HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第14回数学総合若手研究集会 ： 数学の交叉点
Author(s)	半田, 悟; 小森, 大地; 藤沢, 好 他
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 173, 1-569
Issue Date	2018-02-28
DOI	https://doi.org/10.14943/82138
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/68462
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech173.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 14 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 14th Mathematics Conference for Young Researchers

－ MCYR14 －

世話人

半田悟 (代表) 小森大地 藤沢好 Albert Rodríguez Mulet

青木雅允 上島芳倫 福田一貴 矢不俊文

札幌，北海道大学，2018

Series#173.February, 2018

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.

#152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.

#153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.

#154 N. Hu, Doctoral thesis "Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces", 69 pages. 2012.

#155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.

#156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.

#157 D. Suyama, T. Ito, M. Kuroda, Y. Goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagwa, 第 9 回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.

#158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.

#159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka, Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.

#160 M. Kuroda, Y. Goto, K.Sasaki, S. Futakuchi, D. Funakawa, T. Yamashita, and K. Wada, 第 10 回数学総合若手研究集会, 335 pages. 2014.

#161 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 39th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 147 pages. 2014.

#162 D. Funakawa, T. Kagaya, Y. Kabata, K. Sasaki, H. Takeda, Y. Chino, A. Tsuchida, T. Yamashita, and K. Wada, 第 11 回数学総合若手研究集会, 359 pages. 2015.

#163 S. Jimbo, S. Goto, Y. Kohsaka, H. Kubo, Y. Maekawa, and M. Ohnuma, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation - International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday- , 47 pages. 2015.

#164 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 122 pages. 2015.

#165 A. Tsuchida, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, Y. Kabata, H. Saito, F. Nakamura and S. Honda, 第 12 回数学総合若手研究集会, 373 pages. 2016.

#166 S.-I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 110 pages. 2016.

#167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.

#168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodrguez Mulet, 第 13 回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.

#169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations - In memory of Professor Taira Shirota - , 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されているこの数学総合若手研究集会も今年で第 14 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。当研究集会を支援して下さる皆様のおかげで研究集会としての規模も年々大きくなり、今年は幅広い分野の若手研究者の方々82 名にご講演して頂くこととなりました。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション (60 分) とパラレルセッション (30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分け、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北大数学教室の先生方
- 数学事務の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2018 年 2,3 月
MCYR14 世話人
半田悟 (代表)　小森大地　藤沢好　Albert Rodríguez Mulet
青木雅允　上島芳倫　福田一貴　矢不俊文

第14回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 14th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2018年2月27日 (火)～ 3月2日 (金)

場所： 北海道大学　理学部5号館

S：5-203大講義室 (シングル会場)　A：5-305(パラレル会場)
B：5-206(パラレル会場)　C：5-205(パラレル会場)
D：5-304(パラレル会場)　E：5-201(ポスター会場・休憩所)

URL:　http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/∼wakate/mcyr/2018/program.html

• シングルセッション (会場S)

佐藤 純　(Jun SATO)　東京大学先端科学技術研究センター数理創発システム分野西成研究室
可積分系におけるソリトンの量子古典対応 3

板倉 恭平　(Kyohei ITAKURA)　神戸大学大学院理学研究科
Spectral theory for repulsive Hamiltonians 13

大森 源城　(Genki OMORI)　埼玉大学大学院理工学研究科
整ホモロジー3球面とハンドル体群の部分群 19

榎園 誠　(Makoto ENOKIZONO)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Slope equality of plane curve fibrations 23

中屋敷 亮太　(Ryota NAKAYASHIKI)　千葉大学大学院理学研究科
力学的境界条件下での特異拡散方程式 27

• パラレルセッション (会場A)

相川 勇輔　(Yusuke AIKAWA)　北海道大学大学院理学院数学専攻/産業技術総合研究所 (AIST)
Elliptic Curve Method with Complex Multiplication Method 39

須山 雄介　(Yusuke SUYAMA)　大阪市立大学大学院理学研究科
Building set に伴うトーリック Fano 多様体 49

井上 翔太　(Shota INOUE)　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
ディリクレ L 関数の導関数を含む非自明零点を渡る和について 55

高坂 太智　(Taichi KOUSAKA)　九州大学大学院数理学府数学専攻
Generalized zeta function formulas for a simple graph with bounded degree 61

藤田 遼　(Ryo FUJITA)　京都大学理学研究科数学教室
ADE型量子ループ代数のある加群圏の構造について 65

齋藤 耕太　(Kota SAITO)　名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
等差数列の存在性とフラクタル次元の関係性について 75

元良 直輝 (Naoki GENRA) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
$\mathcal{W}$ 代数の coproduct 構造 79

松澤 陽介 (Yohsuke MATSUZAWA) 東京大学大学院数理科学研究科
Arithmetic and dynamical degrees of semiabelian varieties. 85

佐野 薫 (Kaoru SANO) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
高さ関数の漸近挙動と力学系的 MORDELL-LANG 型の問題について 89

藤田 直樹 (Naoki FUJITA) 東京工業大学理学院数学系
Folding procedure for Newton-Okounkov polytopes of flag varieties 95

加藤 正輝 (Masaki KATO) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
二重余接関数の加法型公式 105

松原 祐貴 (Yuki MATSUBARA) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
放物接続のモジュライ空間のコホモロジーについて 115

植松 哲也 (Tetsuya UEMATSU) 名城大学理工学部数学科
対角的 3 次曲線の Brauer 群の明示的な表示について 121

加藤 義久 (Yoshihisa KATO) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
$O(E_6, \mathbf{Z})$ – 不変調和多項式に付随するテータ級数の構成 131

石川 勲 (Isao ISHIKAWA) 理化学研究所 AIP/慶應義塾大学
ASAI 表現に付随する EPSILON 因子の比較について 141

岡本 健太郎 (Kentaro OKAMOTO) 九州大学大学院数理学府
組み紐のゼータ函数と q-series 147

鯉江 秀行 (Hideyuki KOIE) 東京理科大学 理学研究科 数学専攻
自己入射中山多元環の Hochshild extension algebra の quiver 表示と関係式について 157

岡部 峻典 (Shunsuke OKABE) 神戸大学大学院システム情報学研究科
On generic structures of amalgamation classes of finite structures 163

• パラレルセッション (会場 B)

寺本 圭佑 (Keisuke TERAMOTO) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
非有界な関数を平均曲率に持つ特異回転面について 171

佐藤 直飛 (Naoto SATOH) 北海道大学大学院理学院数学専攻
統計多様体とヘッセ多様体における局所同型写像の構成について 177

稲垣 友介 (Yusuke INAGAKI) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
On Fuchsian loci of $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$-Hitchin components of a pair of pants 181

松雪 敬寛 (Takahiro MATSUYUKI) 東京工業大学理学院数学系数学コース
ホモトピー代数を用いたファイバー束の特性類の構成 187

野坂 康祐 (Kosuke NOSAKA) 京都教育大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育専修
An Algebraic Representation of Flat Origamis 191

高橋 典寿 (Norihisa TAKAHASHI) 立命館大学理工学研究科基礎理工学専攻
向き付可能曲面上の有限巡回群作用について 201

陳 潔 (Jie CHEN) 東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻
Some distance functions in knot theory 205

照屋 靖志 (Yasushi TERUYA) 九州大学大学院理学府
Convex property of Wulff shapes and regularity of their convex integrands 211

Joseph CHO 神戸大学理学研究科数学専攻
Bianchi-Backlund transformation of spacelike constant mean curvature surfaces in Minkowski 3-space 215

数川 大輔 (Daisuke KAZUKAWA) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
エネルギー汎関数の収束と曲率次元条件の安定性のための新しい条件 219

中島 啓貴 (Hiroki NAKAJIMA) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Isoperimetric Rigidity and Distributions of 1-Lipschitz Functions 227

久野 恵理香 (Erika KUNO) 埼玉大学大学院理工学研究科
境界付き有向曲面のトレリ群の写像類群内での歪み度について 231

雪田 友成 (Tomoshige YUKITA) 早稲田大学教育学研究科教科教育学専攻数学コース
4 次元双曲理想コクセター多面体の構成と増大度 235

小林 和志 (Kazushi KOBAYASHI) 千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻
高次元複素トーラス上の射影的平坦束の成す完全三角系列の幾何構造 241

原 健太郎 (Kentaro HARA) 東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻
局所対称ケーラー多様体の変形量子化 251

長岡 高広 (Takahiro NAGAOKA) 京都大学大学院数学・数理解析専攻数学系
ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形空間について 257

福田 一貴 (Ikki FUKUDA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
多項式減衰する初期値を持つ分散効果を伴う粘性保存則方程式の解の長時間挙動 267

• パラレルセッション (会場C)

浅原 啓輔 (Keisuke ASAHARA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Bogoliubov 変換を用いた抽象的 ϕ^2-モデルの解析 275

澤田 友佑 (Yusuke SAWADA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
The affine property of quasi-free states on self-dual CAR algebras 279

古屋 貴士 (Takashi FURUYA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
The factorization method for the acoustic inverse scattering problems 283

伊縫 寛治 (Kanji INUI) 京都大学大学院人間・環境学研究科 共生人間学専攻数理科学講座現象数理論
Sierpiński gasket 上のエネルギー密度関数の不連続性 287

Albert RODRÍGUEZ MULET 北海道大学大学院理学院数学専攻
細い直線的な弾性体の固有振動 293

平良 晃一 (Koichi TAIRA) 東京大学大学院数理科学研究科
Strichartz estimates for non-degenerate Schrödinger equations 299

玉岡 優一 (Yuichi TAMAOKA) 関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数 303

中村 謙太 (Kenta NAKAMURA) 九州大学大学院数理学府
p-Sobolev flow の解について 309

竹井 優美子 (Yumiko TAKEI) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
超幾何微分方程式の Voros 係数の位相的漸化式による表示 313

中村 憲史 (Kenji NAKAMURA) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
双曲型 Stokes 方程式の解に対する局所エネルギー減衰定理 317

只野 之英 (Yukihide TADANO) 東京大学大学院数理科学研究科
様々な格子上の離散シュレディンガー作用素の長距離散乱理論 325

相原 祐太 (Yuta AIHARA) 北海道大学大学院理学研究院
A Functional Directional Derivative in Infinite Dimensional Spaces and Its Application to $\bar{\partial}$-equations 333

藤野 弘基 (Hiroki FUJINO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数について 339

小池 開 (Kai KOIKE) 慶應義塾大学理工学研究科
分子気体力学による流体中の物体運動の解析 349

Denny lvanal HAKIM 首都大学東京大学院理工学研究科
Complex interpolation of B^u_w-function spaces 359

原 宇信 (Takanobu HARA) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
p-優調和関数への CARLESON 評価について 363

朴 佳南 (Kanam PARK) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
q 超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形 367

小山 剛史 (Takeshi KOYAMA) 岡山大学大学院教育学研究科教科教育学専攻
Carathéodory の核収束定理について 373

• パラレルセッション (会場D)

草野 元紀 (Genki KUSANO) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
パーシステントホモロジーの機械学習 383

渡邉 天鵬 (Takayuki WATANABE) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
マルコフシステムのランダム複素力学系 387

神田 智弘 (Tomohiro KANDA) 九州大学大学院数理学府
グラフ上のボーズ・アインシュタイン凝縮と非因子性，その応用について 395

中井 拳吾 (Kengo NAKAI) 東京大学 数理科学研究科
粘性項を変形した流体方程式に対する大域解の有界性と Energy Cascade の考察 403

石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA) お茶の水女子大学理学部数学科
Young tableau を用いた rooted tree の数え上げ 407

植田 優基 (Yuki UEDA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
初期分布つき古典、自由ブラウン運動の時間発展による単峰性 413

荒武 永史 (Hisashi ARATAKE) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
Bicategory of Classical First-Order Theories 423

佐竹 翔平 (Shohei SATAKE) 神戸大学大学院システム情報研究科情報科学専攻
Finite Euclidean graphs and related combinatorial problems 431

顧 玉杰 (Yujie GU) 筑波大学大学院システム情報工学研究科社会工学専攻
New upper bounds for anti-collusion schemes: A graph theoretical approach 439

藤堂 真登 (Masato TODO) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Spiking Neural Network にみられる線形分離性 443

田中 吉太郎 (Yoshitaro TANAKA) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
分化の波に対する数理モデルの連続化と Planar 進行波解への数理解析 447

Tan Nhat TRAN 北海道大学大学院理学院数学専攻
G-Tutte polynomial via algebraic combinatorics, topology and enumeration 457

田中 悠太 (Yuta TANAKA) 早稲田大学大学院数学応用数理専攻
ソリトンとネットワーク 467

小林 俊介 (Shunsuke KOBAYASHI) 明治大学大学院理工学研究科数学専攻
反応拡散系に現れるカオス的挙動 477

船川 大樹 (Daiju FUNAKAWA) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
2 次元 4 状態スプリットステップ量子ウォークの固有値解析 487

山形 颯 (So YAMAGATA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Discriminantal arrangement とプリュッカー行列、グラスマン多様体の超曲面 497

• ポスターセッション (会場 E)

辻栄 周平 (Shuhei TSUJIE) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
自明理想グラフと補可約グラフの彩色対称関数 509

澤田 すみれ (Sumire SAWADA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Discriminantal arrangement and Pappus' Theorem for quadrics in Grassmannian 515

村井 涼 (Ryo MURAI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Persistent Stiefel-Whitney homology classes for posets and categories 521

冨永 隼人 (Hayato TOMINAGA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
最隣接相互作用する量子スピン系について 531

竹内 博志 (Hiroshi TAKEUCHI) 東北大学大学院理学研究科
対応のパーシステントホモロジー；箙の表現論の視点から 535

弓林 司 (Tsukasa YUMIBAYASHI) 大妻女子大学社会情報学部
無限個の高次元周期再帰方程式の導出アルゴリズムについて 543

宮永 潤 (Jun MIYANAGA) 東北大学大学院理学研究科
ランダム方体複体におけるパーシステントベッチ数の極限定理について 551

上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開 559

世話人： 半田悟 (代表) 小森大地 藤沢好 Albert Rodríguez Mulet
青木雅允 上島芳倫 福田一貴 矢不俊文

Schedule

2月27日 (火)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	佐藤 純 (数理)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	相川 勇輔 (代数)	寺本 圭佑 (幾何)	浅原 啓輔 (解析)	草野 元紀 (数理)
12:00-12:30	須山 雄介 (代数)	佐藤 直飛 (幾何)	澤田 友佑 (解析)	渡邉 天鵬 (解析)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	井上 翔太 (代数)	稲垣 友介 (幾何)	古屋 貴士 (解析)	神田 智弘 (数理)
14:40-15:10	高坂 太智 (代数)	松雪 敬寛 (幾何)	伊縫 寛治 (解析)	中井 拳吾 (数理)
15:30-16:00	藤田 遼 (代数)	野坂 康祐 (幾何)	Albert Rodríguez Mulet(解析)	石川 彩香 (代数)
16:10-16:40	齋藤 耕太 (代数)	高橋 典寿 (幾何)	平良 晃一 (解析)	植田 優基 (解析)
16:50-17:20	元良 直輝 (代数)	陳 潔 (幾何)	玉岡 優一 (解析)	

2月28日 (水)

10:00-11:00	板倉 恭平 (解析)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	松澤 陽介 (代数)	照屋 靖志 (幾何)	中村 謙太 (解析)	荒武 永史 (数理)
12:00-12:30	佐野 薫 (代数)	Joseph Cho(幾何)	竹井 優美子 (解析)	佐竹 翔平 (代数)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	藤田 直樹 (代数)	数川 大輔 (幾何)	中村 憲史 (解析)	顧 玉杰 (数理)
14:40-15:10	加藤 正輝 (代数)	中島 啓貴 (幾何)	只野 之英 (解析)	藤堂 真登 (数理)
15:30-17:00	ポスターセッション (会場 E)			
18:30-21:00	懇親会			

3月1日 (木)

10:00-11:00	大森 源城 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	松原 祐貴 (代数)	久野 恵理香 (幾何)	相原 祐太 (解析)	田中 吉太郎 (数理)
12:00-12:30	植松 哲也 (代数)	雪田 友成 (幾何)	藤野 弘基 (解析)	Tan Nhat Tran(代数)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	加藤 義久 (代数)	小林 和志 (幾何)	小池 開 (解析)	田中 悠太 (数理)
14:40-15:10	石川 勲 (代数)	原 健太郎 (幾何)	Denny lvanal Hakim(解析)	小林 俊介 (数理)
15:30-16:00	岡本 健太郎 (代数)	長岡 高広 (幾何)	原 宇信 (解析)	船川 大樹 (解析)
16:10-16:40	鯉江 秀行 (代数)	福田 一貴 (数理)	朴 佳南 (解析)	山形 颯 (代数)
16:50-17:20	岡部 峻典 (代数)		小山 剛史 (解析)	

3月2日 (金)

10:00-11:00	榎園 誠 (代数)
11:10-12:10	中屋敷 亮太 (解析)
12:10-12:20	閉会

シングルセッション
会場Ａ

可積分系におけるソリトンの量子古典対応

佐藤 純 (Jun Sato)
東京大学 先端科学技術研究センター

概 要

デルタ関数型の相互作用をする一次元ボース気体は量子可積分系として知られており，ベーテ仮説法によって厳密にエネルギー固有状態が構成される．一方，この模型を量子場で記述したときの運動方程式は，非線形 Schrödinger 方程式として広く知られる．ここで，非可換な量子場の演算子を，可換複素スカラー場に読み替える古典極限をとると，古典可積分方程式が得られ，逆散乱法によりソリトン解が系統的に構成される．この古典ソリトンと，もともとの量子場理論との対応関係は，長年の未解決問題である．今回我々は，粒子数分布が古典ソリトンのプロファイルと完全に一致する量子状態を構成することに成功した．さらに，振幅だけでなく，位相まで含めて完全に一致することが確認された．本レポートでは，これらの研究成果について簡単な解説を試みる．

1 はじめに

量子可積分系とは，ハミルトニアンと可換な保存量が無限個存在する量子系のことで，一次元ボース気体の模型である Lieb-Liniger 模型，一次元磁性体の模型である量子ハイゼンベルク模型，一次元電子系の模型である一次元ハバード模型などがその代表的な例であり，量子逆散乱法 (＝代数的ベーテ仮説法) によって厳密にエネルギー固有値およびエネルギー固有状態が構成される．これら量子可積分系において，ある種の古典極限をとると，古典可積分方程式が得られる場合がある．古典可積分方程式は，逆散乱法によってソリトン解が構成される．ここで，量子可積分系においても，この古典系におけるソリトンに対応する量子状態 (＝量子ソリトン) が存在するのか，また，具体的に量子系におけるどのような物理量が古典ソリトンに対応するのか，ソリトンをより広い視野で統一的に理解する上で非常に重要で興味深い問題である．本レポートでは，一次元ボース気体における我々の研究結果について報告する．

2 量子ソリトン

2.1 一次元ボース気体

長さ L のリングに，質量 m のボソンが N 個ある一次元系を考える．この系の状態は N 体の波動関数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ で記述される．ここで，x_j は j 番目の粒子の位置座標を表す．粒子がボソンであることから，粒子の入れ替えに対する対称性 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \psi(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \cdots, x_{\sigma_N})$ が要請される．ここで，$\sigma \in S_N$ は N 次の置換群の任意の元である．さて，この系のハミルトニアンは，運動エネルギーと 2 体相互作用のポテンシャルの和として

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{1 \le j < k \le N} V(x_j, x_k) \tag{2.1}$$

と書けるであろう．ここで，p_j は j 番目の粒子の運動量であり，正準共役な位置座標 x_j を用いて $p_j = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ と書ける．以降，$\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ と略記し，$2m = \hbar = 1$ とする単位系をとる．結局，運動エネルギーの項は $\dfrac{p_j^2}{2m} = -\partial_j^2$ と書けることになる．

次に 2 体相互作用のポテンシャル項であるが，粒子が接触したときのみ相互作用するデルタ関数型のポテンシャル

$$V(x_j, x_k) = 2c\delta(x_j, x_k) \tag{2.2}$$

を考える．ここで，$|c|$ の大きさが相互作用の強さを表し，$c > 0$ のとき斥力，$c < 0$ のとき引力相互作用を表す．後で見るように，$c \to 0$ の極限が自由ボソンの系，$c \to +\infty$ の極限が (ほぼ) 自由フェルミオンの系に対応している．これから行うベーテ仮設による対角化の手続きにおいては，c の符号は関係なく平行に議論が進むが，励起状態，熱力学などの物理的状況は c の符号によって大きく異なる．

以降，ハミルトニアン

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathrm{LL}} = \sum_{j=1}^{N} \left(-\partial_j^2\right) + \sum_{1 \le j < k \le N} 2c\delta(x_j, x_k)} \tag{2.3}$$

を対角化する問題考える．(LL は Lieb-Liniger の頭文字 [1]) また，系の全運動量 $K = \sum_{j=1}^{N} p_j$ は $K = \sum_{j=1}^{N} (-\mathrm{i}\partial_j)$ と書ける．

2.2 座標ベーテ仮設による対角化

この模型は座標ベーテ仮説法によって，厳密に対角化される [2, 1]．以下，詳述する．

2.2.1 $N = 1$ のとき

1 粒子のときは相互作用はなく，ハミルトニアンは $\mathcal{H}_{\mathrm{LL}} = -\partial_1^2$ となる．微分方程式 $-\psi''(x_1) = E\psi(x_1)$ の解は，自由粒子の波動関数を表す平面波

$$\psi(x_1) = e^{\mathrm{i}k_1 x_1} \tag{2.4}$$

となる．これが 1 粒子の場合のベーテ波動関数である．エネルギーと運動量固有値は

$$E = k_1^2, \quad K = k_1 \tag{2.5}$$

となる．また，周期境界条件 $\psi(x_1 + L) = \psi(x_1)$ から，波数に対して条件

$$e^{\mathrm{i}k_1 L} = 1 \tag{2.6}$$

が課せられる．これが 1 粒子の場合のベーテ方程式である．1 粒子の場合はこれは簡単に解けて，

$$k_1 = \frac{2\pi}{L} I_1 \quad (I_1 \in \mathbb{Z}) \tag{2.7}$$

となる．ここで，整数 I_1 はベーテ量子数と呼ばれ，これを用いて励起状態が分類される．この場合，$I_1 = 0$ が基底状態，$I_1 = \pm 1$ が第一励起状態に対応している．

2.2.2 $N = 2$ のとき

2 粒子のときハミルトニアンは $\mathcal{H}_{\mathrm{LL}} = -\partial_1^2 - \partial_2^2 + 2c\delta(x_1 - x_2)$ となる．2 粒子以上の系から相互作用の効果が入ってくるが，ベーテは，この場合にも波動関数が平面波の重ね合わせで書けること，および粒子の入れ替えによって重ね合わせの係数が散乱の効果を受けること，を要請して，以下のベーテ波動関数を提案した

$$\boxed{\psi(x_1, x_2) = A_{12} e^{\mathrm{i}(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_{21} e^{\mathrm{i}(k_2 x_1 + k_1 x_2)}} \tag{2.8}$$

ここで，係数の比が散乱行列 $S_{12} := A_{21}/A_{12}$ によって表され，これは $x_1 = x_2$ での波動関数の接続条件から決定される．また，波数 k_1, k_2 も自由な場合 (2.7) からずれ，これらはベーテ方程式から決定される．以下，これらを具体的に考察していく．

(♯) 衝突による接続条件〜散乱行列

2 次元領域 $0 \le x_1, x_2 \le L$ において波動関数を決定したいのであるが，相互作用があるのは線分 $x_1 = x_2$ 上だけであり，領域を $x_1 < x_2$ と $x_2 > x_1$ の 2 つに分ければ，それぞれの領域内に限れば自由な系となり，平面波で書けるであろう．そこで，それぞれの領域で波動関数としてベーテ波動関数を仮に設け，のちに $x_1 = x_2$ でそれらを接続することを考える．具体的には，波動関数を以下のように 2 領域で定義する

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_{12}(x_1, x_2) & (x_1 < x_2) \\ \psi_{21}(x_1, x_2) & (x_2 < x_1) \end{cases} \tag{2.9}$$

ただし，ボソンの対称性から，$\psi_{12}(x_1, x_2)$ を決定すれば自動的に $\psi_{21}(x_1, x_2)$ も

$$\psi_{21}(x_1, x_2) = \psi_{12}(x_2, x_1) \tag{2.10}$$

と決定する．一般に，領域 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ における波動関数 $\psi_{12\cdots N}(x_1, \cdots, x_N)$ のみを決定すれば，その他の任意の領域 $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \cdots < x_{\sigma_N}$ における波動関数 $\psi_\sigma(x_1, \cdots, x_N)$ も自動的に

$$\psi_\sigma(x_1, \cdots, x_N) = \psi_{12\cdots N}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \cdots, x_{\sigma_N}) \tag{2.11}$$

と決定する．

さて，$\psi_{12}(x_1,x_2)$ としてベーテ波動関数

$$\psi_{12}(x_1,x_2)=A_{12}e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}+A_{21}e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2)} \tag{2.12}$$

を仮定する．すると，ボソンの対称性 $\psi_{21}(x_1,x_2)=\psi_{12}(x_2,x_1)$ より，

$$\psi_{21}(x_1,x_2)=A_{12}e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2)}+A_{21}e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)} \tag{2.13}$$

となる．ここで，$x_1=x_2$ において波動関数は連続であることに注意せよ．しかし，デルタ関数型ポテンシャルの効果により，波動関数の 1 階微分は不連続となる．以下，これを詳しく調べよう．

そのために，重心座標 $X:=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ と相対座標 $x:x_1-x_2$ を導入するのが便利である．波動関数は，

$$\psi(x,X)=\begin{cases}e^{\mathrm{i}KX}\left(A_{12}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}kx}+A_{21}e^{+\frac{\mathrm{i}}{2}kx}\right) & (x>0)\\ e^{\mathrm{i}KX}\left(A_{12}e^{+\frac{\mathrm{i}}{2}kx}+A_{21}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}kx}\right) & (x<0)\end{cases} \tag{2.14}$$

となる．ただし，$K:=k_1+k_2$, $k:=k_1-k_2$ とした．ハミルトニアンは，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{LL}}=-2\partial_x^2-\frac{1}{2}\partial_X^2+2c\delta(x) \tag{2.15}$$

と書き換えられる．ただし，$\partial_X:=\partial/\partial X$, $\partial_x:=\partial/\partial x$ と略記した．これを用いて $x=0$ での接続を考えるため，固有方程式 $\mathcal{H}_{\mathrm{LL}}\psi(x,X)=E\psi(x,X)$ の両辺を $x=0$ の近傍の微小区間で積分する．すなわち，積分

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathcal{H}_{\mathrm{LL}}\psi(x,X)\mathrm{d}x=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\psi(x,X)\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

を考え，極限 $\epsilon\to+0$ をとる．まず，$\psi(x,X)$ は $x=0$ で連続 $\psi(x\to+0)=\psi(x\to-0)=e^{\mathrm{i}KX}\left(A_{12}+A_{21}\right)$ なので，右辺は $\epsilon\to0$ の極限で 0 になる．また，$\partial_X^2\psi(x,X)=-K^2\psi(x,X)$ なので，左辺第 2 項も同様に 0 になる．したがって，

$$\begin{aligned}0&=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left(-2\partial_x^2+2c\delta(x)\right)\psi(x,X)\mathrm{d}x=-2\lim_{\epsilon\to+0}\left[\partial_x\psi(x,X)\right]_{-\epsilon}^{\epsilon}+2c\psi(x\to\pm0,X)\\&=2e^{\mathrm{i}KX}\left[\mathrm{i}k(A_{12}-A_{21})+c\left(A_{12}+A_{21}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

を得る．これから，散乱による係数の比

$$\frac{A_{21}}{A_{12}}=\frac{\mathrm{i}k+c}{\mathrm{i}k-c}=\frac{k-\mathrm{i}c}{k+\mathrm{i}c}=\frac{k_1-k_2-\mathrm{i}c}{k_1-k_2+\mathrm{i}c}=-\frac{k_2-k_1+\mathrm{i}c}{k_1-k_2+\mathrm{i}c} \tag{2.18}$$

が得られる．ここで，記号

$$T_{j\ell}:=k_j-k_\ell+\mathrm{i}c \tag{2.19}$$

および散乱行列

$$S_{j\ell}:=-\frac{T_{\ell j}}{T_{j\ell}}=\frac{k_j-k_\ell-\mathrm{i}c}{k_j-k_\ell+\mathrm{i}c} \tag{2.20}$$

を導入すると，

$$A_{21}=S_{12}A_{12} \tag{2.21}$$

と書ける．これは，粒子 1 と 2 がすれ違うときに，散乱行列 S_{12} によって散乱を受けた

$$S_{12}:A_{12}\mapsto A_{21} \tag{2.22}$$

と読むことが出来る．ここで，$c\to0$ のとき $S_{j\ell}\to1$(自由ボソン)，$c\to\infty$ のとき $S_{j\ell}\to-1$(自由フェルミオン)となることに注意．

(♯) 周期境界条件～ベーテ方程式

次に，周期境界条件

$$\psi(x_1+L,x_2)=\psi(x_1,x_2),\quad (0<x_1<x_2<L) \tag{2.23}$$

を考える．$\psi(x_1+L,x_2)=\psi_{21}(x_1+L,x_2)=\psi_{12}(x_2,x_1+L)$ より，

$$\begin{aligned}
&A_{12}e^{\mathrm{i}[k_1x_2+k_2(x_1+L)]}+A_{21}e^{\mathrm{i}[k_2x_2+k_1(x_1+L)]}=A_{12}e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}+A_{21}e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2)}\\
\iff\quad & e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}(A_{21}e^{\mathrm{i}k_1L}-A_{12})+e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2)}(A_{12}e^{\mathrm{i}k_2L}-A_{21})\\
\iff\quad & A_{21}e^{\mathrm{i}k_1L}-A_{12}=A_{12}e^{\mathrm{i}k_2L}-A_{21}=0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

となり，結局

$$e^{\mathrm{i}k_1L}=\frac{A_{12}}{A_{21}}=S_{21}=-\frac{T_{12}}{T_{21}}=\frac{k_1-k_2+\mathrm{i}c}{k_1-k_2-\mathrm{i}c},\quad e^{\mathrm{i}k_2L}=\frac{A_{21}}{A_{12}}=S_{12}=-\frac{T_{21}}{T_{12}}=\frac{k_2-k_1+\mathrm{i}c}{k_2-k_1-\mathrm{i}c} \tag{2.25}$$

を得る．これが 2 粒子の場合のベーテ方程式である．

2.2.3 $N=3$ のとき

3 粒子の場合は，波動関数の定義域は $3!=6$ 個の領域に分けられるが，領域 $x_1<x_2<x_3$ における波動関数 $\psi_{123}(x_1,x_2,x_3)$ だけを決定すればその他の任意の領域 $x_{\sigma_1}<x_{\sigma_2}<x_{\sigma_3}$ $(\sigma\in S_3)$ における波動関数 $\psi_\sigma(x_1,x_2,x_3)$ はボソンの対称性 $\psi_\sigma(x_1,x_2,x_3)=\psi_{123}(x_{\sigma_1},x_{\sigma_2},x_{\sigma_3})$ から決定される．

さて，2 粒子のときと同様に，ベーテ型の波動関数

$$\begin{aligned}
\psi_{123}(x_1,x_2,x_3)=&A_{123}e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}+A_{132}e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_3x_2+k_2x_3)}+A_{213}e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2+k_3x_3)}\\
&+A_{231}e^{\mathrm{i}(k_2x_1+k_3x_2+k_1x_3)}+A_{312}e^{\mathrm{i}(k_3x_1+k_1x_2+k_2x_3)}+A_{321}e^{\mathrm{i}(k_3x_1+k_2x_2+k_1x_3)}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

を仮に設ける．エネルギーと運動量の固有値は

$$E=\sum_{j=1}^{3}k_j^2,\quad K=\sum_{j=1}^{3}k_j \tag{2.27}$$

となることは明らかである．$x_2=x_3$ における波動関数の接続 ($\psi_{123}(x_1,x_2,x_3)$ と $\psi_{132}(x_1,x_2,x_3)$ の接続) を考えることによって，2 粒子の場合と全く同様の計算により，散乱による係数の比

$$\frac{A_{132}}{A_{123}}=S_{23},\quad \frac{A_{213}}{A_{231}}=S_{31},\quad \frac{A_{321}}{A_{312}}=S_{12} \tag{2.28}$$

が得られる．同様に，$x_1=x_2$ における波動関数の接続 ($\psi_{123}(x_1,x_2,x_3)$ と $\psi_{213}(x_1,x_2,x_3)$ の接続) を考えることによって

$$\frac{A_{213}}{A_{123}}=S_{12},\quad \frac{A_{321}}{A_{231}}=S_{23},\quad \frac{A_{132}}{A_{312}}=S_{31} \tag{2.29}$$

が得られる．

さて，ここで，2 体散乱を繰り返すことによって A_{123} から A_{321} を作るとき，2 通りのやり方があるが，それらが同じ結果を与える必要がある．すなわち，

$$\begin{aligned}
A_{321}&=S_{12}A_{312}=S_{12}S_{13}A_{132}=S_{12}S_{13}S_{23}A_{123},\\
A_{321}&=S_{23}A_{231}=S_{23}S_{13}A_{213}=S_{23}S_{13}S_{12}A_{123}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

より，散乱行列は関係式

$$S_{12}S_{13}S_{23}=S_{23}S_{13}S_{12} \tag{2.31}$$

を満たす必要がある．これを，Yang-Baxter 関係式という [3, 4, 5].

波動関数の係数 A_σ は，散乱行列が $S_{j\ell}=-\dfrac{T_{\ell j}}{T_{j\ell}}$ と書けることにより，

$$\begin{aligned}
&A_{123}=+T_{12}T_{13}T_{23},\quad A_{132}=-T_{13}T_{12}T_{32},\quad A_{213}=-T_{21}T_{23}T_{13},\\
&A_{231}=+T_{23}T_{21}T_{31},\quad A_{312}=+T_{31}T_{32}T_{12},\quad A_{321}=-T_{32}T_{31}T_{21}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

とすればよいことが分かる．一般の N の場合には

$$A_\sigma = (-1)^\sigma \prod_{1\le j<\ell\le N} T_{\sigma_j\sigma_\ell} = (-1)^\sigma \prod_{1\le j<\ell\le N} (k_{\sigma_j} - k_{\sigma_\ell} + \mathrm{i}c) \tag{2.33}$$

と書ける．

(♯) 周期境界条件～ベーテ方程式

2 粒子の場合と同様に周期境界条件を考慮することにより，

$$e^{\mathrm{i}k_1 L} = \prod_{\ell=2,3} S_{\ell 1}, \quad e^{\mathrm{i}k_2 L} = \prod_{\ell=3,1} S_{\ell 2}, \quad e^{\mathrm{i}k_3 L} = \prod_{\ell=1,2} S_{\ell 3} \tag{2.34}$$

を得る．これが 3 粒子の場合のベーテ方程式となる．同様にして，一般の N の場合のベーテ方程式は

$$e^{\mathrm{i}k_j L} = \prod_{\ell\neq j} S_{\ell j} = \prod_{\ell\neq j} \frac{k_j - k_\ell + \mathrm{i}c}{k_j - k_\ell - \mathrm{i}c} \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.35}$$

となる．これは，j 番目の粒子をリング長 L だけ一周させたとき，他の全ての粒子と散乱している様子を記述していると読める．

2.2.4 一般の粒子数 N の場合

以上の結果をまとめる．領域 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ においてベーテ波動関数を

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) &= \sum_{\sigma\in S_N} A_\sigma \exp\left[\mathrm{i}\left(k_{\sigma_1}x_1 + \cdots + k_{\sigma_N}x_N\right)\right], \\ A_\sigma &= (-1)^\sigma \prod_{1\le j<\ell\le N} (k_{\sigma_j} - k_{\sigma_\ell} + \mathrm{i}c) \end{aligned} \tag{2.36}$$

で定めると，波数 $\{k_1, \cdots, k_N\}$ がベーテ方程式

$$e^{\mathrm{i}k_j L} = \prod_{\ell\neq j} \frac{k_j - k_\ell + \mathrm{i}c}{k_j - k_\ell - \mathrm{i}c} \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.37}$$

を満たすとき固有状態となり，エネルギーと運動量の固有値は

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2, \quad K = \sum_{j=1}^N k_j \tag{2.38}$$

で与えられる．

2.3 基底状態と励起状態の構成：斥力の場合

ベーテ方程式 (2.37) はたくさんの解をもち，そのひとつひとつがそれぞれ固有状態に対応している．そこで，両辺の対数を取ることによって分岐を指定し，解を定めよう．そのために，散乱位相因子 $\theta(k)$ を

$$\frac{k + \mathrm{i}c}{k - \mathrm{i}c} = -e^{-\mathrm{i}\theta(k)}, \quad \theta(k) = 2\arctan\frac{k}{c} \tag{2.39}$$

で定める．これを用いてベーテ方程式 (2.37) の対数をとると

$$\mathrm{i}k_j L = 2\pi\mathrm{i}n_j + \sum_{\ell\neq j} \mathrm{i}\{\pi - \theta(k_j - k_\ell)\} \tag{2.40}$$

となり，整理して

$$k_j = \frac{2\pi}{L} I_j - \frac{1}{L}\sum_{\ell\neq j} 2\arctan\frac{k_j - k_\ell}{c} \tag{2.41}$$

を得る．ここで n_j は任意の整数であり，$I_j = n_j + (N-1)/2$ とおいた．この $\{I_1, \cdots, I_N\}$ をベーテ量子数と呼び，粒子数 N が偶数のとき半奇整数，N が奇数のとき整数をとる．

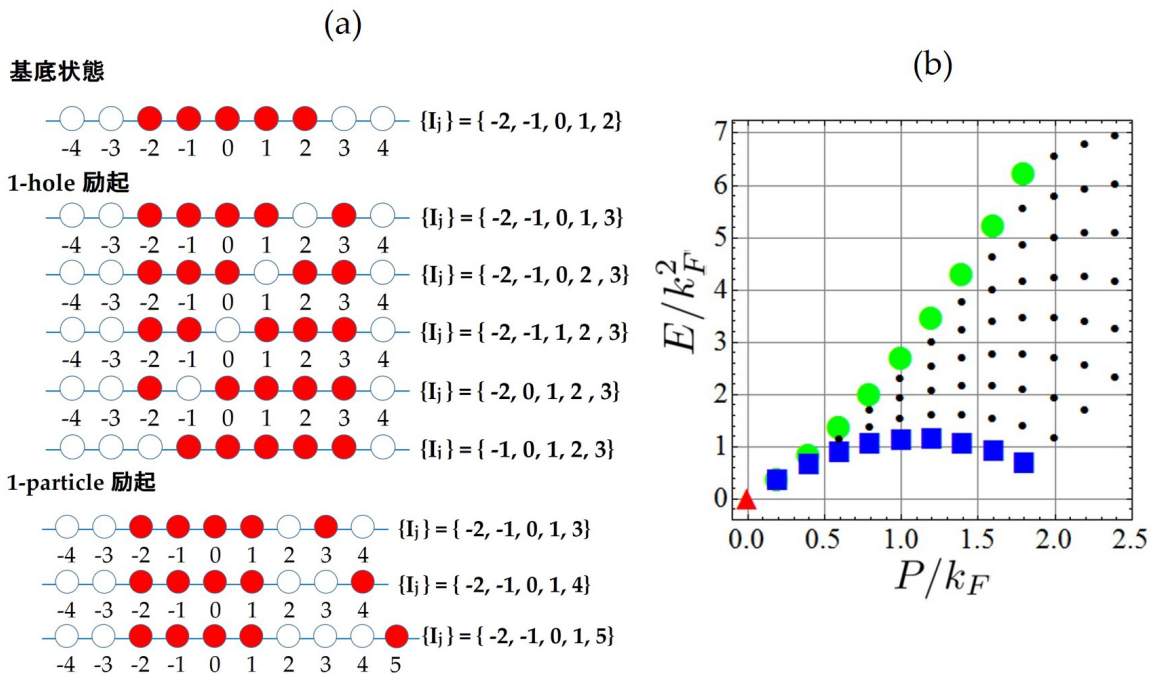


図 1: (a) 基底状態，励起状態のベーテ量子数の配置（粒子数 $N = 5$）(b) 励起状態の分散関係．赤い三角が基底状態，青い四角が 1-hole 励起，緑の丸が 1-particle 励起，その他の小さい点は 1 hole-1 particle 励起を表す（粒子数 $N = 10$，$c = 100$）

斥力相互作用のとき ($c > 0$) は，互いに相異なるベーテ量子数の組 $\{I_1 < I_2 < \cdots < I_N\}$ を与えると，唯一つの実数解 $\{k_1 < k_2 < \cdots < k_N\}$ を持つことが証明できる [6, 7].. すなわち，ベーテ量子数の組と固有状態とが 1 対 1 に対応している．

まず，基底状態を与えるベーテ量子数を決定しよう．ここで，$c \to \infty$ の極限をとると，ベーテ方程式は $k_j = \frac{2\pi}{L} I_j$ となる．エネルギー固有値は $E = \sum_{j=1}^{N} k_j^2$ であるから，基底状態を与えるベーテ量子数は 0 のまわりにびっしり詰めたもの

$$\{I_1, \cdots, I_N\} = \left\{ -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \cdots, \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2} \right\} \tag{2.42}$$

となることがわかる（図 1(a) 一番上参照）．これは，一般の相互作用領域 $0 < c < \infty$ でも成り立つことが示せる．励起状態は，この基底状態のベーテ量子数の配置に孔を空けたり粒子を付け加えることによって構成することが出来る（図 1(a) 参照）．励起の分散関係は図 1(b) のようになる．

2.4 量子ソリトン状態の構成

我々は，前述の 1-hole 励起状態を重ね合わせることによって，量子ソリトン状態を構成することに成功した [8, 9]. 以下，これを説明する．粒子数 N，運動量 $P = 2\pi p/L (p = 0, 1, \ldots, N-1)$ の規格化された 1-hole 励起状態を $|P, N\rangle$ と書く．ベーテ量子数は具体的に，

$$\begin{aligned} I_j &= -(N+1)/2 + j \quad \text{for} \quad 1 \le j \le N-p \\ &= -(N+1)/2 + j + 1 \quad \text{for} \quad N-p+1 \le j \le N. \end{aligned} \tag{2.43}$$

で与えられる．我々は，位置 $X = qL/N$ $(0 \le q \le N-1)$ に局在した波束状態 $|X, N\rangle$ を，離散フーリエ変換

$$|X, N\rangle := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \exp(-2\pi \mathrm{i} pq/N) \, |P, N\rangle \, . \tag{2.44}$$

によって構成し，これが古典ダークソリトンに対応することを発見した．後に，この量子状態の粒子数分布は位置 X にくぼみをもち，古典ダークソリトンのプロファイルと一致することを示す．

3　古典ソリトン

3.1　非線形 Schrödinger 方程式

ボース場の演算子 $\hat{\psi}(x,t)$ は，交換関係

$$[\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}^\dagger(x,t)]=\delta(x-x'),\quad [\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}(x,t)]=[\hat{\psi}^\dagger(x,t),\hat{\psi}^\dagger(x,t)]=0. \tag{3.1}$$

によって定められる．これを用いて，ハミルトニアン (2.3) を第二量子化表示で表すと，

$$\mathcal{H}=\int_0^L dx[\partial_x\hat{\psi}^\dagger\partial_x\hat{\psi}+c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}-\mu\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}], \tag{3.2}$$

となる．ただし，μ は化学ポテンシャルである．この系のハイゼンベルクの運動方程式は

$$\mathrm{i}\partial_t\hat{\psi}=-\partial_x^2\hat{\psi}+2c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}-\mu\hat{\psi}. \tag{3.3}$$

で与えられる．これは非線形 Schrödinger 方程式として広く知られている．

ここで，量子場の演算子 $\hat{\psi}(x,t)$ を複素スカラー場 $\psi_C(x,t)$ に読み替えると，

$$\mathrm{i}\partial_t\psi_C=-\partial_x^2\psi_C+2c|\psi_C|^2\psi_C-\mu\psi_C. \tag{3.4}$$

を得る．これは古典可積分方程式であり，逆散乱法により系統的にソリトン解が構成される [10]．斥力相互作用 $c>0$ のときはダークソリトン解，引力相互作用 $c<0$ のときはブライトソリトン解を持つことが知られている．引力相互作用の場合の量子古典対応は文献 [11] で議論されている．本レポートでは，$c>0$ を仮定し，ダークソリトン解を考える．

3.2　楕円関数解

周期境界条件の場合には方程式 (3.4) は楕円関数解を持つ．以下，添え字 C は省略し，具体的に 1-ソリトン解を構成する．速度 v で伝播する進行波解を仮定し，$\psi(x,t)=\psi(x-vt)$ とすると，$\psi_t=-v\psi'$, $\psi_{xx}=\psi''$ より，

$$\psi''-\mathrm{i}v\psi'+\mu\psi-2c|\psi|^2\psi=0 \tag{3.5}$$

となる．ただし，下付き添え字はその文字による微分を表すとする．ここで，振幅と位相に対応する実数値関数 $\rho(x)$ と $\varphi(x)$ を導入して，

$$\psi(x)=\sqrt{\rho(x)}e^{\mathrm{i}\varphi(x)} \tag{3.6}$$

と書く．これを式 (3.5) に代入して実部と虚部に分けることにより，

$$\frac{(\sqrt{\rho})''}{\sqrt{\rho}}-(\varphi')^2+v\varphi'+\mu-2c\rho=0,\qquad 2\varphi'\frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}}+\varphi''-v\frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}}=0 \tag{3.7}$$

を得る．式 (3.7) の第二式を少し計算すると $(\rho\varphi'-v\rho/2)'=0$ となり，積分定数を W として

$$\varphi'(x)=\frac{v}{2}+\frac{W}{\rho(x)} \tag{3.8}$$

を得る．これを式 (3.7) の第一式に代入して $\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho})'$ をかけると，

$$(\sqrt{\rho})'(\sqrt{\rho})''+\left(\mu+\frac{v^2}{4}\right)\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho})'-W^2(\sqrt{\rho})^{-3}(\sqrt{\rho})'-2c(\sqrt{\rho})^3(\sqrt{\rho})'=0 \tag{3.9}$$

となり，一回積分できる．積分定数を V として，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\rho}')^2+\left(\frac{\mu}{2}+\frac{v^2}{8}\right)(\sqrt{\rho})^2+\frac{W^2}{2}(\sqrt{\rho})^{-2}-\frac{c}{2}(\sqrt{\rho})^4=V \tag{3.10}$$

を得る．これを整理して，

$$\left(\frac{\rho'}{2}\right)^2+U(\rho)=0,\quad U(\rho)=-c\rho^3+\left(\mu+\frac{v^2}{4}\right)\rho^2-2V\rho+W^2 \tag{3.11}$$

を得る．これは，ポテンシャル U で運動する一次元粒子のエネルギー保存則とみなすことができて，$U(\rho)=0$ の 3 実解を $a_1<a_2<a_3$ とすると，$a_1<\rho<a_2$ で振動する解があることがわかる．そこで，初期条件として $\rho(x=0)=a_1$ として，

$$\int_{a_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-U(r)}}=2x,\quad a_1\le\rho\le a_2 \tag{3.12}$$

を得る．積分変数を

$$r=a_1+(a_2-a_1)z^2,\quad 0\le z\le 1 \tag{3.13}$$

と変換することにより，

$$2x=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{a_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r-a_1)(a_2-r)(a_3-r)}}=\frac{2}{\sqrt{c}\sqrt{a_3-a_1}}\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{r-a_1}{a_2-a_1}},k\right) \tag{3.14}$$

と楕円積分で表される．ただし，母数 k は

$$k=\sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}} \tag{3.15}$$

で与えられる．楕円関数の関係式を使って変形すると，

$$\rho(x)=a_3-(a_3-a_1)\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{c}x,k\right) \tag{3.16}$$

を得る．また，式 (3.8) を積分して

$$\varphi(x)=\varphi_0+\frac{v}{2}x\pm\frac{\sqrt{a_2a_3}}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_3-a_1}}\Pi\left(1-a_2/a_1,\mathrm{am}\left(\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{c}x\right),k\right) \tag{3.17}$$

を得る．φ_0 は任意の定数である．ここで，$W=\pm\sqrt{ca_1a_2a_3}$ を使った．

4　量子古典対応

以下，量子波束状態 (2.44) と古典ダークソリトン (3.16)(3.17) が一致することを見る．

4.1　粒子数密度分布

まず，量子場理論における粒子数密度の演算子 $\hat{\rho}(x)$ を $\hat{\rho}(x):=\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)$ で定める．これの量子波束状態 $|X,N\rangle$ における期待値は，

$$\langle X,N|\hat{\rho}(x)|X,N\rangle=\frac{1}{N}\sum_{p,p'=0}^{N-1}\exp\left[2\pi\mathrm{i}(p-p')\left(\frac{x}{L}-\frac{q}{N}\right)\right]\langle P',N|\hat{\rho}(0)|P,N\rangle\,. \tag{4.1}$$

となる．ここで，形状因子 $\langle P',N|\hat{\rho}(0)|P,N\rangle$ の計算には以下の公式を用いる [12, 13, 14]

$$\langle P',N|\hat{\rho}(0)|P,N\rangle=(-1)^{N(N+1)/2}(P-P')\left(\prod_{j,\ell=1}^{N}\frac{1}{k'_j-k_\ell}\right)\left(\prod_{j>\ell}^{N}k_{j,\ell}k'_{j,\ell}\sqrt{\frac{\hat{K}(k'_{j,\ell})}{\hat{K}(k_{j,\ell})}}\right)\frac{\det U(k,k')}{\sqrt{\det G(k)\det G(k')}}, \tag{4.2}$$

ただし,$\{k_1,\cdots,k_N\}$ と $\{k'_1,\cdots,k'_N\}$ はそれぞれ $|P\rangle$ と $|P'\rangle$ に対応するベーテ方程式の根である．また，$k_{j,\ell}:=k_j-k_\ell$, $k'_{j,\ell}:=k'_j-k'_\ell$ と略記した．核 $\hat{K}(k)$ は $\hat{K}(k)=2c/(k^2+c^2)$ で定義される．Gaudin 行列 $G(k)$ は

$$G(k)_{j,\ell}=\delta_{j,\ell}\left[L+\sum_{m=1}^{N}\hat{K}(k_{j,m})\right]-\hat{K}(k_{j,\ell})\quad\text{for}\quad j,\ell=1,2,\cdots,N. \tag{4.3}$$

で与えられる．行列 $U(k,k')$ は

$$U(k,k')_{j,\ell}=2\delta_{j\ell}\mathrm{Im}\left[\prod_{a=1}^{N}\frac{k'_a-k_j+\mathrm{i}c}{k_a-k_j+\mathrm{i}c}\right]+\frac{\prod_{a=1}^{N}(k'_a-k_j)}{\prod_{a\ne j}^{N}(k_a-k_j)}\left(\hat{K}(k_{j,\ell})-\hat{K}(k_{N,\ell})\right). \tag{4.4}$$

である．

この公式を用いて粒子数密度分布 (4.1) を計算した結果と，古典ソリトンの振幅 (3.16) を比較した結果を図 2 に示す．結合定数 c が小さい領域で，両者がぴったりと一致していることが分かる．

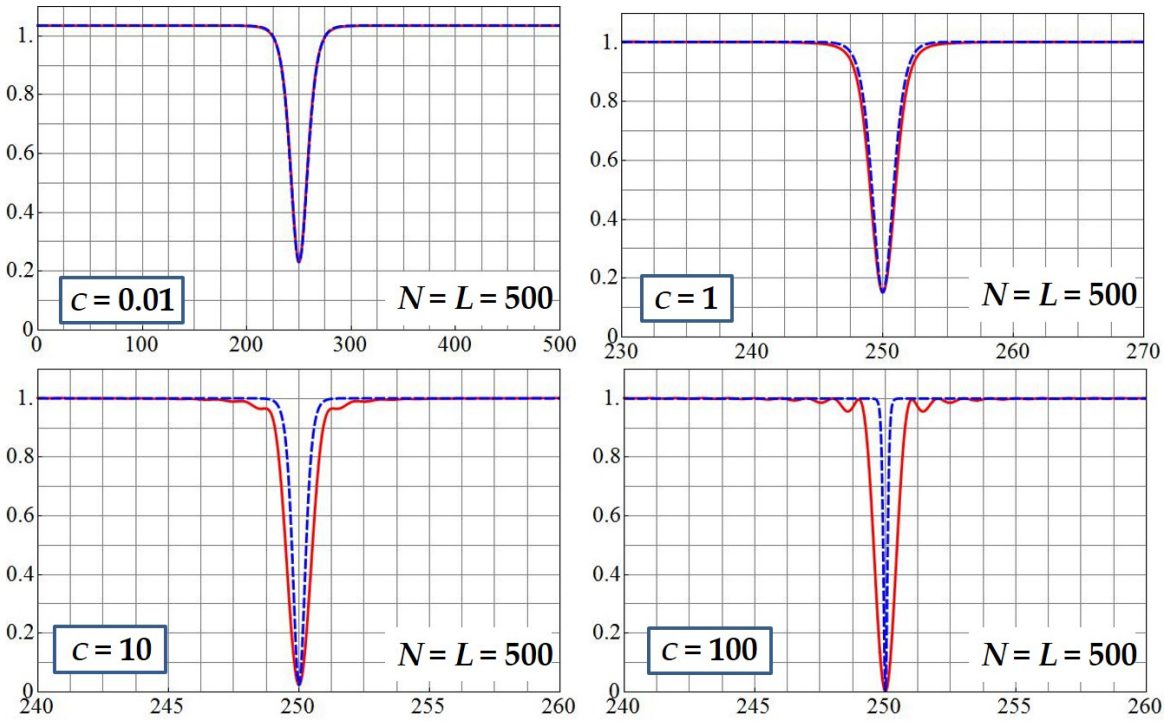


図 2: $N = L = 500$ における量子波束状態 $|X, N\rangle$ の粒子数密度分布 $\langle X, N|\hat{\rho}(x)|X, N\rangle$ を赤の実線で示す．また，古典ダークソリトンの振幅 (3.16) を青の破線で示す．$c < 1$ の領域で両者は見事に一致している．

4.2　場の一点関数

続けて，量子場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ の一点関数

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{Q}}(x) &:= \langle X', N-1|\hat{\psi}(x)|X, N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{p'=0}^{N-2} \exp\left[2\pi\mathrm{i}(p-p')\frac{x}{L}\right] \exp\left[-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{pq}{N} - \frac{p'q'}{N}\right)\right] \langle P', N-1|\hat{\psi}(0)|P, N\rangle, \end{aligned} \tag{4.5}$$

を考えよう．以下，$q = q' = 0$ の場合だけを考える．ここでは略すが，形状因子 $\langle P', N-1|\hat{\psi}(0)|P, N\rangle$ にも，粒子数密度の場合と同様の行列式公式がある [12, 13, 15, 16] ．この公式を用いて，場の一点関数の位相 $\mathrm{Arg}[\psi_{\mathrm{Q}}(x)]$ を計算した結果と，古典ソリトンの位相 (3.17) を比較した結果を図 3 に示す．両者が完全に一致していることが分かる．

5　まとめ

本レポートではまず，一次元ボース気体のベーテ仮説による厳密解を紹介した．そして，1-hole 励起状態によって量子波束状態を構成できることを示した．次に，古典極限で得られる非線形 Schrödinger 方程式の楕円関数解を紹介し，先に得られた量子波束状態の粒子数密度分布，場の一点関数の位相が，古典ダークソリトンと見事に一致することを示した．これらの研究は，数値的な評価にとどまっており，両者の対応関係の解析的な議論や，ダイナミクスまで含めた両者の対応付けは，今後の重要な研究課題として残されている．

参考文献

[1] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963); E. H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).

[2] H.A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.

[3] C.N. Yang, Phys. Rev. **168** (1968) 1920.

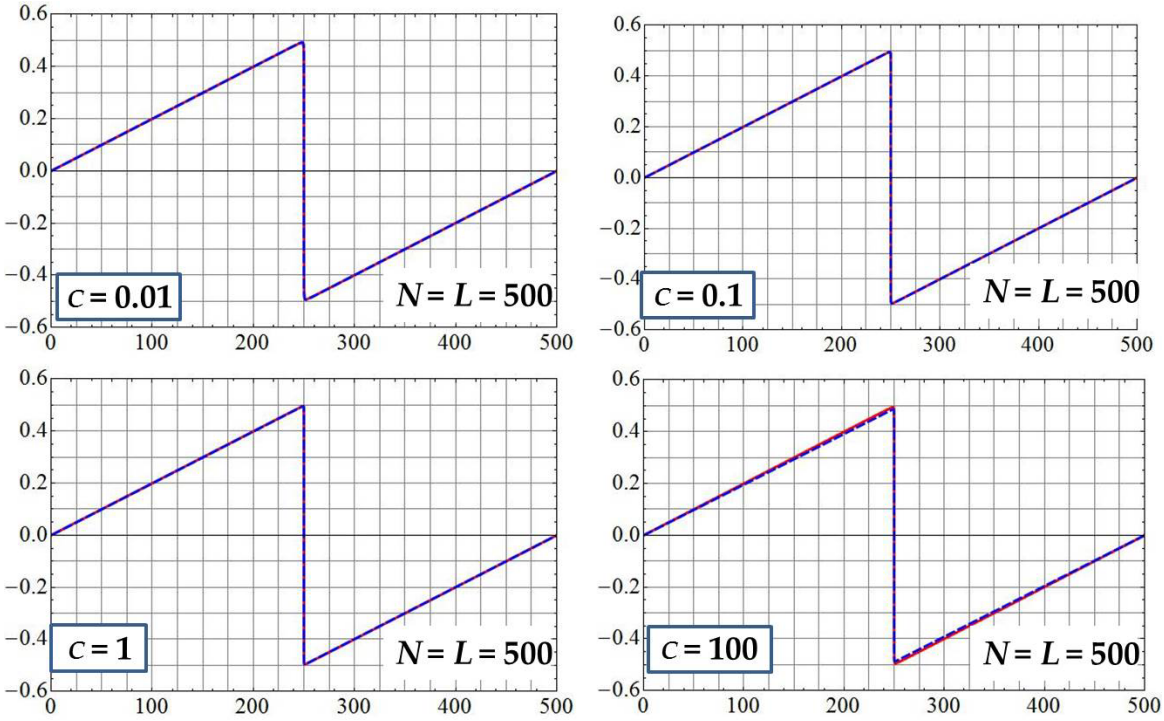


図 3: $N = L = 500$ における場の一点関数 $\psi_{\mathrm{Q}}(x)$ の位相 $\mathrm{Arg}[\psi_{\mathrm{Q}}(x)]/\pi$ を赤の実線で示す．また，古典ダークソリトンの位相 (3.17) を青の破線で示す．両者は見事に一致していることが分かる．

[4] R.J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832.

[5] R.J. Baxter, "*Exactly solved models in statistical mechanics*" (Academic Press, London, 1982)

[6] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, "*Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*", Cambridge University Press, 1993.

[7] M. Takahashi, "*Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*", Cambridge University Press, 1999.

[8] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, Phys. Rev. Lett. **108**, 110401 (2012).

[9] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, New J. Phys. **18**, 075008 (2016).

[10] T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys. **4**, 441 (1971); V. E. Zakharov, A. B. Shabat, Sov. Phys.-JETP **34**, 62 (1972).

[11] C. R. Nohl, Ann. Phys. **96**, 234 (1976); M. Wadati, M. Sakagami, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 1933 (1984); M. Wadati, A. Kuniba, T. Konishi, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 1710 (1985); M. Wadati, A. Kuniba, J. Phys. Soc. Jpn. **55**, 76 (1986).

[12] M. Gaudin, "*La fonction d'onde de Bethe*", Masson (Paris) (1983); V. E. Korepin, Commun. Math. Phys. **86**, 391 (1982).

[13] N. A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz. **79**, 232 (1989); **82**, 389 (1990).

[14] P. Calabrese and J.-S. Caux, J. Stat. Mech. (2007) P08032.

[15] T. Kojima, V.E. Korepin, N.A. Slavnov, Commun. Math. Phys. **188**, 657 (1997)

[16] J.-S. Caux, P. Calabrese and N. A. Slavnov, J. Stat. Mech. P01008 (2007).

Spectral theory for repulsive Hamiltonians

板倉 恭平 (Kyohei ITAKURA)*
神戸大学大学院理学研究科 数学専攻 博士課程後期課程 2 年

1 Introduction

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のシュレディンガー方程式：

$$\left(\frac{1}{2}p^2 + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x); \quad p = -i\nabla = -i(\partial_1, \dots, \partial_d)$$

の解 ψ は波動関数と呼ばれ，微小な粒子（原子や分子など）の運動を記述することが知られている．ここで，x は空間変数，V はポテンシャル関数（すなわち $-\nabla V$ が電場を表す），E は全エネルギーである．左辺の作用素部分は一般に H と表され，シュレディンガー作用素（またはハミルトニアン）と呼ばれている．

古典力学において空間内を運動する粒子の状態は，大きく次の二つに分類される．

束縛状態： 空間内のある有界な領域に，任意の時刻で粒子が存在している．
散乱状態： どんな有界な領域を選んでも，ある時刻にはその領域外に粒子が存在している．

考えている物理系において粒子が束縛状態をもつか否かは，H に関するハミルトン方程式：

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt}(= \dot{x}), \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dp}{dt}(= -\dot{p})$$

を解き，粒子の古典軌道をみることで調べられる．一方で，束縛状態の存在・非存在は，量子力学においては H の固有値（点スペクトル）の存在・非存在が対応している．また，散乱状態には特異連続スペクトル，絶対連続スペクトルが対応している．(しかし，自然な物理モデルに対応するハミルトニアンにおいては，多くの場合，特異連続スペクトルは現れない.）このように数学的には，作用素 H のスペクトルを調べることで考えている物理系での粒子の大まかな挙動がわかるのである．

このような背景を踏まえ講演者は，次の形のハミルトニアンに対してスペクトルの研究を行った．任意に固定された $\epsilon \in (0, 2]$ に対して

$$H = \frac{1}{2}p^2 - |x|^\epsilon + q.$$

ここで，$-|x|^\epsilon$ は斥力ポテンシャル，q は摂動項である．このハミルトニアンから粒子の古典軌道を計算すると，$-|x|^\epsilon$ という項の影響により，(古典力学的には）粒子は散乱状態しかもたない．これは，$-|x|^\epsilon$ が斥力ポテンシャルと呼ばれる理由の一つである．

*itakura@math.kobe-u.ac.jp

さて，束縛状態がないということは，量子力学的には H は固有値をもたないということが期待される．実際，摂動項に適当な条件を課せば H が固有値をもたないことは以前から知られている (cf. e.g. [BCHM])．しかし後述の Theorem 2.2 のような結果は今までに得られていない．講演では，この定理と関連する結果についてもお話ししたいと考えている．

2 Setting and results

2.1 Classical orbit

さて状況設定に入る前に，ハミルトニアンが斥力ポテンシャルをもつ場合に，粒子の古典軌道がどうなるのかをおおまかに見ておこう．$H = p^2/2 - |x|^\epsilon$ とするとハミルトン方程式は次で与えられる．

$$p = \dot{x}, \quad \epsilon|x|^{\epsilon-2}x = \dot{p}.$$

この連立方程式を解いて $x(t)$ を求めると，$t \to \infty$ で一般に次のような挙動をすることがわかる．

$$x(t) = \begin{cases} \mathcal{O}(t^{2/(2-\epsilon)}) & \text{for } 0 < \epsilon < 2, \\ \mathcal{O}(e^{\sqrt{2}t}) & \text{for } \epsilon = 2. \end{cases}$$

これより，新たな位置関数 $y(t)$ を

$$y(t) = \begin{cases} |x(t)|^{1-\epsilon/2}\,(x(t)/|x(t)|) & \text{for } 0 < \epsilon < 2, \\ \log|x(t)|\,(x(t)/|x(t)|) & \text{for } \epsilon = 2 \end{cases}$$

と定めれば，$|y(t)| = \mathcal{O}(t)$ となる．これは自由運動に相当する．

2.2 Basic setting.

まず，原点近傍で修正された距離関数 $r \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ で，以下が成り立つものを一つ選ぶ．

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \le 1, \\ |x| & \text{for } |x| \ge 2, \end{cases} \quad r \ge 1.$$

この r とクロネッカーの δ を用いて，なめらかな関数 f と偏微分作用素 ∇^f を次で定める．

$$f(r) = \begin{cases} \left(r^{1-\epsilon/2} - 1\right)/(1-\epsilon/2) + 1 & \text{for } 0 < \epsilon < 2, \\ \log r + 1 & \text{for } \epsilon = 2, \end{cases}$$
$$\nabla^f = (\partial_j f)\delta^{jk}\nabla_k.$$

この f の定め方は，上述の位置関数 y が関係している．このような f を用いることで，斥力ハミルトニアンに対しても，自由ハミルトニアンと同様の議論が展開できることが期待される．

さて，摂動項 q に対し以下の仮定を課そう．

Condition 2.1. q は実数値可測関数であり，次のような実数値関数による分解が存在する：

$$q = q_1 + q_2; \quad q_1 \in C^1(\mathbb{R}^d),\ q_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

であり，ある $\rho, C > 0$ が存在して，次の評価が $\mathbb{R}^d$ 全体で成り立つ．

$$|q_1| \le \begin{cases} Cr^\epsilon f^{-\rho} & \text{for } 0 < \epsilon < 2, \\ Cr^2 f^{-1-\rho} & \text{for } \epsilon = 2, \end{cases} \quad \nabla^f q_1 \le C f^{-1-\rho}, \quad |q_2| \le C f^{-1-\rho}.$$

次に考える関数空間を設定していく．$s \in \mathbb{R}$ に対して，重み付きヒルベルト空間 $\mathcal{H}_s$ を

$$\mathcal{H}_s = f^{-s}\mathcal{H}$$

と定める．また，$\mathcal{H}_{\rm loc} = L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ とする．$B_R = \{f < R\}$ とし，定義関数：

$$F_\nu = F(B_{R_{\nu+1}} \setminus B_{R_\nu}), \quad R_\nu = 2^\nu,\ \nu \ge 0$$

を考える．ここで $F(\Omega)$ は $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ の定義関数である．関数空間 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}^*_0$ をそれぞれ以下で定める．

$$\mathcal{B} = \{\psi \in \mathcal{H}_{\rm loc} \mid \|\psi\|_{\mathcal{B}} < \infty\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sum_{\nu \ge 0} R_\nu^{1/2} \|F_\nu \psi\|_{\mathcal{H}},$$

$$\mathcal{B}^* = \{\psi \in \mathcal{H}_{\rm loc} \mid \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} < \infty\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{\nu \ge 0} R_\nu^{-1/2} \|F_\nu \psi\|_{\mathcal{H}},$$

$$\mathcal{B}^*_0 = \{\psi \in \mathcal{B}^* \mid \lim_{\nu \to \infty} R_\nu^{-1/2} \|F_\nu \psi\|_{\mathcal{H}} = 0\}.$$

ここで任意の実数 $s > 1/2$ に対して，包含関係：

$$\mathcal{H}_s \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{H}_{1/2} \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}_{-1/2} \subsetneq \mathcal{B}^*_0 \subsetneq \mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{H}_{-s} \tag{2.1}$$

が成り立つことに注意しておく．簡単のため，以下の記号を導入する．$I \subseteq \mathbb{R}$ に対して

$$I_\pm = \{z = \lambda \pm i\Gamma \mid \lambda \in I, \Gamma \in (0,1)\}.$$

2.3 Results

次の定理は，今回の主結果の中で基本的かつ，重要な定理である．

Theorem 2.2. *Condition 2.1* を仮定し，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．もし関数 $\phi \in \mathcal{B}^*_0$ が超関数の意味で

$$(H - \lambda)\phi = 0$$

を満たすならば，$\mathbb{R}^d$ 全体で $\phi = 0$ である．

Theorem 2.2 が $\mathcal{B}^*_0$-固有関数の非存在を主張する一方で，Bessel 関数を用いて，$\mathcal{B}^*$-固有関数を構成できることがわかっている．したがって包含関係 (2.1) から，$\mathcal{B}^*$ という空間は一般化固有関数が存在する最小の空間であることがわかる．このように一般化固有関数の存在・非存

在を特徴づける関数空間を決定する定理は，レーリッヒの定理と呼ばれる．レーリッヒの定理は，これまで自由ハミルトニアンに対して研究され，そのほかのハミルトニアンに対しては，講演者が知る限り，研究は行われていない．

さてここからは，H のレゾルベント

$$R(z) = (H - z)^{-1}$$

がもつ性質について見ていこう．まず，$R(z)$ を $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}^*$ への写像とみなしたとき，その作用素ノルムが，局所一様有界となることが次の定理からわかる．

Theorem 2.3. *Condition 2.1* を仮定し，$I \subseteq \mathbb{R}$ を任意の相対コンパクトな開部分集合とする．このとき，ある $C > 0$ が存在して，任意の $\phi = R(z)\psi$, $z \in I_\pm$, $\psi \in \mathcal{B}$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}^*} + \|\nabla^f \phi\|_{\mathcal{B}^*} + \langle p_j h^{jk} p_k \rangle_\phi^{1/2} + \|r^{-\epsilon} p_j \delta^{jk} p_k \phi\|_{\mathcal{B}^*} \leq C\|\psi\|_{\mathcal{B}}.$$

ここで，h はある非負なテンソルである．

Theorem 2.2 と Theorem 2.3 から直ちに次が従う．

Corollary 2.4. *Condition 2.1* の下で，H のスペクトルは真に絶対連続である．

H が絶対連続スペクトルしかもたないということは，任意の初期状態に対して，粒子は必ず時刻無限大で空間無限遠方に散乱されることを意味している．これは最初の観察と一致する．そこで問題になるのが，粒子がどういう挙動で遠方に散乱されるのか，というものである．このような散乱状態を量子力学の枠組みで扱ったものを散乱理論と呼ぶ．斥力ハミルトニアンに対する散乱理論は [BCHM] などで研究されている．講演者も今後，レゾルベントがもつ性質を用いて，彼らとは異なるアプローチで斥力ハミルトニアンに対する散乱理論に取り組むつもりである．

さてレゾルベントの解析において，Theorem 2.3 の次に扱うべきは極限吸収原理である．ここで極限吸収原理とは，レゾルベント $R(z)$ の $z \to \lambda \in \mathbb{R}$ における境界値の存在性を主張するものである．しかし，Theorem 2.3 から極限吸収原理は直ちに従わない．そこで，摂動項に対するさらなる仮定とレゾルベントのもう一つのノルム評価を与えよう．まず，テンソル ℓ を導入する．

$$\ell = \delta - \tilde{\eta}(\nabla r) \otimes (\nabla r).$$

ここで δ はクロネッカーのデルタ，$\tilde{\eta}$ は，$\ell \geq 0$ となるように選んだあるカットオフ関数である．さらに conjugate operator A を導入する．

$$A = \operatorname{Re} p^f, \quad p^f = -i\nabla^f.$$

Condition 2.5. Condition 2.1 に加えて，ある $\tau, C > 0$ が存在して以下の評価が成り立つ．

$$|\nabla^f q_1| \leq C f^{-1-\tau}, \quad |\ell^{\bullet k} r^{-\epsilon/2} \nabla_k q_1| \leq C f^{-1-\tau}.$$

さらに以下，$\beta_c > 0$ は ϵ, ρ, τ にのみ依存する定数とする．

Theorem 2.6. *Condition 2.5* を仮定し，$I \subseteq \mathbb{R}$ を任意の相対コンパクトな開部分集合とする．このときすべての $\beta \in [0, \beta_c)$ に対して，ある $C > 0$ が存在して，任意の $\phi = R(z), \psi \in f^{-\beta}\mathcal{B}, z \in I_\pm$ に対してそれぞれ次が成り立つ．

$$\|f^\beta(A \mp a)\phi\|_{\mathcal{B}^*} + \langle p_i f^{2\beta} h^{ij} p_j \rangle_\phi^{1/2} \leq C\|f^\beta \psi\|_{\mathcal{B}}.$$

ここで a はある有界な関数である．

Theorem 2.6 は $\phi = R(z)\psi$ が空間遠方でどの程度振動しているかをはかる目安となる．
Theorem 2.3 と Theorem 2.6 を用いることで，次の形の極限吸収原理が得られる．

Corollary 2.7. *Condition 2.5* を仮定し，$I \subseteq \mathbb{R}$ を任意の相対コンパクトな開部分集合とする．任意の $s > 1/2$ と $\omega \in (0, \min\{(2s-1)/(2s+1), \beta_c/(\beta_c+1)\})$ に対して，ある $C > 0$ が存在して，任意の $z, z' \in I_+$ または $z, z' \in I_-$ に対して次が成り立つ．

$$\|R(z) - R(z')\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})} \leq C|z - z'|^\omega,$$
$$\|r^{-\epsilon/2} pR(z) - r^{-\epsilon/2} pR(z')\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})} \leq C|z - z'|^\omega.$$

特に，$\mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})$ でのノルム位相の意味で，これら作用素の $I_\pm \ni z \to \lambda \in I$ についての極限が存在する：

$$R(\lambda \pm i0) := \lim_{I_\pm \ni z \to \lambda} R(z), \quad r^{-\epsilon/2} pR(\lambda \pm i0) := \lim_{I_\pm \ni z \to \lambda} r^{-\epsilon/2} pR(z).$$

さらに，これら作用素の極限は $\mathcal{B}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ に属する．

参考文献

[BCHM] Bony, J. F., Carles, R., Häfner, D., Michel, L.: Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential. J. Math. Pures Appl. 84 (2005) 509-579.

[I1] Itakura, K.: Rellich's theorem for spherically symmetric repulsive Hamiltonians. preprint, 2017.

[I2] Itakura, K.: Limiting absorption principle and radiation condition for repulsive Hamiltonians. preprint, 2017.

[IS] Ito, K., Skibsted, E.: Stationary scattering theory on manifolds, I. Preprint, 2016.

整ホモロジー3球面とハンドル体群の部分群

大森　源城　(Genki Omori)*

1. 背景

H_g を図 1 のような，3 次元球面 S^3 に標準的に埋め込まれた向き付けられた種数 g の 3 次元ハンドル体とし，その境界 ∂H_g を Σ_g とおく．Σ_g 内に 2 次元円板 D_0 を図 1 のように取り，$\Sigma_{g,1}$ を Σ_g から D_0 の内部を取り除いて得られる境界成分数が 1 のコンパクト曲面とする．この時，Σ_g の D_0 上恒等的な自己微分同相写像全体からなる群を $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1})$ と書き，$\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1})$ の，D_0 を各点で固定するアイソトピーによる商群を $\mathcal{M}_{g,1}$ とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ は，$\Sigma_{g,1}$ の写像類群と呼ばれる．

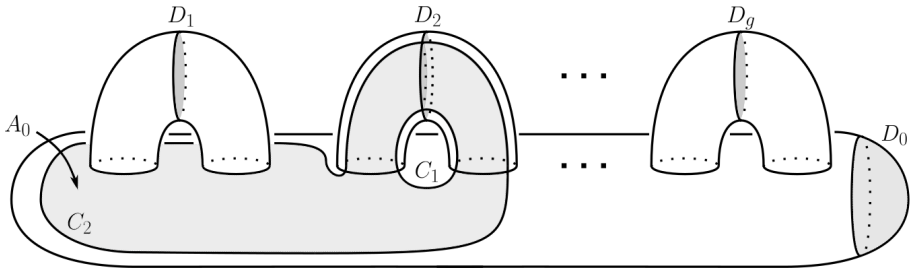


図 1: H_g のモデルと $\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線 C_1, C_2.

H'_g を，S^3 から H_g の内部を取り除いて得られる種数 g の 3 次元ハンドル体とする．この時，$\mathcal{M}_{g,1}$ の元 f に対し，M_f を，$S^3 = H_g \cup H'_g$ から H'_g を取り除き再び f に沿って H'_g を貼り合わせて得られる有向閉 3 次元多様体の微分同相類とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ の部分群で H_g，H'_g に拡張出来るアイソトピー類からなるものをそれぞれ $\mathcal{H}_{g,1}$，$\mathcal{H}'_{g,1}$ で定義し、これらをそれぞれハンドル体群と呼ぶ．$\mathcal{V}(3)$ を有向閉 3 次元多様体の微分同相類からなる集合とする．この時，対応 $\mathcal{M}_{g,1} \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{V}(3)$ は以下の全単射を誘導する ([1] を見よ) :

$$\lim_{g\to\infty} \mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{M}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1} \longrightarrow \mathcal{V}(3).$$

ここで，この帰納的極限は，図 2 のような自然な埋め込み $\iota : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$ から誘導される写像類群間の単射準同型写像 $\iota_* : \mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{g+1,1}$ から誘導されるものである．

有向閉 3 次元多様体 M と任意の正の整数 n に対し，n 次元の整係数ホモロジー群 $\mathrm{H}_n(M;\mathbb{Z})$ が S^3 のホモロジー群 $\mathrm{H}_n(S^3;\mathbb{Z})$ と同型である時，M を整ホモロジー 3 球面と呼ぶ．$\mathcal{S}(3)$ を有向整ホモロジー 3 球面の微分同相類からなる集合とする．$\mathcal{M}_{g,1}$ の Σ_g の $\mathrm{H}_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ 上の作用は，シンプレクティック表現 $\Psi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ を誘導する．この Ψ の核を $\mathcal{I}_{g,1}$ と書き $\Sigma_{g,1}$ の Torelli 群と呼ぶ．定義から，各 $f \in \mathcal{I}_{g,1}$ に対し，M_f は整ホモロジー 3 球面である．この時，上の全単射を $\mathcal{I}_{g,1}$ に制限する事で以下の全単射が得

本研究は JST，CREST，JPMJCR17J4「熱可塑性エラストマーにおける動的ネットワークのトポロジー制御」（代表：中嶋健）の助成を受けたものである。

* 埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報部門　数理領域数学コース
e-mail: omori.g.aa@m.titech.ac.jp

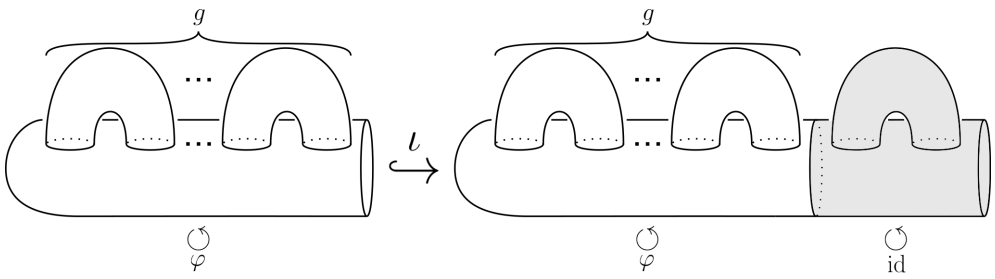


図 2: 埋め込み $\iota : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_{g+1,1}$.

られる ([5] を見よ) :

$$\lim_{g\to\infty} \mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1} \longrightarrow \mathcal{S}(3).$$

この全単射から，両側剰余 $\mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ を調べる事は整ホモロジー 3 球面を調べる事と同じであり，特に，任意の g に対して $\mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ からの写像を構成する事が整ホモロジー 3 球面の不変量を構成する事と同値となる．$\mathcal{IH}_{g,1} := \mathcal{I}_{g,1} \cap \mathcal{H}_{g,1}$, $\mathcal{IH}'_{g,1} := \mathcal{I}_{g,1} \cap \mathcal{H}'_{g,1}$ とおく．この時，Pitsch [6] によって次の結果が得られている．

定理 1.1 ([6]). $f, h \in \mathcal{I}_{g,1}$ に対し，$[f] = [h] \in \mathcal{H}_{g,1} \setminus \mathcal{I}_{g,1}/\mathcal{H}'_{g,1}$ となる事の必要十分条件は，$\varphi \in \mathcal{IH}_{g,1}$, $\varphi' \in \mathcal{IH}'_{g,1}$, $\psi \in \mathcal{H}_{g,1} \cap \mathcal{H}'_{g,1}$ が存在して以下を満たすことである：

$$h = \psi\varphi f \varphi' \psi^{-1}.$$

これらの事から，整ホモロジー 3 球面の不変量を構成する為に $\mathcal{IH}_{g,1}$ の単純な生成系は有用だと思われる．本講演では，$\mathcal{IH}_{g,1}$ の単純な生成系に関する説明を行う．

2. 準備

本章では，主結果の為の準備を行う．

$\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線 c に対し，c に沿って $\Sigma_{g,1}$ を切り開き，切り開いた片方の境界を右に 360 度回転させ，再び貼り合わせる．この操作から得られる $\Sigma_{g,1}$ の自己微分同相写像を t_c とおき，c に沿った右手 Dehn twist と呼ぶ（図 3 参照）．本講演では，微分同相写像とそのアイソトピー類を同一視する．

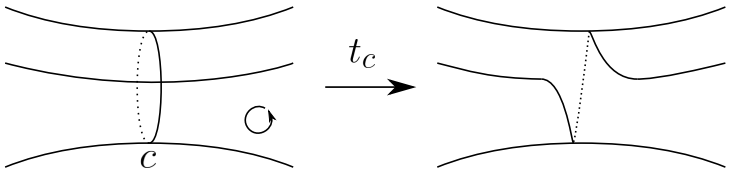


図 3: 単純閉曲線 c に沿った右手 Dehn twist t_c.

定義 2.1. $\{c_1, c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の単純閉曲線の組とする．c_1 と c_2 が非分離的で互いにアイソトピックでなく $\Sigma_{g,1}$ のある部分曲面の境界と等しくなる時，$\{c_1, c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の *bounding pair (BP)* という．特に，その部分曲面の種数が h となる時，$\{c_1, c_2\}$ を $\Sigma_{g,1}$ 上の *genus-h bounding pair (genus-h BP)* と呼ぶ．

$\Sigma_{g,1}$ 上の *BP* もしくは *genus-h BP* $\{c_1, c_2\}$ に対し，$t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ をそれぞれ *(*$\{c_1, c_2\}$ に沿った*)BP-map* もしくは *genus-h BP-map* という．

BP-map は$\mathcal{I}_{g,1}$の元となることに注意する．

定義 2.2. Gを群，HをGの正規部分群，$x_1,\dots,x_n$をHの元とする．Hが$x_1,\dots,x_n$のGによる共役全体で生成される時，Hが$x_1,\dots,x_n$によってGの中で正規的に生成されるという．

Johnson [3] は以下の定理を示した：

定理 2.3 ([3])**.** $g\geq 3$に対し，$\mathcal{I}_{g,1}$は*1*つの *genus-1 BP-map* によって$\mathcal{M}_{g,1}$の中で正規的に生成される．

定理 2.3は，ある意味で，本講演の主結果の先行研究となるものである．主結果の説明を行う為に，以下のような，$\mathcal{I}_{g,1}$の元となる特殊なBP-mapを定義する．

定義 2.4. $\{c_1,c_2\}$を$\Sigma_{g,1}$上の *genus-h BP* とする．c_1とc_2がH_g内でそれぞれ円板を張らず，$c_1\sqcup c_2$がH_g内のアニュラスを張る時，$\{c_1,c_2\}$を$\Sigma_{g,1}$上の *genus-h homotopical BP (genus-h HBP)* と呼ぶ．

genus-h HBP $\{c_1,c_2\}$に対し，$\{c_1,c_2\}$に沿った *BP-map* $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$を *genus-h HBP-map* と呼ぶ．

図 1のような$\Sigma_{g,1}$上の単純閉曲線C_1, C_2に対し，$\{C_1,C_2\}$は，genus-1 HBPの例である．genus-h HBP-mapは$\mathcal{IH}_{g,1}$の元となることに注意する．

3. 主結果

以下が本講演の主結果である．

定理 3.1. $g\geq 3$に対し，$\mathcal{IH}_{g,1}$は$t_{C_1}t_{C_2}^{-1}$によって$\mathcal{H}_{g,1}$の中で正規的に生成される．ここで，C_1とC_2は図 *1*の単純閉曲線である．

定理 *3.1*の証明の概略. x_0を$\partial D_0=\partial\Sigma_{g,1}$の点とすると，$\mathcal{H}_{g,1}$は$H_g$の基本群$\pi_1(H_g,x_0)$に作用する．$\pi_1(H_g,x_0)$は階数$g$の自由群$F_g$と同型である為，この作用から準同型写像$\eta:\mathcal{H}_{g,1}\to \mathrm{Aut}F_g$が得られる．特に，Griffiths [2] により，この準同型写像ηは全射になる事が示されている．F_gのアーベル化から誘導される準同型写像$\mathrm{Aut}F_g\to GL(n,\mathbb{Z})$を考え，この核を$\mathrm{IA}_g$とおく．$\mathrm{IA}_g$は，$\mathrm{Aut}F_g$のIA-部分群と呼ばれる．この時，$\eta$による$\mathcal{IH}_{g,1}$の像が$\mathrm{IA}_g$と一致する事が確認出来る為，以下の単完全系列が得られる：

$$1\longrightarrow \ker\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}\longrightarrow \mathcal{IH}_{g,1}\overset{\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}}{\longrightarrow}\mathrm{IA}_g\longrightarrow 1. \tag{1}$$

$\ker\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$の生成系はPitsch [6] によって与えられており，IA_gの生成系はMagnus[4] によって与えられている．その為，それらの$\ker\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$の生成元と$\mathrm{IA}_g$の生成元の$\eta|_{\mathcal{IH}_{g,1}}$に関するリフト全てを，$t_{C_1}t_{C_2}^{-1}$の$\mathcal{H}_{g,1}$による共役の積で書き表す事によって定理 3.1の証明が与えられる．

□

参考文献

[1] J. S. Birman, *On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds. Knots, groups, and 3-manifolds* (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), Ann. of Math. Studies, No. **84**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1975, pp. 137–164.

[2] H. B. Griffiths, *Automorphisms of a 3-dimensional handlebody*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **26** (1964), 191–210.

[3] D. L. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), no. 1, 119–125.

[4] W. Magnus, *Über n-dimensionale Gittertransformationen*, (German) Acta Math. **64** (1935), no. 1, 353–367.

[5] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology **28** (1989), no. 3, 305–323.

[6] W. Pitsch, *Trivial cocycles and invariants of homology 3-spheres*, Adv. Math. **220** (2009), no. 1, 278–302.

Slope equality of plane curve fibrations

大阪大学大学院理学研究科数学専攻　榎園　誠（Makoto Enokizono）

1　主結果

複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の中で d 次斉次多項式 $F(X,Y,Z)$ の零点で定義される代数多様体を d 次平面曲線という．非特異な平面曲線は閉リーマン面である（一般に非特異完備な代数曲線であることと閉リーマン面であることは同値である）．n 次元複素多様体 X に対し，X 上の正則関数のなす層（構造層）を $\mathcal{O}_X$，正則 n 次形式のなす層（標準層）を ω_X と表す．

S をコンパクト複素曲面，B を閉リーマン面とする．全射な正則写像 $f\colon S \to B$ で一般ファイバー F が種数 g の閉リーマン面なものを種数 g の代数曲線束又はファイバー曲面という．本稿では常に代数曲線束 f は種数 $g \geq 2$ とし，相対極小である（ファイバーに含まれる自己交点数が -1 のリーマン球（$\simeq \mathbb{P}^1$）は存在しない）ことを仮定する．代数曲線束 f に対し，次の 3 つの不変量 K_f^2, χ_f, e_f を考える:

- f の相対標準層 $\omega_f = \omega_S \otimes f^*\omega_B^{-1}$ の第 1 チャーン類 $K_f = c_1(\omega_f) \in H^2(S,\mathbb{Z})$ の自己交点数 K_f^2. これは
$$K_f^2 = K_S^2 - 8(g-1)(b-1)$$
を満たす．ここで，$K_S = c_1(\omega_S)$ であり，b は B の種数.

- 相対標準層 ω_f の順像層 $f_*\omega_f$ の次数 $\chi_f = \deg(f_*\omega_f)$. これは
$$\chi_f = \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1)$$
を満たす．ここで，$\chi(\mathcal{O}_S)$ は構造層 $\mathcal{O}_S$ のオイラー数である.

- 各ファイバー $f^{-1}(p)$ の位相的なオイラー数 $e_{\mathrm{top}}(f^{-1}(p))$ は一般ファイバーの位相的なオイラー数 $e_{\mathrm{top}}(F) = 2-2g$ 以上である．その差を全てのファイバーに対し和を取ったものを $e_f = \sum_{p\in B}(e_{\mathrm{top}}(f^{-1}(p)) - 2 + 2g)$ と定義する．これは有限和であり
$$e_f = e_{\mathrm{top}}(S) - 4(g-1)(b-1)$$
を満たす.

これらの不変量に対し次が成立する．但し f は種数 2 以上で相対極小とする.

- （ネーターの公式）$12\chi_f = K_f^2 + e_f$.
- （ヒルツェブルフの符号数定理）$\mathrm{Sign}(S) = K_f^2 - 8\chi_f$.
  ここで，$\mathrm{Sign}(S)$ は $H^2(S, \mathbb{C})$ 上の交点形式の符号数.
- K_f^2, χ_f, e_f は全て非負である．また，$\chi_f = 0$ であることと f は正則ファイバー束であることは同値であり，$e_f = 0$ であることと f は位相的なファイバー束であることは同値である.

以下では代数曲線束 f は正則ファイバー束ではないと仮定する．2 つの不変量 K_f^2 と χ_f の比 $\lambda_f = K_f^2/\chi_f$ を f のスロープという．スロープの下限に関しては，スロープ不等式と呼ばれる次の不等式が知られている [5]：

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda_f.$$

スロープが不等式の下限を取るときは，f は超楕円曲線束（一般ファイバーは超楕円曲線である代数曲線束）の場合に限ることが知られている．また超楕円曲線束に対しては，スロープ不等式よりも強く次のスロープ等式と呼ばれる等式が成立する.

Theorem 1.1 ([6]) 種数 g の超楕円曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な種数 g の超楕円曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = \frac{4(g-1)}{g}\chi_f + \sum_{p \in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する.

このようなスロープの下限からのずれを与える関数 Ind は堀川指数と呼ばれている.

非超楕円曲線束に関しても，いくつかの場合にスロープ等式が成立することが知られている．例えば，種数 3 の非超楕円曲線束に関しては次の等式が成立する.

Theorem 1.2 ([4]) 種数 3 の非超楕円曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な種数 3 の非超楕円曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = 3\chi_f + \sum_{p \in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する.

本講演の主定理は平面 d 次曲線束（一般ファイバーが非特異平面 d 次曲線である代数曲線束）に関する次のスロープ等式である.

Theorem 1.3 $d \geq 4$ とする．非特異平面 d 次曲線の退化ファイバー芽に対し非負有理数を与える関数 Ind が存在し，任意の相対極小な平面 d 次曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$K_f^2 = \frac{6(d-3)}{d-2}\chi_f + \sum_{p\in B} \mathrm{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する．

種数 3 の非超楕円曲線は非特異平面 4 次曲線に他ならないので，Theorem 1.3 は Theorem 1.2 の一般化であるといえる．スロープ等式の応用として，局所符号数と呼ばれる局所不変量が定義でき，次が成立する．

Corollary 1.4 $d \geq 4$ とする．非特異平面 d 次曲線の退化ファイバー芽に対し有理数を与える関数 σ が存在し，任意の平面 d 次曲線束 $f\colon S \to B$ に対し等式

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{p\in B} \sigma(f^{-1}(p))$$

が成立する（このような性質を持つ関数を局所符号数という）．さらに，この局所符号数は [3] で定義される Meyer 関数から決まる局所符号数と一致する．

2 応用

(X,o) を孤立 2 次元超曲面特異点，つまり，$\mathbb{C}^3$ の原点 o の近傍上定義された正則関数 $h(x,y,z)$ を用いて $X = \{h(x,y,z) = 0\}$ と書け，o は X の孤立特異点なものとする．(X,o) の幾何種数 $p_g = p_g(X,o)$ は特異点解消 $\widetilde{X} \to X$ を用いて $\dim H^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ と定義される．特異点 (X,o) のスムージング $X_\varepsilon = \{h(x,y,z) = \varepsilon\}$（$\varepsilon > 0$ は十分小）と原点 o 中心の十分小さい閉球 $B \subset \mathbb{C}^3$ との交わり $M = X_\varepsilon \cap B$ は境界付き実 4 次元多様体でありミルナーファイバーと呼ばれる．その第 2 ベッチ数 μ を (X,o) のミルナー数という．μ_+，μ_-，μ_0 をそれぞれ交点形式 $H_2(M,\mathbb{Z}) \times H_2(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ の正，負，0 の固有値の数とすると，$\mu = \mu_+ + \mu_- + \mu_0$ と表せる．$\sigma = \mu_+ - \mu_-$ を特異点 (X,o) の符号数という．超曲面特異点に関するダーフィー予想 [1] は次のようなものである．

（弱予想）$\sigma \leq 0$.

（強予想）$6p_g \leq \mu$.

$2p_g = \mu_+ + \mu_0$ より，弱予想は $4p_g \leq \mu + \mu_0$ と同値であり，強予想から弱予想が従うことが分かる．[2] において弱予想は正しいことが示されたが，強予想の方は現在でも未解決である．実は定理 1.3 を用いてダーフィーの強予想に近い形の不等式が導くことが出来る．

Corollary 2.1 (X,o) を孤立 2 次元超曲面特異点とし，有理特異点でない（$p_g > 0$）とする．$A = \pi^{-1}(o)$ を最小特異点解消 $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ の例外集合とする．このとき，不等式

$$6p_g \leq \mu - \chi_{\mathrm{top}}(A),$$

又は同値であるが,

$$\sigma \leq -2p_g - 1 - \#A$$

が成立する．ここで $\chi_{\mathrm{top}}(A)$ は A の位相的オイラー数とし，$\#A$ は A の既約成分の個数とする．特に $\chi_{\mathrm{top}}(A) \geq 0$ である特異点に対し強予想は正しく，どんな孤立 2 次元超曲面特異点に対しても弱予想は正しい.

References

[1] A.H. Durfee, The signature of smoothings of complex surface singularities, Math. Ann. **232** (1978), no.1, 85–98.

[2] J. Kollár and A. Némethi, Durfee's conjecture on the signature of smoothings of surface singularities, to appear in Annales Sc. de l'Ecole Norm. Sup.

[3] Y. Kuno, The mapping class group and the Meyer function for plane curves, Math. Ann. **342** (2008), 923–949.

[4] M. Reid, Problems on pencils of small genus, Preprint (1990) (see his home page).

[5] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.

[6] G. Xiao, π_1 of elliptic and hyperelliptic surfaces, Internat. J. Math. **2** (1991), 599–615.

力学的境界条件下での特異拡散方程式*

中屋敷 亮太 (NAKAYASHIKI, Ryota)†
千葉大学大学院 理学研究科 博士後期課程 2 年

概要

特異拡散方程式とは, 拡散係数が無限大になりうる拡散方程式の総称である. 本講演では, その特異拡散方程式に対して, 時間発展の偏微分方程式と内部と境界の方程式をつなぐ接合条件で与えられる “力学的境界条件” と呼ばれる境界条件下での初期値境界値問題を扱う. 特異拡散と力学的境界条件を課した場合の数学的難しさを中心に, 解の定性的性質についての結果を報告する. また特異拡散方程式の応用例として, 物質の結晶構造を記述した結晶粒界数理モデルを考察する.

1 導入

本講演を通して, $1 < N \in \mathbb{N}$, $0 < T < \infty$ を定数とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域とする. また $Q_T := (0,T) \times \Omega$ を時間区間 $(0,T)$ と空間領域 Ω との直積集合とし, 同様に $\Sigma_T := (0,T) \times \Gamma$ と表す. このとき $\varepsilon \geq 0$ を定数とし, 以下 (1)–(3) から成る Allen–Cahn 型特異拡散方程式の初期値境界値問題 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ を考える.

$(\mathrm{S})_\varepsilon$

$$\partial_t u - \operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) + \beta(u) + g(u) \ni \theta \text{ in } Q_T, \tag{1}$$

$$\partial_t u_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma) + \left(\tfrac{Du}{|Du|}\right) \cdot n_\Gamma + \beta_\Gamma(u_\Gamma) + g_\Gamma(u_\Gamma) \ni \theta_\Gamma, \text{ and } u_{|\Gamma} = u_\Gamma \text{ on } \Sigma_T, \tag{2}$$

$$u(0,\cdot) = u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma(0,\cdot) = u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma. \tag{3}$$

ここに, n_Γ は外向き単位法線ベクトルを表す. “$_{|\Gamma}$” は Γ 上のトレースを表し, “Δ_Γ” は Laplace–Beltrami 作用素を表す. $\theta : Q \to \mathbb{R}$, $\theta_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられた熱源とし, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_{\Gamma,0} : \Gamma \to \mathbb{R}$ はそれぞれ未知変数 u, u_Γ の初期値を表す. (1) は未知変数 $u : Q \to \mathbb{R}$ を持つ**特異拡散方程式**と呼ばれる偏微分方程式である. $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の境界条件 (2) は, 一般に**力学的境界条件 (dynamic boundary condition)** と呼ばれる. この境界条件は未知変数 $u_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ をもつ放物型偏微分方程式と, 接合条件 “$u_{|\Gamma} = u_\Gamma$ on Σ_T” から構成されており, 時間によって境界が動的に変化する様子を捉えることができると考えられる. したがって, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ は 2 つの未知変数を持つシステム (連立偏微分方程式) とみなすことができる.

$(\mathrm{S})_\varepsilon$ は Visintin [22, Chapter VI] により提唱された, メゾスコピックスケールでの物質の凝固・融解相転移現象を記述する数学モデルをアレンジしたものである. 一般に $(\mathrm{S})_\varepsilon$ のような相転移現象を表す方程式を Allen–Cahn 型方程式といい, 二重井戸型の関数を含む自由エネルギーと呼ばれる汎関数の勾配流によって得られる. 本システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の場合は以下の汎関数が対応する.

---

*本研究は儀我 美一 氏 (東京大学), Rybka, Piotr 氏 (Warsaw 大学), 白川 健 氏 (千葉大学) との共同研究に基づく.

†〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 千葉大学大学院 理学研究科 基盤理学専攻 数学・情報数理学コース. e-mail: nakayashiki1108@chiba-u.jp

$$[u,u_\Gamma]\in L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)\mapsto \mathscr{F}_\varepsilon(u,u_\Gamma):=\int_\Omega |Du|+\int_\Gamma \left|u_{|_\Gamma}-u_\Gamma\right| d\Gamma+\frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon u_\Gamma)|^2\, d\Gamma$$
$$+\int_\Omega (B(u)+G(u))\, dx+\int_\Gamma (B_\Gamma(u_\Gamma)+G_\Gamma(u_\Gamma))\, d\Gamma,\ \text{if } u\in BV(\Omega),\varepsilon u_\Gamma\in H^1(\Gamma).$$

"$w\in BV(\Omega)\mapsto \int_\Omega |Dw|$" は全変動汎関数を表す. "$d\Gamma$" は Γ の面積要素, "∇_Γ" は Γ 上の勾配を表す. また $B:\mathbb{R}\to[0,\infty]$, $B_\Gamma:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ はそれぞれ与えられた適正下半連続関数であり, それぞれの劣微分を $\beta=\partial B$, $\beta_\Gamma=\partial B_\Gamma$ とする. $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G_\Gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はそれぞれ C^1-級関数であり, それぞれの微分を $g=G'$, $g_\Gamma=G_\Gamma'$ とする.

先述の二重井戸型関数はエネルギー汎関数において $B=B(u)$, $G=G(u)$ と $B_\Gamma=B_\Gamma(u_\Gamma)$, $G_\Gamma=G_\Gamma(u_\Gamma)$ にはそれぞれの和 "$B(u)+G(u)$" と "$B_\Gamma(u_\Gamma)+G_\Gamma(u_\Gamma)$" が対応しており, 相転移現象で 2 つの安定状態が共存する状況を再現する役割をする. これらの関数の具体例は次のようなものである (cf. [22]).

$$B(\sigma)=B_\Gamma(\sigma)=\mathscr{I}_{[-1,1]}(\sigma)\ \text{ and }\ G(\sigma)=G_\Gamma(\sigma)=-\frac{1}{2}\sigma^2,\ \text{for } \sigma\in\mathbb{R},$$

ここに, $\mathscr{I}_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1,1]$ 上の指示関数である:

$$\sigma\in\mathbb{R}\mapsto \mathscr{I}_{[-1,1]}(\sigma):=\begin{cases}0, & \text{if } \sigma\in[-1,1],\\ \infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

この具体例を含むように, それぞれの関数 B, G と B_Γ, G_Γ に適切な仮定をする.

本研究の目標は, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ のような力学的境界条件下での特異拡散方程式を数学的に解析することである. その目標を達成するために, 次の近似問題 $(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$ ($\varepsilon>0$, $\nu>0$) を考える.

$(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$:
$$\begin{cases}\partial_t u-\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}+\nu^2\nabla u\right)+\beta(u)+g(u)\ni\theta\ \text{ in }\ Q,\\ \partial_t u_\Gamma-\Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma)+\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}+\nu^2\nabla u\right)\cdot n_\Gamma+\beta_\Gamma(u_\Gamma)+g_\Gamma(u_\Gamma)\ni\theta_\Gamma, \text{ and } u_{|_\Gamma}=u_\Gamma \text{ on } \Sigma,\\ u(0,\cdot)=u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma,(0,\cdot)=u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma.\end{cases}$$

この近似問題 $(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$ は特異拡散方程式 (1) の特異性を正則化項 $\nu^2\nabla u$ により緩和したシステムである. またシステム $(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$ は, 先行研究 (cf. [7]) により以下の結果を得ている.

(A) $\varepsilon\geq 0$ のときの $(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$ の解の数学的表現を含む解の適切性.

(B) $\varepsilon\to\varepsilon_0\geq 0$ と極限移行したときのシステムの連続依存性.

本研究では, システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ を上記の近似システム $(\mathrm{RS})^\nu_\varepsilon$ による $\nu\to 0$ としたときの極限問題として考察する. 特異拡散方程式の解の関数は一般に, 有界変動関数 (BV 関数) と呼ばれる関数である. この BV 関数とは, 境界で不連続性をもつ関数 (例えば, Heaviside 関数) を含む. したがって, 力学的境界条件における接合条件 $u_{|_\Gamma}=u_\Gamma$ on Σ_T が一般に成立しなくなるため, 自由エネルギーにおいて接合条件が L^1-積分 $\int_\Gamma |u_{|_\Gamma}-u_\Gamma|d\Gamma$ に置き換わる. しかしシステムがエネルギーの勾配流であることから, このエネルギーが接合条件の数学的表現を変化させる. これらを踏まえ, 本講演では $(\mathrm{S})_\varepsilon$ に対しても上記の (A), (B) が成立するかどうか詳細を述べる.

2 記号の準備

記号および主定理を述べる上で必要な準備をする.

記号 1. $d \in \mathbb{N}$ を任意の次元とする. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して, $|a|$ は通常の Euclid ノルム, $a \cdot b$ を通常のスカラー積とする. また $a \otimes b$ をテンソル積とする.

記号 2. X を Banach 空間とする. $|\cdot|_X$ は X のノルムとし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X と X^* との双対写像を表す. もし X が Hilbert 空間ならば, $(\cdot, \cdot)_X$ は内積と定義する.

X は Hilbert 空間 とする. X 上の適正下半連続凸 (汎) 関数 ϕ を考える. $D(\phi)$ は凸関数 ϕ の有効領域を表し, $\partial\phi$ は**劣微分作用素** (以下, 劣微分) を表す. 一般に劣微分は, $X^2 := X \times X$ 上の集合値関数で与えられ, 極大単調作用素であることが知られている (cf [3,5,6,10]). 特に任意の $z_0 \in X$ に対し, 劣微分は次の変分不等式によって定義される.

$$(z_0^*, z - z_0)_X \leq \phi(z) - \phi(z_0), \text{ for any } z \in D(\phi).$$

ここに, $D(\partial\phi) := \{z \in X \,|\, \partial\phi(z) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分の表現の 1 つの例として次の符号関数 (Sgn 関数) と呼ばれる集合値関数 $\mathrm{Sgn} : \mathbb{R}^N \to 2^{\mathbb{R}^N}$ を次で定義する.

$$\omega \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathrm{Sgn}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{\omega}{|\omega|}, & \text{if } \omega \neq 0, \\ \overline{\{x \in \mathbb{R}^d | |x| < 1\}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

関数 Sgn は Euclid ノルム $|\cdot| : \omega \in \mathbb{R}^N \mapsto |\omega| := \sqrt{\omega \cdot \omega} \in [0, \infty)$ の劣微分と一致する. すなわち, $\mathrm{Sgn} = \partial|\cdot|$ である.

次に主定理の証明の鍵となる凸関数の収束, "Mosco 収束" を定義する.

定義 1 (Mosco 収束: cf. [15]). X を Hilbert 空間 とする. $\phi : X \to (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸関数, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ を適正下半連続凸関数の列で, $\phi_n : X \to (-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, ϕ_n が ϕ に **Mosco 収束** するとは, 次の条件 (M1), (M2) を満たすことをいう.

(M1) Lower-bound: 任意の $\check{z} \in X$ と $\{\check{z}_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ に対して, "$\check{z}_n \to \check{z}$ weakly in X, as $n \to \infty$" を満たすならば, "$\underline{\lim}_{n\to\infty} \phi_n(\check{z}_n) \geq \phi(\check{z})$" が成り立つ.

(M2) Optimality: 任意の $\hat{z} \in D(\phi)$ に対して, 次を満たす列 $\{\hat{z}_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が存在する:

$$\hat{z}_n \to \hat{z} \text{ in } H \text{ and } \phi_n(\hat{z}_n) \to \phi(\hat{z}), \text{ as } n \to \infty.$$

記号 3 (cf. [1,4]). $\mathcal{L}^d$ を d 次元 Lebesgue 測度, $\mathcal{H}^d$ を d 次元 Hausdorff 測度とする. 滑らかな境界 S に対して, S 上の面積要素を dS と書くことにする.

