conditions in theorem 3.3 except (F) are shown in case when T is invertible in [5] and when T is non-invertible in [11].

4 Fibred systems

Definitions

Let $(X, \mathcal{B}, m)$ be a probability space and $T : X \rightarrow X$ be a measurable transformation.

1. Let $\{Z_k\}_{k \in I}$ be a partition of X with an index set I . Z is a **cylinder of rank n** .
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} Z$ is defined by $Z_{k_1} \cap T^{-1}Z_{k_2} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}Z_{k_n}$ for some $k_1, k_2, \dots, k_n \in I$.
 We denote this cylinder by $Z_{k_1 k_2 \dots k_n}$ and denote by $\mathcal{Z}^{(n)}$ the family of all cylinders of rank n and set $\mathcal{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}^{(n)}$.

Let $(X, \mathcal{B}, m)$ be a standard probability space and $T : X \rightarrow X$ be a measurable and non-singular transformation. We assume that there exists $\{Z_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{B}$ a partition of X s.t. $TZ_k \in \mathcal{B}$ ($\forall k \in I$) and assume that $A \in \mathcal{B} \cap TZ_k$ implies $T|_{Z_k}^{-1}(A) \in \mathcal{B} \cap Z_k$ ($\forall k \in I$). Then, by measurable image theorem (1.0.3 [1]), $T^n Z_{k_1 \dots k_n} \in \mathcal{B}$ ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall k_1, \dots, k_n \in I$). Hence, $\{V_k | TZ_k \rightarrow Z_k\}_{k \in I}$ local inverses of $T|_{Z_k}$ and $V_{k_1 k_2 \dots k_n} = V_{k_1} \circ V_{k_2} \circ \dots \circ V_{k_n}$ (on $T^n Z_{k_1 k_2 \dots k_n}$) satisfy that $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k_1, \dots, k_n \in I, V_{k_1 \dots k_n} A \in \mathcal{B} \cap Z_{k_1 \dots k_n}$ ($\forall A \in \mathcal{B} \cap T^n Z_{k_1 \dots k_n}$) and $V_{k_1 \dots k_n}(N) = 0$ if $N \in \mathcal{B} \cap T^n Z_{k_1 \dots k_n}$ satisfies $m(N) = 0$ by nonsingularity of T .

Therefore, we have, by Radon-Nikodym theorem, that there exists a unique non negative $L^1(X, m)$ function

$$\frac{d(m \circ V_{k_1 \dots k_n})}{dm}(x) \quad (a.e. x \in T^n Z_{k_1 \dots k_n}).$$

Under the above assumption, we can define R-cylinders.

2. A cylinder $Z_{k_1 \dots k_n} \in \mathcal{Z}^{(n)}$ is an **R-cylinder** with constant $C \geq 1$.
 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ It holds that

$$\text{ess sup}_{x \in T^n Z_{k_1 \dots k_n}} \frac{d(m \circ V_{k_1 \dots k_n})}{dm}(x) \leq C \text{ess inf}_{x \in T^n Z_{k_1 \dots k_n}} \frac{d(m \circ V_{k_1 \dots k_n})}{dm}(x).$$

We denote $\mathcal{G}(C, T)$ by all R-cylinders with constant $C \geq 1$.

We call a dynamical system $(X, \mathcal{B}, m, T)$ a fibred system if the system satisfies the following properties:

- (a) $(X, \mathcal{B}, m)$ is a standard probability measure space;
- (b) T is measurable and nonsingular.
- (c) $\exists \{Z_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{B}$: a partition of X with the countable index set I
s.t. $TZ_k \in \mathcal{B}$ ($\forall k \in I$).
- (d) $\exists \{V_k \mid TZ_k \rightarrow Z_k\}_{k \in I}$: the family of local inverses of $T|_{Z_k}$.
- (e) $\mathcal{Z}$ generates $\mathcal{B}$ (i.e. the smallest σ -algebra containing $\mathcal{Z}$ is $\mathcal{B}$).

Proposition 4.1

Let $(X, \mathcal{B}, m, T)$ be a fibred system and $\mathcal{G}(C, T) = \mathcal{Z}$ for some constant $C \geq 1$.