$A \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とする. このとき $\mathcal{M}(A)$ を有限 Radon 測度集合とする. 一般に, $\mathcal{M}(A)$ は Banach 空間 $C_0(A)$ の双対空間である.

記号 4 (BV-theory: cf. [1,4,8,9]). $A \subset \mathbb{R}^d$ を任意の開集合とする. 任意の $u \in L^1(A)$ が超関数の意味の微分 Du が A 上の有限 Radon 測度 (すなわち $Du \in \mathcal{M}(A)$) となるとき, u を A 上の**有界変動関数 (function of bounded variation)**[‡] という. 有界変動関数全体の集合を $BV(A)$ と表す. また任意の $u \in BV(A)$ に対して, u のノルムを次で与えると $BV(A)$ は Banach 空間になる.

$$|u|_{BV(A)} := |u|_{L^1(A)} + |Du|(A), \text{ for } u \in BV(A).$$

ここに $|Du|$ は Du の **全変動 (total variation)** と呼び, $|Du|(A)$ の値は次で与えられる.

$$|Du|(A) = \sup \left\{ \int_A u \operatorname{div} \varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \in C_c^1(A)^d \text{ and } |\varphi| \le 1 \text{ on A} \right\}.$$

さらに, 任意の $u \in BV(A)$ と関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset BV(A)$ が

$$u_n \to u \text{ in } L^1(A) \text{ and } \int_A |Du_n| \to \int_A |Du|, \text{ as } n \to \infty$$

を満たすとき, "$u_n \to u$ strictly in $BV(A)$" と書く (strict topology という).

$1 \le p < d/(d-1)$ とし, 開集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の境界 ∂A が Lipschitz ならば $BV(A)$ は $L^d(A)$ にコンパクトな埋め込みである (cf. [1, Corollary 3.49], [4, Theorem 10.1.3-10.1.4]). また BV-関数に対するトレース作用素と呼ばれる線形作用素 $\gamma_{\partial A} : BV(A) \to L^1(\partial A)$ が一意的に存在し, 次を満たす.

$$\int_{\partial A} \gamma_{\partial A} u (\varphi \cdot n_\Gamma) d\Gamma = \int_A u \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_A \varphi \cdot Du, \text{ for any } \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

また "$u_n \to u$ strictly in $BV(A)$, as $n \to \infty$" ならば "$\gamma_{\partial A} u_n \to \gamma_{\partial A} u$ in $L^1(\partial A)$, as $n \to \infty$" を満たす.

記号 5 (cf. [17]). $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とし, $n_\Gamma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ は外向き単位法線ベクトルとする. さらに, 距離 $x \in \mathbb{R}^N \mapsto d_\Gamma(x) := \inf_{y \in \Gamma} |x - y| \in \mathbb{R}$ を定義する. この距離関数は Γ 上の近傍で C^∞-関数を形成する[§]. これらを基に, **Laplace–Beltrami 作用素** "Δ_Γ" を定義する. そのために, Γ 上の勾配を表す "∇_Γ" (surface-gradient) および, Γ 上の発散を表す "$\operatorname{div}_\Gamma$" (surface-divergence) を次のように定義する.

$$\begin{cases} \cdot \varphi \in C^1(\Gamma) \mapsto \nabla_\Gamma \varphi := \nabla \varphi^{\mathrm{ex}} - (\nabla d_\Gamma \otimes \nabla d_\Gamma) \nabla \varphi^{\mathrm{ex}} \in L^2_{\tan}(\Gamma) \cap C(\Gamma; \mathbb{R}^N), \\ \cdot \omega \in C^1(\Gamma)^N \mapsto \operatorname{div}_\Gamma \omega := \operatorname{div} \omega^{\mathrm{ex}} - \nabla(\omega^{\mathrm{ex}} \cdot \nabla d_\Gamma) \cdot \nabla d_\Gamma \in C(\Gamma). \end{cases}$$

ここに,

$$L^2_{\tan}(\Gamma) := \{ \, \tilde{\omega} \in L^2(\Gamma; \mathbb{R}^N) \;\big|\; \tilde{\omega} \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma \, \}$$

である. ∇_Γ は $H^1(\Gamma)$ から $L^2_{\tan}(\Gamma)$ への線形作用素として拡張することができ, その拡張は Hilbert 空間 $H^1(\Gamma)$ の内積を用いて, 次のように表せる.

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Gamma)} := (\varphi, \psi)_{L^2(\Gamma)} + (\nabla_\Gamma \varphi, \nabla_\Gamma \psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \text{ for } \varphi, \psi \in H^1(\Gamma).$$

[‡] しばしば頭文字をとって有界変動関数のことを **BV-関数**という.
[§] 詳しい空間等の仮定は [16] を参照.

さらに div_Γ は $L^2(\Gamma;\mathbb{R}^N)$ から $H^{-1}(\Gamma)$ への作用素として拡張可能である. これを踏まえると, $-\Delta_\Gamma = -\mathrm{div}_\Gamma \circ \nabla_\Gamma : H^1(\Gamma) \to H^{-1}(\Gamma)$ は双対写像を用いて, 次のように表せる.

$$\langle -\Delta_\Gamma \varphi, \psi \rangle_{H^1(\Gamma)} = (\nabla_\Gamma \varphi, \nabla_\Gamma \psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \text{ for } [\varphi, \psi] \in H^1(\Gamma)^2.$$

この節の最後に, 本問題を考察する上で重要な定理を 2 つ紹介する.

定理 1 (boundary operator: cf. [10]). $\boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \mapsto \boldsymbol{\omega}_{|\Gamma} n_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ は次で与えられる有界線形汎関数 $\mathcal{B}_\Gamma : L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \to H^{-1}(\Gamma)$ が存在する.

$$\langle \mathcal{B}_\Gamma \boldsymbol{\omega}, z_{|\Gamma} \rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\omega} z \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla z \, dx,$$
$$\text{for all } \boldsymbol{\omega} \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega), \text{ and } z \in H^1(\Omega),$$

ここに,

$$L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) := \{\ \tilde{\omega} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N) \ \big|\ \mathrm{div}\, \tilde{\omega} \in L^2(\Omega)\ \}.$$

定理 2 (pairing measure: cf. [2]). 任意の $z \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, およびベクトル値関数 $\boldsymbol{\omega} \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して, 超関数の意味での微分 $(\boldsymbol{\omega}, Dz) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を以下で定義する.

$$\langle (\boldsymbol{\omega}, Dz), \varphi \rangle := -\int_\Omega \varphi (\mathrm{div}\, \boldsymbol{\omega}) z \, dx - \int_\Omega (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \varphi) z \, dx, \text{ for any } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

これを pairing measure という. このとき, 次が成り立つ.

(i) 次のことから, $(\boldsymbol{\omega}, Dz)$ は Radon 測度であることが分かる.

$$\left| \int_E (\boldsymbol{\omega}, Dz) \right| \le \int_E |(\boldsymbol{\omega}, Dz)| \le |\boldsymbol{\omega}|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)} \int_E |Dz|, \text{ for any } E : \text{Borel set}$$

(ii) 点列 $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ が "$\zeta_n \to z$ strictly in $BV(\Omega)$, as $n \to \infty$" を満たすならば, 次が成り立つ.

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, D\zeta_n) \to \int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, Dz), \text{ as } n \to \infty.$$

さらに, 次を満たす有界線形作用素 $[\,\cdot\,, n_\Gamma] : L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\Gamma)$ が存在し, 定理 1 によって与えられた boundary operator と一致する.

(iii) $|[\boldsymbol{\omega}, n_\Gamma]|_{L^\infty(\Gamma)} \le |\boldsymbol{\omega}|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}$, for any $\boldsymbol{\omega} \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$

(iv) 次は成り立つ.

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, Dz) = -\int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\omega} z \, dx + \int_\Gamma [\boldsymbol{\omega}, n_\Gamma] z_{|\Gamma} d\Gamma.$$

3　主定理

以上を踏まえ主定理を述べる. まず解の基礎空間を次のようにおく.

$$\mathscr{H} := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).$$

また本研究では, 以下を仮定する.

(A1) $\beta = \partial B \subset \mathbb{R}^2$, $\beta_\Gamma = \partial B_\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ はそれぞれ凸関数 $B : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $B_\Gamma : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ の劣微分として表される極大単調作用素とし, さらに次の (a1)-(a3) を満たす.

(a1) $B(0) = 0$, $B_\Gamma(0) = 0$ and $[0, 0] \in \beta$, $[0, 0] \in \beta_\Gamma$ on $\mathbb{R}^2$;

(a2) 以下を満たす 1 次元区間 $I_B \subset \mathbb{R}$ が存在する:

$$\mathrm{int} I_B \neq \emptyset,\ D(\beta) = D(\beta_\Gamma) = I_B \text{ and } B, B_\Gamma \in C(\overline{I_B}) \cap L^\infty(I_B);$$

(a3) 次の不等式を満たす定数 $a_k > 0$, $b_k > 0$ $(k = 0, 1)$ が存在する:

$$a_0 |[\beta_\Gamma]^\circ(\tau)| - b_0 \leq |[\beta]^\circ(\tau)| \leq a_1 |[\beta_\Gamma]^\circ(\tau)| + b_1, \text{ for } \tau \in I_B$$

ただし $[\beta]^\circ$, $[\beta_\Gamma]^\circ$ はそれぞれ β, β_Γ の minimal section を表す.

(A2) $g = G'$, $g_\Gamma = G_\Gamma'$ を $\overline{I_B}$ 上 Lipschitz 連続な関数とする.

(A3) 熱源と初期値に次を仮定する.

$$[\theta, \theta_\Gamma] \in L^2(0, T; \mathscr{H}) \text{ and } [u_0, u_{\Gamma,0}] \in \overline{D(\mathscr{F}_\varepsilon)}.$$

次に問題 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の弱解を以下で定義する.

解の定義.　以下 (S1), (S2) を満たす関数の組を $[u, u_\Gamma]$ を $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の弱解と定義する.

(S1) $[u, u_\Gamma] \in W^{1,2}(0, T; \mathscr{H})$, $|Du(\cdot)|(\Omega) \in L^\infty(0, T)$, $u_\Gamma \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))$, $\varepsilon u_\Gamma \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma))$, and $[u(0), u_\Gamma(0)] = [u_0, u_{\Gamma,0}]$ in $\mathscr{H}$.

(S2) $[u, u_\Gamma]$ は以下の変分不等式を満たす.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\partial_t u(t) + g(u(t)) - \theta(t))(u(t) - z)\, dx + \int_\Omega |Du(t)| \\
&\quad + \int_\Gamma (\partial_t u_\Gamma(t) + g_\Gamma(u_\Gamma(t)) - \theta_\Gamma(t))(u_\Gamma(t) - z_\Gamma)\, d\Gamma + \int_\Gamma |u_{|\Gamma}(t) - u_\Gamma(t)|\, d\Gamma \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon u_\Gamma(t))|^2\, d\Gamma + \int_\Omega B(u(t))\, dx + \int_\Gamma B_\Gamma(u_\Gamma(t))\, d\Gamma \\
&\leq \int_\Omega |Dz| + \int_\Gamma |z_{|\Gamma} - z_\Gamma|\, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon z_\Gamma)|^2\, d\Gamma + \int_\Omega B(z)\, dx + \int_\Gamma B_\Gamma(z_\Gamma)\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

ただし, $[z, z_\Gamma] \in (BV(Q) \cap L^2(Q)) \times L^2(\Sigma)$ は任意である.

さて上記の仮定および定義を基に, 主定理を述べる.

主定理 1 は弱解の数学的表現である. ここでは, エネルギーの汎関数において接合条件 $u_{|\Gamma} = u_\Gamma$ on Σ_T と置き換わった境界積分 $\int_\Gamma |u_{|\Gamma} - u_\Gamma| d\Gamma$ の弱形式を与えている.

主定理 1 (解の数学的表現). $\varepsilon \geq 0$ とする. 次を満たすベクトル場 $\boldsymbol{\nu}_\Omega^* \in L^\infty(Q;\mathbb{R}^N)$, 関数 $\mu_\Gamma^* \in L^\infty(\Sigma)$ および関数の組 $[\xi, \xi_\Gamma] \in L^2(0,T;\mathscr{H})$ が存在する.

(i) $|\boldsymbol{\nu}_\Omega^*| \leq 1$, a.e. in Q, and $|Du(t)| = (\boldsymbol{\nu}_\Omega^*(t), Du(t))$ in $\mathcal{M}(\Omega)$, a.e. $t \in (0,T)$;

(ii) $\mu_\Gamma^* = [\boldsymbol{\nu}_\Omega^* \cdot n_\Gamma]_{|\Gamma} : \Sigma \to [-1,1]$;

(iii) $\xi \in \beta(u)$, a.e. in Q, and $\xi_\Gamma \in \beta_\Gamma(u_\Gamma)$, a.e. on Σ.

さらに上記を満たす関数と弱解 $[u, u_\Gamma]$ が以下の放物型偏微分方程式を満たす.

$$\begin{cases} \partial_t u(t) - \mathrm{div}\boldsymbol{\nu}_\Omega^*(t) + \beta(u(t)) + g(u(t)) = \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega), \\ \partial_t u_\Gamma(t) - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2 u_\Gamma(t)) + \mu_\Gamma^*(t) + \beta_\Gamma(u_\Gamma(t)) + g_\Gamma(u_\Gamma(t)) = \theta_\Gamma(t) \text{ in } L^2(\Gamma), \\ -\mu_\Gamma^* \in \mathrm{Sgn}(u_{|\Gamma}(t) - u_\Gamma(t)), \text{ a.e. on } \Gamma, \text{ a.e. } t \in (0,T), \\ u(0,\cdot) = u_0, \text{ a.e. in } \Omega, \text{ and } u_\Gamma(0,\cdot) = u_{\Gamma,0}, \text{ a.e. on } \Gamma. \end{cases}$$

主定理 2 は比較原理である. 一般に変分不等式の場合, 比較原理は成立しない. しかし, Kenmochi (cf. [11]) による一般論を適用することにより本システムの弱解に比較原理を示すことができる.

主定理 2 (弱解に対する比較原理) $[\theta^{(i)}, \theta_\Gamma^{(i)}] \in L^2(0,T;\mathscr{H})$, $[u_0^{(i)}, u_{\Gamma,0}^{(i)}] \in D(\mathscr{F}_\varepsilon)$ をそれぞれ弱解 $[u^{(i)}, u_\Gamma^{(i)}]$ に対する熱源, 初期値とする $(i = 1, 2)$. 熱源と初期値に次を仮定する.

$$\begin{cases} \theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}, \text{ a.e. in } Q, \text{ and } u_0^{(1)} \leq u_0^{(2)}, \text{ a.e. in } \Omega, \\ \theta_\Gamma^{(1)} \leq \theta^{(2)}, \text{ a.e. on } \Sigma, \text{ and } u_{\Gamma,0}^{(1)} \leq u_{\Gamma,0}^{(2)}, \text{ a.e. on } \Gamma. \end{cases}$$

このとき, 弱解 $[u^{(i)}, u_\Gamma^{(i)}]$ に次の関係が成り立つ.

$$u^{(1)} \leq u^{(2)}, \text{ a.e. in } Q, \text{ and } u_\Gamma^{(1)} \leq u_\Gamma^{(2)}, \text{ a.e. on } \Sigma.$$

最後はシステムの連続依存性である. 2 節の記号 4 により述べたが $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ ($L^2(\Omega)$ に対してコンパクトな埋め込みでない) のため $C([0,T];\mathscr{H})$ の位相の収束を得るのは難しいが, 適切な定式化により結果を得ることができる.

主定理 3 (システムの連続依存性). $\varepsilon_0 \geq 0$ とする. システム $(\mathrm{S})_{\varepsilon_0}$ の解を $[u_{\varepsilon_0}, u_{\Gamma,\varepsilon_0}] \in L^2(0,T;\mathscr{H})$ とし, そのときの熱源を $[\theta_{\varepsilon_0}, \theta_{\Gamma,\varepsilon_0}]$, 初期値を $[u_{0,\varepsilon_0}, u_{\Gamma,0,\varepsilon_0}] \in \mathscr{H}$ とする. 同様に $(\mathrm{RS})_\varepsilon^\nu$ の解の列を $\{[u_\varepsilon^\nu, u_{\Gamma,\varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon,\nu>0} \subset L^2(0,T;\mathscr{H})$ としたときの熱源と初期値の列をそれぞれ $\{[\theta_\varepsilon^\nu, \theta_{\Gamma,\varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon,\nu>0} \subset L^2(0,T;\mathscr{H})$, $\{[u_{0,\varepsilon}^\nu, u_{\Gamma,0,\varepsilon}^\nu]\}_{\varepsilon.\nu>0} \subset \mathscr{H}$ とする. 次を仮定する.

$$\begin{cases} [\theta_\varepsilon^\nu, \theta_{\Gamma,\varepsilon}^\nu] \to [\theta_{\varepsilon_0}, \theta_{\Gamma,\varepsilon_0}] \text{ in } L^2(0,T;\mathscr{H}), \\ [u_{0,\varepsilon}^\nu, u_{\Gamma,0,\varepsilon}^\nu] \to [u_{0,\varepsilon_0}, u_{\Gamma,0,\varepsilon_0}] \text{ in } \mathscr{H}, \end{cases} \quad \text{as } \varepsilon \to \varepsilon_0,\ \nu \to 0.$$

このとき, 以下が成り立つ.

$$[u_\varepsilon^\nu, u_{\Gamma,\varepsilon}^\nu] \to [u_{\varepsilon_0}, u_{\Gamma,\varepsilon_0}] \text{ in } C([0,T];\mathscr{H}), \text{ and } \int_0^T\!\!\int_\Omega |Du_\varepsilon^\nu| \to \int_0^T\!\!\int_\Omega |Du_{\varepsilon_0}|, \text{ as } \varepsilon \to \varepsilon_0,\ \nu \to 0.$$

4 証明の概要

主定理を証明するために, $U := [u, u_\Gamma]$ in $L^2(0,T;\mathscr{H})$, $\Theta := [\theta, \theta_\Gamma]$ in $L^2(0,T;\mathscr{H})$, $U_0 := [u_0, u_{\Gamma,0}]$ in $\mathscr{H}$ とおき, システム $(S)_\varepsilon$ を次で与えられる劣微分作用素によって支配された発展方程式の抽象 Cauchy 問題の枠組みとして捉え直す.

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + \partial\Phi_\varepsilon(U(t)) + \mathcal{G}(U(t)) \ni \Theta(t) \text{ in } \mathscr{H}, \text{ a.e. } t \in (0,T), \\ U(0) = U_0 \text{ in } \mathscr{H}. \end{cases} \tag{4}$$

$\partial\Phi_\varepsilon$ は適正下半連続凸関数 $\Phi_\varepsilon : \mathscr{H} \to (-\infty, \infty]$ の劣微分を表し, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned} W &= [w, w_\Gamma] \in \mathscr{H} \mapsto \Phi_\varepsilon(W) = \Phi_\varepsilon(w, w_\Gamma) \\ &:= \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |Dw| + \int_\Gamma |w_{|\Gamma} - w_\Gamma|\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon w_\Gamma)|^2\, d\Gamma \\ \qquad \displaystyle + \int_\Omega B(w)\, dx + \int_\Gamma B_\Gamma(w_\Gamma)\, d\Gamma, \quad \text{if } w \in BV(\Omega),\ w_\Gamma \in H^1(\Gamma), \\ \infty, \qquad\qquad \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

(4) の定式化により, システム $(S)_\varepsilon$ の一意解の存在は発展方程式の一般論 (cf. [5,6]) により明らかである. このとき主定理は, 凸関数 Φ_ε が Mosco 収束するかどうかがポイントであるため, 先行研究 (cf. [16]) で構成された近似列を用いる. 本講演では, Mosco 収束がそれぞれの主定理の証明にどのように活用されるかについて詳しく述べる.

5 応用

本節では, これまでの研究の応用として以下の準線形放物型偏微分方程式のシステムを考える. (ただし, $\nu > 0, \varepsilon \geq 0$)

$(KWC)_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \Delta\eta + g(\eta) + \alpha'(\eta)|\nabla\theta| = 0 \text{ in } Q := (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\eta \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma := (0,\infty)\times\Gamma, \\ \eta(0,x) = \eta_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(\eta)\partial_t\theta - \operatorname{div}\left(\alpha(\eta)\dfrac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \nu^2\nabla\theta\right) = 0 \text{ in } Q, \\ \partial_t\theta_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma) + \left(\alpha(\eta)\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \nu^2\nabla\theta\right)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma = 0, \text{ and} \\ \theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma \text{ on } \Sigma, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x),\ x \in \Omega, \text{ and } \theta_\Gamma(0,y) = \theta_{\Gamma,0}(y),\ y \in \Gamma. \end{cases} \tag{6}$$

システム $(KWC)_\varepsilon$ は, Kobayashi et-al. (cf. [12]) により提唱された結晶粒界運動を記述する数学モデルをアレンジしたものであり, 2 つの初期値境界値問題 (5), (6) から構成されてい

る. 以後このシステムを **Kobayashi–Warren–Carter システム**と呼ぶ. 本システムは, 以下の自由エネルギー $\mathscr{F} : L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma) \to [0,\infty]$ の勾配流として導かれる:

$$\mathscr{F}(\eta,\theta,\theta_\Gamma) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\eta|^2\,dx + \int_\Omega G(\eta)\,dx + \int_\Omega \alpha(\eta)|\nabla\theta|\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma)|^2\,d\Gamma, \\ \text{if } [\eta,\theta,\theta_\Gamma] \in H^1(\Omega)^2 \times H^{1/2}(\Gamma),\ \varepsilon\theta_\Gamma \in H^1(\Gamma),\ \text{and } \theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma \text{ on } \Gamma. \tag{7}$$

ここに, システム $(\mathrm{KWC})_\varepsilon$ の未知変数 $\eta = \eta(t,x)$ と $\theta = \theta(t,x)$ のそれぞれは, 多結晶体内の結晶粒の「配向度」と「方位角」を表す相関数である. θ_Γ は方位角 θ の境界熱源であるが, ここではこの θ_Γ を未知変数として加えることで, Ω の外部が動的に変化する状況にも対応可能な枠組みでシステムが構成されている. また $0 < \alpha_0 \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ と $0 < \alpha \in C^2(\mathbb{R})$ はそれぞれ速度のモビリティと空間拡散のモビリティであり, α' は α の微分を表す. $\eta_0, \theta_0 \in L^2(\Omega)$ と $\theta_{\Gamma,0} \in L^2(\Gamma)$ はそれぞれ与えられた初期値である.

Kobayashi–Warren–Carter システムの数学解析は, 現在までに様々な条件下で研究の成果が挙げられている (cf. [13, 14, 18–21]). しかしながら, 多くの先行研究では, 外力を定数とする等の静的な状況に的が絞られており, これらの結果を実際の現象に見られる多様な動的変化の考察に応用するには, まだ数学理論の整備が必要な状況である.

上述のような背景のもとで, 本研究では Kobayashi–Warren–Carter システムの数学解析において, より高度な動的変化にも対応可能な数学理論を確立することを大きな目標とする. その第一段階として, システム $(\mathrm{KWC})_\varepsilon$ における初期値境界値問題 (6) に力学的境界条件を課した場合を考える. (6) のような力学的境界条件下での特異性を含む準線形拡散方程式に対する数学解析は, 先行研究 (cf. [7]) によって定式化が成されている.

以上を踏まえ, 本研究ではシステム $(\mathrm{KWC})_\varepsilon$ の数学解析において先行研究 [7] と同様の定式化によって数学解析が可能かどうか検証するため, 自由エネルギー (7) に適切な式変形を施し, 以下の課題について得られた結果を報告する.

(A) システム $(\mathrm{KWC})_\varepsilon$ の解 $[\eta,\theta,\theta_\Gamma]$ の存在及び解の数学的表現.

(B) $\varepsilon \to \varepsilon_0$ としたときのシステムの連続依存性.

(C) 解 $[\eta,\theta,\theta_\Gamma]$ の時間無限大での解挙動とシステム $(\mathrm{KWC})_\varepsilon$ の定常問題との関連性の考察.

参考文献

[1] Ambrosio, L.; Fusco, N.; Pallara, D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[2] Anzellotti, G. Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **135**: 293–318 (1984), 1983.

[3] Attouch, H. *Variational Convergence for Functions and Operators*. Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[4] Attouch, H.; Buttazzo, G.; Michaille, G. *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces*, Vol. 6 of *MPS/SIAM Series on Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2006. Applications to PDEs and optimization.

[5] Barbu, V. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2010.

[6] Brézis, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[7] Colli, P.; Gilardi, G.; Nakayashiki, R.; Shirakawa, K. A class of quasi-linear Allen–Cahn type equations with dynamic boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, **158**: 32–59, 2017.

[8] Evans, L. C.; Gariepy, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised edition, 2015.

[9] Giusti, E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Vol. 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[10] Kenmochi, N. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.* `http://ci.nii.ac.jp/naid/110004715232`, **30**: 1–87, 1981.

[11] Kenmochi, N.; Mizuta, Y.; Nagai, T. Projections onto convex sets, convex functions and their subdifferentials. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.* `http://ci.nii.ac.jp/naid/110004715212`, **29**: 11–22, 1980.

[12] Kobayashi, R.; Warren, J. A.; Carter, W. C. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, **140**(1-2): 141–150, 2000.

[13] Moll, S.; Shirakawa, K. Existence of solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **51**(3-4): 621–656, 2014.

[14] Moll, S.; Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy dissipative solutions to the Kobayashi-Warren-Carter system. *Nonlinearity*, **30**(7): 2752–2784, 2017.

[15] Mosco, U. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, **3**: 510–585, 1969.

[16] Nakayashiki, R.; Shirakawa, K. Weak formulation for singular diffusion equations with dynamic boundary condition. Springer INdAM Series. to appear, 2017.

[17] Savaré, G.; Visintin, A. Variational convergence of nonlinear diffusion equations: applications to concentrated capacity problems with change of phase. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **8**(1): 49–89, 1997.

[18] Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N. Solvability of one-dimensional phase field systems associated with grain boundary motion. *Math. Ann.*, **356**(1): 301–330, 2013.

[19] Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **7**(1): 139–159, 2014.

[20] Shirakawa, K.; Watanabe, H. Large-time behavior for a PDE model of isothermal grain boundary motion with a constraint. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **1**(Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl.): 1009–1018, 2015.

[21] Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N. Phase-field systems for grain boundary motions under isothermal solidifications. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **24**(2): 353–400, 2014.

[22] Visintin, A. *Models of Phase Transitions*, Vol. 28 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

パラレルセッション
会場Ａ

Elliptic Curve Method with Complex Multiplication Method

相川 勇輔（Yusuke AIKAWA）*

北海道大学大学院理学院数学専攻/産業技術総合研究所

1 はじめに

本稿で述べる研究内容は縫田光司氏（産業技術総合研究所/JST さきがけ）と白勢政明氏（公立はこだて未来大）との共同研究に基づく．

数学的な問題意識の中のみで研究されてきた対象の，数学以外の学問領域への応用が見出されたならば，それは驚くべきことであり，このような交流はお互いにとって喜ばしいことである．暗号理論はまさにその好例である．本稿ではその交流のほんの一側面を紹介するとともに，筆者らの研究によって構成された素因数分解アルゴリズム [1] について報告する．そのアルゴリズムは，代表的な素因数分解アルゴリズムである楕円曲線法に特殊な楕円曲線生成法である CM 法を組み合わせたものとなっている．

なぜ素因数分解か．RSA 暗号など現代の公開鍵暗号技術の多くは素因数分解の計算困難性を安全性の根拠におく．したがって，それらの安全性を見積もる上で，素因数分解アルゴリズムの研究は決定的に重要である．純粋に数学的関心の範疇で素因数分解問題は歴史上古くから考えられてきたが，今日のように広い関心を惹きつけるになった背景にはこのような事情がある．しかしながら一般の合成数に対する素因数分解については準指数時間アルゴリズムしか未だ知られていない．分解したい合成数を N，その素因数を p としたとき，素因数分解アルゴリズムはその計算量が N の大きさに依存するタイプのものと p の大きさに依存するタイプのものに大別できる．前者の代表的なものでは数体ふるい法がよく知られており，本稿で中心的役割を果たす楕円曲線法（§3.3）は後者の代表例となっている．ところが，本稿でも紹介する Pollard の $p-1$ 法（§3.2）のように，特定の条件を満たす合成数を高速に素因数分解する方法が知られているため，同じ大きさを持つ合成数であってもその素因数分解の計算量（つまり公開鍵としての強度）は均一でない．したがって暗号技術の実運用においては “素因数分解されやすい合成数”を公開鍵として使用することは避けるべきであり，そのような合成数の種類を明らかにすることは重要な意味を持つ．

そのような中で本稿では，特殊な形をした素数を素因数に持つ合成数 N に対する N の大きさに関する多項式時間素因数分解アルゴリズムを提案する．これは冒頭でも述べたように，Lenstra Jr. による楕円曲線法 [5] と特殊な楕円曲線生成法である CM 法を組み合わせたものとなっている．

N を合成数とし p をその素因数とすると，楕円曲線法は，§3.3 でも詳しく解説するが，$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線と有理点の組みをたくさん生成し，その中に $\mathbb{F}_p$ への還元がスムースな位数（つまりその素因数が全て小さい素数である位数）を持つものがあると期待するものであった．このアルゴリズムでは大量の有理点のスカラー倍演算が必要な上，そのスカラー倍演算の程度（有理点を何倍するか）を上手に選ぶ必要があった．

先行研究 [8] のアルゴリズムでは発想を逆転させる．すなわち，$\mathbb{F}_p$ への還元が良い位数を持つ楕円曲線を予めひとつ生成することで，この 2 つの問題点を同時に克服することを試みた．[8] では素数 p が，その類多項式が 2 次以下となるよう判別式 $-D$ を用いて $4p = 1 + Dv^2 (v \in \mathbb{Z})$ と書ける場合，CM 法を用いて $\mathbb{F}_p$ 上での位数が p となる楕円曲線 E を生成するというアイデアを用いた．そうすることで，

* *e-mail*:yusuke@math.sci.hokudai.ac.jp

もし有理点を得ることができれば，その N 倍が $E(\mathbb{F}_p)$ の中で単位元となり，あとは楕円曲線法と同様の手続きで N の非自明な素因数が得られる．ではどのようにして有理点を見つけるのか？ 元々の楕円曲線法では先に有理点の座標を決めてからそれを解に持つように楕円曲線の定義方程式を調整するという巧みな方法をとっていた．しかし，CM 法を用いる場合には後から楕円曲線を調整することができない．そこで [8] では，楕円曲線の定義方程式の解を添加して拡大した係数環を導入することでこの問題点を回避した．本稿においてもこのテクニックを踏襲する．すると新たな問題が生じる．拡大した係数環を用いる場合，$\mathbb{F}_p$ への還元が ∞ となる有理点から N の非自明な素因数を得る際に，元々の楕円曲線法と同じ方法は適用できず，別途計算を行う必要がある．先行研究においては類多項式が 2 次以下となる判別式で表される素数に対してのアルゴリズムの構成を与えたが，その計算は複雑かつアドホックでありそのまま 3 次以上への拡張は困難であった．

それに対し，本研究では以下のことを行った．まず用いられている数学的理論を整理することにより類多項式の次数に関する制限を外せることの理論的根拠を与えた．さらに，先行研究におけるアドホックな構成が本質的に終結式の計算を行っていることを看破することによって，判別式が高次の類多項式を持つ場合へアルゴリズムの構成を一般化した．それにとどまらず，先行研究が $4p = 1 + Dv^2$ という形の素数を扱っていたのに対し，$4p = t^2 + Dv^2$ という形をしていても $p + 1 - t$ がスムースとなる場合へアルゴリズムを拡張した．まとめると，本稿では次の 2 つのアルゴリズムを与え，それによって得られた素因数分解の数値例を提示する．

- $4p = 1 + Dv^2$ という形の素数を素因数に持つ合成数 N と判別式 $-D$ とその類多項式 $H_{-D}(X)$ の入力に対し N の素因数を 確率 $\frac{1}{4}$ で出力する N の長さに関する多項式時間アルゴリズム．
- 素数 p が $4p = t^2 + Dv^2$ という形をしており $p + 1 - t$ が smooth になるとき，このような p を素因数にもつ合成数 N と判別式 $-D$ とその類多項式 $H_{-D}(X)$ の入力に対し N の素因数を確率 $\frac{1}{4}$ で出力する N の長さに関する多項式時間アルゴリズム．

本稿は以下のように構成される．まず §2 において本研究の動機を明確にするために公開鍵暗号の一つである RSA 暗号について解説する．§3 では楕円曲線法について解説を行うが，そのために楕円曲線の基本的事項をまとめ，楕円曲線法の基本的アイデアとなった $p - 1$ 法についても解説を行う．特殊な楕円曲線生成法である CM 法は §4 で解説を行う．最後に §5 においてこれらを組み合わせた素因数分解アルゴリズムを提案する．本アルゴリズムを用いた数値例は §6 で与える．

2 RSA 暗号

暗号技術の重要な役割の一つは “守秘”である．送信者 S はメッセージ m をその内容を第三者には秘密にしたまま受信者 R に送ろうとしており，この m を盗聴したい第三者の攻撃者 A はこの二者の間の通信を傍受することができる，という状況を考える．もし S がこのメッセージ m をそのまま R へ送れば A はその内容を知ることができるので，S はメッセージ m を暗号文 c に変換（この変換に必要なパラメータを**暗号化鍵**とよぶ）してから R へ送信し，R は暗号文 c をメッセージ m に変換（この変換に必要なパラメータを**復号鍵**とよぶ）しその内容を知る，という手続きを行う必要がある．この暗号化鍵と復号鍵が同じものを**共通鍵暗号**という．原始的な例だが，“アルファベットを一文字ずらす”という鍵で構成される共通鍵暗号方式を考える[*1]．送信者が「LOVE」というメッセージを秘密に送信したいとする．このときこの文字列を鍵を用いて一文字ずらし「MPWF」と暗号化し送信する．それを受け取った者は鍵を用いてメッセージ「LOVE」を復元する．このような共通鍵暗号は，はるか昔から用いられてきた暗号であるが，S と R がどのようにして鍵を共有するかという問題が常につきまとう．もし鍵の受け渡しの途中で鍵が A に漏洩してしまえば，解読が困難な暗号を用いたとしても A は暗号文 c をたちまちメッセージ m に変換しその内容を知ることができてしまう．

この問題を解消したのが 1970 年代に編み出された**公開鍵暗号** [4] である．公開鍵暗号では暗号化鍵と復号鍵が異なり，前者から後者を求めることが困難であることが求められる．すると受信者が復号鍵

[*1] このようにアルファベットを一定数ずらすことで構成されるものをシーザー暗号という．

を秘密にしてさえおけば，暗号化鍵は公開しておいてもメッセージの漏洩は避けることができ，秘密裏に鍵を共有しておく必要がなくなる．そこで，公開鍵暗号では暗号化鍵を**公開鍵**とよび，復号鍵を**秘密鍵**とよぶ．公開鍵暗号の構成には数学的問題の困難性が利用される．素因数分解の困難性を利用した RSA 暗号，離散対数問題の困難性を利用した ElGamal 暗号，そして楕円曲線の離散対数問題を利用した楕円曲線暗号がその代表例である．

ここでは RSA 暗号 [7] について解説を行う．メッセージの受信者 R は大きな素数 p, q [*2]を選び，$N = pq$ を計算する．さらに整数 e で $\gcd\big((p-1)(q-1), e\big) = 1$ となるものをランダムにとる．これらに対して，$\mathbb{Z}/(p-1)(q-1)\mathbb{Z}$ の中での e の逆元 d を計算する．このとき，

$$\text{公開鍵：}(N, e)$$
$$\text{秘密鍵：}d$$

とする．もちろん R は p, q も秘密にしておく．

送信者 S が R へ送りたいメッセージが $0 \leq m \leq N-1$ なる整数 m で表現されているとする．S は公開鍵を用いて暗号文 c を

$$c = m^e \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

と計算する．この暗号文 c を受け取った R は秘密鍵を用いて $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の中で c^d を計算する．すると，

$$c^d = m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

であることが確かめられる．

このような手続きで二者の間でメッセージを秘密裏に共有する方式を RSA 暗号方式という．この方式の中では共通鍵暗号で必要だった鍵の共有という手続きが必要でないことがわかる．しかしながら公開されている合成数 N が簡単に素因数分解できてしまうと，秘密鍵である d が容易に計算できてしまい，暗号文 c を傍受した第三者がメッセージ m を復元できてしまう．このような意味で RSA 暗号の安全性は素因数分解問題に依存している．[*3]従って §1 でも述べたように，RSA 暗号の安全性を評価する上では素因数分解アルゴリズムの研究が欠かすことはできない．例えば，もし何かしらのアルゴリズムで高速に素因数分解されてしまうような “脆弱な素数”が発見されてしまえば，そのような素数を用いて鍵の生成を行ってはならないことが明らかになる．そして，筆者らによる研究はそのような “脆弱な素数”をあぶり出そうという試みである．

3 楕円曲線法

3.1 楕円曲線

体 K を標数が 2 でも 3 でもない体とする．方程式

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B \ (A, B \in K, 4A^3 + 27B^2 \neq 0) \tag{3.1}$$

で定義される代数曲線を K 上の**楕円曲線**とよぶ．楕円曲線はその K-有理点集合（以下，状況が明らかな場合は単に有理点とよぶ）

$$E(K) := \{(x, y) \in K \times K | y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{\infty\}$$

が点 ∞ を単位元とする群構造を持つという著しい性質を持つ．この群を楕円曲線 E の Mordell-Weil 群とよぶ．

2 つの有理点 P_1, P_2 に対して $P_1 + P_2$ を具体的に計算する公式が知られている（詳しくは [10] や [11]）．暗号理論への楕円曲線の応用という観点からは，スカラー倍の計算が重要である．スカラー倍計算に対しては，等分多項式を用いた公式が知られているので，それを紹介する．

[*2] 512bit（10 進法で約 150 桁）以上のものを選ぶのが現状では標準である．

[*3] 素因数分解ができれば RSA 暗号は破られるが，その逆については未解決である．つまり，N を素因数分解することなく暗号文を平文に変換する方法があるかどうかは未だわかっていない．

方程式 (3.1) で定義される楕円曲線に対し，次の漸化式で 2 変数多項式の族を定める．

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0\\
\psi_1 &= 1\\
\psi_2 &= 2Y\\
\psi_3 &= 3X^4 + 6AX^2 + 12BX - A^2\\
\psi_4 &= 4Y(X^6 + 5AX^4 + 20BX^3\\
&\qquad -5A^2X^2 - 4ABX - 8B^2 - A^3)\\
\psi_{2m+1} &= \psi_{m+2}\psi_m^3 - \psi_{m-1}\psi_{m+1}^3 \ (m \geq 2)\\
\psi_{2m} &= \frac{\psi_m}{2Y}(\psi_{m+2}\psi_{m-1}^2 - \psi_{m-2}\psi_{m+1}^2) \ (m \geq 3)
\end{aligned}$$

これらを等分多項式とよぶ．さらに等分多項式を用いて整数 $m \geq 0$ に対し次のように多項式を定める．

$$\begin{aligned}
\phi_m &= X\psi_m^2 - \psi_{m+1}\psi_{m-1}\\
\omega_m &= \frac{1}{4Y}(\psi_{m+2}\psi_{m-1}^2 - \psi_{m-2}\psi_{m+1}^2)
\end{aligned}$$

以上の多項式を用いて E の有理点 $P = (x, y)$ のスカラー倍は次のように記述できる．n を正の整数とすると，

$$nP = \Big(\frac{\phi_n(x,y)}{\psi_n(x,y)^2}, \frac{\omega_n(x,y)}{\psi_n(x,y)^3}\Big) \tag{3.2}$$

が成り立つ[*4]．このように有理点 P の n 倍点 は等分多項式によって完全に定められ，次が成り立つ：

$$nP = \infty \Longleftrightarrow \psi_n(x,y) = 0. \tag{3.3}$$

このように体上の楕円曲線での群演算において，その計算過程で逆元の計算を必要とする．したがって環上，例えば合成数 N に対して $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上で楕円曲線を考えた場合は，この加法公式が機能しなくなる．しかし，そのことが楕円曲線法において重要な役割を果たす．なお，環上の楕円曲線の加法公式も知られている [5].

さて，K 上定義された 2 つの楕円曲線 E_1 から E_2 への同種写像とは準同型写像 $\alpha : E_1(\overline{K}) \to E_2(\overline{K})$ であって，有理関数で与えられるものである．さらに逆写像が存在するとき E_1 と E_2 は同型であるという．E 自身から E 自身への同種写像を E の自己準同型とよび，それらのなす環を $\mathrm{End}(E)$ で表す．本稿では $K = \mathbb{C}$ の場合の自己準同型環の構造が重要であるが，それについて述べる前に次の定義を用意する．

定義 3.1. 平方因子を持たない整数 d に対し，体

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) = \{a + b\sqrt{-d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

を**虚二次体**とよぶ．虚二次体の部分環であって $\mathbb{Z}$ を真に含むものを**オーダー**とよぶ．

$\delta \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ を

$$\delta = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{-d}}{2} & (d \equiv 3 \bmod 4)\\ \sqrt{-d} & (d \equiv 1, 2 \bmod 4) \end{cases}$$

とおく．このとき $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ のオーダー $\mathcal{O}$ は整数 $f > 0$ が存在して $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + f\delta\mathbb{Z}$ という形をしている．これに対してオーダー $\mathcal{O}$ の**判別式**を

$$-D = \begin{cases} -f^2 d & (d \equiv 3 \bmod 4)\\ -4f^2 d & (d \equiv 1, 2 \bmod 4) \end{cases}$$

で定める．あるオーダーの判別式となっている負の整数を単に判別式とよぶ．

[*4] 実は，ψ_m^2 と ϕ_m は X と Y^2 の多項式になることが示せる．従ってこの公式の第一成分は y^2 に $x^3 + Ax + B$ を代入することで x のみの多項式として書ける．

定理 3.2. E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とする．このとき次のどちらかが成り立つ．

- $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$
- ある虚二次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ とそのオーダー $\mathcal{O}$ が存在し，$\mathrm{End}(E) \cong \mathcal{O}$ となる

定義 3.3. $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E が $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ **のオーダー** $\mathcal{O}$ **による虚数乗法を持つ**とは，$\mathrm{End}(E)$ が $\mathcal{O}$ と同型なときをいう．

方程式 (3.1) で定義される楕円曲線 E に対し

$$j_E := 1728\frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2} \in K$$

を E の j **不変量**と呼ぶ．

仮定 3.4. 本稿では $j_E \neq 0, 1728$ なる楕円曲線のみを扱う．

これらの場合はそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ [*5]の整数環（極大オーダー）よる虚数乗法を持つ楕円曲線であり，先行研究 [8] に含まれるもの（類多項式が 1 次）であるので本稿では除いて議論を進める．またこれらの判別式はそれぞれ $-3, -4$ なので，判別式としてこれらの値を除いて議論を進める．

逆に $j_0 \in K$ が与えられた時，j_0 を j 不変量とする楕円曲線は次のように構成できる．

命題 3.5. 与えられた $j_0 \in K$ $(j_0 \neq 0, 1728)$ に対し，

$$E : y^2 = x^3 + \frac{3j_0}{1728 - j_0}x + \frac{2j_0}{1728 - j_0}$$

は j_0 を j 不変量とする K 上の楕円曲線である．

さて，この量は次の重要な性質を持つ．

命題 3.6. 2 つの楕円曲線が代数的閉体上同型であることと，それらの j 不変量が等しいことは同値である．

一般の体 K 上で考えた場合，K 上同型であれば定義より明らかに j 不変量は一致するが，その逆は成り立たない．楕円曲線 E に対し，j_E に等しい j 不変量を持つ楕円曲線を E の**ツイスト**とよぶ．

3.2 $p-1$ 法

Pollard によって考案された $p-1$ 法は楕円曲線法の基本的アイデアを与えた重要な素因数分解アルゴリズムであるのでここで簡単な解説を与える．そこで，一つ用語を導入する．

定義 3.7. C を正の整数とする．このとき整数 N が C-**スムース**であるとは，N の最大の素因数が C より小さいときを言う．C を省略して単に，N が**スムース**である，と言った場合は C が小さい整数であるということを暗に意味する．

合成数 N が $N = pq$ と素数の積であるとし，N の素因数を見つけたい．素因数の一つの p に対し $p-1$ が C-スムースであると仮定する．また簡単のために $p-1$ は平方因子を持たないと仮定する．このとき $p-1$ は $C!$ の約数となるので，

$$a^{C!} \equiv 1 \bmod p$$

が成り立つ．さらに運良く

$$a^{C!} \not\equiv 1 \bmod q$$

であったとする．このとき $\gcd(a^{C!} - 1, N)$ は p を出力し合成数 N の非自明な素因数が見つかる．

[*5] これらの虚 2 次体の単数群が特殊なものであるから例外的に扱う必要がある．

以上の手続きで合成数の素因数を見つける方法を $p-1$ **法**とよぶ．しかし，この方法には N が与えられた時点で群 $\mathbb{F}_p^\times$ が固定されてしまうという問題点がある．従って $p-1$ がスムースでなければ，C の値を変化させるくらいしか我々に出来ることはなく，その値が大きくなればなるほど計算は困難となる．そこで，様々な位数を持った群で上述のような計算ができるような状況があればこの問題点を解消できる．楕円曲線はこれを実現した．

3.3 楕円曲線法

この $p-1$ 法の問題点を楕円曲線を用いることで鮮やかに回避したのが Lenstra Jr. による**楕円曲線法** [6] である．まずそのアイデアを見る．

合成数を $N=pq$（p と q は異なる奇素数）とし，環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上で楕円曲線 E を考える．このとき，

$$E(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong E(\mathbb{F}_p) \oplus E(\mathbb{F}_q) \tag{3.4}$$

が成り立つ．

さて $E(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 上で公式 (3.2) を用いた有理点 P のスカラー倍を観察する．するとその計算過程では $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の逆元の計算を必要とする．したがって分母にくるべき数 d が逆元を持たない場合は計算失敗となる．では $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ で逆元を持たない数とは何か．それは p と q の少なくとも一方を素因数とする数である．そこで，

$$\begin{cases} d \equiv 0 \bmod p \\ d \not\equiv 0 \bmod q \end{cases} \tag{3.5}$$

であったとする．このとき，P のスカラー倍nP の計算が (3.4) の左辺で失敗したとしよう．P に対応する (3.4) の右辺の点を (P_p, P_q) と書けば，仮定 (3.5) は (3.3) より $nP_p=\infty$ かつ $nP_q\neq\infty$ を意味する．この観察を利用する．つまり，$\#E(\mathbb{F}_p)|n$ となる n を選ぶことができれば $nP_p=\infty$ となり，$E(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 内で計算した nP の分母にくるべき値と N の最大公約数を取ったとき非自明な値が返ってくる．この $\#E(\mathbb{F}_p)$ こそが $p-1$ 法における値 $p-1$ にあたるものである．そこで，スムースな位数を持つことを期待して次々に楕円曲線を生成していけばよい．

しかしながら，一般に $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線 E とその有理点 P の組みをランダムに生成することは難しい．この問題点は次のようにして巧みに回避できる．まずランダムに $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の元の 3 つ組み（a,u,v）をとる．これらを用いて $b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ を $b=v^2-u^3-au \bmod N$ と定めれば，$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線 $E: y^2=x^3+ax+b$ と有理点 $P=(u,v)\in E(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が得られる．

まとめると，楕円曲線法とは以下の手続きで合成数の素因数を見つける方法である．

- **Step1**:いくつものランダムな $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の組み (a_i,u_i,v_i) から上述のように楕円曲線とその有理点の組みの族 (E_i,P_i) を生成する．
- **Step2**:正整数 C を選び $(C!)P_i$ を計算していく．
- **Step3**:ある i で計算に失敗したらその分母に来るべき整数と N の最大公約数は N の非自明な素因数を返す．全ての i で計算が実行できたら，楕円曲線の族を生成しなおすか C を選び直して同様の計算を実行する．

4 CM 法

本節の内容について詳しくは [2]，[9]ChIII 等を参照されたい．

また，本節以降の便利のため，次の記号を導入する．多項式 $f(X)\in\mathbb{Z}[X]$ に対して，その係数を $\bmod n$ して得られる多項式を $f_n(X)\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[X]$ で表す．

4.1 類多項式

$-D$ を判別式とする．すると，判別式 $-D$ をもつオーダー $\mathcal{O}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ がある．この $\mathcal{O}$ による虚数乗法をもつ楕円曲線の $\mathbb{C}$ 上での同型類の集合を $\mathcal{ELL}(-D)$ と書く．このとき次が言える．

命題 4.1. $\mathcal{ELL}(-D)$ は有限集合である．

そこで $\mathcal{ELL}(-D) = \{E_1, \cdots, E_h\}$ と書き下せば，それらの j 不変量をとることによって有限個の相異なる複素数 $j_1, \cdots, j_h \in \mathbb{C}$ が得られる．このとき，多項式

$$H_{-D}(X) := \prod_{i=1}^{h}(X - j_i)$$

を判別式 $-D$ の**類多項式**という．類多項式は整数係数を持つという著しい性質をもち，したがって係数を $\bmod p$ することによって $\mathbb{F}_p$ 係数の多項式 $H_{-D,p}(X)$ が得られる．

次の定理が成り立つ．

定理 4.2. 判別式 $-D$ とし，p を $-D$ を割らない素数とする．次は同値．

- $4p = t^2 + Dv^2$ *(*$\exists t \in \mathbb{Z}$ s.t. $t \not\equiv 0 \bmod p$, $\exists v \in \mathbb{Z}$*)*.
- $\left(\frac{-D}{p}\right) = 1$ であって $H_{-D,p}(X)$ は $\mathbb{F}_p$ において一次式のみの積に分解する．ただし，$\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ は平方剰余記号．

4.2 CM 法

素数 p がある判別式 $-D$ を用いて $4p = t^2 + Dv^2 (t, v \in \mathbb{Z})$ と書けるとする（$D > 4$ のとき[*6]，整数 t^2, v^2 は p, D から一意的に定まる）．CM 法はここに現れる p と t に対し，$\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 E であって $\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 - t$ なる楕円曲線を構成する方法である．

この仮定の下で定理 4.2 により $-D$ の類多項式 $H_{-D,p}(X)$ は $\mathbb{F}_p$ の中で一次式の積に分解できるので，$\mathbb{F}_p$ 内に根を持つ．そのひとつを j_0 とする．この j_0 を j 不変量にもつ $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 E_{j_0} を命題 3.5 のように構成する．$\#E_{j_0}(\mathbb{F}_p) = p + 1 - a$ ($|a| < 2\sqrt{p}$[*7]) と書くと次が成り立つ．

命題 4.3. この状況下で

$$a = \pm t$$

が成り立つ．従って E'_{j_0} を E_{j_0} のツイストで $\mathbb{F}_p$ 上同型でないものとすると，そのどちらかは位数 $p + 1 - t$ をもつ．

5 提案アルゴリズム

5.1 設定

$N = pq$ を相異なる二つの素数の積とし，素数 p が判別式 $-D$ を用いて $4p = t^2 + Dv^2 (t, v \in \mathbb{Z})$ と書けると仮定する．$-D$ の類多項式 $H_{-D}(X)$ に対し

$$R_N^{-D} := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[X]/\big(H_{-D,N}(X)\big)$$

とおく．ランダムに選んだ $c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して $A^{-D,c}(X) = \frac{3c^2X}{1728-X}, B^{-D,c}(X) = \frac{2c^3X}{1728-X}$ とおき，R_N^{-D} 上の楕円曲線を次のように定義する：

$$E^{-D,c} : y^2 = x^3 + A^{-D,c}(X)x + B^{-D,c}(X). \tag{5.1}$$

このとき $j_{E^{-D,c}} = X$ である．j_0 を $H_{-D,p}(X)$ の根とし，$\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線を

$$E_{j_0}^{-D,c} : y^2 = x^3 + A_p^{-D,c}(j_0)x + B_p^{-D,c}(j_0)$$

[*6] 仮定 3.4 とその直後の文章に注意．

[*7] Hasse の定理による．詳しくは [10]，[11] など．

で定義すれば，その j 不変量は j_0 であるから CM 法により

$$\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p + 1 - t \text{ or } p + 1 + t$$

である．

係数環を拡大することにより $E^{-D,c}$ の有理点を構成する．さらにランダムに選んだ $x_0 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し，

$$\tau(X) := x_0^3 + A^{-D,c}(X)x_0 + B^{-D,c}(X) \in R_N^{-D} \tag{5.2}$$

とおく．

$$S_N^{-D,\tau(X)} := R_N^{-D}[Y]/\big(Y^2 - \tau(X)\big)$$

とおけば，

$$P = (x_0, Y) \in E^{-D,c}\big(S_N^{-D,\tau(X)}\big)$$

となり，有理点を構成できた．このとき公式 (3.2) により自然数 n に対し

$$nP = \Big(\frac{\phi_n(x_0,Y)}{\psi_n(x_0,Y)^2}, \frac{\omega_n(x_0,Y)}{\psi_n(x_0,Y)^3}\Big) \in E^{-D,c}\big(S_N^{-D,\tau(X)}\big)$$

と書くことができ，さらに環 $S_N^{-D,\tau(X)}$ の中で

$$\psi_n(x_0, Y) = g_{n,0}(X) + g_{n,1}(X)Y$$

と書くことができる[*8]．ここで，$g_{n,i}(X) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[X]$ であり $\deg\big(g_{n,i}(X)\big) < \deg\big(H_{-D}(X)\big)(i = 0, 1)$ である．

5.2 基本的命題と提案アルゴリズム

以上の設定の下で，後述するアルゴリズムが機能する根拠を与える命題を述べ証明を与える．

命題 5.1. 記号を上記のものとし，$t = 1$ とする．さらに $\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p$ かつ $\tau_p(j_0) \in \mathbb{F}_p$ が平方剰余であると仮定する．このとき，

$$\gcd\big(\mathrm{Res}(H_{-D,N}(X), g_{N,0}^2(X) - g_{N,1}^2(X)\tau(X)), N\big) \neq 1$$

である．

証明. 仮定より $\sigma \in \mathbb{F}_p$ であって $\sigma^2 = \tau_p(j_0)$ なるものが存在する．このとき，$N = pq$ なので準同型写像

$$S_N^{-D,\tau(X)} \to \mathbb{F}_p$$

が X に j_0，Y に σ を代入することで得られる．この写像は $E^{-D,c}(S_N^{-D,\tau(X)}) \to E^{-D,c}(\mathbb{F}_p)$ を導く．$P \in E^{-D,c}(S_N^{-D,\tau(X)})$ のこの写像による像を $P_p \in E^{-D,c}(\mathbb{F}_p)$ と書く．

さらに仮定より $\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p$ なので $NP_p = \infty \in E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p)$ である．従って，

$$\psi_N(x_{0,p}, \sigma) = g_{N,0}(j_0) + g_{N,1}(j_0)\sigma = 0 \in \mathbb{F}_p$$

である．よって，

$$\tau_p(j_0) = \frac{g_{N,0}(j_0)^2}{g_{N,1}(j_0)^2} \in \mathbb{F}_p$$

[*8] 添え字の n はスカラー倍に対応する n のことで，本稿で用いている係数を mod n して得られる多項式の記号とは異なるので注意されたい．

であるが，j_0 は $H_{-D,p}(X)$ の $\mathbb{F}_p$ 内の根であることに注意すると，これは2つの多項式 $H_{-D,p}(X)$ と $g_{N,0}(X)^2 - g_{N,1}(X)^2\tau(X)$ が $\mathbb{F}_p$ に共通根を持つということを意味する．従って

$$\mathrm{Res}\big(H_{-D,N}(X), g_{N,0}(X)^2 - g_{N,1}(X)^2\tau(X)\big) \equiv 0 \bmod p$$

となり命題の結論が得られる． □

この命題の仮定を吟味する．$\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p$ となるかどうかは $c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の選び方に依存しており，$\frac{1}{2}$ の確率で仮定を満たす楕円曲線が得られる．一方で，$\tau_p(j_0) \in \mathbb{F}_p$ が平方剰余かどうかは $x_0 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の選び方に依存し，こちらも $\frac{1}{2}$ の確率で仮定を満たす元が得られる．このことから $c, x_0 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ をランダムに選んだとき $\frac{1}{4}$ の確率で命題の仮定を満たす状況が整う．

命題 5.2. 記号を上記のものとし，$p+1-t$ が C-スムースであるとし，素因数の最大の指数を e とする．$M = (C!)^e$ とおく．さらに $\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p+1-t$ [*9]かつ $\tau_p(j_0) \in \mathbb{F}_p$ が平方剰余であると仮定する．このとき，

$$\gcd\big(\mathrm{Res}(H_{-D,M}(X), g_{M,0}^2(X) - g_{M,1}^2(X)\tau(X)), M\big) \neq 1$$

である．

証明. 命題 5.1 と同様. □

以上の議論をもとに，アルゴリズム 1 およびアルゴリズム 2 を提案する．

■ 提案アルゴリズム１

入力：$4p = 1 + Dv^2$ という形をした素因数 p を持つ合成数 N 判別式 $-D$ とその類多項式 $H_{-D}(X)$
出力：N の非自明な約数（p の倍数）

- 1. ランダムな $c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し環 R_N^{-D} 上の楕円曲線を方程式 (5.1) で定義する．
- 2. ランダムな $x_0 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し $\tau(X) \in R_N^{-D}$ を (5.2) で定める．
- 3.$S_N^{-D,\tau(X)}$ を構成し，$P = (x_0, Y) \in E(S_N^{-D,\tau(X)})$ をとる．
- 4.NP を計算する．
- 5-1. 確率 $\frac{1}{4}$ で $\gcd\big(\mathrm{Res}(H_{-D,N}(X), g_{N,0}^2(X) - g_{N,1}^2(X)\tau(X)), N\big)$ は非自明な N の約数を返す．
- 5-2. 上の gcd が 1 を返した場合は失敗．c か x_0 のどちらか，または共に別の値に取り替えて同様の計算を実行．

■ 提案アルゴリズム 2

入力：$4p = t^2 + Dv^2$ という形をした素数 p で $p+1-t$ が C-スムースとなるもの，$M = C!$，p を素因数に持つ合成数 N，判別式 $-D$ とその類多項式 $H_{-D}(X)$
出力：N の非自明な約数（p の倍数）

- 1. ランダムな $c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し環 R_N^{-D} 上の楕円曲線を方程式 (5.1) で定義する．
- 2. ランダムな $x_0 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し $\tau(X) \in R_N^{-D}$ を (5.2) で定める．
- 3.$S_N^{-D,\tau(X)}$ を構成し，$P = (x_0, Y) \in E(S_N^{-D,\tau(X)})$ をとる．
- 4.MP を計算する．
- 5-1. 確率 $\frac{1}{4}$ で $\gcd\big(\mathrm{Res}(H_{-D,M}(X), g_{M,0}^2(X) - g_{M,1}^2(X)\tau(X)), N\big)$ は非自明な N の約数を返す．
- 5-2. 上の gcd が 1 を返した場合は失敗．c か x_0 のどちらか，または共に別の値に取り替えて同様の計算を実行．

6 数値例

先行研究 [8] による方式では対応できなかったが，本稿の方式によって対応可能となった合成数に対する実装例をいくつか提示する．実際にどれほど多くの，また巨大な合成数に対して本方式が適用可能

[*9] $p+1+t$ がスムースで $\#E_{j_0}^{-D,c}(\mathbb{F}_p) = p+1+t$ とおきかえてもよい.

なのかの解析については今後の研究課題である.

- $-D = -23$ $(\deg H_{-D}(X) = 3)$
  $p = 570942088504121, t = 1210134$
  $4p = t^2 + D \times 9961456^2$
  $p + 1 - t = 570942087293988 \mid 2000!$
  $q = 883478470161233$
  $N = p \times q = 504415042902280115530654941193$
- $-D = -56$ $(\deg H_{-D}(X) = 4)$
  $p = 804161, t = 450$
  $4p = t^2 + D \times 232^2$
  $p + 1 - t = 803712 = 2^7 \times 3 \times 7 \times 13 \times 23$
  $N = p \times q = 488391904291$
- $-D = -131$ $(\deg H_{-D}(X) = 5)$
  $p = 6338253001150313676073094416 63$
  $4p = 1 + D \times 139116657084339^2$
  $q = 868610670601296908562434196197$
  $N = p \times q = 550547418976985666816226779885030828558826986967578267955611$

参考文献

[1] 相川勇輔, 縫田光司, 白勢政明, 楕円曲線法と CM 法を組み合わせた素因数分解アルゴリズムの改良, 暗号と情報セキュリティシンポジウム (SCIS2018), 2018

[2] A. O. L. Atkin, F. Morain, *Elliptic curves and primality proving*. Math. Comp. 61 (1993), no. 203, 29-68

[3] D. A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$, Second edition*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013.

[4] W. Diffie, M. Hellman, *New directions in cryptography*. IEEE Trans. Information Theory IT-22 (1976), no. 6, 644-654.

[5] H. W. Lenstra, Jr., *Elliptic curves and number-theoretic algorithms*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 99-120, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[6] H. W. Lenstra, Jr., *Factoring integers with elliptic curves*. Ann. of Math. (2) 126 (1987), no. 3, 649-673.

[7] R. L. Rivest, A. Shamir, L. Adleman, *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Comm. ACM 21 (1978), no.2, 120-126.

[8] 白勢政明, 特別な形の素因数を持つ合成数の楕円曲線法による素因数分解 II, 暗号と情報セキュリティシンポジウム (SCIS2017), 2017.

[9] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics, 151. Springer-Verlag, New York, 1994.

[10] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer, Dordrecht, 2009.

[11] L. C. Washington, *ELLIPTIC CURVES, Number Theory and Cryuptography, Second Edition*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

Building set に伴うトーリック Fano 多様体

須山 雄介 * † (Yusuke Suyama)
大阪市立大学 大学院理学研究科

1　トーリック多様体と扇

n 次元**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，**代数的トーラス** $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．代数的トーラスの作用は明示しないことが多いが，トーリック多様体というと作用も込めて考えており，代数多様体としては同じものでも，作用が異なれば異なるトーリック多様体と考える．

トーリック多様体は，扇とよばれる多面錐の有限集合と 1 対 1 に対応する．$\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトル $v_1,\ldots,v_r$ で張られる多面錐 $\sigma=\mathbb{R}_{\geq 0}v_1+\cdots+\mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ で，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる部分空間も含まないものをいう．$\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，$\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ であって，次を満たすものをいう．

(1) $\sigma\in\Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
(2) $\sigma,\tau\in\Delta$ ならば，$\sigma\cap\tau$ はそれぞれの面である．

定理 1.1 (トーリック幾何の基本定理)**.** n 次元トーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇は 1 対 1 に対応する．

本稿では扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する方法のみ解説する．まず，各有理強凸多面錐 $\sigma\in\Delta$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する．$\sigma^\vee=\{u\in\mathbb{R}^n\mid \text{すべての } v\in\sigma \text{ に対し } \langle u,v\rangle\geq 0\}$ とおくと，$\sigma^\vee\cap\mathbb{Z}^n$ は和に関し可換モノイドになり，モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee\cap\mathbb{Z}^n]$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域になる．したがって $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee\cap\mathbb{Z}^n]$ はアフィン代数多様体になるので，これを U_σ とおく．次にこれらを貼り合わせる．τ が σ の面ならば，包含写像 $\tau\to\sigma$ から自然に定まる射 $U_\tau=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee\cap\mathbb{Z}^n]\to\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee\cap\mathbb{Z}^n]=U_\sigma$ は開埋め込みになる．これにより U_τ を U_σ の開部分集合と同一視し，U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である．

トーリック多様体の多くの代数幾何的性質が扇の言葉に翻訳できる．$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ は，$\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma=\mathbb{R}^n$ を満たすとき**完備**であるといい，各 $\sigma\in\Delta$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底の一部で張られるとき**非特異**であるという．

定理 1.2. $\mathbb{R}^n$ の扇 Δ に対し，$X(\Delta)$ が完備（resp. 非特異）であることは，Δ が完備（resp. 非特異）であることと同値である．

トーリック多様体 $X(\Delta)$ が射影的かどうかも扇 Δ の側で判定できるが簡単ではない．本講演で扱うトーリック多様体はすべて非特異で射影的である．

2　Building set に伴うトーリック多様体

空でない有限集合 S 上の **building set** とは，S の空でない部分集合からなる有限集合 B で次の条件を満たすものである．

(1) $I,J\in B$ かつ $I\cap J\neq\emptyset$ ならば，$I\cup J\in B$ である．

*d15san0w03@st.osaka-cu.ac.jp
†本研究は，科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものである．

(2) 任意の $i \in S$ に対し，$\{i\} \in B$ である．

B の包含関係に関する極大元全体を $B_{\max}$ で表し，$B_{\max}$ の元を **B-component** とよぶ．$B_{\max} = \{S\}$ のとき B は**連結**であるという．S の空でない部分集合 C に対し，$B|_C = \{I \in B \mid I \subset C\}$ は C 上の building set になる．任意の building set B に対し，$B = \bigsqcup_{C \in B_{\max}} B|_C$ が成り立つ．特に，任意の building set はいくつかの連結な building set の非交和である．

定義 2.1. Building set B の **nested set** とは，$B \setminus B_{\max}$ の部分集合 N で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in N$ ならば，$I \subset J, J \subset I, I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．
(2) 任意の $k \geq 2$ と，任意の pairwise disjoint な $I_1, \ldots, I_k \in N$ に対し，$I_1 \cup \cdots \cup I_k \notin B$ が成り立つ．

B の nested set 全体を $\mathcal{N}(B)$ で表す．

Building set B からトーリック多様体 $X(\Delta(B))$ を構成する．まず，B が連結な場合を考える．$S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし，$e_{n+1} = -e_1 - \cdots - e_n$ とおく．$I \subset S$ に対し $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ とおき，$N \in \mathcal{N}(B)$ に対し $\mathbb{R}_{\geq 0}N = \sum_{I \in N} \mathbb{R}_{\geq 0} e_I$ とおくと，$\Delta(B) = \{\mathbb{R}_{\geq 0}N \mid N \in \mathcal{N}(B)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の扇になる．したがって n 次元トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ が対応する．B が連結でない場合，$X(\Delta(B)) = \prod_{C \in B_{\max}} X(\Delta(B|_C))$ と定める．

命題 2.2 ([8, Corollary 5.2 and Theorem 6.1])．$X(\Delta(B))$ は非特異射影的トーリック多様体になる．

例 2.3. $S = \{1,2,3\}, B = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ とする．このとき，$\mathcal{N}(B)$ は

$$\{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{2,3\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{1\},\{3\}\}, \{\{2\},\{2,3\}\}, \{\{3\},\{2,3\}\}\}$$

となる．したがって図 1 のような扇が対応し，伴うトーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は $\mathbb{P}^2$ の 1 点ブローアップである．

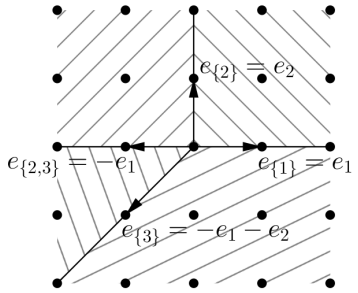


図 1: 扇 $\Delta(B)$.

注意 2.4. $X(\Delta(B))$ は単なるトーリック多様体の具体例というだけのものではない．初出および関連する話題について述べる．

(1) V を有限次元 $\mathbb{C}$ 線形空間とする．De Concini–Procesi [1] は，V^* の subspace arrangement $\mathcal{G}$ である条件を満たすものに対し，非特異射影代数多様体 $\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ と $\mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{P}(G^\perp)$ 上同型な全射 $p : \overline{Y}_{\mathcal{G}} \to \mathbb{P}(V)$ で，$p^{-1}(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{P}(G^\perp))$ が $\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ の単純正規交差因子になるようなものを構成した．条件を満たす $\mathcal{G}$ を **building set** とよび，$\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ を **wonderful model** とよぶ．特別な場合に $\mathcal{G}$ を抽象化したものが B であり，$\overline{Y}_{\mathcal{G}}$ をトーリックの言葉で書き直したものが $X(\Delta(B))$ である．
(2) Building set B に対し **nestohedron** とよばれる多面体 P_B を定めることができ，その normal fan として扇 $\Delta(B)$ を構成することもできる．有限単純グラフから building set を定めることができ，これに対応する nestohedron を **graph associahedron** とよぶ．Graph associahedron は **associahedron**, **cyclohedron**, **stellahedron**, **permutohedron** とよばれる特別な多面体の無限系列を含んでいる（それぞれ道グラフ，閉路グラフ，星グラフ，完全グラフに対応する）．したがって，building set に伴うトーリック多様体のクラスは，これらの多面体に伴うトーリック多様体をすべて含んでいる．

(3) Building set から構成されるトーリック多様体はモジュライ理論にも現れる．たとえば，Losev–Manin [2] は点付き安定有理曲線のモジュライ空間が permutohedron に伴うトーリック多様体として実現できることを示している．

3 トーリック（弱）Fano 多様体

反標準因子が豊富である代数多様体を **Fano 多様体**というが，因子の豊富性を弱めた条件として，ネフかつ巨大というものがある．非特異複素射影多様体は，反標準因子がネフかつ巨大であるとき**弱 Fano** であるという．トーリック Fano 多様体は各次元に同型を除いて有限個しかないことが知られており，与えられた次元のトーリック Fano 多様体をすべて求めるアルゴリズムも知られている [3].

次元	1	2	3	4	5	6	7	8
トーリック Fano 多様体の数	1	5	18	124	866	7622	72256	749892

トーリック弱 Fano 多様体も各次元に有限個しか存在しないが，トーリック弱 Fano 多様体は，トーリック Fano 多様体よりもはるかに多く，これらすべてを調べることは難しい．実際，トーリック弱 Fano 多様体の扇からは，1 次元多面錐の原始ベクトルの凸包をとることで反射的多面体が定まるが，反射的多面体の個数は次元が上がるにつれ急激に増えることが知られている（3 次元では 4,319 個，4 次元では 473,800,776 個あり，5 次元以上では不明である）．

トーリック多様体が（弱）Fano かどうかを判定するには，反標準因子との交点数を，トーラス不変曲線に対してのみ調べれば十分である．$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ の $n-1$ 次元有理強凸多面錐 τ に対応するトーラス不変曲線を $V(\tau)$ で表す．

命題 3.1. $X(\Delta)$ を n 次元非特異射影的トーリック多様体とする．

(1) $X(\Delta)$ が Fano $\Leftrightarrow$ Δ の任意の $n-1$ 次元多面錐 τ に対し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) > 0$ ([4, Lemma 2.20]).
(2) $X(\Delta)$ が弱 Fano $\Leftrightarrow$ Δ の任意の $n-1$ 次元多面錐 τ に対し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) \geq 0$ ([5, Proposition 6.17]).

そして，反標準因子とトーラス不変曲線の交点数は，扇の言葉で容易に記述できる（たとえば [4] 参照）．これにより，$X(\Delta)$ が（弱）Fano かどうかを完全に扇の側で判定できる．

命題 3.2. $X(\Delta)$ を n 次元非特異完備トーリック多様体とし，$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{n-1}$ を Δ の $n-1$ 次元有理強凸多面錐（v_i は原始ベクトル）とする．v, v' を異なる原始ベクトルで，$\tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v, \tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v'$ がともに Δ の n 次元多面錐になるものとする．このとき，整数 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ で $v + v' + a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} = 0$ を満たすものが一意的に存在し，$(-K_{X(\Delta)}.V(\tau)) = 2 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ となる．

4 主結果

定理 4.1 ([6])**.** B を building set とすると，次は同値である．

(1) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は Fano.
(2) B-component C と，$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B|_C$ に対し，$I_1 \cup I_2 = C$ かつ $I_1 \cap I_2 \in B|_C$ が成り立つ．

2 次元以下のトーリック Fano 多様体はすべて building set から得られる．3 次元トーリック Fano 多様体 18 種類のうち，building set に伴うものは 14 種類である．

定理 4.2 ([7])**.** B を building set とすると，次は同値である．

(1) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は弱 Fano.
(2) B-component C と，$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B|_C$ に対し，次の少なくとも一方が成り立つ．

(i) $I_1 \cap I_2 \in B|_C$.
(ii) $I_1 \cup I_2 = C$ かつ $|(B|_{I_1 \cap I_2})_{\max}| \leq 2$.

特に，building set に伴う 3 次元以下のトーリック多様体はすべて弱 Fano である．4 次元以上では，building set に伴うトーリック多様体で弱 Fano でないものが存在する．

本稿では定理 4.1 の証明の方針のみを解説する（定理 4.2 も同じような方針で証明されるが，より複雑である）．任意の building set は連結な building set の非交和であり，連結な building set の非交和はトーリック多様体の直積に対応する．トーリック多様体の直積が Fano であるための必要十分条件は，もとのトーリック多様体がすべて Fano であることであるから，S 上の連結な building set B に対し，次が同値であることを示せば十分である．

(1′) トーリック多様体 $X(\Delta(B))$ は Fano.
(2′) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たす $I_1, I_2 \in B$ に対し，$I_1 \cup I_2 = S$ かつ $I_1 \cap I_2 \in B$ が成り立つ．

難しいのは (1′) $\Rightarrow$ (2′) の部分なので，こちらだけを解説する．証明の鍵となるのは次の補題である．

補題 4.3. B を S 上の連結な building set とし，$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ を満たすとする．このとき，

$$J_1, J_2 \in B, j_1 \in J_1 \setminus J_2, j_2 \in J_2 \setminus J_1,$$
$$N \in \mathcal{N}(B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}, N' \in \mathcal{N}(B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max}$$

で，$J_1 \cap J_2 \neq \emptyset, J_1 \cup J_2 = I_1 \cup I_2$ かつ

$$\{J_k\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max}$$

が各 $k = 1, 2$ に対し B の nested set になるようなものが存在する．

補題 4.3 の証明は非常に技巧的であるが，与えられた $I_1, I_2 \in B$ から，条件を満たす $J_1, J_2, j_1, j_2, N, N'$ を具体的に見つけるアルゴリズムになっている．

$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1, I_1 \cup I_2 \subsetneq S$ を満たすとする．補題 4.3 の $J_1, J_2, j_1, j_2, N, N'$ をとる．$M \in \mathcal{N}(B)$ で

$$\{J_k, J_1 \cup J_2\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max} \cup M$$

が各 $k = 1, 2$ に対し極大な nested set になるようなものが存在するので，

$$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}(\{J_1 \cup J_2\} \cup N \cup (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max} \cup N' \cup (B|_{(J_1 \triangle J_2) \setminus \{j_1, j_2\}})_{\max} \cup M)$$

とおくと，

$$e_{J_1} + e_{J_2} - \sum_{C \in (B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}} e_C - e_{J_1 \cup J_2} = 0$$

だから，命題 3.2 より

$$(-K_{X(\Delta(B))}.V(\tau)) = 2 - |(B|_{J_1 \cap J_2})_{\max}| - 1 \leq 2 - 1 - 1 = 0$$

となり，命題 3.1 (1) より $X(\Delta(B))$ が Fano でないことがわかる．

$I_1, I_2 \in B$ が $I_1 \cup I_2 = S$ かつ $I_1 \cap I_2 \notin B$ である場合も，補題 4.3 の主張を少し修正した補題を考えることで，$X(\Delta(B))$ が Fano でないことを示すことができる．

参考文献

[1] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), 459–494.

[2] A. Losev and Yu. Manin, *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*, Michigan Math. J. 48 (2000), 443–472.

[3] M. Øbro, *An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes*, arXiv:0704.0049.

[4] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[5] H. Sato, *Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties*, Tohoku Math. J. 52 (2000), no. 3, 383–413.

[6] Y. Suyama, *Toric Fano varieties associated to building sets*, Kyoto J. Math., to appear; arXiv:1611.01636.

[7] Y. Suyama, *Toric weak Fano varieties associated to building sets*, Osaka J. Math., to appear; arXiv:1705.07304.

[8] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure Appl. Math. Q. 2 (2006), no. 3, 655–671.

ディリクレL関数の導関数を含む非自明零点を渡る和について

井上 翔太 (Shōta INOUE)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻

1 導入

ゼータ関数は素数と深く関わっており, 特に零点と素数についてはリーマンの明示公式により明確な関係が存在することがわかっている. また, メビウス関数 $\mu(n)$ もエラトステネスの篩の原理をはじめとして素数を考える際に重要な関数であることが知られている. ここでメビウス関数とは

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{if} \quad n=1, \\ (-1)^k & \text{if} \quad n \text{が相異なる} k \text{個の素数の積}, \\ 0 & \text{if} \quad n \text{が平方因子をもつ} \end{cases}$$

で定義される数論的関数である. また, メビウス関数の和関数 $M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)$ についても素数に関するリーマンの明示公式と対応するような明示式と同様の明示公式

$$M(x)=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{|\mathrm{Im}\rho|<T_\nu}\frac{x^\rho}{\rho\zeta'(\rho)}-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2\pi/x)^{2n}}{(2n)!n\zeta(2n+1)} \tag{1.1}$$

がリーマン予想と非自明零点の重複度が全て 1 位[1] であるという仮定の下で示された. ただし, 上記の最初の和はリーマンゼータ関数の非自明な零点 ρ に関する和であり, $\nu\to\infty$ のとき $T_\nu\to\infty$ となるある数列に対する和である. さらに, Bartz によりリーマン予想の仮定を外しても, 数列 T_ν にある条件を加えることで式 (1.1) が成り立つことが示されている [1]. ここで, 式 (1.1) の零点の和に関する項に注目するとこの明示公式からメビウス関数を調べるためには $\zeta'(\rho)$ が重要であることがわかる. そのため, これに関しては多くの研究が行われている. 特に, この $\zeta'(\rho)$ 和についての評価の研究に関する一つの目標となる次の予想が Gonek [3] と Hejhal [4] により独立に提起された.

[1] リーマン予想が 2017 年 12 月時点で未解決問題であることは周知の事実であろう. また, リーマンゼータ関数の非自明零点が全て 1 位であるということも未解決な問題の一つであり 2017 年 12 月現在では未解決な問題である.

予想 1 (Gonek-Hejhal 予想)**.** リーマンゼータ関数の非自明零点の重複度が全て 1 位であると仮定する. このとき, $\lambda > -\frac{3}{2}$ に関して

$$J_\lambda(T) := \sum_{0<\gamma\leq T} |\zeta'(\rho)|^{2\lambda} \asymp T(\log T)^{(\lambda+1)^2}.$$

この Gonek-Hejhal 予想の解決のためには零点分布に関する詳細な情報が必要である. そして, 現在知られている零点分布のいくつかの結果や数値計算と比較した際に, この評価は非常に鋭い不等式を予想していることがわかる. また, そのような強い不等式でるので応用もいくつかある. 例えば, Ng は [8] で, この Gonek-Hejhal 予想下で $M(x)$ の非常によい評価を与えている.

今回の研究はこの零点での導関数の和がディリクレ L 関数ではどうなるのかというところに焦点を置く. 以上の Gonek-Hejhal 予想のようなリーマンゼータ関数の話をディリクレ L 関数へと拡張することは一般の素数を等差数列中の素数の話へと拡張することを意味している.

2 結果

次の結果は Garav と Sankaranarayanan によりリーマンゼータ関数の場合に得られた結果をディリクレ L 関数に拡張した定理である.

定理 1. χ を法を q とする原始ディリクレ指標とする. 今, $L(s,\chi)$ の全ての零点の重複度が *1* 位であると仮定する. このとき, $T > T_0(q) > 0$ に対して

$$\sum_{|\gamma|\leq T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

をみたす $T_\nu \in [T/2, T]$ が存在する. ただし, $T_0(q)$ は q のみに依存する十分大きな定数であり, 和については $L(s,\chi)$ の $s = 0, \frac{1}{2}$ を除く零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $-3/4 < \beta < 1, |\gamma| \leq T$ をみたす零点全体を走る和としている. 特に, $T > T_0(q) > 0$ に関して

$$\sum_{0\leq\gamma\leq T} \frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \gg T \tag{2.1}$$

も成り立つ.

上記の結果は以下の Ramachandra と Sankaranarayanan の 2 人により示された $\zeta(s)$ に関する臨界領域内の水平線上での一様な下からの評価をディリクレ L 関数に拡張することで得ることができる. その拡張が以下の結果である.

定理 2. $\alpha \geq 20$ である定数とし, $T \geq T_0(\alpha) > 0, Q \geq 1$ とする. ただし, $T_0(\alpha)$ は α にのみ依存する十分大きな定数とする. このとき,

$$\min_{T\leq t\leq(\nu_\alpha(Q)+1)T} \max_{\substack{\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 2 \\ \chi\in S(Q)}} |L(\sigma+it,\chi)|^{-1} \leq \exp(C(\alpha)(\log\log(QT))^2) \tag{2.2}$$

が成り立つ. ただし, $S(Q)$ は法が Q 以下の原始ディリクレ指標全体の集合とし, $C(\alpha) > 0$ は α のみに依存する定数で,

$$\nu_\alpha(Q) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad Q \leq (\log(T))^{\alpha/4}, \\ Q^2 & \text{if} \quad Q > (\log(T))^{\alpha/4} \end{cases}$$

である.

この定理 2 の証明は省略する. 方針だけを少し述べると, Montgomery による実部が $1/2$ 付近の零点密度定理 [7] を用いて零点が近くにないような領域上でディリクレ L 関数の対数微分を複素解析を用いて評価をすることで証明できる.

この定理は指標についても一様な評価していることも注意しておきたい. 指標について一様に (2.2) のような評価 T^ε-オーダーをもつ水平線を取ると, そこで指標について和や積を取っても T^ε-オーダーを持つことがわかり, 複素解析を行う上ではよい評価を得ることができる. 例えば, 等差数列へと応用するためには指標の和を考えたいのだが, 指標に依存して (2.2) のような評価ができる場所が変わってしまうと都合が悪い. しかし, 指標について一様に評価をすることでそのような状況は回避できる. また, ディリクレ L 関数の積を考えることでアーベル拡大な代数体のデデキントゼータ関数を表すことも知られており, そちらへの応用も指標について一様に評価しているから可能となる. それが次の系である.

系 1. $\alpha \geq 20$ である定数とし, $T \geq T_0(\alpha) > 0$ とする. また, $K/\mathbb{Q}$ をアーベル拡大で K_m を $K \subset K_m$ をみたす最小の円分体とする. このとき,

$$\min_{T \leq t \leq (\nu_\alpha(m)+1)T} \max_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2} |\zeta_K(\sigma + it)|^{-1} \leq \exp(mC(\alpha)(\log\log(mT))^2)$$

が成り立つ.

また, このことから次のデデキントゼータ関数の導関数の零点での和についての評価も得ることができる.

定理 3. K を代数体で $\mathbb{Q}$ 上アーベル拡大なものとする. 今, $\zeta_K(s)$ の全ての非自明零点の重複度が *1* 位であると仮定する. このとき, $T > T_0(K) > 0$ に対して

$$\sum_{|\gamma| \leq T_\nu} \frac{1}{\zeta_K'(\rho)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

をみたす $T_\nu \in [T/2, T]$ が存在する. ただし, $T_0(K)$ は K のみに依存する十分大きな定数であり, 和については $\zeta_K(s)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $-3/4 < \beta < 1, |\gamma| \leq T$ をみたす零点全体を走る和としている. 特に, $T \geq T_0(m) > 0$ に関して

$$\sum_{|\gamma| \leq T_\nu} \frac{1}{|\zeta_K'(\rho)|} \gg T \tag{2.3}$$

も成り立つ.

評価 (2.1) と (2.3) は Gonek-Hejhal 予想の $\lambda = -1/2$ の場合に関する下からの評価を求めた結果である. これはリーマンゼータ関数の場合の結果 [2] と同等の結果である. Gonek-Hejhal 予想によるとリーマンゼータ関数の場合の真なる評価は T ではなく $T(\log T)^{1/4}$ まで評価できることが望ましい. しかし, これはリーマンゼータ関数の場合でも未だにこの評価までは到達しておらず, それはリーマン予想を仮定しても現在できていない. また, Gonek-Hejhal 予想のディリクレ L 関数やデデキントゼータ関数での類似が成り立つか, という問題はは代数体のメビウス関数や等差数列上でのメビウス関数を考えた際への応用があることから重要な問題となる. しかし, それに関して言及している文献は筆者の知るところでは無く, 今回の結果はその類似への拡張のきっかけの一つとなればと期待して行った研究である.

注意 1. 系 1 はアーベル拡大に制限した下からの評価に対する結果である. この結果を一般の代数体へ拡張することは難しいように思う. その理由としてはディリクレ L 関数に関する定理 2 の証明は零点密度定理が非常に重要な役割を果たす. そして $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大体 K はディリクレ L 関数の零点密度定理により充分な零点密度の結果を得ることができそこから証明することも可能である. しかし, 一般の代数体に関する零点密度定理はほとんど何も知られていない. 唯一とも言える参考文献としては Heath-Brown による [5] であるがこの結果は臨界線上 $\sigma = 1/2$ 付近では非常に悪い評価しか得られていないものとなっている.

3 定理 1 の証明

この節では定理 1 の証明を述べる. 定理 1 の証明は定理 2 を用いることで割と簡単に示すことができる.

定理 *1* の証明. χ を法が q の原始ディリクレ指標とする. 今, 定理 2 を $\alpha = 20$ として適用する. このとき, $T > T_0(q) > \exp\left(q^{1/5}\right)$ として, $T_\nu \in [T, 2T]$ で $1/2 \leq \sigma \leq 2$ に関して一様に

$$|L(\sigma + iT_\nu, \chi)|^{-1} \leq \exp(C(\log\log T)^2) \tag{3.1}$$

が成り立つものが取れる.

また, ディリクレ L 関数の関数等式により, $|L(s,\chi)| \asymp (qt)^{1/2-\sigma}|L(1-s,\chi)|$ が成り立つことから $-1 \leq \sigma \leq 2$ でも一様に不等式 (3.1) は成り立つ. 今, 留数定理により

$$\sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT_\nu}^{2+iT_\nu} + \int_{2+iT_\nu}^{-3/4+iT_\nu} + \int_{-3/4+iT_\nu}^{-3/4-iT_\nu} + \int_{-3/4-iT_\nu}^{2-iT_\nu}\right)\frac{ds}{L(s,\chi)} + O_q(1)$$

が成り立つ. ただし, $s = 0, \frac{1}{2}$ で $L(s,\chi)$ が零点を持つ場合, それは $O_q(1)$ に吸収される. ここで,

$$\left|\int_{-3/4\pm iT_\nu}^{2\pm iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)}\right| \ll \exp(C(\log\log T)^2)$$

であり, $|L(-3/4+it,\chi)|^{-1} \ll (|t|+1)^{-5/4}$ なので,

$$\left| \int_{-3/4-iT_\nu}^{-3/4+iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)} \right| \ll 1$$

が成り立つ. そして,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT_\nu}^{2+iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{2+it}} dt = \frac{T_\nu}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^2} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} n^{-it} dt$$

$$= \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}\right) = \frac{T_\nu}{\pi} + O(1)$$

となる. 従って,

$$\sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

が成り立つ. 特に,

$$\sum_{|\gamma|\le 2T} \frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \ge \sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \ge \left| \sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} \right| \gg T$$

となる. 従って, 定理 1 が導かれる. □

参考文献

[1] K. M. Bartz, On some complex explicit formulae connected with the Möbius function.II, *Acta Arith.* **LVII** (1991), 295–305.

[2] M. Z. Garaev and A. Sankaranarayanan, The sum involving derivative of $\zeta(s)$ over simple zeros, *J. Number Theory* **117** (2006), 122–130.

[3] S. M. Gonek, On negative moments of the Riemann zeta-function, *Mathematika.* **36** (1989), 71–88.

[4] D. Hejhal, On the distribution of $\log\left|\zeta'(\frac{1}{2}+it)\right|$, *Number theory, trace formula and discrete groups* (ed. K. E. Aubert, E. Bombieri and D. Goldfeld, Academic Press, San Diego, 1989) 343–370.

[5] D. R. Heath-Brown, On the density of the zeros of the Dedekind Zeta-function, *Acta Arith.* **33** (1977), 169–181.

[6] A. E. Ingham, On two conjectures in the theory of numbers, *Amer. J. Math.* **64** (1942), 313–319.

[7] H. L. Montgomery, Zeros of L-Functions, *Invent. Math.* **8** (1969), 346–354.

[8] N. Ng, The distribution of the summatory function of the Möbius function, *Proc. London Math. Soc.* (3) **89** (2004), 361–389.

[9] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath–Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

Generalized zeta function formulas for a simple graph with bounded degree

高坂太智 (Taichi KOUSAKA)*
九州大学大学院数理学府数理学専攻

2015 年に G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏 及び A. Karlsson 氏らによって有限とは限らない頂点推移グラフに対して, 伊原ゼータ函数が定義され, その伊原の公式が示された. 本講演では, より一般に, 頂点推移とは限らないグラフに対して, 彼らと同じアイデアを用いて伊原ゼータ函数及び Bartholdi ゼータ函数を定義し, その伊原の公式を紹介する.

序

古くからグラフの性質とグラフの不変量との関連について様々な研究がなされてきた. その中でもスペクトルグラフ理論と呼ばれる分野は, グラフの性質とグラフの一つの不変量であるラプラシアンのスペクトルとの関連に焦点を当てた分野である. 本講演では特に, グラフの性質とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連について, 整数論的な側面について調べることを主題とする.

有限グラフに対するゼータ函数

グラフ $X = (VX, EX)$ を連結単純グラフとし, グラフ X のラプラシアンを Δ_X と表す. 有限グラフ X に対して, グラフの性質の中でもグラフの閉測地線とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連について良く調べられている. その関連を表す一つの等式が, 本講演の主題である伊原の公式と呼ばれる公式である. 有限グラフ X に対する伊原ゼータ函数とは, 次で定義されるゼータ函数である:

$$Z_X(u) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} u^m\right).$$

ここで, N_m はグラフ X における長さ m の閉測地線の個数を表す. このタイプのゼータ函数はもともと 1966 年に伊原康隆氏により整数論の文脈において, セルバーグ型のゼータ函数として導入された (cf. [15]). その後, 有限グラフのおいても同様にゼータ函数が定義されると J. P. Serre 氏により示唆され, 砂田利一氏, 橋本喜一朗氏, H. Bass 氏らにより研究が進められた (cf. [2], [10], [11], [12], [13], [14], [16], [18], [19], [20]). 伊原ゼータ函数に対して, 次の公式が有名かつ重要な公式である ([21]):

$$Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)^{-\chi(X)} \det\big(I - u(D_X - \Delta_X) + u^2(D_X - I)\big).$$

* t-kosaka@math.kyushu-u.ac.jp

ここで, X のオイラー標数を $\chi(X)$ と表し, valency operator と呼ばれる作用素を D_X と表した. 特に, X が $(q+1)$-正則グラフである場合, この公式は次のように表すことができる:

$$Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)^{\frac{1}{2}n(q-1)} \prod_{\lambda\in\sigma(\Delta_X)} (1-(q+1-\lambda)u+qu^2)^{\mathrm{m}(\lambda)}.$$

ここで上において, 頂点集合の濃度を n, ラプラシアン Δ_X のスペクトルを $\sigma(\Delta_X)$, 固有値 λ の重複度を $\mathrm{m}(\lambda)$ と表した. この公式は本質的には伊原康隆氏により 1966 年に示された公式である ([15]). またこの公式はグラフの閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を明示的に表しており, ラプラシアンのスペクトルの整数論的な性質を表す一つの等式であると言える. このようなタイプの等式のことを本講演では, **伊原タイプの公式**と呼ぶ.

その後, 1999 年に L. Bartholdi 氏により次のようなゼータ函数が導入された ([1]):

$$Z_X(u,t) = \exp\left(\sum_{C\in\mathcal{C}} \frac{1}{\ell(C)} t^{\mathrm{cbc}(C)} u^{\ell(C)}\right).$$

ここで, X における閉路全体の集合を $\mathcal{C}$, 閉路 C の長さを $\ell(C)$, cyclic bump count を $\mathrm{cbc}(C)$ と表した. このゼータ函数は Bartholdi ゼータ函数と呼ばれている. Bartholdi ゼータ函数において, $t=0$ とすると伊原ゼータ函数となることから, これは伊原ゼータ函数の一つの一般化である. さらに, Bartholdi ゼータ函数に対して次の公式が知られている ([1]):

$$\begin{aligned} Z_X(u,t)^{-1} = {} & \big(1-(1-t)^2u^2\big)^{-\chi(X)} \\ & \times \det\big(I-u(D_X-\Delta_X)+(1-t)u^2(D_X-(1-t)I)\big). \end{aligned}$$

特に, X が $(q+1)$-正則グラフである場合, この公式は次のように表すことができる:

$$Z_X(u)^{-1} = (1-(1-t)^2u^2)^{\frac{1}{2}n(q-1)} \prod_{\lambda\in\sigma(\Delta_X)} (1-(q+1-\lambda)u+(q+t)(1-t)u^2)^{\mathrm{m}(\lambda)}.$$

この公式はグラフの閉路とラプラシアンのスペクトルとの関連を明示的に表しており, この公式もラプラシアンのスペクトルの整数論的な性質を表す一つの等式であると言える. このようなタイプの等式のことを本講演では, **Bartholdi タイプの公式**と呼ぶ.

より一般のグラフに対するゼータ函数

この節では, グラフ $X=(VX,EX)$ を高々可算個の頂点を持ち, 頂点次数が有界であるグラフとし, 前節と同様に X のラプラシアンを Δ_X と表す. 近年このような有限とは限らないグラフに対して, 様々なゼータ函数が考案されている (cf. [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [17]). その中でも [3] において, G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏, A. Karlsson 氏らは頂点推移である $(q+1)$-正則グラフ X 及び頂点 x_0 に対して, 次のようなゼータ函数を導入した:

$$Z_X(u,x_0) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m(x_0)}{m} u^m\right).$$

ここで, 頂点 x_0 を始点とする長さが m の閉測地線の個数を $N_m(x_0)$ と表した. 本講演では, これも伊原ゼータ函数という. 上において, グラフ X は頂点推移, すなわち, グラフ X の自己同型群

$\mathrm{Aut}(X)$ が頂点集合 VX に推移的に作用することから, $Z_X(u, x_0)$ は x_0 に依存しない. [3] において, G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏 及び A. Karlsson 氏らはこのゼータ函数に対して, 次の公式を証明した:

$$Z_X(u, x_0)^{-1} = (1-u^2)^{\frac{q-1}{2}} \exp\left(\int_{\sigma(\Delta_X)} \log(1 - \big((q+1) - \lambda\big)u + qu^2) d\mu_{x_0,x_0}(\lambda) \right).$$

ここで, ラプラシアン Δ_X のスペクトル測度を E と表したとき,

$$d\mu_{x_0,x_0}(\lambda) := d\langle E(\lambda)\delta_{x_0}, \delta_{x_0}\rangle$$

と表した. この公式は頂点 x_0 を始点とする閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を表しており, この公式も伊原タイプの公式であるということができる.

本講演では, 高々可算個の頂点を持ち, 頂点次数が有界である単純グラフに対して, [3] と同じアイデアを用いて伊原ゼータ函数を定義し, その伊原タイプの公式を紹介する. また, そのゼータ函数に対して, L. Bartholdi 氏と同じアイデアを用いてゼータ函数を一般化し, その Bartholdi タイプの公式も紹介する. 特に, 有限グラフの場合には, これらの公式から, 本稿で紹介した公式を導くことができる. その意味で本講演で紹介する公式はこれまで紹介した公式の一般化にもなっている.

参考文献

[1] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, Enseign. Math. 45(1999)83–131.

[2] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, International. J. Math. 3 (1992), 717–797.

[3] G. Chinta, J. Jorgenson and A. Karlsson, Heat kernels on regular graphs and generalized Ihara zeta function formulas, Monatsh. Math., 178 (2015), 171–190.

[4] B. Clair and S. Mokhtari-Sharghi, Zeta functions of discrete groups acting on trees, J. Algebra 237 (2001), No. 2, 561–620.

[5] B. Clair, Zeta functions of graphs with $\mathbb{Z}$ actions, J. Combin. Theory Ser. B 99 (2009), No. 1, 48–61.

[6] A. Deitmar, Ihara zeta functions of infinite weighted graphs, SIAM J. Discrete Math., 29(4) (2015), 2100–2116.

[7] R. I. Grigorchuk and A. Żuk, The Ihara zeta function of infinite graphs, the KNS spectral measure and integrable maps, Random walks and geometry, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 141–180.

[8] D. Guido, T. Isola and M. L. Lapidus, Ihara zeta functions for periodic simple graphs, $C^\star$-algebras and elliptic theory II, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 103–121.

[9] D. Guido, T. Isola and M. L. Lapidus, Ihara's zeta function for periodic graphs and its approximation in amenable case, J. Funct. Anal. 255 (2008), No. 6, 1339–1361.

[10] K. Hashimoto and A. Hori, Selberg-Ihara's zeta function for p-adic groups, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, Adv. Stud. Pure Math., vol. 15, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 171–210.

[11] K. Hashimoto, Zeta functions of finite graphs and representations of p-adic groups, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, Adv. Stu. Pure Math., vol. 15, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 211–280.

[12] K. Hashimoto, On zeta and L-functions of finite graphs, Internet. J. Math. 1 (1990), no. 4, 381–396.

[13] K. Hashimoto, Artin type L-functions and the density theorem for prime cycles on finite graphs, Internet. J. Math. 3 (1992), no. 6, 809–826.

[14] K. Hashimoto, Artin L-functions of finite graphs and their applications, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku 840 (1993), 70–81. Algebraic combinatorics (Kyoto, 1992).

[15] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic field, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 219–235.

[16] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000), 7–25.

[17] O. Scheja, On zeta functions of arithmetically defined graphs, Finite Fields Appl. 5 (1999), No. 3, 314–343.

[18] J. P. Serre, Trees, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[19] T. Sunada, L-Functions in geometry and some applications, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1201, Springer, Berlin, 1986, pp. 266–284.

[20] T. Sunada, Fundamental groups and Laplacians, Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), Lecture Notes in Math., vol. 1339, Springer, Berlin, 1988, pp. 248–277.

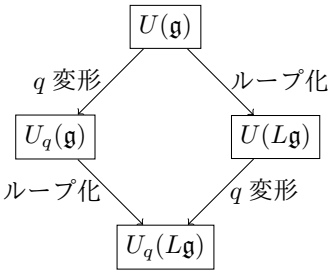
[21] A. Terras, Zeta functions of graphs. A stroll through the garden, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 128. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

ADE 型量子ループ代数のある加群圏の構造について

藤田 遼 (Ryo Fujita)*

京都大学大学院理学研究科数学教室

1 Introduction

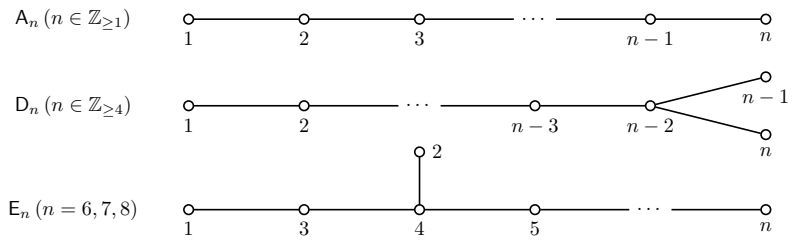


物理学的な背景から，有限次元複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ もしくはその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に対し，「q 変形」と「ループ化」という 2 種類の変形を考えることが多い．ここで，「q 変形」とはパラメータ q を付加することによる Hopf 代数の非余可換変形（Drinfeld-神保の量子包絡環）$U_q(\mathfrak{g})$ を指し，「ループ化」とは $\mathbb{C}^\times$（S^1 の複素化）から $\mathfrak{g}$ への（代数的な）写像全体 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ のなす Lie 代数を指す．本稿の主題である量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ はこの 2 種類の変形を同時に行って得られる代数系である．これはもともと三角関数型 R 行列との関連で量子可積分系で興味を持たれてきた対象であり，その加群圏は複雑で豊かな構造を持つ．現在も団代数のモノイダル圏論化などと関係して活発に研究されている．

ここでは，ADE 型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元表現論について述べる．それは，ADE 型 Dynkin 図形の各辺に向きを与えて得られる Dynkin 箙 Q や箙多様体と深く結びついている．本稿では特に，各 Dynkin 箙 Q に対して Hernandez-Leclerc [6] が定義した $U_q(L\mathfrak{g})$ の良い加群圏 $\mathcal{C}_Q$ の構造が箙 Q の表現論や箙多様体の幾何とどのように関係しているかを説明したい．

2 量子ループ代数の表現論

2.1 Dynkin 図形と Lie 代数



有限次元の複素単純 Lie 代数（の同型類）は Dynkin 図形でラベル付けられる．Dynkin 図形は有限個の頂点と，それらを結ぶ 3 種類の辺（単純辺，有向 2 重辺，有向 3 重辺）たちからなる図形であって，古典型と呼ばれる 4 つの無限系列 $\mathsf{A}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}), \mathsf{B}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}), \mathsf{C}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}), \mathsf{D}_n(n \in \mathbb{Z}_{\geq 4})$ と，有限個の例外型 $\mathsf{E}_n(n = 6,7,8), \mathsf{F}_4, \mathsf{G}_2$ に分類される．本稿では，ADE 型の Dynkin 図形のみを考えるが，それらはちょうど単純辺だけからなる Dynkin 図形である（上図）．

* E-mail:rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

以下では，記法を固定することも兼ねて Dynkin 図形から対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ がどのように復元されるのか思い出し，その構造と表現論について簡単にまとめておく．$\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$ とし，X_n 型の Dynkin 図形を考える．その頂点集合を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，2 頂点 $i, j \in I$ が辺で結ばれているとき $i \sim j$ と書く．Cartan 行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき;} \\ -1 & i \sim j \text{ のとき;} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する．このとき，X_n 型の複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は生成元 $\{e_i, f_i, h_i\}_{i \in I}$ と関係式

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i,$$
$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

で与えられる．ただし，$\mathrm{ad}(x)(y) := [x, y]$ は随伴作用を表す．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は Lie 括弧 $[x, y]$ を代数における交換子 $xy - yx$ に読み替えて，上記の生成元と関係式を $\mathbb{C}$ 代数の生成元と関係式と思って得られるものに等しい．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と $\mathbb{C}$ 代数 $U(\mathfrak{g})$ 上の加群とを自然に同一視し，以下区別しない．

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} h_i \subset \mathfrak{g}$ の基底 $\{h_i\}_{i \in I}$ の双対基底 $\{\varpi_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$ が生成する自由アーベル群 $\mathsf{P} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \varpi_i \subset \mathfrak{h}^*$ をウェイト格子と呼ぶ．任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群 M はウェイト空間の直和に分解する：

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{P}} M_\lambda, \quad M_\lambda := \{v \in M \mid h \cdot v = \lambda(h) v \, (h \in \mathfrak{h})\}.$$

また，$i \in I$ に対応する単純ルートを $\alpha_i := \sum_{j \in I} a_{ij} \varpi_j \in \mathsf{P}$ で定義し，$\mathsf{P} \supset \mathsf{Q} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i \supset \mathsf{Q}_+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha$ と定義する．随伴表現のウェイト空間分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathsf{Q}} \mathfrak{g}_\alpha$ を考えることにより，ルートの集合 $\mathsf{R} := \{\alpha \in \mathsf{Q} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ および正ルートの集合 $\mathsf{R}_+ := \mathsf{R} \cap \mathsf{Q}_+$ を定義する．$\mathsf{R} = \mathsf{R}_+ \sqcup (-\mathsf{R}_+)$ であり，$\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) を $\{e_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{f_i\}_{i \in I}$) たちの生成する $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数とすると $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \pm \mathsf{R}_+} \mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ および三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ が成り立つ．各 $\alpha \in \mathsf{R}$ について $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ であり，特に $\dim \mathfrak{n}_\pm = |\mathsf{R}_+|$ である．

有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群のなす圏 $U(\mathfrak{g})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ は Weyl の定理より完全可約であり，その単純加群の同型類全体の集合 $\mathsf{Irr}\, U(\mathfrak{g})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ は支配的ウェイトの集合 $\mathsf{P}_+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i \subset \mathsf{P}$ と 1 : 1 対応する．支配的ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対応する単純加群 $V(\lambda)$ は生成ベクトルである最高ウェイトベクトル v と関係式

$$e_i \cdot v = 0, \quad h_i \cdot v = \lambda(h_i) v, \quad f_i^{\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad (\forall i \in I)$$

で定義される．代数 $U(\mathfrak{g})$ には，各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ を満たすような余積 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ が存在する．これによって 2 つの $U(\mathfrak{g})$ 加群 V, W の $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $V \otimes W$ は再び $U(\mathfrak{g})$ 加群となり，圏 $U(\mathfrak{g})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ はモノイダル圏となる．余積の定義から，テンソルの成分を入れ替える線形写像 $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群の同型 $V \otimes W \cong W \otimes V$ を引き起こす．

2.2 量子ループ代数

$\mathbb{C}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，そのループ化とは単に Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ への係数拡大 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ である．すなわち，Lie 括弧は単に

$$[X \otimes f(t), Y \otimes g(t)] = [X, Y] \otimes f(t) g(t), \quad (X, Y \in \mathfrak{g},\ f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

で与えられる．ループ化 $L\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の無限次元 Lie 代数とみなし，その $\mathbb{C}$ 上の普遍包絡環を $U(L\mathfrak{g})$ と書く．ADE 型の量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ は，ADE 型有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のループ化 $L\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(L\mathfrak{g})$ に，複素数パラメータ q を入れて変形した代数と思える．以下，1 の冪根ではない $q \in \mathbb{C}^\times$ を固定する．

定義 2.1. $\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$ に対して，X_n 型量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ は（無限個の）生成元

$$\{e_{i,r}, f_{i,r} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\} \cup \{K_i^{\pm 1} \mid i \in I\} \cup \{h_{i,m} \mid i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\}$$

と以下の（無限個の）関係式で与えられる $\mathbb{C}$ 代数である:

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad [K_i, K_j] = [K_i, h_{j,l}] = [h_{i,m}, h_{j,l}] = 0,$$

$$K_i e_{j,r} K_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_{j,r}, \quad K_i f_{j,r} K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_{j,r},$$

$$(w - q^{\pm a_{ij}} z) \psi_i^{\varepsilon}(z) x_j^{\pm}(w) = (q^{\pm a_{ij}} w - z) x_j^{\pm}(w) \psi_i^{\varepsilon}(z),$$

$$[x_i^+(z), x_i^-(w)] = \frac{\delta_{ij}}{q - q^{-1}} \left(\delta\left(\frac{z}{w}\right) \psi_i^+(w) - \delta\left(\frac{w}{z}\right) \psi_i^-(z) \right),$$

$$(w - q^{\pm a_{ij}} z) x_i^{\pm}(z) x_j^{\pm}(w) = (q^{\pm a_{ij}} w - z) x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z),$$

$$\left\{ x_i^{\pm}(z_1) x_j^{\pm}(z_2) x_j^{\pm}(w) - (q + q^{-1}) x_i^{\pm}(z_1) x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z_2) + x_j^{\pm}(w) x_i^{\pm}(z_1) x_i^{\pm}(z_2) \right\}$$
$$+ \{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0 \quad (i \sim j \text{ のとき}).$$

ただし，$\varepsilon \in \{+, -\}$ であり，$\delta(z), \psi_i^{\pm}(z), x_i^{\pm}(z)$ は以下で定義される形式的冪級数 ($\in U_q(L\mathfrak{g})[\![z, z^{-1}]\!]$) である:

$$\delta(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \quad \psi_i^{\pm}(z) := K_i^{\pm 1} \exp\left(\pm (q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{\infty} h_{i,\pm m} z^{\pm m} \right),$$

$$x_i^+(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{i,r} z^r, \quad x_i^-(z) := \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{i,r} z^r.$$

最後の関係式の第 2 項 $\{z_1 \leftrightarrow z_2\}$ は第 1 項から z_1 と z_2 を入れ替えて得られるものを意味する．

生成元 $e_{i,r}, f_{i,r}, h_{i,m}$ はそれぞれループ代数 $L\mathfrak{g}$ の元 $e_i \otimes t^r, f_i \otimes t^r, h_i \otimes t^m$ の対応物であり，生成元 K_i は $q^{h_i \otimes 1}$ と思えるような元である．

本稿では量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元加群のなす圏 $U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$ を考える．任意の有限次元 $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群 M は適当な自己同型による捻りを施せば

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{P}} M_\lambda, \quad M_\lambda = \{v \in M \mid K_i \cdot v = q^{\lambda(h_i)} v \, (i \in I)\}$$

という形の分解を持つようにできる．このような分解を持つ加群を **1** 型の加群と呼び，以下では有限次元 **1** 型 $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群全体のなす $\mathbb{C}$ 線形アーベル圏 $\mathcal{C}$ に着目する．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のときとは違い，圏 $\mathcal{C}$ では加群が非自明な拡大を持ち，そのホモロジー代数的性質を明らかにすることは興味深い問題である．

量子ループ代数は余積 $\Delta : U_q(L\mathfrak{g}) \to U_q(L\mathfrak{g}) \otimes U_q(L\mathfrak{g})$ を持つ[*1]．一般の元に対してこれを書き下すことは難しいが，例えば，各 $i \in I$ に対して

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad \Delta(e_{i,0}) = e_{i,0} \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes e_{i,0}, \quad \Delta(f_{i,0}) = f_{i,0} \otimes 1 + K_i \otimes f_{i,0},$$

[*1] これは定義からは全く自明でなく，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ が量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ （これはアフィン Lie 代数の量子包絡環であり，有限表示を持つ Hopf 代数）のレベル 0 に対応する商であるという事実を用いる．特に，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の表現は同時に量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル 0 表現でもある．

などが成り立つ．最初の式から，$\mathbf{1}$ 型加群はテンソル積に関して閉じている，すなわち圏 $\mathcal{C}$ は圏 $U_q(L\mathfrak{g})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ のモノイダル部分圏になっていることがわかる．2 番目と 3 番目の式からこの余積は余可換ではないので，加群 $V, W \in \mathcal{C}$ に対してテンソル成分の入れ替えは $V \otimes W$ と $W \otimes V$ の間の同型を引き起こさない．実際，一般に $V \otimes W$ と $W \otimes V$ は $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群として同型でない．しかし興味深いことに，それらの組成因子は重複度込みで一致し，Grothendiek 環 $K(\mathcal{C})$ は可換であることが知られている．

2.3 単純加群の分類

圏 $\mathcal{C}$ の単純加群の分類定理を述べる．

定理 2.2 (Chari-Pressley [1])．任意の単純加群 $L \in \mathcal{C}$ に対し，1 次元部分空間 $\mathbb{C}v \subset L$ と定数項 1 の多項式の I 組 $\pi = (\pi_i(u))_{i \in I} \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ が一意的に存在して，以下の 3 つの条件[*2]を満たす：

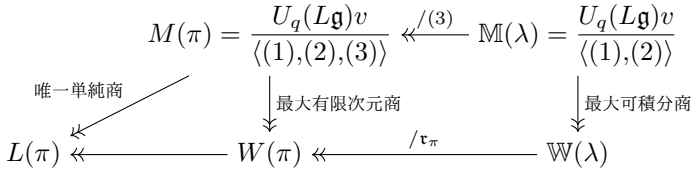
(1) $e_{i,r} \cdot v = 0 \quad (i \in I, r \in \mathbb{Z})$;
(2) $K_i \cdot v = q^{\lambda(h_i)} v \quad (i \in I)$;
(3) $L[\![z^{\pm 1}]\!]$ において，$\psi_i^{\pm}(z) \cdot v = q^{\lambda(h_i)} \left[\dfrac{\pi_i(q^{-2}z)}{\pi_i(z)} \right]_{z^{\pm 1}=0} v \quad (i \in I)$.

ただし，ここで $\lambda := \sum_{i \in I} (\deg \pi_i) \varpi_i \in \mathsf{P}_+$ と定義し，$[\cdot]_{z^{\pm 1}=0}$ は $z^{\pm 1} = 0$ における形式的冪級数展開を表す．さらに，このとき $L = L(\pi)$ と書くことにすると，対応 $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C} \ni L(\pi) \mapsto \pi \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ は 1 : 1 である．

定理に現れた多項式の I 組 $\pi \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ を Drinfeld 多項式と呼ぶ．また条件 $(1), (2), (3)$ を満たすベクトル v で生成される $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群を ℓ 最高ウェイト加群，そのとき生成ベクトル v を ℓ 最高ウェイトベクトルとよぶ．ここで，ℓ はループを意味する．上記定理 2.2 は圏 $\mathcal{C}$ の単純加群が ℓ 最高ウェイトで分類されることを主張しており，これは $U(\mathfrak{g})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ における単純加群の分類の類似である．

2.4 局所/大域 Weyl 加群

ここでは Chari-Pressley [2] に従って，単純加群の ℓ 最高ウェイトによる特徴付けと関連して局所および大域 Weyl 加群と呼ばれる $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群を定義する．これらは箙多様体の同変 K 群を用いて幾何学的に実現できる加群でもある（次節参照）．



まず，生成ベクトル v から定理 2.2 の条件 $(1), (2), (3)$ だけで定義される無限次元の普遍 ℓ 最高ウェイト加群 $M(\pi)$ を考える．これは有限次元単純加群 $L(\pi) \in \mathcal{C}$ をただ一つの単純商に持つが，$M(\pi)$ は無限次元なので圏 $\mathcal{C}$ に属さない．そこで，局所 Weyl 加群 (local Weyl module) を $M(\pi)$ の最大の有限次元商 $W(\pi) \in \mathcal{C}$ として定義する．局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は，結果としては生成ベクトル v と関係式 $(1), (2), (3)$ に加えてもうひとつの条件

$$f_{i,r}^{\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad (i \in I, r \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

を課して定義される加群と同型になる．

一方，生成ベクトル v から定理 2.2 の条件のうち $(1), (2)$ のみを関係式として定義される加群 $\mathbb{M}(\lambda)$[*3]を考

[*2] 実は条件 (2) は条件 (3) から従うのだが，説明の都合上敢えて分けて書いた．
[*3] 加群 $\mathbb{M}(\lambda)$ および大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ は Drinfeld 多項式の次数 $\lambda \in \mathsf{P}_+$ のみで決まることに注意する．

え，加群 $\mathbb{M}(\lambda)$ の最大可積分[*4]商加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ を大域 Weyl 加群 (global Weyl module) と呼ぶ．大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ は無限次元であり，結果としては条件 (1), (2) に条件 (2.1) を付け加えて定義される加群に同型である．Chari-Pressley [2] および中島 [9] により，

$$R_\lambda := \mathrm{End}_{U_q(L\mathfrak{g})}(\mathbb{W}(\lambda)) \cong \bigotimes_{i\in I} \mathbb{C}[z_{i,1}^{\pm 1}, \dots, z_{i,\lambda(h_i)}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}}$$

であり，$\mathbb{W}(\lambda)$ は R_λ 加群として有限階数自由であることが知られている．特に，環 R_λ の極大イデアルの集合 $\mathrm{Specm}(R_\lambda) \cong (\mathbb{C}^\times)^\lambda := \prod_{i\in I}(\mathbb{C}^\times)^{\lambda(h_i)}/\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}$ は対応 $(\mathbb{C}^\times)^\lambda \ni [(c_{i,1}, \dots, c_{i,\lambda(h_i)})]_{i\in I} \leftrightarrow \left(\prod_{j=1}^{\lambda(h_i)}(1 - c_{i,j}u)\right)_{i\in I} \in (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ によって，次数 λ の Drinfeld 多項式の集合と同一視できる．次数 λ の Drinfeld 多項式 π に対応する R_λ の極大イデアルを $\mathfrak{r}_\pi$ と書くことにすると，局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ のイデアル $\mathfrak{r}_\pi$ による商と同型になる．別の言い方をすれば，大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ を空間 $(\mathbb{C}^\times)^\lambda$ 上のベクトル束と思ったとき，局所 Weyl 加群 $W(\pi)$ は点 π におけるファイバーである．

ここで $\widehat{R}_\pi := \varprojlim_k R_\lambda/\mathfrak{r}_\pi^k$ とし，大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ の点 π における完備化 $\widehat{W}(\pi) := \mathbb{W}(\lambda) \otimes_{R_\lambda} \widehat{R}_\pi$ を変形 Weyl 加群と呼ぶことにする．これは本稿の主定理において役割を演ずる．

2.5 箙多様体と量子ループ代数

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(\lambda) & \hookrightarrow & \mathfrak{M}(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{0\} & \hookrightarrow & \mathfrak{M}_0(\lambda) \end{array}$$

ここでは量子ループ代数の表現を箙多様体を用いて実現することについて概略のみごく簡単に述べる．正確な定義など詳細は中島の原論文 [9] を参照していただきたい．

各支配的ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対して，箙多様体 (quiver variety) と呼ばれる 2 種類の $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ と $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ が定義される．実際には，多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ は非特異準射影的多様体の直和 $\bigsqcup_{\nu\in\mathsf{Q}_+}\mathfrak{M}(\nu,\lambda)$ として，多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ は（一般には特異点を持った）アフィン多様体の和 $\bigcup_{\nu\in\mathsf{Q}_+}\mathfrak{M}_0(\nu,\lambda)$ として構成される．多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ と $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ には線形代数群 $\mathbb{G}(\lambda) := \prod_{i\in I} GL_{\lambda(h_i)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の作用が入り，$\mathbb{G}(\lambda)$ 同変な固有射 $\pi : \mathfrak{M}(\lambda) \to \mathfrak{M}_0(\lambda)$ が存在する．また，多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ には原点 0 があり，その π による逆像を $\mathfrak{L}(\lambda)$ と書いて中心ファイバー (central fiber) と呼ぶ．

以上のことを最もシンプルな A_1 型の場合に述べる．$I = \{1\}$ であるから $\varpi = \varpi_1$, $\alpha = \alpha_1$ と略して書く．$\lambda = l\varpi \in \mathsf{P}_+$, $\nu = k\alpha \in \mathsf{Q}_+$ に対して，多様体 $\mathfrak{M}(\nu,\lambda)$ は Grassmann 多様体の余接束 $T^*\mathrm{Gr}(k,l)$ であり，$\mathfrak{M}_0(\lambda) = \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \mid x^2 = 0\}$ である．

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{0\le k\le l} \mathrm{Gr}(k,l) & \xhookrightarrow{\text{零切断}} & \bigsqcup_{0\le k\le l} T^*\mathrm{Gr}(k,l) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{0\} & \hookrightarrow & \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \mid x^2 = 0\} \end{array}$$

$T^*\mathrm{Gr}(k,l) = \{(x,V) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l) \times \mathrm{Gr}(k,l) \mid x(\mathbb{C}^l) \subset V, x(V) = 0\}$ という同一視の下で固有射 π は第 1 成分の射影である．したがって，中心ファイバー $\mathfrak{L}(\lambda)$ は Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(k,l)$ の直和となる．群 $\mathbb{G}(\lambda) = GL(\mathbb{C}^l) \times \mathbb{C}^\times$ の $T^*\mathrm{Gr}(k,l)$ への作用は $GL(\mathbb{C}^l)$ の自然な作用 $g \cdot (x,V) = (gxg^{-1}, gV)$ と $\mathbb{C}^\times$ のファイバー方向のスカラー倍作用の直積である．

さて，一般にある線形代数群 G の作用つき多様体 X に対し，その同変 K 群，すなわち X 上の G 同変連接層のなすアーベル圏 $\mathrm{Coh}^G(X)$ の Grothendiek 群 $K(\mathrm{Coh}^G(X))$ を $K^G(X)$ と書く．多様体 X が 1 点 pt のとき $\mathrm{Coh}^G(\mathrm{pt})$ とは G の有限次元表現のなす圏 $\mathrm{Rep}(G)$ であり，$K^G(\mathrm{pt})$ は G の表現環 $R(G)$ に等しい．表現 $V \in \mathrm{Rep}(G)$ を G 多様体 X 上の G 同変自明束とみなして，$[V] \in R(G)$ と $[\mathcal{F}] \in K^G(X)$ との積を

[*4] 各 $e_{i,r}, f_{i,r}$ が局所冪零に作用すること．量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル 0 表現と思ったときの可積分性と同値である．

$[V]\cdot[\mathcal{F}] := [V \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}]$ と定めることで，同変 K 群 $K^G(X)$ は $R(G)$ 加群になる．

以下，箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda) \to \mathfrak{M}_0(\lambda)$ の設定で，群 G としては $\mathbb{G}(\lambda)$ を考える．標準的に $A := R(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$, $R(GL_k(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_k}$ とみなすとき，$R(\mathbb{G}(\lambda)) \cong \bigotimes_{i\in I} A[z_{i,1}^{\pm 1}, \dots, z_{i,\lambda(h_i)}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{\lambda(h_i)}}$ と同一視できることに注意する（テンソル積は A 上とっている）．不定元 $v \in A$ を，量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ を定義するときに固定したパラメータ $q \in \mathbb{C}$ へ特殊化することで $\mathbb{C}$ を A 代数とみなす．前節の R_λ は $R_\lambda = R(\mathbb{G}(\lambda)) \otimes_A \mathbb{C}$ と同一視できることに注意する．任意の $\mathbb{G}(\lambda)$ 作用付き多様体 X に対して $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(X) := K^{\mathbb{G}(\lambda)}(X) \otimes_A \mathbb{C}$ と書くことにする．これは R_λ 加群である．

さて，箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda) \to \mathfrak{M}_0(\lambda)$ から Steinberg 型多様体 $Z(\lambda) := \mathfrak{M}(\lambda) \times_{\mathfrak{M}_0(\lambda)} \mathfrak{M}(\lambda)$ を構成し，その同変 K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ を考える．畳み込み (convolution) によって K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ には R_λ 代数の構造が入る．このとき中心ファイバーの同変 K 群 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(\mathfrak{L}(\lambda))$ は代数 $\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ 上の加群となる．

定理 2.3 (中島 [9])**.** 各 $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対して，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\Phi_\lambda : U_q(L\mathfrak{g}) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ が存在して，引き戻しで得られる $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群 $\Phi_\lambda^*(\mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(\mathfrak{L}(\lambda)))$ は大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\lambda)$ と同型である．この同型は，両辺の R_λ 作用と整合的である．

注意 2.4. 準同型 Φ_λ は一般には全射でも単射でもない．本稿の主定理 4.2 では，特別な状況でこの準同型の性質についてより深く考察する．

3 Dynkin 箙の表現と Hernandez-Leclerc 圏 $\mathcal{C}_Q$

この節の目標は，Dynkin 箙の表現論を用いてモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{C}$ を定義することである．

3.1 箙の表現と Gabriel の定理

箙 (quiver) とは有向グラフのことである．すなわち，頂点の集合 I と矢の集合 Ω の組 $Q = (I, \Omega)$ であって，各矢 $a \in \Omega$ に対してその始点 $a' \in I$ と終点 $a'' \in I$ が定まっている．以下，集合 I と Ω は有限であるとする．箙 Q の（$\mathbb{C}$ 上の）表現とは，各頂点 $i \in I$ ごとに $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V_i を与え，各矢 $a \in \Omega$ ごとに線形写像 $f_a \in \mathrm{Hom}(V_{a'}, V_{a''})$ を与えて得られるデータ $((V_i)_{i\in I}, (f_a)_{a\in\Omega})$ である．

箙 $Q = (I, \Omega)$ に対して，矢の有限列 $p = (a_1, a_2, \dots, a_l)$ で，${a_k}'' = {a_{k+1}}' (1 \le k < l)$ を満たすものを頂点 ${a_1}'$ から頂点 ${a_l}''$ への道 (path) といい，このとき l を道 p の長さという．各矢 $a \in \Omega$ は長さ 1 の道と見なす．長さ 0 の道も考え，頂点 i から i への長さ 0 の道を ϵ_i と書く．箙 Q の道代数とは，道全体の集合でラベルされた基底を持つ $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}Q = \bigoplus_p \mathbb{C}p$ 上に，「2 つの道が結合可能な時は結合し，結合可能でないときは 0 とする」という規則[*5] で積を定義した結合的 $\mathbb{C}$ 代数である．

道代数 $\mathbb{C}Q$ 上の加群 V に対して，$V_i := \epsilon_i V$ とし，矢 a の作用を $f_a : V_{a'} \to V_{a''}$ とすれば，箙 Q の表現 $((V_i), (f_a))$ を得る．逆に箙 Q の表現から $\mathbb{C}Q$ 加群を得ることも容易である．これによって箙の表現と道代数上の加群を同一視し，以下区別しない．有限次元 $\mathbb{C}Q$ 加群 $V \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ に対し，その次元ベクトルを $\underline{\dim} V := (\dim V_i)_{i\in I} \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^I$ で定義する．与えられた $\underline{d} = (d_i)_{i\in I} \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^I$ に対し，群作用付き線形空間

$$E_{\underline{d}} := \bigoplus_{a\in\Omega} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_{a'}}, \mathbb{C}^{d_{a''}}) \quad \curvearrowleft \quad G_{\underline{d}} := \prod_{i\in I} GL(\mathbb{C}^{d_i})$$

[*5] まじめに書くと $(a_1, \dots, a_l)\cdot(a_{l+1}, \dots, a_{l+m}) = \delta_{{a_l}'', {a_{l+1}}'}(a_1, \dots, a_{l+m})$, $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}\epsilon_i$, $\epsilon_i \cdot (a_1, \dots, a_l) = \delta_{i,{a_1}'}(a_1, \dots a_l)$, $(a_1, \dots, a_l)\cdot\epsilon_i = \delta_{{a_l}'', i}(a_1, \dots a_l)$.

を考える．群 $G_{\underline{d}}$ の作用は共役 $(g_i)_{i\in I}:(f_a)_{a\in\Omega}\mapsto(g_{a''}\circ f_a\circ g_{a'}^{-1})_{a\in\Omega}$ で与えられる．空間 $E_{\underline{d}}$ は $\underline{\dim}V=\underline{d}$ なる $V\in\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ 全体の集合と思えて，群 $G_{\underline{d}}$ の作用は表現の間の同型に対応する．したがって，空間 $E_{\underline{d}}$ 上の $G_{\underline{d}}$ 軌道の集合 $E_{\underline{d}}/G_{\underline{d}}$ は次元ベクトル $\underline{d}$ の表現の同型類全体の集合と 1 : 1 に対応する．

定理 3.1 (Gabriel の定理)． (1) 箙 Q が有限型，すなわち任意の $\underline{d}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ に対して $|E_{\underline{d}}/G_{\underline{d}}|<\infty$ が成り立つための必要十分条件は，Q が Dynkin 箙であるとき，すなわち Q から向き付けを忘れて得られるグラフが ADE 型の Dynkin 図形に等しいときである．

(2) Q が Dynkin 箙のとき，対応する型のルート系の記号を用いて全単射 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^I\ni\underline{d}\leftrightarrow\sum_{i\in I}d_i\alpha_i\in\mathsf{Q}_+$ を定め，$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^I$ と Q_+ を同一視する．このとき，次元ベクトルをとる操作は $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ の直既約加群の同型類集合と正ルートの集合 $\mathsf{R}_+\subset\mathsf{Q}_+$ の間の 1 : 1 対応を引き起こす．

以下，Dynkin 箙 Q をひとつ固定する．定理 3.1 (2) より各正ルート $\alpha\in\mathsf{R}_+$ に対し $\underline{\dim}M_\alpha=\alpha$ なる直既約加群 $M_\alpha\in\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ が同型を除いてただ一つ存在する．任意の $M\in\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ が直既約加群たちの一意的な有限直和に同型であること（Krull-Schmidt の定理）と次元ベクトル $\underline{\dim}$ の加法性から次がわかる．

系 3.2. 対応 $\left[\bigoplus_{\alpha\in\mathsf{R}_+}M_\alpha^{\oplus m_\alpha}\right]\leftrightarrow(m_\alpha)$ は Dynkin 箙 Q の次元ベクトル β の表現の同型類全体の集合と，β の Kostant 分割の集合 $\mathrm{KP}(\beta):=\{(m_\alpha)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathsf{R}_+}\mid\sum_\alpha m_\alpha\alpha=\beta\}$ の間の 1 : 1 対応を与える．特に，$\beta=\sum_{i\in I}d_i\alpha_i$ のとき，空間 $E_{\underline{d}}$ の $G_{\underline{d}}$ 軌道は集合 $\mathrm{KP}(\beta)$ でラベル付けられる．

3.2 Auslander-Reiten 箙

一般に，Krull-Schmidt 性を持つ $\mathbb{C}$ 線形圏 $\mathcal{A}$[*6] に対してその Auslander-Reiten(AR) 箙とは以下のように定義される箙 $\Gamma(\mathcal{A})$ である：

- $\Gamma(\mathcal{A})$ の頂点集合は圏 $\mathcal{A}$ の直既約対象の同型類全体である；
- $\Gamma(\mathcal{A})$ において，直既約加群 X（の同型類）から Y（の同型類）への矢の数は X から Y への既約射の空間[*7]の次元に等しい．

この節では固定した Dynkin 箙 Q に対して，導来圏 $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ の AR 箙の記述を紹介する．最初に $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ の直既約対象の同型類集合が $\{M_\alpha[k]\mid\alpha\in\mathsf{R}_+,k\in\mathbb{Z}\}$ であることに注意する．ここで，$M_\alpha[k]$ は stalk 複体，すなわち以下で定義される：

$$H^i(M_\alpha[k]):=\begin{cases}M_\alpha & i=k\text{ のとき;}\\ 0 & \text{それ以外.}\end{cases}$$

Dynkin 箙 $Q=(I,\Omega)$ に対して，その高さ関数，すなわち写像 $\xi:I\to\mathbb{Z}$ であって $\xi_{a'}=\xi_{a''}+1$ が任意の矢 $a\in\Omega$ に対して成り立つようなものをひとつ取って固定する．ADE 型 Dynkin 図形が連結木であることから，そのような ξ は一斉に定数を加える不定性を除いて一意的に存在する．このとき，箙 Q の反復箙 (repetition quiver) $\widehat{Q}=(\widehat{I},\widehat{\Omega})$ を以下で定義される無限箙とする：

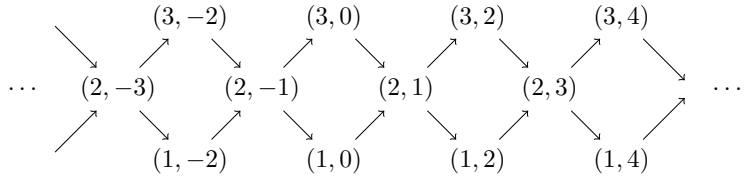
$$\widehat{I}:=\{(i,p)\in I\times\mathbb{Z}\mid p-\xi_i\in 2\mathbb{Z}\},\qquad\widehat{\Omega}:=\{(i,p)\to(j,p+1)\mid(i,p)\in\widehat{I},i\sim j\}^{*8}.$$

*6 各 2 対象についてその間の射の集合が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であることも仮定する．

*7 不可逆（section でも retraction でもない）かつ 2 つの不可逆射の合成では書けない射のなすベクトル空間（と思いたいもの）．

*8 この定義より反復箙 $\widehat{Q}$ 自身は Q の向き付け Ω には依存しない．

例えば，下図は A_3 型の反復箙を示している．

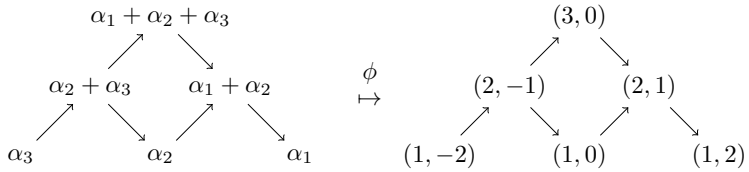


定理 3.3 (cf. [4])．各高さ関数 ξ に対して，箙の同型 $\phi : \widehat{Q} \xrightarrow{\cong} \Gamma(D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}))$ であって，各 $i \in I$ について $\phi(I_i[0]) = (i, \xi_i)$ を満たすものがただ一つ存在する．ここで $I_i \in \mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ は単純加群 M_{α_i} の移入包絡 (injective hull) である．

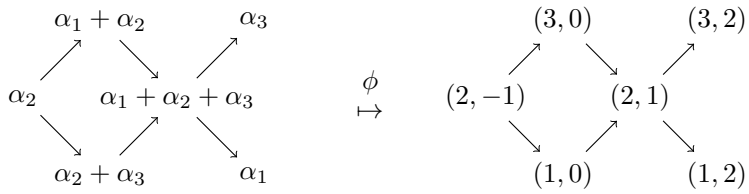
この同型をアーベル圏（標準的 t 構造の中心）$\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \subset D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に制限することによって，単射 $\mathsf{R}_+ \ni \alpha \mapsto \phi(\alpha) := \phi(M_\alpha[0]) \in \widehat{I}$ を得る．これは箙の向き付けに依存する．

例 3.4. A_3 型の場合．$\mathsf{R}_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (\alpha_1 + \alpha_2), (\alpha_2 + \alpha_3), (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}$ である．

(1) $Q = (1 \to 2 \to 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 0)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．



(2) $Q = (1 \to 2 \leftarrow 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 2)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．



3.3 Hernandez-Leclerc 圏 $\mathcal{C}_Q$

以上の準備の下で圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_Q$ を定義しよう．集合 $\widehat{I}$ が生成する自由モノイド $\mathscr{P}_+ := \mathbb{Z}_{\geq 0}\widehat{I}$ および，部分集合 $\phi(\mathsf{R}^+) \subset \widehat{I}$ が生成するその部分モノイド $\mathscr{P}_+^0 \subset \mathscr{P}_+$ を考える．対応

$$\mathscr{P}_+ \to (1 + u\mathbb{C}[u])^I\,; \quad \sum_{(i,p)\in\widehat{I}} l_{i,p}(i,p) \mapsto \left(\prod_p (1 - q^p u)^{l_{i,p}}\right)_{i\in I}$$

によってこれらを Drinfeld 多項式の集合 $(1 + u\mathbb{C}[u])^I$ （これは多項式の積に関するモノイド）の部分モノイドとみなす．定理 2.2 を用いて $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C} = (1 + u\mathbb{C}[u])^I$ と同一視する．このとき，圏 $\mathcal{C}$ の Serre 充満部分圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathcal{C}_Q$) を $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}_{\mathbb{Z}} = \mathscr{P}_+$ (resp. $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}_Q = \mathscr{P}_+^0$) を満たすものとして定義する．大雑把に言えば圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ から導来圏 $D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に対応する部分として切り出された部分圏であり，圏 $\mathcal{C}_Q$ は圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ の中でさらにアーベル圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \subset D^b(\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\mathrm{fd}})$ に対応する部分圏である．

さて，次の定理によって圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル圏としての骨格にあたる部分だと思える．

定理 3.5 (cf. [5])．圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ は圏 $\mathcal{C}$ のモノイダル部分圏であり，環として $K(\mathcal{C}) \cong \bigotimes_{a\in\mathbb{C}^\times/q^{2\mathbb{Z}}} K(\tau_a^*\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$ と分解する．ただし，τ_a は $U_q(L\mathfrak{g})$ の自己同型で $\tau_a^* L(\pi(u)) \cong L(\pi(au))$ を引き起こすものである．

冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}$ を Lie 代数に持つ冪単代数群を N_+ と書く．次の定理は圏 $\mathcal{C}_Q$ が N_+ の座標環 $\mathbb{C}[N_+]$ の圏化 (categorification) を与えることを示している．

定理 3.6 (Hernandez-Leclerc [6])．圏 $\mathcal{C}_Q$ は圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ のモノイダル部分圏である．さらに，環の同型 $K(\mathcal{C}_Q)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[N_+]$ であって，$\mathcal{C}_Q$ の単純対象の類全体と $\mathbb{C}[N_+]$ の双対標準基底 (dual canonical basis)[*9]の間の 1 : 1 対応を引き起こすものが存在する．

したがって，圏 $\mathcal{C}_Q$ のモノイダル圏構造は座標環 $\mathbb{C}[N_+]$ における双対標準基底の元の積に関する振る舞いによってある程度理解される．そして，その部分を記述するのが $\mathbb{C}[N_+]$ の団代数 (cluster algebra) 構造であると見ることができる．

4 主定理とその応用

4.1 圏 $\mathcal{C}_Q$ と箙多様体

対応 $\mathrm{KP}(\beta) \ni (m_\alpha) \mapsto \sum_\alpha m_\alpha \phi(\alpha) \in \mathscr{P}_+^0$ によって，集合 $\mathrm{KP}(\beta)$ をモノイド $\mathscr{P}_+^0$ の部分集合とみなす．この同一視の下で，$\mathscr{P}_+^0 = \bigsqcup_{\beta\in\mathsf{Q}_+} \mathrm{KP}(\beta)$ と書くことができ，この分解は $\mathrm{KP}(\beta)+\mathrm{KP}(\beta') \subset \mathrm{KP}(\beta+\beta')$ を満たす．圏 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ を $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}_{Q,\beta} = \mathrm{KP}(\beta)$ を満たす圏 $\mathcal{C}_Q$ の Serre 充満部分圏とする．このとき，直和分解 $\mathcal{C}_Q \cong \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+} \mathcal{C}_{Q,\beta}$ が成り立ち，モノイダル構造に関して $\mathcal{C}_\beta \otimes \mathcal{C}_{\beta'} \subset \mathcal{C}_{\beta+\beta'}$ が示される[*10]．以下 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ を固定し，直和因子 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ に焦点をあてることにする．

固定した元 $\beta = \sum_{i\in I} d_i\alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ に対して，対応 ϕ を用いて $\pi := \sum_{i\in I} d_i\phi(\alpha_i) \in \mathscr{P}_+^0 \subset (1+u\mathbb{C}[u])^I$ と定義する．この π を Drinfeld 多項式 $(\pi_i(u))_{i\in I}$ だと思ってその次数部分 $\lambda := \sum_{i\in I}(\deg\pi_i)\varpi_i \in \mathsf{P}_+$ を取り出し，定理 2.3 を思い出して対応する準同型 $\Phi_\lambda : U_q(L\mathfrak{g}) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda))$ を考える．そして $\widehat{R}_\beta := \varprojlim_k R_\lambda/\mathfrak{r}_\pi^k$ とおいて，準同型 Φ_λ の完備化

$$\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda)) \to \mathcal{K}^{\mathbb{G}(\lambda)}(Z(\lambda)) \otimes_{R_\lambda} \widehat{R}_\beta =: \widehat{\mathcal{K}}_\beta$$

を考察する．$R_\lambda = R(\mathbb{G}(\lambda))\otimes_A \mathbb{C}$ に注意して，$\mathbb{G}(\lambda)$ の 1 次元部分トーラス $T(\cong \mathbb{C}^\times) \subset \mathbb{G}(\lambda)$ で，$\mathfrak{r}_\pi$ に対応するものをひとつとる．局所化定理により，$\mathfrak{r}_\pi$ に対応する完備化を調べる際には，箙多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ の T 固定部分 $\mathfrak{M}_0(\lambda)^T$ とその上の T の $\mathbb{G}(\lambda)$ における中心化群（これは $G_{\underline{d}} \times T$ と同型）の作用が重要である．

興味深いことに，今の設定では次が成り立つ．

定理 4.1 (Hernandez-Leclerc [6])．$G_{\underline{d}}$ 同変同型 $\mathfrak{M}_0(\lambda)^T \cong E_{\underline{d}}$ が存在する．

空間 $E_{\underline{d}}$ とその上の $G_{\underline{d}}$ 作用は Gabriel の定理を用いて記述することができ（系 3.2），それを用いて準同型 $\widehat{\Phi}_\beta$ を詳しく解析することが可能である．その結果として以下の定理を示すことができる．

[*9] 量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ を用いて Lusztig, 柏原によって定義された良い基底.

[*10] これは Grothendiek 環のウェイト分解 $\mathbb{C}[N_+] = \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+} \mathbb{C}[N_+]_\beta$ に対応している.

定理 4.2 (F. [3]). (1) 準同型 $\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \widehat{\mathcal{K}}_\beta$ による引き戻しは，有限次元加群圏上で圏同値 $\widehat{\mathcal{K}}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \cong \mathcal{C}_{Q,\beta}$ を引き起こす．これによって圏 $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ を有限生成加群圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta} := \widehat{\mathcal{K}}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の充満部分圏とみなせる．

(2) 圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta}$ は箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)^T \to E_{\underline{d}}$ の幾何学的性質を反映して，アフィン最高ウェイト構造[*11] と呼ばれる良いホモロジー代数的構造を持つ．例えば，圏 $\widehat{\mathcal{C}}_{Q,\beta}$ は大域次元有限であり，任意の射影加群は変形局所 Weyl 加群たちによる有限長のフィルトレーションを持つ．

4.2 応用：Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性

A 型の古典的な Schur-Weyl 双対性の量子ループ版として $U_q(L\mathfrak{sl}_n)$ と GL 型アフィン Hecke 環の有限次元加群圏の間には良い関手を構成することができ，適当な充満部分圏の間の圏同値を引き起こすことが知られている（量子アフィン Schur-Weyl 双対性）．この構成を ADE へ一般化する形で，Kang-柏原-Kim [7] は任意の Dynkin 箙 Q に付随して，対応する箙 Hecke 環[*12]の有限次元加群圏と量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{g})$ の圏 $\mathcal{C}_Q$ との間に良いモノイダル完全関手を構成し，単純加群の同型類の上では 1 : 1 対応与えることを示した．この状況で，主定理 4.2 を応用して加群圏の構造を比較することにより，Kang-柏原-Kim の関手が圏同値であることを示すことができる ([3]).

参考文献

[1] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and their representations. *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, 59–78, CMS Conf. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[2] V. Chari and A. Pressley. Weyl modules for classical and quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 5:191–223, 2001.

[3] R. Fujita. Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types. preprint. arXiv:1710.11288.

[4] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. *Cambridge University Press*, 1988.

[5] H. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2):265–341, 2010.

[6] H. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 701:77–126, 2015.

[7] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II. *Duke Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.

[8] A. Kleshchev. Affine highest weight categories and affine quasi-hereditary algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4):841–882, 2015.

[9] H. Nakajima. Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(1):145–238, 2001.

[*11] 定義や基本的な性質については [8] を参照.

[*12] その加群圏が量子包絡環の圏化を与えるという点において，GL 型アフィン Hecke 環の一般化と思えるような代数である．Khovanov-Lauda-Rouquier 代数とも呼ばれる．

等差数列の存在性とフラクタル次元の関係性について

齋藤 耕太 (Kota Saito)

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　博士前期課程 1 年

m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

概 要

Szemerédi により正密度をもつ自然数の部分集合は任意の長さの等差数列を含むことが示された。この講演ではそれのフラクタル幾何学での類似を考える。結果として $\mathbb{R}$ の部分集合が，与えられた長さ k の“弱”等差数列を含むためのフラクタル次元の十分条件を得た。この結果により，長さ k が与えられたとき次元が 1 に十分近い実数の部分集合は“弱”等差数列を含むことがわかる。また，等差数列の高次元化を考えることで $\mathbb{R}^d$ の場合も同様の議論ができる。最後に数論的応用を述べる。本研究は Jonathan.M. Fraser と Han Yu の共同研究である。

1　はじめに

$k \geq 1$ を自然数とし，実数の部分集合 $\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ が任意の $j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して

$$a_j = a_0 + j\Delta$$

となるとき，$\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ を長さが k，公差が $\Delta > 0$ の等差数列 (arithmetic progression) という。また，任意の自然数 k に対して，集合 $F \subset \mathbb{R}$ が $P \subset F$ となる長さ k の等差数列 P が存在するとき，F は任意の長さの等差数列を含むという。

ここでは，与えられた集合に等差数列が存在するのかという問題を扱う。とくに，具体的な集合ではなく，ある条件を満たす集合が等差数列を含むか否かを考える。例えば，等差数列の存在定理で有名なもので Szemerédi の定理と呼ばれる定理がある。

Theorem 1.1 (Roth(長さ 3)，Szemerédi(長さ 4 以上) [R, Sz1, Sz2]) $F \subset \mathbb{N}$ が正密度をもつ，つまり，

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F \cap [1, 2, \ldots, N]}{N} > 0$$

を満たすとき，F は任意の長さの等差数列をもつ。

この定理のフラクタルでの類似を考える。自然数では密度を測ればいいが，連続濃度の場合には集合の‘複雑さ’を表すフラクタル次元を用いる。Hausdorff 次元や upper box 次元など多くのフラクタル次元が知られているが，私たちは Assouad 次元を用いた。

Definition 1.2 (Assouad dimension [A]) (X,d) を距離空間とする。空でない部分集合 $F \subset X$ の *Assouad* 次元を

$$\dim_A F \;=\; \inf\left\{ s \geq 0 \;:\; (\exists C>0)\ (\forall R>0)\ (\forall r \in (0,R))\ (\forall x \in F) \right.$$
$$\left. N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \;\leq\; C\left(\frac{R}{r}\right)^{s} \right\}$$

と定める。ただし，$B(x,R)$ は x を中心として半径 R の閉球で，$N(E,r)$ を直径 r 以下の開集合で集合 E を被覆できる最小個数と定義する。

Assouad 次元は 1979 年に Assouad によって導入されたフラクタル次元である ([L] が詳しい)。大きな特徴として，Assouad 次元は非常 '大きい' 次元である。より厳密に言うと，Assouad 次元は現在知られている全てのフラクタル次元の上界として与えられる。

ここで，次の図を見ていただきたい。

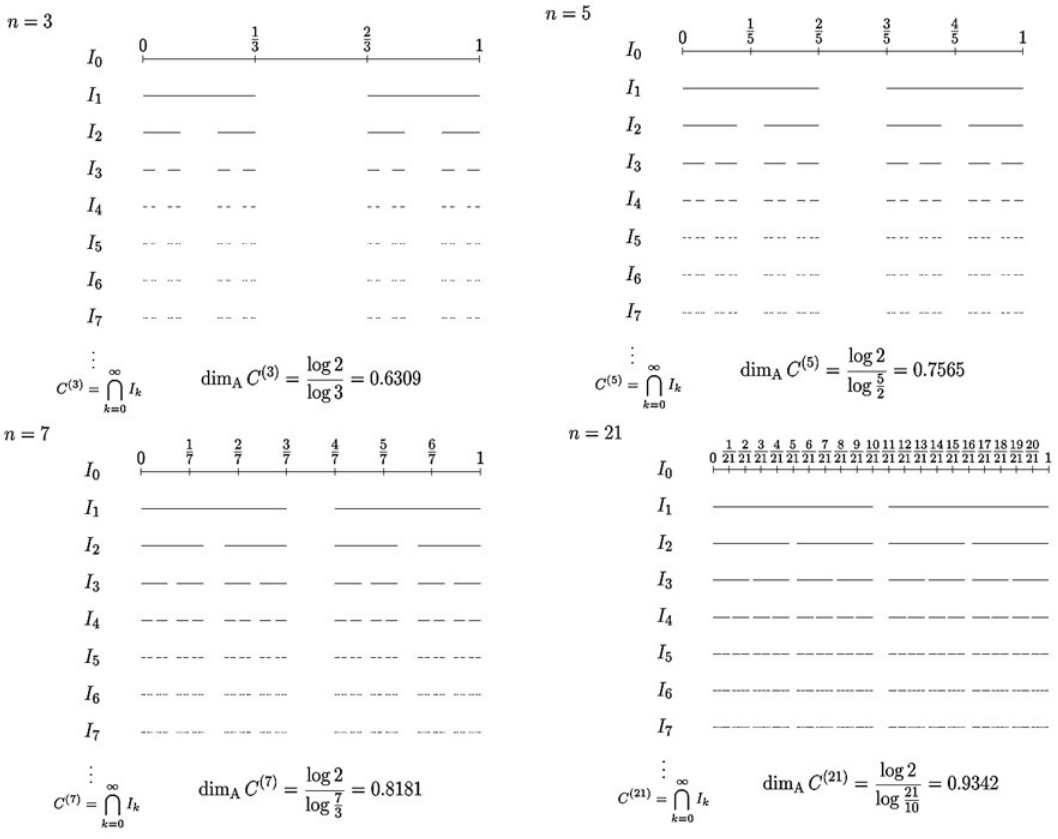


図 1: Cantor 集合

この図により，感覚的には Assouad 次元が 1 に近づけば近づくほど直線に近づいていくことがわかる。したがって，次が成り立つことが予想されるだろう。

Question 1.3 $F \subseteq \mathbb{R}$ に対して，$\dim_{\mathrm{A}} F = 1$ ならば F は任意の長さの等差数列を含むか。

しかし，この答えは否である。1998 年の Keleti により，Assouad 次元が 1 で (より厳密に言うと Hausdorff 次元が 1 で) 長さ 3 の等差数列を含まないような実数の部分集合が構成された [K]。すなわち，Assouad 次元と真の等差数列での Szemerédi の類似はできないことがわかる。

そこで，私たちは等差数列を弱くした (k,ε)-等差数列を導入した。

2 主結果

Definition 2.1 (Fraser, Saito, and Yu [FSY]) $\{a_j\}_{j=0}^{k-1} \subset \mathbb{R}$ とする。$k \geq 3$ と $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$|a_j - b_j| \leq \varepsilon\Delta$$

となる長さ k，公差 $\Delta > 0$ の等差数列 $\{b_j\}_{j=0}^{k-1}$ が存在するとき，$\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ を (k,ε)-等差数列という。

つまり，(k,ε)-等差数列とは等差数列で近似できる列のことをいう。この (k,ε)-等差数列を用いて，次を示した。

Theorem 2.2 $F \subset \mathbb{R}$ とし， $k \geq 3$，$\varepsilon \in (0, 1/2)$ とする。F が (k,ε)-等差数列を含まないとき，

$$\dim_{\mathrm{A}} F \leq 1 + \frac{\log(1-1/k)}{\log\left(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil\right)}$$

が成り立つ。

また不等式がどれほど改善することができるのか表すために次の例を構成した。

Theorem 2.3 $k \geq 3$ とし， $\varepsilon \in (0,1)$ を $\varepsilon < (k-2)/4$ 満たすものとする。このとき，(k,ε)-等差数列を含まず，

$$\dim_{\mathrm{A}} F = \dim_{\mathrm{H}} F = \frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}}.$$

を満たす $F \subset \mathbb{R}$ が存在する。

これらの証明のアイデアは講演の際に述べる予定である。

Theorem 2.2と Theorem 2.3により，

$$D(k,\varepsilon) = \sup\{\dim_{\mathrm{A}} F \ : \ F \subset \mathbb{R} \text{ は } (k,\varepsilon)- \text{ 等差数列を含まない }\}$$

と定義したとき，

$$\frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}} \leq D(k,\varepsilon) \leq 1 + \frac{\log(1-1/k)}{\log\left(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil\right)}$$

が成り立つことがわかる。この不等式がどれだけ改善できるかが今後の課題である。また，講演では高次元化あるいは数論的応用について述べる予定である。

参考文献

[A] P. Assouad. Étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans Rn. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), **15**, A731–A734

[FSY] J.M. Fraser, K. Saito, and H. Yu. Dimensions of sets which uniformly avoid arithmetic progressions, *preprint*, available at: https://arxiv.org/abs/1705.03335

[K] T. Keleti. A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point, *Real Anal.*, Exchange 24 (1998/99), 843–844.

[L] J. Luukkainen. Assouad dimension: antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures, *J. Korean Math. Soc.*,**35**, (1998), 23–76

[R] K.F. Roth. On Certain Sets of Integers, *J. London Math. Soc.*, **28**, (1953), 104–109.

[Sz1] E. Szemerédi. On Sets of Integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*,**20**, (1969), 89–104

[Sz2] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, Collection of articles in memory of Jurii̇ Vladimirovič Linnik. *Acta Arith.*, **27**, (1975), 199–245.

$\mathcal{W}$ 代数の coproduct 構造

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
元良 直輝 (Naoki Genra) *

1 はじめに

有限次元簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，そのべき零元 f，複素数 k のデータに依存して定義される（アファイン）$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は，定義の煩雑さのため一般には生成元も関係式も知られていないが，様々な表現論や量子群を含む代数との関連から，その性質や表現論を調べることが可能である．本稿ではスクリーニング作用素による解析を通じて A 型の $\mathcal{W}$ 代数の coproduct と呼ぶべき構造について調べることができることを示す．

2 $\mathcal{W}$ 代数とは

Virasoro 代数とは

$$Vir = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$$

であって

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C, \quad [Vir, C] = 0.$$

によって定義される Lie 代数である．その表現圏には中心 C がスカラー倍（＝中心電荷）で作用する際に特別な値であれば fusion 積によってモジュラーテンソル圏の構造が入り，Verlinde 公式によって計算することができる．そうした興味深い表現圏を与えてくれる Virasoro 代数の一般化として考えられたのが $\mathcal{W}$ 代数である．Virasoro 代数は Lie 代数だったのに対して一般の $\mathcal{W}$ 代数は頂点代数構造を持つ．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が頂点代数とは，V の元 A に対して End$V$ 係数の形式的べき級数

$$A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \mathrm{End}V \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

が対応し，任意の $A, B \in V$ に対して

$$[A_{(m)}, B_{(n)}] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (A_{(j)}B)_{(m+n-j)}$$

などの関係式を満たすものである．$A(z)$ を $A \in V$ の場という．一般に $\mathcal{W}$ 代数のほとんどでこの関係式の右辺は無限和になり, 従って End$V$ の元として見做すしかない．特にその表現論を解析す

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

るのは非常に難しい．一番初めに発見された $\mathcal{W}$ 代数は Zamolodchikov による $\mathcal{W}_3$ 代数である [Z]. Fateev-Lukyanov らによってさらなる $\mathcal{W}$ 代数が発見され ([FL])，Feigin-Frenkel によって BRST 還元法と呼ばれるコホモロジーを用いて有限次元簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と複素数 k に依存して $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ が構成された [FF2]. $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2)$ は中心電荷が

$$c(k) = 1 - 6\frac{(k+1)^2}{k+2}$$

の Virasoro 代数であり，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3)$ は $\mathcal{W}_3$ 代数となる．最終的に Kac-Roan-Wakimoto によって $\mathfrak{g}$, k の他に $\mathfrak{g}$ のべき零元 f にも依るように一般化された [KRW]．これを $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と表し，

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = Vir, \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = \mathcal{W}_3$$

が成り立つ．一般に主べき零元 $f = f_{\mathrm{prin}}$ に対して $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\mathrm{prin}}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ である．さらに $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0)$ は $\mathfrak{g}$ のレベル k のアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ と見做せる．ここでアファイン Lie 代数とは

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}1$$

であって

$$[a \otimes f(t), b \otimes g(t)] = [a, b] \otimes f(t)g(t) + k(a|b)\operatorname*{Res}_{t=0} f'(t)g(t)dt$$

で定義される Lie 代数である．ただし $(a|b)$ は正規化された $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式とする．

3　スクリーニング作用素

$\mathcal{W}$ 代数は BRST 還元法による 0 次コホモロジーとして定義されるため，生成元や関係式を知ろうと思うとそのコホモロジー類を計算しなければならないがこれは一般にほとんど不可能である．よって $\mathcal{W}$ 代数の代数構造を知るにはなんらかの別のアプローチを考える必要があり，ここではスクリーニング作用素を用いた別構成法を与える．スクリーニング作用素とは Fateev-Lukyanov による $\mathcal{W}$ 代数の定義であり，Feigin-Frenkel は，BRST 還元法による定義から同じものを再構成できることを示した [FF3]. 具体的には $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 代数 $(=\hat{\mathfrak{h}})$ の Fock 空間 $\mathcal{H}$ の中で $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ が

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{\alpha \in \Pi} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{k+h^\vee}} \int \alpha(z)} dz \subset \mathcal{H}.$$

として構成される．ただし k は独立変数と見做し，Π は単純ルートの集合，$h^\vee$ は双対 Coxeter 数，$\alpha(z)$ は $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ と Killing 形式で対応する $\mathfrak{h}$ の元によって定まる $\mathcal{H}$ の場とする．右辺の作用素たちをスクリーニング作用素と呼ぶ．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元はこの構成法を介して計算することができる．これを一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に対しても拡張することは自然に考えられる．

定理 3.1 ([G1])．一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に対しても $\mathfrak{g}$ のある簡約 Lie 部分代数 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ のアファイン化 $\hat{\mathfrak{r}}$ の表現空間（=アファイン頂点代数 $V(\mathfrak{r})$）と $\beta\gamma$ システムと呼ばれる頂点代数 $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ のテンソル積の中でスクリーニング作用素を用いて構成できる．

一般化するにあたってアファイン頂点代数が現れたことで空間が複雑になり，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ の時ほどスクリーニング作用素が簡単に計算することができない．そこでアファイン頂点代数をもっと簡単な空間に埋め込むことでスクリーニング作用素を計算することを考える．次節以降ではその適切な空間として脇本表現を考えればいいことを明らかにする．

4　アファイン Lie 代数の脇本表現

$\mathfrak{g}$ と k に付随するアファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現でもある．一般に $\hat{\mathfrak{g}}$ の（適切な条件を満たした）加群 M に対して BRST 還元法を施すことができ，特に $\mathcal{W}$ 代数は $V^k(\mathfrak{g})$ に BRST 還元法を施した時の 0 次コホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^0_{DS,f}(V^k(\mathfrak{g}))$$

に一致する．さらに構成から $H^0_{DS,f}(M)$ は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群の構造を持つこともわかる．そこでこの関手 $H^0_{DS,f}(?)$ を用いて $\mathcal{W}$ 代数の構造を解析しようとするのは自然である．こうした $\mathcal{W}$ 代数の表現の構成を $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現に対して適用することを考える．そこでまずは $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現を導入する．

$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群を G，上三角 Borel 部分群を B_+，下三角 Borel 部分群を B_- とする．旗多様体 G/B_- への G の左作用を考えると $\mathfrak{g}$ はベクトル場として G/B_- 上の正則関数に作用することがわかる．$N_+ = [B_+, B_+]$ とすると $N_+ \cdot \bar{e} \simeq N_+$ は G/B_- の極大稠密開集合であり，作用を制限することで Lie 代数の射 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{N_+}$ が得られる．ただし $\mathcal{D}_{N_+}$ は N_+ の正則関数上の微分環である．指数写像によって $\mathfrak{g}$ のべき零 Lie 部分代数 $\mathfrak{n}_+$ と N_+ を同一視すれば，その上の正則関数全体は N_+ 上の多項式環となることがわかる．$\mathfrak{sl}_2$ ならば $N_+ = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ であり $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$\rho(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(h) = -2x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(f) = -x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

となる．さらに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対 $\mathfrak{h}^*$ の元 $\chi \in \mathfrak{h}^*$ による捻り

$$\rho_\chi(e) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho_\chi(h) = -2x\frac{\partial}{\partial x} + \chi(h), \quad \rho_\chi(f) = -x^2\frac{\partial}{\partial x} + \chi(h)x$$

を加えることもできる．この ρ_χ のアファイン版を考える．$\mathcal{D}_{N_+}$ は

$$[\partial/\partial x, x] = 1, \quad [\partial/\partial x, \partial/\partial x] = [x, x] = 0$$

によって定義されているので，そのアファイン類似

$$[a_m, a_n^*] = \delta_{m+n,0}, \quad [a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0$$

を満たす a_n, a_n^* で生成される代数 (=無限次元 Weyl 代数) を考える．一般には a_n, a_n^* を $\dim N_+$ 個のペアだけ用意して定義する．無限次元 Weyl 代数の Fock 空間を $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$，$\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 代数の Fock 空間 $\mathcal{H}$（$\mathfrak{h}^*$ による捻りに対応する）として Lie 代数の射 $\hat{\rho} : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H})$ が構成できる．さらに $\hat{\rho}$ は頂点代数の単射準同型

$$\hat{\rho} : V^k(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}$$

となる．$\mathfrak{sl}_2$ では

$$\hat{\rho}(e(z)) = a(z), \quad \hat{\rho}(h(z)) = -2 : a^*(z)a(z) : +b(z), \quad \hat{\rho}(f(z)) = - : a^*(z)^2 a(z) : +b(z)a^*(z) + k\partial_z a^*(z).$$

ただし $b(z)$ は $\mathcal{H}$ の h に対応する場であり，左辺の $u(z)$（$u \in \mathfrak{sl}_2$）は

$$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u \otimes t^n) z^{-n-1}.$$

さらに二つの場 $A(z), B(z)$ に対し $:A(z)B(z):$ は

$$:A(z)B(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{m\geq 0}B_{(n)}A_{(m)}+\sum_{m<0}A_{(m)}B_{(n)})z^{-m-n-2}$$

で定義される場である．以上の構成から $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-加群になり，頂点代数構造を持つ．$\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現という [W, FF1]． 一般には Heisenberg 代数の最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_\lambda$（$\lambda\in\mathfrak{h}^*$）に対して $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_\lambda$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-加群となりこれも脇本表現と呼ぶ．$V^k(\mathfrak{g})$ は $\hat{\rho}$ により $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}$ の中に埋め込まれ，さらに Feigin-Frenkel によってその像は（k を独立変数と見做せば）スクリーニング作用素によって記述できる：

$$V^k(\mathfrak{g})\simeq\bigcap_{\alpha\in\Pi}\mathrm{Ker}\ S_\alpha.$$

ただし $S_\alpha:\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}\to\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$ は

$$S_\alpha=\int\hat{\rho}^R(e_\alpha(z))\ \mathrm{e}^{\int\lambda_\alpha(z)}dz$$

（$\lambda_\alpha=-\alpha/(k+h^\vee)\in\mathfrak{h}^*$）で定義される．ここで e_α は $\alpha\in\Pi$ に対応するルートベクトル，$\hat{\rho}^R$ は N_+ の自分自身への右作用から誘導された Lie 代数の反準同型 $\rho^R:\mathfrak{n}_+\to\mathcal{D}_{N_+}$ のアファイン版である．以上より次の完全系列を得る：

$$0\to V^k(\mathfrak{g})\xrightarrow{\hat{\rho}}\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}\xrightarrow{\oplus S_\alpha}\bigoplus_{\alpha\in\Pi}\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}. \tag{1}$$

5 $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現

N_+ に適切な座標系を与えることで関手 $H^0_{DS,f}(?)$ を完全系列 (1) に施した結果が

$$0\to\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)\xrightarrow{\hat{\mu}}\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})\xrightarrow{\oplus Q_\alpha}\bigoplus_{\alpha\in\Pi}\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

と計算できる．ここで $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}$ は $\mathfrak{r}_+=\mathfrak{n}_+\cap\mathfrak{r}$ の無限次元 Weyl 代数の Fock 空間，$F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ は定理 3.1 で現れた $\beta\gamma$ システム，Q_α は S_α から誘導されたスクリーニング作用素である．この $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$-加群 $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現と呼ぶ．

定理 5.1 ([G2])．Q_α は S_α の式から計算して陽に計算できる．

したがって

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)\simeq\bigcap_{\alpha\in\Pi}\mathrm{Ker}\ Q_\alpha$$

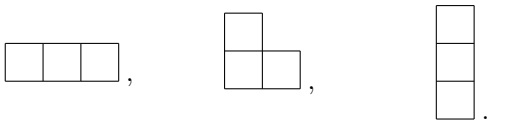
と Q_α の具体形を用いて $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の生成元を計算することができる．さらにここで得られた Q_α の一部をとってきて共通核を考えると $V(\mathfrak{r})\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ に一致し，残りのスクリーニング作用素は定理 3.1 のものと（出自は異なるにもかかわらず）完全に一致することが証明できる．したがって定理 5.1 は定理 3.1 の陽な表示を与えることになっている．特に $f=f_{\mathrm{prin}}$ の時，これは Feigin-Frenkel の結果に一致する．

6 Coproduct 構造

$\mathfrak{gl}_n$ のべき零元 f_1 と f_2 が $GL_n(\mathbb{C})$ の作用で共役ならば $\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_1)$ と $\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_2)$ は同型になる．$\mathfrak{gl}_n$ のべき零元の共役類は Jordan 標準形で分類され，n の分割＝ Young 図形を用いて表せる．$n = 3$ ならば

$$f \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

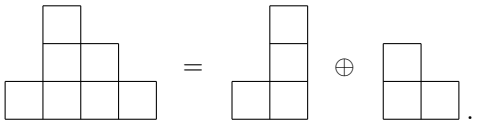
3 の分割: (3), (2, 1), (1, 1, 1),

Young 図形: 

Young 図形の箱の横へのずらしを考えたい．上の例では真ん中の図形のみ次のようにずらせる．



ずらされた図形をピラミッドと呼ぶ．ピラミッド $\mathcal{P}$ を縦のラインに沿って二つのピラミッド $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ に分割できるとき $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ と表す．. 例えば



ピラミッド $\mathcal{P}$ に対して元の Young 図形に対応する $\mathfrak{gl}_n$ のべき零元を $f_{\mathcal{P}}$ として，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, f_{\mathcal{P}})$ とする．

定理 6.1. 任意のピラミッドの分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ を考える．
(1) 頂点代数の射

$$\Delta : \mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \to \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}, \mathcal{P}_1) \otimes \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}, \mathcal{P}_2)$$

が存在する．ただし n_i は $\mathcal{P}_i$ に含まれる箱の数，k_i は $k + n = k_1 + n_1 = k_2 + n_2$ を満たす．
(2) Δ は coassociative である．
(3) さらに k が独立変数（または generic な値）のとき Δ は単射である．

証明. $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現を用いれば独立変数 k に対し

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n, \mathcal{P}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}. \tag{3}$$

定理 5.1で Q_α の式を具体形を用いることで,

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1}) \simeq \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}, \quad \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2}) \simeq \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i} \tag{4}$$

となることがわかる．一方で Q_{α_i} と Q_{α_j} は $|i-j|>1$ なら可換だから完全系列

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i} \to \bigcap_{i=1}^{n_1-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i} \otimes \bigcap_{i=n_1+1}^{n-1} \mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i} \xrightarrow{Q_{\alpha_{n_1}}} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_{\alpha_{n_1}}} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \tag{5}$$

を得る．(3)(4) と (5) によって (5) の最初の単射準同型が（独立変数 k での）Δ である．一般の値 k に対しては evaluation すればよいが，その場合は単射性が非自明になることに注意する．示していないのは coassociativity だが，これは N_+ にうまく座標を入れ直すことで特別な場合には定理 5.1 から，一般の場合には定理 3.1 で構成したスクリーニング作用素との compatibility を用いることで証明される． □

参考文献

[FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.

[FF1] B. L. Feigin, E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43(5):221-222, 1988.

[FF2] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.

[FF3] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.

[G1] N. Genra. Screening Operators for $\mathcal{W}$-algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):2157–2202, 2017.

[G2] N. Genra. Coproducts for Affine $\mathcal{W}$-algebras. in preparation.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[W] M. Wakimoto. Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104:605–609, 1986.

[Z] A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347–359, 1985.

ARITHMETIC AND DYNAMICAL DEGREES OF SEMIABELIAN VARIETIES

YOHSUKE MATSUZAWA (JOINT WORK WITH KAORU SANO)
松澤陽介 (佐野薫との共同研究)

Let X be a smooth quasi-projective variety and $f\colon X \dashrightarrow X$ a rational self-map, both defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. Having studied the arithmetic of the discrete dynamical system $f\colon X \dashrightarrow X \dashrightarrow X \dashrightarrow \cdots$, Silverman introduced the notion of arithmetic degree in [6], which measures the growth rate of height functions along the f-orbits. Take a smooth projectivization $\overline{X}$ of X and fix a Weil height function $h_{\overline{X}}$ on $\overline{X}$ associated with an ample divisor (good references for height functions are [1, 2]). Write $h_X = h_{\overline{X}}|_X$. Consider a point $x \in X$ such that for all $n \geq 0$, $f^n(x)$ is not contained in the indeterminacy locus of f. The *arithmetic degree* of f at x is

$$\alpha_f(x) = \lim_{n\to\infty} \max\{h_X(f^n(x)), 1\}^{1/n}$$

provided that the limit exists. This, of course, measures the exponential growth rate of $h_X(f^n(x))$ as n goes to infinite and is independent of the choice of $\overline{X}$ and $h_{\overline{X}}$. Kawaguchi-Silverman proved the existence of the limit when X is projective and f is a morphism [3]. The convergence in full generality is still open.

When f is dominant, it is conjectured in [6], [4, Conjecture 6] that the arithmetic degree of any Zariski dense orbits are equal to the first dynamical degree δ_f of f. This is the Kawaguchi-Silverman conjecture, and we abbreviate it as KSC. Here, the first dynamical degree is a birational invariant of f which measures the geometric complexity of the dynamical system. When X is projective and f a surjective morphism, δ_f is equal to the spectral radius of the linear map $f^*\colon N^1(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} \longrightarrow N^1(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ where $N^1(X)$ is the group of divisors modulo numerical equivalence.

Let $A(f)$ be the set of arithmetic degrees of f, i.e.

$$A(f) = \{\alpha_f(x) \mid P \in X\}$$

when we know $\alpha_f(x)$ exists for all $x \in X$. Keeping the conjecture in mind, we expect that we can describe this set in terms of geometric data of f. When X is a toric variety and f is a self-rational map on X that is induced by a group homomorphism of the algebraic torus, the set $A(f)$ is completely determined by the matrix defining f [6, 5].

Graduate school of Mathematical Sciences, the University of Tokyo.

We prove KSC for self-morphisms of semi-abelian varieties and determine the set $A(f)$.

Theorem 1. *Let X be a semi-abelian variety and $f\colon X \longrightarrow X$ a self-morphism (not necessarily surjective), both defined over $\overline{\mathbb{Q}}$.*

(1) *Suppose f is surjective. Then for any point $x \in X$ with Zariski dense f-orbit, we have $\alpha_f(x) = \delta_f$.*
(2) *For every $x \in X$, the arithmetic degree $\alpha_f(x)$ exists. If we write $f = T_a \circ g$ where T_a is the translation by a point $a \in X$ and g is a group homomorphism, then $A(f) = A(g)$.*
(3) *Suppose f is a group homomorphism. Let $F(t)$ be the monic minimal polynomial of f as an element of $\mathrm{End}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ and*

$$F(t) = t^{e_0}F_1(t)^{e_1}\cdots F_r(t)^{e_r}$$

the irreducible decomposition in $\mathbb{Q}[t]$ where $e_0 \geq 0$ and $e_i > 0$ for $i = 1, \ldots, r$. Let $\rho(F_i)$ be the maximum among the absolute values of the roots of F_i. Then we have

$$A(f) \subset \{1, \rho(F_1), \rho(F_1)^2, \ldots, \rho(F_r), \rho(F_r)^2\}.$$

More precisely, set

$$X_i = f^{e_0}F_1(f)^{e_1}\cdots F_{i-1}(f)^{e_{i-1}}F_{i+1}(f)^{e_{i+1}}\cdots F_r(f)^{e_r}(X).$$

Define

$$A_i = \begin{cases} \{\rho(F_i)\} & \text{if } X_i \text{ is an algebraic torus,} \\ \{\rho(F_i)^2\} & \text{if } X_i \text{ is an abelian variety,} \\ \{\rho(F_i), \rho(F_i)^2\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then we have

$$A(f) = \{1\} \cup A_1 \cup \cdots \cup A_r.$$

Theorem 2. *Let X be a semi-abelian variety and $f\colon X \longrightarrow X$ a surjective morphism both defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. Write $f = T_a \circ g$ where T_a is the translation by $a \in X$ and g is an isogeny. Suppose that the minimal polynomial of g has no irreducible factor that is a cyclotomic polynomial. Then there exists a point $b \in X$ such that, for any $x \in X$, the following are equivalent:*

(1) $\alpha_f(x) = 1$;
(2) $\#\, O_f(x) < \infty$;
(3) $x \in b + X(\overline{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$.

Here $X(\overline{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ is the set of torsion points.

Remark 3. It is easy to see that when f is an isogeny, we can take $b = 0$.

To prove the above theorems, we calculate the first dynamical degrees of self-morphisms of semi-abelian varieties.

Theorem 4. *Let X be a semi-abelian variety over an algebraically closed field of characteristic zero.*

(1) *Let $f\colon X \longrightarrow X$ be a surjective group homomorphism. Let*

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow X \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

be an exact sequence with T a torus and A an abelian variety. Then f induces surjective group homomorphisms

$$f_T := f|_T\colon T \longrightarrow T$$
$$g\colon A \longrightarrow A$$

with $g \circ \pi = \pi \circ f$. Then we have

$$\delta_f = \max\{\delta_g, \delta_{f_T}\}$$

Moreover, let P_T and P_A be the monic minimal polynomials of f_T and g as elements of $\mathrm{End}(T)_{\mathbb{Q}}$ and $\mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}}$ respectively. Then, $\delta_{f_T} = \rho(P_T)$ and $\delta_g = \rho(P_A)^2$.

(2) *Let $f\colon X \longrightarrow X$ be a surjective homomorphism and $a \in X$ a point. Then $\delta_{T_a \circ f} = \delta_f$.*

Remark 5. The description of δ_{f_T} and δ_g in Theorem 4(1) might be well-known.

References

[1] Bombieri, E., Gubler, W., *Heights in Diophantine geometry*, Cambridge university press, 2007.

[2] Hindry, M., Silverman, J. H., *Diophantine geometry. An introduction*, Graduate Text in Mathematics, no. 20, Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 5009–5035.

[4] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 21–48.

[5] Lin, J-L., *On the arithmetic dynamics of monomial maps*, arXiv:1704.02661.

[6] Silverman, J. H., *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.

[7] Silverman, J. H., *Arithmetic and dynamical degrees on abelian varieties*, preprint, 2015, http://arxiv.org/abs/1501.04205

Graduate school of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan

E-mail address: myohsuke@ms.u-tokyo.ac.jp

高さ関数の漸近挙動と力学系的 MORDELL-LANG 型の問題について

佐野　薫 (KAORU SANO)

1. Introduction

この原稿では $\overline{\mathbb{Q}}$ と書けば $\mathbb{Q}$ の代数閉包を表すことにする。X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された滑らかな射影的代数多様体とし、$f\colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された自己全射とする。このとき X の $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点 $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を f で繰り返し送ることで、数論的な複雑さである高さ（定義 2.3）の漸近挙動を調べるという問題が考えられる。これは例えばアーベル多様体の標準高さの定義にも本質的に関わっている問題であり、自己射と相性の良い関数を得るのに非常に有効である。

高さの漸近挙動に関して、今回次のような結果を得た。

定理 1.1 (主定理)**.** $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、その算術次数が $\alpha_f(x) > 1$ を満たすとき、ある非負整数 $t_f(x)$ が存在して、$n \to \infty$ の時に

$$h_H(f^n(P)) \asymp n^{t_f(P)}\alpha_f(P)^n$$

を満たす。

2 節で記号と定義について詳しく述べる。Bell-Ghioca-Tucker によって提出された力学系的 Mordell-Lang 型の予想を 4 節で紹介し、主定理がこの問題に応用できることを 5 節で紹介する。

2. 記号と定義の準備

定義 2.1 (代数体のノルム)**.** K を代数体、すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする。このとき K の各元は $\mathbb{Q}$ 係数のモニック多項式の根となるが、特に $\mathbb{Z}$ 係数のモニック多項式の根であるようなもの全体の集合を $\mathcal{O}_K$ とする。すると $\mathcal{O}_K$ は単位元を持つ可換環になる。

$x \in K$ とする。

(1) 体の埋め込み $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$|x|_\sigma := |\sigma(x)|$$

とする。ここで右辺の $|\cdot|$ は複素数の通常の絶対値である。

(2) P を $\mathcal{O}_K$ の 0 でない素イデアルとする。このとき $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ について

$$e_P(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \in P^n\}$$

と置いて $|x|_P$ を

$$|x|_P := \#(\mathcal{O}_K/P)^{-e_P(x)}$$

で定める。一般に $x \in K$ のときは $x = a/b$ $(a, b \in \mathcal{O}_K)$ と表して

$$|x|_P = \frac{|a|_P}{|b|_P}$$

で定め、また $|0|_P := 0$ とする。

$M_K := \{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}\} \cup \{P : \mathcal{O}_K$の零でない素イデアル$\}$ とする。

定義 2.2 (射影空間の高さ関数)**.** K が代数体のとき $x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_N] \in \mathbb{P}^N(K)$ つまり各 i について $x_i \in K$ なる斉次座標が取れる点について、そのような斉次座標を固定し、x の対数的ナイーブ高さ $h_{nv}(x)$ を

$$h_{nv}(x) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \|x\|_v$$

で定める。ここで $\|x\|_v$ は

$$\|x\|_v := \max_{0 \le i \le N} \{|x_i|_v\}$$

で定まる量である。

定義 2.3. X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された滑らかな射影代数多様体とする。H を X 上の非常に豊富な因子とする。H に付随する埋め込み $\phi_{|H|}\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を固定する。このとき $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ の H に付随する（Weil の対数的）高さを

$$h_H(x) := h_{nv}(\phi_{|H|}(x))$$

で定める。

注意 2.4. X を射影空間に埋め込んで X の点を射影空間の点だとみなして高さを定義するのだと思っても同じことであるから、もし因子に不慣れなのであればそう思っても差支えない。

注意 2.5. H に付随する高さ関数は埋め込みの固定の仕方に応じて変化してしまうが、そのずれは高々有界関数である。また射影空間の場合のナイーブ高さについても、自己同型で点を移してから高さを測ると一般には元の高さとずれるが、それもまた高々有界関数のずれである。

注意 2.6. 非常に豊富な因子に限らず一般の因子に対しても有界関数の差を除いて一意に高さ関数が定義できることが知られており、ピカール群 $\mathrm{Pic}(X)$ から $X(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の（有界関数の差を除いた）実数値関数全体の空間への準同型写像がある。この準同型写像は Weil の height machine と呼ばれる。

実際に主定理を証明するときには豊富な因子に対する高さだけではなく height machine（をさらに $\mathbb{C}$ 上に拡張したもの）が必要となるが、本原稿では詳しくは述べない。

定義 2.7. $f\colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上の自己全射とする。X 上の（非常に）豊富な因子 H とそれに付随する高さ関数 h_H を固定す

る。また $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して $h_H^+(x) := \max\{1, h_H(x)\}$ とおく。このとき x の f に関する算術次数 $\alpha_f(x)$ を

$$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} h_H^+(f^n(P))^{1/n}.$$

で定める。

注意 2.8. より一般に f が支配的な自己有理写像の場合にも、x の f による軌道が定義できるときには算術次数は定義できるが、一般には極限が収束することはまだ知られていない。本原稿で扱うのは f が自己全射の場合だけであり、その場合には極限が収束することが知られている。（[KS] を見よ。）また、算術次数が H や h_H の選び方に依らないこともわかる。

3. 主定理

定理 3.1. 記号は *2* 節の通りとする。$x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、その算術次数が $\alpha_f(x) > 1$ を満たすとき、ある非負整数 $t_f(x)$ が存在して、$n \to \infty$ の時に

$$h_H(f^n(x)) \asymp n^{t_f(x)}\alpha_f(x)^n$$

を満たす。

4. 力学系的 Mordell-Lang（型）予想

予想 4.1 (力学系的 Mordell-Lang 予想, [GT, Conjecture 1.7])**.** X を準射影的な複素代数多様体とする。$f\colon X \longrightarrow X$ を X の $\mathbb{C}$ 上の自己射とする。このとき $\mathbb{C}$ 有理点 $x \in X(\mathbb{C})$ と閉部分多様体 $Y \subset X$ について、集合

$$S_f(x, Y) := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^n(x) \in Y(\mathbb{C})\}$$

はある非負整数 a_i, b_i によって

$$\{a_i + b_i\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と表せる集合の有限和である。

定理 4.2 ([BGT1, Theorem 1.3])**.** もし $f\colon X \longrightarrow X$ がエタール射であれば予想 *4.1* は正しい。

さらに [BGT2, Question 5.11.0.4] において次の予想が提出された。

予想 4.3 (力学系的 Mordell-Lang 型予想, [BGT2, Question 5.11.0.4])**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された射影多様体、H を X 上の豊富な $\mathbb{R}$-因子とする。$f, g\colon X \longrightarrow X$ がともに X の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されたエタール射であって、ある実数 $\delta_f, \delta_g > 1$ について $f^*H \equiv \delta_f H$ 及び $g^*H \equiv \delta_g H$ が $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ の元として成り立っていると仮定する。このとき任意の 2 点 $x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、集合

$$S_{f,g}(x, y) := \{(m, n) \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は、ある非負整数 $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$\{(a_i + b_i\ell, c_i + d_i\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と表せる集合の和集合である。

Bell-Ghioca-Tucker は予想 4.3 を $\delta_f = \delta_g$ の場合に証明した。([BGT2, Theorem 5.11.0.1] を見よ。)

5. 主定理の応用と予想

この節で述べる主定理の応用及び予想は、予想 4.3 を一般のエタール全射に拡張したものである。エタール性を課しているのは単に予想 4.1 が解けているクラスで大きいものがエタール射の場合くらいしかないからであり、それ以上の理由は特にない。実際定理 5.1 でも、$f^p \times g^q \colon X \times X \longrightarrow X \times X$ と対角因子 $Y = \Delta \subset X \times X$ の組に対して予想 4.1 が成り立ってさえいれば、f や g がエタールである必要はない。

定理 5.1. X は *2* 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上のエタールな自己全射とする。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を、次の 2 条件を満たす点とする：

- ある $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $\alpha_f(x)^p = \alpha_g(y)^q > 1$
- $t_f(x) = t_g(y)$

ただしここで $t_f(x)$ と $t_g(y)$ は定理 *3.1* のものである。このとき集合

$$S_{f,g}(x,y) := \{(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は、ある整数 $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$\{(a_i + b_i\ell, c_i + d_i\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

表せる集合の有限和である。

予想 5.2. X は *2* 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上のエタールな自己全射とする。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を、$\alpha_f(x) > 1$ かつ $\alpha_g(y) > 1$ を満たし、かつ次の 2 条件の少なくとも一方を満たす点とする：

- ある無理数 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在して $\alpha_f(x) = \alpha_g(y)^r$
- $t_f(x) \neq t_g(y)$

ただしここで $t_f(x)$ と $t_g(y)$ は定理 *3.1* のものである。このとき集合

$$S_{f,g}(x,y) := \{(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は有限集合である。

定理 5.3. X は *2* 節の通りとする。$f, g \colon X \longrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された X 上の（エタールとは限らない）自己全射とする。ある豊富な $\mathbb{R}$-因子 H と実数 $\delta_f > 1$ があって $f^*H \equiv \delta_f H$ を満たし、かつ f と g が可換であると仮定する。$x, y \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ について、ある無理数 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在して $\alpha_f(x) = \alpha_g(y)^r$ をみたすならば、集合

$$S_{f,g}(x,y) := \{(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(x) = g^n(y)\}$$

は有限集合である。

References

[BGT1] Bell, J. P., Ghioca, D., Tucker, T. J., *The Dynamical Mordell-Lang problem for étale maps*, Amer. J. Math. **132** (2010), 1655-1675.

[BGT2] Bell, J. P., Ghioca, D., Tucker, T. J., *The Dynamical Mordell-Lang Conjecture* volume 210 of Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2016).

[GT] Ghica, D., Tucker, T. J., *Peroodic points, linearizing maps, and the dynamical Mordell-Lang problem*, J. Number Theory **129** (2009), 1392-1403.

[KS] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 5009-5035.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: ksano@math.kyoto-u.ac.jp

Folding procedure for Newton-Okounkov polytopes of flag varieties

東京工業大学理学院数学系 藤田 直樹 (Naoki Fujita)* †
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概 要

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている. 本稿では表現論と密接な関係を持つ旗多様体の Newton-Okounkov 凸体に着目し, folding と呼ばれる異なる種類のディンキン図形の間の関係が Newton-Okounkov 凸体にどのように反映されているのかについて考察する. 応用として B 型と C 型の結晶基底の間に存在するある種の類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与える.

1 導入

Newton-Okounkov 凸体は偏極多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり, Okounkov [20, 21, 22] によって導入された後 Kaveh-Khovanskii [12] および Lazarsfeld-Mustata [14] によって系統的な定義がなされ, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張として注目されている. 特に多面体となっている Newton-Okounkov 凸体を Newton-Okounkov 多面体という. Newton-Okounkov 多面体は元々の射影多様体の情報を数多く含んでいると考えられており, 実際にその理論を用いることでトーリック多様体への退化 (トーリック退化) や可積分系を構成することができる [1, 7].

本稿では表現論と密接な関係を持つ旗多様体の Newton-Okounkov 多面体を取り扱う. Kaveh [11] は旗多様体のある付値 (highest term valuation) に関する Newton-Okounkov 多面体がストリング・パラメトリゼーションという柏原結晶基底のあるパラメトリゼーションから作られる多面体 (ストリング多面体) と一致していることを見出した. 筆者は大矢浩徳氏との共同研究 [6] において, シューベルト多様体の列に沿って零点の位数を測っていくことにより得られる幾何学的により自然な付値に着目し, 対応する Newton-Okounkov 多面体もストリング多面体と一致していることを証明した. 本稿では, この多面体に古典型のディンキン図形の folding がどのように反映されているのかについて説明する. 具体的には B 型および C 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体をそれぞれ A 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体の切断および射影として実現する (ただし C 型の旗多様体の偏極は A 型の旗多様体の偏極から誘導されるものに限る). 応用として B 型と C 型の結晶基底の間に存在するある種の類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与える.

本稿の結果はシューベルト多様体の Newton-Okounkov 多面体や例外型の場合まで自然に拡張することができる. 本稿の詳細を記述した論文 [5] が Comm. Algebra に受理されている.

2 Newton-Okounkov 多面体

ここでは Newton-Okounkov 多面体の定義および応用について説明する ([1, 7, 12, 13] 参照). X を複素 N 次元既約正規射影多様体とし, 既約正規閉部分多様体の列

$$X_\bullet\colon X_N \subset X_{N-1} \subset \cdots \subset X_0 = X$$

であって, 各 $0 \leq k \leq N$ に対して $\dim_{\mathbb{C}}(X_k) = N-k$ となるものを考える. η_k を X_k の生成点とすると, 正規性より茎 $(\mathcal{O}_{X_{k-1}})_{\eta_k}$ は離散付値環である. $\mathrm{ord}_{X_k}\colon \mathbb{C}(X_{k-1}) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ を対応する付値とし, 極大イ

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp
†日本学術振興会特別研究員 (DC1)

デアルの生成元 $t_k \in (\mathcal{O}_{X_{k-1}})_{\eta_k}$ を固定する. このとき $X_\bullet$ に沿って零点および極の位数を測っていくことにより付値 $v_{X_\bullet}\colon \mathbb{C}(X)\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}^N$ が定まる:

$$v_{X_\bullet}(f) = (a_1, \ldots, a_N) \Leftrightarrow a_1 \coloneqq \mathrm{ord}_{X_1}(f),\ a_2 \coloneqq \mathrm{ord}_{X_2}((f/t_1^{a_1})|_{X_1}),\ \ldots$$

定義 2.1 ([7, 12, 13] 参照)**.** $\mathcal{L}$ を X 上の非常に豊富な直線束とし, 0 でない切断 $\tau \in H^0(X, \mathcal{L})$ を固定する. 半群 $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$ を

$$S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \coloneqq \bigcup_{k>0} \{(k, v_{X_\bullet}(\sigma/\tau^k)) \mid \sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) \setminus \{0\}\}$$

と定義する. さらにこの $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$ を含む最小の実閉錐を $C(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$ とし, 集合 $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau) \coloneqq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)\}$$

と定める. この $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$ を **Newton-Okounkov 凸体**といい, 多面体となっている Newton-Okounkov 凸体を **Newton-Okounkov 多面体**という.

次が Newton-Okounkov 多面体のトーリック退化に対する応用である.

定理 2.2 ([1, Theorem 1])**.** 半群 $S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$ が有限生成のとき, 射影多様体 X は (正規とは限らない) トーリック多様体

$$X_0 \coloneqq \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[S(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)])$$

に退化する; X_0 の正規化は Newton-Okounkov 多面体 $\Delta(X, \mathcal{L}, v_{X_\bullet}, \tau)$ に対応する正規トーリック多様体である.

3 ストリング多面体との関係

本節ではシューベルト多様体の列 $X_\bullet$ に関する付値 $v_{X_\bullet}$ と結晶基底の関係を与えた論文 [6] の結果を紹介する. 簡単のため A_n 型に限って話を進めよう.

$$G = SL_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A\colon (n+1)\text{-次複素正方行列} \mid \det(A) = 1\}$$

とし, $B \subset G$ を上三角行列全体のなす部分群 (ボレル部分群) とする. このとき商多様体 G/B を**旗多様体**という. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ を単位ベクトルとし, $1 \leq i \leq n+1$ に対して $E_i \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i$ で生成される $\mathbb{C}$-部分空間とする. このとき旗多様体 G/B は次の写像により $\mathbb{C}^{n+1}$ の旗全体のなす集合と同一視される:

$$\begin{aligned} G/B &\to \{(0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1 \leq i \leq n+1\}, \\ g \bmod B &\mapsto (0 \subset gE_1 \subset \cdots \subset gE_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A\colon (n+1)\text{-次複素正方行列} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ を G のリー代数とし, $1 \leq i, j \leq n+1$ に対して $E_{i,j}$ を (i,j)-成分のみ 1 で他の成分は 0 である $(n+1)$-次正方行列とする. このときリー代数 $\mathfrak{g}$ は

$$E_i \coloneqq E_{i,i+1},\ F_i \coloneqq E_{i+1,i},\ H_i \coloneqq E_{i,i} - E_{i+1,i+1},\ 1 \leq i \leq n,$$

で生成される; $\{E_i, F_i, H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を $\mathfrak{g}$ の **Chevalley 生成元**という. 集合 P_{++} を

$$P_{++} \coloneqq \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \lambda_1 > \cdots > \lambda_n > \lambda_{n+1} = 0\}$$

と定義する. 各 $\lambda \in P_{++}$ に対して G/B 上の直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を $\mathcal{L}_\lambda \coloneqq (G \times \mathbb{C})/B$ と定める; ここで B の $G \times \mathbb{C}$ への右作用は, $b \in B$ の対角成分を $d_1, \ldots, d_{n+1}$ としたとき,

$$(g, c) \cdot b \coloneqq (gb, d_1^{\lambda_1} \cdots d_{n+1}^{\lambda_{n+1}} c)$$

で与えられる.

命題 3.1. 集合 $\{\mathcal{L}_\lambda \mid \lambda \in P_{++}\}$ は G/B 上の非常に豊富な直線束全体の集合と一致する.

$[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$ とし, $N \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(G/B) = n(n+1)/2$ とする.

定義 3.2. 次の写像が双有理射となるような語 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in [n]^N$ を**簡約語**という:

$$\mathbb{C}^N \to G/B,\ (t_1, \dots, t_N) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_N F_{i_N}) \bmod B.$$

例 3.3. 次の語 $\mathbf{i}$ は簡約語である:

$$\mathbf{i} = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in [n]^N.$$

簡約語 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in [n]^N$ に対して, 上記の双有理射 $\mathbb{C}^N \to G/B$ を用いて関数体 $\mathbb{C}(G/B)$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$ と同一視する. $t_1, \dots, t_N$ を変数とする単項式たちの間の全順序 $\prec$ を次で定義する: $(a_1, \dots, a_N), (a'_1, \dots, a'_N) \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ に対し,

$$t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} \prec t_1^{a'_1} \cdots t_N^{a'_N} \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について, } a_N = a'_N, \dots, a_{k+1} = a'_{k+1},\ a_k < a'_k.$$

各 $1 \leq k \leq N$ に対して, 旗多様体 G/B の閉部分多様体 X_k を集合 $\{\exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_k F_{i_k}) \bmod B \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}\}$ のザリスキー閉包として定義する; X_k はシューベルト多様体と呼ばれる多様体であり, 既約かつ正規であることが知られている. $e \in G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ を単位行列とし, シューベルト多様体の列

$$X_\bullet \colon \{e \bmod B\} \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N = G/B$$

に関する付値 $v_{X_\bullet} \colon \mathbb{C}(G/B) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^N$ を $v_{\mathbf{i}}$ と書く. 上述の同一視 $\mathbb{C}(G/B) \simeq \mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$ のもとで, 付値 $v_{\mathbf{i}}$ は次のように計算することができる.

命題 3.4. $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f/g) = v_{\mathbf{i}}(f) - v_{\mathbf{i}}(g)$ であり,

$$f = c t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} + (\prec \text{に関する higher terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$$

に対して $v_{\mathbf{i}}(f) = (a_N, \dots, a_1)$ である; ただし $c \in \mathbb{C}^\times \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする.

例 3.5. $G = SL_3(\mathbb{C})$ とする. このとき $N = 3$ であり, $f = t_1 t_2 + t_3^2 \in \mathbb{C}(G/B) \simeq \mathbb{C}(t_1, t_2, t_3)$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f) = (0, 1, 1)$ となっている.

$\lambda \in P_{++}$ に対して最高ウェイト λ の既約最高ウェイト G-加群を $V(\lambda)$ とし, 最高ウェイトベクトルを $v_\lambda \in V(\lambda)$ とする. Borel-Weil の定理により大域切断のなす空間 $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ は双対加群 $V(\lambda)^* \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\lambda), \mathbb{C})$ と同型な G-加群である. Lusztig [16, 17, 18] および柏原 [8] は $V(\lambda)$ のある特別な $\mathbb{C}$-基底 $\{G^{\mathrm{low}}_\lambda(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$ を $\mathfrak{g}$ に付随する量子包絡代数を用いて構成した. この基底を**標準基底**または**下側大域基底**という. ここで $\mathcal{B}(\lambda)$ は次のような付加構造（結晶構造）を持っている:

$$\mathrm{wt} \colon \mathcal{B}(\lambda) \to \mathbb{Z}^{n+1},\ \varepsilon_i, \varphi_i \colon \mathcal{B}(\lambda) \to \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \tilde{e}_i, \tilde{f}_i \colon \mathcal{B}(\lambda) \to \mathcal{B}(\lambda) \cup \{0\},\ i \in [n];$$

$\mathcal{B}(\lambda)$ を**結晶基底**といい, 作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を**柏原作用素**という. $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ および $i \in [n]$ に対して次が成り立つ:

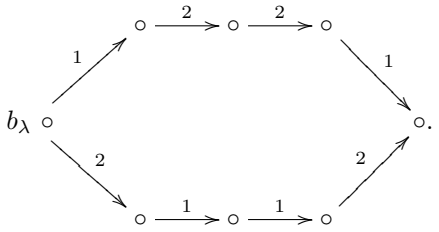
$$\begin{aligned}
&\mathrm{wt}(b_\lambda) = \lambda,\\
&\varepsilon_i(b) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\},\\
&\varphi_i(b) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\},\\
&e_i \cdot G^{\mathrm{low}}_\lambda(b) \in \mathbb{C}^\times G^{\mathrm{low}}_\lambda(\tilde{e}_i b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\lambda);\ \varphi_i(b') > \varphi_i(\tilde{e}_i b)} \mathbb{C} G^{\mathrm{low}}_\lambda(b'),\\
&f_i \cdot G^{\mathrm{low}}_\lambda(b) \in \mathbb{C}^\times G^{\mathrm{low}}_\lambda(\tilde{f}_i b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\lambda);\ \varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(\tilde{f}_i b)} \mathbb{C} G^{\mathrm{low}}_\lambda(b');
\end{aligned}$$

ここで $b_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ は $G^{\mathrm{low}}_\lambda(b_\lambda) \in \mathbb{C}^\times v_\lambda$ により定まる元であり, **最高ウェイト元**と呼ばれる.

定義 3.6 ([9] 参照)**.** 結晶 $\mathcal{B}$ の**結晶グラフ**とは, $\mathcal{B}$ を頂点集合とし次で定まる矢を持つ有向グラフのことである:

$$b \xrightarrow{i} b' \Leftrightarrow b' = \tilde{f}_i b.$$

例 3.7. $G = SL_3(\mathbb{C})$ とし, $\lambda = (2,1,0)$ とする. このとき結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の結晶グラフは次で与えられる:



定義 3.8 ([2, Section 3.2] および [15, Section 1] 参照)**.** $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in [n]^N$ を簡約語とする. $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ に対して $\Phi_{\mathbf{i}}(b) = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ を

$$\begin{aligned}
a_1 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_1}^a b \neq 0\},\\
a_2 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_2}^a \tilde{e}_{i_1}^{a_1} b \neq 0\},\\
&\vdots\\
a_N &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_{i_N}^a \tilde{e}_{i_{N-1}}^{a_{N-1}} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{a_1} b \neq 0\}
\end{aligned}$$

と定義する; この非負整数の組 $\Phi_{\mathbf{i}}(b)$ を b の $\mathbf{i}$ に関する**ストリング・パラメトリゼーション**という.

定義 3.9 ([11, Definition 3.5] および [15, Section 1] 参照)**.** $\mathbf{i} \in [n]^N$ を簡約語とし, $\lambda \in P_{++}$ とする. 部分集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^N$ を

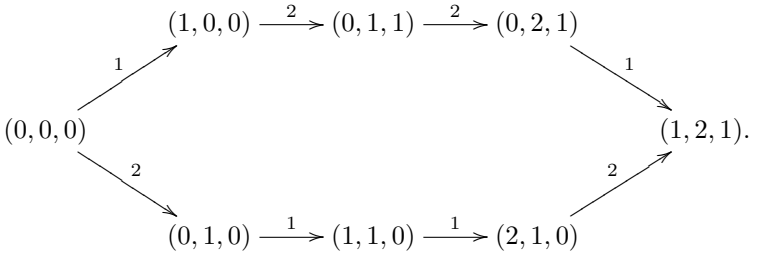
$$\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda) \coloneqq \bigcup_{k>0} \{(k, \Phi_{\mathbf{i}}(b)) \mid b \in \mathcal{B}(k\lambda)\}$$

と定義し, $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を含む最小の実閉錐とする. さらに集合 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \coloneqq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda)\}$$

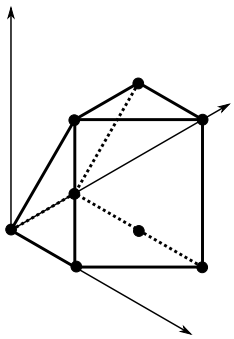
と定める. この集合 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を**ストリング多面体**という.

例 3.10. $G = SL_3(\mathbb{C})$ とし, $\lambda = (2,1,0)$ とする. このとき簡約語 $\mathbf{i} = (1,2,1)$ に関するストリング・パラメトリゼーション $\Phi_{\mathbf{i}} \colon \mathcal{B}(\lambda) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ は次で与えられる:



さらにストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は次の不等式系を満たす $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ 全体のなす集合と一致する:

$$0 \leq a_3 \leq 1,\ a_3 \leq a_2 \leq a_3 + 1,\ 0 \leq a_1 \leq a_2 - 2a_3 + 1.$$



$\tau_\lambda \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V(\lambda)^*$ を

$$\tau_\lambda(G_\lambda^{\mathrm{low}}(b)) \coloneqq \begin{cases} 1 & (b = b_\lambda), \\ 0 & (b \neq b_\lambda) \end{cases}$$

と定義する. τ_λ は G-加群 $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ における最低ウェイトベクトルとなっている. $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して $\mathbf{a}^{\mathrm{op}} \coloneqq (a_N, \ldots, a_1)$ とし, $H \subset \mathbb{R}^N$ に対して $H^{\mathrm{op}} \coloneqq \{\mathbf{a}^{\mathrm{op}} \mid \mathbf{a} \in H\}$ とする. 次が論文 [6] の主結果である.

定理 3.11 ([6, Corollary in Introduction])**.** $\mathbf{i} \in [n]^N$ を簡約語とし, $\lambda \in P_{++}$ とする. このとき Newton-Okounkov 多面体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}, \tau_\lambda)^{\mathrm{op}}$ はストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ と一致する.

4 固定点部分群

この節では本稿の主結果について説明する. 異なる型の代数群や結晶基底などを区別するため, G^{A_n} や $\mathcal{B}^{A_n}(\lambda)$ のように対応する型を添え字として付けることにする. $G^{A_{2n-1}} = SL_{2n}(\mathbb{C})$ に対して, 代数群の自己同型 $\omega\colon SL_{2n}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} SL_{2n}(\mathbb{C})$ を $\omega(A) \coloneqq w_0^{-1\,t}A^{-1}w_0$ と定義する; ここで

$$w_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ & \vdots & & \iddots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in SL_{2n}(\mathbb{C})$$

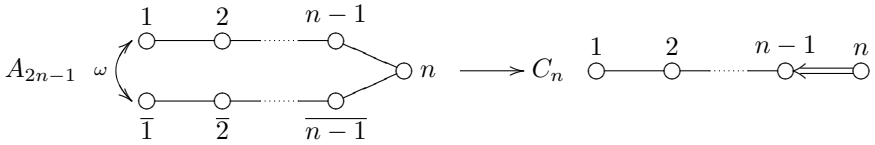
である. このとき固定点部分群

$$SL_{2n}(\mathbb{C})^\omega \coloneqq \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid \omega(A) = A\}$$

は w_0 により定まる $\mathbb{C}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \coloneqq {}^t\mathbf{x}w_0\mathbf{y}$ に関するシンプレクティック群

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2n}\}$$

と一致している. また固定点部分群 $B^{C_n} \coloneqq (B^{A_{2n-1}})^\omega$ は $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ のボレル部分群となっており, C_n 型の旗多様体 $Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}$ は自然に A_{2n-1} 型の旗多様体 $SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}$ の閉部分多様体と同一視できる. 以上のことは下図のようにディンキン図形の言葉で理解することができる: A_{2n-1} 型のディンキン図形を位数 2 の自己同型 ω で折りたたむ (folding) ことで C_n 型のディンキン図形が得られている.



A_{2n-1} 型および C_n 型のディンキン図形の頂点集合をそれぞれ上図のように $I \coloneqq \{i, \overline{i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ および $\breve{I} \coloneqq [n] = \{1, \ldots, n\}$ を用いて添え字付ける; ただし $\overline{n} \coloneqq n$ である. 写像 $\breve{I} \hookrightarrow I$, $i \mapsto i$, により $\breve{I}$ を I における ω-軌道の完全代表系とみなすことにする. このとき各 $i \in \breve{I}$ および $t \in \mathbb{C}$ に対して, $\omega(\exp(tF_i)) = \exp(tF_{\overline{i}})$ となっている. また $\omega(B^{A_{2n-1}}) = B^{A_{2n-1}}$ であるため, ω は旗多様体 $SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}$ の自己同型を誘導する.

$$(P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega} \coloneqq \{\lambda \in P_{++}^{A_{2n-1}} \mid \omega^*(\mathcal{L}_\lambda) = \mathcal{L}_\lambda\}$$

と書き, 写像 $(P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega} \to P_{++}^{C_n}$, $\lambda \mapsto \hat{\lambda}$, を $\mathcal{L}_{\hat{\lambda}} = \mathcal{L}_\lambda|_{Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}}$ により定義する. この写像は単射であることが知られている. $N \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n})$ とし, $\mathbf{i} = \mathbf{i}^C = (i_1, \ldots, i_N) \in \breve{I}^N$ を C_n 型の簡約語とする. 簡約語 $\mathbf{i}^C$ は A_{2n-1} 型の簡約語

$$\mathbf{i}^A = (i_{1,1}, \ldots, i_{1,m_{i_1}}, \ldots, i_{N,1}, \ldots, i_{N,m_{i_N}})$$

を誘導する; ただし各 $1 \leq k \leq N$ に対して,

$$(i_{k,1}, \ldots, i_{k,m_{i_k}}) \coloneqq \begin{cases} (i_k, \overline{i_k}) & (i_k = 1, \ldots, n-1), \\ (n) & (i_k = n) \end{cases}$$

である. これらの簡約語 $\mathbf{i}^C$ および $\mathbf{i}^A$ を用いて, 関数体 $\mathbb{C}(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n})$ および $\mathbb{C}(SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}})$ をそれぞれ有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_N)$ および $\mathbb{C}(t_{1,1}, \ldots, t_{1,m_{i_1}}, \ldots, t_{N,1}, \ldots, t_{N,m_{i_N}})$ と同一視する. 全射 $\mathbb{R}$-線形写像 $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \colon \mathbb{R}^{m_{i_1}+\cdots+m_{i_N}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^N$ を

$$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,m_{i_1}}, \ldots, a_{N,1}, \ldots, a_{N,m_{i_N}}) \coloneqq (a_{1,1} + \cdots + a_{1,m_{i_1}}, \ldots, a_{N,1} + \cdots + a_{N,m_{i_N}})$$

と定める. 次が本稿の主結果である.

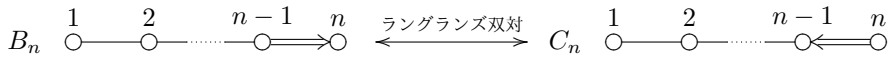
定理 4.1 (F.)**.** $\mathbf{i} \in \breve{I}^N$ を簡約語とし, $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega}$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}(\Delta(SL_{2n}(\mathbb{C})/B^{A_{2n-1}}, \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}^A}, \tau_\lambda)^{\mathrm{op}}) = \Delta(Sp_{2n}(\mathbb{C})/B^{C_n}, \mathcal{L}_{\hat{\lambda}}, v_{\mathbf{i}^C}, \tau_{\hat{\lambda}})^{\mathrm{op}}.$$

5 軌道リー代数

この節では B_n 型および D_{n+1} 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体との関係について説明する.

定義 5.1 ([3, 4] 参照)**.** 固定点部分リー代数 $\mathrm{Lie}((G^{A_{2n-1}})^{\omega}) = \mathrm{Lie}(Sp_{2n}(\mathbb{C})) = \mathfrak{g}^{C_n}$ のラングランズ双対 ${}^L(\mathfrak{g}^{C_n}) \simeq \mathfrak{g}^{B_n}$ を ω の**軌道リー代数**という.



上図のように B_n 型のディンキン図形の頂点集合も $\breve{I} = [n]$ を用いて添え字付ける. このとき, C_n 型の簡約語 $\mathbf{i}^C \in \breve{I}^N$ は B_n 型の簡約語 $\mathbf{i}^B \in \breve{I}^N$ とみなすことができる. 軌道リー代数 $\mathfrak{g}^{B_n}$ に対して, 集合 $P_{++}^{B_n}$ は $(P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega}$ と同一視できることが知られている. $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega}$ に対応する $P_{++}^{B_n}$ の元を $\breve{\lambda}$ と書くことにする. このとき結晶基底 $\mathcal{B}^{B_n}(\breve{\lambda})$ は次のようにして結晶基底 $\mathcal{B}^{A_{2n-1}}(\lambda)$ の中に埋め込むことができる.

命題 5.2 ([19, Proposition 3.2.1] 参照)**.** 写像 $P_\lambda \colon \mathcal{B}^{B_n}(\breve{\lambda}) \hookrightarrow \mathcal{B}^{A_{2n-1}}(\lambda)$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

(i) $P_\lambda(b_{\breve{\lambda}}^{B_n}) = b_\lambda^{A_{2n-1}}$,

(ii) すべての $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$ および $1 \le i \le n-1$ に対して,

$$P_\lambda(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \tilde{e}_{\bar{i}} P_\lambda(b),\ P_\lambda(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \tilde{f}_{\bar{i}} P_\lambda(b),$$
$$P_\lambda(\tilde{e}_n b) = \tilde{e}_n P_\lambda(b),\ P_\lambda(\tilde{f}_n b) = \tilde{f}_n P_\lambda(b)$$

が成り立つ; ただし $P_\lambda(0) \coloneqq 0$ である.

写像 P_λ の条件から次が示される.

命題 5.3. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \check{I}^N$ を簡約語とし, 単射 $\mathbb{R}$-線形写像 $\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A} \colon \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{m_{i_1}+\cdots+m_{i_N}}$ を

$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(a_1, \dots, a_N) \coloneqq (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_{i_1}}, \dots, \underbrace{a_N, \dots, a_N}_{m_{i_N}})$$

と定義する. このときすべての $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$ および $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$ に対して,

$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Phi_{\mathbf{i}^B}(b)) = \Phi_{\mathbf{i}^A}(P_\lambda(b))$$

が成り立つ.

系 5.4. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \check{I}^N$ を簡約語とする. このとき $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^\omega$ に対して次が成り立つ:

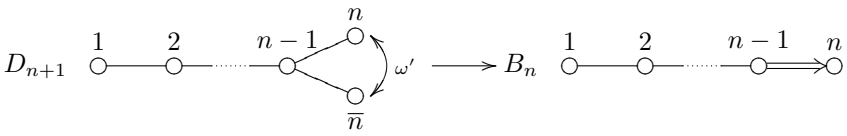
$$\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Delta_{\mathbf{i}^B}(\check{\lambda})) = \{(a_{k,l})_{1\le k\le N, 1\le l\le m_{i_k}} \in \Delta_{\mathbf{i}^A}(\lambda) \mid a_{k,1} = \cdots = a_{k,m_{i_k}},\ 1 \le k \le N\}.$$

$\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C}$ および $\Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}$ の定義により, $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(a_1, \dots, a_N) = (a'_1, \dots, a'_N)$ とすると, 各 $1 \le k \le N$ に対して

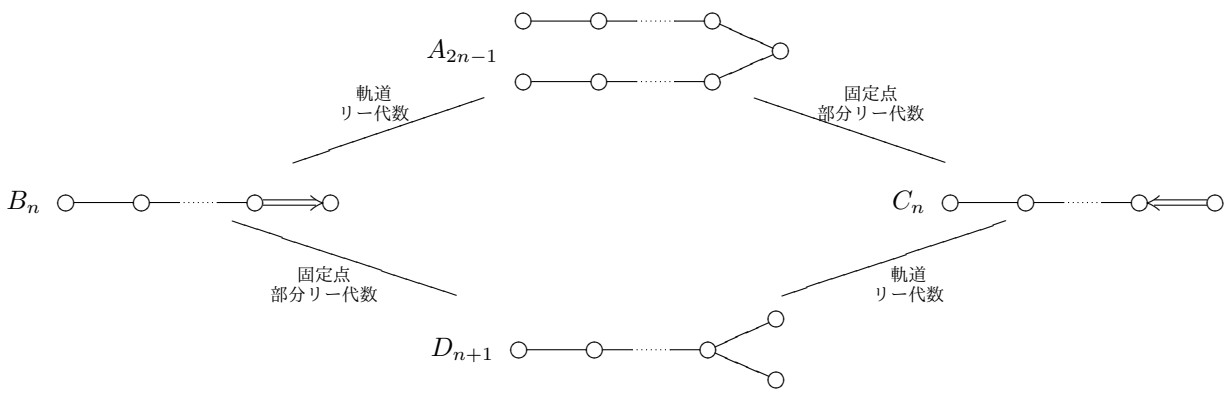
$$a'_k = \begin{cases} 2a_k & (i_k = 1, \dots, n-1), \\ a_k & (i_k = n) \end{cases} \tag{1}$$

となっている. 次節で述べるようにこの合成写像 $\Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}$ が B_n 型と C_n 型の結晶基底の間に存在するある種の類似性を記述している.

D_{n+1} 型のディンキン図形の位数 2 の自己同型 ω' に関する folding を考えよう.