If $\exists D_1 > 0$, $\forall q \geq 1$, $\forall Z_{k_1 \dots k_q} \in \mathcal{Z}^{(q)}$, $\forall p \geq 1$, $\forall Z_{l_1 \dots l_p} \in \mathcal{Z}^{(p)}$, with $Z_{l_1 \dots l_p k_1 \dots k_q} \in \mathcal{Z}^{(p+q)}$, it holds that

$$m(T^{p+q} Z_{l_1 \dots l_p k_1 \dots k_q}) \leq D_1 m(T^q Z_{k_1 \dots k_q}) m(T^p Z_{l_1 \dots l_p}),$$

then there exists an absolutely continuous T -invariant probability measure with respect to m .

Sketch of proof

We can calculate directly $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall Z \in \mathcal{Z}$ ($Z = Z_{k_1 \dots k_q}$ for some $k_1, \dots, k_q \in I$),

$$\begin{aligned} m(T^{-p} Z_{k_1 \dots k_q}) &= \sum_{l_1, \dots, l_p \in I} m(V_{l_1 \dots l_p}(Z_{k_1 \dots k_q} \cap T^p Z_{l_1 \dots l_p})) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_p \in I} \int_{T^{q+p}(Z_{l_1 \dots l_p k_1 \dots k_q})} \frac{d(m \circ V_{l_1 \dots l_p})}{dm} \circ V_{k_1 \dots k_n} \frac{d(m \circ V_{k_1 \dots k_n})}{dm} dm \end{aligned}$$

and since $\exists C \geq 1$, s.t. $\mathcal{G}(C, T) = \mathcal{Z}$, we have that

$$\frac{d(m \circ V_{k_1 \dots k_n})}{dm} \leq C \frac{1}{m(T^n Z_{k_1 \dots k_n})} m(Z_{k_1 \dots k_n}).$$

Therefore, the assumption $m(T^{p+q} Z_{l_1 \dots l_p k_1 \dots k_q}) \leq D_1 m(T^q Z_{k_1 \dots k_q}) m(T^p Z_{l_1 \dots l_p})$, implies $\{m \circ T^{-n}\}_n \ll m$ (equi-unif.) and it follows from theorem 3.1 that there exists an absolutely continuous finite invariant measure.

Remark E

It is known (see [12]) that for $(X, \mathcal{F}, m, T)$ a fibred system with $\mathcal{G}(C, T) = \mathcal{L}$ for some constant $C \geq 1$, if $\exists D_2 > 0$, $\forall n \geq 1$, $\forall Z_{k_1 \dots k_n} \in \mathcal{Z}^{(n)}$, it holds that

$$m(T^n Z_{k_1 \dots k_n}) > D_2, \quad (\dagger)$$

then there exists an equivalent T -invariant probability measure with respect to m .

Note that if $(X, \mathcal{B}, m, T)$ is a fibred system satisfying Markov property (i.e. $Z_k \cap TZ_l \neq \emptyset$ implies $Z_k \subset TZ_l \forall k, l \in I$), then, since it holds that $T^n Z_{k_1 \dots k_n} = TZ_{k_n} (\forall k_1, \dots, k_n \in I)$, it is easy to see that the assumption of proposition 4.1 implies the assumption $(\dagger)$.

References

- [1] J. Aaronson, An Infinite Ergodic Theory. American Mathematical Society (1997)
- [2] J. Aaronson, M. Denker, M. Urbański, Ergodic Theory for Markov Fibred Systems and Parabolic Rational Maps. American Mathematical Society, Vol.337, No.2 (1993): 495-548
- [3] N. Dunford, and J. T. Schwartz, 1957 Linear Operators. Part 1. General Theory. Wiley, New York.
- [4] S. Eigen, A. Hajian, Y. Ito, V. Prasad, Weakly Wandering Sequences in Ergodic Theory. Springer (2014)
- [5] A. Hajian, S. Kakutani, Weakly wandering sets and invariant measures. Trans. Am. Math. Soc. (1964):110, 136-151
- [6] A. Lasota, and M. C. Mackey, 1985, Probabilistic properties of deterministic systems, Cambridge Univ. Press.
- [7] Pedersen, Analysis Now Revised Printing. Springer (1995)
- [8] H.L.Royden, P.M.Fitzpatrick Real Analysis Fourth Edit. Pearson (2010)
- [9] F. Schweiger, Numbertheoretical Endomorphism with σ -Finite Invariant Measure. Israel Journal of Mathematics, 21, No.4 (1975)
- [10] L. Sucheston, Banach Limits. The American Mathematical Monthly, 74, (1967): 308-311
- [11] L. Sucheston, On existence of finite invariant measures. Math. Zeitschrift, 86, (1964): 327-336
- [12] M. Yuri, On a Bernoulli Property for Multi-dimensional Mappings with Finite Range Structure. Tokyo J. Math, Vol.9, ,No.2, (1986)