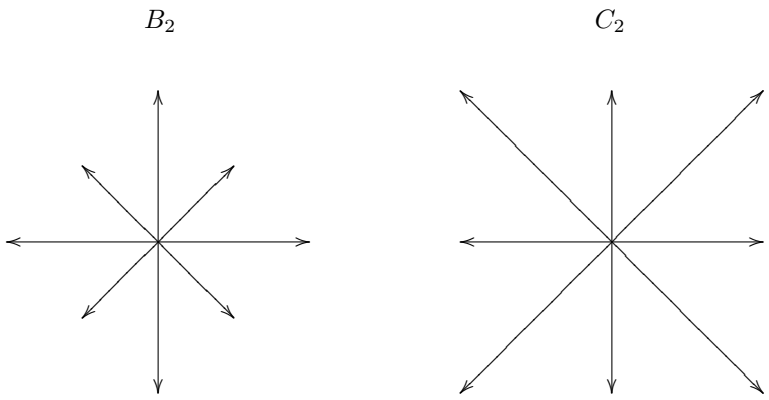


このとき固定点部分リー代数は B_n 型の単純リー代数であり, 軌道リー代数は C_n 型の単純リー代数である. そのため以上の議論は $A_{2n-1}, B_n, C_n, D_{n+1}$ 型の旗多様体の Newton-Okounkov 多面体の間の関係を与えている.



6 柏原結晶基底の類似性

最後に Newton-Okounkov 多面体に対する folding の手法と結晶基底の類似性の間の関係について述べる. B_n 型のルート系は C_n 型のルート系における短ルートの長さをすべて 2 倍にしたものであることが知られている. 逆に C_n 型のルート系は B_n 型のルート系における短ルートの長さをすべて 2 倍にすることで得ることができる.



この事実を反映して B 型と C 型の結晶基底の間には次のような類似性が存在する.

命題 6.1 ([10, Section 5] 参照)**.** $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega}$ に対して, 写像 $S_{\lambda}^{B,C}\colon \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda}) \to \mathcal{B}^{C_n}(\hat{\lambda})$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

(i) $S_{\lambda}^{B,C}(b_{\check{\lambda}}^{B_n}) = b_{\hat{\lambda}}^{C_n}$,

(ii) すべての $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$ および $1 \le i \le n-1$ に対して,

$$S_{\lambda}^{B,C}(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i^2 S_{\lambda}^{B,C}(b),\ S_{\lambda}^{B,C}(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i^2 S_{\lambda}^{B,C}(b),$$
$$S_{\lambda}^{B,C}(\tilde{e}_n b) = \tilde{e}_n S_{\lambda}^{B,C}(b),\ S_{\lambda}^{B,C}(\tilde{f}_n b) = \tilde{f}_n S_{\lambda}^{B,C}(b)$$

が成り立つ; ただし $S_{\lambda}^{B,C}(0) \coloneqq 0$ である.

この類似性に対して folding の言葉を用いた解釈を与えよう.

命題 6.2. $\mathbf{i} \in \check{I}^N$ を簡約語とする. このときすべての $\lambda \in (P_{++}^{A_{2n-1}})^{\omega}$ および $b \in \mathcal{B}^{B_n}(\check{\lambda})$ に対して次が成り立つ:

$$\Phi_{\mathbf{i}}(S_{\lambda}^{B,C}(b)) = \Omega_{\mathbf{i}}^{A,C} \circ \Upsilon_{\mathbf{i}}^{B,A}(\Phi_{\mathbf{i}}(b)).$$

参考文献

[1] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, Math. Ann. **356** (2013), 1183–1202.
[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), 77–128.
[3] J. Fuchs, U. Ray, and C. Schweigert, Some automorphisms of generalized Kac-Moody algebras, J. Algebra **191** (1997), 518–540.
[4] J. Fuchs, B. Schellekens, and C. Schweigert, From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures, Comm. Math. Phys. **180** (1996), 39–97.
[5] N. Fujita, Folding procedure for Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties, preprint 2017, arXiv:1703.03144v1. To appear in Comm. Algebra.
[6] N. Fujita and H. Oya, A comparison of Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties, J. Lond. Math. Soc. (2) **96** (2017), 201–227.
[7] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, Invent. Math. **202** (2015), 927–985.

[8] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.
[9] M. Kashiwara, On crystal bases, in Representations of Groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.
[10] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, Contemp. Math. **194** (1996), 177–186.
[11] K. Kaveh, Crystal bases and Newton-Okounkov bodies, Duke Math. J. **164** (2015), 2461–2506.
[12] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser, 2012, 263–282.
[13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, Ann. of Math. **176** (2012), 925–978.
[14] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, Ann. Sci. de I'ENS **42** (2009), 783–835.
[15] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups **3** (1998), 145–179.
[16] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.
[17] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.
[18] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, 1993.
[19] S. Naito and D. Sagaki, Crystal bases and diagram automorphisms, in Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, Math. Soc. Japan, 2004, 321–341.
[20] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, Invent. Math. **125** (1996), 405–411.
[21] A. Okounkov, Multiplicities and Newton polytopes, in Kirillov's Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 181, Adv. Math. Sci. Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 231–244.
[22] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in The Orbit Method in Geometry and Physics, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329–347.

二重余接関数の加法型公式

加藤正輝 (Kato Masaki)
神戸大学大学院理学研究科数学専攻

概 要

二重正弦関数は Hölder, 新谷, 黒川らによって研究されてきた特殊関数であり、整数論や数理物理において様々な応用を持つことが知られている. この講演では, 二重正弦関数の対数微分である二重余接関数がある加法型公式を持ち, それが Ramanujan の公式や二重ゼータ値の parity result など様々の公式を含むことを示す. 多重正弦関数の超超越性や加法型公式の楕円関数論的拡張についても述べたい.

目 次

1 はじめに **1**

2 主定理とその証明 **2**

3 主定理の応用 1 **4**

4 主定理の応用 2 **6**

5 主定理の楕円ディガンマ関数への一般化 **8**

1 はじめに

Hilbert は１９００年の国際数学者会議において次のような問題を提唱した: 与えられた代数体 K に対してその特殊値が K の Abel 拡大を生成するような解析関数 F_K を求めよ. この問題は現在でも一般には未解決の問題である. K が有理数体のときは指数関数, 虚二次体のときは j-関数と楕円関数がこの問題に対する解を与えている. また K が CM 体のときは Abel 多様体の虚数乗法により K 上の Abel 拡大を構成することができることが知られている. しかし, これら以外の代数体に対しては (K が実二次体のときでさえ) あまり多くのことはわかっていないのが現状である.

二重正弦関数は K が実二次体のときの解析関数 F_K の候補と考えられている関数である. 実際, 新谷卓郎 [17] は二重正弦関数の等分値の積がある種の Abel 拡大体の単数であると予想し, 特別な場合には予想が正しいことを虚数乗法論を用いて証明した.

二重正弦関数は以下のように定義される. ω_1, ω_2 を 0 でない複素数で, ω_1/ω_2 は負の実数でないようなものとする. $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ とおき, 二重 Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega}) := \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} (x + n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^{-s}$$

と定める. $\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega})$ は $\mathrm{Re}(s) > 2$ のとき絶対収束するが, 複素平面全体に有理型関数として解析接続され, 特に $s = 0$ では正則となる. 二重ガンマ関数, 二重正弦関数はそれぞれ,

$$\Gamma_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_2(s, x, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$
$$\mathrm{Sin}_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \Gamma_2(x, \boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_2(\omega_1 + \omega_2 - x, \boldsymbol{\omega})$$

と定義される. より一般の多重正弦関数も同様に定義することができる. 詳しくは [13] を参照されたい.

多重正弦関数は, 上で述べた新谷卓郎によるものに加えて, 整数論において様々な応用を持つことが黒川信重らによって示されている. 具体的には, Riemann ゼータ関数や Dirichlet L-関数の特殊値の表示や, Selberg ゼータ関数のガンマ因子の計算に用いられている. ([13] を参照.) さらに多重正弦関数は数理物理においても応用を持つことが知られており, 例えば, 神保と三輪 [9] は $|q| = 1$ に対する qKZ 方程式の解を二重正弦関数を使って表している.

このように多重正弦関数は様々な興味深い応用を持つが, その性質については現在でも未解明の部分が多い. 例えば, 通常の正弦関数の重要な性質として加法公式が挙げられる. ところが二重正弦関数の加法公式については, 黒川と小山による形式群を用いた研究 [12] があるものの, まだ十分に満足できる成果はないのが現状である.

筆者は, 通常の正弦関数の加法公式は余接関数の加法公式として書くこともできることから, 二重正弦関数とその対数微分として定義される二重余接関数

$$\mathrm{Cot}_2(x, \boldsymbol{\omega}) := \frac{d}{dx}\log \mathrm{Sin}_2(x, \boldsymbol{\omega})$$

の加法公式の間にも何らかの密接な関係があると考えた. 通常の余接関数は, その分母を払って両辺を x で微分することにより

$$\cot'(x)\cot(y) - \cot(y)\cot'(x+y) - \cot(x)\cot'(x+y) - \cot'(x)\cot(x+y) = 0$$

のように表すこともできる. 筆者は [10] において二重余接関数がこれと類似した公式を満たすかを調べた.

2 主定理とその証明

この節では主定理とその証明の概要を紹介する. 証明の詳細については [10] を参照されたい.

まず, 実数 α がジェネリックであるとは,

$$\lim_{m\to\infty} ||m\alpha||^{1/m} = 1$$

が成り立つことであると定める. ここに実数 x に対して $||x|| := \min\{|x-n|; n \in \mathbb{Z}\}$ とおいた. このジェネリックであるという性質はあまり見慣れない実数の性質であると思われるが, もし α が Liouville 数でない無理数ならば, ジェネリックとなることを示すことができる.

次に

$$\begin{aligned} R(x_1,x_2,\boldsymbol{\omega}) := &-\frac{\pi}{\omega_1}\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_1}(x_1+k\omega_2)\zeta_2(4,x_2+k\omega_2,\boldsymbol{\omega}) \\ &\qquad +\sum_{k=1}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_1}(x_1-k\omega_2)\zeta_2(4,x_2-\omega_1-\omega_2-k\omega_2,-\boldsymbol{\omega})\Bigg) \\ &-\frac{\pi}{\omega_2}\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_2}(x_1+k\omega_1)\zeta_2(4,x_2+k\omega_1,\boldsymbol{\omega}) \\ &\qquad +\sum_{k=1}^{\infty}\cot\frac{\pi}{\omega_2}(x_1-k\omega_1)\zeta_2(4,x_2-\omega_1-\omega_2-k\omega_1,-\boldsymbol{\omega})\Bigg). \end{aligned}$$

とおく. 右辺の無限級数は以下の主定理の条件が成り立つときには絶対収束している.

定理 2.1 (主定理). 以下のいずれかの条件が成り立つと仮定する:

(i) $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$.

(ii) $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$.

(iii) $\omega_2/\omega_1, \omega_1/\omega_2$ はともにジェネリックで $y/\omega_1 \notin \mathbb{R}$.

このとき以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cot}_2^{(3)}(x,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2(y,\boldsymbol{\omega})+\mathrm{Cot}_2^{(3)}(x+y,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2(y,\boldsymbol{\omega})-\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x+y,\boldsymbol{\omega})\mathrm{Cot}_2^{(3-k)}(x,\boldsymbol{\omega}) \\ = -6R(y,\omega_1+\omega_2-x,\boldsymbol{\omega})+6R(y,x+y,\boldsymbol{\omega}). \quad (2.1) \end{aligned}$$

主定理の証明の方針は、基本的には Eisenstein による通常の余接関数の加法公式の証明を一般化することである. Eisenstein は, 主に余接関数の部分分数分解を用いることで通常の余接関数の加法公式を証明している. ([18] を参照.) $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ のとき, 主定理は以下の二重余接関数の部分分数分解を使うことで証明される:

命題 2.2 ([10, Proposition3.3]). 二重余接関数は以下のような部分分数分解を持つ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cot}_2(x,\boldsymbol{\omega}) = \gamma(\boldsymbol{\omega})+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\omega_1-\omega_2} \\ +\sum_{\substack{n_1,n_2\geq 0\\(n_1,n_2)\neq(0,0)}}\Bigg(\frac{1}{x+n_1\omega_1+n_2\omega_2}-\frac{1}{x-(n_1+1)\omega_1-(n_2+1)\omega_2} \\ -\frac{2}{n_1\omega_1+n_2\omega_2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}\Bigg). \end{aligned}$$

ここに, $\gamma(\boldsymbol{\omega})$ は $\boldsymbol{\omega}$ にのみ依存する定数であり右辺の無限級数は絶対収束している. したがって, $k \geq 1$ のとき

$$\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n_1,n_2\geq 0}\left(\frac{1}{(x+n_1\omega_1+n_2\omega_2)^{k+1}} - \frac{1}{(x-(n_1+1)\omega_1-(n_2+1)\omega_2)^{k+1}}\right)$$

が成り立つ.

ところが $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$ のときは上の証明では, 級数の収束に関して微妙な点がある. そこで $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$ のときは, 符号付き二重 Poisson 和公式という公式を用いる:

命題 2.3 (符号付き二重 Poisson 和公式 [11]). 奇関数 $H(t)$ が

$$H(t) \in L^1(\mathbb{R}), \qquad H(t) = O(t^{-2}) \quad (|t| \to \infty)$$

を満たすとし,

$$\widetilde{H}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{itu}dt.$$

とおく. 2 つの実数 a, b は $a/b, b/a$ がともにジェネリックであるようなものとする. 関数 $H(t)$ がある実数 $\mu \in (0,1)$ に対して

$$\widetilde{H}(x) = O(\mu^x) \quad (x \to \infty)$$

を満たすと仮定する. このとき, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\sum_{k,n>0} H\left(2\pi\left(\frac{k}{a}+\frac{n}{b}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k>0} H\left(2\pi\frac{k}{a}\right) + \sum_{n>0} H\left(2\pi\frac{n}{b}\right)\right)\\ &\quad = -\frac{ia}{4\pi}\sum_{k>0}\cot\left(\pi\frac{ka}{b}\right)\widetilde{H}(ka) - \frac{ib}{4\pi}\sum_{n>0}\cot\left(\pi\frac{nb}{a}\right)\widetilde{H}(nb) - \frac{iab}{8\pi^2}\widetilde{H}'(0).\end{aligned}$$

3 主定理の応用 1

この節では, [10] で扱われている, 主定理の応用を紹介する. まず, 主定理から Dedekind 和の相互法則が従うことを示す. Dedekind 和 $s(h,k)$ は以下のように定義される. h, k を互いに素な正の整数とし,

$$s(h,k) := \sum_{\mu=1}^{k}\left(\!\!\left(\frac{h\mu}{k}\right)\!\!\right)\left(\!\!\left(\frac{\mu}{k}\right)\!\!\right)$$

と定める. ここに

$$((x)) := \begin{cases} x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z})\\ 0 & (x \in \mathbb{Z}).\end{cases}$$

であり $\lfloor x\rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

系 3.1 (Dedekind 和の相互法則)**.**

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{hk}+\frac{k}{h}\right).$$

主定理からは, Apostol [1] によって導入された高次 Dedekind 和の相互法則を示すこともできる. Apostol の高次 Dedekind 和 $s_{2r-1}(h,k)$ は, 1 より大きい整数 r に対して,

$$s_{2r-1}(h,k):=\sum_{n=1}^{k}B_{2r-1}\left(\frac{hn}{k}-\left\lfloor\frac{hn}{k}\right\rfloor\right)\left(\left(\frac{n}{k}\right)\right),$$

と定義される. ここに $B_j(x)$ は j 番目の Bernoulli 多項式である.

系 3.2 (高次 Dedekind 和の相互法則)**.**

$$\begin{aligned}&2rhk^{2r-1}s_{2r-1}(h,k)+2rkh^{2r-1}s_{2r-1}(k,h)\\&\qquad=\sum_{m=0}^{r}\binom{2r}{2m}h^{2m}k^{2(r-m)}B_{2m}B_{2r-2m}+(2r-1)B_{2r}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

系 3.1,3.2 を得るには, 等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_1^2\omega_2}c_1'\left(\frac{x}{\omega_1}\right)c_1\left(\frac{x+y}{\omega_2}\right)+\frac{1}{\omega_1\omega_2^2}c_1\left(\frac{x}{\omega_1}\right)c_1'\left(\frac{x+y}{\omega_2}\right)\\&\qquad=-\frac{1}{\omega_2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{c_1\left(\frac{y-m\omega_1}{\omega_2}\right)}{(x+m\omega_1)^2}+\frac{1}{\omega_1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_1\left(\frac{y+n\omega_2}{\omega_1}\right)}{(x+y+n\omega_2)^2}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

を用いる. ここに $c_1(x):=\pi\cot(\pi x)$ とおいた. (3.2) は (2.1) の変数をずらして差分をとることにより得られる等式である. 系 3.1, 3.2 は, (3.2) において $\omega_1=h,\omega_2=k$ とおいて両辺の Laurent 展開の係数を比較すると得られる. 同様にして, (3.2) からは以下の二つの系を得ることができる:

系 3.3 (Lerch の関数等式)**.** r を 2 以上の整数とし, θ を代数的無理数とする. このとき以下が成り立つ*:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cot(\pi m\theta)}{m^{2r-1}}+\theta^{2r-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cot(\pi m/\theta)}{m^{2r-1}}=(-1)^{r-1}(2\pi)^{2r-1}\sum_{k=0}^{r}\theta^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{B_{2r-2k}}{(2r-2k)!}.$$

系 3.4 (Ramanujan の公式)**.** n を正の整数とする. $\alpha,\beta>0,\alpha\beta=\pi^2$ のとき, 以下が成り立つ*:*

$$\begin{aligned}\alpha^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}\right\}&=(-\beta)^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}\right\}\\&\quad-2^{2n}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\frac{B_{2j}B_{2n+2-2j}}{(2j)!(2n+2-2j)!}\alpha^{n+1-j}\beta^j.\end{aligned}$$

系 3.3,3.4 は, それぞれ, (3.2) において $(\omega_1,\omega_2)=(1,\theta),(1,-\pi i/\alpha)$ とした等式から得られる.

注意 3.5. 系 3.3 の左辺の無限級数が絶対収束することは [2, Lemma 1] より従う.

4　主定理の応用 2

この節では, [10] では考察されていない, 主定理の更なる応用を紹介する. この節の内容は [10] とは別の論文で将来扱われる予定である.

主定理からは, 以下の定理を得ることができる:

定理 4.1. $\psi(x)$ をディガンマ関数, すなわちガンマ関数 $\Gamma(x)$ の対数微分

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

とし, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \geq 2$ に対して,

$$\zeta(m, n; x_1, x_2) := \sum_{0 \leq k_1 \leq k_2} \frac{1}{(x_1 + k_1)^m (x_2 + k_2)^n}$$

とおく. すると以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\zeta(1, 2; -y, x) + \zeta(1, 2; y, x + y) \\ &\qquad = \psi'(x + y)(\psi(x) - \psi(1 - y)) + \psi'(x)(\psi(x + y) - \psi(1 + y)). \quad (4.1) \end{aligned}$$

系 4.1 は Eie と Liaw [4] の Proposition 3 と本質的には同じものである. また, 等式 (4.1) の両辺を x, y について Laurent 展開し係数を比較すると, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \geq 2$ に対して以下のような等式が得られる:

$$\begin{aligned} &\zeta(m, n) + (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n + i - 1}{i} \zeta(m - i, n + i) \\ &\quad = (-1)^{m-1} \binom{m + n - 1}{m} \zeta(m + n) + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{n + i - 1}{i} \zeta(n + i) \zeta(m - i) \\ &\qquad + (-1)^m \sum_{j=1}^{n-2} \binom{m + j - 1}{j} \zeta(m + j) \zeta(n - j). \quad (4.2) \end{aligned}$$

ここに, $\zeta(i, j) \quad (i \geq 1, j > 1)$ は Euler の二重ゼータ値

$$\zeta(i, j) := \sum_{0 < k_1 < k_2} \frac{1}{k_1^i k_2^j}$$

である. (4.2) は Huard-Williams-Zhang [8] によって得られた等式である. Huard-Williams-Zhang [8] は, 等式（4.2）から, 二重ゼータ値の parity result を証明している. 二重ゼータ値の parity result とは, $i + j$ が奇数のとき $\zeta(i, j)$ は Riemann ゼータ値で表せるという性質のことである. (この性質は一般の深さの多重ゼータ値に一般化されている.)

定理 4.1 を得るには, (2.1) において $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau$ とし, 両辺の $\tau \to i\infty$ の極限をとればよい. この際, 以下の命題を用いる:

命題 4.2. x を $|x|<1$ なる複素数とし, γ を *Euler* 定数

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

とする. このとき

$$\lim_{\tau\to\infty}\{\mathrm{Cot}_2(x,(1,\tau))-\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))\}=-\psi(x)-\gamma$$

および, $k\geq 1$ に対して

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{Cot}_2^{(k)}(x,(1,\tau))=-\psi^{(k)}(x)$$

が成立する.

さて, 二重余接関数は余接関数の一般化であるが, 命題 4.2 により, ディガンマ関数の一般化であるとみなすこともできる. そこで, ディガンマ関数やガンマ関数の性質が二重余接関数や二重正弦関数に一般化されるか考えるのは自然である.

ガンマ関数の重要な性質として超超越性, すなわち代数的微分方程式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$
$$(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, F(x,Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\in\mathbb{C}(x)[Y_0,Y_1,\cdots,Y_n])$$

を満たさないことが挙げられる. この定理は Hölder [7] によって証明された. (なお Hölder は二重三角関数を発見した数学者でもある. 詳しくは [6] を参照されたい.)

上の Hölder の証明を一般化することにより以下の定理を示すことができる:

定理 4.3. 実数ではない複素数 τ に対して, 関数 $f(x)$ が差分関係式

$$f(x+\tau)=f(x)(2\sin(\pi x))^{-1} \tag{4.3}$$

を満たせば, $f(x)$ は超超越的である.

二重正弦関数 $\mathrm{Sin}_2(x,(1,\tau))$ は差分関係式 (4.3) を満たす. よって ω_1/ω_2 が実数でなければ, $\mathrm{Sin}_2(x,\boldsymbol{\omega})$ は超超越的であることがわかる. さらに Ostrowski[16] の結果を用いることにより, この結果はより一般の多重三角関数に拡張される:

定理 4.4. r を 2 以上の整数とし, 集合 $\{\omega_j/\omega_i | 1\leq i<j\leq r\}$ の中に実数でないものが存在すると仮定する. このとき r 重正弦関数 $\mathrm{Sin}_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は超超越的である.

一方, ω_i/ω_j がすべて有理数のときは $\mathrm{Sin}_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は代数的微分方程式を満たすことが黒川と若山 [14] によって証明されている.

5　主定理の楕円ディガンマ関数への一般化

最近筆者は, 主定理を楕円ガンマ関数の対数微分として定義される関数（筆者は楕円ディガンマ関数と呼んでいる）の満たす加法型公式に拡張した. 楕円ガンマ関数は $z, \tau, \sigma \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\tau), \mathrm{Im}(\sigma) > 0$ に対して,

$$\Gamma(z, \tau, \sigma) := \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{2\pi i((j+1)\tau + (k+1)\tau - z)}}{1 - e^{2\pi i(j\tau + k\sigma + z)}}$$

と定義される特殊関数である. 楕円ガンマ関数は二重正弦関数と Jacobi のテータ関数の共通の一般化とみなすことができる. (楕円ガンマ関数の基本的性質については Felder-Varchenko[5] や成川 [15] が詳しい.) もし時間の余裕があれば, 講演ではこの一般化についてもお話したい.

参考文献

[1] T. M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formula of certain Lambert series, Duke Math. J. **17** (1950), 147-157.

[2] T. Arakawa, Generalized eta-functions and certain ray class invariants of real quadratic fields, Math. Ann. **260** (1982), 475-494.

[3] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Phil. Soc. **19** (1904), 374-425.

[4] M. Eie and W. -C. Liaw, Double Euler sums on Hurwitz zeta function, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), 1869-1883.

[5] G. Felder and A. Varchenko, The elliptic gamma function and $SL(3, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$, Adv. Math. **156** (2000), 44-76.

[6] O. Hölder, Ueber eine transcendente Function, Göttingen Nachrichten (1886), 514-522.

[7] O. Hölder, Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Ann. **28** (1887), 1-13.

[8] J. G. Huard, K. S. Williams and N-U. Zhang, On Tornheim's double series, Acta Arithmetica **75** (1996), 105-117.

[9] M. Jimbo and T. Miwa, Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 2923-2958.

[10] M. Kato, An addition type formula for the double cotangent function, Kodai Math. J. **40** (2017), 468-491.

[11] S. Koyama and N. Kurokawa, Multiple zeta functions: the double sine function and the signed double Poisson summation formula, Compositio Math. **140** (2004), 1176-1190.

[12] S. Koyama and N. Kurokawa, Formal group laws for multiple sine functions and applications, Kodai Math. J. **36** (2013), 109-118.

[13] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, Forum Math. **15** (2003), 839-876.

[14] N. Kurokawa and M. Wakayama, Differential algebraicity of multiple sine functions, Lett. Math. Phys. **71** (2005), 75-82.

[15] A. Narukawa, The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions, Adv Math. **189** (2004), 247-267.

[16] A. Ostrowski, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z. **8** (1920), 241-298.

[17] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 139-167.

[18] A.Weil, Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, Berlin, 1976.

放物接続のモジュライ空間のコホモロジーについて

松原　祐貴 (Yuki Matsubara) *

Abstract

放物接続のモジュライ空間の具体的な幾何学的特徴を調べることは, 幾何学的ラングランズ予想の観点からも興味深いものである. D.Arinkin は構造群を SL_2 として確定特異点が 4 点ある場合の幾何学的ラングランズ予想を幾何学的手法により解決した. 確定特異点が 5 点の場合は未解決である. 今回, 後者の場合を定式化し, それにかかわるコホモロジーをいくつか計算することができたので報告する.

1　序論

$\mathcal{C}onn(X,r)$ を, 滑らかな複素射影曲線 X 上の階数が r であるベクトル束に付随する接続のモジュライ空間とし, $\mathcal{B}un(X,r)$ を X 上の階数が r であるベクトル束のモジュライ空間とする.

$GL(r)$ に対する圏論的ラングランズ予想とは, $\mathcal{C}onn(X,r)$ 上の $\mathcal{O}$-加群のなす導来圏と, $\mathcal{B}un(X,r)$ 上の D-加群のなす導来圏とが圏同値である, という予想である.

Arinkin は [1] において, $X=\mathbb{P}^1, r=2$ として 4 点の確定特異点がある場合について, この予想を証明した. この場合, $\mathcal{B}un(X,r)$ として放物構造を持ったベクトル束のモジュライ空間を考えることになる. (より詳しく, [1] では $SL(2)$-接続と $PGL(2)$-束に対して考察している.)

ここでは [1] の結果を, 確定特異点が 5 点ある場合に拡張することを試みる.

2　放物接続について

この節では $\boldsymbol{w}$-安定 $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間を導入する.

*神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程後期 1 年 (e-mail : ymatuba@math.kobe-u.ac.jp)

リーマン球面 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の異なる n 点 $\boldsymbol{t} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ を固定し, $\boldsymbol{t}$ に関する因子を $D = t_1 + \cdots + t_n$ と定義する.

Definition 2.1. $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で D 上に特異点を持つ対数的接続とは, 次を満たす組 (E, ∇) のことをいう: $d \in \mathbb{Z}$ とする.

(1) E は $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束,

(2) $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ は次を満たす層の写像である.

$$\nabla(fs) = s \otimes df + f\nabla(s),\ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s \in E.$$

対数的接続 (E, ∇) に対して, 留数行列 $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla) \in \mathrm{End}(E_{t_i}) \simeq M_2(\mathbb{C})$, $(1 \leq i \leq n)$ を定義する. $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有値を $\{\nu_i^+, \nu_i^-\}$ とする. これを ∇ の t_i での局所指数という. Fuchs の関係式により, $\sum_i (\nu_i^+ + \nu_i^-) = -\deg(E) = -d$ が成り立つ. ここで, 局所指数の集合を次のように定義する.

$$\mathcal{N}_n(d) := \left\{ \boldsymbol{\nu} = (\nu_i^{\pm})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{2n} \middle| d + \sum_{1 \leq i \leq n} (\nu_i^+ + \nu_i^-) = 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^{2n-1}.$$

Definition 2.2. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般であるとは次の 2 つを満たすことをいう.

(1) 任意の i に対して, $\nu_i^+ - \nu_i^- \notin \mathbb{Z}$,

(2) 次が成立する.

$$\text{任意の } (\epsilon_i) \in \{+, -\}^n \text{の取り方について} \sum_{i=1}^{n} \nu_i^{\epsilon_i} \notin \mathbb{Z}$$

$\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般でないとき, 特殊であるという.

$\mathbb{P}^1$ 上の正則直線ベクトル束 $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ と対数的接続 $\nabla_L : L \to L \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ を固定する. ∇_L は各 t_i において留数固有値 $\nu_i^+ + \nu_i^-$ を持つ.

Definition 2.3. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n(d)$ を固定する. $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の (L, ∇_L) を行列式束に持つ階数が 2 の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とは組 $(E, \nabla, \varphi, \boldsymbol{l} = \{l_i\})$ であって, 次を満たすもののことをいう:

(1) $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の対数的接続 (E, ∇) であって, 階数が 2 で局所指数 $\boldsymbol{\nu}$ を持つもの.

(2) 次の関係式を満たす直線ベクトル束の同型写像 $\varphi : \bigwedge^2 E \to L$;
E の任意の局所切断 s_1, s_2 に対して

$$\varphi \otimes id(\nabla s_1 \wedge s_2 + s_1 \wedge \nabla s_2) = \nabla_L(\varphi(s_1 \wedge s_2)).$$

(3) 1 次元部分空間 $l_i \subset E_{t_i}$ であって, $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ は l_i に対して ν_i^+ を掛けることで作用するもの.

$\boldsymbol{\nu}$ が一般なものについて l_i は $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の ν_i^+ に関する固有空間に他ならない. ゆえに, $\boldsymbol{l} = \{l_i\}$ は (E, ∇) から一意に定まる.

安定性を導入するために重さ $\boldsymbol{w}$ を定義することによって, $\boldsymbol{w}$-安定 $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 $(E, \nabla, \boldsymbol{l})$ のモジュライ空間 $M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ を構成することができる. $M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は次元が $2(n-3)$ である滑らかで既約な準射影的代数多様体になることが知られている ([5]). 一般の $\boldsymbol{\nu}$ について (E, ∇, φ) は既約であり, この場合すべての組 (E, ∇, φ) が安定対象となる.

このようなモジュライ空間はガルニエ系と呼ばれる常微分方程式の初期値空間に対応し, 特に $n = 4$ の場合は第 VI パンルヴェ方程式に対応する. これらは, 線形接続のモノドロミー保存変形として得られる微分方程式である.

初等変換により, $d = \deg(E) = -1$ としてよい. また, $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ として

$$\begin{cases} \nu_i^+ = \nu_i & (i = 1, \ldots, n) \\ \nu_i^- = -\nu_i & (i = 1, \ldots, n-1) \\ \nu_n^- = 1 - \nu_n, & \end{cases}$$

とできる. ここで $\mathcal{M}$ を $\boldsymbol{\nu}$-$\mathfrak{sl}_2$-放物接続のモジュライスタックとし, 対応する粗モジュライ空間を M とする. 上記の変換により $M \simeq M^{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ なる同型対応を得る.

3 放物ベクトル束について

この節では放物ベクトル束のモジュライ空間について述べる.

Definition 3.1. $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の階数が 2 で次数が d の準放物ベクトル束とは, 次を満たす組 $(E, \boldsymbol{l})$ のことをいう:

(1) $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束 E,

(2) E_{t_i} の 1 次元部分ベクトル空間 l_i の組 $\boldsymbol{l} := (l_1, \ldots, l_n)$

この $\boldsymbol{l}$ を準放物ベクトル束の放物構造という. また, 重み $\boldsymbol{w} := (w_1, \ldots, w_n)$ の情報を合わせて考える場合は $(E, \boldsymbol{l})$ を放物ベクトル束という.

Definition 3.2. 準放物ベクトル束 $(E, \boldsymbol{l})$ は, 与えれた局所指数 $\boldsymbol{\nu}$ を持つ接続 ∇ が付随するとき $\boldsymbol{\nu}$-平坦であるという.

$\mathcal{P}_d$ を直既約で次数が d の放物ベクトル束のモジュライ空間とし, 対応する粗モジュライ空間を P_d とする. $\mathcal{P}_d \to P_d$ は $\mathbb{G}_m$-ジャーブである.

実は, $(E, \boldsymbol{l})$ が $\boldsymbol{\nu}$-平坦であることと直既約であることは同値である. この事実により, M から $P := P_{-1}$ への忘却写像 $(E, \nabla, \varphi) \mapsto (E, \boldsymbol{l})$ が定義される. $\boldsymbol{\nu}$ を一般として取っておくことにより, 放物構造 $\boldsymbol{l} = \{l_i\}$ を固有値 ν_i^+ に対応する $\mathsf{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有空間 $l_i \subset E_{t_i}$ と見なすことができる.

一方で, 粗モジュライ空間 P_d は非分離スキーム (トポロジカルには non Hausdorff) である. $n = 4$ の場合, P は $t_1, \ldots, t_4$ で 2 重点を持った射影直線と同一視される ([3], [8]).

$n = 5$ の場合, P はいくつかの射影曲面を貼り合わせたものとして構成できる ([6]). その幾何学的性質は 4 次 del Pezzo 曲面, つまり $\mathbb{P}^2$ を 5 点でブローアップしたものと関連している. より具体的に, 貼り合わされる射影曲面のうち一つは $\mathbb{P}^2$ と同型であり, conic としての自然な埋め込み $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow X := \mathbb{P}^2$ が存在する. この像を Π とする. この埋め込みによる $t_1, \ldots, t_5 \in \mathbb{P}^1$ の像でのブローアップ $\phi : \hat{X} \to X$ を考える. このとき, 定義から $\hat{X}$ は 4 次 del Pezzo 曲面である. ブローアップによる例外因子を $\Pi_i \subset \hat{X}$ とし, X 内で t_i と t_j を結ぶ曲線の固有変換を $\Pi_{ij} \subset \hat{X}$ で表す. この $\Pi, \Pi_i, \Pi_{i,j}$ は古典的によく知られている 4 次 del Pezzo 曲面上に 16 本存在する (-1)-曲線と対応する.

4 フーリエ向井変換について

Y をアーベル多様体とし, $Y^\natural$ により Y の $\mathbb{G}_m$ による $\natural$-extension のモジュライ空間を表す. ここで $\natural$-extension とは Y 上の平坦束であって, ある条件を満たすもののことをいう.

このとき, Y 上の D_Y-加群のなす導来圏と $\mathcal{O}_{Y^\natural}$-加群のなす導来圏の間に, 自然な圏同値が存在する. この圏同値は, $Y \times Y^\natural$ 上の普遍束であって Y 方向の接続が付随した $\mathcal{P}$ を用いて定義される.(この $\mathcal{P}$ をポアンカレ束ともいう).

またその圏同値性の証明には, $\mathcal{P}$ が $\mathcal{O}_{Y^\natural}$-加群の orthogonal Y-family であり, かつ D_Y-加群の orthogonal $Y^\natural$-family であるという事実が用いられる. ここで言う orthogonal とは, 2 つの異なるベクトル束のテンソル積のコホモロジーが 0 になることを指す.

本稿では, M が $Y^\natural$ の役割を, P が Y の役割を果たす. つまりフーリエ向井変換による圏同値によって, 圏論的ラングランズ対応を示すことを目的とする.

5　主結果

$\hat{X}$ を 4 次 del Pezzo 曲面, つまり $\mathbb{P}^2$ を 5 点でブローアップしたものとする. $\mathbf{x} \in \hat{X}$ に対し, $\mathcal{M}$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}$ を (E, ∇, φ) 上のファイバーが $E'_{x_1} \otimes E'_{x_2}$ となるものとして定義する. ここで, E' は t_5 において E を上方変換したものを表し, $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は $2:1$ 被覆写像 $\Psi : \hat{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ による $\mathbf{x}$ の像とする.

Theorem 5.1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \hat{X}$ とする. このとき

(1) $H^i(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & i = 0 \\ 0, & i > 0. \end{cases}$

(2) $H^i(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\mathbf{x}} \otimes \mathcal{E}_{\mathbf{y}}) = 0$, *for* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}, i \geq 0$.

また $\mathcal{E}$ を $\mathcal{M} \times \hat{X}$ 上の普遍ベクトル束と見なす. $\mathcal{E}$ を適当に変換した D_P-加群 $\mathcal{E}_\nu$ をフーリエ向井核とするフーリエ向井変換が, 考察対象としている場合の圏論的ラングランズ対応を導くと予想される.

Cojecture 5.2. 関手

$$\Phi_{\mathcal{M} \to P} : \mathcal{F} \mapsto Rp_{2,*}(\mathcal{E}_\nu \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M} \times P}} p_1^* \mathcal{F})[1]$$

は $\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M})^-$ と D_P-加群のなす導来圏の間の圏同値を導く.

References

[1] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of SL(2)-bundles with connections on P1 minus 4 points.*, Selecta Math., New Series 7 (2001), 213-239.

[2] D. Arinkin, R. Fedorov, *An example of the Langlands correspondence for irregular rank two connections on* $\mathbb{P}^1$. Adv. Math., 230(3):1078-1123, 2012.

[3] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of* $SL(2)$*-bundles with connections on* $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_4\}$, Internat. Math. Res. Notices (1997), no. **19**, 983–999.

[4] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, F. Ehlers, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, 2. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[5] M. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann- Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. (2006), no. **4**, 987-1089.

[6] F. Loray, M.-H. Saito, *Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line.* Internat. Math. Res. Notices (2015), no. **4**, 995–1043.

[7] A. Komyo, M.-H. Saito, *Explicit description of jumping phenomena on moduli spaces of parabolic connections and Hilbert schemes of points on surfaces, accepted in Kyoto Journal of Mathematics.* (arXiv:math/1611.00971)

[8] S. Oblezin, *Isomonodromic deformations of* $\mathfrak{sl}(2)$ *Fuchsian systems on the Riemann sphere.* Mosc. Math. J. 5 (2005), no. **2**, 415–441, 494–495.

[9] N. Fernandez Vargas, *Geometry of the moduli of parabolic bundles on elliptic curves.* Trans. of the AMS (to appear). (arXiv:1611.05417)

対角的 3 次曲線の Brauer 群の明示的な表示について *

植松 哲也 (Tetsuya UEMATSU)†

概要

Brauer 群は, 体や環, より一般にスキームに対して定義される不変量の一つで, 整数論や幾何的な問題にも応用をもつことが知られている. Brauer 群の元を記述する方法のひとつとして, シンボル (ノルム剰余記号) があり, Chernousov–Guletskiĭ は楕円曲線の Brauer 群の 2-ねじれ部分群をシンボルで記述する研究を行った. 本稿では, 対角的 3 次曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分群について, 彼らの手法を用いた類似の計算によりこれまでに得られた結果を報告する. それに先立ち, 体の Brauer 群とそのシンボルによる表示, 代数多様体の Brauer 群についても解説する.

1 体の Brauer 群

代数多様体の Brauer 群が本稿の主題であるが, その準備として, 体の Brauer 群について概観しておく. 体の Brauer 群についての詳細は, 例えば, [21], [33] などを参照のこと.

1.1 中心的単純環と Brauer 群

K を (可換) 体とする. 「何らかの代数的構造を分類すること」は代数学におけるひとつの問題意識として挙げることができるだろう. 例えば, 体の Galois 理論とは, K 上の拡大体のありようが, (絶対) Galois 群という群により捉えられることを主張するものであった. K 上の半単純環を分類する問題を考えるとき, Wedderburn [32, p.94] によれば, それは, 中心的単純環, あるいは斜体 (可除代数) を分類する問題に帰着される. ここで, K 上の中心的単純環とは, K 上の有限次元代数 A で, 単純 (= 両側イデアルは自明なもののみ) かつ中心的 (= A の中心が K に等しい) なものをいう. K 上の中心的単純環の K-同型類の集合を $CSA(K)$ と書くことにする. 再び Wedderburn [32, Theorem 22, 23] によれば, K 上の中心的単純環 A に対して, 正整数 n と K 上の斜体 D (これは K 上中心的となる) が同型を除いて一意的に存在して, $A \cong M_n(D)$ となる. そこで, $CSA(K)$ 上の同値関係 (森田同値) を

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists n \geq 1 \exists m \geq 1 \exists D : K \text{ 上の斜体 s.t. } A \cong M_n(D), B \cong M_m(D)$$

により定義すると, 商集合 $\mathrm{Br}(K) := CSA(K)/\sim$ には K 上のテンソル積によって, 群構造が入ることがわかる (cf. [33, p.49]). この群を体 K の Brauer 群とよぶ. 定義より $\mathrm{Br}(K)$ の各類の代表元としては, K 上の中心的斜体がとれるから, $\mathrm{Br}(K)$ とはいわば「K 上の中心的斜体の分類空間に群構造を入れたもの」である.

* 2018 年 1 月 28 日.

† 名城大学理工学部数学科.

例 1.1. いくつかの体に対して, その Brauer 群を紹介する. 証明については, 例えば, [33] を参照せよ.

(1) $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ここで, $\mathbb{H}$ は

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\, i \oplus \mathbb{R}\, j \oplus \mathbb{R}\, k, \quad i^2 = j^2 = -1, ij = k = -ji$$

により定義される $\mathbb{R}$ 上 4 次元の斜体で, ハミルトンの四元数体と呼ばれる.

(2) 代数閉体や有限体 K に対して, $\mathrm{Br}(K) = 0$.

(3) p 進体 $\mathbb{Q}_p$（$\mathbb{Q}$ の p 進距離による完備化）に対して, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1.2 ノルム剰余記号

Brauer 群を記述する上で, その Galois コホモロジーによる表示は重要な役割を果たす. K の分離閉包 $\overline{K}$ をひとつ固定し, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とおく. このとき, 自然な同型 $\mathrm{Br}(K) \cong H^2(G_K, \overline{K}^\times)$ が存在する ([21, p.351]). これより, $\mathrm{Br}(K)$ はねじれ群であることがわかるが, その n-ねじれ部分群を ${}_n\mathrm{Br}(K) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K) \xrightarrow{n} \mathrm{Br}(K))$ と書く. Kummer 系列を考えることにより, ${}_n\mathrm{Br}(K) \cong H^2(K, \mu_n)$ であることが分かる. ここに, μ_n は 1 の n 乗根全体のなす乗法群である.

ノルム剰余記号による Brauer 群の記述について述べよう. 以下, n を正整数とし, K の標数は 0 または, n と互いに素であるとする. また, $\mu_n \subset K$ とし, 1 の原始 n 乗根 ζ をひとつ固定しておく. これにより, (自明な) G_K-加群の同型 $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が定まる.

Kummer 理論によれば, Galois コホモロジーの連結準同型 $\delta\colon K^\times \to H^1(G_K, \mu_n)$ は同型 $K^\times/(K^\times)^n \cong H^1(G_K, \mu_n)$ を導く ([21, p.344]).（全射性は, 体の言葉でいえば, K 上の n 次巡回拡大はすべて ある K の元の n 乗根を添加することによって得られるものであるということを意味する）.

また, カップ積と, 先に述べた同型 $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を通じて, 準同型

$$H^1(G_K, \mu_n) \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(G_K, \mu_n) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mu_n^{\otimes 2}) \cong H^2(G_K, \mu_n) \cong {}_n\mathrm{Br}(K)$$

が得られる. δ とこれを合成することにより得られる写像

$$(\cdot,\cdot)_{n,\zeta}\colon K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \to {}_n\mathrm{Br}(K)$$

や, それにより表された元 $(a,b)_{n,\zeta}$ をノルム剰余記号, または単にシンボルとよぶ. 以下, ζ が予め固定されているなど明らかな場合には, シンボルの添字 ζ を書かないことにする.

定義 1.2. K を体とする. 群 $K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ の $a \otimes (1-a)$ (ここに, $a, 1-a \in K^\times$) で生成される部分群による剰余群を K の (2 次) Milnor K-群とよび, $K_2^M(K)$ で表す.

ノルム剰余記号について, 次のことが知られている:

命題 1.3. (1) (Tate (cf. [21, Theorem 6.4.2.])) *ノルム剰余記号は $K_2^M(K)$ を経由する.*

(2) (Merkurjev-Suslin [19]) *ノルム剰余記号は, 同型 $K_2^M(K)/nK_2^M(K) \cong {}_n\mathrm{Br}(K)$ を導く.*

これにより, 任意の ${}_n\mathrm{Br}(K)$ の元は, シンボル $(a,b)_{n,\zeta}$ たちの和として表示できることが分かる. すべての元がひとつのシンボルで書き表せるか, あるいは, どれくらいのシンボルを用いれば, ${}_n\mathrm{Br}(K)$ を生成できるのか, ということは, 一般には考察すべき問題として残っている.

1.3 例: Hasse-Minkowski の定理

Brauer 群とそのシンボル表示について, 一つの例を見よう. $\mathbb{Q}$ 上の 3 変数 2 次形式に関する Hasse-Minkowski の定理は次のようなものであった. 以下, $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ とかく.

命題 1.4. $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ とし, $f = ax^2 + by^2 - z^2$ とおく. このとき, 次の条件は同値である:

(a) f は $\mathbb{Q}$ において非自明な零点をもつ.
(b) f は すべての $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{Q}_\infty$ において非自明な零点をもつ.

証明は例えば [33] や [26] を見よ. [33] でも述べられているように, この定理は, Brauer 群の言葉で解釈することができる. まず, 先にでてきた $\mathbb{H}$ の一般化として, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_\infty$ (一般に標数が 2 と異なる体であればよい) と $a, b \in K$ に対して,

$$\left(\frac{a,b}{K}\right) = K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kk, \quad i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = k = -ji$$

により, 四元数環を定義することができる. これは $CSA(K)$ の元を定める. この四元数環について, 次のことが知られている ([33]):

命題 1.5. (1) $\left(\frac{a,b}{K}\right)$ が定める $\mathrm{Br}(K)$ の元はシンボル $(a,b)_2$ に等しい.
(2) f が K において非自明な零点をもつ $\Leftrightarrow (a,b)_2 = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

一般に, 体の拡大 L/K があれば, $CSA(K) \to CSA(L); A \mapsto A \otimes_K L$ により, 準同型 $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)$ が導かれる. 命題 1.5 によれば, Hasse-Minkowski の定理は次の Brauer 群に関する次の写像の単射性 (局所大域原理) を述べるものに他ならない:

$$ {}_2\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \bigoplus_{p:\text{素数または } \infty} {}_2\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p).$$

注意 1.6. (1) 終域の p に関する部分が直積でなく, 直和になることは自明ではない.
(2) 今は, 2-ねじれ部分群のみを考えたが, この準同型の単射性は, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ 全体を考えても正しく, また, その準同型の余核も知られている. さらに, $\mathbb{Q}$ に限らず, 任意の代数体に対しても, すべての有限素点, 無限素点に関する和を考えることによって, この結果は一般化される (例えば, [21, Theorem 8.1.17]).
(3) 実素点を持たないような代数体 K の場合, この結果は, 1 次元の算術的スキーム $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ ($\mathcal{O}_K$ は K の整数環) の加藤ホモロジー $KH_1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の自明性に対応するものであり, より高次元の算術的スキーム X に対しても類似の局所大域原理の成立が予想されている (加藤予想, 詳しくは, [14], [24] などを参照.)

2 代数多様体の Brauer 群

ここでは, 代数多様体の Brauer 群の定義と, それらの計算例, とくに, 本研究の先行研究である Chernousov-Guletskiĭ [4] の結果について紹介する. 代数多様体の Brauer 群についての詳細は, [10], [11], [12], [20] などを参照のこと.

2.1 代数多様体の Brauer 群

体上の中心的単純環がどれくらいあるのか, という問題意識から 体の Brauer 群が生じたが, 環や代数多様体 (スキーム) 上でも類似の構造がどれくらいあるのかを考察することは自然な流れであろう. 東屋による局所環上の「中心的単純環」(現在では東屋代数と呼ばれている) の研究 [2] を経て, Grothendieck の一連の論文 [10], [11], [12] において, 代数多様体 X の Brauer 群 $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ が定義された. 一方, 体の Galois コホモロジーの, 代数多様体に対する類似物としてエタールコホモロジーが構築され, $H^2(G_K, \overline{K}^{\times})$ に対応するものとして, その文脈では自然に (コホモロジカル) Brauer 群 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ が定義される.

注意 2.1. 2 つの定義について, いくつか補足をしておく.

(1) この 2 つを比較するような文脈では, コホモロジカル Brauer 群は $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ のねじれ部分群 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)_{tor}$ として定義されることが多い. なお, 正則なスキームであれば, $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ 自体がねじれ群となることが知られている ([11, Corollarie 1.10]).
(2) 一般に単射準同型 $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ が存在する ([20, IV, Theorem 2.5.]).
(3) $\mathrm{Br}_{\mathrm{Az}}(X)$ と $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)_{tor}$ が同型になるための条件としては, 例えば, Gabber による結果が知られている (de Jong によるプレプリント [8] 参照).

本稿では, 後者の群について考察したい:

定義 2.2. X を代数多様体 (スキーム) とする. $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ を X の Brauer 群とよぶ.

体 K 上の連結な非特異代数多様体 X に対して, その関数体を $K(X)$ と書くことにする. Grothendieck [11, Corollarie 1.10.] によれば, $\mathrm{Br}(X)$ から $\mathrm{Br}(K(X))$ には自然な単射が存在し, したがって, 代数多様体の Brauer 群は体の Brauer 群の部分群として捉えることができる. しかしながら, どのような部分群であるかについては, 一般にはわかっていないことが多く, 興味ある研究対象である. 以下, いくつかの代数多様体 X に対し, その Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ の具体的記述に関する結果を紹介したい.

$\pi\colon X \to \operatorname{Spec} K$ を構造射とするとき, $\pi^*\colon \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(X)$ が誘導される. $X(K) \neq \emptyset$ のときには, π^* は単射となることに注意する. これにより, $\mathrm{Br}(K)$ を $\mathrm{Br}(X)$ の部分群とみなす.

2.2 対角的 3 次曲面の Brauer 群

K を体とし, $b, c, d \in K^{\times}$ とする. $X_{b,c,d}$ を 斉次方程式 $x^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = 0$ で定義される $\mathbb{P}^3_K$ 内の曲面とし, これを対角的 3 次曲面とよぶ. [18], [5], [7], [30] などにおいて, $X_{b,c,d}$ の Brauer 群の構造や記述が調べられている.

命題 2.3. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \subset K$ とする. 1 の原始 3 乗根 ω を固定する. $f, g \in K(X)^{\times}$ を

$$f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g := \frac{x + z}{x + y}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

(1) (cf. [5, Proposition 1]) $\mathrm{Br}(X_{1,1,1}) = \mathrm{Br}(K)$.

(2) ([18, §45]) $d \notin (k^\times)^3$ とすると, $\mathrm{Br}(X_{1,1,d}) = \mathrm{Br}(K) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d, f)_3 \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d, g)_3$.

(3) ([30, Theorem 4.1], cf. [7]) $c, d, cd, d/c \notin (K^\times)^3$ とすると, $\mathrm{Br}(X_{1,c,d}) = \mathrm{Br}(K) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(d/c, f)_3$.

(4) ([5, Proposition 1], [30, Theorem 5.1])「一般の」$X_{b,c,d}$ に対しては, $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})/\mathrm{Br}(K) \cong 0$ または $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

注意 2.4. (1) これらの結果は, 対角的 3 次曲面 X の Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ を $\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ の Picard 群 $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の Galois コホモロジー $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ を用いて記述することによって本質的に得られるものである. これは, あとで紹介する主結果においても用いられる手法であるので, 詳しくは, 上に挙げた論文や, 本稿の §3.2 を参照されたい.

(2) $\mu_3 \not\subset K$ の場合にも $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})$ をシンボルの余制限写像による像, というかたちで記述する結果が知られている ([7, Proposition 2.1.], [25, Proposition 4.2.6] など参照).

(3) (4) については, どちらの場合も起こりうる. また, $\mathrm{Br}(X_{b,c,d})/\mathrm{Br}(K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の場合に, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の生成元を, (2) や (3) のように b, c, d を用いたシンボルでは書き表せないことが知られている ([30, Corollary 5.3]).

他の代数多様体に関する結果や Brauer 群の応用について, いくつか注意をしておく.

注意 2.5. (1) $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K) := \mathrm{Coker}\,\pi^*$ とおく. より一般の 3 次曲面に対しても, $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ の取りうる群構造については, Swinnerton-Dyer [29] により研究されており, 0, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のいずれかに同型であることが知られている.

(2) この他に, アフィン対角的 2 次曲面 ([31]) や対角的 4 次曲面 ([3]), 2 次曲線束 ([28]) などについても, Brauer 群のシンボルによる表示が考察されている. また, 標数 0 の体上の 3 次元以上の非特異な完全交叉 (例えば, 超曲面など) に対しては, $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(K)$ となることが知られている ([23, Proposition A.1]). 一般の高次元多様体については, 有理性問題などとの関係もあり, 多くの研究がなされている (例えば, [1], [6], [22] などを参照).

(3) 代数体 K 上の代数多様体 X に対し, Manin [17] は Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ を用いて, 現在では Brauer-Manin 障害と呼ばれている集合を構成した. これは, 定義から有理点集合 $X(K)$ を含んでおり, したがって, すべての K の完備化 K_v に対し, $X(K_v) \neq \emptyset$ が成り立っているような X について, この Brauer-Manin 障害が空集合であることを示すことで, 局所大域原理の反例を構成することができる. 例えば, 論文 [5] では, この障害を用いた, $\mathbb{Q}$ 上の対角的 3 次曲面の局所大域原理の反例構成がなされている.

2.3 楕円曲線の Brauer 群の 2-ねじれ部分

Chernousov–Guletskiĭ は論文 [4] において, 3 次の分離多項式 $f(x) \in K[x]$ を用いて, アフィン方程式 $y^2 = f(x)$ で定義された楕円曲線 E/K について, その Brauer 群の 2-ねじれ部分群をシンボルによって書き表す研究を行った. 以下, K は標数が 2 と異なる体とし, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ とする（a, b, c は相異なる K の元）.

注意 2.6. 論文 [4] においては, 3 次多項式 $f(x)$ が 1 次式と 2 次式の積になる場合, K 上既約な場合についても, 考察されている.

彼らの結果は次のようなものである:

定理 2.7 ([4], Theorem 3.6)**.** K を標数が 2 と異なる体, a, b, c を相異なる K の元, E を $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ で定義される K 上の楕円曲線とする. このとき

$$ {}_2\mathrm{Br}(E) = {}_2\mathrm{Br}(K) \oplus \langle (r, x-b)_2, (s, x-c)_2 \mid r, s \in K^\times \rangle $$

であり, さらに, $(r, x-b)_2 + (s, x-c)_2 = 0$ となるのは, $r, s \in (K^\times)^2$ であるとき以外では, 以下の 3 つの場合に限る:

(i) $(u-c, x-b)_2 + (u-b, x-c)_2$. ($u \in K$ は $(u, v) \in E(K)$ となる $v \in K^\times$ が存在するような元)
(ii) $(b-c, x-b)_2 + ((b-c)(b-a), x-c)_2$.
(iii) $((c-a)(c-b), x-b)_2 + (c-b, x-c)_2$.

3 対角的 3 次曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分

3.1 主結果

対角的 3 次曲線 $C : ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ の Brauer 群の 3-ねじれ部分群を, §2.3 で紹介した Chernousov–Guletskiĭ の結果の証明手法を利用して計算した結果を紹介する. 最終的には任意係数で考察することを目標としているが, 現時点では Fermat 曲線, すなわち $a = b = c = 1$ の場合についてのみ, 結果を述べる. とくに, Fermat 曲線は有理点 $(-1 : 1 : 0)$ をもつので, 楕円曲線であることに注意する.

まず, 体 K が μ_3 を含む場合には, 次のような結果を得た. なお, この結果は, [34] においても報告したものである. 以下, 1 の原始 3 乗根 $\omega \in K$ をひとつ固定しておく.

定理 3.1. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \subset K$ とする. E を $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ で定義される K 上の 3 次フェルマー曲線とする. $f, g \in K(E)^\times$ を次のように定める:

$$ f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g := \frac{x + z}{x + y}. $$

このとき, 以下が成り立つ:

$$ {}_3\mathrm{Br}(E) = {}_3\mathrm{Br}(K) + \langle (a, f)_3, (b, g)_3 \mid a, b \in K^\times \rangle. $$

Manin が考察した $X_{1,1,d}$ 型の対角的 3 次曲面は, $w = 0$ という平面切断により, 楕円曲線 E を閉部分多様体として含んでおり, そこから誘導される $\mathrm{Br}(X_{1,1,d}) \to \mathrm{Br}(E)$ によって, $\mathrm{Br}(E)$ の元を得ることができるが, 定理 3.1 によれば, この d を動かすことによって, ${}_3\mathrm{Br}(E)$ のすべての元が生成できるということがわかる.

K が μ_3 を含まない場合には次の結果を得た. $L = K(\omega)$ とおく. これは, K の 2 次拡大であり, その Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元を σ とおく. また, Brauer 群の間に $\mathrm{cores}_{L/K} \colon \mathrm{Br}(E_L) \to \mathrm{Br}(E)$ が導かれる. ここに, $E_L := E \times_K L$ は E を L に係数拡大したものである.

定理 3.2. K を標数が 3 と異なる体とし, $\mu_3 \not\subset K$ とする. E を $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ で定義される K 上の 3 次フェルマー曲線とする. $f, g \in L(E)^\times$ を次のように定める:

$$ f := \frac{x + \omega y}{x + y}, \quad g = \frac{x + z}{x + y}. $$

このとき, 以下が成り立つ:

$$ {}_3\mathrm{Br}(E) = {}_3\mathrm{Br}(K) + \langle \mathrm{cores}_{L/K}((a\cdot\sigma a, f)_3 + (a/\sigma a, g)_3) \mid a \in L^\times \rangle. $$

3.2 証明の方針

Chernousov–Guletskiĭ [4] においては, Brauer 群の 2-ねじれ部分群を調べるために, 楕円曲線 E の 2 等分点のなす G_K-加群 $E[2] := \mathrm{Ker}(E(\overline{K}) \xrightarrow{\times 2} E(\overline{K}))$ を考察しているが, 我々の設定では, 3 等分点のなす G_K-加群 $E[3]$ を考える必要がある. その点において, 考察すべき Galois 作用などは変わってくるが, 本質的な計算手法は Chernousov–Guletskiĭ のものと同様である. 以下, もう少し具体的に解説する.

1. まず, $\mathrm{Br}(E)$ を Galois コホモロジー $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E}))$ と結びつける. これには, Hochschild-Serre スペクトル系列 $E^{p,q} = H^p(G_K, H^q(\overline{E}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(E, \mathbb{G}_m)$ を用いればよいが, 写像の具体的な記述を調べるために, E の Brauer 群の Galois コホモロジーによる記述 ([16, §1])

$$ \mathrm{Br}(E) = \mathrm{Ker}(H^2(G_K, \overline{K}(E)^\times) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(\overline{E}))) $$

と, $1 \to \overline{K}(E)^\times/\overline{K}^\times \to \mathrm{Div}(\overline{E}) \to \mathrm{Pic}(\overline{E}) \to 1$ から生じる完全列

$$ 0 \to H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) \to H^2(G_K, \overline{K}(E)^\times/\overline{K}^\times) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(\overline{E})) $$

を用いて, 準同型 $\mathrm{Br}(E) \to H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E}))$ を構成する. この構成については, [4] の他, [16], [30, p.687] などを参照のこと. いまの設定においては, この写像は分裂する全射であることがわかり, その核は $\mathrm{Br}(K)$ である.

2. 対角的 3 次曲面 X に対する先行研究においては, $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 7}$ と具体的に群構造がわかっており (例えば, [13, V.4]), Galois 作用も記述できていたために, Galois コホモロジーを具体的に計算することによって, Brauer 群を生成するシンボルを得ることができた. 一方, 楕円曲線の場合には, $\mathrm{Pic}(\overline{E})$ の構造を直接みるのではなく, 次のような方法を取る. E は楕円曲線であるから, Picard 群の次数 0 部分に対し, 同型 $\mathrm{Pic}^0(\overline{E}) \cong E(\overline{K})$ が存在する (cf. [27, III, Proposition 3.4.]). このことから, $H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) \cong H^1(G_K, E(\overline{K}))$ が導かれる. さらに, 楕円曲線の 3 倍写像から導かれる長完全列から, 短完全列

$$ 0 \to E(K)/3E(K) \to H^1(G_K, E[3]) \to {}_3H^1(G_K, E(\overline{K})) \to 0 $$

が導かれる (cf. [4], [27]).

3. 最後に, $\mu_3 \subset K$ であれば, $E[3] \cong \mu_3 \oplus \mu_3$ によって, $H^1(G_K, E[3])$ の元は, $K^\times \times K^\times$ の元によって, 記述することができる. これにより, シンボルと結びつけやすそうな群にたどり着くことができたので, あとは, 以上の写像の構成を具体的に追いつつ, うまく $K(E)^\times$ の元を見つけて, 以下の図式を可換にするような写像 ϵ を構成すればよい:

$$ \begin{array}{ccccc} K^\times \times K^\times & & \longrightarrow & & H^1(G_K, E[3]) \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & & & \downarrow \\ {}_3\mathrm{Br}(E) & \longrightarrow & H^1(G_K, \mathrm{Pic}(\overline{E})) & \longrightarrow & {}_3H^1(G_K, E(\overline{K})). \end{array} $$

$\mu_3 \not\subset K$ のときは, $E[3]$ が G_K-加群として非自明であるから, 拡大体 L で同様の議論をした後に, K 上に戻る必要がある. $\mu_3 \subset K$ の場合に比べ, ϵ にあたる写像の構成はより複雑になるが, その詳細について

は, 上の図式の可換性の証明や任意係数の場合の考察とともに, 論文としてまとめ, 追って報告する予定である.

注意 3.3. 本研究は曲線 C の Brauer 群 $\mathrm{Br}(C)$ を C の言葉で記述することを目的とするものであって, これとはやや方向性が異なるが, Weil-Châtelet 群 $H^1(G_K, E(\overline{K}))$ の各元に対応する曲線 C に対応する ${}_3\mathrm{Br}(E)$ の元を東屋代数として記述する研究が, [15], [9] においてなされている.

謝辞

本報告の執筆および講演の機会を与えてくださいました第 14 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に感謝申し上げます. 本研究は, 科研費（課題番号:15K17526）の助成を受けたものである.

参考文献

[1] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), no. 3, 75–95.

[2] G. Azumaya, *On maximally central algebras*, Nagoya Math. Journal **2** (1951), 119–150.

[3] M. Bright, *Brauer groups of diagonal quartic surfaces*, Journal of Symbolic Computation **41** (2006), 544–558.

[4] V. Chernousov and V. Guletskiĭ, *2-torsion of the Brauer group of an elliptic curve: generators and relations*, Proceedings of the Conference on Quadratic Forms and Related Topics(LSU, Baton Rouge, 2001). Documenta Math., Extra vol., 2001, pp. 85–120.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, and J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[6] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'example d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), 141–158.

[7] J.-L. Colliot-Thélène and O. Wittenberg, *Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines*, Amer. J. of Math. **134** (2012), no. 5, 1303–1327.

[8] A. J. de Jong, *A result of Gabber*, preprint, `http://www.math.columbia.edu/~dejong/paper/2-gabber.pdf`.

[9] T. Fisher, *On some algebras associated to genus one curves*, arXiv:1707.08330v1, 2017.

[10] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–65.

[11] ———, *Le groupe de Brauer II*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 66–87.

[12] ———, *Le groupe de Brauer III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 88–188.

[13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977.

[14] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, J. Reine Angew. Math. **366** (1986),

142–183, With an appendix by J.-L. Colliot-Thélène.

[15] J.-M. Kuo, *On an algebra associated to a ternary cubic curve*, J. Algebra **330** (2011), 86–102.

[16] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. Math. **7** (1969), 120–136.

[17] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes de Congrès international de Mathématiciens (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[18] ———, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Translated from Russian by Hazewinkel, M.

[19] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.

[20] J. S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1980.

[21] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[22] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, to appear in the proceedings of the AMS Algebraic Geometry Summer Institute, SLC 2015.

[23] B. Poonen and J. F. Voloch, *Random diophantine equations*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser, 2004, pp. 175–184.

[24] S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes*, Proceedings of the International Congress of Mathematics (New Delhi), vol. II, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 558–585.

[25] S. Saito and K. Sato, *Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 3, 505–537.

[26] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Graduate Text in Mathematics, no. 7, Springer-Verlag, 1973.

[27] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, 2009.

[28] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[29] P. Swinnerton-Dyer, *The Brauer group of cubic surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (1993), no. 3, 449–460.

[30] T. Uematsu, *On the Brauer group of diagonal cubic surfaces*, Q. J. Math. **65** (2014), no. 2, 677–701.

[31] ———, *On the Brauer group of affine diagonal quadrics*, Journal of Number Theory **163** (2016), 146–158.

[32] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*, Proc. London Math. Soc. **s2-6** (1908), no. 1, 77–118.

[33] 斎藤秀司, **整数論**, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 20, 共立出版, 1997.

[34] 植松哲也, 3 次フェルマー曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分について, 2018 年度日本数学会年会代数学分科会アブストラクト集, 2018.

$O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式に付随するテータ級数の構成

加藤 義久　(Yoshihisa Kato)
大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程 1 年

概 要

$A \in M(m, \mathbf{Z})$ を正定値対称行列とする. A に関する調和多項式付きのテータ級数とよばれる保型形式の構成法が知られている（[Miyake89, p.192] 参照）. [Funada16] では A として E_8 をとり, 低次の調和多項式の場合にテータ級数が自明にならないような調和多項式を調べられた. 本稿では 対称行列として $A = E_6$ をとり, 同様に低次の場合にテータ級数が自明にならないような調和多項式を調べるとともに, Hecke 作用素 $T(p)$ をテータ級数から成る空間に作用させ, その振る舞いを調べた.

1　調和多項式とテータ級数

m 次実対称行列 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ と, $x \in \mathbf{R}^m$ について $A[x] = {}^t xAx$ と定義する. 実対称行列 A が正定値であるとは任意の $0 \neq x \in \mathbf{R}^m$ について $A[x] > 0$ が成立することを言う.

1.1　調和多項式

定義 1.1.1 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ が正定値であるとし, m 変数複素係数 l 次同次多項式のなす複素ベクトル空間を $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ で表す. $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ の $\mathbf{C}$-部分線形空間 $\mathcal{H}_l(A)$ を

$$\mathcal{H}_l(A) = \{P(x) \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_m]_l \mid \Delta_A P(x) = 0\}$$

で定める. ここで A に関するラプラシアン Δ_A を

$$\Delta_A = \sum_{1 \leq i,j \leq m} a^{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (a^{i,j} \text{は } A \text{ の逆行列 } A^{-1} \text{の } (i,j) \text{ 成分})$$

で定めた. $\mathcal{H}_l(A)$ に属する多項式 P を, 対称行列 A に関する調和多項式 (A-調和多項式) とよぶ.

定理 1.1.2

$$\dim_{\mathbf{C}} H_l(A) = \binom{l+m-1}{m-1} - \binom{l+m-3}{m-1}.$$

ただし, $a < b$ のとき, $\binom{a}{b} = 0$ と定める.

1.2 テータ級数の変換公式

$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ を上半平面とする. $SL(2, \mathbf{Z})$ は $\mathbf{H}$ に左から 1 次分数変換として作用することに注意する. $SL(2, \mathbf{Z})$ の部分群 $\Gamma(N)$ を次のように定める.

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \mod N \right\}.$$

定義 1.2.1 部分群 $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{Z})$ が, ある $N \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ について $\Gamma(N) \subset \Gamma$ となるとき, Γ を $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群であるとよび, $\Gamma(N) < \Gamma$ となる最小の N を Γ のレベルと呼ぶ.

商空間 $\Gamma \backslash \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ の元を群 Γ の *cusp* と呼ぶ.

定義 1.2.2 $k \geq 0$ とする. レベル N の合同部分群 Γ と準同型 $\chi : \Gamma \to \mathbf{C}^\times$ について, 関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ が次の条件を満たすとき, 群 Γ についての χ に関する重さ k の *modular form* とよぶ.

(i) f は $\mathbf{H}$ 上正則である.

(ii) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して, $f_k[M](z) = (cz + d)^{-k} f(Mz)$ とすると $f_k[M](z) = \chi(M) f(z)$ が成立する.

(iii) (ii) の $f_k[M]$ を次のようにフーリエ展開する.

$$f_k[M](z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f, M) q^n, \quad (q = \exp(2\pi\sqrt{-1}z/N)).$$

いま, 全ての $M \in SL(2, \mathbf{Z})$ について $n < 0$ ならば $a_n(f, M) = 0$ である.

定義 1.2.3 レベル N の合同部分群 Γ についての準同型 χ に関する重さ $k \in \mathbf{Z}$ の *modular form* 全体からなる群を $M_k(\Gamma, \chi)$ とかく. また

$$S_k(\Gamma, \chi) = \{f \in M_k(\Gamma, \chi) \mid a_n(f, M) = 0 ({}^\forall M \in SL(2, \mathbf{Z}))\}$$

とかき, $f \in S_k(\Gamma, \chi)$ を群 Γ について準同型 χ に関する重さ k の *cusp form* とよぶ.

ここで, [Miyake89, §4.9] に従って, 調和多項式付きのテータ級数とよばれる保型形式の構成法を述べる.

定理 1.2.4 $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{Z})$ を正定値行列とする. $P \in \mathcal{H}_l(A)$ に対して級数 $\theta(z; A, P)$ を

$$\theta(z; A, P) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} P(\xi) \exp(\pi\sqrt{-1} A[\xi] z)$$

で定めるとこれは $\mathbf{H}$ 上広義一様収束する. さらに, $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ を $NA^{-1} \in M(m, \mathbf{Z})$ をみたすものとし, *Dirichlet* 指標 $\chi : \mathbf{Z} \to \{\pm 1\}$ を $\chi(a) = \left(\dfrac{(-1)^{m/2}\det(A)}{a}\right)$(Kronecker 記号 [Miyake89, §3.1]) で定めると, 次が成り立つ.
(i) $\Theta(2z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(4N), \chi)$. ただし, $k = (m/2) + l$ であり,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N \right\}$$

と定めた.
(ii) A が偶, すなわち任意の $\xi \in \mathbf{Z}^m$ について $A[\xi] \in 2\mathbf{Z}$ が成り立つとき,

$$\Theta(z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(2N), \chi).$$

(iii) A と NA^{-1} の対角成分が全て偶数であるとき, $\Theta(z; A, P) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. さらに $l \geq 1$ ならば, $\theta(z; A, P) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ である.

1.3 不変式の利用

定義 1.3.1 G を有限群, V を有限次元 $\mathbf{C}$-ベクトル空間とする. いま, $\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とする. このとき, V の部分空間 V^G, $V(G)$ をそれぞれ

$$V^G = \{v \in V \mid {}^\forall g \in G,\ \rho(g)v = v\}, \quad V(G) = \langle v - \rho(g)v \mid g \in G,\ v \in V \rangle_{\mathbf{C}}$$

で定める. ここで, V の部分集合 S に対して, S で生成される V の部分ベクトル空間を $\langle S \rangle_{\mathbf{C}}$ と表した.

いま $l \geq 0$, $A \in \mathrm{Sym}(m, \mathbf{Z})$ とし, $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ を表現空間とする直交群 $O(A, \mathbf{Z}) = \{h \in GL(m, \mathbf{Z}) \mid {}^t hAh = A\}$ の表現 ρ を

$$(\rho(g)P)(x) = P(g^{-1}(x)), \quad (x \in M(m, 1; \mathbf{C}),\ g \in O(A, \mathbf{Z}),\ P(x) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l)$$

で定める.

命題 1.3.2 任意の $P(x) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ に対して

$$\Delta_A(\rho(g)P)(x) = \rho(g)(\Delta_A P)(x)$$

が成り立つ.

命題 1.3.2 より $\mathcal{H}_l(A)$ は $\mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_m]_l$ の部分表現であることが分かる. ここで有限群の表現論から, 次が成り立つことがわかる.

定理 1.3.3 $\mathcal{H}_l(A) = \mathcal{H}_l(A)^{O(A,\mathbf{Z})} \bigoplus \mathcal{H}_l(A)(O(A, \mathbf{Z}))$.

さて, 簡単のために A, NA^{-1} が偶であるとする. このとき, 定理 1.2.4 の (iii) について, Dirichlet 指標 $\chi : \mathbf{Z} \to \{\pm 1\}$ を $\chi(a) = \left(\dfrac{(-1)^{m/2}\det(A)}{a}\right)$ で定めると線形写像 $\Theta \equiv \Theta_{A,l}$:$\mathcal{H}_l(A) \to M(\Gamma_0(N), \chi)$ が,

$$\Theta(P) = \Theta(z; A, P) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} P(\xi)\exp(2\pi\sqrt{-1}A[\xi]z) \quad (P \in \mathcal{H}_l(A))$$

で定まる. Θ について, 次の命題が容易に示せる.

命題 1.3.4 $P(x) \in \mathcal{H}_l(A)(O(A, \mathbf{Z}))$ に対して

$$\Theta(P) \equiv 0.$$

以上より, $\Theta(P) \equiv 0$ となるような P を求めるには $\mathcal{H}_l(A)^{O(A,\mathbf{Z})}$ に限定して考えれば良いことが分かる.

2 $O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式の空間

正定値行列 $E_6 \in \mathrm{Sym}_6(\mathbf{Z})$ を

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. これは, E_6 型ルート系の Cartan 行列である. いま, 行列 E_6 は偶, かつ $\det E_6 = 3$ であり, E_6の 逆行列は

$$E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 & 5/3 & 2 & 4/3 & 2/3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5/3 & 2 & 10/3 & 4 & 8/3 & 4/3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4/3 & 2 & 8/3 & 4 & 10/3 & 5/3 \\ 2/3 & 1 & 4/3 & 2 & 5/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

となる. ゆえに, 定理 1.2.4 の (iii) において, $A = E_6$, $N = 3$ ととることにより, 写像 $\Theta : \mathcal{H}_l(E_6) \to M_k(\Gamma_0(3), (\frac{-3}{\cdot}))$ を得る. いま, $\mathrm{Im}\Theta$ を調べたい. そのためには, 小節 1.3 の最後の注意により, $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ についてのみ調べれば良い.

2.1 $O(E_6, \mathbf{Z})$ の構造

この小節では, E_6 型ルート系及びそのワイル群 $W(E_6)$ を導入し, $W(E_6)$ と $O(E_6, \mathbf{Z})$ の関係を調べる. まずは E_6 型ルート系を定義する. いま $V = \{{}^t(x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2) \in \mathbf{R}^8 \mid \sum_{i=1}^6 x'_i = 0, y'_1 + y'_2 = 0\}$ とすると, V は $\mathbf{R}^8$ の部分ベクトル空間である. $\mathbf{R}^8$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_8$ とする. さらに V には $\mathbf{R}^8$ の標準内積 $(,)$ の制限を与える.

命題 2.1.1 V の部分集合

$$\begin{aligned} R(E_6) &= \left\{ \beta \in \frac{1}{2} \bigoplus_{i=1}^{8} \mathbf{Z} e_i \cap V \mid (\beta, \beta) = 2 \right\} \\ &= \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq 6\} \\ &\cup \left\{ \pm \left(-(e_i + e_j + e_k) + \frac{1}{2}(S_1 - e_7 + e_8) \right) \mid 1 \leq i < j < k \leq 6 \right\} \\ &\cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \end{aligned}$$

は V 内のルート系である. ただし $S_1 = \sum_{i=1}^6 e_i$ である. また $R(E_6)$ の基底として次が取れる.

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = e_1 - e_2, && \alpha_2 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8), \\ &\alpha_3 = e_2 - e_3, && \alpha_4 = e_3 - e_4, \\ &\alpha_5 = e_4 - e_5, && \alpha_6 = e_5 - e_6. \end{aligned}$$

また, $R(E_6)$ の基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ に関する Cartan 行列 $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i,\, j \leq 6} \in M(6, \mathbf{Z})$ は E_6 に一致する.

命題 2.1.1 の $R(E_6)$ を E_6 型ルート系とよぶ. また, $\sharp\, R(E_6) = 72$ である. 命題 2.1.1 の $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ に関する鏡映を $s_1, \ldots, s_6$ とする. $R(E_6)$ に関する Weyl 群 $W(E_6)$ を

$$W(E_6) = \langle s_1, \ldots, s_6 \rangle \subset GL(V)$$

で定義される. このとき 次の命題が成り立つ.

命題 2.1.2 (i) 6 次対称群の元

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

について, 命題 2.1.1 対し, $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)} (1 \leq i \leq 6)$ と定めることで, σ を $\mathbf{R}^6$ の自己同型, すなわち $GL(6, \mathbf{Z})$ の元としてみる事が出来る. さらに

$$\mathrm{Aut}(E_6, (,)) := \{f \in GL(V) \mid f(R(E_6)) = R(E_6) \text{ かつ } (f(\alpha), f(\beta)) = (\alpha, \beta) (\alpha, \beta \in R(E_6))\}$$

とする. このとき

$$W(E_6) \rtimes \langle \sigma \rangle \quad = \quad \mathrm{Aut}(E_6, (,))$$

が成立する.
(ii) $f \in \mathrm{Aut}(E_6, (,))$ のルート系 $R(E_6)$ の基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ に関する行列表示を B_f とかく. このとき $B_f \in O(E_6, \mathbf{Z})$ であり, 線形写像 $\Phi : \mathrm{Aut}(E_6, (,)) \to O(E_6, \mathbf{Z})$ は同型写像となる.

2.2 $W(E_6)$ の basic invariants

まず Chevalley による次の定理を [Humphreys90, p.54] より引用する.

定理 2.2.1 (Chevalley) $W \subset GL(V)$ を鏡映により生成される有限群とし, $V^W = \{0\}$ を仮定する. このとき $\mathbf{C}$-代数として正の次数をもつ n 個の代数的独立な同次多項式 $f_1, \ldots, f_n$ があって

$$\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]^W = \mathbf{C}[f_1, \ldots, f_n]$$

が成り立つ.

ここで [Mehta88] に従い, 定理 2.2.1 の生成系 (basic invariant と呼ばれる.) を $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]^{W(E_6)}$ の場合に具体的に与える.

定理 2.2.2 [Mehta88] $l \in \mathbf{Z}_{>0}$ とし, 多項式 $I'_k(x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2) \in \mathbf{C}[x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2]$ を

$$\begin{aligned} I'_k(x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2) \quad &= \quad \sum_{i<j} (x'_i + x'_j - \frac{1}{3} S_1(x'))^k \\ &+ \quad \sum_{i=1}^{6} \left(-x'_i + \frac{1}{2}(y'_1 - y'_2) + \frac{1}{6} S_1(x') \right)^k \\ &+ \quad \sum_{i=1}^{6} \left(-x'_i - \frac{1}{2}(y'_1 - y'_2) + \frac{1}{6} S'_1(x) \right)^k \end{aligned}$$

で定める. ただし, $S_1(x') = \sum_{i=1}^{6} x'_i$ である.

このとき, $(\mathbf{C}[x'_1, \ldots, x'_6, y'_1, y'_2]/(x'_1 + \cdots + x'_6, y'_1 + y'_2))^{W(E_6)}$ の代数的独立な生成系として

$$I'_2, \ I'_5, \ I'_6, \ I'_8, \ I'_9, \ I'_{12}$$

がとれる.

3　主定理

$T_{l+3} = \{\theta(z; E_6, P) \mid P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)\}$, $I_l^O = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, x_2, ..., x_6]_l^{O(E_6,\mathbf{Z})}$, $h_l^O = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ とおく. $k = l + 3$ について次の表が成立する.

定理 3.0.3 次の表が成立する.

l	k	$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_6)$	I_l^O	h_l^O	$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3}$	$\dim_{\mathbf{C}} S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$
2	5	20	1	0	0	0
4	7	105	1	0	0	1
6	9	336	2	1	1	2
8	11	825	3	1	1	2
10	13	1716	4	1	1	3
12	15	3185	6	2	2	4
14	17	5440	8	2	2	4
16	19	8721	10	2	2	5
18	21	13300	14	4	3	6
20	23	19481	18	4	3	6

定理 3.0.4 Hecke 作用素 $T(2)$ について, $l = 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 18,\ 20$ のとき

$$S_{l+3} = T_{l+3} \bigoplus T(2)(T_{l+3})$$

が成り立つ.

定理 3.0.3 により $l = 18,\ 20$ についてテータ級数を与える写像（テータ写像）は単射にならないことが示せた. 一般にテータ写像の $\mathcal{H}_l(E_6) = \mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ への制限写像を考えたときその核の構造には興味がもたれる. また定理 3.0.4 が一般に $\dim_{\mathbf{C}} S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$ が偶数のときに成り立つのかもまた興味がもたれる.

4　証明の概略

$P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)$ に付随したテータ級数 $\Theta_{E_6,l}(P)$ 全体のなす $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間を T'_{l+3} とする. このとき, 命題 1.4.5 から

$$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3} = \dim_{\mathbf{C}} {T'}_{l+3}$$

が成立する.

さて, $U = \mathbf{R}^6$, $V' = \mathbf{R}^8$ とし, それぞれの標準基底を $e_1, ..., e_6$ 及び $e'_1, ..., e'_8$ とする. U

と $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ を小節 2.1 で定めたルート系とその基底とする. いま, U と行列 (E_6) で定義される U の計量の組 (U, E_6) と, V' と単位行列 I_8 で定義される V' の計量の組 (V', I_8) を考える. このとき単射線形写像 $\phi : U \to V'$ を任意の $i \in \{1, \ldots, 6\}$ に対して

$$\phi(e_i) = \alpha_i$$

で定めると, $R(E_6)$ の Cartan 行列が E_6 に等しいことから, これは計量を保つ写像になる. ここで ϕ の基底 $e_1, ..., e_6$ 及び $e'_1, ..., e'_8$ に関する行列表示を $B \in M(8, 6, \mathbf{Z})$ とおく. このとき, U, V' の双対空間を U^*, V'^* とし, $e_1, ..., e_6$ 及び $e'_1, ..., e'_8$ に関する双対基底をそれぞれ, $x_1, ..., x_6$ 及び $x'_1, ..., x'_8$ とする. いま, ϕ の引き戻しである全射線形写像 $\phi^* : V'^* \to U^*$, $\phi(f) = f \circ \phi$ が誘導され これにより不変式 $I'_k(x'_1, \ldots, x'_8) \in (\mathbf{C}[x'_1, \ldots, x'_8]/(x'_1 + \cdots + x'_6, x'_7 + x'_8))^{W'}$ について次が成立する.

$$I_k(x_1, \ldots, x_6) := I'_k(\phi^*(x'_1), \ldots, \phi^*(x'_8)) \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]^{W(E_6)}.$$

ただし, W' は A の各列を基底とする V' 内のルート系 R' の Weyl 群である. よって $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]^{W(E_6)}$ の代数的独立な生成系が構成された.

補題 4.0.5

$$\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})} = \begin{cases} \{0\} & (l \text{ は奇数}) \\ \mathcal{H}_l(E_6)^{W(E_6)} & (l \text{ は偶数}) \end{cases}$$

証明 $O(E_6, \mathbf{Z}) = W(E_6) \rtimes \langle \sigma \rangle$ であることに気をつける. ただし

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. また $(\rho(\sigma)I_k) = (-1)^k I_k$ であることが分かる. ただし ρ は小節 1.1 で構成した $O(E_6, \mathbf{Z})$ の作用である. □

補題 4.0.5 から $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ を調べるためには, $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]^{W(E_6)}$ の偶数次の元でラプラシアン Δ_{E_6} で消えるものを調べれば良い. Mathematica を用いて具体的に基底を計算することで次を得る.

定理 4.0.6 次の表が成立する.

l	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$	1	0	0	1	1	1	2	2	2	4	4

いま, ここで求めた $\mathcal{H}_l(E_6)$ の基底を用いて $T_{l+3} = \{\theta(z; E_6, P) \mid P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)\}$ の次元を同じく計算する. そのために Hecke 作用素を $\mathcal{H}_l(E_6)^{O(E_6,\mathbf{Z})}$ の基底に対応する Θ 級数にほどこし, T_{l+3} から $S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$ の構造を調べる.

定義 4.0.7 ヘッケ作用素 $T(n) : M_k(\Gamma_0(3), \chi) \to M_k(\Gamma_0(3), \chi)$ を以下で定める.

$$(T(n)f)(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n \text{ かつ } d>0} \sum_{b=0}^{d-1} \chi(a) d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad (f \in M_k(\Gamma_0(3), \chi)).$$

さて $l \geq 1$ のとき $P(x) \in \mathcal{H}_l(E_6)$ は同次多項式なので, $P(0) = 0$ となる. また E_6 は正定値より $E_6[x] = 0$ のとき, $x = 0$ である. ゆえに

$$\Theta(P) \in S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi)$$

となる. これに気をつけることで以下の定理が示せる. この定理及び系での計算は Mathematica で行ったものである.

定理 4.0.8 T_{l+3} について次の二つが成立する.
(i) $M_3(\Gamma_0(3), \chi) = T_3 \bigoplus T(2)(T_3)$.
(ii) $l = 6\ , 8,\ 12,\ 14,\ 18,\ 20$ について

$$S_{l+3}(\Gamma_0(3), \chi) = T_{l+3} \bigoplus T(2)(T_{l+3}).$$

系 4.0.9 次の表が成り立つ.

l	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\dim_{\mathbf{C}} T_{l+3}$	1	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

参考文献

[Coxeter51] H.S.M. Coxeter, The product of the generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J. **18**, p.765-p.782 (1951).

[DS04] F. Diamond and J. Shurman, A First Course In Modular Forms, Springer (2004).

[Funada16] Y. Funada, $O(E_8, \mathbf{Z})$-不変球関数を用いたテータ関数の構成 , 大阪大学修士論文 (2016).

[Gunning62] R.C.Gunning., Lectures on modular forms,. Annals of Mathematics studies. Princeton University Press (1962)

[Humphreys90] J. E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press (1990).

[Kato17] Y. Kato, $O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式に付随するテータ級数の構成, 大阪大学修士論文 (2017).

[Lang99] S. Lang, Math Talks for Undergraduates Springer (1999).

[Mehta88] M. L .Mehta, Basic Set of Invariant Polynomials for Finite Reflection Group, Communications in Algebra, 16, p1083-p1097, (1988) .

[Miyake89] Toshitsune Miyake, Modular Form Berlin. Tokyo. Springer-Verlag (1989).

[Serre73] J. P. Serre, A Course in Arithmetic, Springer-Verlag (1973).

[Serre87] J. P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Springer-Verlag (1987).

ASAI 表現に付随する EPSILON 因子の比較について

石川 勲 (ISAO ISHIKAWA)
理化学研究所革新知能統合センター/慶應義塾大学

Abstract. 本稿では主に GL_2 上の generic な既約許容表現に対して定まる *Asai* 表現が主題である. Asai 表現に対して L 関数, 及び, epsilon 因子と呼ばれる不変量が定義できるが, この不変量には 3 つの異なる定義が存在する. それらの定義は全く異なる文脈でなされるため, それらの比較は重要な問題である. 今回, 筆者は定義の異なる epsilon 因子ら同士の明示的な関係式を与えたので, その結果について概説したい.

1. Asai 表現に付随する L 関数, 及び, epsilon 因子の定義

ここでは Asai 表現に付随する L 関数, 及び, epsilon 因子について復習する. まず, Rankin-Selberg 積分を用いた定義を詳しく述べた後に, 他の定義を簡単に紹介し, それらの定義間に関係性について述べる. 1 つ注意として, Asai 表現は Langlands 対応によって Galois 側で明示的に定義されるため, 保型表現を主に取り扱う本稿では Asai 表現と呼ばれる表現は現れず, その L 関数と epsilon 因子のみが定義される形となる. 以下においては p を素数として, F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする.

1.1. Rankin-Selberg 積分を用いた定義について.

E を F 上の 2 次半単純代数とする, すなわち, E は F の 2 次拡大体か $F \times F$ である. $E = F \times F$ である時, F を対角埋め込みによって E の部分体とみなす. $\varpi_F \in F$ を F の素元として 1 つ固定する. E が体の時は, $\varpi_E \in E$ を E の素元として 1 つ固定する. $|\cdot|_F$ を F の p 進絶対値とし, $|\varpi_F|_F = q^{-1}$ と正規化する. ここで q は F の剰余体の位数である. $|\cdot|_E$ を $|\mathrm{N}_{E/F}(\cdot)|_F$ によって定義する. $\mathrm{N}_{E/F}$ は $E^\times$ から $F^\times$ へのノルム写像である. 以下では, $\xi \in E^\times$ を $\mathrm{tr}_{E/F}(\xi) = 0$ なるものとして 1 つ固定する.

π を $\mathrm{GL}_2(E)$ の無限次元既約許容表現として中心指標を ω とする. ここで, 表現 π が許容表現であるとは, 任意の開コンパクト部分群 $K \subset \mathrm{GL}_2(E)$ に対して, π の K 不変部分空間 π^K が有限次 $\mathbb{C}$ 線形空間であり, さらに,

$$\pi = \bigcup_{K:\text{開コンパクト部分群}} \pi^K$$

が成立するものを指す.

$\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を加法的な非自明連続準同型とする. さらに,

$$\psi_\xi : E \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \quad x \mapsto \psi(\mathrm{tr}_{E/F}(\xi x))$$

と定義する.

$\mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ を π, 及び, ψ_ξ に付随する Whittaker 模型とする. すなわち, $\mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ は $\mathrm{GL}_2(E)$ 上の連続関数 f であって次の性質を満たすもの全体の集合である: 任意の $u \in E$ と $g \in \mathrm{GL}_2(E)$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \psi_\xi(u) f(g)$$

が成立し, さらに, ある開コンパクト部分群 $K \subset \mathrm{GL}_2(E)$ が存在して, 任意の $k \in K$ と $g \in \mathrm{GL}_2(E)$ に対して

$$f(gk) = f(g)$$

が成立する.

$\mathfrak{S}(F^2)$ を F^2 上の Bruhat-Schwartz 関数 (局所定数かつ support コンパクトな関数) 全体とする. 任意の $\Phi \in \mathfrak{S}(F^2)$ と $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ に対して $s \in \mathbb{C}$ の関数を次のように定義する (このような形の積分を総称して Rankin-Selberg 積分と呼ぶ):

$$Z(s, W, \Phi) := \int_{U(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} W(g)\, \Phi((0,1)g)\, |\det(g)|_F^s\, dg. \tag{1.1}$$

ここで $U(F)$ は $\mathrm{GL}_2(F)$ の冪単かつ上三角行列全体であり, dg は $\mathrm{GL}_2(E)$ の不変測度で $\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F), dg) = 1$ を満たすものとする. $Z(s, W, \Phi)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分に大きい時にこの積分は絶対収束し複素平面全体に有理型関数として解析接続される. より詳しくは, $Z(s, W, \Phi)$ は $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ の商体の元となる. $Z(s, W, \Phi)$ らによって生成される $\mathbb{C}$ 線型空間は $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ の分数イデアルになっており, さらに 1 を含むことが確かめられる. 従って, ある多項式 $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ かつ $P(0) = 1$ なるものが存在して, $P(q^{-s})^{-1}$ がその分数イデアルの生成元となる ([Fl93, Appendix, Theorem]).

まず, Asai 表現に付随する L 関数 (Asai L 関数)$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi)$ をこの生成元によって定義する:

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi) := \frac{1}{P(q^{-s})}.$$

より一般に任意の指標 $\chi\colon F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi) := L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}(\pi \otimes \widetilde{\chi}))$$

と定義する. ここで, $\widetilde{\chi}\colon F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は

$$\widetilde{\chi}|_{F^\times} = \chi.$$

を見たす $E^\times$ の指標である. この定義は $\widetilde{\chi}$ の選択に依存しないことに注意する. この $\mathbb{C}$ 上の有理型関数は次の関数等式を満たす ([Fl93, Appendix, Theorem]): 任意の $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ に対して

$$\frac{Z(1-s, W \otimes \chi^{-1}\omega^{-1}, \widehat{\Phi})}{L_{\mathrm{RS}}(1-s, \mathrm{As}\pi^\vee \otimes \chi^{-1})} = \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) \frac{Z(s, W \otimes \chi, \Phi)}{L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi)}. \tag{1.2}$$

ここで, $\pi^\vee$ は π の双対表現であり, π, ψ, 及び, ξ のみから定まる数 $c \in \mathbb{C}^\times$ と $m \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) = cq^{-ms},$$

が成り立つ. また

$$\widehat{\Phi}(x, y) := \int_{F \times F} \Phi(u, v)\psi(uy - vx)\, du\, dv$$

と定義する. ここで, $du\, dv$ は $F \times F \to \mathbb{C}; (x, y) \mapsto \psi(x + y)$ に関する自己双対的な不変測度である. すなわち

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x, y) = \Phi(x, y)$$

が成立する.

注意 1.1. $E = F \times F$ の時, $\xi = (\xi_0, -\xi_0)$ として $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ とする. ここで, $\pi_i \mathrm{GL}_2(F)$ の中心指標が ω_i となる generic な既約表現である. この時, この Asai L 関数は Jacquet により定義された [Jac72, Theorem 14.8, (1)] における古典的な Rankin-Selberg 局所 L 関数と一致する. epsilon 因子については $\varepsilon_{\mathrm{RS}}$ と [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものは

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) &= \omega_2(-1)\omega(\xi_0)|\xi_0|_F^{2s-1}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi) \\ &= \omega(\xi)|\xi|_E^{s-1/2}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi)\end{aligned}$$

なる関係にある. ここで右辺の $\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi)$ が [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものである.

1.2. **Asai 表現の L 関数, 及び, epsilon 因子の別の定義について.** 最初に述べたように, Asai L 関数には Rankin-Selberg 積分を用いた定義以外にも 2 つ異なる定義が存在する. まず 1 つは Langlands-Shahidi 法 ([Sha90]) と呼ばれる簡約代数群上定義される繁絡作用素を用いた定義があり, E が体の時は, $\mathrm{U}(2,2)$ に対して, E が F^2 の時は, GL_4 に対して Langlands-Shahidi 法を適用することにより, L 関数と epsilon 因子が得られる. これによって定義されたものを

$$L_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\pi),$$
$$\varepsilon_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi).$$

と書く. もう 1 つは, ρ を Langlands 対応によって定まる π に対応した E の Weil-Deligne 群の表現とした時, ρ の乗法的誘導表現 ([Pra92, Section 7]) から定義される L 関数, 及び, epsilon 因子である. これらを

$$L_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\pi),$$
$$\varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi).$$

と書く.

異なる定義間の関係性について述べる. まず, L 関数については, E が体の時, L_{RS}, L_{LS}, そして, L_{Gal} は全て一致することが, [Hen10, Section 1.5, Théorème], [Mat09, Theorem 1.3], 及び, [AR05, Theorem 1.6] の一連の結果によって証明されている. $E = F^2$ の時はそれらが一致することは古典的な結果である. 従って, これらを

$$L(s, \mathrm{As}\pi) := L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi) = L_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\pi) = L_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\pi).$$

と書くことにする.

epsilon 因子については, E が体の時は, Krishmarthy ([Kri03]) によって, Langlands-Shahidi 法を用いたものと, Weil-Deligne 群の表現から定まるものが一致することが示されている. 従って, 以下では

$$\varepsilon(s, \mathrm{As}\pi, \psi) := \varepsilon_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi) = \varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi)$$

とする. $E = F^2$ の時は, epsilon 因子の明示的な関係式は Jacquet ([Jac72, Corollary 19.16]), 及び, Shahidi ([Sha84, Theorem 5.1.] によって得られている.

筆者は, E が体の時に, epsilon 因子について Rankin-Selberg 積分を用いた定義と, Weil-Deligne 表現を用いた定義との間の明示的な関係式を証明した. それについて次章で説明する.

2. EPSILON 因子同士の明示的な関係式について

この章では筆者の主結果と証明の概略を紹介する. 記号は前章と同様とする. 主結果は以下の通りである.

定理 2.1. F を $\mathbb{Q}_p$ 上有限次拡大とする. E を F 上の半単純 2 次代数とする. π を無限次元既約許容表現として中心指標を ω とする. $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を加法的指標として $\xi \in E^\times$ を $\mathrm{tr}_{E/F}(\xi) = 0$ 満たす元とする. この時, 次が成立する:

$$\omega^{-1}(\xi)\,|\xi|_E^{-s+1/2}\,\lambda_{E/F}(\psi)\,\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) = \varepsilon(s, \mathrm{As}\pi, \psi)$$

ここで, $\lambda_{E/F}(\psi)$ は Langlands 定数と呼ばれるもので, E が体の時は, E/F に対応する 2 次指標の root number であり, $E = F^2$ の時は 1 である.

証明の概略について述べる. 技術的に鍵となるのは次の $\varepsilon_{\mathrm{RS}}$ の乗法性である:

定理 2.2. $\mu, \nu : E^\times \to \mathbb{C}^\times$ を指標として. π を主系列表現 $\pi(\mu, \nu)$ とする. この時, 次が成立する:

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) = \nu(-1)\varepsilon(s, \mu|_{F^\times}, \psi)\varepsilon(s, \nu|_{F^\times}, \psi)\varepsilon(s, \mu\nu^\sigma, \psi_\xi).$$

この定理の帰結として, π が主系列表現, 及び, 特別表現の時に, 定理 2.1 が従う. 定理 2.2 の証明は, $\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi)$ の定義に立ち戻り, 良い Whittaker 関数 $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$, 及び, Bruhat-Schwartz 関数 Φ を見つけて関数等式 (1.2) の両辺を明示的に計算をすることによる.

従って, GL_2 の許容表現に関する Langlands 分類により, 問題は π が超尖点形式の場合に帰着される. 重要な事実として, 大域的な epsilon 因子については, Asai 表現の modularity, 及び, L 関数の一致によって, 異なる定義から定まる大域的 epsilon 因子の一致する. 従って, π を大域的な保型表現に持ち上げることで証明が完結する.

注意 2.3. 筆者は主に非アルキメデス的な状況を考察したが, アルキメデス的な類似として, 2 次拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に関する Asai L 関数, 及び, epsilon 因子を同様の Rankin-Selberg 積分を用いて定義し, それらが Weil-Deligne 群の表現との比較を考察するというものがある. これについては, 共同研究者の Cheng 氏により同様の結果が得られている.

注意 2.4. 最後に本結果の応用 (動機) について簡単にコメントをしておく. 本研究は筆者が "肥田族に沿う捻れ 3 重積 p 進 L 関数" を構成するという問題に取り組んでいる際に現れたものである. この問題において, 市野氏によって証明された公式 ([Ich08]) を計算する必要があったが, その計算結果として, Piatetski-Shapiro-Rallis による 3 重積保型表現の epsilon 因子や, 本稿で詳説した Rankin-Selberg 積分を経由して定義された Asai epsilon 因子が現れる. Piatetski-Shapiro-Rallis による 3 重積保型表現の epsilon 因子が対応する Weil-Deligne 表現のものと一致するのかというのも重要な問題であるが, Piatetski-Shapiro-Rallis によるものは今回詳説した Rankin-Selberg 積分による Asai epsilon 因子と関係付くことが証明できる (共同研究者 Chen 氏による). 一方で, p 進 L 関数は Weil-Deligne 群の表現から定まる種々の不変量との相性が良いという事情があり, 本研究結果は p 進 L 関数の構成の際に現れる計算結果を Weil-Deligne 群の表現から定まる不変量で表示したいという動機に基づくものである.

謝辞. この度は第 14 回数学総合若手研究集会を講演の機会を頂き, また, 本研究集会の企画, 運営を行なってくださった運営委員の皆様に感謝を申し上げます。

References

[AR05] Anandavardhanan, U. K., Rajan, C. S., *Distinguished representations, base change, and reducibility for unitary groups*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. **14**, 841-854.

[Fl88] Flicker, Y. Z., *Twisted tensors and Euler products*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 295-313.

[Fl93] Flicker, Y. Z., *On zeroes of the twisted tensor L-function*, Math. Ann. **297** (1993), no. 2, 199-219.

[Hen10] Henniart, G., *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, Int. Math. Res. Not. (2010), no. 4, 633-673.

[Ich08] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 281-307.

[Jac72] Jacquet, H., *Automorphic forms on* GL(2). *Part II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **278**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[JL70] Jacquet, H., Langlands, R., *Automorphic forms on* GL(s). *Part I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **114**. Springer-Verlag, 1970.

[Kri03] Krishnamurthy, M. *The Asai transfer to* GL_4 *via the Langlands-Shahidi method*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 41, 2221-2254.

[Mat09] Matringe, M., *Conjectures about distinction and local Asai L-functions*, Int. Math. Res. Not. (2009), no. 9, 1699-1741.

[Pra92] Prasad, D., *Invariant forms for representations of* GL_2 *over a local field*, Amer. J. Math. 114 (1992), no. 6, 1317-1363.

[Sha84] Shahidi, F., *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* GL(n), Amer. J. Math. **106** (1984), no. 1, 67-111.

[Sha90] Shahidi, F., *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273-330.

E-mail address: isao.ishikawa@riken.jp

組み紐のゼータ函数と q-series

岡本　健太郎 *
Kentaro Okamoto
九州大学大学院数理学府博士後期課程 3 年
日本学術振興会特別研究員 (DC2)

1　導入

有限集合上の力学系から定義されるゼータ函数は, 函数等式やオイラー積表示を満たすなどの性質を持ち, 数論で現れるデデキントゼータ函数の類似, あるいはトイ・モデルとして, Kim, 小山, 黒川らによって研究された ([6], [8]). 本研究では, このような力学系のゼータ函数の一般化として, 組み紐群の Burau 表現を用いてゼータ函数を定め, その性質を調べた. 結果的に力学系のゼータ函数には見られなかった性質として, 留数に幾何学的な不変量 (結び目の Alexander 多項式) が現れることがわかった ([14]). また, 他の組み紐群の表現の間の関係をゼータ函数の視点から観察することで, 不変量間の関係や, その力学的, あるいは数論的性質を理解することが期待される.

本稿では, A. Kosyak によって構成された 3 次組み紐群 B_3 の表現を, B_n へと一般化し, 得られた表現 $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ のゼータ関数について考察する. 特に, トーラス型といわれる組み紐に関するゼータ関数の明示公式を与え, その系として q-恒等式や, q-series との関係を得たので紹介する.

2　準備

2.1　有限力学系のゼータ函数

有限集合 $X_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ と, その自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(X_n)$ の組から定まる力学系（σ, X_n）のゼータ函数を以下で定義する.

$$\zeta_\sigma(s, X_n) := \exp\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^m, X_n)|}{m} s^m \right\}$$

ここで、$\mathrm{Fix}(\sigma^m, X_n) := \#\{x \in X_n \mid \sigma^m x = x\}$. つまり, σ^m による X_n 上の不動点の個数を表す. こうして定まる力学系ゼータ函数 $\zeta_\sigma(s, X_n)$ は, オイラー積表示や関数等式, リーマン予想の類似を満たすなどの性質を持っている. なお, 自然数 $N \geq 2$ に対して、

$$N^{X_n} := \{\{1_{(i_1)}, 2_{(i_2)}, \ldots, n_{(i_n)}\} \mid 0 \leq i_j \leq N-1\}$$

とおくと, $\sigma \in \mathrm{Aut}(X_n)$ は自然に N^{X_n} に作用し,

$$\zeta_\sigma(s, N^{X_n}) := \exp\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^m, N^{X_n})|}{m} s^m \right\}$$

という力学系 (σ, N^{X_n}) のゼータ関数を考えることもできる.

*Kyushu University, e-mail:k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

2.2 組み紐群

組み紐群について簡潔にまとめる.（詳しくは [2], [3], [4], [7] を参照）. n 次組み紐群 B_n とは, 以下で定義される.

$$B_n := \langle \sigma_i (1 \leq i \leq n-1) \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i-j| > 1), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle$$

組み紐群の生成元 σ_i は図のように視覚的に捉えることができる.

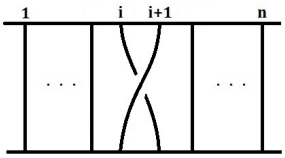


Figure 1: 生成元 σ_i

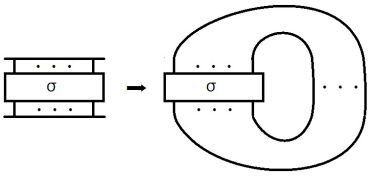


Figure 2: 閉包 σ

生成元 σ_i は i 番目と $i+1$ 番目の紐が Figure 1 のように交差している n 本の紐と思え, 紐を下につなげることで積を考えることができる. 次に いくつかの基本的な記号を導入する.
(1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ への自然な全射準同型 $\pi_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow B_n$ を以下で定める.

$$\pi_n(\sigma_i) = (i, i+1).$$

(2) 絡み目全体の集合 $\{Link\}$ への写像を Figure 2 のように定める. $\sigma \in B_n$ の像を $\widehat{\sigma}$ と表し, これを σ の閉包と呼ぶ.
(3) 自然数のペア (n, m) に対して $\sigma_{n,m} := (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^m$ と定める. これをトーラス型組み紐と呼ぶ. (n, m) が互いに素なとき, $\sigma_{n,m}$ の閉包は結び目になり, 一般的にトーラス結び目と呼ばれる.



Figure 3: トーラス型組み紐 $\sigma_{5,3}$

(4) 組み紐群の元 σ が $\sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$ と表されるとき, $\varepsilon : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $\varepsilon(\sigma) := e_1 + \cdots + e_r$ で定める.
(5) 組み紐群の表現 $\beta_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W_n)$ を以下で定める.

$$\beta_{n,q}(\sigma_i) := I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

ここで, W_n は n 次元の複素ベクトル空間とし, q は複素パラメータとする. この表現 $\beta_{n,q}$ を Burau 表現と呼ぶ.

注 2.2.1. $\pi_n(\sigma) \in \mathfrak{S}_n$ が長さ n のサイクルであるとき, $\widehat{\sigma}$ の成分数は 1 となり, 結び目となる.

Burau 表現は, 次のように自明表現と非自明な既約表現に分解される.

$$\beta_{n,q} = \mathbf{1} \oplus \beta_{n,q}^r.$$

ここで $\beta^r_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W^r_n)$ は $n-1$ 次元の表現であり, 被約 Burau 表現と呼ばれる. $\beta^r_{n,q}$ の具体的な定義は以下で与えられる.

$$\beta^r_{n,q}(\sigma_i) := \begin{cases} \begin{pmatrix} -q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3} & (i=1), \\ I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & -q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2} & (i=2,\ldots,n-2), \\ I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -q \end{pmatrix} & (i=n-1). \end{cases}$$

2.3 表現のゼータ函数とその具体例

有限集合上の力学系ゼータ函数の一般化として,「表現のゼータ函数」というものが考える. (G,ρ,V) を $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現とするとき, $g \in G$ に関する表現 ρ のゼータ函数を

$$\zeta(s,g;\rho) := \det(I-\rho(g)s)^{-1}.$$

で定める. 次に表現のゼータ函数についていくつか具体例を挙げてみよう.

例 2.3.1. （置換表現 $p_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ の場合）
この場合, $\mathfrak{S}_n \simeq \mathrm{Aut}(X_n)$ であることから, 有限集合 X_n 上の力学系ゼータ函数に一致する. つまり, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\zeta(s,\sigma;p_n) = \zeta_\sigma(s,X_n)$$

が成り立つ.

例 2.3.2. （Burau 表現 $\beta_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W_n)$ の場合）
$\sigma \in \mathrm{B}_n$ に対して定まるゼータ函数 $\zeta(s,\sigma:\beta_{n,q})$ は函数等式や（複素パラメータ q にある条件を課すことで）リーマン予想の類似が成り立つ. さらに, $\widehat{\sigma}$ が結び目であるとき, ゼータ函数の「留数公式」は以下のようになる.

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q}\Delta_{\widehat{\sigma}}(q)^{-1}.$$

ここで, $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$ は結び目 $\widehat{\sigma}$ の Alexanber 多項式であり, 結び目の古典的な不変量である. また $[n]_q$ は q-整数であり,

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$$

で定義される.

例 2.3.3. （HOMFLY 表現 $\tau^{(N)}_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(V_N^{\otimes n})$ の場合）
V_N を N 次元複素ベクトル空間（$N \geq 2$）とし, その基底を $\{e_0,e_1,\ldots,e_{N-1}\}$ とする. このとき線形作用素 $R^{(N)}_q : V_N^{\otimes 2} \longrightarrow V_N^{\otimes 2}$ を次で定める.

$$R^{(N)}_q(e_i \otimes e_j) := \begin{cases} qe_j \otimes e_i & (i<j), \\ e_i \otimes e_i & (i=j), \\ e_j \otimes e_i + (1-q)e_i \otimes e_j & (i>j). \end{cases}$$

$R_q^{(N)}$ は Yang-Baxter 方程式を満たす．つまり

$$(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N})(id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N}) = (id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})(R_q^{(N)} \otimes id_{V_N})(id_{V_N} \otimes R_q^{(N)})$$

が成り立つ．したがって，$\tau_{n,q}^{(N)}(\sigma_i) := id_{V_N}^{\otimes(i-1)} \otimes R_q^{(N)} \otimes id_{V_N}^{\otimes(n-i-1)}$ と定めることで組み紐群の表現を得る．これを HOMFLY 表現という．この表現に関してゼータ函数 $\zeta(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)})$ が定義でき，またその変形版を次で定める．

$$\zeta_t(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)}) := \det(I_{N^n} - \tau_{n,q}^{(N)}(\sigma)\mu_N(t)s)^{-1}$$

ここで $\mu_N(t) := \mathrm{diag}(1,t,\ldots,t^{N-1})$ と定める．$\widehat{\sigma}$ が結び目であるとき，対数微分の $s=0$ での値は，

$$\frac{d}{ds}\log\zeta_q(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)})\Big|_{s=0} = \mathrm{tr}(\tau_{n,q}^{(N)}(\sigma)\cdot\mu_N(q)^{\otimes n}) = q^{\frac{1}{2}(N-1)(n-\varepsilon(\sigma)-1)}[N]_q H_{\widehat{\sigma}}^{(N)}(q).$$

となる．ここで $H_{\widehat{\sigma}}^{(N)}(q))$ は，結び目 $\widehat{\sigma}$ の N 階 HOMFLY 多項式という．なお，$N=2$ のときは Jones 多項式と呼ばれる．特に $n=3$ の場合，$\tau_{3,q}^{(N)}$ に関するゼータ函数は

$$\zeta(s,\sigma;\tau_{3,q}^{(N)}) = \frac{\zeta(s,\sigma;\beta_{3,q})^{(N-1)N(N+1)/3}}{(1-s)^N}.$$

となり，Burau 表現のゼータ函数のみで表すことができる．これは HOMFLY 表現が岩堀-Hecke 代数の構造を持つことから従う．

さらに，HOMFLY 表現 $\tau_{n,q}^{(N)}$ におけるゼータ函数の古典極限 $q\to 1$ は

$$\lim_{q\to 1}\zeta(s,\sigma;\tau_{n,q}^{(N)}) = \zeta_{\pi_n(\sigma)}(s,N^{X_n})$$

となり，力学系 $(\pi_n(\sigma),N^{X_n})$ のゼータ函数となる．

3 B_3 の表現 $\rho_{3,q,t}^{(N)}$ の構成

3.1 表現の構成

表現の構成方法について説明しよう．まずは B_3 の被約 Burau 表現 $\beta_{3,q}^r$ を，パラメータ q を $-t$ とおき，次のように書き直す．

$$\beta_{3,q}^r(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta_{3,q}^r(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

続いて，$\beta_{3,-t}^r$ の N 階対称テンソル積表現 $S^{(N)}(\beta_{3,-t})$ を考える．具体的に表すと

$$\mathrm{Sym}^{(N)}(\beta_{3,q}^r)(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \binom{N}{N} & \binom{N}{N-1} & \cdots & \binom{N}{0} \\ & \binom{N-1}{N-1} & \cdots & \binom{N-1}{0} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{0}{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^N & & & \\ & t^{N-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Sym}^{(N)}(\beta_{3,q}^r)(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t^{N-1} & \\ & & & t^N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ (-1)^{N-1}\binom{N-1}{N-1} & \cdots & (-1)^0\binom{N-1}{0} & \\ (-1)^N\binom{N}{N} & \cdots & (-1)^1\binom{N}{1} & (-1)^0\binom{N}{0} \end{pmatrix}.$$

ここで, 各成分に現れる二項係数に対して

$$\binom{n}{m} \mapsto q^{t(m)} \binom{n}{m}_q$$

という q-変形を施す. $t(m) := \frac{m(m-1)}{2}$ で, $\binom{n}{m}_q$ は q-二項係数といわれ, 以下で定める.

$$\binom{n}{m}_q := \begin{cases} \frac{[n]_q!}{[m]_q![n-m]_q!}, & (0 \leq m \leq n) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad [n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q & (n > 0), \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

こうして構成された B_3 の表現（写像）を $\rho_{3,q,t}^{(N)} : B_3 \longrightarrow GL(\mathrm{Sym}^{(N)}(W_3^r))$ と表すことにする.

定義 3.1.1. B_3 の生成元 σ_1, σ_2 に対して, 表現 $\rho_{3,q,t}^{(N)}$ を以下で定める.

$$\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_1)_{i,j} := q^{t(N-j)} \binom{N-i}{N-j}_q t^{N-j}, \quad \rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_2)_{i,j} := (-1)^{i-j} q^{t(j)} \binom{i}{j}_q t^i$$

ここで $0 \leq i, j \leq N$ である.

また, 以下の等式が成り立つ.

$$\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_1)\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_2)\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_1) = \rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_2)\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_1)\rho_{3,q,t}^{(N)}(\sigma_2).$$

こうして, 次が成り立つ.

命題 3.1.1. $\rho_{3,q,t}^{(N)}$ は B_3 の表現である.

この命題を含め, 今後ほぼ全ての計算で用いる補題をここで紹介する.

補題 3.1.1. $n > 1$ に対し, 次が成り立つ。

$$(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z) = \sum_{k=0}^{n} q^{t(k)} \binom{n}{k}_q z^k,$$

$$\frac{1}{(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{n+l-1}{l}_q z^l.$$

4 一般化

4.1 $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ の構成

この章では, 4 章で定めた表現 $\rho_{3,q,t}^{(N)}$ を, B_n に対して一般化する. $n = 3$ の場合と $n \geq 4$ の場合は構成方法に注意する必要がある. 例えば $n = 4$ の場合, σ_1, σ_3 に対しては先ほどと同様に構成ができるが, σ_2 に対しては

$$\beta_{4,q}^r(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

のように, 上三角行列, 対角行列, 下三角行列と, 3 つに分解される. 対称テンソル積表現を考えたときには両端の行列の成分に二項係数が現れるが, どちらにも

$$\binom{n}{m} \mapsto q^{t(m)} \binom{n}{m}_q$$

という変形を行うと, 組み紐群の表現にならない. 組み紐群の関係式を満たすためには, 最初の行列に関しては $q^{t(m)}$ を付けず, 最後の行列に関しては上の変形を施せばよい. これが表現になっていることは後で述べることにする. まずは表現を定式化するために, いくつか記号を導入する.

被約 Burau 表現 $\beta^r_{n,q} : B_n \longrightarrow GL(W^r_n)$ において, W^r_n の基底を $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$ とする. $X_{n-1} := \{1, 2, \ldots, n-1\}$ とし, 集合 $\mathbb{I}^r_n(N)$ を次で定める.

$$\mathbb{I}^r_n(N) := \{(i_1, i_2, \ldots, i_N) \in X^N_{n-1} \mid i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_N\}.$$

また, $I = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in \mathbb{I}^r_n(N)$ に対して,

$$f_I = f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_N}$$

と書くことにする. こうすることで, ベクトル空間 $\mathrm{Sym}^N(W^r_n)$ の基底は $\{f_I \mid I \in \mathbb{I}^r_n(N)\}$ と表すことができる. $\mathrm{Sym}^N(W^r_n)$ 上の線形作用素 A により, $f_I \mapsto \sum_J A_{I,J} f_J$ となるとき $A_{I,J}$ を作用素 A の (I, J)-成分と呼ぶ. さらに, I の中に含まれる $l \in X_{n-1}$ の個数を $N_l(I)$ と表すことにする. こうして $\rho^{(N)}_{n,q,t}$ は計算することで以下のように統一的に定義できる.

定義 4.1.1. $1 \leq i \leq n-1$ に対して表現 $\rho^{(N)}_{n,q,t}$ は次のように定義できる.

$$\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i)_{I,J} := (-1)^{N_{i-1}(I)-N_{i-1}(J)} q^{t(N_i(J))} \binom{N_i(I)}{N_i(J)}_q \binom{N_i(I)-N_i(J)}{N_{i+1}(J)-N_{i+1}(I)}_q t^{N_i(I)+N_{i+1}(I)-N_{i+1}(J)} \chi_i(I, J).$$

ここで,

$$\chi_i(I, J) := \begin{cases} 1 & N_k(I) = N_k(J), (k \neq i-1, i, i+1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし, $i \notin X_{n-1}$ であるとき, $N_i(I) = 0$ とする.

命題 4.1.1. $\rho^{(N)}_{n,q,t}$ は組み紐群 B_n の表現である.

証明方法は, 組み紐の関係式

$$\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i)\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_j) = \rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_j)\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i) \quad (|i-j| > 1),$$
$$\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i)\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_{i+1})\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i) = \rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_{i+1})\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_i)\rho^{(N)}_{n,q,t}(\sigma_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

を満たすことを示せばよい. 可換性は比較的容易だが, 2 番目の関係式は計算が煩雑なので, 割愛させていただく.

4.2 ゼータ函数の明示公式とその応用

この表現に付随するトーラス型の組み紐のゼータ関数は以下で与えられる.

定理 4.2.1. 互いに素な自然数のペア (n, m) に対して, 以下が成り立つ.

$$\zeta(s, \sigma_{n,m}; \rho^{(N)}_{n,q,t}) = \zeta((-t)^{mN} q^{\frac{2mt(N)}{n}} s, c_n; \mathrm{Sym}^{(N)} p^r_n)$$

ここで, $c_n \in \mathfrak{S}_n$ は長さ n のサイクルで, p^r_n は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $(n-1)$ 次元既約表現である.

この定理の証明のためにいくつかの補題を紹介する.

補題 4.2.1. $K \in \mathbb{I}_n^r$ に対して, $S_i(K) := N_1(K) + N_2(K) + \cdots + N_i(K)$ とおく. このとき

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,1})_{I,J} = t^N q^{t(N)} \prod_{k=1}^{n-2} (-1)^{N_k(J)} q^{-N_k(J)} \binom{N_{k+1}(I)}{N_k(J)}_{q^{-1}} q^{-(N-S_{k+1}(I))N_k(J)}.$$

となる.

定義 4.2.1. 1 から $n-1$ までの数と黒丸を m だけずらした次のような配列を考える.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & n-1 & \bullet \\ n-m+1 & n-m+2 & \cdots & n-1 & \bullet & 1 & \cdots & n-m-1 & n-m \end{bmatrix}.$$

これを m-シフト配列と呼ぶ. この配列の上段は I に, 下段は J に対応している. また, 黒丸を除く上下のペア $(1, n-m+1), \cdots (m-1, n-1), (m+1, 1) \cdots, (n-1, n-m-1)$ の集合を $\mathcal{P}(n,m)$ と記す. これを用いて次を定める.

$$\mathcal{S}_{n,m}(q; (I,J)) := \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}(n,m)} q^{t(N_j(J))} \binom{N_i(I)}{N_j(J)}_q.$$

さらに, I, J に対して定まる次のような数列を考える.

$$\begin{aligned} a(I,J) &:= \sum_{i>j} N_i(I) N_j(J), \\ a_{n,m}(I,J) &:= \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(n,m)} N_i(I) N_j(J) - N_{n-m+1}(J), \ \ (1 \le m \le n-1), \\ b_{n,m}(I,J) &:= \sum_{l=1}^{m} a_{n,l}(I,J). \end{aligned}$$

これらの記号を用いて, $\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,m})$ は次のように表すことができる.

補題 4.2.2. $1 \le m \le n-1$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,m})_{I,J} = (-t)^{mN} (-1)^{N_{n-m}(J)} q^{t(N)} \mathcal{S}_{n,m}(q^{-1}; (I,J)) q^{b_{n,m}(I,J) - a(I,J)}.$$

右辺を $P_{I,J}^{(m)}$ とおく. $m = 1$ のときは明らかに

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,1})_{I,J} = P_{I,J}^{(1)}$$

なので, $1 \le m \le n-2$ に対し

$$\sum_K P_{I,K}^{(m)} P_{K,J}^{(1)} = P_{I,J}^{(m+1)}$$

が成り立つことを示せば十分であるが, 計算が非常に複雑なのでここでは省略する.

この補題から, $\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,n})$ は

$$\rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma_{n,n})_{I,J} = (-t)^{nN} q^{2t(N)} \delta_{I,J}$$

と計算でき, 定理 4.2.1 が証明される.

定理の系として, 次の恒等式を得ることができる.

系 4.2.1. $n \geq 3$ と, 2 以上の自然数 N に対して, 以下が成り立つ.

$$\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}=N} (-1)^{\lambda_{n-1}} q^{t(\lambda_{n-1})+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_{n-2}^2} \binom{\lambda_2}{\lambda_1}_q \binom{\lambda_3}{\lambda_2}_q \cdots \binom{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}_q = \begin{cases} q^{k(nk-1)} & (N=nk) \\ -q^{k(nk+1)} & (N=nk+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

さらに, 次のようなトレース母関数を考える.

$$Z_{q,t}(s,\sigma) := 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \operatorname{tr} \rho_{n,q,t}^{(N)}(\sigma) s^N$$

この函数は $\rho_{n,q,t}^{(N)}$ の構成方法と MacMahon Master 定理からただちに次が成り立つ.

$$\lim_{q\to 1} Z_{q,t}(s,\sigma) = \zeta(s,\sigma;\beta_{n,-t}^r).$$

つまり, $Z_{q,t}(s,\sigma)$ は $\zeta(s,\sigma;\beta_{n,-t}^r)$ の q-変形になっている. さらにトーラス型の場合, 次が得られる.

系 4.2.2. $\sigma_{n,1}$ の場合, 以下がな成り立つ.

$$\lim_{t\to 1} Z_{q,t}(1,\sigma_{n,1}) = 1 + \prod_{k\equiv 0,\pm(n-1) \,(\bmod\, 2n)} (1-(-q)^k).$$

が成り立つ.

References

[1] S. Albeverio, A. Kosyak, q-Pascal's triangle and irreducible representations of the braid group B_3 in arbitrary dimension, arXiv:math.QA(RT)/0803.2778v2.

[2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1928) 275–306.

[3] E. Artin. Theory of braids, Ann. of Math. (2) 48 (1947) 101–126.

[4] J. S. Birman. Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies 82. Princeton University. Press, 1974.

[5] J. S. Birman, On the Jones polynomial of closed 3-braids. Inventiones mathematicae 81 (1985) 287–294.

[6] A. Deitmar and S. Koyama and N. Kurokawa. Absolute zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 84 (2008) no. 8, 138–142.

[7] C. Kassel and V. Turaev. Braid Groups. Springer, 2008.

[8] S. Kim and S. Koyama and N. Kurokawa. The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over $\mathbf{F}_1$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85, (2009) no. 6, 75–80.

[9] A Kosyak. The Lawrence-Krammer representation is a quantization of the symmetric square of the Burau representation, arXiv:math. QA(RT)/1609.06663.

[10] S. Koyama and S. Nakajima. Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 88, (2012) no. 8, 115–120.

[11] B. I. Kurpita and K. Murasugi. A study of braids . Mathematics and its Applications, 484. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[12] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis vol.1, Cambridge University Press, 1917. Reprinted by Chelsea, 1984.

[13] T. Ohtsuki. Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.

[14] K. Okamoto. Braid zeta function and some formulae for the torus type, arXiv:math. QA(RT)/1611.08370.

[15] L. Rozansky. The universal R-matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial, Adv. Math. 134 (1998) 1–31.

自己入射中山多元環の Hochshild extension algebra の表現について

鯉江 秀行 (Hideyuki Koie)
東京理科大学理学研究科数学専攻

1 Hochschild extension algebra

K を代数的閉体, A を有限次元 basic$K$-多元環とし, D を標準双対関手 $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ とする. 最初に Hochschild 拡大の定義と基本的な性質について述べる.

Definition 1. A の $D(A)$ による Hochschild 拡大とは, 短完全系列

$$0 \longrightarrow D(A) \xrightarrow{\kappa} T \xrightarrow{\rho} A \longrightarrow 0$$

のことである. ここで T は K-多元環, ρ は全射環準同型, κ は両側 T-加群としての単射準同型である. また $(D(A))$ は両側 A-加群であるので, ρ を通して両側 T-加群とみなしている. このとき T を A の $D(A)$ による Hochschild 拡大環という.

Definition 2. Hochschild 拡大 $0 \longrightarrow D(A) \xrightarrow{\kappa} T \xrightarrow{\rho} A \longrightarrow 0$ が splittable であるとは, ある環準同型 $\rho' : A \to T$ が存在して $\rho\rho' = \mathrm{id}_A$ となることである.

Definition 3. 2 つの Hochschid 拡大 (F) と (F') が同値であるとは, 次の図式を可換にするような K-多元環準同型 $\iota : T \to T'$ が存在することをいう :

$$\begin{array}{lccccccc} (F) & 0 & \longrightarrow & D(A) & \longrightarrow & T & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ (F') & 0 & \longrightarrow & D(A) & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Hochschild 拡大の同値類全体を $F(A, D(A))$ と書く.

次に Hochschild 拡大環の積構造を考える. K-双線形写像 $\alpha : A \times A \to D(A)$ が任意の $a, b, c \in A$ に対して

$$a\alpha(b, c) - \alpha(ab, c) + \alpha(a, bc) - \alpha(a, b)c = 0 \tag{1.1}$$

をみたすとき, α を 2-cocycle という. この α を用いて, K-線形空間 $A \oplus D(A)$ に以下のように積を定める :

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb + \alpha(a, b)) \tag{1.2}$$

ここで $(a, x), (b, y) \in A \oplus D(A)$. このとき, $A \oplus D(A)$ は K-多元環であり, これを $T_\alpha(A)$ とかく. 結合法則は, (1.1) によって成立する. そして, この $T_\alpha(A)$ により Hochschild 拡大

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow T_\alpha(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

が得られる．逆に, Hochschild 拡大 $0 \to D(A) \to T \to A \to 0$ に対して, ある 2-cocycle α が存在し, T が $T_\alpha(A)$ と同型になる．$A^e = A \otimes A^{op}$ とする．2-cocycle は Hochschild cohomology $H^2(A, D(A)) := \mathrm{Ext}_{A^e}(A, D(A))$ の元の代表元になっており, 次の結果が知られている．

Proposition 1.1 ([2, Proposition 6.2], [5, Section 2.5])**.** $F(A, D(A))$ と $H^2(A, D(A))$ は一対一対応しており, これは 2-*cocycle* α を *Hochschild* 拡大 $T_\alpha(A)$ に対応することで得られる．特に $H^2(A, D(A))$ の零元は *splittable* 拡大に対応する．

特に $T_0(A)$ を trivial 拡大環といい, 多元環の表現論において非常に有用である．

2 quiver 表示

qiver Q とは, 2 つの集合 Q_0, Q_1 および, 2 つの写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ の四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことをいう．このとき, Q_0 の元を頂点, Q_1 の元を矢といい, 矢 $x \in Q_1$ に対して $s(x)$ をその始点, $t(x)$ をその終点という．矢の列 $x_1x_2\cdots x_n$ で $t(x_i) = s(x_{i+1})$ をみたすものを長さ n の道という．また, Q の頂点を長さ 0 の道とみなし, $u \in Q_0$ 対して e_u と表す．quiver は次のようにグラフで表すことができる．

Example 1. $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_0 = \{x, y\}$, $s(x) = 1$, $s(y) = 2$, $t(x) = 2$, $t(y) = 3$ のとき, $1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3$

quiver Q に対して, Q の道全体を基底とする線形空間 KQ を考える．2 つの道 $x_1x_2\cdots x_m$, $y_1y_2\cdots y_l$ に対して, その積 $(x_1x_2\cdots x_m)(y_1y_2\cdots y_l)$ を, $t(x_m) = s(y_1)$ ならば道 $x_1x_2\cdots x_my_1y_2\cdots y_l$, $t(x_m) \neq s(y_1)$ ならば 0 として, 多元環 KQ を考える．このとき KQ を道多元環という．

Theorem 2.1. A が有限次元 *basic* K-多元環なら, ある *quiver* Q と KQ の *ideal* I が存在して A と KQ/I は同型になる．また, この Q は A によって一意に定まり, これを A の *ordinary quiver* といって Q_A とかく．

これより, quivar を求めることで多元環の積構造を視覚的に捉えることができる．trivial 拡大環についてはその ordinary quiver が既に決定している．

Theorem 2.2 ([1])**.** *trivial* 拡大環 $T_0(A)$ に大して, その *ordinary quiver* $Q_{T_0(A)}$ は以下によって定まる：

- $(Q_{T_0(A)})_0 = (Q_A)_0$
- $(Q_{T_0(A)})_1 = (Q_A)_1 \cup \{y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots y_{p_l}\}$

ここで, y_{p_i} は $\mathrm{soc}_{A^e}(A)$ の基底 $\{p_1, p_2, \ldots p_l\}$ に対応する矢 $y_{p_i} : t(p_i) \to s(p_i)$ である．

さらに, 一般の Hochschild 拡大環についての ordinary quiver については以下のことがわかる．

Lemma 2.3. A を有限次元 *basic* K-多元環, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を 2-*cocycle* とする．α が任意の $i \in \Delta_0$ に対して $\alpha(e_i, -) = \alpha(-, e_i) = 0$ をみたすとき, 次の *subquiver* の列を得る：

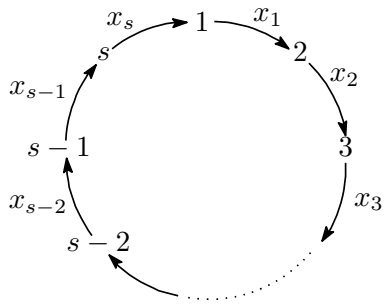
$$\Delta \subseteq \Delta_{T_\alpha(A)} \subseteq \Delta_{T_0(A)}.$$

Lemma 2.4. A を有限次元 *basic* K-多元環, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を 2-*cocycle* とする．α が任意の $i \in \Delta_0$ に対して $\alpha(e_i, -) = \alpha(-, e_i) = 0$ をみたすとき, 次は同値である：

(1) $\alpha(\mathrm{rad}\, A, \mathrm{rad}\, A) \subseteq \mathrm{rad}\, AD(A) + D(A)\mathrm{rad}\, A$.
(2) $\Delta_{T_\alpha(A)} = \Delta_{T_0(A)}$.

3 主定理

本研究では以下によって定まる自己入射中山多元環の Hochschild 拡大環について考察する. Δ を次のような $s\,(\geq 1)$ 個の頂点と s 本の矢からなる cyclic quiver とする：



n を 2 以上の整数, R_Δ^n を長さ n 以上の道で生成される $K\Delta$ の ideal としたとき, $A = K\Delta/R_\Delta^n$ を自己入射中山多元環という. 以降, e_i, x_i の添え字 i は s を法として考える. 一般に, Hochschild cohomology $H^2(A,\, D(A))$ は Hochschild homology $HH_2(A) := \mathrm{Tor}_2^{A^e}(A,\, A)$ の双対空間 $D(HH_2(A))$ と同型であることが知られている. この Hochschild homology については以下の定理がある.

Theorem 3.1. 自己入射中山多元環 A に対して,2 次 *Hochschild homology* 群は $HH_2(A) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} HH_{2,\,q}(A)$ と直和分解でき, 各直和因子は以下のようになる：

$$HH_{2,\,q}(A) = \begin{cases} K & \textit{if } s|q \textit{ and } n+1 \leq q \leq 2n-1, \\ K^{s-1} \oplus \mathrm{Ker}(\cdot\frac{n}{s} : K \to K) & \textit{if } s|q \textit{ and } q = n, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

[3] により, 2 次 Hochschild homology 群と 2 次 Hochschild cohomology 群に関する同型写像

$$\Theta : \bigoplus_q D(HH_{2,\,q}(A)) \cong D(\bigoplus_q HH_{2,\,q}(A)) = D(HH_2(A)) \xrightarrow{\sim} H^2(A,\, D(A)).$$

が与えられており, この Θ を通して 2-cocycle を構成できる. ここから以下の主結果を得られる.

Theorem 3.2 ([3])**.** $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし $n \leq q \leq 2n-1$ とする. $\alpha : A \times A \to D(A)$ をその *cohomology class* $[\alpha]$ が $\Theta(D(HH_{2,\,q}(A)))$ に含まれ, $[\alpha] \neq 0$ をみたす 2-*cocycle* とする. このとき, *Hochschild* 拡大環 $T_\alpha(A)$ の *ordinary quiver* $\Delta_{T_\alpha(A)}$ は次で与えられる：

$$\Delta_{T_\alpha(A)} = \begin{cases} \Delta_{T_0(A)} & \textit{if} \quad n \leq q \leq 2n-2, \\ \Delta & \textit{if} \quad q = 2n-1. \end{cases}$$

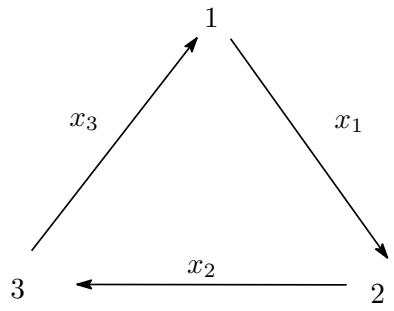
Corollary 3.3. $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし $n \leq q \leq 2n-1$ とする. $\alpha : A \times A \to D(A)$ を任意の 2-*cocycle* とすると $[\alpha] = \sum_{q=n}^{2n-1} [\beta_q]$ とかける. ここで $\beta_q : A \times A \to D(A)$ は *cohomology class* $[\beta_q]$ が $\Theta(D(HH_{2,\,q}(A)))$ に含まれるような 2-*cocycle* である. このとき次が成立する：

$$\Delta_{T_\alpha(A)} = \begin{cases} \Delta_{T_0(A)} & \textit{if } [\beta_{2n-1}] = 0, \\ \Delta & \textit{if } [\beta_{2n-1}] \neq 0. \end{cases}$$

Corollary 3.4. $A = K\Delta/R_\Delta^n$ とし, $\alpha : A \times A \to D(A)$ を任意の 2-*cocycle* とする. もし $\Delta_{T_\alpha(A)} = \Delta$ ならば $T_\alpha(A)$ は $K\Delta/R_\Delta^{2n}$ と同型であり, $T_\alpha(A)$ は対称多元環である.

4　具体例

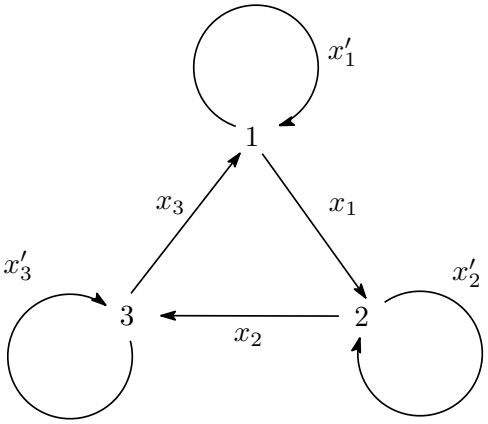
$s = 3$ つまり, Q を次の quiver とする:



$A = KQ/R_Q^n$ として Theorem 3.1 から, $n = 4$ とすると $HH_{2,q}(A) \neq 0$ となるのは $q = 6$ のときに他ならない. このとき Θ を通して構成される 2-cocycle $\alpha : A \times A \to D(A)$ は長さ 1 以上の道 a, b に対しては

$$\alpha(a,\, b) = \begin{cases} (x_{i+4}x_{i+5})^* & \text{if } ab = x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}, \\ x_{i+5}^* & \text{if } ab = x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}x_{i+4}, \\ e_{i+6}^* & \text{if } ab = x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}x_{i+4}x_{i+5}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

長さ 0 の道に対しては常に 0 と定義される. Theorem 2.2 より, $Q_{T_0(A)}$ は次の quiver となる:



このとき, $T_\alpha(A)$ は $KQ_{T_0(A)}/I$ と同型である. ここで,

$$I = \langle x_i'x_i - x_ix_{i+1}',\, x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3} - x_i'x_i,\, (x_i')^2 \,|\, i = 1,\, 2,\, 3\rangle$$

である. 一方, $T_0(A)$ は $KQ_{T_0(A)}/I_0$ と同型である. ここで

$$I_0 = \langle x_i'x_i - x_ix_{i+1}',\, x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3},\, (x_i')^2 \,|\, i = 1,\, 2,\, 3\rangle$$

となる.

References

[1] Fernández, E. and Platzeck, M. (2002). Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner. *J. Algebra* **249**, 326–344.

[2] Hochschild, G. (1945). On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. Math.* (2) 46:58–67.

[3] Koie, H., Itagaki, T., Sanada, K. The ordinary quivers of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras. *submitted*, arXiv:1707.01618

[4] Sköldberg, E. (1999). The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebra. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 59:76–86.

[5] Yamagata, K. (1996). Frobenius Algebras. *Handbook of Algebra* 1:841–887. Elsevier.

On generic structures of amalgamation classes of finite structures

岡部 峻典 (Shunsuke Okabe)
神戸大学大学院システム情報学研究科

概 要

ランダムグラフは任意の有限グラフを誘導部分グラフとして含み, 他にも様々な良い性質をもつ. これは, 実は有限グラフ全体からなるクラスの持つ性質によるもので, その性質をもつクラスが作り出すグラフのことを generic グラフと呼ぶ. その性質を一般化することで, モデル理論における有限構造のクラスについても同様の議論をおこなうことができ, それによって作られる可算無限構造を generic 構造と呼ぶ.

また, ランダムグラフの自己同型群は単純群であることが知られており, 特に, 恒等的でない任意の自己同型写像 σ に対し, 他のすべての自己同型写像は σ の共役元 3 つの積として表現することができる. このことは, 一般の generic 構造についてもある程度同様に成り立ち, ある条件のもとで, その積の数は 32 に抑えられることが示されている. 本研究において, 同条件のもとでこの数を 12 まで減らすことができるという結果を得た. よって本講演では, generic 構造の構成法と, 主結果の証明の概略を紹介する.

1 言語と構造

まず, モデル理論的な基本事項について述べる.

定義 1.1. ある記号の集合 $\mathcal{L} := \{R_i \mid i \in I\}$ を考える[1]. この $\mathcal{L}$ のことを**言語 (language)** といい, 各 R_i を関係記号と呼ぶ. また, R_i に対して自然数 $a(R_i) > 0$ を割り当て, この数を R_i の**項数 (arity)** と呼ぶ.

ある集合 A と $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq A^{a(R_i)}$ について, $\mathcal{A} := \langle A; R_i^{\mathcal{A}} : i \in I\rangle$ を **$\mathcal{L}$-構造 (structure)** と呼ぶ. 各 $R_i^{\mathcal{A}}$ を, R_i の $\mathcal{A}$ での**解釈 (interpretation)** と呼ぶ. しばしば構造と領域は同一視される. 以下, 単に A と書いても $\mathcal{L}$-構造をあらわしているものとする.

例 1.2. (1) $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$(すなわち $a(E) = 2$) とし, $\mathcal{L}$-構造 A を, E について非反射的かつ対称的な集合とすると, A は単純グラフである.

(2) $\mathcal{L} = \{\cdot(x, y, z)\}$ とし, $\mathcal{L}$-構造 G を,

[1] 一般には, 関係記号だけでなく関数記号 (と定数記号) も言語として考えることができるが, ここでは関係記号のみからなる言語だけを考える.

(i) (演算) 任意の $a, b \in G$ について, $c \in G$ が一意に存在して $(a, b, c) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(ii) (結合性) 任意の $a, b, c \in G$ について, ある $x, y \in G$ について $(a, b, x), (b, c, y) \in \cdot^G$ となっているとき, ある $z \in G$ が存在して, $(x, c, z), (a, y, z) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(iii) (単位元) ある元 $1 \in G$ 存在して, 任意の $a \in G$ について $(a, 1, a) \in \cdot^G$ が成り立つ.

(iv) (逆元) 任意の $a \in G$ について, $a^{-1} \in G$ が存在して $(a, a^{-1}, 1), (a^{-1}, a, 1) \in \cdot^G$ が成り立つ.

の 4 つをみたす構造とすると, G は群[2]である.

このように数学的な構造を定義することによって, グラフ理論における誘導部分グラフや群論における部分群, また構造間の同型などの概念を統一的に考えることができる.

定義 1.3. 言語 $\mathcal{L}$ を固定する.

(1) A, B を $\mathcal{L}$-構造とする. 単射 $f : A \to B$ が**埋め込み (embedding)** であるとは, 任意の $R \in \mathcal{L}$ について, $\bar{a} \in R^A \iff f(\bar{a}) \in R^B$ がすべての $\bar{a} \in A^{a(R)}$ で成り立っていることをいう.

(2) 埋め込み f が包含写像であるとき, A は B の**部分構造 (substructure)** であるといい, 集合の包含記号を用いて $A \subseteq B$ と書く.

(3) 埋め込み f が全単射であるとき, f を**同型写像 (isomorphism)** と呼び, $A \cong B$ と書く. また, この A と B は**同型 (isomorphic)** であるという. また, A と B を並べた順序対 $\bar{a} = (a_i : i \in I), \bar{b} = (b_i : i \in I)$ について, $f : \bar{a} \to \bar{b}$ がすべての $i \in I$ で $f(a_i) = b_i$ となっているとき, $\bar{a} \equiv \bar{b}$ とも書く.

(4) ある埋め込み $f : B \to C$ が $A \subseteq B \cap C$ を元ごとに固定するとき, $B \cong_A C$ と書き, B と C は A 上で同型であるという. $\bar{b} \equiv_A \bar{c}$ についても同様である.

定義 1.4. M を $\mathcal{L}$-(可算無限) 構造とする.

(1) $\mathrm{Age}(M)$ で, M に埋め込める $\mathcal{L}$-有限構造全体からなるクラスをあらわす.

(2) $\mathrm{Aut}(M)$ で, M 上の自己同型群をあらわす. また, $A \subseteq M$ について, $\mathrm{Aut}(M/A)$ を A を元ごとに固定する自己同型写像全体からなる $\mathrm{Aut}(M)$ の部分群とする.

[2]通常, 群の言語は演算をあらわす 2 変数関数と単位元をあらわす定数記号や, 必要ならば逆元を返す 1 変数関数などによって定義されるが, 上記のように 3 項関係によっても定義することが可能である. このように, 数学的構造を定義する言語には自由度があるが, 使用する言語によって量化記号消去やモデル完全性などの, モデル理論的に重要な性質の成否が変わる.

2 amalgamation class と generic 構造

構造のクラスを考えるにあたって, 空集合が構造として含まれている方が何かと都合がよい.

そこでこれ以降, 空集合は (任意の $\mathcal{L}$ についての)$\mathcal{L}$-構造とみなす.

定義 2.1. $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-有限構造のクラスで, 同型写像で閉じているものとする.

(1) $\mathcal{K}$ が **HP (Hereditary Property)** を持つとは, 任意の $A \in \mathcal{K}$ に対し, $B \subseteq A$ ならば $B \in \mathcal{K}$ であることをいう.

(2) $\mathcal{K}$ が **AP (Amalgamation Property)** を持つとは, 任意の $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ に対し, A から B_1, B_2 それぞれへの埋め込み f_1, f_2 が存在するならば, $C \in \mathcal{K}$ と B_1, B_2 から C への埋め込み g_1, g_2 が存在し, $g_1 \circ f_1(a) = g_2 \circ f_2(a)$ $(\forall a \in A)$ が成り立つことをいう.

$\mathcal{K}$ が HP と AP をともに持つとき, $\mathcal{K}$ を **amalgamation class** と呼ぶ.

命題 2.2. (R.Fraïssé, 1953[1]) $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$ についての amalgamation class とする.
このとき, $\mathcal{L}$-可算無限構造 M が (同型を除いて一意に) 存在し, 以下が成り立つ:

- $\mathrm{Age}(M) = \mathcal{K}$,
- M は **homogeneous** である. すなわち, 互いに同型な任意の $A, B \in M$ について, 任意の同型写像 $f : A \to B$ は M 全体の自己同型写像に拡大できる.

この M のことを $\mathcal{K}$ についての **generic 構造**という. また逆に, ある可算構造 M が homogeneous であるとき, $\mathrm{Age}(M)$ は amalgamation class である. このため, generic 構造のことを単に **homogeneous な構造**ともいう.

例 2.3. (1) $\mathcal{L} = \{E(x, y)\}$ とし, $\mathcal{K}$ をすべての有限単純グラフからなるクラスとする. このとき, $\mathcal{K}$ は amalgamation class であり, $\mathcal{K}$ から得られる M はランダムグラフになる.

(2) $\mathcal{L} = \{d(x, y) = r \mid r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$ とし, $\mathcal{K}$ を有理距離をもつすべての有限距離空間とする. このとき, M は有理距離を持つ Urysohn 空間になる.

モデル理論において, 非常に大きい, すべての議論がその中でおこなえるような特殊な構造を考えることがしばしばあり, homogeinity はそのような構造に必要な条件のひとつである. その意味で, generic 構造はモデル理論的に重要な対象であるといえる.

例えば, 次のような主張が成り立つ. この補題は, 本講演の主結果の証明にも部分的に用いられる.

補題 2.4. generic 構造 M の有限部分構造上の各同型写像 f について,

$$\mathcal{O}_f := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \mid \sigma \text{は } f \text{ を拡大して得られる自己同型写像 }\}$$

を開基とする位相を $\mathrm{Aut}(M)$ に入れると, $\mathrm{Aut}(M)$ は Hausdorff なポーランド群となる.

主結果の主張に言明するにあたって, AP よりも少し強い性質を導入する必要がある.

定義 2.5. $\mathcal{L}$-generic 構造 M を固定する. $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ について, $A \supseteq B \cap C$ かつ任意の $R(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$ に対し, $B \cup C$ の元の列 $a_1, \ldots, a_n$ で, B と C 両方にまたがっていてかつ $R(a_1, \ldots, a_n)$ が成り立っているようなものがないとする. このとき, $\mathcal{L}$-構造 $A \cup B \cup C$ を直和の記号を用いて $B \oplus_A C$ と書き, B と C の A **上の free amalgam** と呼ぶ. また, A, B, C について上記の関係が成り立っていることを, $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ などと書いてあらわし, B と C は A 上独立[3]であるという.

定義 2.6. amalgamation class $\mathcal{K}$ が **FAP (Free Amalgamation Property)** をもつ, あるいは $\mathcal{K}$ の generic 構造 M が **free homogeneous** であるとは, 任意の $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ について, うまく $B' \cong_A B, C' \cong_A C$ をとれば, $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C'$ が成り立つことをいう.

注意 2.7. M を free homogeneous な構造とする.

(1) 任意の $A, B, C \subseteq_{\text{fin}} M$ に対し, $\sigma \in \text{Aut}(M/A)$ をうまくとれば $\sigma(B) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ が成り立つ.

(2) (推移性) $A, B, C, D \subseteq_{\text{fin}} M$ について, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C$ かつ $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B \cup C} D$ ならば, かつそのときに限り $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C \cup D$ である.

(3) (定常性) $A, B \subseteq_{\text{fin}} M$ と $\bar{a} \equiv_A \bar{a}'$ なる $\bar{a}, \bar{a}' \in M^d$ について, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ かつ $\bar{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ ならば, $\bar{a} \equiv_{AB} \bar{a}'$ である.

例 2.8. ランダムグラフは free homogeneous な構造でもある.

3 主結果

まず, ランダムグラフ上の自己同型群についての事実について述べる.

命題 3.1. (J.K.Truss, 2003[5]) ランダムグラフ M 上の自己同型群 $\text{Aut}(M)$ は単純群である. また, 任意の $\sigma \in \text{Aut}(M) \setminus \{\text{id}\}$ について, すべての $\tau \in \text{Aut}(M)$ を σ の共役元 3 つの積であらわすことができる.

このことは, 一般の generic 構造についての主張としては, 次が成り立つことが知られている.

命題 3.2. (D.Macpherson, K.Tent, 2011[6]) M を free homogeneous な構造とし, $\text{Aut}(M)$ が M への作用として推移的かつ M の対称群 $\text{Sym}(M)$ と異なるとする. このとき, $\text{Aut}(M)$ は単純群である.

また, 任意の $\sigma \in \text{Aut}(M) \setminus \{\text{id}\}$ について, すべての $\tau \in \text{Aut}(M)$ を σ または σ^{-1} の共役元 32 個の積であらわせる.

[3] この独立という関係は “よい” 関係であり, ベクトル空間における基底の独立性や, 代数的閉体における超越次元を意識した用語である. じっさい, モデル理論においてはこれらの独立概念は統一的に扱うことができる. このように, 独立性をうまく扱うことのできる理論のことを単純であるといい, 単純な理論の研究はモデル理論研究におけるメインストリームのひとつである.

本研究において, この 32 という数を改良することに成功した.

定理 3.3. M を free homogeneous な構造とし, $\mathrm{Aut}(M)$ が推移的かつ $\mathrm{Sym}(M)$ と異なるとする. このとき, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M) \setminus \{\mathrm{id}\}$ について, すべての $\tau \in \mathrm{Aut}(M)$ を σ または σ^{-1} の共役元 12 個の積であらわせる.

4 今後の展望

AP や FAP より弱い概念として, 部分構造としての関係 "$\subseteq$" に他の条件を付け加えた closed という関係 "$<$" を考え, その関係のもとでのみ FAP ができるようなクラスを考えることがある. すなわち, $A, B, C \in \mathcal{K}$ について, $A < B, C$ ならば $B \oplus_A C \in \mathcal{K}$ が成り立っているようなクラス $\mathcal{K}$ を考えるのである.

具体的には, 例えばグラフの言語において, 実数 $0 < \alpha < 1$ を固定し, グラフの次元 δ_α を定義する. すなわち, $\delta_\alpha(A) := |A| - \alpha|E^A|$ とする. そこで, $A \subseteq B$ について, $A <_\alpha B$ を任意の $A \subsetneq X \subseteq B$ に対して $\delta_\alpha(X) - \delta_\alpha(A) > 0$ であると定義する.

これに関して, generic 構造と似た構造を構成することができる.

命題 4.1. $(\mathcal{K}, <)$ が上記の意味で free amalgamation class であるとき, $\mathcal{L}$-可算構造 M が (同型を除いて一意に) 存在し, 以下が成り立つ:

- 任意の $A \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ について, $B \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ が存在し, $A \subseteq B < M$ が成り立つ.
- 任意の $A \subseteq_{\mathrm{fin}} M$ について, $A \in \mathcal{K}$ である.
- $A < M$ かつ $A < B$ であるような任意の $A, B \in \mathcal{K}$ について, $B' \cong_A B$ が存在して $B' \subseteq M$ となる.

例えば, 上記の $<_\alpha$ によって構成されるグラフは, Shelah-Spencer グラフと呼ばれる, 非常に辺の結ばれる確率の小さい可算グラフに一致する.

これらの構造に関して, 次のような予想を立てることができる.

予想 4.2. free amalgamation class $(\mathcal{K}, <)$ について, M を上記の命題によって構成された可算構造とする. $\mathrm{Aut}(M)$ が推移的かつ $\mathrm{Sym}(M)$ と異なるとき, $\mathrm{Aut}(M)$ は単純群である.

参考文献

[1] R. Fraïssé, *Sur certaines relations qui généralisent l'order des nombres rationnels*, C. R. Acad. sci. Paris 237 (1953) 540-542.

[2] P. J. Cameron, *Oligomorphis Permutation Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 152, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, New York, 1995.

[4] W. Hodges, *Model theory, bolume 42*, Cambridge University Press, 1993.

[5] J.K.Truss, *The automorphism group of the random graph: four conjugates good, three conjugates better*, Discrete Math. 268 (2003) 257-271.

[6] D.Macpherson, K.Tent, *Simplicity of some automorphism groups*, Journal of Algebra, Volume 342, Issue 1, pages 40-52, 2011.

[7] E.Hrushovski, *A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane*, preprint, 1988.

[8] F.O.Wagner, *Simple Theories*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

パラレルセッション
会場Ｂ

非有界な関数を平均曲率に持つ特異回転面について

寺本 圭佑 (Keisuke Teramoto)*
神戸大学大学院理学研究科数学専攻 D3

導入

$I \subset \boldsymbol{R}$ を区間とし, $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級の平面曲線とする. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(y > 0)$ と表し, γ の x 軸に関する回転面を

$$s(t, \theta) = \big(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta\big) \tag{0.1}$$

とする. 曲線 γ を回転面 s の**生成曲線**と呼ぶ. $s(t, \theta)$ の平均曲率を $H(t)$ で表す. I 上で与えられた C^∞ 級関数 $H(t)$ に対して, 回転面 $s(t, \theta)$ が $H(t)$ を平均曲率として持つための生成曲線 $(x(t), y(t))$ の具体的な表示が劔持勝衛氏によって与えられた [6]. さらに, 回転面の周期性についての研究も行われている [7].

一方, 近年, 特異曲線や特異曲面に関する多くの研究が行われている ([1–5, 9–12]). もし生成曲線 γ が正則なら, 平均曲率 H は I 上可微分であるが, γ が特異点を持つとき, H は非有界になることがある [11] (see also [9]). 本講演では, P を離散集合とし, $I \setminus P$ 上で与えられた C^∞ 級関数 H に対して, 回転面 s の平均曲率が H である生成曲線 $(x(t), y(t))$ の具体的な表示を紹介する. また, 周期性についても紹介する.

本講演の内容は, L.F. Martins 氏 (UNESP), 佐治健太郎氏 (神戸大学), S. P. dos Santos 氏 (UNESP) との共同研究 [8] に基づく.

1 特異回転面の構成

$I \subset \boldsymbol{R}$ を区間, $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 曲線とする. 曲線 γ を $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ とおき, 任意の $t \in I$ に対して, $y(t) > 0$ を満たすと仮定する. ここで, 次のことを仮定する: ある関数 $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して, $\gamma'(t)$ と $e(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ が一次従属になる. このとき,

$$\gamma'(t) = l(t)e(t), \quad e(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

を満たす関数 $l : I \to \boldsymbol{R}$ を得る. これは, γ が **フロンタル**であるということと同値である. (詳細は Section 2). また, $p \in I$ が γ の特異点であることと $l(p) = 0$ となることは同値である. $P = l^{-1}(0)$ とし, P は離散集合であると仮定する. 回転面 s の単位法ベクトル ν を

$$\nu(t, \theta) = \big(\sin\varphi(t), -\cos\varphi(t)\cos\theta, -\cos\varphi(t)\sin\theta\big) \tag{1.1}$$

*teramoto@math.kobe-u.ac.jp
2010 Mathematics Subject classification. Primary 57R45 ; Secondary 53A05.
Keywords and Phrases. Cuspidal edge, mean curvature
本研究は JSPS 科研費 17J02151 の助成を受けたものです.

と取る. このとき, s の正則点集合 $I \setminus P$ 上で平均曲率 H は C^∞ 級関数である. さらに, 次を得る.

Lemma 1.1. 関数 Hl は I 上の C^∞ 級関数に拡張できる.

フロンタルの平均曲率の特異点付近での挙動の詳細は [9, Proposition 2.6] を参照.

逆に, I 上で Hl が C^∞ 級関数となるように与えられた関数 $H : I \setminus P \to \boldsymbol{R}$ と, $l : I \to \boldsymbol{R}$ ($P = l^{-1}(0)$ は離散集合) に対して, (1.1) に関する平均曲率が H であり, 生成曲線 $\gamma = (x(t), y(t))$ が, $\gamma' = l(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ を満たす回転面を求めよう. このとき, x, y は, 次の微分方程式を満たす:

$$2H(t)y(t)l(t) - l(t)\cos\varphi(t) + y(t)\varphi'(t) = 0. \tag{1.2}$$

[6] の方法にしたがって, この方程式を

$$(x'(t), y'(t)) = l(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) \tag{1.3}$$

の条件下で解く. $z(t) = y(t)\sin\varphi(t) + \sqrt{-1}y(t)\cos\varphi(t)$ とおくと, 方程式 (1.2) は,

$$z'(t) - 2\sqrt{-1}H(t)z(t)l(t) - l(t) = 0$$

に変形でき, この方程式の一般解は,

$$\begin{aligned} z(t) = {} & (F(t) - c_1)\sin\eta(t) + (G(t) - c_2)\cos\eta(t) \\ & + \sqrt{-1}\big((G(t) - c_2)\sin\eta(t) - (F(t) - c_1)\cos\eta(t)\big) \end{aligned}$$

である. ただし, $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ であり,

$$F(t) = \int_0^t l(u)\sin\eta(u)\,du, \quad G(t) = \int_0^t l(u)\cos\eta(u)\,du, \quad \eta(u) = \int_0^u 2l(v)H(v)\,dv.$$

$y(t)^2 = |z(t)|^2$ と $x'(t) = l(t)\cos\varphi(t) = l(t)(z(t) - \bar{z}(t))/(2\sqrt{-1}y(t))$ から,

$$y(t) = ((F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2)^{1/2}, \tag{1.4}$$

$$x'(t) = \frac{F'(t)(G(t) - c_2) - G'(t)(F(t) - c_1)}{((F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2)^{1/2}} = \frac{F'(t)(G(t) - c_2) - G'(t)(F(t) - c_1)}{y(t)} \tag{1.5}$$

を得る. これが求めたかった式である. 初期値 c_1, c_2 は, 考えている定義域上で, $(F(t) - c_1)^2 + (G(t) - c_2)^2 > 0$ を満たすように取る.

2 生成曲線の特異点

この節では, 生成曲線や回転面に現れる特異点の判定条件について述べる. γ の特異点 p が, 3/2-**カスプ** であるとは, γ の p における写像芽が $t \mapsto (t^2, t^3)$ に 0 おいて $\mathcal{A}$-同値

となるときをいう. (二つの写像芽 $f_1, f_2 : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が **$\mathcal{A}$-同値** であるとは, 微分同相写像芽 $S : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^m, 0)$, $T : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が存在し, $f_2 \circ S = T \circ f_1$ を満たすときをいう.) 同様に,γ の特異点 p が, j/i-**カスプ** $((i, j) = (2, 5), (3, 4), (3, 5))$ であるとは, γ の p における写像芽が $t \mapsto (t^i, t^j)$ に 0 おいて $\mathcal{A}$-同値となるときをいう. これらの特異点に関する判定法が知られている.

点 p における写像芽 γ が **フロンタル**であるとは, 写像芽 $n : (\boldsymbol{R}, p) \to (\boldsymbol{R}^2, 0)$ が存在し, 任意の t に対して, $|n| = 1$, $\gamma' \cdot n = 0$ を満たすときをいう. フロンタルが **波面**であるとは, 組 (γ, n) がはめ込みを与えるときをいう. γ が, p において 3/2-カスプ または, 4/3-カスプを持つとき, 波面であり, γ が p において 5/2-カスプ または 5/3-カスプを持つとき, フロンタルだが波面ではない. 第 1 節で求めた曲線に対して次が成り立つ.

Proposition 2.1. (1.4), (1.5) によって与えられる曲線 $\gamma = (x, y)$ はフロンタルである. さらに, $l(p) = 0$ のとき, γ が p で波面となるための必要十分条件は $\eta'(p) \neq 0$ を満たすことである.

さらに, 以下の判定条件が成立する.

Proposition 2.2. γ を上述のものとし, $l(p) = 0$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) γ が p で 3/2-カスプを持つための必要十分条件は, $l'\eta' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(2) γ が p で 5/2-カスプを持つための必要十分条件は, $l' \neq 0$, $\eta' = 0$, $l''\eta'' - l'\eta''' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(3) γ が p で 4/3-カスプを持つための必要十分条件は, $l' = 0$ と $\eta' l'' \neq 0$ が p で成り立つことである.

(4) γ が p で 5/3-カスプを持つための必要十分条件は, $l' = \eta' = 0$ と $\eta'' l'' \neq 0$ が p で成り立つことである.

Example 2.3. $H = 1/t$, $l = t$ とし, $c_1 = c_2 = 1/10$ とおく. このとき, Proposition 2.2 から, γ は $t = 0$ で 3/2-カスプを持つ. 生成曲線は Figure 1 のようになる.

Example 2.4. $H = 1 + t$, $l = t$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とする. Proposition 2.2 より, γ は $t = 0$ で 5/2-カスプを持つ. $H = 1/t^2$, $l = t^2$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とする. このとき, Proposition 2.2 から, γ は $t = 0$ で 4/3-カスプを持つ. $H = 1/t$, $l = t^2$, $c_1 = c_2 = 1/10$ とすると, Proposition 2.2 より, γ は $t = 0$ で 5/3-カスプを持つ. 生成曲線は Figure 2 のようになる. 特異点は矢印で示されている部分.

Proposition 2.2 により, 回転面に現れる特異点を調べることができる. 写像 $f : (\boldsymbol{R}^2, q) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ の特異点 q が j/i-**カスプ辺** であるとは, f が q において, 原点 0 における写像芽 $(u, v) \mapsto (u^i, u^j, v)$ と $\mathcal{A}$-同値なときをいう. $y > 0$ のとき, 写像芽 $(x, y, z) \mapsto (x, y\cos z, y\sin z)$ は微分同相写像芽であるから, (0.1) で与えられる写像芽 s が (p, θ) で, j/i-カスプ辺 を持つための必要十分条件は, 生成曲線 $\gamma = (x, y)$ が p で j/i-カスプを持つことである.

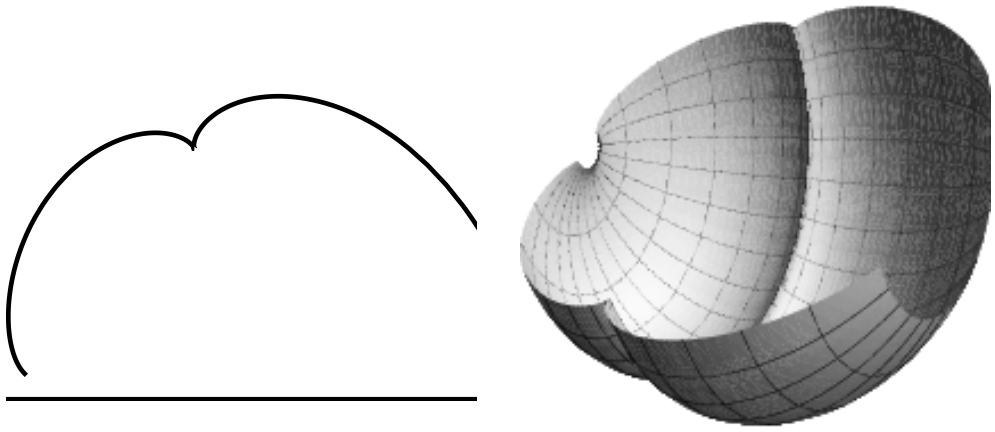


Figure 1: Example 2.3 における生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

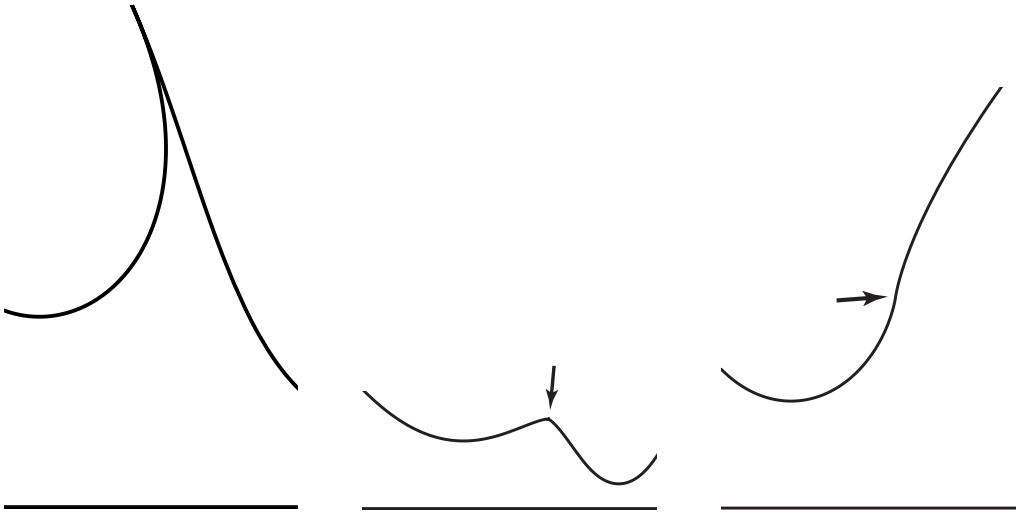


Figure 2: Example 2.4 の生成曲線. 水平線は x 軸を表す.

3 周期性

この節では, H と l が周期的であるとき, 曲面が周期的になる条件を紹介する. 正則な場合には [7] で与えられていることに注意する. (0.1) で与えられる回転面の生成曲線 (x, y) が周期 L の**周期を持つ**とは, ある正数 $T > 0$ が存在し, $x(s + L) = x(x) + T$ と $y(s + L) = y(s)$ が成り立つときをいう. このとき, 次の周期性に関する条件を得る.

Theorem 3.1. $H : \boldsymbol{R} \setminus P \to \boldsymbol{R}$ と $l : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が同じ周期 L を持つ C^∞ 級周期関数とする. ただし, $P = l^{-1}(0)$ は離散集合で, Hl が $\boldsymbol{R}$ 上の C^∞ 級関数に拡張できるとする. このとき, (1.5), (1.4) で与えられる (1.2) の解 (x, y) が周期的であるための必要十分条件は, $1 - \cos\eta(L) \neq 0$ かつ

$$\cos\left(\varphi(0) + \frac{\eta(L)}{2}\right) \int_0^L l(u) \sin\eta(u)\, du = \sin\left(\varphi(0) + \frac{\eta(L)}{2}\right) \int_0^L l(u) \cos\eta(u)\, du, \quad (3.1)$$

または, $1-\cos\eta(L)=0$ かつ

$$\int_0^L l(u)\sin\eta(u)\,du=\int_0^L l(u)\cos\eta(u)\,du=0 \tag{3.2}$$

である. ただし, $(x'(0),y'(0))=l(0)(\cos\varphi(0),\sin\varphi(0))$.

もし, 生成曲線が正則なら, 上の条件は [7, Theorem 1] で与えられた条件と等しいことに注意する.

Example 3.2. $H=1/\sin t$, $l=\sin t$, $c_1=1$, $c_2=3/4$ とする. これは, Theorem 3.1 の条件を満たしているので, 生成曲線は周期的になる生成曲線の像は Figure 3 である. 生成曲線に現れる特異点はすべて 3/2-カスプである.

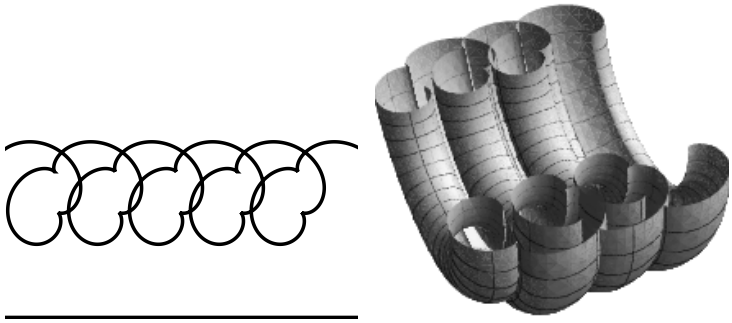


Figure 3: Example 3.2 の生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

Example 3.3. $H=1/\sin^2 t$, $l=\sin^2 t$, $c_1=c_2=1/10$ とする. これは, Theorem 3.1 の条件を満たさないので, 生成曲線は周期的でない (Figure 4). 現れる特異点は 4/3-カスプであり, それらは矢印で示された部分に現れている.

References

[1] J. W. Bruce and J. M. West, *Functions on a crosscap*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), no. 1, 19–39.

[2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35–67.

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolutes of fronts in the Euclidean plane*, J. Singul. **10** (2014), 92–107.

[4] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications*, arXiv:1601.06265.

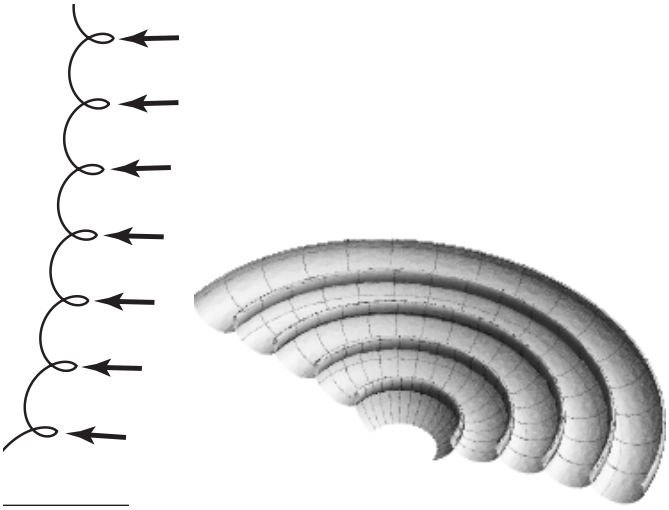


Figure 4: Example 3.3 の生成曲線と回転面. 水平線は x 軸を表す.

[5] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[6] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **32** (1980), no. 1, 147–153.

[7] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with periodic mean curvature*, Osaka J. Math. **40** (2003), no. 3, 687–696.

[8] L. F. Martins, K. Saji, S. P. dos Santos and K. Teramoto, *Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature*, submitted.

[9] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. Math. & Statistics, 2016, 247–282.

[10] R. Oset Sinha and F. Tari, *Flat geometry of cuspidal edges*, to appear in Osaka J. Math. arXiv:1610.08702.

[11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

[12] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), no. 3, 285–299.

統計多様体とヘッセ多様体における局所同型写像の構成について

佐藤 直飛 (Naoto SATOH)
北海道大学大学院理学院数学専攻

概要

次元の等しい二つの統計多様体の間で統計構造を保つ写像のことを統計同型写像という. 本講演では, 局所的にリーマン曲率テンソルと差テンソルが保存されているとき局所統計同型写像が構成できることを紹介し, 特にヘッセ多様体の場合にはヘッセ曲率テンソルと差テンソルが保たれている場合に局所統計同型写像が構成できることを述べる.

1 統計多様体とヘッセ多様体

定義 1.1 なめらかな n 次元多様体 M とその上の捩れのないアファイン接続 ∇ とリーマン接続 g の組 (M, ∇, g) が統計多様体であるとは, $(0,3)$ テンソル場 $C := \nabla g$ が対称であるときをいい, このとき (∇, g) を統計構造という.

統計多様体という名前は次のような例に由来する.

例 1.2 Ω を高々可算集合または $\mathbb{R}^k$ とする. S が $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$ をパラメータとする Ω 上の確率分布族で

$$S = \left\{ p(x;\xi) \;\middle|\; \int_\Omega p(x;\xi)dx = 1,\ p(x;\xi) > 0,\ \xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n \right\}$$

と表されるとき, S を Ω 上の統計モデルという. S は $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ を局所座標系とする n 次元多様体とみなすことができる. このとき, 微分と積分の順序交換可能性などの適当な仮定のもとで, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Xi$ に対して,

$$g^F_{ij}(\xi) := \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \log p(x;\xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \log p(x;\xi) \right) p(x;\xi) dx \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

とおく. ただし, Ω が高々可算集合の場合も和は積分の形で表すこととする. $g^F(\xi) = (g^F_{ij})$ は n 次実対称行列となり, これを S の Fisher 情報行列という. また, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} := \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 \log p}{\partial \xi^i \xi^j}(x;\xi) + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\partial \log p}{\partial \xi^i}(x;\xi) \frac{\partial \log p}{\partial \xi^j}(x;\xi) \right\} \frac{\partial \log p}{\partial \xi^k}(x;\xi) p(x;\xi)$$

とおくと, $\Gamma_{ij,k}^{(\alpha)}$ は S のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を定め, $\nabla^{(\alpha)}$ を α 接続という. このとき, $(\nabla^{(\alpha)}, g^F)$ は Ω 上の統計構造となる.

確率分布族として正規分布族や Poisson 分布族などの指数型分布族と言われるものを考えると, $\nabla^{(1)}$ は平坦になっている. このように平坦な接続が存在する場合には, 平坦接続に関するアファイン座標系 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ に関して, あるなめらかな関数 ψ が存在して計量 g を

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j}$$

とヘッシアンで書くことができる. そこで平坦な接続を持つ統計多様体を次のように定義する.

定義 1.3 統計多様体で ∇ が平坦であるとき, (M, ∇, g) をヘッセ多様体といい, (∇, g) をヘッセ構造という.

次元の等しい二つの統計多様体 (M, ∇, g) と $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g})$ が統計多様体として同じになるのは, それらの間に微分同型写像 $\varphi : M \to \overline{M}$ が存在して任意のベクトル場 X, Y, Z に対して $C(X, Y, Z) = \overline{C}(\varphi_* X, \varphi_* Y, \varphi_* Z)$ が成り立つときである. したがって統計微分同型写像を次のように定義する.

定義 1.4 (M, ∇, g) と $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{g})$ を同次元の統計多様体とする. このとき, $\varphi : M \to \overline{M}$ が統計同型写像であるとは, φ が等長写像でかつアファイン接続同型であるとき, すなわち

$$g(X,\ Y) = \overline{g}(\varphi_* X,\ \varphi_* Y),$$
$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y$$

が任意のベクトル場 X, Y に対して成り立つときをいう.

次に統計多様体に関して基本的な概念を定義する.

定義 1.5 (1) (M, g) をリーマン多様体とし, ∇ を M 上のアファイン接続とする. このとき, ∇^* が ∇ の g に関する双対接続であるとは

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

をみたすことをいう. (∇, g) が M 上の統計構造ならば, (∇^*, g) も M 上の統計構造となっている.
(2) 統計構造 (∇, g) に対して, 差テンソル $K := K^{(\nabla, g)} \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ を

$$K(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_X^g Y$$

で定義する. ここで, ∇^g は g の Levi-Civita 接続である.

M 上のアファイン接続 ∇ に対して

$$R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

と定義すると, R^{∇} は $(1,3)$ テンソル場となり, これを ∇ に関する曲率テンソルと呼ぶ. 以下簡単のため, $R := R^{\nabla}$, $R^g := R^{\nabla^g}$, $R^* := R^{\nabla^*}$ と書くこととする.

ヘッセ多様体に対して差テンソル K を用いてヘッセ曲率を次のように定義する.

定義 1.6 ヘッセ構造 (∇, g) に対して,

$$H(X,Y)Z := -(\nabla K)(Y,Z;X), \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM)$$

と定義すると, これは M 上の $(1,3)$ テンソル場で, これをヘッセ曲率テンソルという.

2 統計多様体上の局所統計同型写像

(M,∇,g) と $(\overline{M},\overline{\nabla},\overline{g})$ を同次元の統計多様体とする. $p \in M$ と $\overline{p} \in \overline{M}$ をとって固定し, 線型等長写像 $\Phi : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$ が与えられているとする. また凸開集合 $\mathcal{U}_p \subset T_pM$ と $\overline{\mathcal{U}}_{\overline{p}} \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ を $U := \mathrm{Exp}_p(\mathcal{U}_p)$, $\overline{U} := \overline{\mathrm{Exp}}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{U}}_{\overline{p}})$ がそれぞれ p と $\overline{p}$ の ∇^g に関する正規座標近傍となるようにとる. すると微分同型写像 $\varphi : U \to \overline{U}$ が

$$\varphi := \overline{\mathrm{Exp}}_{\overline{p}} \circ \Phi \circ (\mathrm{Exp}_p)^{-1} \tag{1}$$

によって定義される. p を始点とする ∇^g に関する測地線 γ が任意に与えられたとき, $\overline{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ とおくと, $\overline{\gamma}$ は $\overline{U}$ 上の $\overline{p}$ を始点とする $\nabla^{\overline{g}}$ に関しての測地線となる. γ と $\overline{\gamma}$ の終点をそれぞれ q と $\overline{q} := \varphi(q)$ とし, 線型等長写像 $\Phi_q : T_qM \to T_{\overline{q}}\overline{M}$ を

$$\Phi_q := \overline{P}_{\overline{\gamma}} \circ \Phi \circ (P_\gamma)^{-1} \tag{2}$$

によって定義する. ここで $P_\gamma : T_pM \to T_qM$ と $\overline{P}_{\overline{\gamma}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \to T_{\overline{q}}\overline{M}$ はそれぞれ ∇^g と $\nabla^{\overline{g}}$ に関しての γ と $\overline{\gamma}$ に沿った平行移動であり, これらは線型等長写像である.

このような設定のもと, 次の結果を得た.

定理 2.1 $(M,\ \nabla,\ g)$ と $(\overline{M},\ \overline{\nabla},\ \overline{g})$ を同次元の統計多様体とし, R^g を $R^{\overline{g}}$ をそれぞれのリーマン曲率テンソルとし, K と $\overline{K}$ をそれぞれの差テンソルとする. そして φ と Φ_q を上の設定の (1), (2) のようにとる. このとき U 上の p を始点とする任意の ∇^g 測地線 γ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi_q(R^g(u,\ v)w) = R^{\overline{g}}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v))\Phi_q(w),\\
&\Phi_q(K(u,\ v)) = \overline{K}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v)), \qquad (u,\ v,\ w \in T_qM),
\end{aligned}$$

が成り立つとき, φ は U から $\overline{U}$ への統計同型写像となる.

さらに統計多様体がヘッセ多様体のとき, 次の定理を得た.

定理 2.2 $(M,\ \nabla,\ g)$ と $(\overline{M},\ \overline{\nabla},\ \overline{g})$ を同次元のヘッセ多様体とし, K と $\overline{K}$ をそれぞれの差テンソルとし H と $\overline{H}$ をそれぞれのヘッセ曲率テンソルとする. そして φ と Φ_q を上の設定の (1), (2) の

ようにとる. このとき U 上の p を始点とする任意の ∇^g 測地線 γ に対して

$$\Phi_q(K(u,\ v)) = \overline{K}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v)),$$
$$\Phi_q(H(u,\ v)w) = \overline{H}(\Phi_q(u),\ \Phi_q(v))\Phi_q(w) \qquad (u,\ v,\ w \in T_qM),$$

が成り立つとき, φ は U から $\overline{U}$ への統計同型写像となる.

参考文献

[1] S. Amari, Information Geometry and Its Applications, Appl. Math. Sci., vol. 194, Springer. (2016).

[2] S. Amari and H. Nagaoka, Method of Information Geometry, Transl. Math Monogr., vol. 191, Amer. Math. Soc. (2000).

[3] N. Ay, J. Jost, H.V. Le and L. Schwachhöfer, Information Geometry, Springer, (2017).

[4] H. Furuhata, Hypersurfaces in statistical manifolds, Differ. Geom. Appl., 27, (2009), 420–429.

[5] T. Kurose, On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds, Tôhoku Math. J., 46, (1994), 427–433.

[6] S.L. Lauritzen, Statistical manifolds, in Differential Geometry in Statistical Inferences, IMS Lecture Notes Monograph Series 10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward California (1987).

[7] K. Nomizu and T. Sasaki, Affine differential geometry, Cambrige University Press, (1994).

[8] N. Satoh, Local statistical diffeomorphisms, Preprint.

[9] H. Shima, The Geometry of Hessian Structure, World Scientific Publ., (2007).

[10] M. Takeuchi, Lie Groups II, Transl. Math Monogr., vol. 85, 113–260, Amer. Math. Soc. (1991).

[11] J. A. Wolf, Spaces of Constant Curvature –6th ed., Amer. Math. Soc. (2011).

On Fuchsian loci of $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$-Hitchin components of a pair of pants

稲垣　友介 (Yusuke Inagaki)*
大阪大学大学院理学研究科数学専攻

本レポートでは Anosov 表現，Hitchin 成分について紹介した後に筆者の計算について簡単に述べる．本論の前にいくつか準備を行う．有限生成群 Γ と Lie 群 G があったとき Γ から G への表現全体の成す空間

$$\mathcal{R}(\Gamma, G) = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$$

を**表現多様体** (representation variety) と呼ぶ．表現多様体には G が代数的な場合自然に代数的集合の構造が入る．特に Γ が n 元生成であるとき $\mathcal{R}(\Gamma, G) \subset G^n$ であり関係子が定義方程式を定める．表現多様体には G が共役により作用している．この作用に対する商空間

$$\mathcal{X}(\Gamma, G) = \mathcal{R}(\Gamma, G)//G$$

を**指標多様体** (character variety) と呼ぶ．ここで商は GIT 商を考えている．

指標多様体と多様体の幾何構造の関係の例として Teichmüller 空間を思い出す．向き付けられた閉曲面 S の **Teichmüller 空間** $\mathcal{T}(S)$ とは S 上の完備で有限体積を与え曲率が至る所-1 である Riemann 計量全体 $\mathrm{Hyp}(S)$ の微分同相群の単位元を含む成分 $\mathrm{Diff}_0(S)$ による商空間 $\mathcal{T}(S) = \mathrm{Hyp}(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$ である．計量に関する議論により $\mathcal{T}(S)$ は (標識付き) 複素構造，共形構造の空間に一致していて様々な観点で研究されている歴史の深い対象である．Teichmüller 空間の元を以下 S 上の**双曲構造**と呼ぶ．双曲構造 m に対して S の普遍被覆 $\tilde{S}$ から双曲空間 $\mathbb{H}^2$ への m に付随する等長写像が存在することが知られている．この同一視で基本群による被覆変換を $\mathbb{H}^2$ 上の等長変換に読み替えることで次が言える．即ち双曲構造 m の与えられた曲面 S_m に対して $\mathbb{H}^2$ の等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ が存在して Γ は基本群 $\pi_1(S)$ と同型で S_m と $\mathbb{H}^2/\Gamma$ は等長的である．離散的な埋め込み $\pi_1(S) \to \Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ は離散的で忠実な表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ を与える．この表現のことをよく**ホロノミー表現**と呼ぶ．ここでホロノミー表現は同一視 $S = \mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S))$ が向きを保つようにとることにする．ホロノミー表現の共役類は双曲構造 m に対して一意的に定まるので $\mathcal{T}(S)$ の $\mathcal{X}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ への埋め込みが構成される．従って Teichmüller 空間は指標多様体の部分集合と同一視される．

一般に多様体上の幾何構造とその変形の理論は上の議論のようにある特徴的な基本群の表現や指標多様体の理論に帰着される．その一つの例として近年研究されているのが Anosov 表現と呼ばれている表現である．

* e-mail: y-inagaki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

1 Anosov 表現

Anosov 表現を定義する．向き付けられた種数 $g \geq 2$ の閉曲面を S で表し S 上の双曲構造を任意に固定する．単位接束 T^1S の測地流を ϕ_t で表しまた $\pi_1(S)$-被覆を $T^1\tilde{S}$ で表す．実半単純 Lie 群 G を考えその放物的部分の組 (P^+, P^-) で横断的なものを任意に固定する．ここで (P^+, P^-) が横断的であるとはその交わり $L = P^+ \cap P^-$ が簡約であるときにいう．$\mathcal{F}^+ = G/P^+, \mathcal{F}^- = G/P^-$ とおくとき G/L は $\mathcal{F}^+ \times \mathcal{F}^-$ の軌道空間として標準的に埋め込まれていることに注意する．表現 $\rho : \pi_1(S) \to G$ に対して T^1S 上の平坦捩れ束を $E_\rho = T^1\tilde{S} \times_\rho G/L$ で表す．接束 TG/L を積構造 $\mathcal{F}^+ \times \mathcal{F}^-$ に沿って分解することで $\mathcal{F}^\pm$ 方向に沿った G/L 上の接分布 $E^\pm$ を定義する．

定義 1.1 (Guichard-Wienhard による定義 [7])**.** 表現 ρ が (P^+, P^-)-**Anosov** であるとは E_ρ のある切断 σ が存在し次を満たす．

(i) σ は ϕ_t に沿って平坦である．
(ii) σ による誘導束 σ^*E^+, σ^*E^- たちが ϕ_t の作用に関して *dilating, contracting property* をもつときにいう．

定義の (ii) は次のことを意味する：ある連続的な σ^*E^+(resp. σ^*E^-) のファイバー上の計量の族と定数 $a, A > 0$ が存在して，任意の $t \geq 0$ と，任意の $p \in T^1N$ 上のファイバーに属する全ての $v \in \sigma^*E^+$(resp. σ^*E^-) に対して

$$||\phi_{-t}(v)||_{\phi_{-t}(p)} \leq Ae^{-at}||v||_p, \quad (\text{resp. } ||\phi_t(v)||_{\phi_t(p)} \leq Ae^{-at}||v||_p).$$

注意 1.2. *Anosov* 表現は負曲率多様体の基本群に対しても定義される．より一般に *Gromov* 双曲群に対しても定義されるがその場合単位接束の代わりに *Gromov* の *flow space* が用いられる．また表現先の *Lie* 群に関しても複素半単純の場合や簡約 *Lie* 群の場合にも定義することができる．これら議論については [3], [7], [6] を参照して頂きたい．

Anosov 表現の研究に用いられる**極限曲線** (limit curve) について触れておく．この曲線は例えば擬 Fuchs 表現の極限集合の類似である．定義 1.1 の条件から $T^1\tilde{S}$ に持ち上げられた測地流 ϕ_t の各軌道は $\mathcal{F}^\pm$ のただ一つの元に対応する．一方で測地線の集合は $\pi_1(S)$ の Gromov 境界の点の組と同一視される．これら事実に考察を加えることで写像 $\xi_\rho : \partial_\infty\pi_1(S) \to \mathcal{F}^+$ が得られる．この写像は連続であり Anosov 表現に対して一意的に定まることが知られている．曲線 ξ_ρ を極限曲線や Anosov 写像，旗曲線と呼ぶ．

注意 1.3. 極限曲線は *Anosov* 表現の幾何学的意味を大いに反映した対象であり逆に極限曲線の存在を *Anosov* 表現の定義とすることもできる．この定義については [7], [11] を参照せよ．

以下横断的放物部分群の組として Borel 群からなるものを考えその組を記号 (B^+, B^-) で表すことにする．曲面群 $\pi_1(S)$ の $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ への (B^+, B^-)-Anosov 表現 ρ に限ればその力学系の性質から次のような良い特徴を持つ捩れ束を誘導することが Labourie により示されている．ρ のリフト $\rho' : \pi_1(S) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ をひとつとる．

定理 1.4 (Labourie [12])**.** 単位接束 T^1S 上の ρ' に付随する平坦捩れ $\mathbb{R}^n$-束を E で表す．

(i) E は T^1S 上の連続な直線束 $V_1, \cdots V_n$ の和に分解し各 V_i は ϕ_t の与える軌道に沿って平行である．
(ii) ϕ_t の平坦接続による持ち上げによる $V_i^* \otimes V_j (i > j)$ への作用は *contracting* である．

先に述べた極限曲線 ξ_ρ はこの直線束への分解に大きく依存している．E の部分束 $E_i^{\pm}$ を次で定義する．

$$E_i^+ = \oplus_{1 \leq j \leq i} V_j, \quad E_i^- = \oplus_{n-i+1 \leq j \leq n} V_j$$

また単位接束は $T^1S = \partial_\infty \pi_1(S)^{(3)} \setminus \Delta$ のように同一視されることに注意する．ここで Δ は

$$\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \partial_\infty \pi_1(S)^{(3)} \mid x_i = x_j (i \neq j)\}$$

で定義される．横断的放物部分群として Borel 群を選んでいるので ξ_ρ の像は旗の成す空間 $\mathrm{flag}(\mathbb{R}^n)$ と同一視できる．測地流による $p \in T^1S$ の軌道の吸い込み点を $x_p^+ \in \partial_\infty \pi_1(S)$ で表すとき次が成立することが定理 1.4 から示される．ここで $(E_i^+)_p$ は束 E_i^+ の p 上のファイバーであり E のファイバーである $\mathbb{R}^n$ の i 次部分空間を与えている．

$$\xi_\rho(x_p^+) = \{(E_i^+)_p\}_i \in \mathrm{flag}(\mathbb{R}^n)$$

この曲線 ξ_ρ は次で定義される超凸 Frenet 曲線であることが知られている．

定義 1.5 ([12])**.** 曲線 $\xi : S^1 \to \mathrm{flag}(\mathbb{R}^n)$ が**超凸 Frenet** であるとは次を満たすときにいう．ここで像 $\xi(x)$ に対して $\xi(x)^{(p)}$ は旗 $\xi(x)$ に属する p 次元部分空間を指す．

(i) $n_1 + \cdots + n_k \leq n$ を満たす正整数組と異なる点の組 $(x_1, \cdots, x_k)$ に対して $\xi(x_1)^{(n_1)} + \cdots + \xi(x_k)^{(n_k)}$ は直和
(ii) 任意の点 $x \in S^1$ に対して $n_1 + \cdots + n_k \leq n$ を満たす正整数組を固定したとき異なる点の組 $(x_1, \cdots, x_k)$ を x へ近づける極限により

$$\oplus_{i=1}^{i=k} \xi(x_i)^{(n_i)} \to \xi^{(n_1 + \cdots n_k)}(x).$$

ここで極限は x_i たちが互いに異なり続けるような極限である．

以下超凸 Frenet 曲線を単に超凸曲線と呼ぶ．Labourie は $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ への (B^+, B^-)-Anosov 表現から定義される超凸曲線に関する議論を用いて Anosov 表現の像がこれまで研究されてきた双曲等長変換群の離散部分群とよく似た振る舞いをすることを示した．

定理 1.6 (Labourie [12])**.** 曲面群 $\pi_1(S)$ の $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ への (B^+, B^-)-*Anosov* 表現は離散的で忠実であり，$\pi_1(S)$ の非自明元 $\gamma \in \pi_1(S)$ に対して $\rho(\gamma)$ は純斜航的，すなわち相異なる 1 でない固有値を持つ．

2 Hitchin 成分

Hitchin 成分とは Teichmüller 空間 $\mathscr{T}(S)$ のある種の一般化である．冒頭にあるように $\mathscr{T}(S)$ は指標多様体の部分集合と同一視される．以下 S の $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$-指標多様体を $\mathcal{X}_n(S)$ で表す．そこで標準的に得られる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の既約 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$-表現から誘導される準同型 $\iota_n : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ を考える．この既約表現は指標多様体の間の写像 $(\iota_n)_* : \mathcal{X}_2(S) \to \mathcal{X}_n(S)$ を定義し $\mathscr{T}(S)$ を $\mathrm{Fuch}_n(S) = (\iota_n)_*(\mathscr{T}(S))$ へ写す．

定義 2.1. 指標多様体 $\mathcal{X}_n(S)$ の $\mathrm{Fuch}_n(S)$ を含む連結成分を **Hitchin 成分**と呼ぶ．*Hitchin* 成分を $\mathrm{Hit}_n(S)$ で表し *Hitchin* 成分に属する元を *Hitchin* 表現と呼ぶ．部分集合 $\mathrm{Fuch}_n(S)$ は **Fuchs 跡** (*Fuchsian locus*)，*Fuchs* 跡に属する元は *n-Fuchs* 表現と呼ばれる．

Hitchin 成分が研究についての歴史的背景を簡単に述べる．もともと曲面群の指標多様体は冒頭にあるように Riemann 面上の双曲幾何との関連で研究されていたがその連結成分に関わる研究に関しては Goldman による仕事が有名である．

定理 2.2 (Goldman [5])．表現多様体 $\mathcal{R}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ の連結成分の個数は $4g-3$ であり $\mathcal{X}_2(S)$ には *Teichmüller* 空間と同相な成分が向きに依存して *2* つ存在する．特に $\mathrm{Fuch}_2(S)$ は $\mathcal{X}_2(S)$ の連結成分である．

Hitchin はこの結果の一般化を与えた．彼は Higgs 束の理論を用いて $\mathcal{X}_n(S)$ を調べ次のような結果を与えた．

定理 2.3 (Hitchin [9])．$n \geq 3$ に対して $\mathcal{X}_n(S)$ の連結成分は n が奇数のとき 3 つ，n が偶数のとき *6* つ存在する．

特に Hitchin は連結成分の中で Teichmüller 空間と関連する成分を見出しその連結成分を Teichmüller 成分と呼び位相構造を決定した．この成分が上で定義された Hitchin 成分である．

定理 2.4 (Hitchin [9])．$\mathrm{Hit}_n(S)$ は $(2g-2)(n^2-1)$ 次元 *Euclid* 空間と同相である．

Hitchin 成分は現在様々な文脈で研究されているが，(位相) 幾何の文脈で研究が盛んになった大きな転機としては Labourie による幾何学的特徴付けが挙げられる．第 1 節で述べた Anosov 表現は歴史的には Labourie が Hitchin 表現の幾何学的特徴付けを与えるべく定義した表現である．(その後 [7], [6], [11] により様々な定式化が与えられている．)

定理 2.5 (Labourie [12])．*Hitchin* 表現は (B^+, B^-)-*Anosov* である．

一方で Fock-Goncharov による Cluster 代数を用いた特徴づけも興味深い．彼らは Cluster 代数と旗空間の配置空間の理論を利用して Hitchin 表現たちを特徴づけた．

定理 2.6 (Fock-Goncharov [4])．*Hitchin* 表現は *positive* 表現である．

Hitchin 成分は多様体上の幾何構造，特に射影幾何構造と呼ばれる幾何構造のモジュライと密接に関わっている．

定義 2.7. m 次元多様体 M が**実射影幾何構造**を持つとは次で特徴づけられるアトラスが存在するときにいう．

(i) M の開被覆 $\cup U_i$ と各 U_i から $\mathbb{RP}^m$ への上への同相写像 ϕ_i が存在する．
(ii) 座標変換は射影変換の制限，すなわち $\mathrm{PGL}_{m+1}(\mathbb{R})$ の元の制限で与えられる．

多様体 M が実射影幾何構造をもつときある $\mathrm{PGL}_{m+1}(\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ と Γ が真正不連続かつ自由に作用する $\mathbb{RP}^m$ の開領域 Ω(真正不連続領域) が存在し $\Gamma \setminus \Omega$ は M と同相となる．真正不連続領域が凸，すなわちその領域を含む射影空間の affine patch の意味で凸であるとき M は**凸実射影幾何構造** (convex real projective structure) をもつという．Teichmüller 空間が Riemann 面上の双曲構造のモジュライ空間に相当していたのと同様に Hitchin 成分については次のような結果がある．

定理 2.8 (Choi-Goldman [2])．$\mathrm{Hit}_3(S)$ は曲面 S 上の凸実射影幾何構造の変形空間に一致する．

定理 2.9 (Guichard-Wienhard [8])．$\mathrm{Hit}_4(S)$ は単位接束 T^1S 上の葉層構造付き凸実射影幾何構造の変形空

間に一致する．

3　Hitchin 成分上の座標系と主結果

本節で主結果について述べる．Hitchin 成分の位相構造が Euclid 空間であることは定理 2.4 で見たがここではより具体定なパラメータ付けについて考えたい．筆者の知る限り Hitchin 成分のパラメータ付けは本質的には 2 つしか知られていない．一つは Fock-Goncharov による高次元 Teichmüller 理論からのもの [4] でもう一つが Bonahon-Dreyer によるもの [1] である．ここでは Bonahon-Dreyer の座標に注目する．

S 上に双曲構造を一つ固定し ρ を Hitchin 表現 (の代表元) とする．S の普遍被覆 $\tilde{S}$ として双曲構造に付随するものをとり固定しておく．また S 上の有限数の葉から成る極大な有向測地的ラミネーション $\mathcal{L}$ を一つ選ぶ．このとき $\mathcal{L}$ は S の理想三角形分割 $\mathcal{T}$ を与える．Bonahon-Dreyer は Hitchin 表現に付随する極限曲線 ξ_ρ を用いて Hitchin 表現に対して定まる次の 2 種類の不変量を構成した．

1.Triangle 不変量：理想三角形分割 $\mathcal{T}$ で得られる各理想三角形 T に注目する．T の普遍被覆への持ち上げをとったときその理想頂点は視境界 $\partial_\infty\tilde{S}$ の 3 つ組 (x_T, y_T, z_T) を与える．Triangle 不変量は各理想三角形に対して定まり特に $(\xi_\rho(x_T), \xi_\rho(y_T), \xi_\rho(z_T))$ の Fock-Goncharov の triple ratio の対数をとることで定義される．

2.Shearing 不変量：無限に伸びる葉 h に対して持ち上げ $\tilde{h}$ を一つ選ぶ．また h に隣り合う理想三角形 T_1, T_2 を $\tilde{h}$ に隣り合うように持ち上げて $\tilde{T_1}, \tilde{T_2}$ で表す．$\tilde{h}$ の無限遠点のうち h の向きについて吸い込み点の方を x，湧き出し点の方を y とする．更に $\tilde{T_1}, \tilde{T_2}$ の頂点で x, y でないものを z, z' とおく．ここで x, z, y, z' の順に並ぶように z, z' を与える．Shearing 不変量はラミネーションの葉に対して定まり $(\xi_\rho(x), \xi_\rho(y), \xi_\rho(z), \xi_\rho(z'))$ の Fock-Goncharov の double ratio の対数をとることで定義される．閉じた葉に対しても同様に定義するのだが上記のような無限遠点の組を選ぶときに議論が必要でありここでは省略する．

Triangle 不変量，Shearing 不変量はともに実数値不変量であり極限曲線の超凸性を用いることで Hitchin 表現の代表元の取り方に依らずに定まることが確かめられる．また Fock-Goncharov の各 ratio の対数をとるときの ratio が正であることが必要であるがここで定理 2.6 が用いられる．即ち positive 表現とは対応する極限曲線の上記の ratio たちが正であるような表現のことを指す．

Bonahon-Dreyer の結果は次のようにまとめられる．

定理 3.1 (Bonahon-Dreyer [1])．$\mathrm{Hit}_n(S)$ の元に定義されるすべての *Triangle* 不変量と *Shearing* 不変量の値を対応させる写像を

$$\Phi_{\mathcal{L}} : \mathrm{Hit}_n(S) \to \mathbb{R}^N$$

で表す．このとき $\Phi_{\mathcal{L}}$ は解析的な上への同相写像でありその像は *Euclid* 凸胞の内部である．

筆者の主結果はパンツと呼ばれる位相的には球面から 3 つの非交な開円板を除いて得られる曲面 (Figure1) の Hitchin 成分における Bonahno-Dreyer の座標系を用いた Fuchs 跡の具体的なパラメータ付けである．主張は次のようになる．

定理 3.2 (I. [10])．パンツ P に下図のような極大ラミネーション $\mathcal{L}$ を固定する．このとき $[\rho_n] \in \mathrm{Fuch}_n(P)$ に対して *Bonahon-Dreyer* の座標 $\Phi_{\mathcal{L}}(\rho_n)$ は計算可能で，パンツの全測地的境界長さと n による具体的な計算公式を与えることができる．

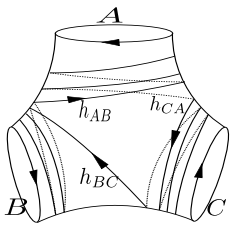


図 1　パンツ P とその上のラミネーション $\mathcal{L}$.

参考文献

[1] F. Bonahon and G. Dreyer, *Parameterizing Hitchin components*, Duke Math. J. **163**(2014), no. 15, 2935-2975.

[2] S. Choi and W. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**(1993), no. 2, 657-661.

[3] D. Dumas and A. Sanders, *Geometry of compact complex manifolds associated to generalized quasi-Fuchsian representations*, arXiv:1704.01091.

[4] V. Fock and A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **103**(2006) 1-211.

[5] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. Math. **93**(1988), no. 3, 557-607.

[6] F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel and A. Wienhard, *Anosov representations and proper actions*, Geom. Topol. **21**(2017), no. 1, 485-584.

[7] O. Guichard and A. Wienhard, *Anosov representations: domains of discontinuity and applications*, Invent. Math. **190**(2012), no. 2, 357-438.

[8] O. Guichard and A. Wienhard, *Convex foliated projective structures and the Hitchin component for* $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{R})$, Duke Math. J. **144**(2008), no. 3, 381-445.

[9] N. Hitchin, *Lie groups and Teichüller space*, Topology **31**(1992), no. 3, 449-473.

[10] Y. Inagaki, *On Fuchsian loci of* $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$*-Hitchin components of a pair of pants*, in preparation.

[11] M. Kapovich, B. Leeb and J. Porti, *Morse actions of discrete groups on symmetric space*, arXiv:14037671.

[12] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, Invent. Math. **165**(2006), no. 1, 51-114.

ホモトピー代数を用いたファイバー束の特性類の構成

松雪敬寛 (Takahiro Matsuyuki)*

概要

本稿では, ホモトピー代数的な構造の変形を用いて, 導分のなす Lie 代数のコホモロジー類として, 可微分ファイバー束の特性類を構成する方法について紹介する. ファイブレーションの特性類が導分のコホモロジーで記述されることは, ホモトピー論における結果として知られているが, その Chern-Weil 理論的な構成について考える. 特に, 曲面束に対してはよく知られた特性類を得ることができる.

1 復習: ベクトル束の特性類

ファイバー束の特性類について述べる前に, よく知られているベクトル束の特性類について復習しておく.

1.1 ホモトピー論的構成

ホモトピー論的には, n 次元有向実ベクトル束 $E \to B$ が与えられたとき, 分類写像と呼ばれる連続写像

$$B \to BSO(n)$$

が存在し, この写像で普遍束 $ESO(n) \to BSO(n)$ を引き戻すと $E \to B$ と同型なベクトル束が得られる. この写像から, コホモロジー間の準同型

$$\Phi : H^\bullet(BSO(n)) \to H^\bullet(B)$$

が誘導される. ここで, 分類写像はホモトピーを除いて一意的であるからこのコホモロジー間の準同型 Φ は分類写像の選び方によらない. したがって, 写像 Φ はベクトル束の不変量である. これを**特性写像**と呼ぶことにする. コホモロジー類 $c \in H^\bullet(BSO(n))$ が与えられるたびに, ベクトル束の不変量 $c(E) := \Phi(c) \in H^\bullet(B)$ が得られる. この類 c あるいは $c(E)$ を**特性類**と呼ぶ. 以下では, 簡単のため, コホモロジーは実係数のみを考える.

分類空間 $BSO(n)$ は Grassman 多様体と同値になり, そのコホモロジーは $SO(n)$-不変多項式に全体になる:

$$H^\bullet(BSO(n);\mathbb{R}) = I(SO(n)) = S(\mathfrak{so}(n)^*)^{SO(n)}$$

但し, $S(V)$ は線形空間 V が生成する対称代数である. ところで, これは Pontrjagin 多項式 (類) p_i と Euler 多項式 (類) e により生成されていた:

$$I(SO(2n)) = \mathbb{R}[p_1, \dots, p_n], \quad I(SO(2n+1)) = \mathbb{R}[p_1, \dots, p_{n-1}, e].$$

* 東京工業大学理学院数学系数学コース, e-mail: matsuyuki.t.aa@m.titech.ac.jp

1.2 Chern-Weil 理論的構成

可微分有向ベクトル束 $E \to B$ に対して, 同伴する主 $SO(n)$-束 $P \to B$ の接続 ∇ を一つ与える. このとき, 対応する曲率形式 $\Omega \in \mathcal{A}^2(P; \mathfrak{so}(n))$ が得られる. 任意の n 次不変多項式 $f \in I(SO(n))$ に対して, 微分形式

$$\Phi_\nabla(f) := f(\underbrace{\Omega, \ldots, \Omega}_{n}) \in \mathcal{A}^{2n}(P/SO(n)) = \mathcal{A}^{2n}(B)$$

が得られる. これは閉形式であり, そのコホモロジー類は接続の取り方によらないことが分かる. さらに, この構成

$$\Phi_\nabla : I(SO(n)) \to \mathcal{A}^\bullet(B)$$

がコホモロジーに誘導する写像 $\Phi : I(SO(n)) \to H^\bullet_{DR}(B)$ は, これは前節の意味での写像と一致していることが知られている. 言い換えると, 可微分ベクトル束に対しては, 接続を与えるごとに特性類の代表元を自然に与えることができる.

2 Chern-Weil 的に構成されるファイバー束の特性類

ファイバー束 $E \to B$ に対して, ファイバー束 (の垂直接束) の計量を一つ与えたとする. この計量はファイバーの Riemann 計量 (の類) の空間 B をパラメータとする変形を与えていると考えることができる.

一方で, 基点付き多様体 X に計量が与えられるたびに Chen 展開と呼ばれるホロノミーを構成することができる.

定理 1（Chen [1, 2]） Riemann 多様体 X に対して, $H = H_1(X; \mathbb{R})$ の生成する完備 Hopf 代数 $\hat{T}H$ の完備 Hopf イデアル I と完備 Hopf 代数同型 $\hat{\mathbb{R}}\pi_1(X) \simeq \hat{T}H/I$ が得られる. (これを Chen 展開と呼ぶ.)

(ファイバーとなる) 基点付き多様体 X の Chen 展開全体を $\Theta(X)$ とする. この集合は, 有限次元多様体の逆極限とみなせ, 通常の多様体と同様に微分形式等を定義できる. Chen 展開の空間 $\Theta(X)$ には, 多様体 X の写像類群

$$\mathcal{M}(X) := \{ \text{基点と向きを保つ } X \text{ の微分同相のアイソトピー類} \}$$

が作用する.

以上の設定において, ファイバー束の計量を用いて, 各ファイバーごとに Chen 展開をとることにより, 滑らかな写像

$$B \to \Theta(X)/\mathcal{M}(X)$$

を得る. ここで, 写像類群 $\mathcal{M}(X)$ は変換関数分の誤差に相当する. ファイバー束の計量は道でつなぐことができるので, この写像が deRham コホモロジーに誘導する写像

$$H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X)) \to H^\bullet_{DR}(B)$$

は計量によらない.

コホモロジー $H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X))$ について考える. 簡単のため, (写像類群を適切に制限するなどして) 計量に対するイデアル I が固定できたとする. つまり, イデアル I を固定した Chen 展開全体を $\Theta(X, I)$ としたとき, ファイバー束の計量が $B \to \Theta(X, I)$ を与えたとする. このとき, $H^\bullet_{DR}(\Theta(X)/\mathcal{M}(X))$ を

$H^\bullet_{DR}(\Theta(X,I)/\mathcal{M}(X))$ に置き換えて考える．空間 $\Theta(X,I)$ には Hopf 代数 $\hat{T}H/I$ の自己同型群 (のある部分群)

$$\mathrm{IAut}(\hat{T}H/I) := \{f \in \mathrm{Aut}(\hat{T}H/I); f(H) \subset \hat{T}^{\geq 2}H/I\}$$

が自由かつ推移的に作用する．よって, $\Theta(X,I)$ は Muarer-Cartan 形式

$$\eta \in \mathcal{A}^1(\Theta(X,I); \mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I))$$

を持つ．ここで, 導分の (ある部分) Lie 代数

$$\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I) := \{X \in \mathrm{Der}(\hat{T}H/I); X(H) \subset \hat{T}^{\geq 2}H/I\}$$

は Lie 群 $\mathrm{IAut}(\hat{T}H/I)$ の Lie 代数であることに注意する． さらに, この平坦接続を用いて, Lie 代数 $\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I)$ の Chevalley-Eilenberg 複体 (次節にて後述) からのチェイン写像

$$C^\bullet_{CE}(\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I)) \to \mathcal{A}^\bullet(\Theta(X,I))$$

が得られる．さらに, この写像は Maurer-Cartan 形式 η の左不変性から, $\mathcal{M}(X)$-同変である．自然な作用 $\mathcal{M}(X) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(H)$ の像を G とすると, 以上をまとめて次の構成を得る．

定理 2（M-Terashima [5]） 基点付き有向ファイバー束 $E \to B$ がファイバー $(X,*)$ のイデアル I に関す条件を満たすとする．このファイバー束の計量が与えられるたびに, チェイン写像

$$C^\bullet_{CE}(\mathrm{Der}^+(\hat{T}H/I))^G \to \mathcal{A}^\bullet(B)$$

が得られ, この写像がコホモロジーに誘導する写像は計量によらない．

ファイバーが曲面の場合は, [3] の結果に相当し, 実際に非自明な特性類を与えていることが分かる．

3 Chevalley-Eilenberg 複体

前節で使った Chevalley-Eilenberg 複体について述べておく．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, $\mathfrak{g}$ が生成する外積代数を

$$C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}) := \Lambda^\bullet \mathfrak{g}$$

とし, 微分を $c \in C^{n-1}_{CE}(\mathfrak{g})$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$d_{CE}(c)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n)$$

と定義する．このとき, $(C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}), d_{CE})$ はチェイン複体になる．これを **Chevalley-Eilenberg 複体**と呼ぶ. このコホモロジーは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のコホモロジーと呼ばれる.

ここで特性類の構成で用いたのは次の性質である: 多様体 M について, $\mathfrak{g}$ 係数の微分形式 $\eta \in A^1(M; \mathfrak{g})$ であり, 平坦性

$$d\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] = 0$$

を満たすものが与えられたとする．このとき, $C^\bullet_{CE}(\mathfrak{g}) \to A^\bullet(M)$ を

$$c \mapsto c(\eta, \ldots, \eta)$$

とすると, これはチェイン写像となる.

4　これからの研究

[6] によれば, 単連結ファイバー束の特性類をある導分のコホモロジーによってホモトピー論的に構成することができる. よって, §2 で構成した特性類は, ファイバーの 1 次以上のホモロジーの情報を用いて, 単連結束の場合にも拡張できるはずである.

Chen 展開は, 多様体の deRham 複体の Hodge 分解から得られる C_∞-極小モデルの情報の一部である. よって, C_∞-極小モデルの空間全体 $Q(X)$ を Chen 展開の空間 $\Theta(X)$ の代わりに用いることにより, より豊富な情報をもつ特性類が得られることが期待される. [4] では, $Q(X)$ の “連結成分” を考えることにより, 同様の構成ができることが分かっている. さらに, $Q(X)$ の連結成分より細かいホモトピーの情報を用いて, [6] にあるような特性類を構成することを考えている.

参考文献

[1] K.T. Chen, *Extension of C^∞ function algebra by integrals and Malcev completion of π_1*, Advances in Math. **23** (1977), no. 2, 181–210.

[2] K.T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 5, 831-879.

[3] N. Kawazumi, *Harmonic Magnus Expansion on the Universal Family of Riemann Surfaces*, arXiv:math/0603158.

[4] H. Kajiura, T. Matsuyuki, and Y. Terashima, *Homotopy theory of A_∞-algebras and characteristic classes of fiber bundles*, arXiv:1605.07904.

[5] T. Matsuyuki, and Y. Terashima, *Characteristic classes of fiber bundles*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016) 3029–3050.

[6] M. Schlessinger and J. Stasheff, *Deformaion theory and rational homotopy type*, U. of North Carolina preprint, 1979, short version: The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory, *J. Pure Appl. Alg.*, **38** (1985), 313–322.

An Algebraic Representation of Flat Origamis

野坂　康祐 (Kosuke Nosaka)
京都教育大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育専修
din65036@kyokyo-u.ac.jp，nosakou6311@icloud.com

1　序論

本稿では, 平坦に折り畳むという操作に限定した折り紙の代数表現について述べる.

折り紙に関する数学的アプローチについては，主に「折り線に注目した考察」と「折った状態に注目した考察」の 2 つに分けて考えることができる．特に前者については,「与えられた点や直線を指標として紙を 1 回折る方法は全てで 7 通りである」（**一回折りの定理，折り紙の公理**などと呼ばれる）ことが証明された [1] ことを皮切りに，立方根や任意の角の三等分線が紙を折ることで作図可能であることが示される [2] など，折り紙の作図可能性という話題へ発展している．一方，後者についてはあまり発展的な内容が見られない．というのも，折り紙の包括的な定義について未だ現実の折り紙に見合ったものが存在していないということが 1 つの要因となっている（例えば Belcastro と Hull による定義 [3] などがあるが，未定義語が存在している）．そこで，本稿では平坦に折り畳んだ折り紙だけに注目し，この代数表現を考えることで折り紙に関する諸問題を部分的に解決することを目指した.