マーモセットの構造的・機能的 MRI データを用いた数理モデル

塚田 啓道

沖縄科学技術大学院大学

講演要旨

脳には機能の異なる多数の領域が存在し、様々なスケールでネットワークを形成し情報交換を行っている。そのネットワークは構造的にも機能的にも高度に組織化され、環境変化への柔軟な対応を可能にしている。近年の計測技術の発展により、これらの構造的（解剖学的）ネットワークと機能的（神経活動）ネットワークは、神経画像処理技術を用いることで計測が可能になってきた。マクロレベルでは拡散 MRI や機能的 MRI、メゾスコピックレベルでは神経トレーサーや二光子イメージング、皮質脳波計測(EEG)といった計測技術である。MRI 計測のようなマクロレベルの計測においては全脳レベルのデータが測定可能であるが、局所神経集団のスパイク発火レベルのダイナミクスは捉えられない。一方、EEG のようなメゾスコピックレベルの計測では局所神経集団のミリ秒時間分解能のダイナミクスは計測可能であるが、脳全体の活動を同時に計測することはできない。脳機能ネットワークの全容解明のためには、これらのスケールの異なる計測データを統合し、脳全体の活動を包括的に捉える必要がある。これらの実験データを統合し脳機能の理解と予測を行う手段として、数理モデルを活用することが有効であると考えられる。

脳の大規模データを使った数理モデルの研究においては、欧州のヒューマン・ブレイン・プロジェクトや米国のブレイン・イニシアティブに代表される国家プロジェクトが世界をリードしている。欧州では Dr. McIntosh 等による The Virtual Brain Project があり、ヒトの構造的結合データをもとにマクロスケールの全脳ネットワークを構築しダイナミクスを解析する手法が多数提案されおり、ソフト開発も進んでいる [1]。米国では、アレン研究所でマウスの全脳解剖学的結合マップの構築が精力的に行われている [2]。国内においてはこうした欧米の動向も踏まえながら、マーモセットの脳を対象とした「革新的技術による脳機能ネットワークの全容解明プロジェクト」が 2014 年度から開始している [3]。これらのプロジェクトにおいて、マクロスコピックの解析はヒト MRI の研究で、メゾスコピックの解析はマウスで行われているものの、数理モデルと実験データをマルチスケールに統合した研究は未開拓である。

本講演では、これまでのメゾスコピックな局所回路モデルの研究 [4][5]と現在進行中のマーモセットの構造的・機能的 MRI データを用いたマクロスコピック全脳モデルの研究を紹介し、数理モデルによる脳研究の今後の可能性について議論を行った。将来的には、これら

の数理モデルを精神・神経疾患患者のデータに適用することで、精神・神経疾患患者の治療への応用を目指している。

参考文献

- [1] Sanz-Leon P, Knock SA, Spiegler A, Jirsa VK: Mathematical framework for large-scale brain network modeling in The Virtual Brain. *Neuroimage*, 111 (2015) 385–430.
- [2] Oh J, Byrd AL, Deming C, Conlan S, Program NCS, Kong HH, et al.: Biogeography and individuality shape function in the human skin metagenome. *Nature*, 514 (2014) 59–64.
- [3] Okano H, Miyawaki A, Kasai K: Brain/MINDS: brain-mapping project in Japan *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 370 (2015) 1–9.
- [4] Tsukada H, Yamaguti Y & Tsuda I: Transitory memory retrieval in a biologically plausible neural network model. *Cogn. Neurodyn*, 7 (2013) 409–416.
- [5] Tsukada H, Fujii H, Aihara, A, Tsuda I: Computational model of visual hallucination in dementia with Lewy bodies, *Neural Networks*, 62 (2015) 73–82.