平坦に折り畳んだ折り紙のことを, ここからは**平坦折り紙**と呼ぶことにしよう. 平坦折り紙の多くは, 以下に述べていくように折った後の形を表す**作用**と, 重なり順を表す**半順序**による組み合わせで表現することができる（表現できない折り方とその理由については第 6 章で述べている）. 実際に，様々な折り紙用語もこれに沿って定義できる他,「折り鶴」などといった特定の折り紙作品についても，これらのある同値関係に関する同値類として定義することができる．また, 平坦に折り畳まれた折り紙の局所的な性質を述べた 2 つの工学的な通説「単頂点な平坦折り紙の山折りと谷折りの差は ± 2 である（**前川の定理**)」「単頂点な平坦折り紙の折り目の成す角の交代和は $\pm\pi$ である（**川崎の定理**)」について, この枠組みの中で示すことができる.

始めに本稿で扱う基礎的な知識について，2 次元ユークリッド距離空間 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$ が定まっていることを前提に以下にまとめる.

定義 1.1 (作用)**.** $\mathbb{A}$ を集合とする．この時, 写像 $\theta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ を $\mathbb{A}$ 上の**作用素**といい，$a \in \mathbb{A}$ における $\theta(a)$ を θa と略記する. また $A \subset \mathbb{A}$ についても, 像 $\theta(A)$ を θA と略記する.

Ω を集合とし, その元を $\mathbb{A}$ 上の作用素と定める. すなわち, 写像 $\Pi : \Omega \to \{\theta \mid \theta : \mathbb{A}$ 上の作用素 $\}$ を定める．この時, 組 $(\Pi, \Omega, \mathbb{A})$ を Ω の $\mathbb{A}$ への**作用**という.

注意 . 以後, $\omega \in \Omega$ の Π による像 $\Pi(\omega)$ を単に ω と略記する. また, $(\omega)^{-1}A$ $(A \subset \mathbb{A})$ とは作用素 ω による A の逆像のことを表す.

定義 1.2 (鏡映変換)**.** L を直線とする．写像 $R_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が直線 L に関する**鏡映変換**であるとは，任意の元 $p \in \mathbb{R}^2$ について $R_L(p)$ が以下の条件を満たすことをいう.

(1) $\mathrm{d}(p, L) = \mathrm{d}(R_L(p), L)$

(2) p，$R_L(p)$ を通る直線が L と垂直

定義 1.3 (順序同型)**.** $(S, \preceq_1)$，$(T, \preceq_2)$ を半順序集合とする.
全単射写像 $f : S \to T$ が**順序同型写像**であるとは，以下の条件のどちらかを満たすことをいう.

(1) $^\forall a, b \in S,\ a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b)$

(1′) $^\forall a, b \in S,\ a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \succeq_2 f(b)$

このとき，$(S, \preceq_1)$ と $(T, \preceq_2)$ は**順序同型**であるといい，$(S, \preceq_1) \cong (T, \preceq_2)$ と表す.

2　仮想平坦折り紙

以後，集合 $A \in \mathbb{R}^2$ 上の直線とは A の 2 つの元を含む直線のことを表す．また集合 A，B について $A-B$ とは A から B を引いた差集合 $\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ を表す．

定義 2.1 (仮想平坦折り紙)．$A(\subset \mathbb{R}^2)$ を内点を持つ有界閉集合とする．

始めに $\mathcal{F}_1 = \{(f_{11} \cdots f_{1n_1}) \mid f_{11}, \ldots, f_{1n_1} : A^\circ \text{上の直線},\ n_1 \in \mathbb{N}\}$ とする．

$\mathcal{F}_1$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_1, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_1$ について，組 $((f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_1)$ を次のように定める．

(FO$_1$) 集合 $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}$ $(k_1 \in \mathbb{N})$ を $A^\circ - \bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i}$ の各連結成分の閉包とする．

(FO$_2$) 作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1)$ がそれぞれ $f_{11}, \ldots, f_{1n_1}$ のいずれかに関する鏡映変換（またはこれらの合成写像）となるように定める．

(FO$_3$) $\{A_1, \ldots, A_{k_1}\}$ の異なる元 A_i，A_j に対して，$(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i^\circ \cap (f_{11} \cdots f_{1n_1})A_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば，$A_i \prec_1 A_j$ または $A_i \succ_1 A_j$ のいずれかの順序を定める．

次に $\mathcal{F}_2 = \{(f_{21} \cdots f_{2n_2})F_1 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1,\ f_{21}, \ldots, f_{2n_2} : F_1 A^\circ \text{上の折り線},\ n_2 \in \mathbb{N}\}$ とする．

$\mathcal{F}_2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_2, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_2$ について組 $((f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_2)$ を次のように定める．

(FO$_1$) 集合 $B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}$ $(k_2 \in \mathbb{N})$ を $A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \right)$ の各連結成分の閉包とする．

(FO$_2$) 作用素 $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k_2)$ がそれぞれ作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に $f_{21}, \ldots, f_{2n_2}$ のいずれかに関する鏡映変換（またはこれらの合成写像）を合成した写像となるように定める．

(FO$_3$) $\{B_1, \ldots, B_{k_2}\}$ の異なる元 B_i，B_j に対して，$(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i^\circ \cap (f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば，$B_i \prec_2 B_j$ または $B_i \succ_2 B_j$ のいずれかの順序を定める．

帰納的に $\mathcal{F}_m = \{(f_{m1} \cdots f_{mn_m})F_{m-1} \mid F_{m-1} \in \mathcal{F}_{m-1},\ f_{m1}, \ldots, f_{mn_m} : F_{m-1}A^\circ \text{上の折り線}, n_m \in \mathbb{N}\}$ を考える．$(m \in \mathbb{N})$

$\mathcal{F}_m$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_m, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_m$ について $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を次のように同様にして定めることができる．

(FO$_1$) 集合 $C_1, \ldots, C_{k_m}$ $(k_m \in \mathbb{N})$ を

$$A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \cup \cdots \cup \bigcup_{k=1}^{n_m} ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mk} \right)$$

の各連結成分の閉包とする．

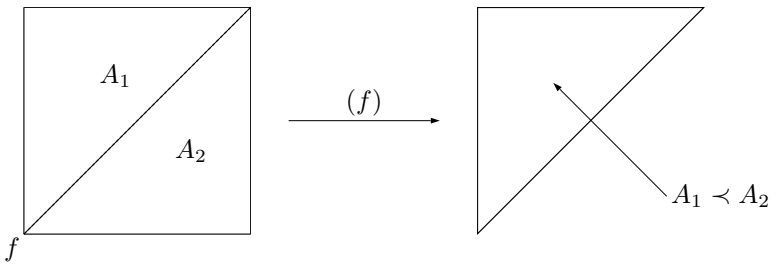
(FO$_2$) 作用素 $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k_m)$ がそれぞれ作用素 $(f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に $f_{m1}, \ldots, f_{mn_m}$ のいずれかに関する鏡映変換（またはこれらの合成写像）を合成した写像となるように定める．

(FO$_3$) $\{C_1, \ldots, C_{k_m}\}$ の異なる元 C_i，C_j に対して，
$(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i^\circ \cap (f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_j^\circ \neq \emptyset$
であるならば，$C_i \prec_m C_j$ または $C_i \succ_m C_j$ のいずれかの順序を定める．

以上のようにして定めた $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を**仮想平坦折り紙**という．また以後，仮想平坦折り紙に定まる半順序 $\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_m$ を統一して $\preceq$ と表し，これを**重なり順**とよぶ．

実際に $A = [0,1] \times [0,1]$ (: 正方形) として，いくつか仮想平坦折り紙の具体例を挙げよう．

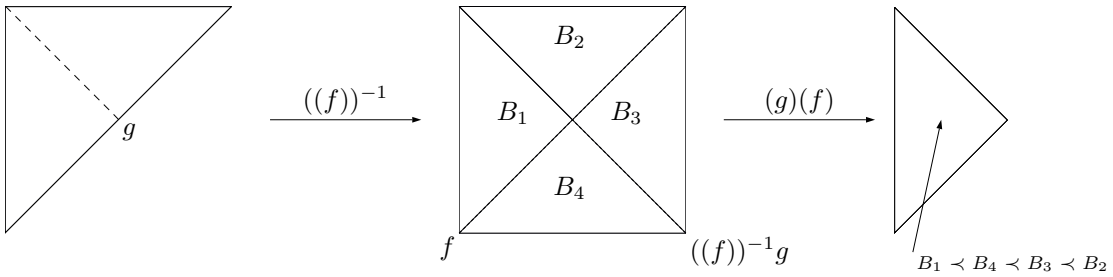
(例 1) 正方形を半分に折るとは，例えば次のような $((f)A, \preceq)$ によって表現できる．



作用素 (f) は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(f)x = &\quad R_f(x) &\quad (x \in A_2)\\ (f)x = &\quad x &\quad (x \in A_1)\end{aligned}$$

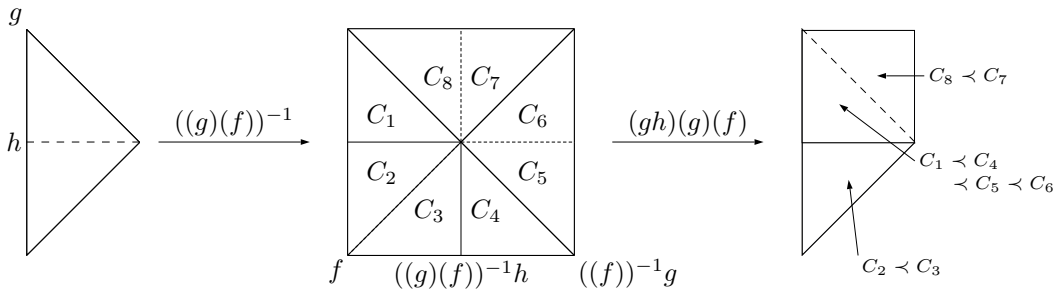
(例 2) 例 1 をさらに半分に折るとは, 例えば次のような $((g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(g)(f)x = &\quad R_g((f)x) &\quad (x \in B_2 \cup B_3)\\ (g)(f)x = &\quad (f)x &\quad (x \in B_1 \cup B_4)\end{aligned}$$

(例 3) 「袋折り」とよばれる技法は, 例えば次のような $((gh)(g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(gh)(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(gh)(g)(f)x = &\quad R_h \circ R_g((g)(f)x) &\quad (x \in C_7)\\ (gh)(g)(f)x = &\quad R_h((g)(f)x) &\quad (x \in C_6)\\ (gh)(g)(f)x = &\quad R_g((g)(f)x) &\quad (x \in C_8)\\ (gh)(g)(f)x = &\quad (g)(f)x &\quad (x \text{ in others})\end{aligned}$$

3 折り紙用語の代数表現

折り紙に関した様々な用語についても, 仮想平坦折り紙を使って表現することができる. これについて, 仮想平坦折り紙の性質を述べながら以下に紹介する.

以後, 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A} = ((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \prec)$ は (FO_1) により定まった領域 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ をもつものとする. 展開された各折り線を元とする集合

$$\{f_{11}, \ldots, f_{1n_1}, \ldots, ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mn_m}\}$$

を dev$\mathcal{A}$ と表し，$\mathcal{A}$ に定まっている作用素 $(f_{m1}\cdots f_{mn_m})\cdots(f_{11}\cdots f_{1n_1})$ を F と略記する．
また，集合 A に対して $\#\{A\}$ とは，A に含まれる要素の個数を表す．

命題 3.1. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ の任意の異なる元 $A_i,\ A_j$ について次が成り立つ．

$$\#\{A_i \cap A_j\} > 1 \Rightarrow\ ^{\exists!} f \in \mathrm{dev}\mathcal{A} \text{ s.t. } \#\{f \cap A_i \cap A_j\} > 1$$

証明． 条件 $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ より, A_i と A_j は互いに隣り合う．定義 2.1 より, A_i と A_j の境目 $A_i \cap A_j$ はある $f \in \mathrm{dev}\mathcal{A}$ の部分集合となる．ゆえに題意が成り立つ． □

命題 3.1 により，(FO_1) により定まる領域の境目は，折り線に依らず隣り合う領域によって決まることが分かる．ゆえに,「折り目」は仮想平坦折り紙において次のように定義できる．

定義 3.2 (折り目)**.** 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ の任意の異なる元 $A_i,\ A_j$ について，$\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ が成り立つとき，$c_{ij} = \{x \mid x \in A_i \cap A_j\}$ を A_i と A_j の間の**折り目**という. 特に i,j を指定しない時, これを $\mathcal{A}$ 上の折り目という．

命題 3.3. $\mathcal{A}$ 上の全ての折り目を $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(k \in \mathbb{N})$ と名付ける. このとき, 次が成り立つ．

$$\bigcup_{1\le i\le k} c_i = \bigcup_{f\in \mathrm{dev}\mathcal{A}} f$$

証明． $(\subset)$ $x \in \bigcup_{1\le i\le k} c_i$ とする. このとき, $^{\exists} c_{i'j'}$: $\mathcal{A}$ 上の折り目 s.t. $x \in A_{i'} \cap A_{j'}$ が成り立つ．命題 3.1 より $x \in f \cap A_{i'} \cap A_{j'}$ であるから，$x \in f$ である．

$(\supset)$ $x \in \bigcup_{f\in dev\mathcal{A}} f$ とする. このとき, $^{\exists} f \in \mathrm{dev}\mathcal{A}$ s.t. $x \in f$ が成り立つ．f の定め方により, x はある隣り合う領域 $A_i,\ A_j$ の元になる. ゆえに, $x \in f \cap A_i \cap A_j$ となり, 定義 3.2 から $x \in c_{ij}$ が成り立つ.

□

これにより，展開された折り線全体と折り目全体が一致することが分かった．

命題 3.4. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする. このとき，次が成り立つ．

$$Fc_{ij} \cap FA_i = Fc_{ij} \cap FA_j$$

すなわち, 折り目が 2 つに裂けるような作用素は存在しないということである．

証明． c_{ij} の元は作用素 F により，A_i の元に定められた写像と A_j の元に定められた写像のどちらにも対応する. もし，$Fc_{ij} \cap FA_i \neq Fc_{ij} \cap FA_j$ であるならば, c_{ij} の元はこれらの鏡映変換により 2 つの元に分かれてしまっている. すなわち, F によって 2 つの元へ対応するような $x \in c_{ij}$ が存在することになってしまい，F が作用素であることに矛盾する． □

折り目の状態を表す用語として,「山折り」と「谷折り」がある．この 2 つについても，鏡映変換の偶奇で定めることができる．

定義 3.5 (山折り, 谷折り)**.** $\mathcal{A}$ を仮想平坦折り紙とし, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目 $(A_i \prec A_j)$ とする．

(M) A_i の元に奇数回の鏡映変換, A_j に偶数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を $\mathcal{A}$ 上の**山折り**という.

(V) A_i の元に偶数回の鏡映変換, A_j に奇数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を $\mathcal{A}$ 上の**谷折り**という.

ただし, 恒等変換は偶数回の鏡映変換とする．

命題 3.6. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ の任意の異なる元 $A_i,\ A_j$ について，$\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であるとき，次が成り立つ．

$$A_i \prec A_j \Rightarrow c_{ij} : \text{山折り または 谷折り}$$

すなわち, 重なり合う領域の間の折り目は必ず山折りか谷折りのいずれかである．

証明． 条件の A_i と A_j にどちらも偶数回の鏡映変換が定まっているとする.

偶数回の鏡映変換は回転変換を表すことに注意すると, A_i と A_j を重ねる ($FA_i^\circ \cap FA_j^\circ \neq \emptyset$ となる) ためには, 折り目 c_{ij} をずらす (すなわち $F(A_i \cap c_{ij}) \neq F(A_j \cap c_{ij})$ とする) 必要がある. これは命題 3.4 に矛盾する. A_i と A_j にどちらも奇数回の鏡映変換が定まっている場合も, 反転させた回転変換を表していることに注意すれば, 同様に矛盾が導かれる. ゆえに, 条件を満たす c_{ij} は山折りか谷折りでなければならない. □

また重なり順が存在しない領域とその間の折り目は，合同のまま写される.

命題 3.7. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について，$\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であり A_i と A_j に重なり順が存在しないとき，次が成り立つ.

$$A_i \cup A_j \equiv FA_i \cup FA_j$$

証明． 条件と命題 3.4 より，A_iと A_jは境界がずれないまま鏡映変換されることになる. ゆえに, 作用素 F こそが題意を満たす合同変換になっている. □

定義 3.8 (補助折り目)**.** 命題 3.7 の条件を満たす A_i と A_j の間の折り目 c_{ij} のことを**補助折り目**という.

折り紙の局所的な性質を考えるために, 次の定義を与える.

定義 3.9 (頂点)**.** 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において, 山折りまたは谷折りが交わる点を $\mathcal{A}$ の**頂点**という. 頂点が A の内部にあって 1 つだけである時, $\mathcal{A}$ は**単頂点**であるという.

命題 3.10. $\mathcal{A}$ を単頂点仮想平坦折り紙とし，この頂点を v とする．Fv の十分近くを通る FA° 上の直線を l とし，$FA^\circ - l$ の連結成分の閉包で Fv を含む方を D とする．このとき，$F^{-1}D$ は多角形となる.

証明． v が A の内点であることに注意して，$\partial FA \cup l$ を考える．このとき，この集合は 2 点集合であり，この元を a，b とすると，$F^{-1}a$ と $F^{-1}b$ は $\mathcal{A}$ 上の山折りまたは谷折りとなる各折り目の 1 点になる．これらを v を囲むようにして線分で繋いだ閉曲線が $F^{-1}l$ であり，v を含む連結集合が $F^{-1}D$ である．$F^{-1}D$ は線分で囲まれているから多角形となる. □

実際の折り紙（単頂点のものに限る）でも，頂点付近を切った切り口は必ず多角形になることが分かる．このように，折り紙を一直線に切ってできる多角形は「一刀折り」と呼ばれている．仮想平坦折り紙では，これを次のように定義しよう.

定義 3.11 (一刀折り)**.** 命題 3.11 における $F^{-1}D$ のことを $\mathcal{A}$ の直線 l による**一刀折り**という.

現実的な山折り, 谷折りという操作を考えた場合, 図 1 のように xyz 空間において xy 平面と平行な平面を，折り線を軸として z 方向に回転させて重ね合わせるという操作がイメージされる. この場合, 山折りが z 方向に π 回転していると見なすと, 谷折りとは z 方向に $-\pi$ 回転しているものだと見なすことができる. しかし, 本論文における山折り, 谷折りは $\mathbb{R}^2$ 平面の鏡映変換と半順序の関係によって定められたものであるため, このような角度構造は自然に組み込まれるものではない.

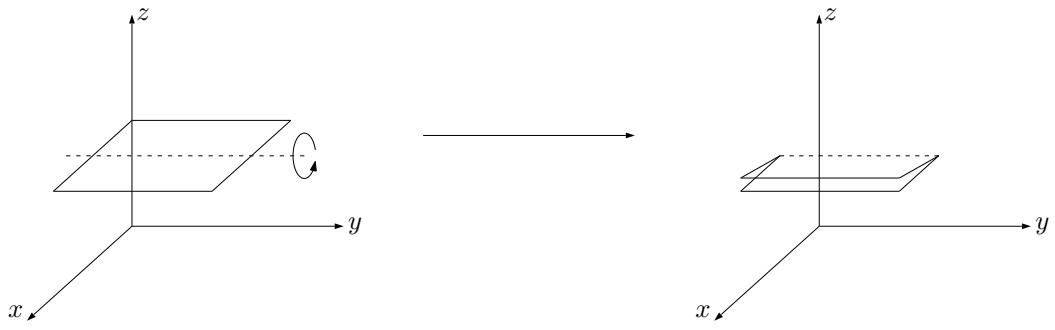


図 1: 実際の谷折りのイメージ図

そこで, 山折り, 谷折りを考えるにあたり, 本論文では次のような角度構造を要請する.

要請 1. c_{ij} を $\mathcal{A}$ 上の A_i と A_j の間の山折りとし, Fc_{ij} 上の 1 点を c, FA_i 上の 1 点を a, FA_j 上の 1 点を b とする. また, ac を a と c を通る線分, bc を b と c を通る線分と定める. このとき，ac と bc が同一直線上にあるならば, その角度 ($\angle$acb) は π であると定める．また c_{ij} が谷折りのとき, ac と bc が同一直線上にあるならば, その角度 ($\angle$acb) は $-\pi$ であると定める.

また，現実的な平坦折りを考えるために，定義 3.11 で扱った一刀折り $F^{-1}D$ をもう一度折り畳むという操作を考えよう．一刀折り $F_0(F^{-1}D) = F^{-1}D$ から $F_1(F^{-1}D) = FF^{-1}D$ への変形 F_t を時間 $t \in [0,1]$ での連続変形として捉える．具体的には，xy 平面上にある $F^{-1}D$ から yz 平面と平行な平面上にある $FF^{-1}D$ への連続変形を $v = Fv$ になるようにして定める（図 2 参照）．このとき，任意の時間 $t \in [0,1)$ において，$F_t(F^{-1}D)$ の境界である閉曲線 $F_t(F^{-1}l)$ は頂点 v 周りに回転数 ± 1 を保っている（ただし，連続変形は $\mathbb{R}^3$ 空間における操作であるため，$F_t(F^{-1}l)$ の回転数とは，$F_t(F^{-1}l)$ を xy 平面に v を内部に含むように射影した閉曲線の回転数として定める．すなわち，図 2 を真上もしくは真上から少しずらした視点から見たときの回転数として考える)．ゆえに，その極限である潰れた閉曲線 $FF^{-1}l$ についても，その頂点 v 周りの回転数は ± 1 であると考えたい．このことから，本論文ではさらに次のことを要請する.

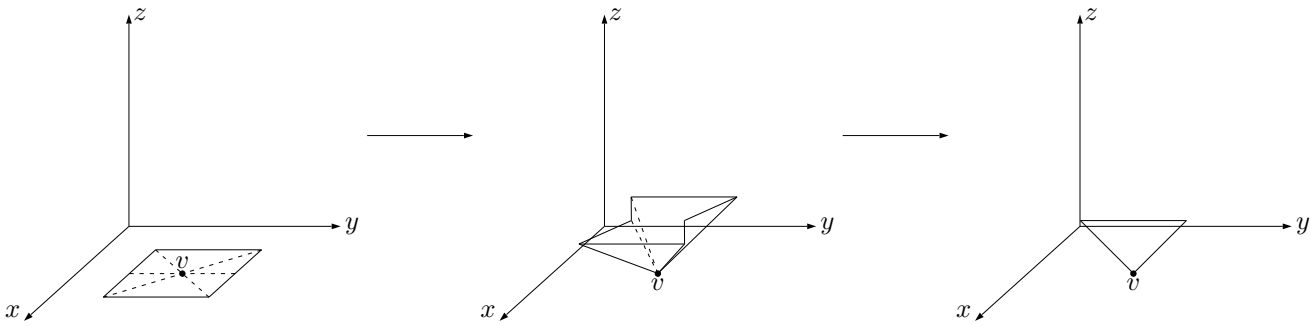


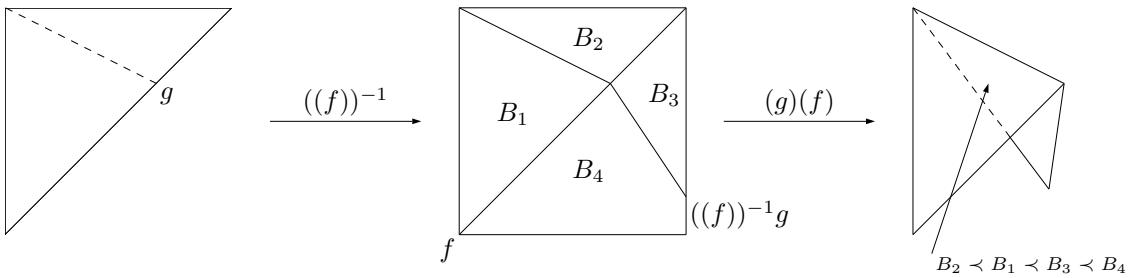
図 2: 連続変形 F_t のイメージ図

要請 2. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ 上の直線 l による一刀折りを $F^{-1}D$ とするとき，l は頂点 Fv 周りの回転数 ± 1 の閉曲線であると定める.

4 可折平坦折り紙

仮想平坦折り紙において，重なり順とは自然に決まるものではなく，勝手に定めるというものであった．ゆえに重なり順の定め方によっては，実現不可能な折り方が存在する．実際に, 先ほど紹介した例 2 に少し手を加えてみよう.

(例 4) 例 2 の $((g)(f)A, \preceq)$ を次のように変更する.



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(g)(f)x = &\quad R_g((f)x) &\quad (x \in B_2 \cup B_3)\\ (g)(f)x = &\quad (f)x &\quad (x \in B_1 \cup B_4)\end{aligned}$$

定義 3.5 より, c_{ij} を B_i と B_j の間の折り目とすれば, c_{12} は山折り, c_{23} は谷折り, c_{34} は谷折り, c_{41} は谷折りである. しかし, この操作では c_{41} が破けてしまい, 紙を切らない限り現実的に起こりえなくなってしまう.

このような操作を除くため, 仮想平坦折り紙に以下のような制限を加える.

定義 4.1 (可折平坦折り紙)**.** 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする. 次を満たす c_{ij} を**非可折**であるという.

$$A_i \prec^{\exists} A_k \prec A_j \text{ s.t. } {}^{\forall}x \in c_{ij},\ Fx \in FA_k^{\circ}$$

そうでない c_{ij} を**可折**といい, $\mathcal{A}$ 上の全ての折り目が可折である時, $\mathcal{A}$ を**可折平坦折り紙**という.

単頂点な可折平坦折り紙において, 以下の「前川の定理」「川崎の定理」を示すことができる. 以下の証明のアイデアは [4] に記載されている.

定理 4.2 (前川の定理)**.** $\mathcal{A}$ を仮想平坦折り紙かつ単頂点とし, $M = \#\{\mathcal{A}$ 上の山折り $\}$, $V = \#\{\mathcal{A}$ 上の谷折り $\}$ とする. この時, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}\text{: 可折平坦折り紙} \Rightarrow M - V = \pm 2$$

注意 . 単頂点可折平坦折り紙においては, $M + V \geq 3$ である. 実際 $M + V \leq 2$ の場合, A の内部で山折りまたは谷折りは交わることができないので, $\mathcal{A}$ は単頂点にならない.

証明 . $\mathcal{A}$ 上の全ての山折りまたは谷折りに $c_1, \ldots, c_n$ と名付ける. また頂点を v とおく. $\mathcal{A}$ の直線 l による一刀折り $F^{-1}D$ を考える. このとき, $(F)^{-1}D$ は $c_1, \ldots, c_n$ の各 1 点を頂点とする n 多角形となる. この n 多角形の境界 $(F)^{-1}l$ は頂点 v 周りで回転数 ± 1 の閉曲線となる. 要請 2 により, l も Fv 周りで回転数 ± 1 の閉曲線である. また要請 1 により, 山折りを通るときは π 回転, 谷折りを通るときは $-\pi$ 回転しているから, $\pi M - \pi V = \pm 2\pi$ が成り立ち, $M - V = \pm 2$ が導かれる. □

系 4.3. 単頂点可折平坦折り紙において $M + V$ は偶数である.

証明 . 定理 4.2 より, $M - V = \pm 2$ であるから,

$$M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V = 2(\pm 1 + V)$$

□

定理 4.4 (川崎の定理)**.** $\mathcal{A}$ を仮想平坦折り紙かつ単頂点であるとし, $\mathcal{A}$ 上の谷折り, 山折りを反時計回りに $c_1, \ldots, c_{2w}$ $(w \in \mathbb{N})$ と定める. この時, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}\text{: 可折平坦折り紙} \Rightarrow \angle(c_1, c_2) + \angle(c_3, c_4) + \cdots + \angle(c_{2w-1}, c_{2w}) = \pm\pi$$

ただし, $\angle(c_i, c_j)$ は c_i と c_j の成す角（反時計回りを正とする）を表す.

証明 . 任意の領域 $A_k \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ について, FA_k は合同変換であるから, $\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = \pm\angle(c_i, c_{i+1})$ が成り立つ. また定義 3.5 より c_i が山折りまたは谷折りであるためには,

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) > 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) < 0$$

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) < 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) > 0$$

のどちらかが成立しなければならない（ただし $c_{2w+1} = c_1$ とする）.

ところで命題 3.4 より, c_1 から順に $c_2, c_3, \ldots, c_{2w}$ を通って c_1 に戻る閉曲線 D を考えると, FD は閉曲線に保たれる. これを満たすためには, 隣り合う折り目の間の角度の総和は 0 でなければならない. すなわち,

$$\sum_{i=1}^{2w} \angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = 0$$

が成り立つ.

よって $\sum_{i=1}^{2n}|\angle(c_i,c_{i+1})|=2\pi$ であるから，$\angle(Fc_1,Fc_2)>0$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2w}|\angle(c_j,c_{j+1})| &= |\angle(c_1,c_2)|+|\angle(c_2,c_3)|+\cdots+|\angle(c_{2w},c_1)|\\ &= \angle(Fc_1,Fc_2)-\angle(Fc_2,Fc_3)+\cdots-\angle(Fc_{2w},Fc_1)=2\pi\\ \sum_{j=1}^{2w}|\angle(c_j,c_{j+1})|+\sum_{j=1}^{2n}\angle(Fc_j,Fc_{j+1}) &= 2(\angle(Fc_1,Fc_2)+\angle(Fc_3,Fc_4)+\cdots+\angle(Fc_{2w-1},Fc_{2w}))=2\pi\\ &\angle(Fc_1,Fc_2)+\angle(Fc_3,Fc_4)+\cdots+\angle(Fc_{2w-1},Fc_{2w})=\pi\end{aligned}$$

$\angle(Fc_1,Fc_2)<0$ と仮定すると，同様にして $\angle(c_1,c_2)+\angle(c_3,c_4)+\cdots+\angle(c_{2w-1},c_{2w})=-\pi$ が得られる．□

注意．定理 4.2 及び定理 4.4 の逆はどちらも成り立たない. 実際, 例 4 は山折りと谷折りの差が 2 であるとともに, 折り目の成す鋭角の交代和が π であるが, 定義 4.1 を満たしていない.

5　折り紙同形

ある特定の折り紙作品が，例え違うサイズや違う折り方で作られたとしても，それらは「何らか」の意味で同じものであると言いたい．以下はその「何らか」を「最終的な形が相似で，重なり順が全て等しい」という意味で捉え，これを同値関係として表したものである．

定義 5.1 (折り紙同形)**.** 可折平坦折り紙 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ が

$$\mathcal{A}=((f_{m1}\cdots f_{mn_m})\cdots(f_{11}\cdots f_{1n_1})A,\preceq)$$

$$\mathcal{B}=((g_{l1}\cdots g_{lk_l})\cdots(g_{11}\cdots g_{1k_1})B,\preceq)$$

と表せるとする．また，(FO_1) によりそれぞれ領域 $A_1,A_2,\ldots,A_u$，$B_1,B_2,\ldots,B_v$ が定まっているとする．このとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が**折り紙同形**であるとは，次の条件を満たすことをいう．

(1) $(f_{m1}\cdots f_{mn_m})\cdots(f_{11}\cdots f_{1n_1})A\backsim(g_{l1}\cdots g_{lk_l})\cdots(g_{11}\cdots g_{1k_1})B$

(2) $u=v$ のとき，以下を満たす全単射写像 $\sigma:\{1,2,\ldots,u\}\to\{1,2,\ldots,u\}$ が存在する．

(i) $A_1\backsim B_{\sigma^{-1}(1)}$，$A_2\backsim B_{\sigma^{-1}(2)}$，$\ldots$，$A_u\backsim B_{\sigma^{-1}(u)}$

(ii) ${}^{\forall}A_i,A_j\in\{A_1,A_2,\ldots,A_u\}$，$A_i\prec A_j\Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)}\prec B_{\sigma^{-1}(j)}$
または ${}^{\forall}A_i,A_j\in\{A_1,A_2,\ldots,A_u\}$，$A_i\prec A_j\Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)}\succ B_{\sigma^{-1}(j)}$

$u>v$ のとき，c_{ij} が補助折り目となるような領域 A_i と A_j について，これを合わせた領域 $A_{ij}=A_i\cup A_j$ を作る．この操作を，新しく番号付けしたときに v 個の領域の列 $A_1,A_2,\ldots,A_v$ ができるまで繰り返す．こうしてできる $A_1,A_2,\ldots,A_v$ と $B_1,B_2,\ldots,B_v$ について，(i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma:\{1,2,\ldots,u\}\to\{1,2,\ldots,v\}$ が存在するものがある．
$u<v$ のとき，$c'_{i'j'}$ が補助折り目となるような領域 B'_i と B'_j について，これを合わせた領域 $B_{i'j'}=B_{i'}\cup B_{j'}$ を作る．この操作を，新しく番号付けしたときに u 個の領域の列 $B_1,B_2,\ldots,B_u$ ができるまで繰り返す．こうしてできる $B_1,B_2,\ldots,B_u$ と $A_1,A_2,\ldots,A_u$ について，(i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma:\{1,2,\ldots,u\}\to\{1,2,\ldots,u\}$ が存在するものがある．

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が折り紙同形であるとき，$\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$ と表す．

注意．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がもつ領域の個数が異なる場合に対して行っている操作は，折られていない（山折り，谷折りでない）折り目をないものと見なして数え直すという意味がある．こうした折り目がないものと見なせることは，命題 3.7 で論じた合同性により保証される．また，定義 5.1 ではどちらか一方の領域を減らして，もう片方と数を合わせるように定めているが，その代わりに両方から補助折り目を全て除いて数え直した領域について，条件を満たす写像 σ を考えても良い．ただし，補助折り目を全て除いて数え直した領域の個数が異なる場合，2 つの可折平坦折り紙は同形でないと定める．

命題 5.2. $\sim$ は同値関係である．

証明． 相似 $\backsim$ は同値関係であるから，条件 (1) と (2)(i) について反射律，対称律，推移律が成立する．また，$P_A = (\{A_1, A_2, \ldots, A_u\}, \preceq)$，$P_B = (\{B_1, B_2, \ldots, B_u\}, \preceq)$ とすると，条件の写像 σ は $\{A_1, A_2, \ldots, A_u\}$ から $\{B_1, B_2, \ldots, B_u\}$ への順序同型写像となる．すなわち $P_A \cong P_B$ であり，これは同値関係であるから条件 (2)(ii) についても反射律，対称律，推移律が成立する．ゆえに $\sim$ は同値関係であると示される． □

定義 5.3 (折り紙作品)**.** 可折平坦折り紙全体の集合 $\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} : \text{可折平坦折り紙}\}$ を $\mathbb{F}$ と表す．このとき，商集合 $\mathbb{F}/_\sim$ を**折り紙作品全体**といい，その各元を**折り紙作品**という．

以上のようにして，様々な折り紙作品は可折平坦折り紙とその同値関係によって代数的に表現される．

6　今後の課題

例えば，折り紙作品の一つである折り鶴の性質（例えば川崎による研究 [5] がある）について，以上の結果を用いれば代数的に処理することができる．このように，折り紙作品を個々に抜き取ってその性質を調べることが可能となった．また，異なる手順で折られた折り紙同形な 2 つの可折平坦折り紙があるとき，どちらの折り方が早いかというような評価も考えることができる．ただし，これには 1 つの折り方が実際には 2 つのステップに分けられるといったような可約性を制限しなければならないだろう．以上を踏まえると，折り方の最小ステップ数という話題に発展させることができる．

ところが，現実の平坦折り紙全てが可折平坦折り紙を以ってしても表現できるわけではないことを最後に断っておく．例えば「ねじり折り」と呼ばれる技法（図 3）は重なり順が循環するため，半順序では表現できない．また，この技法を剛体の連続変形として表現しようとしても，紙の伸縮性により実現可能となる折り方のために表現できないことが知られている [6]．これを解消するには折り紙全体に半順序関係を定義するのではなく，より局所的な部分の半順序関係を考えて，全体はこれらの族として総合する必要がある．以上のように，現実の平坦折り紙により接近できるような表現の追及も行っていかなければならない．

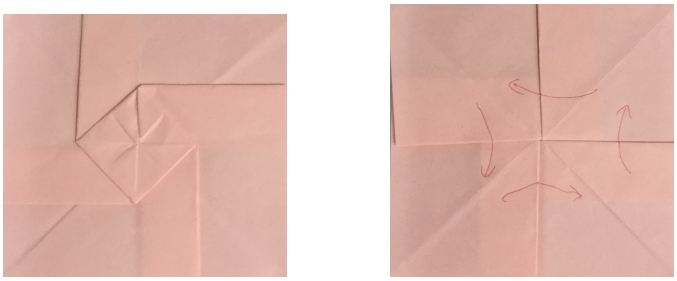


図 3: ねじり折り（左が表，右が裏）

参考文献

[1] R.C.Alperin and R.J.Lang, “One-,Two- and Multi-fold Origami Axioms”, 4OSME:The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006

[2] 和田宗士,「折り紙の作図可能性について」，学位論文（兵庫教育大学），２００８年

[3] S.Belcastro and T.Hull, “Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations”, Linear Algebra and its Applications, 2002

[4] T.Hull, “On the mathematics of flat origamis”, Congressus Numerantium, 1994

[5] 川崎敏和,「折り鶴の幾何」，折り紙の数理と科学，59-70 頁，森北出版，２００５年

[6] トーマス・ハル（邦訳　羽鳥公士郎）,「ドクター・ハルの折り紙数学教室」，289-314 頁，日本評論社，２０１５年

向き付可能閉曲面上の有限巡回群作用について

高橋 典寿 (Norihisa Takahashi)
(立命館大学 理工学研究科 基礎理工学専攻)

1 導入

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と表す．Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像のアイソトピー類の全体は写像の合成を積とし群をなす．これを Σ_g の写像類群と呼び，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ で表す．リーマン面 S_g のモジュライ空間 $\mathscr{M}(S_g)$ はその写像類群 $\mathrm{Mod}(S_g)$ の群作用による，そのタイヒミュラー空間 $\mathscr{T}(S_g)$ の商空間として実現される．ここで，タイヒミュラー空間は可縮であるため，$\mathrm{Mod}(S_g)$ の群構造を調べることにより，$\mathscr{M}(S_g)$ の位相的性質を調べることが出来る．

写像類群の有限部分群に関しては，様々な研究が存在する．Nielsen は写像類群の任意の有限巡回部分群がある双曲構造に関する等長変換群の部分群として実現できることを示し，Kerckhoff[6] はこれを有限群へと拡張した．廣瀬進氏 [2] は種数 4 以下の全ての極大有限巡回群作用の Dehn twist 表示を与えた．石坂瑞穂氏 [4] は Σ_g 上の超楕円的周期的写像を共役の差を除き分類し，それらの Dehn twist 表示を与えた．ここで，超楕円的対合はその商空間が S^2 となることで特徴付けられる．

本稿では，商空間が T^2 となる対合と可換な周期的写像類に関する考察を行う．本稿は，野澤啓氏 (立命館大学 理工) との共同研究に基づく．

2 周期的写像の分類

$f \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ に対し，$f^n = id_{\Sigma_g}$ なる自然数 n が存在するとき，f は周期的であるという．また，$x \in \Sigma_g$ が周期的写像 f の重複点であるとは，f の周期 n よりも小さい自然数 k が存在し，$f^k(x) = x$ となることである．ここで，f の重複点全体の集合を M_f とおき，$\pi_f : \Sigma \to \Sigma/\langle f \rangle$ を n 重分岐被覆写像とする．$B_f := \pi(M_f)$ を f の分岐集合と呼ぶ．$b_i \in B_f$ に対し，$p_i \in M_f$ を任意に一つ固定する．p_i に置ける π_f の分岐指数を λ_i とおく．σ_i $(1 \leq \sigma_i \leq \lambda_i)$ を p_i の近傍の境界への $f^{\frac{n}{\lambda_i}}$ の作用が $\frac{\sigma_i}{\lambda_i} 2\pi$ であるように選ぶ．このとき $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}$ を p_i を含む f の軌道の *valency* と呼び，$[g, n : \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \cdots]$ を f の *total valency* と呼ぶ．Nielsen による次の定理の系として，total valency は周期的写像類の共役類を完全に分類することが知られている．

定理 2.1. Σ_g 上の 2 つの周期的写像 $f, f' \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ が共役であることと，以下の 3 条件が満たされることは同値：

1. f の周期 $= f'$ の周期
2. $\sharp B_f = \sharp B'_f$
3. $\{f$ の valency の全体 $\}$=$\{f'$ の valency の全体 $\}$

例 2.2. 図 1 が表す T^2 上の周期的写像の total valency は $[1, 6; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}]$ である．

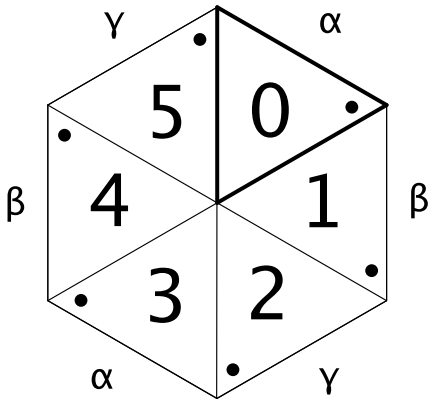


図 1

与えられた total valency が存在する為の条件が知られている．([1],[2] 参照)

3　有限巡回群作用の可視化の例

Σ_4 上の有限巡回群作用の可視化の例を 2 つ紹介する．ここで，図中の数字は基本領域の写り方を示し，ギリシャ文字は各辺の貼り合わせ方を示す.

例 3.1. 図 2 は $[4, 12; \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}]$ で生成される $\mathbb{Z}_{12}$ 作用を表す.

例 3.2. 図 3 は $[4, 5; \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}]$ で生成される $\mathbb{Z}_5$ 作用を表す.

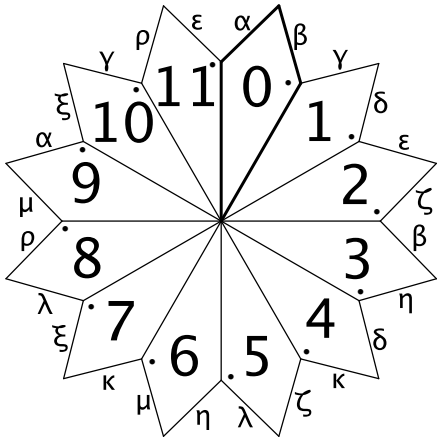


図 2

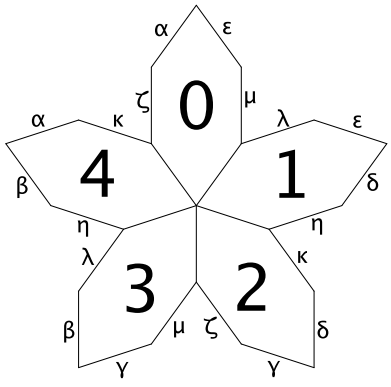


図 3

4　商空間が T^2 となる対合と可換な既約かつ周期的写像類の分類

ι_g を商空間が T^2 となる対合とする.

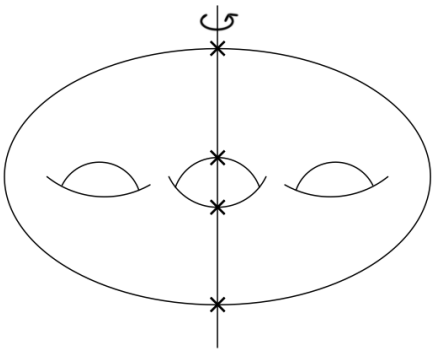


図 4

定理 4.1. $\phi \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ を既約かつ周期的な写像類とする．もし，ϕ が ι_g と可換ならば，ϕ の共役類 $[\phi]$ は以下のいずれかに等しくなる．

$[2,6;\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}]$, $[3,8;\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}]$, $[3,8;\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}]$,
$[3,8;\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}]$, $[3,8;\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}]$, $[3,12;\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}]$,
$[3,12;\frac{5}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}]$, $[4,12;\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}]$, $[4,12;\frac{5}{12}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}]$,
これらの逆写像.

特に，$g \geq 5$ ならば，Σ_g 上の既約かつ周期的な写像であって，ι_g と可換となるものは存在しない．

証明には各周期的写像の基本領域による曲面の分割と，分岐被覆の理論を用いる．

参考文献

[1] T. Ashikaga and M. Ishizaka, “Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos’ theorem”, Tohoku Math. J. **54** (2002), 195–226.

[2] S. Hirose, “Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4”, Osaka J. Math. **47** (2010), 385–421.

[3] S. Hirose, “On periodic maps over surfaces with large periods”, Osaka J. Math. **62** (2010), 45–53.

[4] M. Ishizaka, “Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families”, Rev. Mat. Complut. **20**(2) (2007), 483–495.

[5] M. Ishizaka, “Monodoromies of hyperelliptic families of genus three curves”, Tohoku Math. J. **56** (2004), 1–26.

[6] S.P. Kerckhoff, “The Nielsen realization problem”, Ann. Math. (2) , **117**(2) (1983), 235–265.

[7] A.M. Macbeath, “On a theorem by J. Nielsen”, Quart. J. Math. **13** (1962), 235–236.

Some distance functions in knot theory

Jie CHEN
Division of Mathematics, Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1 Introduction

In this presentation, we focus on three distance functions in knot theory. They are the Gordian distance, the algebraic Gordian distance and the Alexander polynomial distance. A *knot* is defined to be an oriented circle embedded in the three-sphere S^3. A crossing change on a knot is often called the *unknotting operation*. The *Gordian distance* between two knots is defined to be the minimum number of crossing changes needed to turn one knot into the other. Analogously, the other two distance functions of Seifert matrices and Alexander polynomials respectively are defined. These three distance functions turn the sets of knots, S-equivalence classes of Seifert matrices and Alexander polynomials into metric spaces. We are interested in the question when these distances can be one.

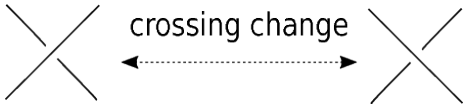


Figure 1: unknotting operation

2 The Gordian distance

We use $d_G(K, K')$ to denote the Gordian distance between two knots K and K' in S^3. The *unknotting number* $u(K)$ of a knot K is defined by $u(K) = d_G(K, O)$, where O is the trivial knot.

The studies of unknotting number and the Gordian distance are often related to the homology groups of covering spaces of knots. Pairing relations between homology classes encode the structures of those covering spaces. There are studies showing that different pairing relations have certain restrictions when the Gordian distance is one for two knots. Lickorish [11] used surgery construction of the double branched cover and showed an unknotting number one knot has an obstruction on the linking form

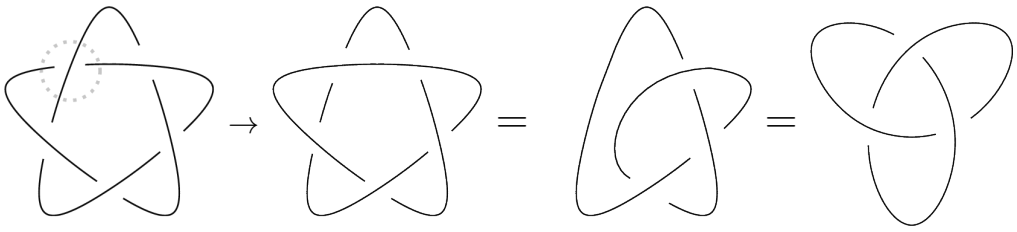


Figure 2: $d_G(3_1, 5_1) = 1$

of its double branched cover. Murakami [12] used a similar technique to generalize Lickorish's result to two knots with Gordian distance one and showed their double branched covers have certain linking forms.

There are studies connecting the Gordian distance with a variety of knot invariants. Murasugi [14] gave a lower bound for the unknotting number in terms of the knot signature. Stoimenow [17] connected the Jones polynomial and the unknotting number. Nakanishi [15] found an obstruction for the Seifert matrices of unknotting number two knots. More algebraic techniques are used to find obstructions for a pair of knots of Gordian distance one. Kawauchi [9] used residue modules and determinant rings to give an obstruction on the Alexander polynomials of a pair of knots with Gordian distance one. With these restrictions, it becomes possible to tell whether two given knots could be transformed into each other by one crossing change.

3 The algebraic Gordian distance

A *Seifert matrix* V is defined to be a square integer matrix satisfying $\det(V - V^T) = 1$. A Seifert matrix V' is said to be *congruent* to V if $V' = PVP^T$ for a unimodular matrix P. A Seifert matrix V' is called an *enlargement* of V if

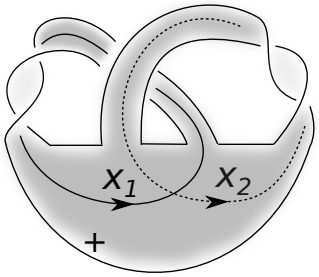
$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & n & M \\ 0 & N^T & V \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & M \\ 0 & N^T & V \end{pmatrix},$$

where M and N are row vectors, and n is some integer. Then V is a *reduction* of V'. The *S-equivalence* is an equivalence relation generated by congruences, enlargements and reductions. The *S-equivalence class* of V, denoted by $[V]$, is all Seifert matrices S-equivalent to V; see [16, 19].

Motivated by the unknotting operation, Murakami defined the *algebraic unknotting operation* in [13]. It assigns a Seifert matrix V to $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & n & M \\ 0 & N^T & V \end{pmatrix}$ for $\varepsilon = \pm 1$; see [13].

Let $[V]$ and $[V']$ be two S-equivalence classes. The *algebraic Gordian distance* $d^a_G([V], [V'])$ between $[V]$ and $[V']$ is defined to be the minimum number of algebraic unknotting operations needed to deform a matrix in $[V]$ to a matrix in $[V']$.

For a knot K in S^3, a *Seifert surface* of K is a connected orientable surface bounded by K. Given a Seifert surface F, we can choose a generator system $x_1, x_2, \ldots, x_{2g}$ of $H_1(F)$, where g is the genus of F. Let lk denote the linking number. A *Seifert matrix* for F can be calculated by $V = (v_{ij})$ with $v_{ij} = \mathrm{lk}(x_i, x_j^+)$ for $i, j = 1, 2, \ldots, 2g$, where x_j^+ is the result of translating a representative cycle for x_j into $S^3 - F$ along the positive side of F. The *Alexander polynomial* Δ_K of K is defined by the equation $\Delta_K = \det(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^T)$. Note that any two S-equivalent Seifert matrices have the same Alexander polynomial. Let $[K]$ denote the S-equivalence class of a Seifert matrix of K. In [13], Murakami proved $d_G(K_1, K_2) \geq d_G^a([K_1], [K_2])$, relating the two distance functions.



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1^+ & x_2^+ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figure 3: a Seifert surface and Seifert matrix for 3_1

The *Alexander module* A_V of a Seifert matrix V is defined by $A_V = \Lambda^{2g}/(tV - V^T)\Lambda^{2g}$, where Λ is the *Laurent polynomial ring* $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Then we know $A_V \cong H_1(\tilde{X}(K); \mathbb{Z})$, where $\tilde{X}(K)$ is the infinite cyclic cover of the complement of K. We regard A_V as a Λ-module, with t acting on $\tilde{X}(K)$ as the deck transformation. The *Blanchfield pairing* of A_V is a map $\beta_V : A_V \times A_V \longrightarrow Q(\Lambda)/\Lambda$. It is a sesquilinear form, meaning $\beta_V(px, qy) = p\bar{q}\beta_V(x, y)$, where $\bar{q} = q|_{t=t^{-1}}$; see [1]. Note that $(A_V, \beta_V) \cong (A_{V'}, \beta_{V'})$ if V is S-equivalent to V'.

Analogously to the unknotting number, *the algebraic unknotting number* $u_a([V])$ is defined to be $d_G^a([V], [O])$, where $[O]$ is the S-equivalence class of the 0×0 matrix. Murakami proved if $u_a([K]) = 1$, then there exists a generator α for the Alexander module of K such that the Blanchfield pairing $\beta_V(\alpha, \alpha) = \pm\frac{1}{\Delta_K}$. Moreover, the Blanchfield pairing is given by the 1×1-matrix $(\pm\frac{1}{\Delta_K})$; see [13, Theorem 5, p.288].

4 The Alexander polynomial distance

Kawauchi defined the Alexander polynomial distance $\rho(\Delta, \Delta')$ between two Alexander polynomials Δ and Δ' by the equation

$$\rho(\Delta, \Delta') = \min_{K_\Delta, K_{\Delta'}} d_G(K_\Delta, K_{\Delta'}),$$

where K_Δ and $K_{\Delta'}$ are knots with Alexander polynomials Δ and Δ', respectively [9].

Note that $\rho(\Delta, \Delta') \leq 2$; see [9]. This is because there exists an unknotting number one knot for any given Alexander polynomial; see [10]. In [4], it is proved that $d^a_G([K_1], [K_2]) \geq \rho(\Delta_{K_1}, \Delta_{K_2})$.

A question of Jong asks to find two Alexander polynomials Δ and Δ' such that $\rho(\Delta, \Delta') = 2$; see [6–9]. Kawauchi gave a restriction for a pair of Alexander polynomials of degree two such that their distance is one.

5 The Blanchfield pairing of two Seifert matrices of distance one

In [4], by constructing two Seifert matrices of algebraic Gordian distance one and finding the restriction of their Blanchfield pairing, the following theorem is deduced.

Theorem 5.1 ([4]). *Let V and V' be two Seifert matrices. If the algebraic Gordian distance $d^a_G([V], [V']) = 1$, then there exist $a \in A_V$ and $a' \in A_{V'}$ such that $\beta_V(a, a) \equiv \pm\dfrac{\Delta_{V'}}{\Delta_V} \pmod{\Lambda}$ and $\beta_{V'}(a', a') \equiv \pm\dfrac{\Delta_V}{\Delta_{V'}} \pmod{\Lambda}$.*

The following corollaries to Theorem 5.1 give further results on the obstructions of the algebraic Gordian distance and the Alexander polynomial distance.

Corollary 5.2 ([4]). *If $u_a([V]) = d^a_G([V], [V']) = 1$, then there exists $c \in \Lambda$ such that $\pm\Delta_{V'} \equiv c\bar{c} \pmod{\Delta_V}$.*

Corollary 5.3 ([4]). *Let Δ_V and $\Delta_{V'}$ be the Alexander polynomials of Seifert matrices V and V', respectively, with $\Delta_V = h(t + t^{-1}) + 1 - 2h$, $|h|$ being a prime or 1 and $\Delta_{V'} \equiv d \pmod{\Delta_V}$, where $d \in \mathbb{Z}$. If $u_a([V]) = 1$ and if the equation for x and y $h^2x^2 + y^2 + (2h - 1)xy = \pm d$ does not have an integer solution, then the algebraic Gordian distance $d^a_G([V], [V']) \neq 1$.*

If there is an Alexander polynomial that is realized only by unknotting number one matrices, we can use Corollary 5.3 to find many examples to answer Jong's question.

6 Determinant of 2×2 Seifert matrices with algebraic unknotting number one

In [4], the following lemmas on Seifert matrices of algebraic unknotting number one are proven.

Lemma 6.1 ([4]). *If a 2×2 Seifert matrix V has $\det V \in \{1, 2, 3, 5\}$, then $u_a(V) = 1$.*

Lemma 6.2 ([4]). *For a Seifert matrix V, if $\Delta_V = ht + ht^{-1} + 1 - 2h$ with $h \in \{1, 2, 3, 5\}$, then $u_a(V) = 1$.*

The two lemmas are based on Trotter's results in [18, 19].

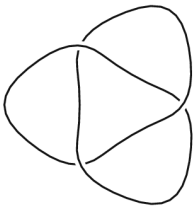
- Any 2×2 Seifert matrix is congruent to a matrix of the form $\begin{pmatrix} a & m+1 \\ m & c \end{pmatrix}$; see [19, p.203].
- Any 2×2 positive definite Seifert matrix is congruent to $\begin{pmatrix} a & m+1 \\ m & c \end{pmatrix}$, where $0 < 2m+1 \leq \min(a, c)$; see [19, p.204].
- If $\Delta_V = ht + ht^{-1} + 1 - 2h$, V is S-equivalent to a 2×2 Seifert matrix V' with $\det V' = h$; see [18, pp.484-486].

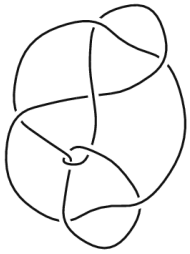
We refer to [2, 5] for more information about the classification of binary quadratic forms, with which we can find more determinants that can be realized only by algebraic unknotting number one Seifert matrices.

By Corollary 5.3, we can find many examples of $\rho(\Delta, \Delta') = 2$.

Corollary 6.3. *The Alexander polynomial distance* $\rho(t+t^{-1}-1, \Delta) = 2$ *if* $\Delta \equiv 4m+2 \pmod{t+t^{-1}-1}$ *for some* $m \in \mathbb{Z}$.

Now we give an example for this corollary. The following figures are diagrams of the knots 3_1 and 9_{30}, respectively [3].





$\Delta_{3_1} = t + t^{-1} - 1$ $\qquad$ $\Delta_{9_{30}} = -t^3 - t^{-3} + 5t^2 + 5t^{-2} - 12t - 12t^{-1} + 17$

We have $\Delta_{3_1} = t + t^{-1} - 1$ and $\Delta_{9_{30}} = -t^3 - t^{-3} + 5t^2 + 5t^{-2} - 12t - 12t^{-1} + 17$, so $\Delta_{9_{30}} = (-t^2 - t^{-2} + 4t + 4t^{-1} - 7)\Delta_{3_1} + 2$. By Corollary 6.3, we obtain $d_G(K_1, K_2) \geq d_G^a([K_1], [K_2]) \geq \rho(\Delta_{3_1}, \Delta_{9_{30}}) = 2$ for any pair of knots K_1 and K_2 with $\Delta_{K_1} = \Delta_{3_1}$ and $\Delta_{K_2} = \Delta_{9_{30}}$.

Moreover, this example demonstrates how our result helps in calculating the algebraic Gordian distance of two given S-equivalent classes. We know $u_a([9_{30}]) = u_a([3_1]) = 1$. It gives $d_G^a([3_1], [9_{30}]) \leq u_a([3_1]) + u_a([9_{30}]) = 2$. Therefore, we have $d_G^a([3_1], [9_{30}]) = 2$.

References

[1] R. C. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 340–356.

[2] D. A. Buell, *Binary quadratic forms*, Springer-Verlag, New York, 1989. Classical theory and modern computations.

[3] J. C. Cha and C. Livingston, *KnotInfo: Table of Knot Invariants* (July 18, 2017), `http://www.indiana.edu/~knotinfo`.

[4] J. Chen, *On the algebraic Gordian distance*, arXiv:1709.05626, available at `https://arxiv.org/abs/1709.05626`.

[5] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] K. Ichihara and I. D. Jong, *Gromov hyperbolicity and a variation of the Gordian complex*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **87** (2011), no. 2, 17–21.

[7] I. D. Jong, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 2, 353–371.

[8] ———, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two II*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 8, 1075–1092.

[9] A. Kawauchi, *On the Alexander polynomials of knots with Gordian distance one*, Topology Appl. **159** (2012), no. 4, 948–958.

[10] H. Kondo, *Knots of unknotting number* 1 *and their Alexander polynomials*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 2, 551–559.

[11] W. B. R. Lickorish, *The unknotting number of a classical knot*, Contemp. Math. **44** (1985), 117–121.

[12] H. Murakami, *Some metrics on classical knots*, Math. Ann. **270** (1985), no. 1, 35–45.

[13] ———, *Algebraic unknotting operation*, Questions Answers Gen. Topology **8** (1990), no. 1, 283–292.

[14] K. Murasugi, *On the signature of links*, Topology **9** (1970), 283–298.

[15] Y. Nakanishi, *Alexander polynomials of knots which are transformed into the trefoil knot by a single crossing change*, Kyungpook Math. J. **52** (2012), no. 2, 201–208.

[16] H. Seifert, *Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 84–101.

[17] A. Stoimenow, *Polynomial values, the linking form and unknotting numbers*, Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 5-6, 755–769.

[18] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 464–498.

[19] ———, *On S-equivalence of Seifert matrices*, Invent. Math. **20** (1973), 173–207.

Convex property of Wulff shapes and regularity of their convex integrands

Yasushi Teruya
Graduate school of Mathematics, Kyushu University

Abstract

In this paper, for a convex closed surface which is called Wulff shape, we investigate the strength of the convexity of the Wulff shape in terms of regularity of its convex integrand.

1 Introduction

It is known that the minimizer of an anisotropic surface energy among all closed surfaces enclosing the same volume is unique (up to translations) and it is called the Wulff shape. An anisotropic surface energy is the integral of an energy density over the considered surface and it is a mathematical model of the surface tension of a crystal. In general, the Wulff shape is not smooth. For example, the Wulff shape is a convex cloesd surface with singularities like a polytope in some cases. The smoothness and the strength of the convexity of the Wulff shape are deeply related to the convexity and the regularity of the energy density. In this article, we investigate the relationship between the strength of the convexity of the Wulff shape and the regularity of the energy density, both locally and globally.

2 Main Results

We prepare some notations. Let $n \in \mathbb{N}$. We denote the unit sphere with center at the origin in $\mathbb{R}^{n+1}$ by S^n. Let $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ be a continuous function. We use the following symbols.

$$\Gamma_{\gamma,\nu} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | (x, \nu) \leq \gamma(\nu)\},$$

where (,) stands for the scalar product of x and ν in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\mathcal{K}_0^n := \{A \in \mathbb{R}^n \mid A \text{ is a compact convex set containing the origin.}\}.$$

For $W \in \mathcal{K}_0^n$ and $\nu \in S^n$,

$$F(W, \nu) := \partial W \cap \partial \Gamma_{\gamma,\nu}.$$

We call the set $F(W, \nu)$ the **ν-way face** of W.

For given $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, let γ_W be the convex integrand for W (the definition of the integrand, will be given in Section 3).

Theorem 2.1. *Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$ and $\nu \in S^n$. Then, the following (a) and (b) are equivalent.*

(*a*) *γ_W is differentiable at ν.*
(*b*) *$F(W, \nu) = \{$one point$\}$.*

Corollarly 2.1 (H.Han and T.Nishimura 2016 [1])**.** *Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$. Then, the following (a) and (b) are equivalent.*

(*a*) *γ_W is of C^1*
(*b*) *W is strictly convex.*

3 Preliminaries

Let $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ be continuous function. Then, we define the **Wulff shape** for γ as follows :

$$W_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in S^n} \Gamma_{\gamma,\nu}$$

and we call γ a **support function** for the Wulff shape W_γ.
By definition, it is obvious to hold the following property.

Proposition 3.1. *For a continuous function $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, W_γ is a compact convex set containing the origin.*

Conversely, for a given compact convex set W containing the origin, we can construct $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ which satisfies $W = W_\gamma$.
In fact, putting

$$\gamma(\nu) := \underset{x \in W}{max}(x, \nu),$$

we have $W = W_\gamma$.
We call $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ constructed as above the **convex integrand** (or energy density) for W and denote it by γ_W.

Definition 3.1. *Let $\gamma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.*
Then, the homogeneous extension $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ of γ is defined by

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} \|x\|\gamma(\frac{1}{\|x\|}x), & (x \neq \mathbf{0}), \\ 0, & (x = \mathbf{0}). \end{cases}$$

Proposition 3.2 ([2])**.** *Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, and γ be the convex integrand for W.*
Let $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Then, the following (a) and (b) are equivalent.

(*a*) *$\tilde{\gamma}$ is differentiable at x.*
(*b*) *$\partial W \cap \partial \Gamma_{\tilde{\gamma}(x),x} = \{$one point$\}$,*

where $\Gamma_{\tilde{\gamma}(x),x} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | (y, x) \leq \tilde{\gamma}(x)\}$.

Definition 3.2. *Let $W \subset \mathbb{R}^n$. Then, if $\overline{xy} \setminus \{x, y\} \subset Int(W)$ holds for any distinct two points $x, y \in \partial W$, we say that W is* **strictly convex**.

Proposition 3.3. *Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, and γ be the convex integrand for W. Then, the following (a) and (b) are equivalent.*

(*a*) *W is strictly convex.*
(*b*) *$F(W, \nu) = \{$one point$\}$ $(\forall \nu \in S^n)$*

4 Sketch of the proof of Main Theorem (Theorem2.1)

Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, and γ be the convex integrand for W. First, since $\gamma = \tilde{\gamma}|_{S^n}$ holds, the following (a) and (b) are equivalent for any $\nu \in S^n$ and $\lambda > 0$.

(*a*) *γ is differentiable at ν (resp. C^1).*
(*b*) *$\tilde{\gamma}$ is differentiable at $\lambda\nu$ (resp. C^1).*

Moreover, it is easy to verify that the following (a) and (b) are equivalent for any $\nu \in S^n$ and $\lambda > 0$.

(a) $F(W, \nu) = \{one\ point\}$.

(b) $\partial W \cap \partial \Gamma_{\tilde{\gamma}(\lambda\nu),\lambda\nu} = \{one\ point\}$.

By using these facts and the results given in Section 3, we can prove the desired result.

Reference

[1] H.Han and T.Nishimura. Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands. preprint (available from arXiv:1507.05162v2 [math.MG] (2016)).

[2] R.Schneider. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory 2nd edition. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **44**. Cambridge University Press, Cambridge, 2013

Bianchi-Bäcklund transformation for spacelike constant mean curvature surfaces in Minkowski 3-space*

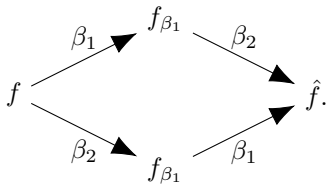
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University
Joseph Cho

1 Background

Given a surface with constant negative Gaussian curvature (CNC) in the Euclidean 3-space $\mathbb{R}^3$, one may use the Bäcklund transformation to obtain a new CNC surface using tangential line congruence depending on a spectral parameter. It is using this transformation that Bianchi proved the Bianchi permutability theorem in [1], which says that given a seed CNC surface f, and two Bäcklund transforms f_{β_1} and f_{β_2} using spectral parameters β_1 and β_2 respectively, there exists a fourth surface $\hat{f}$ such that

$$\hat{f} = (f_{\beta_1})_{\beta_2} = (f_{\beta_2})_{\beta_1},$$

or schematically,



Using the permutability, in [2], Bianchi considered twice successive transformations using complexified tangential line congruence to obtain a constant positive Gaussian curvature surface (CPC) from a given CPC surface, called the Bianchi-Bäcklund transformation. From this, one may construct a new constant mean curvature (CMC) surface from a given CMC surface, using the fact that a CMC surface is a parallel surface of a CPC surface.

In this presentation, we give a method of constructing a new spacelike CMC surface from a given one in Minkowski 3-space $\mathbb{R}^{2,1}$ by developing an analogue of the classical Bianchi-Backlund transformation, and show that Bianchi permutability also holds for this transformation.

2 Bianchi-Bäcklund transformation for CMC surfaces in $\mathbb{R}^3$

We first briefly review the Bianchi-Bäcklund transformation in $\mathbb{R}^3$. (For further details, see [2], [8], or [5], for example.) Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ be a simply-connected domain with coordinates $(u, v) \in \Sigma$, and let $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ be a conformally immersed surface with curvature line coodinates (u, v). Since $f(u, v)$ is conformal, for some function $\omega : \Sigma \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\omega}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

We choose a unit normal vector field $e_3 : \Sigma \to \mathbb{S}^2$. We further assume that the mean curvature $H = \frac{1}{2}$ and the Hopf differential factor $Q = -\frac{1}{4}$. Then integrability condition, or the Gauss equation, becomes

$$\Delta\omega + \sinh\omega\cosh\omega = 0, \tag{1}$$

the well-known sinh-Gordon equation.

*This presentation is based on the jointwork with Mitsugu Abe (Kobe University) and Yuta Ogata (National Institute of Technology. Okinawa College).

By considering complexified tangential line congruence of a given surface with metric function ω satisfying (1), one may construct another solution $\vartheta : \Sigma \to \mathbb{C}$ to the same equation by solving

$$\begin{cases} (\vartheta - \omega)_z = \frac{1}{2} e^{\beta} \sinh(\vartheta + \omega) \\ (\vartheta + \omega)_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} e^{-\beta} \sinh(\vartheta - \omega) \end{cases} \tag{2}$$

where β is some constant in $\mathbb{R}$, and $z = u + iv$.

To obtain another real solution to (1), we perform two iterations of this as follows: We first obtain ϑ and ϑ^* from a given solution ω using the constants β and β^*, respectively, via (2), where

$$\beta^* := \pi i - \beta. \tag{3}$$

Then by performing another iteration, starting with ϑ and ϑ^*, and using β^* and β, respectively, we obtain a new solution ω^N via the Bianchi permutability formula

$$\tanh\left(\frac{\omega^N - \omega}{2}\right) = \coth\left(\frac{\beta - \beta^*}{2}\right) \tanh\left(\frac{\vartheta - \vartheta^*}{2}\right).$$

The choice of β^* in (3) forces the new solution ω^N to be a real function defined on Σ. The new solution ω^N is called the Bianchi-Bäcklund transformation of ω.

3 Complexified tangential line congruence for CGC $K = 1$ surface in $\mathbb{R}^{2,1}$

Now we switch our attention to $\mathbb{R}^{2,1}$. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ be a simply-connected domain with coordinates $(u, v) \in \Sigma$, and let $f : \Sigma \to \mathbb{R}^{2,1}$ be an immersion with conformal curvature line coordinates (u, v). Since $f(u, v)$ is conformal, for some function $\omega : \Sigma \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\omega}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

We choose a timelike unit normal vector field $n = e_3 : \Sigma \to \mathbb{H}^2$, and let e_1 and e_2 be the unit tangent vectors in the direction of f_u and f_v, respectively. We further assume that the mean curvature $H = \frac{1}{2}$ and the Hopf differential factor $Q = -\frac{1}{4}$. Then the Gauss-Weingarten equations become

$$\begin{cases} f_{uu} = \omega_u f_u - \omega_v f_v - e^{\omega} \sinh\omega \, n \\ f_{vv} = -\omega_u f_u + \omega_v f_v - e^{\omega} \cosh\omega \, n \\ f_{uv} = \omega_v f_u + \omega_u f_v \\ n_u = -e^{-\omega} \sinh\omega f_u \\ n_v = -e^{-\omega} \cosh\omega f_v. \end{cases}$$

Therefore, the integrability condition, or the Gauss equation, becomes

$$\Delta\omega - \sinh\omega \cosh\omega = 0. \tag{4}$$

Now, we take g to be the parallel surface to f that is a constant Gaussian curvature $K = 1$ surface, i.e. $g = f - n$. Following Bianchi's construction in [2], we construct a new constant Gaussian curvature $K = 1$ from g as follows.

First, we define the complexified tangential line congruence g^N of g as

$$g^N := g + \lambda(\cos\varphi \, e_1 + \sin\varphi \, e_2)$$

for some constant $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and some function $\varphi : \Sigma \to \mathbb{C}$. Then we demand that

1. The vector $g^N - g$ are tangent to both surfaces at their respective points, and
2. The normal vectors e_3 and e_3^N have a constant angle σ with each other at corresponding points.

Using these two conditions and (4), we calculate that

$$\coth^2\sigma + \frac{1}{\lambda^2} = 1.$$

Hence, we can define β and ϑ so that

$$i\sinh\beta = \coth\sigma, \quad \cosh\beta = \frac{1}{\lambda}, \quad i\vartheta = \varphi,$$

and obtain the Bianchi partial differential equations (PDE):

$$\begin{cases} (\vartheta-\omega)_z = \frac{1}{2}e^{\beta}\sinh(\vartheta+\omega) \\ (\vartheta+\omega)_{\bar{z}} = \frac{1}{2}e^{-\beta}\sinh(\vartheta-\omega) \end{cases} \tag{5}$$

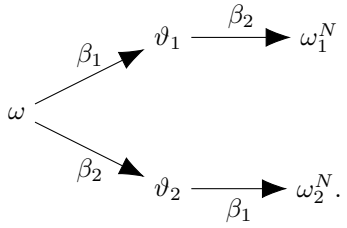
where $z := u + iv \in \mathbb{C}$. Then a direct calculation gives us the following theorem.

Proposition 1. *Let ω be a solution to (4), and let ϑ be defined via (5). Then ϑ is also a solution to (4), i.e.*

$$\Delta\vartheta - \sinh\vartheta\cosh\vartheta = 0.$$

4 Bianchi permutability theorem

We now aim to show that following Bianchi in [1] and [2], Bianchi permutability theorem also holds for the transformation as defined in Proposition 1. Let ω_1^N and ω_2^N be twice successive transformations satisfying the following schematic diagram:



Through direct calculation, we can show that

$$\omega^N = \omega_1^N = \omega_2^N$$

if and only if

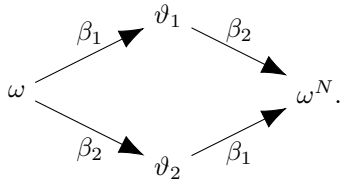
$$\tanh\left(\frac{\omega^N-\omega}{2}\right) = \coth\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\right)\tanh\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}\right).$$

and hence we have the following theorem.

Theorem 2. *Let ω be a solution to*

$$\Delta\omega - \sinh\omega\cosh\omega = 0,$$

and let ϑ_1 and ϑ_2 be defined via Bianchi PDE using β_1 and β_2, respectively. Then there exists a fourth solution ω^N such that the following schematic diagram holds:



Moreover, ω^N can be found using the following algebraic expression:

$$\tanh\left(\frac{\omega^N-\omega}{2}\right) = \coth\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\right)\tanh\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{2}\right).$$

5 Bianchi-Bäcklund transformation for spacelike CMC surfaces in $\mathbb{R}^{2,1}$

In general, since we used complexifed tangential line congruence, the new solution constructed via Bianchi PDE is complex, even if the original solution is real. However, using Theorem 2 and performing twice successive transformations, we may force the solution to be real by letting $\beta_1 = \beta$ and $\beta_2 = -\bar{\beta}$ for some complex $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. We call such an ω^N a *Bianchi-Bäcklund transformation* of ω. Therefore, given any spacelike CMC surface, we obtain a new spacelike CMC surface via the following recipe:

1. From a given spacelike CMC surface in $\mathbb{R}^{2,1}$, recover the metric function ω satisfying (4).
2. Choose any nonzero β and perform a Bianchi-Bäcklund transformation via Theorem 2 to obtain a new real solution ω^N.
3. Construct a new spacelike CMC surface having ω^N as its metric function.

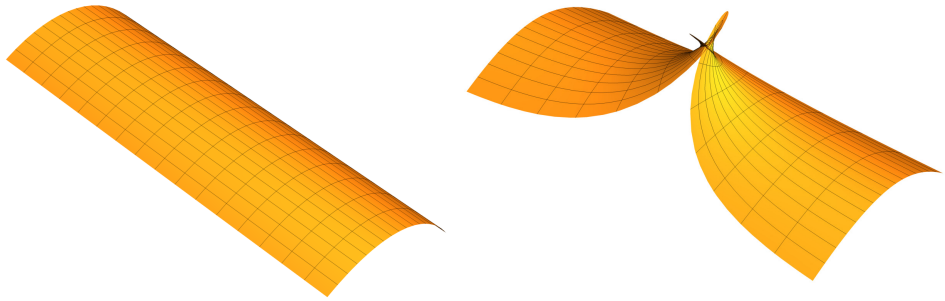


Figure 1: Example of a Bianchi-Bäcklund transformation for spacelike CMC surfaces in $\mathbb{R}^{2,1}$. On the left is hyperbolic cylinder, corresponding to the vacuum solution $\omega \equiv 0$; on the right is a Bianchi-Bäcklund transformation of hyperbolic cylinder, an analogue of bubbletons in $\mathbb{R}^3$.

References

[1] L. Bianchi. *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.* Rend. Lincei, 5(1):3–12, 1892.

[2] L. Bianchi. Lezioni di Geometria Differenziale, Volume II. Enrico Spoerri, Pisa, 1903.

[3] C. Gu, H. Hu and Z. Zhou. Darboux transformations in integrable systems. Springer, Dordrecht, 2005.

[4] S.-P. Kobayashi. *Bubbletons in 3-dimensional space forms.* Balkan J. Geom. Appl., 9(1):44–68, 2004.

[5] S.-P. Kobayashi and J. Inoguchi. *Characterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces.* Internat. J. Math., 16(2):101–110, 2005.

[6] A. Mahler. *Bianchi-Bäcklund transformations for constant mean curvature surfaces with umbilics - theory and applications.* Ph.D. Thesis, University of Toledo, 2002.

[7] C. Rogers and W. K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[8] I. Sterling and H. C. Wente. *Existence and classification of constant mean curvature multibubbletons of finite and infinite type.* Indiana Univ. Math. J., 42(4):1239–1266, 1993.

エネルギー汎関数の収束と曲率次元条件の安定性のための新しい条件

数川 大輔　Daisuke Kazukawa　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

1. 導入

測度距離空間の幾何学は, リーマン多様体の収束理論に由来し, その一般化として研究されてきた. 深谷は [2] で測度距離空間のクラスに測度付き Gromov-Hausdorff 収束 (以下, mGH 収束) を定義し, mGH 収束するコンパクトリーマン多様体の列のラプラシアンの固有値や固有関数の振る舞いを調べた. 測度距離空間が導入された背景として, リーマン多様体の mGH 収束を考えたとき, 極限空間がリーマン多様体の構造を持たないような場合を含んでいるということが挙げられる. 深谷の研究に続き, 加須栄-久村 [6, 7] や桑江-塩谷 [9, 10] によって, mGH 収束するリーマン多様体の列に対するエネルギー汎関数の収束の研究がなされた.

これらの収束理論が断面曲率や Ricci 曲率の有界性を条件に含むという観点から, 測度距離空間上に曲率の概念を一般化する研究がなされた. 断面曲率を一般化した曲率を持つ空間として, Alexandrov 空間が収束理論以前から知られていた. Lott-Villani と Sturm はそれぞれ独立に [11], [13] によって曲率次元条件と呼ばれる測度距離空間上の Ricci 曲率の下限条件に対応する条件を定義した. 曲率次元条件を満たす空間を CD 空間という. その後, Ambrosio-Gigli-Savaré によって曲率次元条件よりも強いリーマン的曲率次元条件が [1] で定義された. リーマン的曲率次元条件を満たす空間を RCD 空間という. RCD 空間はリーマン多様体のような良いエネルギー解析を行える測度距離空間として広く研究されている.

測度距離空間の収束概念の 1 つとして, Gigli-Mondino-Savaré は [4] で点付き測度付き Gromov 収束 (以下, pmG 収束) を導入した. 彼らは, pmG 収束の下で, 曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束を調べた. pmG 収束は mGH 収束よりも弱い収束であり, より多くの空間列の収束を扱うことができる. しかし, n 次元球面の列 $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ など次元が発散するリーマン多様体列は一般にほとんど収束しないことが知られている.

本研究では, pmG 収束を一般化するためにファイバー制御条件という新しい条件を導入し, 一般化された pmG 収束の下での曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束に関する結果を得た. この一般化により, n 次元球面の列 $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ などもこの理論の例として取り扱うことが可能となった. また, 本研究は, Galaz-García, Kell, Mondino, Sosa [3] による曲率次元条件が測度距離構造を保つ変換群による商空間に引き継がれるという研究の一般化も与えている.

2. 測度距離空間の幾何学

2.1. 曲率次元条件

(X, d, m) が**測度距離空間**であるとは, (X, d) が完備可分距離空間であり, m が X 上の局所有限な Borel 測度で $\operatorname{supp} m = X$ を満たすものであるときをいう. すなわち, m は, 任意の点 $x \in X$ と任意の正数 $r > 0$ に対して, $0 < m(B_r(x)) < \infty$ を満たす X 上の Borel

本研究は特別研究員奨励費（17J02121）の助成を受けたものである.

* e-mail: daisuke.kazukawa.s6@dc.tohoku.ac.jp

測度である. $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(X)$ を X 上の局所有限な Borel 測度全体とし, $\mathscr{P}(X)$ を X 上の Borel 確率測度全体とする. $\mathscr{P}(X)$ の部分集合 $\mathscr{P}_2(X)$ を

$$\mathscr{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathscr{P}(X) \;\middle|\; \text{ある点 } \bar{x} \in X \text{ が存在して}, \int_X d(x,\bar{x})^2 \, d\mu(x) < +\infty \right\} \tag{1}$$

と定め, その上の 2 つの確率測度 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}_2(X)$ の間の **L^2-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu_1,\mu_2) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu_1,\mu_2)} \left(\int_{X\times X} d(x,x')^2 \, d\pi(x,x') \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

により定める. ただし, $\Pi(\mu_1,\mu_2) := \{\pi \in \mathscr{P}(X\times X) \mid \mathrm{pr}_{i*}\pi = \mu_i \ (i=1,2)\}$ であり, $\mathrm{pr}_i : X \times X \to X$ は各成分への自然な射影, $\mathrm{pr}_{i*}\pi$ は π の pr_i による押し出し測度である. **押し出し測度**とは, 一般に Borel 可測写像 $p : X \to Y$ と X 上の Borel 測度 μ に対して, $p_*\mu(\cdot) := \mu(p^{-1}(\cdot))$ により定まる Y 上の Borel 測度 $p_*\mu$ である. $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ は完備可分距離空間になる. これを **L^2-Wasserstein 空間**という.

相対エントロピー汎関数 $\mathrm{Ent}_m : \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ を

$$\mathrm{Ent}_m(\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int_X \rho(x)\log\rho(x)\, dm(x) & (\mu = \rho m \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3}$$

により定める. ただし, $\mu = \rho m$ は μ が m に関して絶対連続であり, その密度関数が ρ であることを意味する. $D(\mathrm{Ent}_m) := \{\mu \in \mathscr{P}(X) \mid \mathrm{Ent}_m(\mu) < +\infty\}$ とする.

測度距離空間における Ricci 曲率の下限条件に対応する曲率次元条件が [11], [13] で次のように定義された.

定義 2.1. 測度距離空間 (X,d,m) が $K \in \mathbb{R}$ に対して**曲率次元条件** $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすとは, 任意の 2 つの測度 $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(X) \cap D(\mathrm{Ent}_m)$ に対して, 次を満たす μ_0 と μ_1 を結ぶ W_2 測地線 $\mu : [0,1] \ni t \mapsto \mu_t \in \mathscr{P}_2(X)$ が存在するときをいう. 任意の $t \in [0,1]$ に対し,

$$\mathrm{Ent}_m(\mu_t) \le (1-t)\mathrm{Ent}_m(\mu_0) + t\mathrm{Ent}_m(\mu_1) - \frac{K}{2}t(1-t)W_2(\mu_0,\mu_1)^2 \tag{4}$$

が成り立つ.

ただし, 一般に距離空間 (Z,d) 上の曲線 $\gamma : [0,1] \to Z$ が z と z' を結ぶ (最短) 測地線であるとは, $\gamma(0) = z, \gamma(1) = z'$ を満たし, 任意の $s,t \in [0,1]$ に対して,

$$d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t| d(\gamma(0),\gamma(1)) \tag{5}$$

を満たすときをいう.

次の定理は, 実際に曲率次元条件がリーマン多様体における Ricci 曲率の下限条件として特徴づけられることを意味している.

定理 2.2 ([12])**.** $K \in \mathbb{R}$ とする. 完備リーマン多様体 M に対して, M が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすことと M の Ricci 曲率の下限が K 以上であることは同値である. ただし, M をリーマン距離 d_g とリーマン体積測度 vol_g をもつ測度距離空間 (M,d_g,vol_g) と考える.

2.2. Cheeger エネルギー汎関数

(X,d,m) を測度距離空間とする．$\mathcal{L}ip(X)$ を X 上の Lipschitz 関数全体とする．

$f\in\mathcal{L}ip(X)$ に対して，f の**局所 Lipschitz 定数** $|\nabla f|:X\to[0,+\infty)$ を

$$|\nabla f|(x):=\limsup_{x'\to x}\frac{|f(x)-f(x')|}{d(x,x')} \tag{6}$$

で定める．**Cheeger エネルギー汎関数** $\mathrm{Ch}:L^2(X,m)\to[0,+\infty]$ を

$$\mathrm{Ch}(f):=\inf\left\{\liminf_{i\to\infty}\frac{1}{2}\int_X|\nabla f_i|^2\,dm\;\middle|\;f_i\in L^2(X,m)\cap\mathcal{L}ip(X),\ f_i\xrightarrow{L^2}f\right\}. \tag{7}$$

で定める．この定義において，$L^2(X,m)$ の中で $L^2(X,m)\cap\mathcal{L}ip(X)$ が稠密であることから，f の近似列 f_i の存在が保証される．Cheeger エネルギー汎関数はリーマン多様体上の Dirichlet エネルギー汎関数の一般化である．しかし一般に Cheeger エネルギー汎関数は 2 次形式になるとは限らない．

Ambrosio-Gigli-Savaré は [1] で次の条件を定義し，その条件を満たす空間の Cheeger エネルギー汎関数の熱流や対応するラプラシアンの固有値などを研究した．

定義 2.3. 測度距離空間 (X,d,m) が $K\in\mathbb{R}$ に対して**リーマン的曲率次元条件** $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすとは，X が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たし，かつ，Cheeger エネルギー汎関数 Ch が 2 次形式となる，すなわち，任意の $f,g\in L^2(X,m)$ に対して，

$$\mathrm{Ch}(f+g)+\mathrm{Ch}(f-g)=2\mathrm{Ch}(f)+2\mathrm{Ch}(g) \tag{8}$$

を満たすときをいう．

3. ファイバー制御条件と FC 支配

$(X,d_X,m_X),(Y,d_Y,m_Y)$ を測度距離空間とし，$p:X\to Y$ をそれらの間の 1-Lipschitz 写像とする．この節では，ファイバー制御条件という新しい概念を導入する．この条件は後に見るように，空間 X の幾何学的な条件を空間 Y が引き継ぐための条件である．ファイバー制御条件を定義するために次の測度分解定理から定まる分解測度を用いる．

定理 3.1 (測度分解定理)**.** X 上の任意の Borel 測度 μ で $p_*\mu\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Y)$ を満たすものに対して，次の (1) - (3) を満たすような X 上の確率測度の族 $\{\mu_y\}_{y\in Y}\subset\mathscr{P}(X)$ が存在する．

(1) 任意の Borel 部分集合 $A\subset Y$ に対して，$Y\ni y\mapsto\mu_y(A)\in[0,1]$ が Borel 可測関数である．

(2) $p_*\mu$-a.e. $y\in Y$ に対し，$\mu_y(X\setminus p^{-1}(y))=0$ が成り立つ．

(3) 任意の Borel 可測関数 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ に対し，

$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\int_Y\int_{p^{-1}(y)}f(x)\,d\mu_y(x)d(p_*\mu)(y) \tag{9}$$

が成り立つ．

さらに, $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ は $p_*\mu$-a.e. に関して一意である. この $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ を μ の p による**分解測度**という.

定義 3.2 (ファイバー制御条件 [8])**.** (X, d_X, m_X) を測度距離空間とし, (Y, d_Y) を完備可分距離空間とする. 1-Lipschitz 写像 $p : X \to Y$ が**ファイバー制御条件** FC を満たすとは, $p_*m_X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Y)$ となり, また, ある Borel 集合 $\tilde{Y} \subset Y$ が存在して, $p_*m_X(Y \setminus \tilde{Y}) = 0$ を満たし, かつ, m_X の p による分解測度の族 $\{\mu_y\}_{y\in\tilde{Y}}$ が $\mathscr{P}_2(X)$ に含まれ, 任意の 2 点 $y, y' \in \tilde{Y}$ に対し,

$$W_2(\mu_y, \mu_{y'}) = d_Y(y, y') \tag{10}$$

が成り立つときをいう.

定義 3.3 (FC 支配 [8])**.** $(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ を測度距離空間とする. X が Y を **FC 支配**するとは, ある 1-Lipschitz 写像 $p : X \to Y$ が存在して, FC と $p_*m_X = m_Y$ を満たすときをいう.

FC 支配の例には次のようなものがある.

例 3.4. $(Y, d_Y, m_Y), (Z, d_Z, m_Z)$ を測度距離空間とする. $1 \le q \le +\infty$ に対して, Y と Z の l_q **直積空間** $Y \times_{l_q} Z$ を,

$$Y \times_{l_q} Z := (Y \times Z, d_{l_q}, m_Y \otimes m_Z) \tag{11}$$

の 3 つ組からなる測度距離空間として定義する. ただし, $m_Y \otimes m_Z$ は m_Y と m_Z の直積測度であり, d_{l_q} は任意の 2 点 $(y, z), (y', z') \in Y \times Z$ に対して,

$$d_{l_q}((y,z),(y',z')) := \begin{cases} (d_Y(y,y')^q + d_Z(z,z')^q)^{\frac{1}{q}} & (1 \le q < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{d_Y(y,y'), d_Z(z,z')\} & (q = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}. \tag{12}$$

で定まる距離である.

このとき, さらに $m_Z \in \mathscr{P}_2(Z)$ であるとすると, $Y \times_{l_q} Z$ は Y を FC 支配する.

例 3.5. (X, d, m) を測度距離空間とし, G をコンパクト位相群とする. また, G が X に等長に作用しているとする. このとき, 軌道全体の集合 X/G 上に距離 $d_{X/G}$ が

$$d_{X/G}([x],[x']) = \inf_{g,g'\in G} d(gx, g'x') \tag{13}$$

によって定まる. ただし, $[x]$ は $x \in X$ の G 軌道である. $(X/G, d_{X/G})$ は完備可分距離空間になり, 自然な射影 $p : X \ni x \mapsto [x] \in X/G$ により, $(X/G, d_{X/G}, p_*m)$ は測度距離空間である. この $(X/G, d_{X/G}, p_*m)$ を**軌道空間**という.

このとき, G の作用が等長的であることに加え, さらに X 上の測度 m を保ち, かつ, 連続的であるとすると, X は X/G を FC 支配する.

X が Y を FC 支配しているとき, X の曲率次元条件は Y に引き継がれ, Cheeger エネルギー汎関数が保たれるという結果を得た.

定理 3.6 (K. [8])**.** $(X, d_X, m_X), (Y, d_Y, m_Y)$ を測度距離空間とし, X が Y を FC 支配するとする. $p : X \to Y$ を FC 支配の定義の写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) X が実数 K に対し $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たすならば, Y も $\mathrm{CD}(K, \infty)$ を満たす.

(2) 任意の $f \in L^2(Y, m_Y)$ に対して, $\mathrm{Ch}_X(f \circ p) = \mathrm{Ch}_Y(f)$ が成り立つ.

特に, X が実数 K に対し $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たすならば, Y も $\mathrm{RCD}(K, \infty)$ を満たす.

注意 3.7. 定理 3.6 は, 例 3.5 の場合については Galaz-García, Kell, Mondino, Sosa によって [3] において示されている. 彼らは群の場合に直接定理 3.6 を示したが, 本研究はより抽象的な FC 支配という枠組みを設定することで, 彼らの研究を一般化するとともに, その証明で本質的な役割を果たす性質を特定できたという重要な意味を持つ.

4. 主結果

4.1. 漸近的 FC 支配

次に, FC 支配を測度距離空間の列による漸近的な概念に拡張する. 測度距離空間列を扱うときは測度距離空間に基点を加えた点付き測度距離空間として扱う.

定義 4.1 (漸近的 FC 支配 [8])**.** $\{(X_n, d_n, m_n, \bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を点付き測度距離空間の列とし, $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とする. X_n が Y を**漸近的に FC 支配**するとは, ある完備可分距離空間 Z と写像 $p_n : X_n \to Z$, $\iota : Y \to Z$ が存在して次を満たすときをいう.

(1) $p_n : X_n \to Z$ は条件 FC を満たす 1-Lipschitz 写像である.

(2) $\iota : Y \to Z$ は等長埋め込み写像である.

(3) $p_{n*}m_n$ が $\iota_* m$ に弱収束する.

(4) $p_n(\bar{x}_n)$ が $\iota(\bar{y})$ に収束する.

また, X_n が Y を漸近的に FC 支配するとき, $X_n \searrow Y$ と表す.

ただし, 一般に $\{\mu_n\} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Z)$ が $\mu \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(Z)$ に弱収束するとは, 任意の $\varphi \in C_{\mathrm{bs}}(Z)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_Z \varphi \, d\mu_n = \int_Z \varphi \, d\mu$$

が成り立つときをいう. $C_{\mathrm{bs}}(Z)$ は Z 上の有界な台を持つ有界な連続関数全体である.

Gigli-Mondino-Savaré は [4] で点付き測度距離空間全体の集合 $\mathcal{X}$ 上に **pmG 収束**と呼ばれる収束を定義した. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ が $Y \in \mathcal{X}$ に pmG 収束するとは, 定義 4.1 における p_n がすべて等長埋め込み写像になっている場合であり, 定義 4.1 は pmG 収束の一般化である. pmG 収束は $\mathcal{X}$ に Polish 位相を与えるが, 一方でひとつの測度距離空間列が漸近的に FC 支配する測度距離空間は一般に複数存在する.

漸近的 FC 支配の例には次のようなものがある.

例 4.2. $\{(Z_n, d_n, m_n, \bar{z}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を点付き測度距離空間の列とし, $m_n \in \mathscr{P}_2(Z_n)$ を満たすとする. $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とする. また, $1 \le q \le +\infty$ とする. このとき, $Y \times_{l_q} Z_n \searrow Y$ となる.

半径 r の n 次元球面 $S^n(r)$ を標準リーマン計量に関するリーマン距離 d_{S^n} と正規化されたリーマン体積測度 σ^n をもつ測度距離空間とする. 任意に $S^n(r)$ 上の点 $\bar{x}_n$ をとって固定し, 点付き測度距離空間と考える. 例 4.2 の具体的な場合として Z_n を $S^n(1)$ としたものが挙げられる.

例 4.3. $(Y,d,m,\bar{y})$ を点付き測度距離空間とし, $1 \leq q \leq +\infty$ とする. このとき, $Y \times_{l_p} S^n(1) \searrow Y$ である.

$Y \times_{l_p} S^n(1)$ は Y に pmG 収束しない例である. また, この理論は例 4.3 のように次元が発散する列も例に含む. 次元が発散する列に対しても収束する位相の例として Gromov によって [5] で導入された集中位相がある. $Y \times_{l_p} S^n(1)$ は Y に集中位相では収束することが知られている. さらに, 次のような特徴的な例もある.

例 4.4. $(\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma, 0)$ を点付き 1 次元ガウス空間とする. すなわち, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ を 1 次元ユークリッド空間とし, γ を任意の Borel 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\gamma(A) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\, dx \tag{14}$$

で定まる Borel 確率測度とする. このとき, $(S^n(\sqrt{n}), d_{S^n}, \sigma^n, \bar{x}_n) \searrow (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma, 0)$ となる.

$\{S^n(\sqrt{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ は集中位相においても収束しないことが知られている.

4.2. L^2 関数列の収束とエネルギー汎関数の収束

測度距離空間の列 $\{(X_n, d_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ と測度距離空間 (Y,d,m) に対して, ある完備可分距離空間 Z と Borel 可測写像 $p_n : X_n \to Z$, $\iota : Y \to Z$ で $p_{n*}m_n$ が $\iota_* m$ に弱収束するものが存在すると仮定する. このとき, "空間をわたる" L^2 関数列の収束を次で定める.

定義 4.5. $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y,m)$ とする. f_n が f に L^2 **弱収束する**とは, 任意の $\varphi \in C_{\mathrm{bs}}(Z)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} \varphi(p_n(x)) f_n(x)\, dm_n(x) = \int_Y \varphi(\iota(y)) f(y)\, dm(y) \tag{15}$$

を満たし, かつ,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) < +\infty \tag{16}$$

を満たすときをいう. また, f_n が f に L^2 **強収束する**とは, f_n が f に L^2 弱収束し, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n(x)^2\, dm_n(x) = \int_Y f(y)^2\, dm(y) \tag{17}$$

を満たすときをいう.

このような L^2 関数列の収束が存在するとき, [10] により, L^2 空間上のエネルギー汎関数の列に対し, 次の Mosco 収束と呼ばれる収束が定義できる.

定義 4.6. $E_n : L^2(X_n, m_n) \to [0, +\infty], E : L^2(Y,m) \to [0, +\infty]$ とする. 次の 2 つの条件を満たすとき, E_n が E に **Mosco 収束する**という.

(1) 任意の $f_n \in L^2(X_n, m_n), f \in L^2(Y,m)$ に対して, f_n が f に L^2 弱収束するならば,

$$\liminf_{n\to\infty} E_n(f_n) \geq E(f) \tag{18}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in L^2(Y,m)$ に対して, ある $f_n \in L^2(X_n, m_n)$ が存在して, f_n が f に L^2 強収束し, かつ,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f_n) = E(f) \tag{19}$$

を満たす.

4.3. 主結果

Gigli-Mondino-Savaré は [4] で, pmG 収束の下, 曲率次元条件の安定性や Cheeger エネルギー汎関数が Mosco 収束することを示した. 漸近的 FC 支配の下でも, pmG 収束と同様の曲率次元条件の安定性やエネルギー汎関数の収束に関する結果が得られた.

定理 4.7 (K. [8])**.** 実数 K に対し $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす点付き測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点付き測度距離空間 Y を漸近的に FC 支配するとする. X_n, Y の Cheeger エネルギー汎関数をそれぞれ $\mathrm{Ch}_n, \mathrm{Ch}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) Y は $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす.

(2) Ch_n は Ch に Mosco 収束する.

特に各 X_n が $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たすとき, Y も $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす.

注意 4.8. 定理 4.7 は, X_n が Y に pmG 収束する場合については Gigli-Mondino-Savaré によって [4] において示されている.

注意 4.9. X が Y を FC 支配しているとき, $\{X_n := X\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y を漸近的に FC 支配する. 定理 4.7 は定理 3.6 の拡張である. 特に, Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束は定理 3.6(2) よりも強い主張である.

Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束から得られる系として, $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間上に定義される Laplacian のスペクトルの収束がある. $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間上の Laplacian は 2 次形式 Ch に対応する自然な自己共役生成作用素として定義される. 定理 4.7 の系として次が得られる.

系 4.10. $K \in \mathbb{R}$ とする. $\{(X_n, d_n, m_n, \bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{RCD}(K,\infty)$ を満たす点付き測度距離空間列, $(Y, d, m, \bar{y})$ を点付き測度距離空間とし, $X_n \searrow Y$ とする. Δ_n, Δ をそれぞれ X_n, Y の Laplacian とし, そのスペクトルを $\sigma(\Delta_n), \sigma(\Delta)$ とする. このとき, 任意の $\lambda \in \sigma(\Delta)$ に対し, ある $\lambda_n \in \sigma(\Delta_n)$ で λ に収束するものが存在する.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405–1490.

[2] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87** (1987), no. 3, 517–547.

[3] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino, and G. Sosa, *On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below*. preprint (2017), arXiv:1704.05428.

[4] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.

[5] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[6] A. Kasue and H. Kumura, *Spectral convergence of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 147–179.

[7] ———, *Spectral convergence of Riemannian manifolds. II*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 1, 71–120.

[8] D. Kazukawa, *A new condition for convergence of energies and stability of Ricci curvature bounds.* in preparation.

[9] K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 4, 599–673.

[10] ———, *Variational convergence over metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 1, 35–75 (electronic).

[11] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[12] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 7, 923–940.

[13] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.

Isoperimetric Rigidity and Distributions of 1-Lipschitz Functions

中島 啓貴　(Hiroki Nakajima)*

概　　要

我々は，isoperimetric profile による以下のような剛性定理を得た．isoperimetric profile による比較条件を満たす測地的な測度距離空間のあるクラスを考えると，そのクラスの中で observable variance が最大になっている空間は，分散を最大にする 1-リプシッツ関数によって分割され，位相的に大きく 3 種類の構造を持つ．この結果は，Cheng の最大直径定理や Cheeger-Gromoll の分離定理の変化形の一つといえる．本研究は，東北大学の塩谷隆氏との共同研究である．

1. 導入

距離空間 (X, d_X) と X 上の測度 μ_X に対して，三つ組 (X, d_X, μ_X) を測度距離空間と呼ぶ．X が測度距離空間であると言ったとき，その距離を d_X，測度を μ_X で表す．測度距離空間上の等周不等式を反映する isoperimetric profile と呼ばれる関数が定まる．

Definition 1.1 (Isoperimetric Profile) 任意のボレル集合 $A \subset X$ に対して、A の**境界測度**を

$$\mu_X^+(A) := \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mu_X(A_\varepsilon) - \mu_X(A)}{\varepsilon}$$

と定める．ここで，A_ε は A の ε-開近傍である．X の isoperimetric profile I_X を実数 $v \in \operatorname{Im} \mu_X = \{\mu_X(A) \mid A \subset X \text{ ボレル集合}\}$ に対して

$$I_X(v) := \inf\{\, \mu_X^+(A) \mid \mu_X(A) = v \,\}$$

と定義する．

X の isoperimetric profile I_X は X のリッチ曲率 Ric_X と関係がある．実際，実数 K に対してある関数 $\tilde{I}_K$ が定まって

$$\mathrm{Ric}_X \geq K \Rightarrow I_X \geq \tilde{I}_K$$

が成り立つ．一方，よく知られた剛性定理として，Cheng の最大直径定理

$$\mathrm{Ric}_X \geq n-1, \operatorname{diam} X = \pi \Rightarrow X = S^n(1) \text{ (等長同型)}$$

や Cheeger-Gromoll の分裂定理

$$\mathrm{Ric}_X \geq 0, \exists \text{a straight line in } X \Rightarrow X = \exists Y \times \mathbb{R} \text{ (等長同型)}$$

がある．ここで，X は $n-1$ 次元完備リーマン多様体である．我々の研究は，これらの剛性定理の仮定 $\mathrm{Ric}_X \geq K$ よりも弱い条件である，ある関数 φ に対して $I_X \geq \varphi$ が成り立つという条件のもと，ある種の最大性を仮定することで空間 X の構造の剛性を得るものである．

2010 Mathematics Subject Classification: 53C23,53C20
キーワード：metric measure space, isoperimetric inequality
* 〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3 東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: hiroki.nakajima.s4@dc.tohoku.ac.jp

2. 設定

我々は，測度距離空間 X において (X, d_X) が完備可分距離空間で X 上の測度 μ_X はボレル確率測度であることを仮定する．また，主定理における空間 X に対する重要な仮定として，本質的連結性がある．

Definition 2.1 (本質的連結性) 測度距離空間 X が**本質的に連結**であるとは任意の閉集合 $A \subset X$ で $0 < \mu_X(A) < 1$ を満たすものに対し，$\mu_X^+(A) > 0$ が成り立つことである．

ここで，主定理における主要な仮定である等周比較条件について述べる．これは，$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 ν に対して，$(\mathbb{R}, |\cdot|, \nu)$ の isoperimetric profile を I_ν としたとき，$I_X \geq I_\nu$ が成り立つことよりも少し強い仮定である．以下，ν を $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度でルベーグ測度に関して絶対連続かつサポートが連結であると仮定する．

Definition 2.2 (等周比較条件 IC(ν)) X が**等周比較条件** $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たすとは

$$I_X \circ V \geq V' \quad \text{a.e. on } V^{-1}(\operatorname{Im} \mu_X)$$

が成り立つことで定義する．ここで $V(t) := \nu((-\infty, t])$ は ν の分布関数である．

また，主定理において，空間の大きさはオブザーバブル分散という不変量を用いて測る．いま，関数 $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を狭義単調増加な連続関数とする．可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の λ-分散を

$$\mathrm{Var}_\lambda(f) := \int_{X \times X} \lambda(|f(x) - f(x')|) d(\mu_X \otimes \mu_X)(x, x') \leq \infty$$

と定義する．また，$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 η の λ-分散を

$$\mathrm{Var}_\lambda(\eta) := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \lambda(|x - x'|) d(\eta \otimes \eta)(x, x') \leq \infty$$

と定める．X のオブザーバブル λ-分散を

$$\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) := \sup\{ \mathrm{Var}_\lambda(f) \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ 1-リプシッツ} \}$$

と定義する．

3. 主定理

Theorem 3.1 X を本質的に連結な測地的測度距離空間とし，$\mathrm{Var}_\lambda(\nu) < \infty$ と仮定する．さらに，X は $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たすと仮定する．このとき，$\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) \leq \mathrm{Var}_\lambda(\nu)$ が成立する．等号が成立するとき，X は以下のいずれかを満たす．

(1) X はある二点を結ぶ最短線の族で覆われる．

(2) X はある一点から出発する半直線の族で覆われる．

(3) X はある直線の族で覆われて，それらの直線は分岐点のみで交わる．

主定理 (定理 3.1) の証明においては以下のリプシッツ順序が重要な役割を果たす．

Definition 3.2 (リプシッツ順序) 二つの $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 η, η' に対して η' が η を**支配する**，記号で $\eta \prec \eta'$ とは，ある 1-リプシッツ関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して $h_*\eta' = \eta$ を満たすことである．ここで $h_*\eta'$ は h による η' の押し出し測度である．

主定理は以下の二つの定理から得られる．

Theorem 3.3 X を本質的に連結で $\mathrm{IC}(\nu)$ を満たす測度距離空間とする．このとき，任意の 1-リプシッツ関数 φ に対して $\varphi_*\mu_X \prec \nu$ が成り立つ．特に $\mathrm{ObsVar}_\lambda(X) \leq \mathrm{Var}_\lambda(\nu)$ が成り立つ．

定理 3.3 については弱い形の主張が M. Gromov によって証明なしに述べられていた [2]．

Theorem 3.4 X を測地的な測度距離空間とする．もし，1-リプシッツ関数の分布全体の集合 $\{\, \varphi_*\mu_X \mid \varphi : X \to \mathbb{R} \text{ 1-リプシッツ} \,\}$ がリプシッツ順序に関して最大元を持つならば，X は定理 3.1 の (1) から (3) のいずれかを満たす．

参考文献

[1] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.

[2] M. Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 1, 178–215.

[3] H. Nakajima and T. Shioya, *Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions*, in preparation.

境界付き有向曲面のトレリ群の写像類群内での歪み度について

久野恵理香 (Erika KUNO)　(埼玉大学)*

1. 幾何学的群論の導入

本稿では，群とは特に何も断らない限り，有限生成群のみを扱うこととする．群からグラフという幾何学的対象を構成し，群に幾何学的な情報を与えることによって群の性質を解明するものが，幾何学的群論である．まず，群からグラフを構成する方法から説明する．

1.1. ケーリーグラフ

G を有限生成群とする．S を G の有限生成系の1つとする．次の方法でグラフ $\Gamma(G,S)$ を構成する．

- 頂点集合 $V(\Gamma(G,S)) = G$
- 辺集合 $E(\Gamma(G,S)) = \{(g, ga) | g \in G, a \in S\}$

このグラフ $\Gamma(G,S)$ を**ケーリーグラフ**と呼ぶ．

例 1.1. $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$

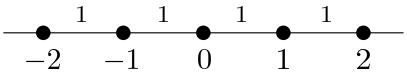


図 1: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$ のケーリーグラフ.

例 1.2. $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1, 2\}$

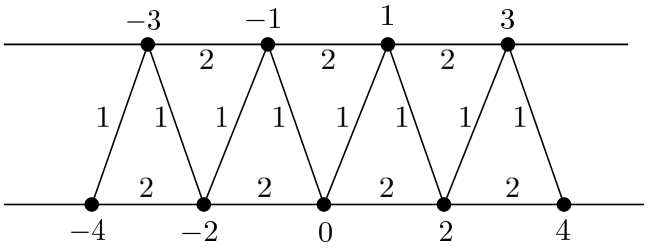


図 2: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1, 2\}$ のケーリーグラフ.

本研究は大森源城氏との共同研究である．
キーワード：写像類群, トレリ群, subgroup distortion
* 〒 338-8570　埼玉県さいたま市桜区下大久保 255　埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報部門数理領域数学コース

1.2. 幾何学的群論における問題

(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする．

定義 1.3. φ を X から Y への写像とする. 写像 φ が**擬等長的埋め込み**であるとは，ある定数 $\lambda \geq 1$ が存在して, 全ての $x, x' \in X$ に対して, 次の不等式が成り立つことである: $\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - \lambda \leq d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \lambda$. 写像 φ が**擬稠密**であるとは，ある定数 $\lambda \geq 0$ が存在して, 各 $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $d_Y(\varphi(x), y) \leq \lambda$ が成り立つことである. 写像 φ が**擬等長写像**であるとは，それが擬等長的埋め込みかつ擬稠密であることである．そして X は Y と擬等長的であるといい，$X \sim Y$ とかく．

定義 1.4. 2つの群 G と G' が**擬等長的**である $(G \sim G')$ とは，それらのケーリーグラフ $\Gamma(G, S)$ と $\Gamma(G', S')$ が擬等長的であることである．但し, S, S' はそれぞれ G, G' の生成系の1つである．

定理 1.5. G を有限生成群とし，S と S' を G の異なる有限生成系とする．このとき，$\Gamma(G, S)$ と $\Gamma(G, S')$ は擬等長的である．

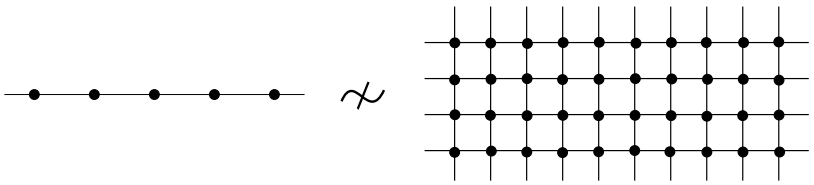
幾何学的群論における問題の1つとして，以下がある．

問題 1.6. 群を擬等長により分類したい．

例 1.7. $G = \mathbb{Z}$ と $G' = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ は擬等長的である．



例 1.8. $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は擬等長的でない．



問題 1.6 を解くための足がかりの1つとして，次の章において紹介する，有限生成群とその有限生成部分群の間の “**歪み度**” という概念がある．

2. 歪み度とは何か

2.1. 定義

G を有限生成群とし，その語距離を $\| \cdot \|_G$ とする．K を G の任意の有限生成部分群とする．このとき，K は自身の語距離 $\| \cdot \|_K$ を持つ．語距離 $\| \cdot \|_K$ を $\| \cdot \|_G$ と比較することは，幾何学的群論において基本的でかつ重要な問題である．一般に，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $k \in K$ に対して $\| k \|_G \leq C \| h \|_K$ が成り立つ．そこで問題となるのは，この逆の不等式がいつ成り立つのかということである．すなわち，$\| k \|_K \leq \delta(\| k \|_G)$ を満たす最小の関数 $\delta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は何であるか，という問題である．ここで，関数 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が，関数 $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ より小さいとは，ある定数 $N \in \mathbb{N}$ が存

在して，全ての $n \geq N$ に対して，$f(n) \leq g(n)$ が成り立つことである．それを定式化したものが歪み度である．ここで歪み度の定義を，Hamanstät-Hensel [3] に従って述べる．

定義 2.1. G を有限生成群とする．K を G の任意の有限生成部分群とする．このとき，K の G における **歪み度**が δ であるとは，以下の2つの条件を満たすことである．

(1) ある定数 $C, C' > 0$ が存在して任意の $k \in K$ に対して $\| k \|_K \leq C\delta(\| k \|_G) + C'$ が成り立つ．これを，K の G における歪み度は，**高々** δ であると言う．

(2) ある K の元の列 $\{k_i\}$ $(k_i \in K)$ が存在して，k_i の語距離は，G においては線形に伸び，K においては δ に伸びる．これを，K の G における歪み度は，**少なくとも** δ であると言う．

また，K の G における歪み度が線形であるとき，K は G において**歪んでいない**という．

注意 2.2. 歪み度は通常，線形関数の差を除いて研究される．よって δ の growth type は有限生成群の生成系の取り方に依存しない．

2.2. 先行研究について

ここで，本研究に関わる先行研究について紹介する．まず，必要な定義から説明する．本稿では，$S = S_{g,b}$ を種数 g, 境界成分数 b の連結コンパクト向き付け可能曲面とする．

定義 2.3. (1) $S_{g,b}$ の**写像類群** $\mathcal{M}_{g,b}$ とは，$S_{g,b}$ 上の向きを保ち，境界成分上恒等写像である同相写像のアイソトピー類からなる群である．

(2) $S_{g,b}$ $(b = 0, 1)$ の**トレリ群** $\mathcal{I}_{g,b}$ とは，準同型 $\Phi_0 \colon \mathcal{M}_{g,b} \to \mathrm{Aut}(H_1(S_{g,b}; \mathbb{Z}))$ の核である．

(3) $S_{g,b}$ $(b \geq 2)$ の**トレリ群** $\mathcal{I}_{g,b}$ とは，$\mathcal{I}_{g,b} = i_*^{-1}(\mathcal{I}_{g,0})$ である, ただし $i_* \colon \mathcal{M}_{g,b} \to \mathcal{M}_{g,0}$ は自然な包含写像 $i \colon S_{g,b} \to S_{g,0}$ から誘導される全射準同型である．

(4) S の**レベル** d **写像類群** $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ $(b = 0, 1)$ とは，準同型 $\Phi_d \colon \mathscr{M}_{g,b} \to \mathrm{Aut}(H_1(S_{g,b}; \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}))$ の核である．

注意 2.4. 境界成分数が 2 以上の曲面に対するトレリ群の定義はいくつかある (Putman [4] を見よ) が，定義 2.3 におけるトレリ群は有限生成である．

2011 年に，Broaddus-Farb-Putman [1] が，向き付け可能曲面で境界成分数が高々1 であるものに対して，そのトレリ群の写像類群における歪み度を計算した:

定理 2.5. ([1]) 種数 $g \geq 3$，境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，少なくとも指数的であり，高々二重指数的である．

そして，2017 年の Cohen [2] の以下の結果により，境界成分数が高々1 である向き付け可能曲面のトレリ群の，その写像類群における歪み度が完全に決定された．

定理 2.6. ([2]) 種数 $g \geq 3$，境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，高々指数的である．

3. 主結果

この章では，自身の研究結果について報告する．Broaddus-Farb-Putman [1] と Cohen [2] により，向き付け可能曲面で境界成分数が高々1であるものに対しては，そのトレリ群の写像類群における歪み度は計算された．しかし，境界成分数が2以上の向き付け可能曲面に対しては，それが未解決であった．そこでこの問題に取り組み，私たちは以下のような解答を得た．

定理 3.1. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b \geq 2$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，少なくとも指数的である．

また，境界成分数が高々1の向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群のレベル d 写像類群における歪み度について，以下の解答を与えた．

定理 3.2. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b = 0, 1$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ における歪み度は，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度と一致する．よって，$\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}[d]$ における歪み度は指数的である．

定理 3.1 は，Broaddus-Farb-Putman [1] の，トレリ群の写像類群における歪み度の，下からの評価を求める議論を追うことで証明できる．定理 3.2 は，$\mathscr{M}_{g,b}[d]$ が $\mathscr{M}_{g,b}$ と擬等長的であることを主に使い，証明できる．尚，定理 3.1 と定理 3.2 は，ともに大森源城氏との共同研究である．

今後は，以下の問題を解決することを目標とする．

問題 3.3. 種数 $g \geq 3$, 境界成分数 $b \geq 2$ なる向き付け可能曲面に対して，そのトレリ群 $\mathscr{I}_{g,b}$ の $\mathscr{M}_{g,b}$ における歪み度は，高々指数的であるか?

謝辞

研究集会「第14回数学総合若手研究集会」での講演の機会を与えてくださった世話人の方々に心より感謝申し上げます. また, 日頃から丁寧にご指導をしてくださる東京工業大学の遠藤久顕先生には大変感謝しております。

参考文献

[1] N. Broaddus, B Farb, and A. Putman, *Irreducible Sp-representations and subgroup distortion in the mapping class group*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 3, 537–556.

[2] D. B. Cohen, *The Dehn function of* $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{Z})$, arXiv:1404.7412.

[3] U. Hamenstädt and S. Hensel, *The geometry of the handlebody groups I: Distortion*, J. Topol. Anal. **4** (2012), no. 1, 71–97.

[4] A. Putman, *Cutting and pasting in the Torelli group*, Geom. Topol. **11** (2007), 829–865.

4 次元双曲理想コクセター多面体の構成と増大度

雪田 友成 (Yukita Tomoshige)
(早稲田大学教育学研究科)

1 序論

$\mathbb{H}^d$ を d 次元双曲空間の上半空間モデルとして $\overline{\mathbb{H}}^d$ を $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ における閉包とする. 体積有限な凸多面体 $P \subset \overline{\mathbb{H}}^d$ が**双曲コクセター多面体**であるとは, 面角が 2 以上の自然数 k を用いて $\frac{\pi}{k}$ と表されることである. 双曲コクセター多面体 P のファセットに関する鏡映の全体 S により生成される離散群 Γ を**双曲コクセター群**といい, (Γ, S) を P に関するコクセター系という. このとき P は Γ の基本領域である. P がコンパクト (または非コンパクト) のとき, 対応する双曲コクセター群 Γ はココンパクト (または余体積有限) と言われる. このとき (Γ, S) の S に関する語の長さの球面的増大度を考える. すなわち, a_l を S に関する語の長さが l である Γ の元の個数として, $\tau_\Gamma := \limsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{a_l}$ が (Γ, S) の球面的増大度であり, これをコクセター系 (Γ, S) の増大度という. Cauchy-Hadamard の定理から, 形式的ベキ級数 $\sum_{l=0}^{\infty} a_l t^l$ の収束半径を R とすると, $\tau = \frac{1}{R}$ となる. このベキ級数をコクセター系 (Γ, S) の**増大度級数**という. 双曲コクセター多面体 P の増大度と増大度級数とは P に関するコクセター系の増大度と増大度級数のことである. de la Harpe の結果により, 双曲コクセター多面体の増大度は 1 より真に大きい実代数的整数となることが知られている [5]. そこで, 次の問題を考える.

双曲コクセター群の増大度はどのような実代数的整数となるか？

本稿では, 2 または 3 次元双曲コクセター群についての既存の結果および筆者が得た 4 次元双曲コクセター群の増大度の計算結果について説明する.

2 準備

定義 1. (コクセター系, コクセターグラフ, 増大度)

(i) コクセター系 (Γ, S) とは群 Γ と有限生成系 $S \subset \Gamma$ ($S = \{s_i\}_{i=1}^N$) で関係式が $(s_i s_j)^{m_{ij}}$ であるものとの組である. ここで, $m_{ii} = 1$ であり, $i \neq j$ について $m_{ij} \geq 2$ または $m_{ij} = \infty$ である. 但し $m_{ij} = \infty$ とは $s_i s_j$ の位数が有限でないことを表すものとする. このとき群 Γ をコクセター群という. $I \subset S$ に対して, Γ_I を $\{s_i\}_{i\in I}$ により生成される Γ の部分群とする. Γ_I は I により生成される Γ のコクセター部分群という.

(ii) 次のように構成されるグラフを (Γ, S) のコクセターグラフという:
頂点集合は S である. $m_{ij} \geq 3$ なる $s_i, s_j \in S$ に対して, 対応する頂点を辺で結ぶ. $m_{ij} \geq 4$ の時は辺に m_{ij} とラベルを付けることとする. コクセター系 (Γ, S) について, 対応するコクセターグラフが連結であるとき既約であるという.

(iii) コクセター系 (Γ, S) の増大度級数 $f_S(t)$ とは形式的ベキ級数 $\sum_{l=0}^{\infty} a_l t^l$ である, ここで a_l は S に関する語の長さが l である Γ の元の個数である. $\tau = \limsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{a_l}$ をコクセター系 (Γ, S) の

増大度という.

定義 2. (双曲多面体)
$P \subset \overline{\mathbb{H}}^d$ が双曲多面体であるとは, 有限個の閉半空間の共通部分として表されることである. すなわち, H_i^- を $\mathbb{H}^d$ 内の超平面 H_i により囲まれる閉半空間とすれば $P = \cap H_i^-$.

双曲多面体 P を囲む超平面 H_i, H_j が $\mathbb{H}^d$ において $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ であるとき, 次のようにして H_i と H_j のなす面角を定める: 点 $x \in H_i \cap H_j$ を一つ取り, x を始点とする P に対する外法線ベクトルを u_i, u_j とする. このとき, H_i と H_j のなす面角 $\theta \in [0, \pi)$ とは $\cos\theta = -(u_i, u_j)$ を満たすものである. ここで $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^d$ におけるユークリッド内積である.
また H_i, H_j が理想境界 $\partial\mathbb{H}^d$ でのみ交点を持つときは, H_i, H_j のなす面角は 0 とする.

定義 3. (双曲コクセター多面体)
体積有限な双曲多面体 $P \subset \mathbb{H}^d$ が双曲コクセター多面体であるとは, 面角が 2 以上の自然数 k または $k = \infty$ を用いて $\frac{\pi}{k}$ と表されることである. ここで $k = \infty$ とは対応する二つの超平面が理想境界 $\partial\mathbb{H}^d$ でのみ交点を持つことである.

双曲多面体 P が体積有限となる必要十分条件は, P が $\overline{\mathbb{H}}^d$ の有限個の点の凸包であることを注意しておく. 双曲コクセター多面体 $P \subset \mathbb{H}^d$ のファセットを定める超平面に関する鏡映の全体 S は離散群 Γ を生成する. このとき (Γ, S) はコクセター系となり, これを P に関する双曲コクセター系といい, Γ を d 次元双曲コクセター群という. さらに, P がコンパクト (または非コンパクト) のとき, 対応する双曲コクセター群 Γ はココンパクト (または余体積有限) と言われる.

定理 1. (Solomon の公式)[12]
既約有限コクセター系 (Γ, S) の増大度級数は $f_S(t)$ は $f_S(t) = [m_1 + 1, m_2 + 1, \cdots, m_p + 1]$ と表される. ここで $[n] = 1 + t + \cdots + t^{n-1}, [m, n] = [m][n]$ であり, $\{m_1, m_2, \cdots, m_p\}$ はコクセター系 (Γ, S) の指数と呼ばれるものである.

表 1 は既約有限コクセター系の指数を表したものである (詳細は [6] を参照).

表 1　指数

既約有限コクセター群	指数	増大度級数
A_n	$1, 2, \cdots, n$	$[2, 3, \cdots, n+1]$
B_n	$1, 3, \cdots, 2n-1$	$[2, 4, \cdots, 2n]$
D_n	$1, 3, \cdots, 2n-3, n-1$	$[2, 4, \cdots, 2n-2][n]$
E_6	1,4,5,7,8,11	[2,5,6,8,9,12]
E_7	1,5,7,9,11,13,17	[2,6,8,10,12,14,18]
E_8	1,7,11,13,17,19,23,29	[2,8,12,14,18,20,24,30]
F_4	1,5,7,11	[2,6,8,12]
H_3	1,5,9	[2,6,10]
H_4	1,11,19,29	[2,12,20,30]
$I_2(m)$	1,m-1	[2,m]

定理 2. (Steinberg の公式)[13]
(Γ, S) を無限コクセター系とする．Γ_T を $T \subset S$ により生成される部分コクセター群として，$f_T(t)$ をコクセター系 (Γ_T, T) の増大度級数とする．$\mathcal{F} = \{T \subset S \ ; \ \Gamma_T$ は有限コクセター群 $\}$ とする．このとき

$$\frac{1}{f_S(t^{-1})} = \sum_{T \in \mathcal{F}} \frac{(-1)^{|T|}}{f_T(t)}.$$

Solomon の公式と Steinberg の公式により，(Γ, S) の増大度級数は整係数有理関数 $\frac{p(t)}{q(t)} (p, q \in \mathbb{Z}[t])$ として表される．この有理関数 $\frac{p(t)}{q(t)}$ は (Γ, S) の増大度関数と呼ばれる．増大度級数 $f_S(t)$ の収束半径 R は $q(t)$ の絶対値最小である正の実根に等しい．このことから，双曲コクセター群の増大度の数論的性質は増大度関数の分母多項式の根の分布を調べることでわかる．

3 既存の結果

ここでは，双曲コクセター群の増大度に関して知られている結果を紹介する．

3.1 2 次元双曲コクセター群について

定理 3. (Cannon and Wagreich [2]) コンパクト双曲コクセター三角形の増大度は Salem 数である．ここで 1 より大きな実代数的整数 τ が Salem 数であるとは，τ^{-1} が τ の共役根であり，τ 以外の共役根が単位円周上に存在することである (図 1 参照)．

定理 4. (Floyd and Plotnick [4], Parry [11]) 任意のコンパクト双曲コクセター多角形の増大度は Salem 数である．

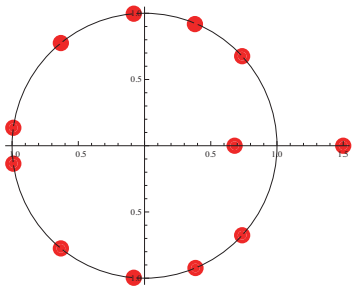


図 1　Salem 数

定理 5. (Floyd [3]) 任意の非コンパクト双曲コクセター多角形の増大度は Pisot-Vijayaraghavan 数である．ここで 1 より大きな実代数的整数 τ が Pisot-Vijayaraghavan 数であるとは，τ 以外の共役根が単位開円盤内に存在することである (図 2 参照)．

3.2 3 次元双曲コクセター群について

定理 6. (Parry [11]) 任意のコンパクト双曲 3 次元コクセター多面体の増大度は Salem 数である．

定理 7. (Komori and Umemoto [9]) 非コンパクト双曲コクセター四面体の増大度は Perron 数であ

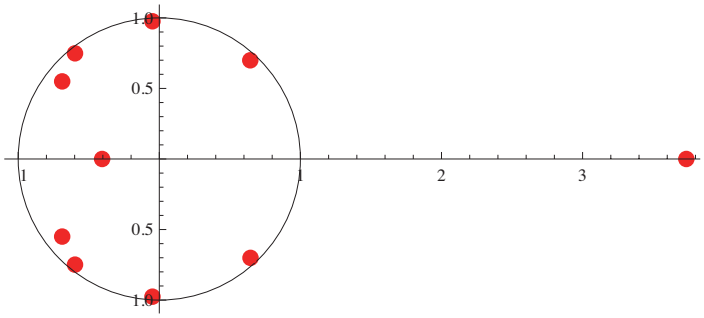


図 2　Pisot 数

る．ここで 1 より真に大きな実代数的整数 τ が Perron 数であるとは, τ 以外の共役根の絶対値が τ より真に小さいことである (図 3 参照).

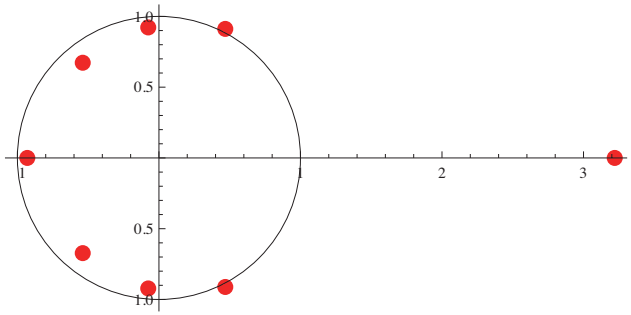


図 3　Perron 数

定理 8. (Nonaka and Kellerhals [7], Komori and Yukita [10]) 任意の 3 次元理想双曲コクセター多面体の増大度は Perron 数である．ここで理想双曲コクセター多面体とは, 全ての頂点が理想境界 $\partial\mathbb{H}^3$ 上に存在するものである．

定理 9. (Yukita [16], [17]) 任意の非コンパクト 3 次元双曲コクセター多面体の増大度は Perron 数である．

ここまでの結果をまとめたものが表 2 である．

表 2　増大度の既存の結果

次元	非コンパクト	コンパクト
2	Pisot	Salem
3	Perron	

4　主結果

筆者が 4 次元双曲コクセター群について得た結果を紹介する．

定理 10. (Tumarkin [14]) 次のコクセターグラフを持つ 4 次元理想双曲コクセター多面体が存在する. この理想双曲コクセター多面体は底面を立方体とするピラミッドの組み合わせ構造を持つ (図 4 参照).

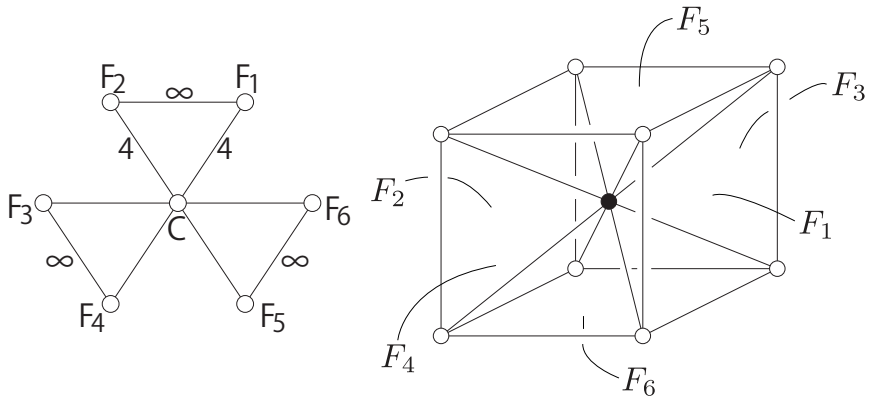


図 4　コクセターグラフと対応する多面体の Schlegel 図式

定理 11. (**主結果**) 上のコクセターグラフを持つ 4 次元理想双曲コクセター多面体を F_1, F_2 に対応するファセットで貼り合わせることにより 4 次元双曲理想コクセター多面体の無限族を構成できる. さらに, この貼り合わせにより得られる多面体の増大度は Perron 数となる.

ここで次のことに注意したい:

- コンパクトな 4 次元双曲コクセター多面体の族は T.Zerht and C.Zehrt [18] の Coxeter garland や Umemoto [15] の Coxeter domino など知られている例が存在する. 一方で非コンパクト 4 次元双曲理想コクセター多面体の無限族の例は今回得られたものが最初の例である.
- 4 次元双曲コクセター多面体の増大度について, コンパクトな場合に Kellehals and Perren [8] による数値計算の結果, Umemoto [15] による Coxeter domino の内のある部分族の増大度が 2-Salem 数となることなどが知られている. 非コンパクト 4 次元の場合における無限族の増大度の数論的性質についての結果もまた今回得られたものが最初の結果である.
- 4 次元以上の双曲コクセター群の増大度の計算において, 難しい点は 2 点存在している. 一つは, 2 または 3 次元の場合と異なり双曲空間内にコクセター多面体として実現可能な多面体の組み合わせ構造が決定されていない点である (例えば, 3 次元の場合には Andreev の定理 [1] により組み合わせ構造から実現できる面角を決定できる). 二つ目は増大度関数の分母多項式の複雑さである, 特に次数が高くなることが計算を難しくしている.

謝辞

研究集会「第 14 回数学総合若手研究集会」において講演の機会をくださった世話人の方々に心より感謝申し上げます. 本研究は科研費 (課題番号:17J05206) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] E. M. Andreev, On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskij space, Mat. Sb., Nov. Ser. **83** (1970), 256-260. English transl.: Math. USSR, Sb. **12** (1971), 255-259.

[2] J. W. Cannon and P. Wagreich, Growth functions of surface groups, Math. Ann. **293** (1992), 239-257.

[3] W. J. Floyd, Growth of planer Coxeter groups, P.V. numbers, and Salem numbers, Math. Ann. **293** (1992), 475-483.

[4] W. J. Floyd and S. P. Plotnick, Symmetries of Planar growth functions, Invent Math **93** (1988), 501-543.

[5] P. de la Harpe, Groupes de Coxeter infinis non affines, Exposition. Math **5** (1987), 91–96.

[6] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[7] J. Nonaka and R.Kellerhals, The growth rates of ideal Coxeter polyhedra in hyperbolic 3-space, To appear in Tokyo Journal of Mathematics.

[8] R. Kellerhals and G. Perren, On the growth of cocompact hyperbolic Coxeter groups, European J. Combin. **32** (2011), no. 8, 1299-1316.

[9] Y. Komori and Y. Umemoto, On the growth of hyperbolic 3-dimensional generalized simplex reflection groups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume **88**, Number 4 (2012), 62-65.

[10] Y. Komori and T. Yukita, On the growth rate of ideal Coxeter groups in hyperbolic 3-space, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume **91**, Number 10 (2015), 155–159.

[11] W. Parry, Growth series of Coxeter groups and Salem numbers, J. Algebra **154** (1993), 406-415.

[12] L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups, J. Algebra **3**(1966), 376–393.

[13] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[14] P.V.Tumarkin, Hyperbolic Coxeter n-polytopes with $n+3$ facets, Trans. Moscow. Math. Soc. (2004), 235-250.

[15] Y.Umemoto, The growth function of Coxeter dominoes and 2-salem numbers, Algebr.Geom.Topol. **14** (2014), no.5, 2721–2746.

[16] T.Yukita, On the growth rates of cofinite 3-dimensional hyperbolic Coxeter groups whose dihedral angles are of the form $\frac{\pi}{m}$ for $m = 2, 3, 4, 5, 6$, To appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

[17] T.Yukita, Growth rates of 3-dimensional hyperbolic Coxeter groups are Perron numbers, To appear in Canadian Mathematical Bulletin.

[18] T.Zehrt and C.Zehrt, The growth function of Coxeter garlands in $\mathbb{H}^4$, Beitr. Algebra Geom. **53** (2012), 451-460.

高次元複素トーラス上の射影的平坦束の成す完全三角系列の幾何構造

千葉大学大学院理学研究科　小林和志 *　(Kazushi Kobayashi)

1　導入

1.1　背景

本稿では, 筆者によって得られたトーラス上のホモロジー的ミラー対称性に関連したいくつかの研究結果について紹介する. ミラー対称性とは, 本来はカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ に対し, M のシンプレクティック構造にのみ依存して定まる量と $\check{M}$ の複素構造にのみ依存して定まる量が一致するという現象を指すが, ホモロジー的ミラー対称性はこれの圏論的定式化として提案された予想であり, その具体的な主張は次のようになる [8].

予想 1.1. (Kontsevich). 任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し, M 上で定義される深谷圏 $Fuk(M)$ から得られる三角圏 $Tr(Fuk(M))$ と $\check{M}$ 上で定義される連接層の成す有界導来圏 $D^b(Coh(\check{M}))$ が三角圏として圏同値となる. ここで, $Tr(\mathscr{C})$ は A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ から得られる三角圏を表す.

この予想 1.1 に関して, いくつか注意事項を記しておく. まず, 深谷圏 [2] とは M 内のラグランジュ部分多様体とその上の局所系の組の成す A_∞ 圏であり, また, $D^b(Coh(\check{M}))$ の替わりに, $\check{M}$ 上の正則ベクトル束の成す DG 圏 (高次の積が 0 となるような A_∞ 圏)$DG_{\check{M}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{M}})$ であって, $D^b(Coh(\check{M})) \cong Tr(DG_{\check{M}})$ となるようなものを考える場合もある. 特に, A_∞ 圏としての圏同値 $Fuk(M) \cong DG_{\check{M}}$ が言えれば, 自動的に $Tr(Fuk(M)) \cong Tr(DG_{\check{M}})$, すなわちホモロジー的ミラー対称性が成り立つことが知られている.

1.2　問題意識

以下, 実 $2n$ 次元シンプレクティックトーラス T^{2n} と n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ をミラー対としてとって考える. このとき, 大雑把に言うと, T^{2n} 内のアファインラグランジュ部分多様体 L とその上の局所系 $\mathcal{L} \to L$ の組に対応して $\check{T}^{2n}$ 上の正則ベクトル束 $E(L, \mathcal{L})$ が 1 つ定まる [1]. 一方, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関してはその保型因子についての (定数行列に関する任意性を除いた) 分類結果が既に存在し, さらに $E(L, \mathcal{L})$ はその定義から射影的平坦束となることは明らかである. しかしながら, $E(L, \mathcal{L})$ がその分類結果においてどのクラスに属する射影的平坦束で

*E-mail : afka9031@chiba-u.jp

[1]SYZ 構成 [10] に基づいて考える場合, 特殊ラグランジュトーラスファイバーとその上の局所系の組が摩天楼層と呼ばれる連接層に対応する. しかしながら本稿では正則ベクトル束の成す DG 圏を用いて議論を進めるので, このあたりの話はあまり気にしなくてもよい.

あるのかを考えるということは非自明な問題であるから, 本稿ではまず, この $E(L,\mathcal{L})$ がどのようなクラスに属する射影的平坦束であるのかということを明らかにする.

さらに, この $E(L,\mathcal{L})$ の成す DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において, 射 $\psi : E(L_b,\mathcal{L}_b) \to TE(L_a,\mathcal{L}_a)$($T$ は $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ におけるシフト関手を表す) の写像錐 $C(\psi)$ に付随する完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E(L_a,\mathcal{L}_a) \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E(L_b,\mathcal{L}_b) \xrightarrow{\psi} TE(L_a,\mathcal{L}_a) \longrightarrow \cdots \quad (1)$$

を考える. このとき, 対応するシンプレクティック幾何学側の観点から見た (1) に対する解釈として, $C(\psi)$ が射影的平坦束となる場合, すなわち, (1) が 3 つの射影的平坦束とその次数シフトから成る完全三角系列となる場合, $\mathrm{codim}(L_a \cap L_b) \leq 1$ となることを証明する.

2 準備

本章では, 第 3 章において必要となる概念についていくつか定義を与える.

まず, A_∞ 圏, DG 圏の定義を復習しておく.

定義 2.1. A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ とは, 対象の集合 $Ob(\mathscr{C}) = \{X, Y, \cdots\}$ と, 任意の 2 つの対象 X, $Y \in Ob(\mathscr{C})$ に対する $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間 $\mathscr{C}(X,Y) = \oplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathscr{C}^r(X,Y)$ に加え, 以下の A_∞ 関係式を満たすような次数 $(2-n)$ の多重線形写像 $m_n : \mathscr{C}(X_1,X_2) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(X_n,X_{n+1}) \to \mathscr{C}(X_1,X_{n+1})$ の集まり $\{m_n\}_{n\geq 1}$ が与えられているようなもののことをいう. ただし, $|a|$ は $a \in \mathscr{C}(X,Y)$ の次数を表す.

$$0 = \sum_{k+l=n+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{(j+1)(l+1)+l(|a_1|+\cdots+|a_j|)} m_k(a_1,\cdots,a_j,m_l(a_{j+1},\cdots,a_{j+l}),a_{j+l+1},\cdots,a_n).$$

また, A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ であって, 高次の積が 0 となる, すなわち $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ となるようなものを DG 圏という.

特に, A_∞ 関係式を $n = 1, 2$ の場合に具体的に書き下してみると次のようになることが分かる.

$$n = 1 \ : \ m_1(m_1(a_1)) = 0.$$
$$n = 2 \ : \ m_1(m_2(a_1,a_2)) = m_2(m_1(a_1),a_2) + (-1)^{|a_1|}m_2(a_1,m_1(a_2)).$$

これらはすなわち, $(\mathscr{C}(X,Y), m_1)$ が複体を成し, さらに微分 m_1 が積 m_2 に関してライプニッツ則を満たすということを主張している. また, A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ が与えられた場合, $\mathscr{C}$ の「片側捻り複体」を対象とする A_∞ 圏を構成し, それのゼロ次のコホモロジーをとることによってある三角圏を定義することができるということが一般的に知られているが, その三角圏が本稿の第 1 章で述べた $Tr(\mathscr{C})$ である [1], [8].

次に, 射影的平坦束の定義とその基本的な性質を述べる ([7], [9], [11] なども参照せよ).

定義 2.2. X をコンパクトなケーラー多様体, E を X 上で定義されている階数 r の正則ベクトル束, $P(E)$ を E に付随して定まる主 $GL(r;\mathbb{C})$ 束, $\hat{P}(E)$ を $\hat{P}(E) := P(E)/\mathbb{C}^\times \cdot I_r$ によって定まる主 $PGL(r;\mathbb{C})$ 束とする. ただし, I_r は r 次単位行列を表す. このとき, E が射影的平坦束であるとは, $\hat{P}(E)$ が平坦であることをいう.

Lie 群 $GL(r;\mathbb{C})$, $PGL(r;\mathbb{C})$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{gl}(r;\mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(r;\mathbb{C})$ と書くことにすると, 自然な射影 $\pi : GL(r;\mathbb{C}) \to PGL(r;\mathbb{C})$ は Lie 環の間の準同型写像 $\pi' : \mathfrak{gl}(r;\mathbb{C}) \to \mathfrak{pgl}(r;\mathbb{C})$ を誘導する. このとき, 正則ベクトル束 E の接続から定まる曲率形式を Ω_E とすると, $\hat{P}(E)$ の曲率形式は $\pi'(\Omega_E)$ と表される. したがって, E が射影的平坦束である場合には $\pi'(\Omega_E) = 0$ となるので, このことから直ちに以下の命題を得る.

命題 2.3. Ω_E をコンパクトなケーラー多様体上で定義された階数 r の正則ベクトル束 E の接続から定まる曲率形式とする. このとき, E が射影的平坦束となることと, ある複素 2 次微分形式 α が存在して $\Omega_E = \alpha \cdot I_r$ となることは同値である.

特に, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関しては比較的よく研究されているが, 以下, 第 3 章において必要となる複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関する基礎事項をまとめておく.

定義 2.4. Γ を $\mathbb{C}^n$ 内の格子, $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Gamma$ を被覆射影, $E \to \mathbb{C}^n/\Gamma$ を階数 r の正則ベクトル束とする. このとき, $\tilde{E} := p^*E \to \mathbb{C}^n$ は階数 r の自明な正則ベクトル束となる ($\tilde{E} \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$) ことに注意する. このような状況下において, 次の図式を可換にするような正則写像 $j : \Gamma \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ を E の保型因子という. ただし, $z \in \mathbb{C}^n$, $\gamma \in \Gamma$ であるとする.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E}_{z+\gamma} \cong \mathbb{C}^r & & \xleftarrow{\quad j(\gamma,z) \quad} & & \tilde{E}_z \cong \mathbb{C}^r \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & E_{p(z)} & & \end{array} .$$

より具体的に, 複素トーラス上で定義される階数 r の射影的平坦束の保型因子 $j : \Gamma \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ は,

$$\mathrm{Im}R(\gamma,\gamma') \in \pi\mathbb{Z},\ \gamma,\gamma' \in \Gamma$$

を満たすようなエルミート形式 $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ と,

$$U(\gamma+\gamma') = U(\gamma)U(\gamma')\exp\left\{\frac{\mathbf{i}}{r}\mathrm{Im}R(\gamma',\gamma)\right\},\ \gamma,\gamma' \in \Gamma$$

を満たすような写像 $U : \Gamma \to U(r)$ を用いて

$$j(\gamma,z) = U(\gamma)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma) + \frac{1}{2r}R(\gamma,\gamma)\right\},\ (\gamma,z) \in \Gamma \times \mathbb{C}^n$$

と表されることが知られている. ここで, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ である.

3 主結果

本章の目的は, 第 2 章において準備した基礎事項をもとにして, 筆者によって得られた結果である定理 3.3, 定理 3.4 を紹介することである [5]. まず, 第 3.1 節において考察の舞台となるミラー対やそれらの上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に用いる正則ベクトル束などについて説明し, 第 3.2 節において筆者によって得られた結果やそれらの証明の概略を述べる.

3.1 ミラー対 $(T^{2n}, \check{T}^{2n})$, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の構成

まず, 以下のようにして n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ を定義する. 座標 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)^t \in \mathbb{R}^{2n}$ を考え, $x_i \sim x_i + 2\pi$, $y_i \sim y_i + 2\pi$ $(i = 1, \cdots, n)$ のように同一視することによって得られる実 $2n$ 次元トーラス $\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n}$ の座標も同様にして $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)^t$ と書く. ただし, 簡単のため $x := (x_1, \cdots, x_n)^t$, $y := (y_1, \cdots, y_n)^t$ と略記する場合もある. また, 後の議論で必要となるため, この実 $2n$ 次元トーラス $\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n}$ の開被覆 $\{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\}_{l_j, m_k = 1,2,3}$ $(j, k = 1, \cdots, n)$ を

$$O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^{2n} \mid \frac{2}{3}\pi(l_j - 1) - \varepsilon < x_j < \frac{2}{3}\pi l_j + \varepsilon,\ \frac{2}{3}\pi(m_k - 1) - \varepsilon < y_k < \frac{2}{3}\pi m_k + \varepsilon \right\}$$

と定義しておく. ここで, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ は十分小さい正の数であると仮定する. このとき, 虚部が正定値となるような非特異 [2] n 次複素行列 $T = (t_{ij})$ を用いて複素座標 $z := (z_1, \cdots, z_n)^t$ を $z := x + Ty$ と定義する. この複素トーラスを $\check{T}^{2n} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ と書く. さらに, $L \subset \mathbb{C}^n$ を以下の元によって生成される格子とする (すなわち, $\check{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/L$ である).

$$\gamma_1 := (2\pi, 0, \cdots, 0)^t, \cdots, \gamma_n := (0, \cdots, 0, 2\pi)^t, \gamma'_1 := (2\pi t_{11}, \cdots, 2\pi t_{n1})^t, \cdots, \gamma'_n := (2\pi t_{1n}, \cdots, 2\pi t_{nn})^t.$$

この n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーとして次のような複素化されたシンプレクティック形式 $\tilde{\omega}$ を持つような実 $2n$ 次元トーラス T^{2n} をとる. ただし, 先と同様, $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)^t$, $x^i \sim x^i + 2\pi$, $y^i \sim y^i + 2\pi$ $(i = 1, \cdots, n)$ は T^{2n} の局所座標を表すものとする.

$$\tilde{\omega} := -(dx^1, \cdots, dx^n)(T^{-1})^t \begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{pmatrix}.$$

また, しばしば簡単のため $\check{x} := (x^1, \cdots, x^n)^t$, $\check{y} := (y^1, \cdots, y^n)^t$, $d\check{x} := (dx^1, \cdots, dx^n)^t$, $d\check{y} := (dy^1, \cdots, dy^n)^t$ と略記する. この $\tilde{\omega}$ を $\tilde{\omega} = d\check{x}^t B d\check{y} + \mathbf{i} d\check{x}^t \omega d\check{y}$ と分解したとき, $d\check{x}^t \omega d\check{y}$ がシンプレクティック形式を表し, $d\check{x}^t B d\check{y}$ は B 場と呼ばれる.

以上でミラー対 $((T^{2n}, \tilde{\omega}), \check{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n))$ が定義できたので, 次に, これらの上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に用いる圏の対象となる正則ベクトル束やラグランジュ部分多様体などを定義する. 以下, $r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M(n; \mathbb{Z})$, $\mu := (\mu_1, \cdots, \mu_n)^t \in \mathbb{C}^n$, $p := (p_1, \cdots, p_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $q := (q_1, \cdots, q_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mu = p + T^t q$, $\zeta := \exp\{\frac{2\pi\mathbf{i}}{r}\}$ とする.

まず, 階数 r の正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to \check{T}^{2n}$ を次のようにして定める. 変換関数について, 滑らかな $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の切断 $\psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} : O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} \to \mathbb{C}^r$, $l_j, m_k = 1, 2, 3$ に対して

$$\begin{aligned}
&\psi^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} \cap O^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}} \\
&= e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j y} V_j\ \psi^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots(l_j=3)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n} \cap O^{l_1\cdots(l_j=1)\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}}, \qquad (2) \\
&\psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n} \cap O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}} \\
&= U_k\ \psi^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}\Big|_{O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=3)\cdots m_n} \cap O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots(m_k=1)\cdots m_n}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

[2] T が特異行列となる場合, 本稿で述べるやり方では $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーを定義することができない. しかしながら, T が特異行列となる場合であっても, $\check{T}^{2n}$ のミラーパートナーの定義の仕方と考えるべき正則ベクトル束のクラスを少しずらすことによってホモロジー的ミラー対称性を議論することができる [6].

と定義する (他の開集合の共通部分上では自明であるとする). ただし, $a_j := (a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, $V_j, U_k \in U(r)$ であるとし, (2), (3) は簡単に言うとそれぞれ $x_j \mapsto x_j + 2\pi$, $y_k \mapsto y_k + 2\pi$ とした場合に関する変換関数を表す. このときコサイクル条件は

$$V_jV_k = V_kV_j,\ U_jU_k = U_kU_j,\ \zeta^{-a_{kj}}U_kV_j = V_jU_k,\ j,k = 1, \cdots, n$$

と表されるが, これらの関係式を満たすような V_j, U_k の成す集合を $\mathcal{U}$ と書く.

$$\mathcal{U} := \Big\{V_j, U_k \in U(r) \mid V_jV_k = V_kV_j,\ U_jU_k = U_kU_j,\ \zeta^{-a_{kj}}U_kV_j = V_jU_k,\ j,k = 1, \cdots, n\Big\}.$$

これで階数 r の複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が定義されたが, さらに, この $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 上の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を以下で定める. ここで, $dy := (dy_1, \cdots, dy_n)^t$ であり, d は外微分作用素を表す.

$$\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = d + \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} := d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(\frac{1}{r}x^tA^t + \frac{1}{r}\mu^t\right)dy \cdot I_r. \tag{4}$$

これより $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} := d\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} + \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \wedge \omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を計算することができるが, 一般的に, ある複素ベクトル束が与えられた場合, その複素ベクトル束が正則ベクトル束となることとそれの曲率形式の (0,2)-part が消えることは同値である. このことを考慮して直接計算することにより, 次の命題を得る ([5], Proposition 2.2).

命題 3.1. 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則ベクトル束となることと n 次複素行列 AT が対称行列となることは同値である. このとき, $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は局所的に以下で与えられる. ただし, $dz := (dz_1, \cdots, dz_n)^t$, $d\bar{z} := (d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n)^t$ であるとする.

$$\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \frac{\mathbf{i}}{2\pi r}dz^t\{(T - \bar{T})^{-1}\}^tAd\bar{z} \cdot I_r.$$

これ以降は常に $AT = (AT)^t$ を仮定し, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ と書いた場合には正則ベクトル束を指すものとする. 特に, 上記の命題 3.1 と第 2 章における命題 2.3 より, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が射影的平坦束となることは明らかである. また, 後の都合上 n 次正方行列 R を

$$R := \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\{(T - \bar{T})^{-1}\}^tA$$

と定義しておく (すなわち, $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \frac{1}{r}dz^tRd\bar{z} \cdot I_r$ である). しかしながら, 今 $AT = (AT)^t$ を仮定しているため, この R は実際には n 次実対称行列となることに注意する.

次に, 正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の成す DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ について説明する. この $DG_{\check{T}^{2n}}$ の対象はもちろん正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ であるが, 任意の 2 つの対象 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$, $E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ の間の射の成す空間は以下のようにして定義する.

$$\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) := \Gamma(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \otimes_{C^\infty(\check{T}^{2n})} \Omega^{0,*}(\check{T}^{2n}).$$

ここで, $\Gamma(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ は束準同型 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ の成す空間, $\Omega^{0,*}(\check{T}^{2n})$ は $\check{T}^{2n}$ 上で定義される反正則な微分形式の成す空間を表し, $\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ の次数をこの反正則な微分形式の次数を用いて定義することによって $\mathrm{Hom}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ は $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間となる. 特に, 次数 r を明記したい場合は $\mathrm{Hom}^r_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})$ のように書く. さらに, 微分を

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}^r_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{r+1}_{DG_{\check{T}^{2n}}}(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}),\\ \psi \longmapsto (2\nabla^{(0,1)}_{(s,B,\nu,\mathcal{V})})(\psi) - (-1)^r\psi(2\nabla^{(0,1)}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})})\end{gathered}$$

で定義し, 積構造をそれぞれの正則ベクトル束同士の束準同型の合成, 及び反正則な微分形式同士の wedge 積をとることによって定める. このとき, これらの微分と積構造がライプニッツ則を満たすので, この $DG_{\check{T}^{2n}}$ は DG 圏となる.

本節の最後に, 対応するシンプレクティック幾何学側の話を簡単に説明しておく. 全体を通して議論の中心となるのは $(T^{2n},\tilde{\omega})$ 内のラグランジュ部分多様体 (すなわち, $d\check{x}^t\omega d\check{y}|_L=0$ となるような T^{2n} 内の n 次元部分多様体 L) であるが, 正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ に対応するラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ は以下で与えられる.

$$L_{(r,A,p)}:=\left\{\begin{pmatrix}\check{x}\\ \check{y}\end{pmatrix}\in(T^{2n},\tilde{\omega})\mid \check{y}=\frac{1}{r}A\check{x}+\frac{1}{r}p\right\}.$$

特に, (4) の接続形式 $\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の部分にはこのラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ の定義式の形がそのまま含まれている状態になっている. また, 接続形式 $\omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 内における $q\in\mathbb{R}^n$ は (定義より, $\mu=p+T^tq$ である), このラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ 上で定義される局所系のユニタリホロノミーに対応する部分であるが (深谷圏の対象はラグランジュ部分多様体とその上の局所系の組で与えられる), 本稿ではシンプレクティック幾何学側の話に関してはラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ に焦点を当てて議論を進めるため, このあたりの話は気にしなくてもよい.

3.2 主定理

以下, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ がどのようなクラスに属する射影的平坦束であるのか, という問に対する回答を述べる. 第 3.1 節において $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式 $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ について説明した際に n 次実対称行列 R を導入したが, 同じ記号を用いてエルミート形式 $R:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を以下で定める. ただし, $z=(z_1,\cdots,z_n)^t$, $w=(w_1,\cdots,w_n)^t\in\mathbb{C}^n$ であるとする.

$$R(z,w):=\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}z_i\bar{w}_j,\ R_{ij}=\left(\frac{\mathbf{i}}{2\pi}\{(T-\bar{T})^{-1}\}^tA\right)_{ij}. \tag{5}$$

第 2 章において複素トーラス上で定義された射影的平坦束の保型因子について述べた際に, エルミート形式 $R:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ と格子 Γ の元 γ, γ' に対して $\mathrm{Im}R(\gamma,\gamma')\in\pi\mathbb{Z}$ となるということを書いたが, 今考えている射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ に関しても実際に次の命題が成り立つ ([5], Proposition 3.4, Proposition 3.5).

命題 3.2. 上記の (5) で定義されるエルミート形式に対して, $\mathrm{Im}R(\gamma_j,\gamma_k)=0$, $\mathrm{Im}R(\gamma'_j,\gamma'_k)=0$, $\mathrm{Im}R(\gamma_j,\gamma'_k)=-\pi a_{kj}$, $\mathrm{Im}R(\gamma'_k,\gamma_j)=\pi a_{kj}$ が成り立つ. ここで, $j,k=1,\cdots,n$ である.

この命題 3.2 は, $AT=(AT)^t$ が成り立つということに注意して直接計算することにより証明することができる. 今, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の曲率形式は $\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}=-\frac{1}{r}dz^tRd\bar{z}\cdot I_r$ によって与えられているので, この $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は以下のような保型因子 $j:L\times\mathbb{C}^n\to GL(r;\mathbb{C})$, 及び接続 $\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を持つような射影的平坦束 $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}\to\check{T}^{2n}$ と同型であることが予想される. ただし, $U(\gamma_j)$, $U(\gamma'_k)\in\mathcal{U}$ であるとする.

$$\begin{aligned}
j(\gamma_j,z)&=U(\gamma_j)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma_j)+\frac{1}{2r}R(\gamma_j,\gamma_j)\right\},\\
j(\gamma'_k,z)&=U(\gamma'_k)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma'_k)+\frac{1}{2r}R(\gamma'_k,\gamma'_k)\right\},\\
\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}&=d-\frac{1}{r}dz^tR\bar{z}\cdot I_r-\frac{\mathbf{i}}{2\pi r}\mu^t(T-\bar{T})^{-1}dz\cdot I_r+\frac{\mathbf{i}}{2\pi r}\bar{\mu}^t(T-\bar{T})^{-1}dz\cdot I_r.
\end{aligned}$$

その同型射を具体的に構成することによって実際に $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ となることを証明したのが次の定理であり, 本稿における主結果の 1 つである ([5], Theorem 3.6).

定理 3.3. $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ であり, その同型射 $\Phi : E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \tilde{\to} \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の局所表示は以下で与えられる. ただし, $\mathcal{A} := \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \bar{T}^t A^t (T-\bar{T})^{-1}$ であるとする.

$$\Phi(z,\bar{z}) = \exp\left\{ \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} z^t \mathcal{A} z + \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} \bar{z}^t \bar{\mathcal{A}} \bar{z} - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \mathcal{A} \bar{z} + \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} \bar{z}^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \mu - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t \bar{\mu} \right\} \cdot I_r.$$

以下, 定理 3.3 の証明の概略を述べる. まず, 微分方程式 $\tilde{\nabla}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \Phi(z,\bar{z}) = \Phi(z,\bar{z}) \nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を解く. この微分方程式を解くことによって得られる解が上述の $\Phi(z,\bar{z})$ であるから, この $\Phi(z,\bar{z})$ を用いて

$$\Big(\Phi(z+\gamma_j, \bar{z}+\bar{\gamma_j})\Big)\Big(e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j y} V_j\Big)\Big(\Phi^{-1}(z,\bar{z})\Big), \ \Big(\Phi(z+\gamma'_k, \bar{z}+\bar{\gamma'_k})\Big)\Big(U_k\Big)\Big(\Phi^{-1}(z,\bar{z})\Big)$$

を計算し (以下の可換図式, 及び (2), (3) も参照せよ), それぞれが実際に $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の保型因子 $j(\gamma_j, z)$, $j(\gamma'_k, z)$ の形に変形されることを確認すればよい.

$$\begin{array}{ccc} E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j y} V_j} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\ {\scriptstyle \Phi(z,\bar{z})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(z+\gamma_j, \bar{z}+\bar{\gamma_j})} \\ \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow[j(\gamma_j,z)]{} & \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{U_k} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\ {\scriptstyle \Phi(z,\bar{z})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(z+\gamma'_k, \bar{z}+\bar{\gamma'_k})} \\ \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow[j(\gamma'_k,z)]{} & \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}. \end{array}$$

次に, 射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の間の射の写像錐に付随する完全三角系列に対する, シンプレクティック幾何学的な観点から見た解釈について議論する. 以下, 第 3.1 節で説明した DG 圏 $DG_{\check{T}^{2n}}$ から得られる三角圏 $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において話を進める. 特に, $T : Tr(DG_{\check{T}^{2n}}) \to Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ は $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ におけるシフト関手を表すものとする (n 次元複素トーラス $\check{T}^{2n}$ の複素構造を定義する際にも T という記号を用いたが, 混乱することはないと思われるので同じ記号を用いて書くことにする). 次の定理が本稿における 2 つ目の主定理である ([5], Theorem 4.1).

定理 3.4. $\check{T}^{2n}$ 上において 2 つの射影的平坦束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$, $E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$ $(\mu = p + T^t q,\ \nu = u + T^t v)$ をとり, $Tr(DG_{\check{T}^{2n}})$ において射 $\psi : E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \to TE_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の写像錐 $C(\psi)$ に付随する完全三角系列

$$\cdots \longrightarrow E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \xrightarrow{\psi} TE_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow \cdots \quad (6)$$

を考える. このとき, ある射影的平坦束 $E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ が存在して $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ となる, すなわち, (6) が 3 つの射影的平坦束とその次数シフトから成る完全三角系列となるならば, $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) \leq 1$ が成り立つ.

以下, 定理 3.4 の証明の概略を述べる. 簡単のため, $\alpha := \frac{1}{r}A - \frac{1}{s}B$, $\beta := \frac{1}{s}u - \frac{1}{r}p$ とおく. $\alpha = O$ の場合には, $\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^n$ であれば $L_{(r,A,p)} = L_{(s,B,u)}$ となって $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) = 0$,

$\beta \notin 2\pi\mathbb{Z}^n$ であれば $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} = \emptyset$ となるだけなので, 以下 $\alpha \neq O$ とする. このとき, $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ であると仮定しているので, ホモロジー的ミラー対称性 [3] を用いることにより $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} \neq \emptyset$ となることが確認できる. 関係式

$$-\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = \Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cdot I_r,\ -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} = \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} \cdot I_s,\ -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Omega_{(t,C,\eta,\mathcal{W})} = \Omega'_{(t,C,\eta,\mathcal{W})} \cdot I_t$$

によって定まる 2 次微分形式 $\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$, $\Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}$, $\Omega'_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ をとる. また, $C(\psi) \cong E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ より, $C(\psi)$ と $E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}$ の i 次のチャーン指標は一致するはずである. したがって, ベクトル束 E の i 次のチャーン指標を $ch_i(E)$ と書くことにすれば

$$ch_i(E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}) + ch_i(E_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) = ch_i(E_{(t,C,\eta,\mathcal{W})}) \tag{7}$$

が成り立つ. 特に, $i = 0, 1, 2$ の場合の等式 (7) を書き換えることによって

$$(\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) \wedge (\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})}) = 0 \tag{8}$$

という等式を得ることができ, これが成り立つ場合には $i \geq 3$ の場合の関係式 (7) は自動的に満たされる. さらに,

$$\Omega'_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} - \Omega'_{(s,B,\nu,\mathcal{V})} = \frac{1}{4\pi^2} dx^t \alpha^t dy$$

であることを考慮すると, 等式 (8) が成り立つことと, n 次正方行列 α から任意に 2 行 2 列を抜き出して得られる 2 次正方行列の行列式が 0 になることが同値であることが分かる. したがって, この事実と $L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)} \neq \emptyset$ となることをふまえて連立方程式 $\alpha\check{x} = \beta$ を解くことにより, $\mathrm{codim}(L_{(r,A,p)} \cap L_{(s,B,u)}) = 1$ となることが証明できる.

最後に, 1 つだけこの定理 3.4 に関する具体例を述べる. ミラー対として $((T^2, \tilde{\omega} = -\frac{1}{T}dx^1 \wedge dy^1), \check{T}^2 = \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z}))$, $T \in \mathbb{H}$ をとり, 以下のような写像錐に付随する完全三角系列を考える. ただし, $\psi \neq 0$ であるとし, また, $E_{(1,0,\mu,\mathcal{U})}$, $E_{(1,1,\nu,\mathcal{V})}$ はそれぞれ次数 0, 1 の正則直線束であって, $\mu = p + qT$, $\nu = u + vT$, $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{V_1 = 1,\ U_1 = 1 \in U(1)\}$ となっているようなものとする.

$$\cdots \longrightarrow E_{(1,0,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow C(\psi) \longrightarrow E_{(1,1,\nu,\mathcal{V})} \xrightarrow{\psi} TE_{(1,0,\mu,\mathcal{U})} \longrightarrow \cdots.$$

このとき $C(\psi)$ は階数 2, 次数 1 の正則ベクトル束であり, 実際に $C(\psi) \cong E_{(2,1,\eta,\mathcal{W})}$ となることと $\eta \equiv \mu + \nu + \pi + \pi T \pmod{2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})}$ となることが同値であることが証明されている ([4], Theorem 4.10). ここで,

$$\mathcal{W} = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in U(2) \right\}$$

である. このような状況下において, 確かに $\mathrm{codim}(L_{(1,0,p)} \cap L_{(1,1,u)}) = 1$ が成り立っている.

参考文献

[1] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik 70:93-107, 1991.

[2] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies, In: Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993). Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).

[3] K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions, J. Algebr. Geom. 11, 393-512 (2002).

[4] K. Kobayashi, On exact triangles consisting of stable vector bundles on tori, Differential Geometry and its Applications 53 (2017) 268-292, arXiv : mathDG/1610.02821.

[5] K. Kobayashi, Geometric structure of exact triangles consisting of projectively flat bundles on higher dimensional complex tori, arXiv : mathDG/1705.04007.

[6] K. Kobayashi, Some remarks on the homological mirror symmetry for tori, In preparation.

[7] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Princeton University Press, 1987.

[8] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, 1995, pages 120-139, arXiv : math.AG/9411018.

[9] Y. Matsushima, Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J., Vol. 61(1976), 161-195.

[10] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror Symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, 479:243-259, 1996.

[11] Jae-Hyun Yang, Holomorphic vector bundles over complex tori, J. Korean Math. Soc. 26(1989), No.1, pp.117-142.

局所対称ケーラー多様体の変形量子化

[1] 原 健太郎 (Hara Kentaro) , [2] 佐古 彰史 (Sako Akifumi)

[1,2] 東京理科大学 理学研究科 科学教育専攻 博士後期課程 2 年, [2] 東京理科大学 理学部第二部 数学科

Abstract

我々は局所対称 Kähler 多様体を非可換変形する方法を見出した。曲率テンソルの共変微分が消滅している場合、Kähler 多様体 M は、局所対称な Kähler 多様体であると言われる。局所的に対称な Kähler 多様体を構築するための代数的導出プロセスが与えられる。例として、コンパクトリーマン面と射影空間 $\mathbb{C}P^N$ のスター積を構築する。

MSC:53D55,81R60
Keywords:変形量子化、非可換リーマン面、局所対称 Kähler 多様体、非可換幾何学

1 Kähler 多様体の変数分離変形量子化

このセクションでは、Kähler 多様体の変数分離変形量子化を定義する。

N 次元の Kähler 多様体 M の Kähler 計量は Kähler ポテンシャルを使って記述される。Φ を Kähler ポテンシャルとし、ω を Kähler 2 形式とすると

$$\omega := \mathrm{i} g_{k\bar{l}} \mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}\bar{z}^l, \quad g_{k\bar{l}} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}. \tag{1.1}$$

となる。ただし $z^i, \bar{z}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ は正則座標とする。
このテクニカルレポートでは、我々はアインシュタイン総和規約を使用する。$g^{\bar{k}l}$ は Kähler 計量行列 $g_{k\bar{l}}$ の逆行列である。 つまり $g^{\bar{k}l} g_{l\bar{m}} = \delta_{\bar{k}\bar{m}}$ ということである。以下我々は

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \ \partial_{\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}. \tag{1.2}$$

とする。変形量子化は以下のように定義される。

Definition 1 (Deformation quantization)**.** ポアソン多様体の変形量子化は以下のように定義される。$\mathcal{F}$ は形式的な関数列の集合として定義されている*:* $\mathcal{F} := \left\{ f \;\middle|\; f = \sum_k f_k \hbar^k, \ f_k \in C^\infty(M) \right\}$. 非可換積 $*$ は

$$f * g = \sum_k C_k(f, g) \hbar^k \tag{1.3}$$

であり、以下を満たす。

1. $(\mathcal{F}, +, *)$ は、（非可換の）代数

2. $C_k(\cdot,\cdot)$ は双微分演算子

3. $C_0(f,g) = fg, C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}$ （ただし $\{f,g\}$ は *Poisson bracket*）

4. $f * 1 = 1 * f = f$.

Karabegov は、[6] の中で Kähler 多様体の変形量子化を得る方法を導出した。彼の変形量子化は、変数分離変形量子化と呼ばれる。

Definition 2 (変数分離変形量子化)**.** 正則関数 a、反正則関数に対して $a * f = af, f * b = fb$ を満たすとき $*$ をけケーラー多様体の変数分離変形量子化のスター積という。

以下 $D^{\bar{l}} = g^{\bar{l}k}\partial_k$ とし、$\mathcal{S} := \left\{ A \mid A = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha, \ \ a_\alpha \in C^\infty(M) \right\}$, とする。ただし α は多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ である。またアインシュタインルール $a_\alpha D^\alpha := \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ を用いる。 L_f は $f * g = L_f g$ を意味する。

Theorem 1.1. [Karabegov [6]]. 任意の Kähler form ω, に対してスター積 $*$ が以下のように構成される。f を $\mathcal{F}$ の元とし、

$$A_n = a_{n,\alpha}(f) D^\alpha, \ D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} (D^{\bar{i}})^{\alpha_i}, \ (D^{\bar{i}}) = g^{\bar{i}l}\partial_l, \tag{1.4}$$

とすると、

$$L_f = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n A_n \tag{1.5}$$

は以下の条件によって一意的に定まる。

1. $R_{\partial_{\bar{l}}\Phi} := \partial_{\bar{l}}\Phi + \hbar\partial_{\bar{l}}$,

$$\left[L_f, R_{\partial_{\bar{l}}\Phi} \right] = 0 \ . \tag{1.6}$$

2.

$$L_f 1 \ \ = \ \ f * 1 = f. \tag{1.7}$$

上記条件は結合律

$$L_h(L_g f) \ \ = \ \ h * (g * f) = (h * g) * f = L_{L_h g} f. \tag{1.8}$$

に由来する。

2　局所対称 Kähler 多様体の変数分離変形量子化

演算子を以下のように定義する。

$$D^k = g^{k\bar{m}}\partial_{\bar{m}}, D^{\bar{j}} = g^{\bar{j}l}\partial_l, D^{\vec{\alpha_n}} := D^{\alpha_1^n} D^{\alpha_2^n} \cdots D^{\alpha_N^n}, D^{\vec{\beta_n}} := D^{\beta_1} D^{\beta_2} \cdots D^{\beta_N}, D^{\alpha_k} := \left(D^k\right)^{\alpha_k}, D^{\beta_j} := \left(D^{\bar{j}}\right)^{\beta_j},$$

$\vec{\alpha_n} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ に対し $D^{\vec{\alpha_n}} := 0$ とする。

Theorem 2.1. 局所対称 Kähler 多様体の変数分離変形量子化は以下のように得られる。

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}} T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}} \left(D^{\vec{\alpha_n}} f\right) \left(D^{\vec{\beta_n^*}} g\right),$$

ただし係数 $T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}}$ は以下の漸化式によって決定する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{d=1}^{N} \hbar g_{\bar{i}d} T^{n-1}_{\vec{\alpha_n} - \vec{e_d}\vec{\beta_n^*} - \vec{e_i}} \\
&= \beta_i T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*}} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} \frac{\hbar\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 1\right)\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 2\right)}{2} R_{\bar{p}}{}^{\bar{k}\bar{k}}{}_{\bar{i}}\, T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*} - \vec{e_p} + 2\vec{e_k} - \vec{e_i}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-k}\sum_{p=1}^{N} \hbar\left(\beta_k^n - \delta_{kp} - \delta_{ik} + 1\right)\left(\beta_{k+l}^n - \delta_{(k+l),p} - \delta_{i,(k+l)} + 1\right) R_{\bar{p}}{}^{\overline{k+l}\bar{k}}{}_{\bar{i}}\, T^n_{\vec{\alpha_n}\vec{\beta_n^*} - \vec{e_p} + \vec{e_k} + \vec{e_{k+l}} - \vec{e_i}}.
\end{aligned}$$

3　具体例：コンパクトリーマン面の変数分離変形量子化

スカラー曲率 R を

$$R = g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}} = R_l{}^{\bar{j}l}{}_{\bar{j}}.$$

とする。

Theorem 3.1. コンパクトリーマン面の変数分離変形量子化は以下のように得られる。

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(g^{1\bar{1}}\right)^n \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{2\hbar}{2k + \hbar k\left(k-1\right) R} \right\} \left\{ \left(g^{1\bar{1}} \frac{\partial}{\partial z}\right)^n f \right\} \left\{ \left(g^{1\bar{1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n g \right\} \right]$$

.

Example 1. $(\mathbb{C}, g)$：ガウス平面

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\hbar^n}{n!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n g \right\} \right].$$

Example 2. よく知られた平坦トーラス埋め込み $X : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), u = Re(z), v = Im(z)$$
$$\Longrightarrow R = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} = 0$$

に対し、第一基本形式

$$E = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 1, F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0, G = \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

となり、誘導計量

$$\tilde{g}_{1\bar{1}} = E = G = 1.$$

となる。よってスター積は

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\hbar^n}{n!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^n g \right\} \right].$$

Acknowledgments
A.S. was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 16K05138.

References

[1] Bordemann M., Brischle M., Emmrich C., Waldmann S., *Phase Space Reduction for Star-Products: An Explicit Construction for $\mathbb{C}P^n$,* Lett. Math. Phys. **36** (1996) 357-371, [arXiv:q-alg/9503004].

[2] Halima M. , Tilmann W., *Fuzzy complex Grassmannians and Quantization of Line Bundles,* Semin. Univ. Hambg. (2010) 80: 59-70.

[3] Halima M. , *Construction of Certain Fuzzy Flag Manifolds,* Rev. Math. Phys. **22**, (2010) 533-548.

[4] Hayasaka K., Nakayama R. and Takaya Y., *A New Noncommutative Product on the Fuzzy Two Sphere Corresponding to the Unitary Representation of SU(2) and the Seiberg-Witten map,* Phys. Lett. B **553**, (2003) 109-118, [arXiv:hep-th/0209240].

[5] Hara K. and Sako A., *Noncommutative Deformations of Locally Symmetric Kähler manifolds,* J. Geom. Phys. **114** (2017) 554-569 doi:10.1016/j.geomphys.2017.01.009, [arXiv:math-ph/1608.08146].

[6] Karabegov A., *Deformation Quantizations with Separation of Variables on a Kähler Manifold,* Commun. Math. Phys. **180**, (1996) 745-755, [arXiv:hep-th/9508013].

[7] Karabegov A., *Pseudo-Kähler Quantization on Flag Manifolds,* [arXiv:dg-ga/9709015].

[8] Murray S. and Saemann C., *Quantization of Flag Manifolds and Their Supersymmetric Extensions,* Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008) no.3 641-710 doi:10.4310/ATMP.2008.v12.n3.a5 , [arXiv:hep-th/0611328].

[9] Ohsaku T., *Algebra of Noncommutative Riemann surfaces,* [arXiv:math-ph/0606057].

[10] Sako A., Suzuki T. and Umetsu H., *Noncommutative CP^N and CH^N and Their Physics,* J. Phys. Conf. Ser. **442**, 012052 (2013) 305-320.

[11] Schlichenmaier M., *Some Naturally Defined Star Products for Kähler Manifold,* Trav. math. **20** (2012) 187-204.

ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形空間について

長岡 高広 (Nagaoka Takahiro)*

京都大学大学院数学・数理解析専攻数学系 修士二年

1 導入

ハイパートーリック多様体はトーリック多様体のハイパーケーラー類似として Bielawski-Dancer によって導入された ([BD]). トーリック多様体の大きな特徴として凸多面体など組合せ論的な対象との対応が知られている. このようなトーリック多様体の類似物として導入されたハイパートーリック多様体の大きな特徴としては, 超平面配置という組合せ論的対象との対応が知られていることである. 元々 Bielawski-Dancer は微分幾何的な方法 (ハイパーケーラー商) を用いてハイパートーリック多様体 (toric hyperkahler variety と呼ばれていた) を定義した. 一方で「代数的シンプレクティック商」という代数幾何的な構成 (GIT 商) で, 正則シンプレクティック構造を持つ代数多様体として定義することも可能である (3 節参照). この観点ではハイパートーリック多様体はシンプレクティック (代数) 多様体というクラスに属する (2 節参照). これは冪零軌道閉包や箙多様体などの重要なクラスを含んでいる.

シンプレクティック代数多様体はシンプレクティック構造を持つが, その条件を弱めたポアソン構造も持つ. そこでシンプレクティック代数多様体のポアソン構造の変形を考え, その中でもある種の普遍性を満たす「普遍ポアソン変形空間」というものを考えることができる. 普遍ポアソン変形空間は常に存在するとは限らないが, 錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y(0), \bar{\omega}_0)$ というクラスに対しては, 一般的に Namikawa によって以下が成立することが知られている.

定理 1.1. (Namikawa [Na3])
錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_0) \to (Y(0), \bar{\omega}_0)$ について $Y, Y(0)$ それぞれの普遍ポアソン変形空間 $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}(0)$ が存在し錐的 $\mathbb{C}^*$-作用と可換な次の図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{\pi} & Y(0) \\ & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{Y} & & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{Y}(0) & \downarrow \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}_W} & \\ H^2(Y,\mathbb{C}) & \ni & 0 & \mapsto \ni & \bar{0} \\ & & \xrightarrow{\psi} & H^2(Y,\mathbb{C})/W & \end{array}$$

ただし $W \subseteq GL(H^2(Y, \mathbb{C}))$ は Namikawa-Weyl 群と呼ばれる有限群である.

注意. Brieskorn, Grothendiek, Slodowy らは単純特異点の半普遍変形空間の同時特異点解消を研究した ([Slo]). 上の定理はその一般化になっている.

* tnagaoka@math.kyoto-u.ac.jp

この定理は錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消の普遍ポアソン変形の存在性を主張している重要な定理である．一方で普遍ポアソン変形を具体的に構成することは一般には難しい．筆者はハイパートーリック多様体の場合にこれらの普遍ポアソン変形空間及び Namikawa-Weyl 群を具体的に決定した (定理 5.3 を参照)．

本稿の構成を述べる．まず第 2 節でシンプレクティック代数多様体や普遍ポアソン変形を定義する．そして代数的シンプレクティック商を定義し代数的シンプレクティック商に対して, 与えられたポアソン変形がいつ普遍的となるかについての判定法を証明する．第 3 節ではトーラスによる代数的シンプレクティック商としてハイパートーリック多様体を定義する．第 4 節で非特異ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形空間が Lawrence トーリック多様体と呼ばれるものになることを示す．そして第 5 節で Namikawa-Weyl 群の候補である有限群 W_B 及び W_B のアファイン Lawrence トーリック多様体への作用を定義してアファインハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形を決定する．

2　シンプレティック代数多様体とポアソン変形理論

定義. (シンプレクティック代数多様体)
正規代数多様体 Y が**シンプレクティック代数多様体**であるとは, 非特異点集合 X_{reg} 上に, ある正則シンプレクティック形式 $\bar{\omega}_0 \in \Gamma(Y, \Omega^1_{Y_{reg}})$ が存在し以下の条件を満たすときを言う:
Y のある特異点解消 $\pi : \tilde{Y} \to Y$ (i.e., $\tilde{Y}$ は smooth で π は $\pi^{-1}(Y_{reg}) \cong Y_{reg}$ となる全射固有双有理射) で $\pi^*\bar{\omega}_0$ が $\tilde{Y}$ 上のある正則 2 形式 ω_0 に拡張する．

なお特にこの拡張された正則 2 形式 ω_0 がシンプレクティック形式であるときこの特異点解消を**シンプレクティック特異点解消**と呼ぶ．

注意. 今の場合, シンプレクティック特異点解消であることとクレパント解消であることは同値である．

シンプレクティック代数多様体 Y は自然にポアソン構造という, 構造層 $\mathcal{O}_Y$ 上の演算 $\{-,-\}$ で Lie 括弧積と同じ公理を満たす構造を持つ．またポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ に対し, それのポアソン変形とはポアソン代数多様体 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ 及び射 $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to (S, 0)$ (ただし $0 \in S$) であってポアソン構造も含めて $(Y, \{-,-\}_0) = (\bar{\mu}^{-1}(0), \{-,-\}|)$ となっているときを言う．厳密な定義は述べないが, Y のポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ が普遍ポアソン変形であるとは任意の (Y の) ポアソン変形がすべて $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ から (引き戻しとして) 得られるときを言う．与えられたポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ が普遍ポアソン変形かどうか判定するために重要なものとして, 次の小平-スペンサー写像がある (紙数の都合上直観的に定義する)．なお以下で $PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon])$ を Y の“無限小”ポアソン変形全体と定める (厳密には $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\varepsilon]$ 上の Y のポアソン変形全体)．

定義. (小平-スペンサー写像)
ポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ について, Y のポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$, $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to S$ が与えられたとする．このとき $\mathcal{Y}$ についての**小平-スペンサー写像** $KS_{\mathcal{Y}} : T_0S \to PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon])$ を接ベクトル $\eta \in T_0S$ に対し $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ を η 方向に制限した無限小ポアソン変形を対応させる射として定義する．

小平-スペンサー写像を用いると普遍性は次のように判定できる．

定理 2.1. ポアソン代数多様体 $(Y, \{-,-\}_0)$ に対しその普遍ポアソン変形空間が存在するとする．Y の無限小ポアソン変形 $(\mathcal{Y}, \{-,-\})$ に対し, それが普遍ポアソン変形であることと小平-スペンサー写像 $KS_{\mathcal{Y}}$ が全単射

であることは同値である.

紙面の都合上詳しく述べないが以下で主に考えたいのは, 錐的シンプレクティック多様体という, “良い$\mathbb{C}^\times$-作用”を持つアファインシンプレクティック代数多様体である ([Na3] 参照).

特に以下では錐的シンプレクティック多様体及びそのシンプレクティック特異点解消の重要なクラスの一つとしてアファイン代数的シンプレクティック商及び代数的シンプレクティック商を導入する.

まずいくつか注意をする. 簡約代数群 G 及びその Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, $Z(\mathfrak{g}^*) := \left\{\xi \in \mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}^*_g(\xi) = \xi \ (g \in G)\right\}$ と定める. すると簡約代数群ということより単射 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times) \hookrightarrow Z(\mathfrak{g}^*)$ が射の微分をするという操作で得られ, この像を $Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ と書く. この時 $Z(\mathfrak{g}^*) = Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ となることに注意する.

次に GIT 商の用語について少し述べる. G が代数多様体 X に作用しているとき $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times)$ (GIT パラメーターと呼ぶ) を取ると, 一般的に安定集合 $X^{\alpha-st}$, 半安定集合 $X^{\alpha-ss}$ という X の開集合が $X^{\alpha-st} \subseteq X^{\alpha-ss} \subseteq X$ となるように定まる. そして $X^{\alpha-ss}//G$ は半安定集合の圏論的商 (categorical quotient) と定める. この上で以下のように定義する.

定義 & 補題 2.2. (代数的シンプレクティック商)
$\mathbb{E}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間, G を簡約代数群, $G \to GL(\mathbb{E})$ を G の $\mathbb{E}$ 表現とする. この表現から自然に定まる G の $(T^*\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^*, \omega_{\mathbb{C}})$ への作用はハミルトニアン作用となり, 次の射がモーメント写像となる.

$$\mu : \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^* \to \mathfrak{g}^* \quad \mu(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})(X) := \boldsymbol{w}(X \cdot \boldsymbol{z})$$

ただし $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{E}$ への作用は G の微分表現 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{E})$ から決まるものである. この時 GIT パラメーター $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ に対し

(1) ($\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))$ の GIT 商)

$$X(\alpha) := \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))//_\alpha G := (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss}//G$$
$$X(0) := \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))//G := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))]^G$$

とおく. これらは $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)), \omega_{\mathbb{C}})$ から自然に誘導されるポアソン構造を持つポアソン代数多様体となる. また包含写像 $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss} \hookrightarrow \mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*))$ が誘導する自然な (ポアソン構造を保つ) 射影射を $\Pi : X(\alpha) \to X(0)$ と定める.

(2) (代数的シンプレクティック商)
各 $\xi \in Z(\mathfrak{g}^*)$ に対し

$$Y(\alpha, \xi) := \mu^{-1}(\xi)//_\alpha G := (\mu^{-1}(\xi))^{\alpha-ss}//G$$
$$Y(0, \xi) := \mu^{-1}(\xi)//G := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mu^{-1}(\xi)]^G$$

をそれぞれ**代数的シンプレクティック商**, **アファイン代数的シンプレクティック商**と呼ぶ (ただし $\mathbb{C}[\mu^{-1}(\xi)]$ は $\mu^{-1}(\xi)$ の座標環である). これらは $(T^*\mathbb{E}, \omega_{\mathbb{C}})$ から自然に誘導されるシンプレクティック構造 $(Y(\alpha, \xi), \omega_\xi)$, $(Y(0, \xi), \bar{\omega}_\xi)$ を持つ. また包含写像 $(\mu^{-1}(\xi))^{\alpha-ss} \hookrightarrow \mu^{-1}(\xi)$ が誘導する自然な (シンプレクティック構造を保つ) 射影射を $\pi_\xi : Y(\alpha, \xi) \to Y(0, \xi)$ と定める. なお以下では $Y(\alpha) := Y(\alpha, 0)$, $Y(0) := Y(0, 0)$ と書くことにする.

(3) (錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用)
$T^*\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^*$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用をスカラー倍 $t \cdot (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) := (t\boldsymbol{z}, t\boldsymbol{w})$ で定める. この作用は G-作用と

可換で (半) 安定的集合を保つため $X(\alpha)$, $X(0)$, $Y(\alpha)$, $Y(0)$ への作用及び $Z(\mathfrak{g}^*)$ への作用が誘導される ($Z(\mathfrak{g}^*)$ への作用は $t \in \mathbb{C}^\times$ に対し t^2 を掛ける作用). 特に以下の可換図式は $\mathbb{C}^\times$-同変となる.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y(\alpha) & \xrightarrow{\pi} & Y(0) \\ & \swarrow & \downarrow \Pi & \swarrow & \downarrow \\ X(\alpha) & \xrightarrow{\Pi} & X(0) & & \\ \downarrow \bar{\mu} & & \downarrow & & \downarrow \bar{\mu} \\ 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \\ Z(\mathfrak{g}^*) & = & Z(\mathfrak{g}^*) & & \end{array}$$

またこの作用で $(Y(0), \bar{\omega}_0)$ は錐的シンプレクティック多様体となる.

今後, 代数的シンプレクティック商を考えるときは以下を仮定して話を進める.

仮定 2.3. $\alpha \in Z(\mathfrak{g}^*)_{\mathbb{Z}}$ で次を満たすような元が存在する.

(i) α は generic (i.e., $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-ss} = (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}$)
(ii) G は $(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}$ に自由に作用する.
(iii) $\mu|_{(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}} : (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st} \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は全射.

注意. (1) (iii) を満たすときモーメント写像の性質と安定集合の定義から $\mu|_{(\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st}} : (\mu^{-1}(Z(\mathfrak{g}^*)))^{\alpha-st} \to Z(\mathfrak{g}^*)$ はスムース射 (複素多様体としての位相で沈めこみ射) となる.
(2) (i), (ii) から (厳密には述べないが) "多くの場合" $\Pi : X(\alpha) \to X(0)$ は特異点解消となり, さらに各 $\xi \in Z(\mathfrak{g}^*)$ に対し $\pi_\xi : Y(\alpha, \xi) \to Y(0, \xi)$ はシンプレクティック特異点解消を与える.

さてこうして上の仮定を満たすとき, $\pi : Y(\alpha) \to Y(0)$ は定理 1.1 の状況を満たしていることが分かった. また上の図式で $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$, $\bar{\mu} : X(0) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ はそれぞれ $(Y(\alpha), \omega_0)$, $(Y(0), \bar{\omega}_0)$ のポアソン変形を与えている. これらが普遍ポアソン変形の候補となっている. さてまず $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が普遍ポアソン変形となるかどうか考えるため小平-スペンサー写像をより分かりやすい写像で置き換えることを考える. まず上で述べたことから以下が分かる.

補題 2.4. 上の状況で仮定 2.3 を満たしているとする. アファイン多様体 $X(0)$ のアファイン空間への埋め込みを $X(0) \subseteq \mathbb{C}^N$ と書く (定義から $\mathbb{C}^N$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用が決まりこれは同変な埋め込みとなる). この時以下の $\mathbb{C}^\times$-同変な図式は次の性質を満たす.

$$\begin{array}{ccc} X(\alpha) & \xrightarrow{\Pi} & X(0) \subseteq \mathbb{C}^N \\ \downarrow \bar{\mu} & & \\ Z(\mathfrak{g}^*) & & \end{array}$$

(1) $\mathbb{C}^N$, $Z(\mathfrak{g}^*)$ への $\mathbb{C}^\times$-作用は線形に正の重みで作用 (i.e., ウェイトが全て正)
(2) $\Pi : \mathbb{C}^\times$-同変全射固有射
(3) $\bar{\mu} : \mathbb{C}^\times$-同変スムース射
(4) $\phi \neq \pi^{-1}(0) \subsetneq \bar{\mu}^{-1}(0)$

さてこの補題で明示した条件を用いると (複素多様体としての位相で考えれば) 次の一般的な定理より $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は自明 C^∞ 級ファイバー束であることが従う.

定理 2.5. (essentially Slodowy [Slo])
$\mathcal{Y}$ を一般の C^∞ 級多様体, S は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし $\pi : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}^N$ は C^∞ 級の写像としてその像を $\tilde{\mathcal{Y}}(0)$ と書く. また $\mathcal{Y}, \mathbb{C}^N, S$ に $\mathbb{C}^\times$ が作用し, C^∞ 級写像 $\bar{\mu} : \mathcal{Y} \to S$ が次の性質を満たしているとする.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{Y}}(0) \subseteq \mathbb{C}^N \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \\ S & & \end{array}$$

(1) $\mathbb{C}^N, S$ には線形に正の重みで作用している
(2) $\pi : \mathbb{C}^\times$-同変全射固有 C^∞-写像
(3) $\bar{\mu} : \mathbb{C}^\times$-同変沈めこみ C^∞-写像
(4) $\phi \neq \pi^{-1}(0) \subsetneq \bar{\mu}^{-1}(0)$

このとき $\bar{\mu}$ は C^∞-自明ファイバー束

さて今 $X(\alpha)$ のポアソン構造は $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ の各ファイバー $(Y(\alpha,\xi), \omega_\xi)$ に非特異シンプレクティック代数多様体 (特に正則シンプレクティック多様体) の構造を誘導していた. このようなとき ω_ξ たちから $X(\alpha)$ 上の正則 2 形式 $\omega_{X(\alpha)}$ が決まるため, $X(\alpha)$ は $\bar{\mu}$ について相対的にシンプレクティックと呼ぶ. すると今 $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が C^∞-自明ファイバー束だったことから $X(\alpha)$ についての周期写像が定義できる.

定義. (周期写像)
相対的正則シンプレクティック多様体 $(\mathcal{Y}, \omega_\mathcal{Y}, \bar{\mu})$ が S 上の C^∞ 級自明ファイバー束とする. C^∞ 級自明化 $\Phi : Y \times S \to \mathcal{Y}$ を取り Φ による $\omega_\mathcal{Y}$ の引き戻しを $\lambda := \Phi^* \omega_\mathcal{Y}$ と定める. このとき $\mathcal{Y}$ **の周期写像**を

$$p_\mathcal{Y} : S \longrightarrow H^2(Y;\mathbb{C}) \ : \ \xi \longmapsto [\lambda|_{Y \times \{\xi\}}]$$

という滑らかな写像として定める.

注意. 周期写像は正則写像であることが知られている.

さて周期写像と小平-スペンサー写像を比較するため, 一般的にシンプレクティック代数多様体 Y に対し $PD_Y(\mathbb{C}[\varepsilon])$ が $H^2(Y;\mathbb{C})$ と同一視されることに注意する.

命題 2.6. (Namikawa [Na1]) $PD_Y(\mathbb{C}[\varepsilon]) \cong H^2(Y;\mathbb{C})$

この命題から小平-スペンサー写像は $KS_\mathcal{Y} : T_0 S \to PD(Y, \mathbb{C}[\varepsilon]) \cong H^2(Y;\mathbb{C})$ という写像だと思うことができ, 以下が成立する.

命題 2.7. (小平-スペンサー写像と周期写像の関係)
上の命題の同型で小平スペンサー写像を $KS_\mathcal{Y} : T_0 S \to H^2(Y;\mathbb{C})$ とみなした時,

$$KS_\mathcal{Y} = (dp_\mathcal{Y})_0$$

が成立する. ただし右辺は周期写像の 0 における微分 $(dp_\mathcal{Y})_0 : T_0 S \to T_{p_\mathcal{Y}(0)} H^2(Y,\mathbb{C}) = H^2(Y,\mathbb{C})$ である.

この定理から周期写像の微分が同型かどうかを見ることで普遍性を判定できることになった.

さらに周期写像は Kirwan 写像と呼ばれる線形写像と等しいことを示す. 定義から同型 $Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times)$ 及び $Z(\mathfrak{g}^*) = Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ に注意して以下のように Kirwan 写像を定義する.

定義. (Kirwan 写像)
仮定 2.3 を満たす代数的シンプレクティック商 $Y(\alpha)$ について, その **Kirwan 写像** $\kappa^2_Y := \kappa^2_{\mathbb{Z},Y} \otimes \mathbb{C} \ : Z(\mathfrak{g}^*) \to H^2(Y,\mathbb{Z})$ を合成射

$$\begin{array}{ccccc} \kappa^2_{\mathbb{Z},Y} : Z(\mathfrak{g}^*)_\mathbb{Z} & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Hom}^{\mathrm{alg-grp}}(G, \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^2(Y,\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \xi := (d\rho)_1 & \longleftarrow\!\shortmid & \rho & \longmapsto & c_1(L_\rho) \end{array}$$

の複素化として定義する. ただし L_ρ は ρ が定める $Y(\alpha)$ 上の随伴直線束 $L_\rho := (\mu^{-1}(0))^{\alpha-st} \times_G \mathbb{C} \to Y(\alpha)$ とする.

実シンプレクティック幾何学で良く知られた Duistermaat-Heckman の定理の類似を, 正則シンプレティック多様体の場合に示すことによって以下を得る.

定理 2.8. (代数的シンプレクティック商の周期写像と Kirwan 写像の関係)
仮定 2.3 を満たす代数的シンプレクティック商 $Y(\alpha)$ に対し以下が成立する.

$$p_{X(\alpha)} = 2\pi\sqrt{-1}\kappa^2_{Y(\alpha)}$$

特に以下は同値である.

(i) $\kappa^2_{Y(\alpha)}$ は同型写像
(ii) $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ は $(Y(\alpha), \omega_0)$ の普遍ポアソン変形空間である.

注意. 上で Kirwan 写像が線形写像であることより, Kirwan 写像の同型性と Kirwan 写像の微分の同型性が同値であることを用いた.

第 4 節でハイパートーリック多様体の場合にこの定理と Kirwan 写像についての既知の結果を用いることで $\bar{\mu} : X(\alpha) \to Z(\mathfrak{g}^*)$ が $Y(\alpha)$ の普遍ポアソン変形空間となる必要十分条件を求める.

本節の残りではアファイン代数的シンプレクティック商 $Y(0)$ を含め, 一般の錐的シンプレクティック多様体の普遍ポアソン変形について述べる. 主な目的は Namikawa の定理 1.1 に現れた Namikawa-Weyl 群を [Na2] に則て定義することである. まず定義に必要な事実を述べる.

定理 2.9. (Kaledin [Kal])
$Y(0)$ を錐的シンプレクティック多様体とすると $Y(0)_{\mathrm{Sing}}$ は, 局所閉で非特異なシンプレクティック部分代数多様体たち $\{Y(0)_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ による分割を持つ. すなわち

$$Y(0)_{\mathrm{Sing}} = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} Y(0)_\gamma$$

この分解で各 $Y(0)_\gamma$ はシンプレクティック代数多様体のため偶数次元になっていることに注意する. 特に以下では余次元 2 の特異点集合を考察する.

補題 2.10. ([Na2])
$Y(0)$ を m 次元の錐的シンプレクティック多様体, $\pi : Y \to Y(0)$ をシンプレクティック特異点解消とする.

$$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} := Y(0)_{\mathrm{Sing}} - \bigsqcup_{\gamma:\mathrm{codim}\, Y(0)_\gamma \geq 4} Y(0)_\gamma$$

と定め, これの連結成分への分解を $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_k \Sigma^{(k)}$ と置く. この時各 k に対しある $\ell_k \geq 1$ が存在し, $\Sigma^{(k)}$ の各点 y の周りで

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{locally\ iso} & \tilde{S}_{\ell_k} \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p\times id} \\ (Y(0), y) & \xrightarrow{locally\ iso} & (S_{\ell_k}, 0) \times (\mathbb{C}^{2m-2}, 0) \end{array}$$

となる. ただし S_{ℓ_k} は ADE 型曲面特異点で $\tilde{S}_{\ell_k}$ はそれの最小特異点解消である (ここで ℓ_k は例外因子の既約成分の個数である).

各 $\Sigma^{(k)}$ について上のような S_{ℓ_k} を $\Sigma^{(k)}$ のスライスと呼ぶことにする. Namikawa-Weyl 群はこのスライスたちを用いて定義される. しかし後で考えるハイパートーリック多様体の場合は上の定理でとったスライス $S^{(k)}$ は A 型の場合しか現れないため, 以下ではこの場合のみ Namikawa-Weyl 群を定義する (一般的な定義は [Na2] を参照). さてスライス S_{ℓ_k} は A_{ℓ_k-1} 型曲面特異点であるが, このとき $\tilde{S}_{\ell_k}$ 内に現れる (-2)-曲線を C_i $(1 \leq i \leq \ell_k)$ と置くと

$$\Phi := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \;\middle|\; d_i \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \left(\sum_{i=1}^{\ell_k} d_i[C_i] \right)^2 = -2 \right\} \subset H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$$

は $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ 内の A_{ℓ_k-1} 型のルート系を定めている. 特に対応する Weyl 群 $W_{A_{\ell_k-1}} := \mathfrak{S}_{\ell_k}$ が $H^2(\tilde{S}_{\ell_k}, \mathbb{R})$ に作用している. しかし $\Sigma^{(k)}$ の上にある例外因子 $\pi^{-1}(\Sigma^{(k)})$ の既約成分は ℓ_k 個より少なくなっていることがある. より正確には交叉数の不変性を考慮すると Dynkin 図形の位数 2 のグラフ自己同型 ι (今の場合 A 型なのでグラフの中心で左右を入れ替える同型) で貼り合う箇所に対応する (-2)-曲線が大域的には張り合わさって既約成分が $\lfloor (\ell_k+1)/2 \rfloor$ 個になり得る (ただし $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す). いずれにしろ既約成分の個数を r と置くとき $W_{\Sigma^{(k)}}$ を

$$W_{\Sigma^{(k)}} := \begin{cases} W_{A_{\ell_k}} & (r = \ell_k) \\ \{\sigma \in W_{A_{\ell_k}} \mid \sigma\iota = \iota\sigma\} & (r = \lfloor (\ell_k+1)/2 \rfloor) \end{cases}$$

と定義すれば, $\Sigma^{(k)}$ の上の例外因子の既約成分のコホモロジー類の置換として $H^2(Y, \mathbb{R})$ に作用する. このとき Namikawa-Weyl 群を $W := \prod_k W_{\Sigma^{(k)}}$ と定義する.

3 ハイパートーリック多様体とローレンストーリック多様体

代数的シンプレクティック商で G がトーラスの場合として, ハイパートーリック多様体を以下で定義したい. まず以下の自由アーベル群の完全系列が与えられたとする.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-d} \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^d \longrightarrow 0$$

そして後で用いるため行列 A, B を次のようにそれぞれ列ベクトル, 行ベクトルで表示しておく.

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}$$

さて上の完全列に対し $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{C}^\times)$ を取ると次の代数トーラスの間の完全系列を得る.

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^d \xrightarrow{{}^tA} \mathbb{T}^n \xrightarrow{{}^tB} \mathbb{T}^{n-d} \longrightarrow 1$$

注意. 以下では行列 A がユニモジュラー (i.e., 全ての $d \times d$-小行列式は 0 か ± 1 となる) となっていると仮定する. これは以下で定義するハイパートーリック多様体が仮定 2.3 を満たすために必要となる.

さて以下でハイパートーリック多様体及びそれを含むトーリック多様体である Lawrence トーリック多様体を定義する.

定義 & 補題 3.1. (Lawrence トーリック多様体とハイパートーリック多様体)
上の状況で ${}^tA : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^n$ の埋め込みによって $\mathbb{T}^d$ の $\mathbb{C}^n$-表現を考え, この表現から自然に定まる $\mathbb{T}^d$ の $(\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*, \omega_{\mathbb{C}} := \sum_{j=1}^n dz_j \wedge dw_j)$ への作用を考える. この時モーメント写像は

$$\mu : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^d \quad : \quad (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \mapsto \sum_{j=1}^n z_j w_j \boldsymbol{a_j}$$

で与えられる. そこで

$$X(A, \alpha) := X(\alpha)$$

$$Y(A, (\alpha, \xi)) := Y(\alpha, \xi)$$

と定め, それぞれ **Lawrence トーリック多様体**, **超トーリック多様体**と呼ぶ (cf. 定義&補題 2.2).

注意. 一般の代数的シンプレクティック商の時と同様に, 以下のような $\mathbb{C}^\times$-同変な可換図式が存在することに注意する. なお A をユニモジュラー, α を generic に取っておけば $\pi := \pi_0$ はシンプレクティック特異点解消を与えることが知られている.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y(A,\alpha) & \xrightarrow{\pi} & Y(A,0) \\
 & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
X(A,\alpha) & & \xrightarrow{\Pi} & X(A,0) & \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & \\
\mathbb{C}^d & = & \mathbb{C}^d & & 0
\end{array}$$

4 非特異ハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形

さて非特異ハイパートーリック多様体の場合には Kirwan 写像がいつ同型になるかについて Konno([Ko1]) による次の結果が知られている.

定理 4.1. (Konno [Ko1])
A がユニモジュラー, α を generic とする. すべての i に対し $\boldsymbol{b_i} \neq 0$ ならば Kirwan 写像 $\kappa^2_{Y(\alpha)}$ は同型

この結果と定理 2.8 から次が従う.

系 4.2. 上の定理の仮定を満たす時, Lawrence トーリック多様体 $X(A, \alpha)$ 及び射 $\bar{\mu} : X(A, \alpha) \to \mathbb{C}^d$ が非特異ハイパートーリック多様体 $Y(A, \alpha)$ の普遍ポアソン変形を与える.

注意. 与えられたハイパートーリック多様体 $Y(A, \alpha)$ が定理 4.1 の仮定を満たさない時も A と α を適切に別の A', α' に取り換えることで, 仮定を満たしかつシンプレクティック代数多様体として $Y(A, \alpha) \cong Y(A', \alpha')$ とできることが分かる.

5　アファインハイパートーリック多様体の普遍ポアソン変形

本節ではアファインハイパートーリック多様体 $Y(A,0)$ の普遍ポアソン変形を決定したい．まず Namikawa Weyl 群を決定する．以下で行列 A がユニモジュラーということから行列 B の各行ベクトルを並び替えたり ± 1 倍したりすることで

$$B = \left(\begin{array}{c} B^{(1)} \\ \hline B^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline B^{(s)} \end{array}\right), \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b^{(k)}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b^{(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{ただし } k_1 \neq k_2 \text{ なら } \boldsymbol{b^{(k_1)}} \text{ と } \boldsymbol{b^{(k_2)}} \text{ は互いに平行ではない.}$$

という形に取り換えられることに注意する ($B^{(k)}$ は $\ell_k \times (n-d)$ 行列とする)．以下では特に断らない限り, B がこのような形になっていると仮定する．すると補題 2.10 で述べた余次元 2 の特異点集合の連結成分への分解及びスライスは以下のように与えられることが分かる．

系 5.1. ([PW] の系)
アファインハイパートーリック多様体 $Y(A,0)$ の余次元 2 の特異点集合 $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ は

$$\Sigma_{\mathrm{codim}\,2} = \bigsqcup_{k=1}^{s} \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$$

という連結成分への分解を持つ．ここで

$$\mathring{Y}^{(k)}(A,0) := \left\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \in \mathbb{C}^{2n} \;\middle|\; i \in \{m_{k-1}+1,\dots,m_k\} \Leftrightarrow (z_i,w_i)=0\right\} /\!/ \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \subseteq Y(A,0)$$

はシンプレクティック部分代数多様体である (ただし $m_k := \sum_{i=1}^{k} \ell_i$ と定める)．さらに各点 $y \in \mathring{Y}^{(k)}(A,0)$ におけるスライスは A_{ℓ_k} 型曲面特異点である．特に $Y(A,0)$ の Namikawa-Weyl 群 W は $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の部分群である．

以下で $W = W_B$ となることを示したい．本来 Namikawa-Weyl 群の定義から W を求めるためには上の系で述べたような局所的な記述ではなく大域的に $\Sigma_{\mathrm{codim}\,2}$ の定める $Y(A,\alpha)$ 内の例外因子の既約成分がいくつあるかを見る必要があった．これを直接見るのは一般には難しい．しかし今ハイパートーリック多様体及びローレンストーリック多様体が満たす次の $\mathbb{C}^\times$-同変な図式があることに注意する．

$$\begin{array}{ccccc} & & Y(A,\alpha) & \xrightarrow{\pi} & Y(A,0) \\ & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ X(A,\alpha) & \xrightarrow{\Pi} & X(A,0) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} \\ \mathbb{C}^d & = & \mathbb{C}^d & & \ni\ 0 \end{array}$$

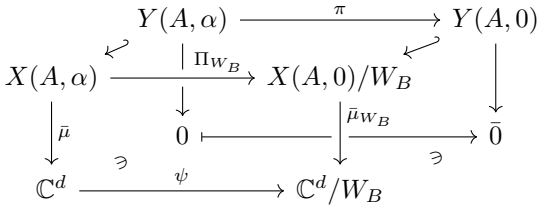
今系 4.2 で見たように $\bar{\mu} : X(A,\alpha) \to \mathbb{C}^d$ は $Y(A,\alpha)$ の普遍ポアソン変形であった．すると $W = W_B$ となることを示すためには定理 1.1 及び普遍性から次を示せば十分なことがすぐに分かる．なおこの補題は Namikawa-Weyl 群の作用の具体的な記述も与えている．

補題 5.2. 上の状況で $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s}$ の $X(A,0)$ と $\mathbb{C}^d$ への作用で以下を満たすものが構成できる.

(i) $\mathbb{C}^d$ への W_B-作用は線形作用で, $X(A,0)$ への W_B-作用はポアソン構造を保つ.
(ii) $\bar{\mu} : X(A,0) \to \mathbb{C}^d$ は W_B-同変である.
(iii) W_B-作用は $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ への錐的 $\mathbb{C}^\times$-作用と可換である.
(iv) W_B は $Y(A,0) \subseteq X(A,0)$ には自明に作用する.

具体的には $W_B := \mathfrak{S}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\ell_s} \subseteq \mathfrak{S}_n$ と思って $\mathbb{C}^{2n}$ の座標 $z_1, \ldots, z_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ それぞれの置換作用が $X(A,0)$ への作用を誘導し, $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ たちの置換作用が $\mathbb{C}^d = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ への作用を誘導する.

定理 5.3. (主定理)
A がユニモジュラーで α が generic とする. そして B は上で述べたような形に取り換えておいてあるとし, W_B を $X(A,0)$, $\mathbb{C}^d$ に上で述べたように作用させたとき, ハイパートーリック多様体に対する定理 1.1 の可換図式は次のように与えられる (ただし Π_{W_B} は $\Pi : X(A,\alpha) \to X(A,0)$ と W_B による商写像の合成とする).



参考文献

[BD] R. Bielawski and A. Dancer. The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds. Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 727-760.

[HSt] T. Hausel and B. Sturmfels. Toric hyperKähler varieties. Doc. Math. 7 (2002), 495-534 (electronic).

[Kal] D. Kaledin. Symplectic singularities from the Poisson point of view. J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135-156.

[Ko1] H. Konno. Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 11 (2000), no. 8, 1001-1026.

[Ko2] H. Konno. Variation of toric hyperkähler manifolds. Internat. J. Math. 14 (2003), no. 3, 289-311.

[Na1] Y. Namikawa. Flops and Poisson deformations of symplectic varieties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), 259-314

[Na2] Y. Namikawa. Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727-752.

[Na3] Y. Namikawa. Poisson deformations and birational geometry. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 339-359.

[PW] N. Proudfoot and B. Webster. Intersection cohomology of hypertoric varieties. J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 1, 39-63.

[Slo] P. Slodowy. Four lectures on simple groups and singularities. Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 11. Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht, 1980. ii+64 pp.

多項式減衰する初期値を持つ分散効果を伴う粘性保存則方程式の解の長時間挙動

福田一貴 (Ikki FUKUDA)

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士後期課程 1 年

概要

本講演では, 非線形波動を記述する偏微分方程式の一つである, 分散項付きの粘性保存則方程式に対する, 初期値問題の時間大域解の長時間挙動を取り扱う. 初期値は十分小さく, 多項式減衰しているとする. この方程式の解は非線形散逸波と呼ばれる Burgers 方程式の自己相似解に漸近することが知られている. 本講演では, 初期値の減衰度合いが非線形散逸波への漸近の速さにどう影響してくるのかについて, 得られた研究結果を紹介する.

1 導入

本講演では, 非線形波動を記述する偏微分方程式の一つである, 分散効果を伴う粘性保存則方程式に対する初期値問題の時間大域解の長時間挙動について考える:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x + ku_{xxx} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $f(u) = (b/2)u^2 + (c/3)u^3$, $b, c, k \in \mathbb{R}$ とし, 初期値 $u_0(x)$ は以下の仮定を満たすとする:

$$\exists \alpha > 1,\ \exists C > 0 \ \ s.t. \ \ |u_0(x)| \le C(1+|x|)^{-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

特に, 初期値 $u_0(x)$ は仮定 (1.2) より $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ であることに注意する. この方程式は, 非線形性を持つ移流 $(f(u))_x$, 分散 u_{xxx}, 及び拡散 u_{xx} の三つの効果を考慮した非線形波の方程式の一つである. 数学の分野において, この方程式は, 基本的な非線形波の方程式である Burgers 方程式と KdV 方程式を組み合わせ, 移流項を一般化したものであることから, 一般化された KdV-Burgers 方程式と呼ばれている. この方程式の数学解析により, 波動現象を理論的に説明することが可能となる. しかし一般に, 与えられた偏微分方程式の解を具体的に書き表すことは非常に困難である. そこで, 解の形状の時間変化を調べる上で, 十分時間が経過した時に, 与えられた条件で解がどのように振る舞うのか, その長時間挙動 (漸近挙動) を解析することが重要となる. 本講演では, 初期値問題 (1.1) の時間大域解について, 解の時間無限大における漸近形と, その漸近形への漸近レート (漸近形への収束の速さ) や, 解の第 2 漸近形 (時間無限大における漸近展開の第 2 項目) について考える. 特に, 初期値 $u_0(x)$ が (1.2) のように空間遠方で多項式減衰している場合に, その減衰度合いの違いや, 移流と分散の効果が解の漸近挙動にどのような影響を与えるのかについて考察する.

2 既知の結果

まず, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動について, 関連する先行結果を紹介する.

一般化された Burgers 方程式について ($k = 0$)

初期値問題 (1.1) で $k = 0$ とした以下の方程式は, 一般化された Burgers 方程式と呼ばれている:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

この問題については, Kawashima [4] 等の研究で, 単独の方程式だけでなく方程式系の場合も含めて, 時間大域解の存在や解の漸近挙動に関する考察がなされている. また, 単独方程式については $c = 0$ の場合に Liu [7] 等でより詳しい解析が行なわれている. 具体的には, 解は非線形散逸波と呼ばれる以下の関数 $\chi(x,t)$ に漸近することが知られている.

e-mail: i.fukuda@math.sci.hokudai.ac.jp

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 35B40; Secondary 35Q53.

$$\chi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t}}\chi_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b}\frac{(e^{b\delta/2}-1)e^{-x^2/4}}{\sqrt{\pi}+(e^{b\delta/2}-1)\int_{x/2}^{\infty}e^{-y^2}dy}, \quad \delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \quad b \neq 0.$$

ここで, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ は Burgers 方程式

$$\chi_t + \left(\frac{b}{2}\chi^2\right)_x = \chi_{xx}, \quad \int_{\mathbb{R}}\chi(x,0)dx = \delta$$

の解である. 更に Matsumura & Nishihara [8] は, 初期値問題 (2.1) の解 $u(x,t)$ の非線形散逸波への漸近に関して,

$$w_0(x) \equiv \exp\left(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x}u_0(y)dy\right) - \exp\left(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x}\chi(y,0)dy\right)$$

とおき, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいという仮定のもとで次の評価を導いた:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

この時間減衰評価 (2.3) の最適性について, Kato [5] によって, $\delta \neq 0$, $c \neq 0$, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1}$ が十分小さいときに, この評価が最適であることが示された. ここで,

$$L^1_1(\mathbb{R}) \equiv \left\{u_0 \in L^1(\mathbb{R}) |\ \|u_0\|_{L^1_1} \equiv \int_{\mathbb{R}}|u_0(x)|(1+|x|)dx < \infty\right\}$$

とした. (なお, 初期値 $u_0(x)$ に対する仮定 (1.2) と $w_0(x)$ 等の定義から直接計算することにより, $\alpha > 2$ かつ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ であれば, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ や $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ が実現されることに注意する.) 実際, 解の第 2 漸近形 $V_1(x,t)$ とその第 2 漸近形への漸近に関する評価が以下で与えられる:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V_1(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1. \tag{2.4}$$

ここで, $V_1(x,t)$ は次で定められた関数である :

$$\begin{aligned} V_1(x,t) &\equiv -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}}V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(1+t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ V_*(x) &\equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-x^2/4}\eta_*(x) = 2\frac{d}{dx}(\eta_*(x)e^{-x^2/4}), \\ \eta_*(x) &\equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{x}\chi_*(y)dy\right), \quad d \equiv \int_{\mathbb{R}}(\eta_*(y))^{-1}(\chi_*(y))^3dy. \end{aligned} \tag{2.5}$$

この評価 (2.4), $V_1(x,t)$ の定義及び三角不等式を用いることで, $\delta \neq 0$ かつ $c \neq 0$ のもとで, 十分大きい $t > 0$ に対して以下のような評価が得られる.

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \leq \|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}\log(1+t). \tag{2.6}$$

すなわち解 $u(x,t)$ が非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近することがわかり, さらに $u-\chi$ は $V_1(x,t)$ へ t^{-1} のレートで漸近することがわかった. このような $u-\chi$ の漸近形は解の第 2 漸近形と呼ばれる. (解の時間無限大での漸近展開において, $\chi(x,t)$ が主要項に, $V_1(x,t)$ が第 2 項目に対応する.)

KdV-Burgers 方程式について ($b = k = 1$, $c = 0$)

一方, 初期値問題 (1.1) で $b = k = 1$, $c = 0$ とした KdV-Burgers 方程式

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + u_{xxx} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{2.7}$$

の解の漸近挙動についても, 非線形散逸波 $\chi(x,t)$ への漸近とその漸近レートに関する結果が Karch [4] や Hayashi & Naumkin [2] 等により得られている. 更に, 非線形散逸波への漸近レートの最適性に関する解析や, 解の第 2 漸近形の

構成についても, Kato [5] と類似の結果が得られている. 具体的には, Kaikina & Ruiz-Paredes [3] により, $s > -1/2$ として, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ のときに, 次の評価が導かれた:

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t-1) - V_2(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-1}\sqrt{\log t}, \quad t > 1. \tag{2.8}$$

ここで,

$$V_2(x,t) \equiv -\frac{d}{32\sqrt{\pi}} V_*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) t^{-1}\log t$$

であり, $V_*(x)$ 及び d は (2.5) で定義された関数である. この結果によって, KdV-Burgers 方程式の初期値問題 (2.7) の場合であっても, (2.6) と同様の評価が導けるため, 解 $u(x,t)$ は非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に $t^{-1}\log t$ のレートで漸近し, このレートが最適であることがわかる. しかし第 2 漸近形 $V_2(x,t)$ への漸近レートに関しては, 一般化された Burgers 方程式のときの Kato の結果 (2.4) と比べると, (2.8) は $\sqrt{\log t}$ 分粗い評価となっている. Kaikina と Ruiz-Paredes は彼らの論文 [3] の中で, この $\sqrt{\log t}$ は, より繊細な計算によって取り除けると述べているが, 証明はされていない.

一般化された KdV-Burgers 方程式について (一般の初期値問題 (1.1))

上記の背景のもとに, F. [1] は任意の $b, c, k \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動に関する研究を行い, 解の第 2 漸近形を構成し, 評価 (2.4) に類似の, (2.8) を改良した次の結果を得た:

定理 1 ([1] の Theorem 1.1)**.** $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. このとき初期値問題 (1.1) は, $u \in C^0([0,\infty); H^3)$ かつ $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^3)$ を満たす唯一の時間大域解 $u(x,t)$ を持つ. さらに $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3}$ が十分小さいとすると, 以下の評価が成り立つ :

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{2.9}$$

ここで, $\chi(x,t)$ は (2.2) で定義された非線形散逸波であり, $V(x,t)$ は次で定められた関数である :

$$V(x,t) \equiv -\frac{d}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{b^2k}{8} + \frac{c}{3}\right) V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(1+t), \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

この評価 (2.9) と $V(x,t)$ の定義及び三角不等式より, $\delta \neq 0$ かつ $(b^2k)/8 + c/3 \neq 0$ であれば, 十分大きい $t > 0$ に対して, (2.6) と同様の次の評価が成り立つ:

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t). \tag{2.11}$$

なお, $(b^2k)/8 + c/3 = 0$ の時には $V(x,t)$ が恒等的にゼロとなるので, (2.9) より

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1$$

が成り立ち, 非線形散逸波への漸近レートとして, log 項を取り除いた t^{-1} が得られることに注意する.

3 研究の主結果

上記で紹介した [1], [3], [5] 等の先行結果では, 全体を通して, 初期値が $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R})$ と仮定しており, 仮定 (1.2) において $\alpha > 2$ という部分に対応する研究が行なわれていた. そこで本研究では, 初期値がより緩やかに多項式減衰する $1 < \alpha \le 2$ の場合の解の漸近挙動に関する考察を行い, 対応する解の第 2 漸近形を具体的に構成することによって, 非線形散逸波への漸近について, 以下の結果を得ることができた:

定理 2 (F., In Preparation)**.** 初期値 $u_0(x)$ に対して (1.2) を仮定し, $1 < \alpha \le 2$ とする. また, $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^3}$ は十分小さいと仮定する. 更に $\Psi_0(x) \equiv \eta_*(x)^{-1}\int_{-\infty}^{x}(u_0(y) - \chi_*(y))dy$ とおき, $\lim_{|x|\to\infty}(1+|x|)^{\alpha-1}\Psi_0(x) = C_\alpha (\neq 0)$ であるとする. この時, 初期値問題 (1.1) の解に対して次が成り立つ :

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\alpha/2}\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \tag{3.1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+t)}{\log(1+t)}\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad \alpha = 2. \tag{3.2}$$

ここで, $\Psi(x,t)$ は次で定義された関数である :

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &\equiv C_\alpha \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G(x-y,t)\eta(x,t))(1+|y|)^{-(\alpha-1)}dy,\\ \eta(x,t) &\equiv \eta_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

この結果により, 初期値問題 (1.1) の解の漸近挙動について, 初期値の減衰度合いが弱い $1<\alpha<2$ の場合には, 定理 1 の場合とは異なった解の第 2 漸近形 $\Psi(x,t)$ と, その漸近レートが与えられることがわかった. また, $\alpha=2$ の場合には, 定理 1 における (2.10) の $V(x,t)$ と $\Psi(x,t)$ を組み合わせた $\Psi(x,t)+V(x,t)$ が第 2 漸近形となる. これらの第 2 漸近形については, (3.3) の表示を用いて直接評価することで, $1<\alpha<2$ かつ $C_\alpha \neq 0$ ならば

$$\tilde{C}(1+t)^{-\alpha/2} \le \|\Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2} \tag{3.4}$$

が成り立ち, この評価 (3.4) と (3.1) と三角不等式を組み合わせれば, 十分大きな $t>0$ に対して

$$\tilde{C}(1+t)^{-\alpha/2} \le \|u(\cdot,t)-\chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2} \tag{3.5}$$

が得られる. 一方 $\alpha=2$ に対しては, (2.10) と (3.3) を用いて評価すると, $C_2 \neq d((b^2k)/8+c/3)$ の場合に, 十分大きな $t>0$ に対して

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|\Psi(\cdot,t)+V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t) \tag{3.6}$$

を示すことができ, (3.2) と三角不等式を用いれば十分大きな $t>0$ では,

$$\tilde{C}(1+t)^{-1}\log(1+t) \le \|u(\cdot,t)-\chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(1+t) \tag{3.7}$$

が得られる (これらの評価 (3.4) と (3.6) の具体的な導出方法については講演の中で紹介する). $\alpha>2$ の場合における評価 (2.11), $\alpha=2$ の時の (3.7), 及び $1<\alpha<2$ での (3.5) をまとめると, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ の非線形散逸波への漸近レートは, 初期値の減衰度合いの違いにより, $\alpha\ge 2$ と $1<\alpha<2$ で大きく変化することが確認できる. 特に $1<\alpha<2$ の場合には, 初期値の減衰率 α が漸近レートに色濃く反映されていることがわかる.

4 主定理の証明の方針

最後に, 定理 2 の証明の方針とその考え方について紹介する. まず, $\psi(x,t)\equiv u(x,t)-\chi(x,t)$ とおく. すると, $u(x,t)$ と $\chi(x,t)$ の満たす方程式から, 摂動 $\psi(x,t)$ が次の方程式を満たすことがわかる:

$$\begin{aligned}\psi_t+(b\chi\psi)_x-\psi_{xx} &= -\left(\frac{b}{2}\psi^2\right)_x-\left(\frac{c}{3}u^3\right)_x-ku_{xxx},\\ \psi_0(x) &= u_0(x)-\chi(x,0).\end{aligned} \tag{4.1}$$

この摂動方程式 (4.1) を解析するために, 次の予備問題を考える:

$$\begin{aligned}z_t+(b\chi z)_x-z_{xx} &= \partial_x\lambda(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R},\\ z(x,0) &= z_0(x), \quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで, $\lambda(x,t)$ は十分なめらかなで, 空間遠方で減衰する既知の関数とする. この方程式については, Burgers 型の方程式に特有の Hopf-Cole 変換に類似した変換を用いることで, 方程式を熱方程式に書き換えることができ, 解の具体的な表示を得られることが知られている. 実際,

$$U[h](x,t,s)\equiv \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-s)\eta(x,t))\eta(y,s)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{y} h(\xi)d\xi\right)dy \tag{4.3}$$

と定めれば, 次が成り立つ (証明は [1], [5] を参照):

補題 1. 初期値問題 (4.2) の解 $z(x,t)$ は次で与えられる.

$$z(x,t)=U[z_0](x,t,0)+\int_0^t U[\partial_x\lambda(s)](x,t,s)ds, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

摂動方程式 (4.1) に対して補題 1 を用いれば, $\psi = u - \chi$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} u - \chi = U[\psi_0](x,t,0) &- \frac{b}{2}\int_0^t U[\partial_x \psi^2(s)](x,t,s)ds \\ &- \frac{c}{3}\int_0^t U[\partial_x u^3(s)](x,t,s)ds - k\int_0^t U[\partial_x^3 u(s)](x,t,s)ds \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

ここで, I_1 から I_4 に対して, 解 $u(x,t)$ の時間減衰評価 ([1] の Lemma 2.3):

$$\begin{aligned} \|\partial_x^l u(\cdot,t)\|_{L^1} \le & Ct^{-l/2}(1+t^{-1/4}), \quad t>0, \quad l=0,1,2,3, \\ \|\partial_x^l u(\cdot,t)\|_{L^2} \le & C(1+t)^{-1/4-l/2}, \quad t\ge 0, \quad l=0,1,2,3, \end{aligned}$$

及び非線形散逸波 $\chi(x,t)$ と熱核 $G(x,t)$ の時間減衰評価:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^l \chi(\cdot,t)\|_{L^p} &\le C(1+t)^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad t\ge 0, \quad l\in\mathbb{Z}_+, \\ \|\partial_x^l G(\cdot,t)\|_{L^p} &\le Ct^{-(1/2)(1-1/p)-l/2}, \quad t>0, \quad l\in\mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

(証明は [5], [8] 等を参照) を適用すると, α の減衰度合いが弱い $1<\alpha<2$ の時には摂動項の I_2, I_3, I_4 の方が初期値部分の I_1 よりも時間減衰が早いことがわかり, $\alpha = 2$ の時には両者の減衰オーダーが一致していることが示せる (詳しい評価については, 講演の中で紹介する). このことから, 初期値の減衰の弱い場合には, $u-\chi$ の主要部は I_1 によって決定されることが予想され, 解の第 2 漸近形は初期値部分である I_1 から導かれると考えられる. 実際, この I_1 については (4.3) により具体的な表示が与えられているので, 緩やかに減衰する初期値を持つ半線形熱方程式の解析に用いられた Narazaki & Nishihara [9] の手法を応用することで, 次の漸近公式を示すことができる:

補題 2. *$U[\psi_0](x,t,0)$ と (3.3) で定義された $\Psi(x,t)$ について, 次の公式が成り立つ:*

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\alpha/2}\|U[\psi_0](\cdot,t,0)-\Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad 1<\alpha<2, \tag{4.5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+t)}{\log(1+t)}\|U[\psi_0](\cdot,t,0)-\Psi(\cdot,t)\|_{L^\infty} = 0, \quad \alpha = 2. \tag{4.6}$$

これらの漸近公式と I_2, I_3, I_4 の時間減衰評価を組み合わせることで, (3.1) と (3.2) が導かれる.

5 謝辞

本研究は, 北海道大学博士課程教育リーディングプログラム「物質科学フロンティアを開拓する Ambitious リーダー育成プログラム」による支援を受けたものである.

参考文献

[1] I. Fukuda, *Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation*, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, **1105** (2017), 1-20.

[2] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **22** (2006), 1441-1456.

[3] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes, *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math, **42** (2005), 407-420.

[4] G. Karch, *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Analysis, **35** (1999), 199-219.

[5] M. Kato, *Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations*, Osaka J. Math, **44** (2007), 923-943.

[6] S. Kawashima, *Large-time behavior of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **106** (1987), 169-194.

[7] T.-P. Liu, *Hyperbolic and viscous conservation laws*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **72**, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[8] 松村昭孝, 西原健二, 非線形微分方程式の大域解-圧縮性粘性流の数学解析-, 日本評論社, 2004.

[9] T. Narazaki and K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 803-819.

パラレルセッション
会場Ｃ

Bogoliubov変換を用いた抽象的ϕ^2-モデルの解析

浅原 啓輔 (ASAHARA KEISUKE)　(北海道大学大学院理学院数学専攻)*

1. 導入

場の量子論は電磁場や重力場などの古典場を量子化することで得られる理論である。この理論は物理学において重ね合わせの原理や状態の遷移確率を描像すること，また素粒子の生成，消滅を記述することを要請している。そのため場の量子論を数学的に記述するためには，ヒルベルト空間上のフォック空間を考えるのがよい。また，素粒子にはボソンとフェルミオンの二種類がある。ボソンは何個でも同一の状態になることができる。したがってボソン系を考察する場合，ボソンフォック空間というフォック空間を対称化した空間を考える必要がある。この場合，考察下の系の状態はボソンフォック空間のベクトルで記述され，物理量はボソンフォック空間上の自己共役作用素で記述されると解釈される。またこのとき，物理量を観測した際の実現値全体は自己共役作用素のスペクトルと一致する。こうして場の量子論の研究においてボソンフォック空間上の作用素のスペクトル解析が重要であることがわかる。

多くの場合ハミルトニアン H は $H := H_0 + H_I$ の形で表される。ここで H_0 はスペクトルがよくわかっている自己共役作用素である。H が物理量として意味を持つためには自己共役作用素であることが要求されるが，一般にこれは非自明である。そのためハミルトニアンの解析をするにあたり，自己共役性を示すこととそのスペクトル特性を調べることが肝要である。さらに，系が安定していることを示す基底状態の存在を証明することは，重要な問題の1つである。本紙では抽象的ϕ^2-モデルのスペクトル解析をBogoliubov変換を用いて行っていく。

2. モデルの定義

まずいくつか記号と用語を導入していく。一般に稠密に定義された可閉作用素 T に対して T^* はその共役作用素，$\overline{T}$ はその閉包を表すとする。また自己共役作用素 T に対して，その固有ベクトルを T の束縛状態という。特にT が下に有界な場合で，かつ最低エネルギー $E_0 := \inf \sigma(T)$ が固有値であるとき，固有値 E_0 に対する固有ベクトルを基底状態という。ここで $\sigma(T)$ は T のスペクトル全体を表す。

次に抽象的ϕ^2-モデルを定義していく。本研究は，対相互作用モデルを抽象的なヒルベルト空間上に一般化したハミルトニアンのスペクトル解析をしたものである。対相互作用モデルのラグランジアンは$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$を古典場として，

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \{(\partial_t\phi(t,x))^2 - (\nabla\phi(t,x))^2 - m^2\phi(t,x)^2\}dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(t,x)V(x,x')\phi(t,x')dxdx' \end{aligned}$$

で表されるもののうち，特に $V(x,x') = -\lambda\rho(x)\rho(x')$ に対するものである。ここで $\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数であり，ρ は適切な関数である。このモデルは先行研究 [1],[2] などに

本研究は船川大樹氏 (北海道大学大学院理学院) との共同研究である。
キーワード：場の量子論, Bogoliubov 変換
* 〒 060-0808 北海道札幌市北区北 8 条西 5 丁目 北海道大学 大学院理学院数学専攻
e-mail: asahara@math.sci.hokudai.ac.jp

おいて研究されている。上記の対相互作用モデルを，抽象的なヒルベルト空間$\mathscr{H}$上のボソンフォック空間$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\rm symm}^{n} \mathscr{H}$ではたらく以下の線形作用素$H(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$に一般化する：

$$H(\lambda) := {\rm d}\Gamma_{\rm b}(T) + \frac{\lambda}{2}\Phi_{\rm s}(g)^2.$$

ここで${\rm d}\Gamma_{\rm b}(T)$は$\mathscr{H}$上の非負自己共役作用素Tによる第二量子化作用素で，$\Phi_{\rm s}(g)$ ($g \in \mathscr{H}$) は Segal 場を表しそれぞれ以下のように定義される作用素である:

$$\begin{aligned}
{\rm d}\Gamma_{\rm b}(T) &:= \oplus_{n=0}^{\infty} T_b^{(n)}, \\
T_b^{(n)} &:= \sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{T}^{j-{\rm th}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \restriction \otimes_s^n {\rm D}(T),\ n \geq 1,\ T_b^{(0)} := 0, \\
\Phi_{\rm s}(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(A(f) + A(f)^*)}, A(f) := (A(f)^*)^*,\ f \in \mathscr{H}, \\
(A(f)^*\psi)^{(n+1)} &:= \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \psi^{(n)}), n \geq 0, (A(f)^*\psi)^{(0)} := 0,\ \psi \in \hat{\oplus}_{n=0}^{\infty} \hat{\otimes}_{\rm symm}^{n}(\mathscr{H}).
\end{aligned}$$

ここで$A(f), A(f)^*$はそれぞれ消滅作用素，生成作用素と呼ばれる作用素であり，Iは$\mathscr{H}$上の恒等作用素である。Tが非負自己共役作用素であることにより，${\rm d}\Gamma_{\rm b}(T)$も非負自己共役作用素であり，0を固有値として持つ。例としてmを非負定数，$\mathscr{H} = {\rm L}^2(\mathbb{R}^d)$，$\omega(k) := (|k|^2 + m^2)^{1/2}$とし，$\omega$による掛け算作用素を$\hat{\omega}$と表すとする。すなわち，$\int_{\mathbb{R}^d} |\omega(k)f(k)|^2 dk < \infty$となるような$f \in {\rm L}^2(\mathbb{R}^d)$に対して，$(\hat{\omega}f)(k) := \omega(k)f(k), k \in \mathbb{R}^d$とおく。このとき，$\sigma(\hat{\omega}) = [m, \infty)$であり特に$\sigma({\rm d}\Gamma_{\rm b}(\hat{\omega})) = \{0\} \cup [m, \infty)$となる。また，$\Phi_{\rm s}(g)$も自己共役作用素であり，そのスペクトルは$\sigma(\Phi_{\rm s}(g)) = \mathbb{R}$である。

3. 主結果

さて，ハミルトニアン$H(\lambda)$のスペクトル解析を行うにあたり，このまま解析することは難しい。そこで，ハミルトニアンをユニタリ変換することにより解析を行っていく。そのため，まず主結果の証明に用いる道具を紹介する。Jを$\mathscr{H}$上の共役子とする，すなわちJは$\mathscr{H}$上の反線形作用素であり，$J^2 = I$とすべての$f \in \mathscr{H}$に対して$\|Jf\| = \|f\|$を満たす。また$\mathscr{H}$上の有界線形作用素U, Vは次を満たすものとする：

$$\begin{aligned}
&U^*U - V^*V = I,\ JU^*JV - JV^*JU = 0, \\
&UU^* - JVV^*J = I,\ UV^* - JVU^*J = 0.
\end{aligned}$$

このとき，$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$上ではたらく作用素$B(f), f \in \mathscr{H}$を

$$B(f) := A(Uf) + A(JVf)^*,$$

とおく。このとき，対応$(A(\cdot), A(\cdot)^*) \to (B(\cdot), B(\cdot)^*)$を**Bogoliubov 変換**という。Bogoliubov 変換について，一般に次の定理が知られている。

Theorem 3.1. 全ての$f \in \mathscr{H}$に対して

$$\mathbb{U}B(f)\mathbb{U}^{-1} = A(f),$$

を満たす$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$上のユニタリ作用素$\mathbb{U}$が存在するための必要十分条件は，$V$がヒルベルトシュミット作用素であることである [3]。

T を下に有界な自己共役作用素とし，$E(\cdot)$ を T に同伴するスペクトル測度とする。各 $f, g \in \mathscr{H}$ に対して，1次元Borel集合体上の複素測度 $\langle g, E(\cdot)f\rangle$ がLebesgue 測度に関して絶対連続であるとき，そのRadon-Nikodym 導関数を $\psi_{g,f}$ と表すとする。特に $\psi_g := \psi_{g,g}$ とする。また，線形作用素 A に対して，A の定義域を $\mathrm{D}(A)$ と書く。

Assumption 3.2. *1.* T は純粋に絶対連続な非負自己共役作用素である。

2. $\mathscr{H}$ 上のある共役子 J が存在して $JTJ = T$，$Jg = g$ が成り立つ。

3. $\hat{T} := T - E_0$ に対して $g \in \mathrm{D}(\hat{T}^{-1/2}) \cap \mathrm{D}(T)$ を満たす。

4. $\sup_{x\in\sigma(T)} x^{\pm 1}\psi_g(x) < \infty$. ψ_g は連続で $\psi_g \in C^1(\sigma(T)\backslash\{E_0\})$，また全ての $x \in \sigma(T)\backslash\{E_0\}$ に対して $\psi_g(x) > 0$ を満たす。

5. 次の等式が成り立つ：

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{s-1\le x\le s+1} \left| \frac{d\psi_g(\sqrt{x})}{dx} \right| = 0.$$

6. 全ての $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ と $s \ge 0$ に対して $c \le |D(s \pm i\varepsilon)| \le d$ が成り立つような $\varepsilon_0 > 0$ と定数 $0 < c \le d$ が存在する。ただし $D : \mathbb{C}\backslash(0,\infty) \to \mathbb{C}$ は次で定義される複素関数である：

$$D(z) := 1 + \lambda \int_{[E_0,\infty)} \frac{\mu}{\mu^2 - E_0^2 - z} d\|E(\mu)g\|^2,\ z \in \mathbb{C}\backslash(0,\infty).$$

Assumption 3.2 を満たす T と g に対して2つの定数 $\lambda_{\mathrm{c},0} \le \lambda_{\mathrm{c}} < 0$ を次で定義する：

$$\lambda_{\mathrm{c},0} := -\|T^{-1/2}g\|^{-2},\ \lambda_{\mathrm{c}} := -\left(\int_{[E_0,\infty)} \frac{\mu}{\mu^2 - E_0^2} d\|E(\mu)g\|^2 \right)^{-1}.$$

本研究の主結果は以下の通りである。

Theorem 3.3. T と g は *Assumption 3.2 (1)-(6)* を満たすとする。このとき，以下が成り立つ*:*

1. $\lambda > \lambda_{\mathrm{c}}$ とする。このとき $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 $\mathbb{U}$ と実定数 E_{g} が存在し次を満たす*:*

$$\mathbb{U}H(\lambda)\mathbb{U}^{-1} = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + E_{\mathrm{g}}.$$

特に，$\mathbb{U}^{-1}\Omega_0$ は $H(\lambda)$ の基底状態である。

2. $\lambda_{\mathrm{c},0} < \lambda < \lambda_{\mathrm{c}}$ とする。このとき $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 $\mathbb{V}$，$\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素 ξ と正定数 E_{b} が存在して次を満たす*:*

$$\mathbb{V}H(\lambda)\mathbb{V}^{-1} = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\xi) + E_{\mathrm{g}} - E_{\mathrm{b}}.$$

特に，$\mathbb{V}^{-1}\Omega_0$ は $H(\lambda)$ の基底状態である。さらに，ξ はただ一つの離散固有値 β を持つ。よって $\sigma_{\mathrm{p}}(H(\lambda)) = \{n\beta + E_{\mathrm{g}} - E_{\mathrm{b}}\}_{n=0}^{\infty}$ となり，$H(\lambda)$ は束縛状態を持つ。ただし $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ は作用素 A の固有値全体である。

参考文献

[1] A.Arai, A Note on Mathematical Analysis of a Pair-Interaction Model in Quantum Field Theory, Unpublished.

[2] E.M.Henley and W.Thirring, Elementary Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

[3] S. N. M. Ruijsenaars, On Bogoliubov transformations. II. The general case. Ann. Phys. 116(1978), 105-134.

The affine property of quasi-free states on self-dual CAR algebras

澤田友佑 (Yusuke SAWADA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

場の量子論において, Fermi 統計に従う粒子は正準反交換関係 (Canonical Anticommutation Relation) を満たす作用素の集まりによって記述される. そのような作用素の成す C*-環 A は CAR 環と呼ばれ, 系の状態は.A 上の汎関数として表される. CAR 環上のゲージ不変な準自由状態の分類は Powers-Størmer[2] によって成され, Araki[1] はそれを任意の準自由状態に対して行った.

自己双対性を持つ CAR 環上の準自由状態は共分散作用素と 1 対 1 に対応している. 本講演では, その対応が凸結合をいつ保存するか, という問題を有限次元性と可換性の条件の下解決したのでそれを紹介する.

まず自己双対 CAR 環と, その上の準自由状態は次で定義される.

Definition 1. $\mathcal{H}$ を複素 *Hilbert* 空間, $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を反ユニタリ対合 (すなわち, $\Gamma^2 = \mathbf{1}, (\Gamma\xi, \Gamma\eta) = (\eta, \xi)$ を満たす) とする. 自己双対 *CAR* 環 $A(\mathcal{H}, \Gamma)$ とは, $\{b(\xi) \mid \xi \in \mathcal{H}\}$ で生成され, 次を関係式とするような普遍 C^*-環のことである.

$$
\begin{aligned}
&b(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha b(\xi) + \beta b(\eta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \xi, \eta \in \mathcal{H}),\\
&b(\Gamma\xi) = b(\xi)^* \qquad (\xi \in \mathcal{H}),\\
&[b(\varepsilon_0), b(\varepsilon_i)]_+ := b(\xi)b(\eta)^* + b(\eta)^* b(\xi) = (\xi, \eta)\mathbf{1} \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).
\end{aligned}
$$

$A(\mathcal{H}, \Gamma)$ 上の正値汎関数 ϕ が $\phi(\mathbf{1}) = 1$ を満たすとき, ϕ を状態と呼び, 等式

$$
\phi(b(\xi_1)\cdots b(\xi_k)) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \displaystyle\sum_{\sigma \in T_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \phi(b(\xi_{\sigma(i)})b(\xi_{\sigma(i+n)})) & (k = 2n),\\ 0 \qquad (k = 2n+1), \end{cases}
$$

を満たすとき, ϕ は準自由であると呼ぶ. ただし,

$$T_{2n} := \{\sigma \in S_{2n} \mid \sigma(1) < \cdots \sigma(n), \sigma(i) < \sigma(i+n)\ (i = 1, \cdots, n)\}$$

である.

$A(\mathcal{H}, \Gamma)$ 上の準自由状態 ϕ に対して,

$$(S_\phi \xi, \eta) = \phi(b(\eta)^* b(\xi)) \tag{1}$$

を満たすような $\mathcal{H}$ 上の作用素 S_ϕ が存在する. S_ϕ は

$$0 \leq S \leq \mathbf{1}, \tag{2}$$
$$\Gamma S \Gamma = \mathbf{1} - S. \tag{3}$$

を満たしている. 逆に, $\mathcal{H}$ 上の作用素 S が (2), (3) を満たしているとき, (1) を満たす準自由状態 ϕ_S がただ一つ存在することが知られている. このような S を共分散作用素と呼ぶ.

[3] において, 2 つの共分散作用素 S, S' がアファイン性

$$\lambda \phi_S + (1-\lambda)\phi_{S'} = \phi_{\lambda S + (1-\lambda)S'} \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

を持つための必要条件は $(S\xi, \Gamma\xi) = (S'\xi, \Gamma\xi)$ $(\xi, \eta \in \mathcal{H})$ を満たすことであることを示した.

また, $\mathcal{H}$ が偶数次元 $2n$ を持つとき, CAR 環とその上の (共分散作用素 S に付随する) 準自由状態は以下で与えられる.

$$A(\mathcal{H}, \Gamma) = M(2, \mathbb{C})^{\otimes n},$$
$$\phi_S(b) = \mathrm{Tr}\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 1-\alpha_i \end{pmatrix}\right) b\right) \qquad (b \in M(2, \mathbb{C})^{\otimes n}).$$

ただし, α_i は S の固有値であり

$$S\varepsilon_i = \alpha_i \varepsilon_i,\ S\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha_i)\Gamma\varepsilon_i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

となるように $\mathcal{H}$ の基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \Gamma\varepsilon_1, \cdots, \Gamma\varepsilon_n$ をとり対角化しておく. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 2. ([3]) S, S' を $2n$ 次元 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の可換な共分散作用素とし, 基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \Gamma\varepsilon_1, \cdots, \Gamma\varepsilon_n$ により

$$S\varepsilon_i = \alpha_i\varepsilon_i,\ S\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha_i)\Gamma\varepsilon_i,$$
$$S'\varepsilon_i = \alpha'_i\varepsilon_i,\ S'\Gamma\varepsilon_i = (1-\alpha'_i)\Gamma\varepsilon_i$$

で α_i, α'_i が定まっているとする. このとき (S, S') がアファイン性を持つための必要十分条件は高々1 つの $i_0 = 1, \cdots, n$ を除いて $\alpha_i = \alpha'_i$ が成り立つことである. 特に, $n = 1$ のときは自動的にアファイン性を持つ.

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が奇数次元を持つ場合は

$$A(\mathcal{H}, \Gamma) = M(2, \mathbb{C})^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}),$$
$$\phi_S(b) = \mathrm{Tr}\left(\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & 1-\alpha_i \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) b\right)$$
$$(b \in M(2, \mathbb{C})^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})).$$

となり, Theorem 2 と同様の結果が得られる.

References

[1] H. Araki, On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1970), 385-442.

[2] R. T. Powers, E. Størmer, Free states of the canonical anticommutation relations, Comm. Math. Phys. 16 (1970), 1-33.

[3] Y. Sawada, in preparation.

The factorization method for the acoustic inverse scattering problems

古屋貴士 (Takashi FURUYA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

We consider the inverse scattering problem of time-harmonic acoustic plane waves by multiple impenetrable obstacles. For the purpose, we derive the factorization method, which is a sampling method for solving certain kinds of inverse problems where the shape and location of a domain have to be reconstructed. It has first been introduced by Kirsch [2] for inverse acoustic scattering problems. For details of the factorization method, we refer to [3]. Recently, it has been applied to reconstruction of a scatterer with different physical properties, see e.g., [5], [6].

Let $k > 0$ be the wave number and for $\theta \in \mathbb{S}^2$ we set

$$u^i(x) := \mathrm{e}^{ik\theta\cdot x},\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

where i in the left hand side stands for *incident plane wave*. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded open set with C^2 boundary and let its exterior $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ be connected. We assume that Ω consists of two bounded open sets, i.e., $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ such that $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \emptyset$. Note that each Ω_j may consist of finitely many connected components whose closures are mutually disjoint. Consider the following exterior mixed boundary value problem:

$$(\Delta + k^2)u^s = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \tag{2}$$

$$u^s = -u^i \text{ on } \partial\Omega_1 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu_{\Omega_2}} = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu_{\Omega_2}} \text{ on } \partial\Omega_2 \tag{4}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0, \tag{5}$$

where $r = |x|$, and (5) is the *Sommerfeld radiation condition*. Here and throughout this paper, $\nu_{\Omega_2}(x)$ denotes the unit normal vector at $x \in \partial\Omega_2$. We refer to Theorem 7.15 in [7] for the existence and uniqueness of the problem (2)–(5). It is well knwon that u^s has the following asymptotic behavior:

$$u^s(x,\theta) = \frac{\mathrm{e}^{ik|x|}}{4\pi|x|}u^\infty(\hat{x},\theta) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right),\ |x| \to \infty,\quad \hat{x} := \frac{x}{|x|}. \tag{6}$$

The function u^∞ is called the far field pattern of u^s. With the far field pattern u^∞, we define the far field operator $F^{Mix}_{\Omega_1,\Omega_2} : L^2(\mathbb{S}^2) \to L^2(\mathbb{S}^2)$ by

$$F^{Mix}_{\Omega_1,\Omega_2} g(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} u^\infty(\hat{x},\theta) g(\theta) ds(\theta), \ \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{7}$$

The inverse scattering problem we consider is to reconstruct the unknown obstacle Ω from the far field pattern $u^\infty(\hat{x},\theta)$ for all $\hat{x},\theta \in \mathbb{S}^2$. In other words, given the operator $F^{Mix}_{\Omega_1,\Omega_2}$, reconstruct Ω.

Recently, we have obtained the following result by modifying the original factorization method:

Theorem 1 ([1]). *Let a bounded domain $B = B_1 \cup B_2$ be known a priori. Assume that $\overline{B_1} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_2} \subset B_2$, $\overline{\Omega_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$. (See* Figure 1*). Then for $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_2}$*

$$z \in \Omega_1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\phi_z, \varphi_n)_{L^2(S^2)}|^2}{\lambda_n} < \infty \tag{8}$$

where (λ_n, φ_n) is a complete eigensystem of the self adjoint and positive operator $F_\#$ given by

$$F_\# := \left| \mathrm{Re}\left[e^{i\pi} (F^{Mix}_{\Omega_1,\Omega_2} + F^{Imp}_{B,i\lambda_0}) \right] \right| + \mathrm{Im}(F^{Mix}_{\Omega_1,\Omega_2} + F^{Imp}_{B,i\lambda_0}) \tag{9}$$

Here, $F^{Imp}_{B,i\lambda_0}$ is the far field operator for the pure impedance boundary condition on B with an impedance function $i\lambda_0$ $\left(i.e., \ \dfrac{\partial u^s}{\partial \nu_B} + i\lambda_0 u^s = -\dfrac{\partial u^i}{\partial \nu_B} - i\lambda_0 u^i \text{ on } \partial B \right)$, where λ_0 is arbitrary positive number.

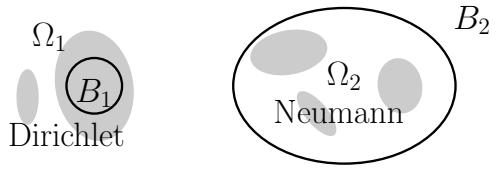


Figure 1:

Theorem 1 empolys the following two ideas: The first, coming from [6], is to make use of an a priori known outer estimation B_2 for a part of unkonw obstacles; the second, coming from [4], inner estimation B_1.

Compare our work with previous works. In Theorem 2.5 of [6], reconstruction of unkonwn obstacles, like Theorem 1, has been shown by imposing an eigenvalue of $-\Delta$ in the unknown obstacle Ω (but we do not need an inner estimation B_1). On the other hand, our work does not require eigenvales instead of using an inner estimation B_1. Therefore, by our work we can expand the application of the factorization method for some inverse acoustic scattering problems.

References

[1] T. Furuya, in preparation.

[2] A. Kirsch, Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator, Inverse Problems **14**, (1998), 1489–1512.

[3] A. Kirsch and N. Grinberg, *The factorization method for inverse problems*, Oxford University Press, (2008).

[4] A. Kirsch and X. Liu, *A modification of the factorization method for the classical acoustic inverse scattering problems*, Inverse Problems **30**, (2014), 1–14.

[5] A. Kirsch and X. Liu, *Direct and inverse acoustic scattering by a mixed-type scatterer*, Inverse Problems **29** (2013), 1–19.

[6] X. Liu, *The factorization method for scatterers with different physical properties*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **8**, (2015), 563–577.

[7] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

Sierpiński gasket 上の エネルギー密度関数の不連続性

伊縫　寛治 (INUI Kanji)
京都大学　大学院人間・環境学研究科　共生人間学専攻　博士後期課程 1 年

1　研究の背景・導入

フラクタル図形上の解析学は, 複雑な構造をもつ対象におけるさまざまな現象を解析するため, 理想化されたモデルにおける解析の理論として研究が進められてきた. 現象の例をあげると, フラクタル図形上において振動はどのように伝わるか. あるいは, フラクタル図形上において熱はどのように拡散するかといったものがある. この理論は物理学や化学および生物学などの分野において重要性が認識され始め, ここ 30 年で大きく理論が発展した.

2 次元 Sierpiński gasket (以下, 2 次元 S.G. と表す) は, 理想的な自己相似性を持つフラクタル図形の典型例である. S.G. 上には標準的な Dirichlet 形式と呼ばれる 2 次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定まり, $\mathcal{F}$ の元 f に対して, そのエネルギー測度 ν_f が定まる (定義 2.9). さらに, 文献 [4] において導入された, 任意のエネルギー測度を絶対連続とする測度 ν(しばしば Kusuoka measure と呼ばれる [5, Section 5.3]) を用いて, 2 次元 S.G. 上のエネルギー密度関数 (Radon–Nikodym 導関数) $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ を考えることができる.

これは $\mathbb{R}^d$ 上の標準 Dirichlet 形式 $\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} (1/2) \cdot (\nabla f(x), \nabla g(x))\ \mathrm{d}x$ に対して, f のエネルギー測度が $\nu_f(\mathrm{d}x) = (1/2) \cdot |\nabla f|^2\ \mathrm{d}x$ と定まり, ν_f は d 次元 Lebesgue 測度に関し絶対連続であることから, $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}x$ が考えられることの類似である.

これらの関係を表にしたものは以下の通りである.

空間	$\mathbb{R}^d$	2 次元 S.G.
2 次形式	$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x$	$\mathcal{E}(f,g)$
エネルギー測度	$\nu_f(\mathrm{d}x) = \dfrac{1}{2}\lvert\nabla f\rvert^2 \mathrm{d}x$	ν_f
空間の測度 m	d 次元 Lebesgue 測度	Kusuoka measure ν

表 1　$\mathbb{R}^d$ と 2 次元 S.G. の比較

ここで, 2 次元 S.G. 上において, $\mathcal{F}$ に属する任意の関数 f に対応するエネルギー測度 ν_f は正規化された Hausdorff 測度 μ に対し特異であることが知られていることに注意する [4].

$\mathbb{R}^d$ 上ではエネルギー密度関数は $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}x = (1/2) \cdot |\nabla f|^2$ と表せることより, f が C^1-級関数な

らばエネルギー密度関数は連続な修正がとれる．一方 2 次元 S.G. 上のエネルギー密度関数について, Bell, Ho, and Strichartz は次のような結果を得た [1].

定理 1.1. 2 次元 S.G. 上の定数関数でない調和関数 h に対して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の ν-修正は S.G. 上の全ての点で不連続である.

このような不連続性はフラクタル図形特有の性質であると考えられ, より一般のフラクタル図形に対しても同様の主張の成立が予想される．本稿では, 2 次元 S.G. を高次元に自然に拡張した N 次元 Sierpiński gasket において議論を行い, 類似の結果を紹介する (定理 2.13)．またこの研究は京都大学 理学研究科 日野正訓教授の指導のもと進められたものである.

2 設定と主定理

本稿の設定は [3, 5] に基づく．以下では N を 2 以上の自然数とする.

2.1 N 次元 Sierpiński gasket 上のエネルギー

始めに, N 次元 Sierpiński gasket の定義を与える.

定義 2.1. $\mathbb{R}^N$ 内における N 単体を 1 つとり, その頂点を $p_0, p_1, \ldots, p_N$ とする．$V_0 := \{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$ とする．さらに, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ に対して, $F_i \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $F_i(x) := (x + p_i)/2$ と定める．このとき,

$$K = \bigcup_{i=0}^{N} F_i(K)$$

を満たす唯一の空でないコンパクト集合 K を N 次元 Sierpiński gasket という.

この集合を SG と書き, 以後 N 次元 Sierpiński gasket を省略して N 次元 S.G. と記すことにする．以後, 次元 N は固定して考えるため, 記号 SG には N を明示しない.

定義 2.2. $W_0 := \{\emptyset\}$, $W_m := \{0, 1, \ldots, N\}^m$ $(m \in \mathbb{N}_{\geq 1})$, $W_* := \bigcup_{n=0}^{\infty} W_m$ と定義し, W_* の元を有限の長さを持つ word と呼ぶ．W_m の元を $w_1 w_2 \cdots w_m$ と表す．また, $w \in W_m$ と $w' \in W_n$ に対し, その積 ww' を $w_1 w_2 \cdots w_m w'_1 w'_2 \cdots w'_n \in W_{m+n}$ と定義する.

$w = w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m$ について $F_w := F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \cdots \circ F_{w_m}$ と定める．また, $F_\emptyset$ は SG 上の恒等写像と定める．さらに

$$V_m := \bigcup_{w \in W_m} F_w(V_0), \quad V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$$

と定義する.

また, V_m $(m \in \mathbb{N}_{\geq 0})$ 上の辺集合 E_m を以下で定義する.

$$(x, y) \in E_m \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists} w \in W_m \, {}^{\exists} i, j \in W_1 \text{ s.t. } i \neq j,\ x = F_w(p_i),\ y = F_w(p_j).$$

SG の構成法により, 集合列 $\{V_m\}_{m=0}^{\infty}$ は単調増大で, V_* の $\mathbb{R}^N$ における閉包は N 次元 S.G. と一致することが知られている. これにより, SG は (V_m, E_m) という頂点集合に関して単調増大する有限連結グラフのの列により近似されると考えることができる. $N = 2$ の場合の図を以下に示す.

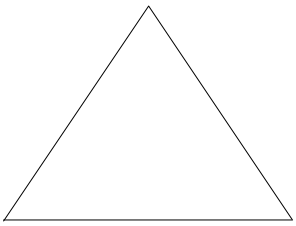


図 1　近似グラフ (V_0,E_0)

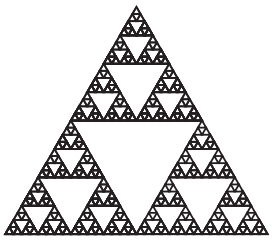


図 2　2 次元 S.G.

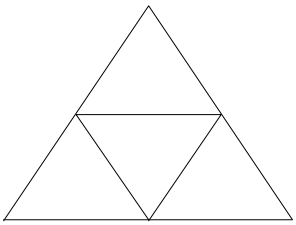


図 3　近似グラフ (V_1,E_1)

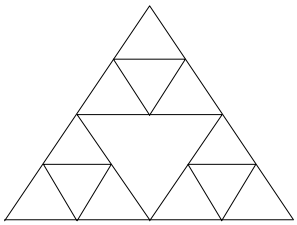


図 4　近似グラフ (V_2,E_2)

次に, SG 上の 2 次形式を導入する. 集合 V に対し, V 上の実数値関数全体からなるベクトル空間を $l(V)$ で表す.

定義 2.3. $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする. $f, g \in l(V_m)$ とするとき, V_m 上の 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ を

$$\mathcal{E}^{(m)}(f,g) := \left(\frac{N+3}{N+1}\right)^m \frac{1}{2} \sum_{x \in V_m} \sum_{(x,y) \in E_m} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))$$

と定める.
ただし, $x \in V_m$ に対し, $\displaystyle\sum_{(x,y)\in E_m}$ は $(x,y) \in E_m$ なる $y \in V_m$ に関する和を表す.

この 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ は $\mathcal{E}(f,g) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^d}\, \mathrm{d}x$ の類似であることに注意する. この 2 次形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ について次の命題が成立する.

命題 2.4 ([3, Lemma 2.2])**.** $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ と $f \in l(V_m)$ について, $\inf\{\mathcal{E}^{(m+1)}(g,g) \mid g \in l(V_{m+1}), g|_{V_m} = f\}$ を達成する $g \in l(V_{m+1})$ がただ一つ存在し, それを $\tilde{f}$ で表すと,

$$\mathcal{E}^{(m+1)}(\tilde{f},\tilde{f}) = \mathcal{E}^{(m)}(f,f)$$

が成立する.

また, この命題より次が成立する.

定理 2.5 ([3, Theorem 3.2.4])**.** 任意の $f \in l(V_*)$ に対し, 数列 $\{\mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m})\}_{m=0}^{\infty}$ は単調非減少である. さらに, $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ を仮定すると, f は V_* 上一様連続である. 特に, 任意の $f_0 \in V_0$ に対して, f は V_* 上一様連続である.

一般に, $\mathbb{R}^N$ の部分集合 A 上の一様連続関数は A の $\mathbb{R}^N$ における閉包上の連続関数に一意的に拡張されることに注意すれば, $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ なる $f \in l(V_*)$ は $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty$ なる $f \in C(\mathrm{SG})$ と 1 対 1 対応する. さらに次の命題が成立する.

命題 2.6 ([3, Theorem 2.2.6])**.** $\mathcal{F} := \{f \in C(\mathrm{SG}) \mid \mathcal{E}(f,f) := \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(f|_{V_m}, f|_{V_m}) < \infty\}$ とすると $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$-代数である. さらに, $f, g \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{E}(f,g) := \frac{1}{2}\{\mathcal{E}(f+g, f+g) - \mathcal{E}(f,f) - \mathcal{E}(g,g)\}$$

と定めるとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は非負定値の 2 次形式となる.

定義 2.7. この SG 上の 2 次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を SG 上のエネルギーと呼ぶ.

2.2 調和関数とエネルギー測度と Kusuoka measure

次に SG 上の調和関数の定義を与える. 命題 2.4 により, 任意の $h^0 \in l(V_0)$ から $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(m)}(h^*|_{V_m}, h^*|_{V_m}) = \mathcal{E}^{(0)}(h^0, h^0)$ なる $h^* \in l(V_*)$ を一意的に構成できることより, この対応を $\iota(h^0) := h^*$ で表す.

定義 2.8. $h^0 \in l(V_0)$ に対して, $\iota(h^0)$ を SG 上に連続的に一意に拡張した SG 上の関数を SG 上の調和関数と呼ぶ. 調和関数全体の集合を $\mathcal{H}$ で表す.

先ほど定めた $\iota\colon l(V_0) \to l(V_*)$ は全単射かつ線型であることが知られている. 加えて定義 2.8 の連続拡張も全単射かつ線型であることから, $\mathcal{H}$ と $l(V_0)$ はベクトル空間として同一視できる. よって $\mathcal{H} \ni h \mapsto (h(p_0), \ldots, h(p_N)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ という対応により, $\mathcal{H}$ と $\mathbb{R}^{N+1}$ はベクトル空間として同一視できるため, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{F}$ の $(N+1)$-次元部分ベクトル空間であることが示される.

次にエネルギー測度の定義を与える. 次の命題より, $\mathcal{F}$ の各元に対して SG 上の測度が定まる.

命題 2.9 ([5, Section 5.3])**.** $f \in \mathcal{F}$ に対し, 以下を満たす SG 上の測度 ν_f がただ一つ存在する.

$$\int_{SG} \varphi \, \mathrm{d}\nu_f = \mathcal{E}(\varphi f, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, f^2) \quad ({}^{\forall}\varphi \in \mathcal{F}).$$

定義 2.10. ν_f を関数 f に対応するエネルギー測度と呼ぶ.

命題 2.9 を $\mathbb{R}^d$ の場合の標準的な Dirichlet 形式にに適応させると, 右辺は

$$\mathcal{E}(\varphi f, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, f^2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla(\varphi f), \nabla f)_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi, \nabla(f^2))_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (f\ \nabla\varphi, \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi\ \nabla f, \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x$$
$$- \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi, 2f\ \nabla f)_{\mathbb{R}^d}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \frac{1}{2}|\nabla f|^2\ \mathrm{d}x$$

と表せることに注意する.

次に Kusuoka measure の定義を与える.

定義 2.11. $i \in W_1$ に対して, $h_i^0 \in l(V_0)$ を $h_i^0(p_j) := \delta_{ij} \quad (j \in W_1)$ と定める. ただし, δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す. それらを SG 上の調和関数に拡張したものを $h_i \in \mathcal{H} \quad (i \in W_1)$ で表す. さらに, $\nu := \sum_{i \in W_1} \nu_{h_i}$ と定め, これを Kusuoka measure と呼ぶ.

定理 2.12 ([4], [5, Theorem 5.3.1])**.** 任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して, ν_h は ν に対し絶対連続である.

これにより, エネルギー密度関数 $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu \in L^1(\mathrm{SG}, \nu)$ が定義される.

2.3 主結果

次が本稿の主結果である. この主結果は [2] で発表されたものである.

定理 2.13 ([2, Theorem 2.16])**.** $h \in \mathcal{H}$ は定数関数でないと仮定する. このとき, $\nu(\mathrm{SG} \setminus A) = 0$ なる $A \subset \mathrm{SG}$ が存在して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の ν-修正は A の各点で不連続となる.

参考文献

[1] R. Bell, C. W. Ho and R. S. Strichartz, Energy measures of harmonic functions on the Sierpiski gasket, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 831–868.

[2] K. Inui, Discontinuity of energy density function on Sierpiński gasket (in Japanese), Master thesis of Osaka University, (2017).

[3] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics **143**, Cambridge University Press (2001).

[4] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[5] R. S. Strichartz, *Differential equations on fractals: a tutorial*, Princeton University Press (2006).

細い直線的な弾性体の固有振動

Albert RODRÍGUEZ MULET　(北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程)*

以下の主結果は神保秀一氏（北大理）との共同研究による.

1. 序

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ を領域とする．Ω の形をしている弾性体における振動を考える．$u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ を振動に対応する変位ベクトル場とする．$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ を弾性体の材質に依存する実定数とする．λ_1 は物体の伸縮反発を表し，λ_2 は物体が捩られるときの反発に対応する量である．次にテンソル $e(u)$ と $\sigma(u)$ を以下のように定義する．

$$e(u) = (e_{ij}(u))_{1\le i,j\le 3} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)_{1\le i,j\le 3},$$
$$\sigma(u) = \lambda_1 \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}_3 + 2\lambda_2 e(u).$$

ここで，tr は行列のトレースであり，Id_3 は 3 次の単位行列である．$e(u)$ は線型歪みテンソル (*linearized strain tensor*) と呼び，$\sigma(u)$ は一様等方的な弾性体の Hooke の法則による応力テンソル (*stress tensor*) である．そして，ラメ作用素は次のように定義する．

$$L[u] = \operatorname{div}(\sigma(u)), \quad \text{i.e.} \quad (L[u])_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u) \quad (1 \le i, j \le 3).$$

ラメ作用素は 2 階楕円型作用素であることを示すことができる．このとき，弾性体における振動は下記の波動方程式で表すことができる.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u]. \tag{1}$$

ここで，$\rho > 0$ は密度である.

これから，$\rho = 1$ とし，振動は時間周期的振動であることを仮定する．周期を $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ とおき，$u(x,t) = e^{i\sqrt{\mu}t}v(x)$ とする．すると，(1) は固有値問題

$$L[v] + \mu v = 0 \tag{2}$$

となる.

弾性体については Ciarlet [1] には板の形にした弾性体の研究が載っている．こういう形を解析すると，地球の表面における地震の研究に応用がある．そして，更に正確に研究するために，地球の表面は平坦ではなく曲がっていると考えられる．故に次の一歩として弾性体がシェルの形をしている時についても書いてある.

一方，建物における振動を調べるために，建物が板や棒で構成されていると考えられる (例えば Cioranescu-Saint Jean Paulin [2] を参照)．そのため，柱の場合は Ciarlet 氏の研究と関連している.

他にも，Maz'ya-Nazarov-Plamenevskij [5] などにラメ作用素などを含む 2 階楕円型作用素領域変形問題の様々な境界条件の場合について書かれている.

* e-mail: albertromu@math.sci.hokudai.ac.jp

本発表で扱う場合の準備を始める．先ず，小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ に依存する領域 Ω_ε を定式化する．そのために，集合 S， $s_1^{(+)}$， $s_1^{(-)}$， s_2 を

$$
\begin{aligned}
S &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 < 1,\ 0 < z_3 < l\},\\
s_1^{(+)} &= \{(z_1, z_2, l) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \le 1\},\\
s_1^{(-)} &= \{(z_1, z_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \le 1\},\\
s_2 &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1,\ 0 < z_3 < l\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$l > 0$ は円柱の高さである．これから，$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を充分滑らかな微分同相写像とし，次の性質を満たすように取る．

- $F(z) = (F_1(z), F_2(z), z_3) \quad (z = (z_1, z_2, z_3) \in S)$.
- $F_i(0, 0, z_3) = 0 \quad (i = 1, 2,\ 0 \le z_3 \le l)$.
- 任意の $z \in S$ に対し F の Jacobian 行列式は正である．

$F^\varepsilon(z) = (\varepsilon F_1(z), \varepsilon F_2(z), z_3)$ と定め，次の集合を考える．

$$
\Omega_\varepsilon = F^\varepsilon(S), \quad \Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} = F^\varepsilon(s_1^{(+)}), \quad \Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)} = F^\varepsilon(s_1^{(-)}), \quad \Gamma_{2,\varepsilon} = F^\varepsilon(s_2).
$$

Ω_ε が細い柱状の弾性体に相当する．

本講演では $u : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ を変位ベクトル場とし，$\varepsilon \to 0$ のとき，次の固有値問題の固有値や固有関数の漸近挙動を考える．

$$
\begin{cases}
L[u] + \mu u = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_\varepsilon,\\
u = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} \cup \Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)},\\
\sigma(u)\,\nu = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{2,\varepsilon}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

ここで，ν は $\Gamma_{2,\varepsilon}$ 上の外向き単位法線ベクトルである．こういう問題が工学の視点から研究されているが，厳密で数学的な研究は多くない．

2. 準備

主結果を述べるために，必要な準備をする．先ず，$B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 < 1\}$，$z' = (z_1, z_2)$，$\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2$ とし，F の Jacobian 行列を $J(z) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)_{1 \le i,j \le 3}$ と書き，その行列式を $J_*(z) = \det(J(z))$ とする．このとき，以下のように関数 H，K_i，A_{ij} $(1 \le i, j \le j)$ を定義する．

$$
\begin{aligned}
H = H(z_3) &= \int_B J_*(z', z_3)\mathrm{d}z', \qquad K_i = K_i(z_3) = \int_B F_i(z', z_3) J_*(z', z_3)\mathrm{d}z',\\
A_{ij} = A_{ij}(z_3) &= \int_B F_i(z', z_3) F_j(z', z_3) J_*(z', z_3)\mathrm{d}z' \quad (z_3 \in [0, l])\,.
\end{aligned}
$$

そして，$Y = \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$ もおく．

注意 2.1. 行列 $(A_{ij})_{1 \le i,j,\le 2}$ は（任意の $0 \le z_3 \le l$) に対し）正定値実対称行列となる．

更に，固有値問題 (3) はゼロ以上の実数列からなる固有値

$$
0 \le \mu_1(\varepsilon) \le \mu_2(\varepsilon) \le \cdots \le \mu_k(\varepsilon) \le \mu_{k+1}(\varepsilon) \le \cdots
$$

を持つことが知られている (Edmunds-Evans [4] などを参照)．

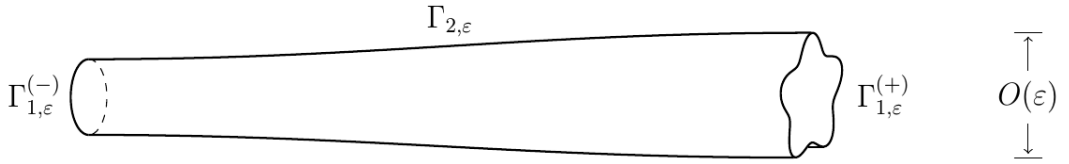


図 1: Ω_ε の例

3. 主結果

これで，主結果を述べることができる．

定理 3.1 (Both ends with Dirichlet B.C.). $k \in \mathbb{N}$ に対し固有値問題 (3) の第 k 固有値を $\mu_k(\varepsilon)$ とすると，以下が成り立つ．

a) $\mu_k(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ *as* $\varepsilon \to 0$.

b)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \Lambda_k.$$

但し，Λ_k は 4 階常微分作用素の固有値問題

$$\begin{cases} Y \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \left(\begin{pmatrix} A_{11}(\tau) & A_{12}(\tau) & -K_1(\tau) \\ A_{21}(\tau) & A_{22}(\tau) & -K_2(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2\eta_1}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\eta_2}{\mathrm{d}\tau^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix} \right) = \Lambda\, H(\tau) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} & (0 < \tau < l), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(H(\tau) \dfrac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\tau} \right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(K_1(\tau) \dfrac{\mathrm{d}^2\eta_1}{\mathrm{d}\tau^2} + K_2(\tau) \dfrac{\mathrm{d}^2\eta_2}{\mathrm{d}\tau^2} \right) & \\ \eta_i(0) = \eta_i(l) = 0 & (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}\tau}(0) = \dfrac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}\tau}(l) = 0 & (i = 1, 2), \end{cases}$$

の第 k 固有値である．

Ω_ε が半径 ε の円柱の場合は橋本浩平氏の [6] で議論され，低周波の固有振動について研究された．この固有値問題における成果をより一般的な範囲で議論する．

注意 3.1. 前述の定理は Ω_ε の両端が固定された場合である．一つの先端を固定し，もう一つの先端で Neumann 境界条件 ($u = \mathbf{0}$ on $\Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)}$，$\sigma(u)\,\nu = \mathbf{0}$ on $\Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} \cup \Gamma_{2,\varepsilon}$) を考えるとき，類似な結果が得られる．具体的に，定理 3.1-a) と同様に固有値はまた $O(\varepsilon) = \varepsilon^2$ as $\varepsilon \to 0$ であり，関数 $P_i = P_i(\tau)$ を $P_i(\tau) = -K_i(\tau)\frac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\tau} + A_{i1}(\tau)\frac{\mathrm{d}^2\eta_1}{\mathrm{d}\tau^2} + A_{i2}(\tau)\frac{\mathrm{d}^2\eta_2}{\mathrm{d}\tau^2}$ とおけば，b) の常微分方程式の境界条件が

$$\begin{cases} \eta_i(0) = \dfrac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0, \quad \eta_3(0) = \dfrac{\mathrm{d}\eta_3}{\mathrm{d}\tau}(l) = 0, \\ P_i(l) = \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau}(l) = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2) \end{cases}$$

に変わる．

4. 例

例として Ω_ε を半径 ε の円柱とする．この場合は F が単位関数であり，

$$A_{11} = A_{22} = \frac{\pi}{4}, \quad K_1 = K_2 = 0,$$
$$A_{12} = A_{21} = 0, \quad H = \pi$$

となる．従って，$\eta_3 = 0$ を得る (これは $K_1 = K_2 = 0$ と仮定するときにも得る)．以上を用い，定理 3.1-b) の常微分方程式の固有値問題が対角化され，単独の常微分方程式に帰着される．$\{\zeta_m\}_{m=1}^{+\infty}$ を関数

$$Z(s) = (e^s + e^{-s})\cos s - 2, \quad s > 0$$

のゼロ点とする．すると

$$\{\Lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} = \left\{ \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{4(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\zeta_k}{l}\right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty}$$

となる．更に，円柱の場合は固有値が重複していることも分かる．一方は，Λ_m に対応する固有関数 $\chi_m(\tau)$ は

$$\begin{aligned}\chi_m(\tau) =& (e^{\zeta_m} + e^{-\zeta_m} - 2\cos\zeta_m)\sin\left(\tfrac{\zeta_m}{l}\tau\right) + (2\sin\zeta_m + e^{-\zeta_m} - e^{\zeta_m})\cos\left(\tfrac{\zeta_m}{l}\tau\right) \\ &+ (\cos\zeta_m - \sin\zeta_m - e^{-\zeta_m})\, e^{\frac{\zeta_m}{l}\tau} + (e^{\zeta_m} - \sin\zeta_m - \cos\zeta_m)\, e^{-\frac{\zeta_m}{l}\tau}\end{aligned}$$

となる．

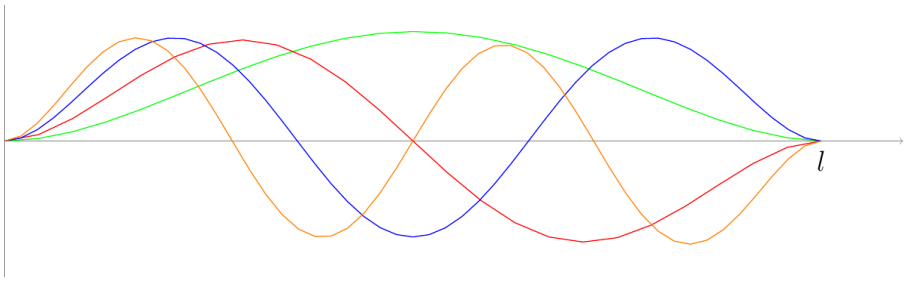


図 2: χ_1，χ_2，χ_3，χ_4 のグラフ

$\Phi_{k,\varepsilon}$ を $\mu_k(\varepsilon)$ に対応する固有関数とする．ならば $\widetilde{\Phi}_{k,\varepsilon}(y_1, y_2, y_3) = \Phi_{k,\varepsilon}(\varepsilon y_1, \varepsilon y_2, y_3)$ とおくと

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\Phi}_{k,\varepsilon} = \widetilde{\Phi}_k \quad \text{in } L^2(F(S), \mathbb{R}^3)$$

が成り立つ．ここで

$$\widetilde{\Phi}_k(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \widehat{\Phi}_{\frac{k+1}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 奇数} \\ \widehat{\Phi}_{\frac{k}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 偶数} \end{cases}$$

であり，$\widehat{\Phi}_m$ は

$$\widehat{\Phi}_m(y_1, y_2, y_3) = \left(c_1\chi_m(y_3), c_2\chi_m(y_3), -c_1 y_1 \frac{\mathrm{d}\chi_m}{\mathrm{d}y_3}(y_3) - c_2 y_2 \frac{\mathrm{d}\chi_m}{\mathrm{d}y_3}(y_3) \right) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

を指す．

5. 証明の概略

本節で証明の方針を述べる.

- 変数変換を行いεに依存しない領域Sで計算をする.
- Rayleigh 商や Max-Min 法を用い固有値$\mu_k(\varepsilon)$の評価を得，オーダー$O(\varepsilon^2)$を示す.
- Korn の不等式を使用し，固有関数$\Phi_{k,\varepsilon}$がL^2の意味で有界であることを証明する.
- 固有値問題 (3) の弱形式に吟味したテスト関数を代入し，$\varepsilon \to 0$とすれば，極限方程式が分かる．$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \widetilde{\Lambda}_k$ と書くと，$\widetilde{\Lambda}_k \geq \Lambda_k$を得る.
- また Rayleigh 商や Max-Min 法を使い評価$\widetilde{\Lambda}_k \leq \Lambda_k$を示すことができる．従って$\widetilde{\Lambda}_k = \Lambda_k$となり証明が終わる.

参考文献

[1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volumes I, II and III*, North-Holland, 1988, 1997, 2000

[2] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *Homogenization of Reticulated Structures*, Springer-Verlag, 1999

[3] G. Duvaut, J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976, translated by C.W. John

[4] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Spectral Theory and Differential Operators*, Oxford University Press, 1987

[5] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains Volumes I and II*, Birkhäuser, 2000

[6] 橋本浩平, 細い弾性体の固有振動, 北海道大学修士論文, 2009

Strichartz estimates for non-degenerate Schrödinger equations

平良　晃一 (Kouichi TAIRA)*

January 15, 2018

Abstract

本講演では非退化型 Schrödinger 方程式上の Strichartz 評価について解説する. 非退化型 Schrödinger 方程式とは、Lorentz 計量 (より一般に非退化計量) に付随したダランベルシアンに関する Schrödinger 方程式である. トーラス上では、Y. Wang により, Riemann 型とは異なった Strichartz 評価が得られることも知られている.

1　導入

本講演では, 非退化 Schrödinger 方程式に対する Strichartz 評価についての講演者の結果について紹介する. ここで, 非退化 Schrödinger 方程式とは以下のような方程式である.

自然数 $n \geq 2$ を次元として, g を $\mathbb{R}^n$ 上の指数 k の擬 Riemann 計量とする. つまり、g は $\mathbb{R}^n$ 上の可逆行列値関数 $g(x) = (g^{ij}(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, GL(n,\mathbb{R}))$ で与えられ, 負の固有値の数が k 個であるとする. このとき, g に付随する Laplace 作用素 P, 主シンボル $p \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する;

$$P = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(g^{ij}(x)\partial_{x_i}),\ p(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

そこで非退化 Schrödinger 方程式とは, Laplace 作用素 P を Hamiltonian とする Schrödinger 方程式:

$$\begin{cases} i\partial_t u + Pu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1.1}$$

で与えられる方程式である. この方程式は, Davey-Stewartson 方程式系という水面波を記述するモデルの一方程式でもある. しかし本研究では, この方程式を Schrödinger 方程式の枠組みの中で考察する.

*本研究は JSPS 科研費 17J04478 の助成を受けたものです. Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tokyo, Japan, Email: taira@ms.u-tokyo.ac.jp.

Schrödinger 方程式とその解の平滑化作用 (smoothing effect) と主シンボル p が生成する Hamilton 流の性質の間には密接な関係があることが知られている. これは Schrödinger 方程式の解が量子力学的粒子の運動を表し, Hamilton 流の積分曲線を古典力学的粒子の運動を表しているとみると, 量子-古典対応の一種であると考えられる. Strichartz 評価とは, Schrödinger 方程式の解の平滑化作用を表す $L^p - L^q$ 型の不等式である. コンパクト多様体上など, Hamilton 流が捕捉される場合には Euclid 空間の場合と比べて, 一般に平滑化の loss が生じることが知られている. 一方で, Burq-Guillarmou-Hassell[3] により, 捕捉軌道が存在するが, Strichartz 評価の平滑化の loss が起こらない Riemann 多様体の存在が示された. さらに, $k = 0$ と $k \neq 0$ の場合を比較しても Schrödinger 方程式の解の平滑化作用は異なることが知られている. Wang[5] は二次元平坦 Lorentzian トーラス上での Strichartz 評価は Bourgain[2] による二次元平坦 Riemannian トーラスの場合とは, 平滑化の loss の仕方が異なることを示した. これは Laplace 作用素 P の固有値の分布が異なることに起因するものであり, 同じような Hamilton 流であっても $k = 0$ と $k \neq 0$ とでは異なる平滑化の loss が生じることがわかる. 本研究では, $\mathbb{R}^n$ 上で Hamilton 流が非捕捉軌道を持たない場合には, Strichartz 評価の平滑化の loss が起こらないことを示すことができた. これは $k = 0$ の結果 (Boulclet-Tzvetkov[1]) の拡張であるが, 技術的な理由により, 更なる仮定が必要となる.

2 主結果

まず, 以下の三つの仮定を考える.

Assumption A. 計量 g は定数係数計量の長距離型の摂動である. つまり,

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq n-k, \\ -1, & n-k+1 \leq i = j \leq n, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

とおいて, ある $\mu > 0$ に対して任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対してある $C_\alpha > 0$ が存在して,

$$|\partial_\alpha (g^{ij}(x) - \delta_{ij}^k)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}(\mu + |\alpha|)},$$

が成り立つ.

Assumption B. Hamilton 流が非捕捉的 (non-trapping) である. つまり, 0 でない運動量を持つ Hamliton 流の積分曲線 $(z(t), \zeta(t)) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して,

$$|z(t)| \to \infty, \quad \text{as} \quad t \to \pm\infty,$$

が成り立つ.

Assumption C. 正の保存則を持つ. つまり, ある $q \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ が存在して,

$$\begin{cases} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(2-\mu)}, \\ q(x,\xi) \geq C(1 + |\xi|)^2, \\ \{p, q\} = 0, \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, $\{,\}$ は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の標準的な Poisson 括弧積である.

また, admissible pair を定義する.

Definition 1. 実数の組 (p,q) が admissible であるとは,

$$\frac{2}{p}+\frac{n}{q}=\frac{n}{2},\quad q\geq 2,\quad (p,q,n)\neq(2,\infty,2),$$

を満たすことをいう.

そこで, 講演者の主結果は以下の通りである.

Theorem 2.1 ([4])**.** (1) Assumption A と C を仮定する. このとき, P は $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上本質的自己共役である. 特に方程式 (1.1) は一意解 $u\in C(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n))$ を持つ.

(2) Assumption A と C を仮定する. ある $R>0$ が存在して, 任意の admissible pair (p,q) と任意の $T>0$ に対してある $C>0$ が存在して, (1.1) の解 u に対し,

$$\|u\|_{L^p([-T,T],L^q(|x|\geq R))}\leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

(3) Assumption A と B と C を仮定する. 任意の $R>0$ と任意の admissible pair (p,q) と任意の $T>0$ に対してある $C>0$ が存在して, (1.1) の解 u に対し,

$$\|u\|_{L^p([-T,T],L^q(|x|\leq R))}\leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

References

[1] Jean-Marc Bouclet and Nikolay Tzvetkov. Strichartz estimates for long range perturbations. Amer. J. Math., Vol. 129, No. 6, pp. 15651609, 2007.

[2] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. Geom. Funct. Anal., Vol. 3, No. 2, pp. 107156, 1993.

[3] Nicolas Burq, Colin Guillarmou, and Andrew Hassell. Strichartz estimates without loss on manifolds with hyperbolic trapped geodesics. Geom. Funct. Anal., Vol. 20, No. 3, pp. 627656, 2010.

Ann. 318 (2000), 355 389.

[4] Kouichi Taira. Strichartz estimates for non-degenerate Schrödinger equations. `arxiv:1708.01989v1`

[5] Yuzhao Wang. Periodic cubic hyperbolic Schrödinger equation on T2. J. Funct. Anal., Vol. 265, No. 3, pp. 424434, 2013.

Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数

関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
玉岡　優一 (TAMAOKA Yuichi)

1　はじめに

退化したパラメーターに対する Jack 多項式を Lauricella の超幾何級数を用いて具体的に表した．

関口 [9] は対称空間 $SL(3,\mathbf{R})/SO(3)$ 上の退化したパラメーターに対する球関数の満たす微分方程式系と Appell の超幾何級数 F_1 の満たす微分方程式系を関係づけることにより，退化したパラメーターに対する球関数が Appell の F_1 を用いて表されることを示した．

Jack 多項式はパラメーター $k>0$ をもつ多変数の直交多項式で $k=1$ のとき Schur 多項式，$k=1/2$ のとき zonal 多項式（対称空間 $SU(n)/SO(n)$ 上の帯球関数）になる．

本講演では，退化したパラメーターに対する n 変数の Jack 多項式が Lauricella の F_D を用いて表されることを述べる．これは $n=3$, $k=1/2$ の場合は関口 [9] の結果から従うが，そこでの手法を一般の n, k に拡張することにより示される．

2　Jack 多項式

この節では，[3], [7], [10] に従って Jack 多項式について述べる．

$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$ $(n\geq 2)$ を満たす 0 以上の整数の組 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を分割という．分割を $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ とおき，$|\lambda|=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ とする．変数を $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ とする．多項式環 $\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_n]$ には，変数の入れ替えにより対称群 S_n が作用する．対称群の作用により不変な元全体の集合を

$$\mathbf{R}[x]^{S_n}=\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n}$$

と表す．$\mathbf{R}[x]^{S_n}$ の元を n 変数対称多項式という．

$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\in\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，$x^\gamma=x_1^{\gamma_1}\cdots x_n^{\gamma_n}$ とする．また，分割 λ に対して，λ_i が 0 でない i の総数を長さという．長さ n 以下の分割 λ に対するモノミアル対称多項式 $m_\lambda(x)$ を

$$m_\lambda(x)=\sum_{\gamma\in S_n\lambda}x^\gamma$$

で定義する．例えば

$$m_{(2,0)}(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2,$$

$$m_{(1,1)}(x_1,x_2)=x_1x_2,$$

$$m_{(2,1,0)}(x_1,x_2,x_3)=x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)$$

である．$m_\lambda(x)$ は $|\lambda|$ 次斉次多項式である．

$k>0$ とする．$\vartheta_i = x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ とおく．2 階の微分作用素 $L(k)$ を

$$L(k) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2 + k \sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}(\vartheta_i - \vartheta_j)$$

で定義する．μ, λ を分割とし，半順序 $\mu \le \lambda$ を

$$|\mu| = |\lambda| \text{ かつ，全ての } i \ge 1 \text{ に対して } \mu_1 + \cdots + \mu_i \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

により定義する．

定理 1 (Macdonald [7], [10])
次の条件 (i)，(ii) を満たす n 変数の対称多項式 $P_\lambda^{(1/k)}(x)$ がただ一つ存在する．
(i) $P_\lambda^{(1/k)}(x) = \sum_{\mu\le\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x) \quad (u_{\lambda\mu} \in \mathbf{R},\ u_{\lambda\lambda} = 1)$,
(ii) $L(k)P_\lambda^{(1/k)}(x) = h(\lambda)P_\lambda^{(1/k)}(x) \quad h(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda_i + k(n+1-2i))$.
$P_\lambda^{(1/k)}(x)$ を Jack 多項式という．

例えば

$$P_{(2,0)}^{(1/k)}(x) = m_{(2,0)}(x) + \frac{2k}{1+k} m_{(1,1)}(x),$$

$$P_{(3,0,0)}^{(1/k)}(x) = m_{(3,0,0)}(x) + \frac{3k}{2+k} m_{(2,1,0)}(x) + \frac{6k^2}{(1+k)(2+k)} m_{(1,1,1)}(x)$$

である．$P_\lambda^{(1/k)}(x)$ は $|\lambda|$ 次斉次多項式である．また，Jack 多項式は内積

$$(f,g)_k = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}) g(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}) \prod_{1\le j<l\le n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_l}|^{2k} d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

に関して $\mathbf{R}[x]^{S_n}$ の直交基底をなす．

3 Lauricella の超幾何級数 F_D

この節では，[2], [4], [6] に従って Lauricella の F_D について述べる．

$$\begin{cases} (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \ge 1), \\ (a)_0 = 1 & (n=0) \end{cases}$$

とおく．$n-1$ 変数の超幾何級数 Lauricella の F_D は

$$F_D(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\gamma;z_1,\cdots,z_{n-1})$$
$$= \sum_{m_1,\cdots,m_{n-1}=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\cdots+m_{n-1}}(\beta_1)_{m_1}\cdots(\beta_{n-1})_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+\cdots+m_{n-1}} m_1!\cdots m_{n-1}!} z_1^{m_1}\cdots z_{n-1}^{m_{n-1}} \quad (\gamma \ne 0,-1,-2,\cdots)$$

で定義される．上の級数は $|z_1|<1,\cdots,|z_{n-1}|<1$ で収束する．F_D は積分表示

$$F_D(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\gamma;z_1,\cdots,z_{n-1}) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} \prod_{i=1}^{n-1}(1-z_i t)^{-\beta_i} dt$$

をもつ．上の積分は $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ のとき収束する．

F_D は 1 変数のとき Gauss の超幾何級数

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n $$

であり，2 変数のとき Appell の超幾何級数

$$ F_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma; z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+m_2} (\beta_1)_{m_1} (\beta_2)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2} m_1! m_2!} z_1^{m_1} z_2^{m_2} $$

である（[1]）．

定理 2 ([4], [6])
$u(z_1, \cdots, z_{n-1}) = F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \gamma; z_1, \cdots, z_{n-1})$ は，微分方程式系

$$ \begin{cases} \vartheta_i \left(\sum_{l=1}^{n-1} \vartheta_l + \gamma - 1 \right) u = z_i (\vartheta_i + \beta_i) \left(\sum_{l=1}^{n-1} \vartheta_l + \alpha \right) u \quad (i = 1, \cdots, n-1), \\ z_i (\vartheta_i + \beta_i) \vartheta_j u = z_j \vartheta_i (\vartheta_j + \beta_j) u \quad (1 \le i < j \le n-1) \end{cases} $$

の $(0, \cdots, 0)$ の近傍で解析的で $u(0, \cdots, 0) = 1$ を満たす一意解である．

ここで，$\vartheta_i = z_i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ とおいた．

補題 1 ([6])
変換公式

$$ \begin{aligned} &F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \gamma; z_1, \cdots, z_{n-1}) \\ &\quad = (1 - z_{n-1})^{-\alpha} F_D \left(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-2}, \gamma - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i, \gamma; \frac{z_{n-1} - z_1}{z_{n-1} - 1}, \cdots, \frac{z_{n-1} - z_{n-2}}{z_{n-1} - 1}, \frac{z_{n-1}}{z_{n-1} - 1} \right) \end{aligned} $$

が成り立つ．

4 主結果

この節では，[12] に従って本研究の主結果を述べる．

4.1 Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数

n を 2 以上の整数とし，p, q は $p \ge q \ge 0$ を満たす整数とする．分割 $(p, q, \cdots, q)$ に対する n 変数の Jack 多項式は $n-1$ 変数の Lauricella の F_D を用いて具体的に表される．

定理 3 (T [12])
パラメーター $k > 0$ と分割 $\lambda = (p, q, \cdots, q)$ に対して，

(i) $$ P^{(1/k)}_{(p,q,\cdots,q)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{(nk)_{p-q}}{(k)_{p-q}} \prod_{l=1}^{n-1} x_l^q x_n^p F_D \left(q - p, k, \cdots, k, nk; 1 - \frac{x_1}{x_n}, \cdots, 1 - \frac{x_{n-1}}{x_n} \right), $$

(ii) $$ P^{(1/k)}_{(p,q,\cdots,q)}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{l=1}^{n-1} x_l^q x_n^p F_D \left(q - p, k, \cdots, k, q - p - k + 1; \frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) $$

が成り立つ．

$q-p$ は 0 以下の整数なので，右辺の超幾何級数は有限和になる．

$n=2$ のとき，定理 3 (i) は

$$P^{(1/k)}_{(p,q)}(x_1,x_2)=x_1^q x_2^p {}_2F_1\left(q-p,k,2k;1-\frac{x_1}{x_2}\right)$$

となる．Gauss の超幾何級数の変換公式（[8]）によりこれは

$$P^{(1/k)}_{(p,q)}(x_1,x_2)=\frac{(2k)_{p-q}}{(k)_{p-q}}(x_1x_2)^{\frac{1}{2}(p+q)}{}_2F_1\left(q-p,p-q+2k,k+\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$$

と書き直せる．この等式は Lassalle [5] に記されている．つまり，定理 3 (i) は $n=2$ の場合に知られている結果の一般化と見なすことができる．

4.2　定理 3 の証明の概略

(i) の証明

定理 3 (i) は斉次性を用いて，分割 $\lambda=(p,q\cdots,q)$ に対する n 変数の $P^{(1/k)}_{\lambda}(x)$ の満たす微分方程式 $L(k)P^{(1/k)}_{\lambda}(x)=h(\lambda)P^{(1/k)}_{\lambda}(x)$ と $n-1$ 変数の F_D の満たす微分方程式系を関係づけることにより証明される．これは $n=3$, $k=1/2$ のときに関口 [9] が用いた手法を拡張したものである．

$\nu\in\mathbf{C}$ に対して，

$$u(y_1,\cdots,y_{n-1})=F_D(-\nu,k,\cdots,k,nk;1-y_1,\cdots,1-y_{n-1}) \tag{1}$$

は，微分方程式系

$$\begin{cases}\vartheta_i\left(\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l-\nu-k\right)u=y_i(\vartheta_i+k)\left(\sum_{l=1}^{n-1}\vartheta_l-\nu\right)u \quad (i=1,\cdots,n-1),\\ y_i(\vartheta_i+k)\vartheta_j u=y_j\vartheta_i(\vartheta_j+k)u \quad (1\le i<j\le n-1)\end{cases} \tag{2}$$

の $(1,\cdots,1)$ の近傍で解析的で $u(1,\cdots,1)=1$ を満たす一意解であることが変数変換と定理 2 により示される．

$\nu=p-q$ のとき，(1) で与えられる u を用いて

$$P(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{l=1}^{n-1}x_l^q x_n^p u\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

とおくと，F_D の定義と補題 1 から P は対称多項式であることが示される．また，微分方程式系 (2) から

$$L(k)P=h(\lambda)P$$

が導かれる．定理 1 から $P_\lambda=cP$ を満たす定数 c が唯一つ存在する．この両辺をモノミアル対称多項式の一次結合で表したときの $m_\lambda(x)$ の係数を比較することにより，定数 c が決まり定理 3 (i) が導かれる．

(ii) の証明

微分方程式系 (2) は

$$u(y_1,\cdots,y_{n-1}) = F_D(-\nu,k,\cdots,k,-\nu-k+1;y_1,\cdots,y_{n-1})$$

を解にもつが，$\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ のとき，これは多項式になり，一意性より

$$F_D(-\nu,k,\cdots,k,-\nu-k+1;y_1,\cdots,y_{n-1}) = \frac{(nk)_\nu}{(k)_\nu} F_D(-\nu,k,\cdots,k,nk;1-y_1,\cdots,1-y_{n-1})$$

が成り立つ．これより (ii) が示される．

本講演で述べた結果に関連して，定理 3 (i) の証明中の $\nu \in \mathbf{C}$ に対する微分方程式系 (2) の解析解 (1) は，退化したパラメーターに対する A 型の Heckman-Opdam の超幾何級数に対応していることを示野信一氏（関西学院大学）との共同研究で示した（[11]）.

参考文献

[1] P. Appell, J. Kampé de Feriet: Fonctions hypergéometriques et hypersphériques - polynômes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] 原岡喜重, 「超幾何関数」, 朝倉書店, 2002.

[3] 堀田良之・渡辺敬一・庄司俊明・三町勝久, 「群論の進化」, 岩波書店, 2004.

[4] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions, Vieweg+Teubner Verlag, 1991.

[5] M. Lassalle, Polynômes de Jacobi généralisés, C. R. Acad. Sci. Paris, **312** (1991), Série I, 425–428.

[6] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1893), 111–158.

[7] I. G. Macdonald, Commuting differential operators and zonal spherical functions, Algebraic groups, Utrecht 1986,189–200, Lecture Notes in Math., **1271** (1987), Springer, Berlin.

[8] 森口繁一 他, 「数学公式」, 岩波書店, 1960.

[9] 関口次郎, 「$SL(3,\mathbf{R})$ の帯球函数について」, 数理解析研究所講究録 266 巻, (1976), 259–274.

[10] 白石潤一, 「量子可積分系入門」, サイエンス社, 2003.

[11] N. Shimeno and Y. Tamaoka, The hypergeometric function for the root system of type A with a certain degenerate parameter, 準備中.

[12] 玉岡優一, 「Jack 多項式と Lauricella の超幾何級数」, 2017 年度修士論文, 関西学院大学大学院理工学研究科.

p-Sobolev flow の解について

中村 謙太 (Kenta Nakamura) * †

$\Omega \subset \mathbb{R}^N\,(N \geqq 3)$ を有界領域，境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし，$T > 0$ を任意に固定した正数とする．本講演では，p-Sobolev flow とよばれる，次の二重非線形放物型初期・境界値問題について考える:

$$\begin{cases} \partial_t(|u|^{q-1}u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

ただし，$2 \leqq p < N$, $q := \frac{Np}{N-p} - 1$ とし，$u = (u^i(x,t))$, $i = 1, \ldots, k$, は $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ に対して定義された $\mathbb{R}^k$ に値を持つ未知関数である．特に $p = 2, k = 1$ の場合 (1) は Yamabe flow (山辺流) とよばれる．Yamabe flow はいわゆる山辺の問題 ($N(\geqq 3)$ 次元 Riemann 多様体 (M, g_0) 上の定スカラー曲率の共形計量の存在) の研究で導入されたもので，熱流

$$u_t = (s - R)u = u^{-\frac{4}{N-2}}(c_N\Delta_{g_0}u - R_0u) + su, \quad c_N := \frac{4(N-1)}{N-2} \tag{2}$$

のことである．ただし，$u = u(t)$ $(t \geqq 0)$ は $g(t) = u^{\frac{2}{N-2}}g_0$, $\int_M u^{\frac{2N}{N-2}}dvol_{g_0} = 1$ をみたす M 上の C^∞ 正値関数であり，R は計量 g に関するスカラー曲率で $s := \int_M Rdvol_g$ である．Hamilton ([1]) はある幾何学的な条件の下 (2) の収束について示し，Ye ([2]) は多様体 (M, g_0) が正曲率かつ局所共形平坦の下 (2) の時間大域解の存在と定常解の性質について示した．さらに，Schwetlick-Struwe ([3]) は次元について $3 \leqq N \leqq 5$, および積分値 $\inf_u \int_M \left(c_N|\nabla u|^2_{g_0} + R_{g_0}u^2\right) dvol_{g_0}$ の適切な条件と (M, g_0) が正曲率の下 (2) の時間大域解の存在と $t \to \infty$ での解の漸近収束を示した．

一方，多様体を Euclid 空間内の有界領域にすると，上記の結果の曲率の条件は成り立たなくなる．本研究では曲率の条件を外して，Yamabe flow (2) より一般に (1) の p-Sobolev flow の解について以下の結果を得た．

主結果 1

$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．このとき任意の $T > 0$ に対して，(1) の弱解が存在する．

*九州大学大学院数理学府博士後期課程 2 年 k-nakamura@math.kyushu-u.ac.jp

†この研究は三沢 正史 先生 (熊本大学先端科学部) との共同研究に基づく．

主結果 1 の証明のアイデアは，$(*)$ で時間微分項 $\partial_t\left(|u|^{q-1}u\right)$ を後ろ向き差分商

$$\partial_t^{-h}\left(|u|^{q-1}u\right) := \frac{|u|^{q-1}u(t,x) - |u|^{q-1}u(t-h,x)}{h} \quad (x \in \Omega)$$

に置き換えて，**楕円型方程式に帰着させ，Galerkin 法で解く**というものである．すなわち，

①：$N \in \mathbb{N}$，$h := T/N > 0$ とし，時間を止める．$\{e_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ を $L^2(\Omega)$ で正規直交系をなし，$W_0^{1,p}(\Omega)$ で稠密とする．また，$V_l := \mathrm{span}\{e_1(x), \ldots, e_l(x)\}$ とおく．u_0, u_{m-1} が与えられたとき，$\forall \xi \in V_l$ に対して，

$$-\int_\Omega |\nabla u_{m,l}|^{p-2}\nabla u_{m,l} \cdot \nabla \xi \, dx = \int_\Omega \frac{|u_{m,l}|^{q-1}u_{m,l} - |u_{m-1}|^{q-1}u_{m-1}}{h}\,\xi \, dx$$

をみたす $u_{m,l}(x) := \sum_{j=1}^{l} \alpha_{mhj} e_j(x)$ を帰納的に定義し ($\{u_{m,l}\}$ の存在性は Brower の不動点定理より保証 ([8]))，$l \to \infty$ の極限に移行し $\{u_m(x)\}$ を構成 ([6])．なお，この極限移行に関しては，**Minty's Monotone trick** を用いる．実際，$E(\nabla u) := |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ と定義するとき，代数不等式

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)\cdot(\xi - \eta) \geq C|\xi - \eta|^p, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^k$$

を用いると，$E(\nabla u)$ は monotone であることが分かる．

②：各時間区間 $(m-1)h < t \leqq mh$ で①で得られた $\{u_m(x)\}$ をステップに拡張：$\{\bar{u}_h(x,t)\}$．

③：$\{\bar{u}_h\}$ の $L^p(0,T\,; W_0^{1,p}(\Omega))$ における弱収束極限を u として弱解を構成．

なお，③のステップでは次のエネルギー評価を用いる．

命題 1 (エネルギー評価)

$\bar{u}_h$ に対して，次の (i)-(iii) が成り立つ．

(i) $$\frac{q}{q+1}\sup_{0\leqq t\leqq T}\int_\Omega |\bar{u}_h(t)|^{q+1}\,dx + \int_0^T\!\!\int_\Omega |\nabla \bar{u}_h|^p \,dxdt \leqq \frac{q}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx$$

(ii) $$\int_0^T\!\!\int_\Omega \left(\int_0^1 |s\bar{u}_h(t,x) + (1-s)\bar{u}_h(t-h,x)|^{q-1}\,ds\right)|\partial_t^{-h}\bar{u}_h|^2\,dtdx + \frac{1}{p}\sup_{0\leqq t\leqq T}\int_\Omega |\nabla \bar{u}_h(t)|^p\,dx \leqq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx$$

(iii) $|\bar{u}_h(t)|_{L^\infty(\Omega)} \leqq |u_0|_{L^\infty(\Omega)}$ $(\forall t \in [0,T])$
($\rightsquigarrow$ [4] における cut-off 関数のアイデアによる)

主結果 2 (解の有界性)

$k=1$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ かつ Ω 上 $u_0 \geqq 0$, $u \not\equiv 0$ とする．このとき，任意の $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ に対して

$$\inf_\Omega u_0 \leqq u(x,t) \leqq \sup_\Omega u_0$$

以下，$u \geqq 0$ を (1) の非負弱優解とする．また，$K_{2\rho}$ を $\mathbb{R}^N$ 内の原点 $0 \in \mathbb{R}^N$ を中心とする一辺 2ρ の立方体とし，$\theta > 0$ をパラメーターとして，シリンダーを

$$Q(\theta(2\rho)^p,\, 2\rho) := K_{2\rho} \times (-\theta(2\rho)^p,\, 0)$$

とおく．ここで $(y,s) \in \Omega_T := \Omega \times (0,T)$ に対し，

$$(y,s) + Q(\theta(2\rho)^p,\, 2\rho) := K_{2\rho}(y) \times (s - \theta(2\rho)^p,\, s) \subset \Omega_T$$

となるように十分小さく $\rho > 0$ をとる．さらに，

$$\mu_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u, \quad \mu_- := \operatorname*{ess\,inf}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u, \quad \omega := \operatorname*{ess\,osc}_{(y,s)+Q(\theta(2\rho)^p,\,2\rho)} u = \mu_+ - \mu_-$$

とするとき次が成り立つ．

命題 2

$\xi \in (0,1]$, $a \in (0,1)$ を任意に固定する．このとき，p, N とパラメーター $\{\theta, \xi, a, \omega\}$ に依存する正数 $\nu_- > 0$ が存在して，

$$\Big|\big\{(x,t) \in (y,s) + Q(\theta(2\rho)^p,\, 2\rho) \ :\ u(x,t) < \mu_- + a\omega\big\}\Big| \leqq \nu_- \big|Q(\theta(2\rho)^p,\, 2\rho)\big|$$

ならば，

$$u(x,t) \geqq \mu_- + a\xi\omega \quad \text{a.e.} \quad (x,t) \in (y,s) + Q(\theta\rho^p,\, \rho)$$

が成り立つ．ただし，集合 X に対して $|X|$ は X の Lebesgue 測度を表す．

主結果 3 (解の正値性の伝播)

ある $(y,s) \in \Omega_T$ と $\rho > 0$ に対して，

$$\big|\big\{u(\cdot,s) \geqq L\big\} \cap K_\rho(y)\big| \geqq \alpha \big|K_\rho(y)\big|$$

がある $L > 0$ とある $\alpha \in (0,1)$ について成り立つならば，p, N, α に依存する $\delta, \varepsilon \in (0,1)$ が存在して，

$$\big|\big\{u(\cdot,t) > \varepsilon L\big\} \cap K_\rho(y)\big| \geqq \frac{1}{2}\alpha \big|K_\rho(y)\big|, \quad \forall t \in \big(s,\, s + \delta L^{q+1-p}\rho^p\big).$$

さらに，ある正数 $\eta = \eta(p,N,\alpha) < 1$ が存在して，次が成り立つ:

$$u(x,t) \geqq \eta L \quad \text{a.e.} \quad (x,t) \in K_{2\rho}(y) \times \left(s + \frac{1}{2}\delta L^{q+1-p}\rho^p,\, s + \delta L^{q+1-p}\rho^p\right).$$

証明は，DiBenedetto ([7]) らによる p-Laplace 方程式 および porous medium 方程式に対する DeGiorgi の方法にならい，時空のスケールサイズをうまく定めて局所エネルギー評価を行う．

参考文献

[1] R.S. Hamilton, *Lectures on geometric flows*, (1989) (unpublished)

[2] R. Ye, *Global existence and convergence of Yamabe flow*, J.Diff, Geom, **39** (1994), 35–50.

[3] H. Schwetlick & M. Struwe, *Convergence of the Yamabe flow for large energies*, J. Reine Angew, Math, **562** (2003), 59–100.

[4] H.W. Alt & S. Luckhaus, *Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations*, Math. Z. **183** (1983), 311–341.

[5] J.W. Barrett & W.B. Liu, *Finite element of approximation of the parabolic p-Laplacian*, Slam J. Numer. Anal, Vol. **34** (1994), no.2, 413–428.

[6] Y. Chen, M.C. Hong & N. Hungerbühler, *Heat flow of p-harmonic maps with values into spheres*, Math. Z. **215** (1994), 25–35.

[7] E. DeBenedetto, U. Gianazza & V. Vespri, *Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2012.

[8] L.C. Evans, *Partial Differential Equations second edition*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol.**19**, 2010.

超幾何微分方程式の Voros 係数の位相的漸化式による表示

竹井 優美子 (Yumiko Takei)*

概 要

本講演では Weber 方程式をはじめとする (合流型) 超幾何微分方程式に対して, 完全 WKB 解析で重要な役割を演じる Voros 係数が, 位相的漸化式により定義される自由エネルギーの母関数を用いて書き表されることを示す. なお, 本研究は名古屋大学の岩木耕平氏及び神戸大学の小池達也氏との共同研究に基づく.

1 準備

1.1 WKB 解と Voros 係数

1 次元 Shrödinger 方程式

$$\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}-Q(x,\hbar)\right)\psi(x,\hbar)=0 \tag{1.1}$$

($\hbar$ は Planck 定数と呼ばれる小さなパラメータ) は WKB 解と呼ばれる形式解

$$\psi_{\pm}(x,\hbar)=\exp\left(\int^x S^{(\pm)}(x,\hbar)\,dx\right) \tag{1.2}$$

を持つ. このとき方程式 (1.1) の Voros 係数は, $S^{(+)}$ を方程式 (1.1) の特異点 b_0 から特異点 b_1 までの積分を正規化したものとして定義される. 本講演で考える $Q(x,\hbar)$ の場合は次式で与えられる.

$$V:=\int_{b_0}^{b_1}(S^{(+)}(x,\hbar)-\hbar^{-1}S_{-1}^{(+)}(x)-S_0^{(+)}(x))\,dx. \tag{1.3}$$

* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程後期課程

1.2 位相的漸化式

本講演では, 代数曲線

$$P(x,y) = p_0(x)y^2 + p_2(x) = 0 \tag{1.4}$$

を考える. また, $x(z)$ と $y(z)$ は $P(x(z), y(z)) = 0$ であって, dx と dy が共通零点を持たないような $\mathbb{P}^1$ 上の有理型函数とする. このとき, 位相的漸化式は次のように定式化される.

定義 1.1 ([EO, Definition 4.2]). $\mathbb{P}^1$ 上の有理型多重微分 $W_{g,n}(z_1, \ldots, z_n)$ $(g \geq 0, n \geq 1)$ を以下で定める.

$$W_{0,1}(z_1) = y(z_1)dx(z_1), \tag{1.5}$$

$$W_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} W_{g,n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{r \in R} \operatorname*{Res}_{z \to r} K(z_0, z) \Big[& W_{g-1,n+1}(z, \bar{z}, z_1, \ldots, z_n) \\ & + {\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1,\ldots,n\}}}}' W_{g_1,1+|I|}(z, z_I)\, W_{g_2,1+|J|}(\bar{z}, z_J) \Big]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

ここで, $R = \{r \in \mathbb{P}^1 \mid dx(r) = 0\}$ は $x : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1$ を被覆写像とみなした際の分岐点の集合, $\bar{z}$ は各分岐点における z の局所共役点 (つまり, 各分岐点のある近傍で $x(z) = x(\bar{z})$ かつ $y(z) \neq y(\bar{z})$ を満たす点),

$$K(z_0, z) = \frac{\frac{1}{z_0 - z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z}))\, dx(z)} \tag{1.8}$$

であり, また (1.7) の最後の和は $\{1, \ldots, n\}$ の空集合も許す任意の分割に関する和であり, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ とすると

$$W_{g,m+1}(z, z_I) = W_{g,m+1}(z, z_{i_1}, \ldots, z_{i_m})$$

である. また, 同じ和における $'$ は $(g_1, I) = (0, \emptyset)$ および $(g_2, J) = (0, \emptyset)$ なる場合を除外することを意味する.

2 量子曲線

この位相的漸化式により定義される $W_{g,n}$ を用いて, V.Bouchard と B.Eynard は, 適当な条件のもとで方程式 (1.1) の WKB 解が構成できることを示した ([BE]). 特に, Weber 方程式の場合には次が得られる.

定理 2.1 ([BE], cf. [Ta])**.** (1.1) において

$$Q(x,\hbar) = \frac{x^2}{4} - E - (\nu - \frac{1}{2})\hbar \tag{2.1}$$

とする．ただし $\nu \in \mathbb{C}$ はパラメータである．このとき,

$$\begin{aligned}\psi(x,\hbar) = &\exp\left[\hbar^{-1}\int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2!}\int_D\int_D \frac{dz_1\,dz_2}{(z_1z_2-1)^2}\,dz\right.\\ &\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\hbar^m\left\{\sum_{\substack{2g+n-2=m\\ g\geq 0,\,n\geq 1}}\frac{1}{n!}\int_D\cdots\int_D W_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)\right\}\right]\Bigg|_{z=z(x)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

は (1.1) の WKB 解となる．ここで $\displaystyle\int_D = \nu\int_0^z + (1-\nu)\int_\infty^z$ であり, $z = z(x)$ は $x = x(z)$ の逆関数である．

3 主結果

本講演の主結果は, (合流型) 超幾何微分方程式の Voros 係数が自由エネルギー F_g の母関数を用いて表されるというものである．以下, Weber 方程式の場合に説明することとし, $Q(x,\hbar)$ は (2.1) で与えられるものとする．このとき, F_g は方程式 (1.1) に含まれるパラメータ E に依存するので, それを $F_g(E)$ とかき, さらに $F_g(E)$ の母関数を

$$F(E,\hbar) = \sum_{g\geq 0} F_g(E)\hbar^{2g-2}$$

とする．また, このとき方程式 (1.1) の Voros 係数はパラメータ E, ν, $\hbar$ に依存するので, それを $V(E,\nu,\hbar)$ と表す.

定理 3.1 (cf. [Ta])**.** 次が成り立つ.

$$V(E,\nu,\hbar) = \{F(E+\nu\hbar,\hbar) - F(E+(\nu-1)\hbar,\hbar)\} - \frac{\partial F_0}{\partial E}\hbar^{-1} - \frac{2\nu-1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}. \tag{3.1}$$

この定理 3.1 と WKB 解の性質により, F が差分方程式

$$F(E+\hbar,\hbar) - 2F(E,\hbar) + F(E-\hbar,\hbar) = \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} \tag{3.2}$$

を満たすことがわかる．これを解くと $F_g(E)$ の具体形が得られる．

補題 3.2.

$$F_g(E) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}E^{2-2g} \quad (g \geqq 2). \tag{3.3}$$

注意 3.3. Weber 方程式の場合の $F_g(E)$ の具体形は, [HZ] により知られている.

定理 3.1 と補題 3.2 から, $V(E,\nu,\hbar)$ の具体形もわかる.

定理 3.4 (cf. [AKT], [T]). $V(E,\nu,\hbar)$ について, 次が成り立つ.

$$V(E,\nu,\hbar)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n\,(1-\nu)}{n(n-1)}E^{1-n}\hbar^{n-1}. \tag{3.4}$$

ここで $B_n(X)$ は

$$\frac{we^{Xw}}{e^w-1}=\sum_{n\geq 0}B_n(X)\frac{w^n}{n!}$$

で定義される n 番目の Bernoulli 多項式である.

注意 3.5. 関係式 (3.4) で $\nu=1/2$ の場合は, Sato's conjecture (cf. [AKT], [T]) として知られているものである.

さらに, これらの定理の一般化として, Gauss の超幾何方程式等の場合にも同様の結果が得られる. 詳しくは講演の中で触れる予定である.

参考文献

[AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei : The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.

[BE] V. Bouchard and B.Eynard : Reconstructing WKB from topological recursion, arXiv:1606.04498v1 [math-ph].

[EO] B. Eynard and N. Orantin : Invariants of algebraic curves and topological expansion, Comm. in Number Theory and Phys., **1** (2007), 347–452.

[HZ] J. Harer and D. Zagier : The Euler characteristic of the moduli space of curves, Invent. Math., **85** (1986), 457–485.

[T] Y. Takei : Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B10** (2008), 205–224.

[Ta] 竹井優美子 : 完全 WKB 解析と位相的漸化式について, 神戸大学修士論文, 2017.

双曲型Stokes方程式の解に対する局所エネルギー減衰定理*

中村 憲史 (Kenji Nakamura)

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻博士後期課程 2 年

1 導入

非圧縮性粘性流体の運動は, 次の Navier-Stokes 方程式で記述される：

$$\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = \operatorname{Div} 2S, \quad \nabla\cdot u = 0 \quad \text{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{NS}$$

ただし, Ω は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ n 次元 $(n\geq 2)$ 外部領域とし, $u = u(x,t) = (u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$ は流速, $\pi = \pi(x,t)$ は圧力を表す. また, 変形速度テンソル $S = (S_{jk})_{j,k=1}^n$ と $\operatorname{Div} S$ はそれぞれ次で与えられる：

$$S_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j), \quad \operatorname{Div} S = \Big(\sum_{j=1}^n \partial_j S_{jk}\Big)_{k=1}^n.$$

非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ と合わせて $\operatorname{Div} 2S = \Delta u$ が従う. (NS) については数多くの研究結果が知られており, [5] では $n\geq 3$ の場合について, (NS) の線形化問題の解に対する局所エネルギー減衰定理が示され, L^p-L^q 減衰評価が得られた. そして, 小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が示された. また, [1], [3] では (NS) の線形化問題の解に対する局所エネルギー減衰定理と, L^p-L^q 減衰評価が $n=2$ の場合についても示された.

本稿では, (NS) における変形速度テンソルが次の関係で与えられる場合を考える：

$$S + \tau S_t = \frac{\nu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)_{j,k=1}^n.$$

ここで, $\tau > 0$ であり, 上式の左辺は形式的には $S(t+\tau)$ の 1 次近似となる. 非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ と合わせれば $\operatorname{Div} 2(S+\tau S_t) = \Delta u$ が従い, 次の双曲型 Navier-Stokes 方程式を得る：

$$\begin{cases} \tau u_{tt} - \Delta u + u_t + \nabla\pi + \tau\nabla\pi_t = -\tau(u\cdot\nabla)u_t - ((\tau u_t + u)\cdot\nabla)u & \text{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in}\,\Omega\times(0,\infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (u,u_t)|_{t=0} = (u_0,v_0). \end{cases} \tag{HNS}$$

(HNS) の小さな初期値に対する可解性については, 全空間の場合は [7], [8] などで示されている. しかし, 外部領域の場合については, (NS) の場合とは対照的に我々の知る限り研究結果がない. そこで (HNS) を解析するための第一歩として, 線形化問題の解析をおこなった.

*本研究は小林孝行氏 (大阪大学), 久保隆徹氏 (筑波大学) との共同研究に基づく.

以後, $v = u_t$, $\mathbb{U} = {}^T(u, v)$, $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) = \{u \in C^\infty_0(\Omega)^n \,|\, \nabla \cdot u = 0 \,\text{in}\, \Omega\}$ とし, L^2 ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. また,

$$L^2_\sigma(\Omega) = \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\cdot\|}, \quad \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) = \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\nabla\cdot\|}, \quad G(\Omega) = \{\pi \in L^2_{loc}(\Omega) \,|\, \nabla\pi \in L^2(\Omega)^n\}$$

と定める. このとき, Helmholtz 分解 $L^2(\Omega)^n = L^2_\sigma(\Omega) \oplus G(\Omega)$ が成り立つことが知られており, 連続射影 $P : L^2(\Omega)^n \to L^2_\sigma(\Omega)$ を Helmholtz 射影という. Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ を用いて, 作用素 $\mathbb{A}$ を次で定義する：

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau}A & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}.$$

(HNS) の線形化問題で, Helmholtz 射影を施したものは次で与えられる：

$$\mathbb{U}_t = \mathbb{A}\mathbb{U} \quad \text{for } t > 0, \quad \mathbb{U}(0) = \mathbb{U}_0.$$

ただし, $\mathbb{U}_t = {}^T(u_t, v_t)$, $\mathbb{U}_0 = {}^T(u_0, v_0)$ である. ここで, Hilbert 空間 $\mathscr{H}(\Omega)$ を

$$\mathscr{H}(\Omega) = \left\{\mathbb{U} = {}^T(u, v) \,|\, u \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega), v \in L^2_\sigma(\Omega)\right\}$$

として, 内積とノルムはそれぞれ次のものとする：

$$(\mathbb{U}, \mathbb{W})_{\mathscr{H}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla w) + \tau(v, z), \quad \|\mathbb{U}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} = \left(\|\nabla u\|^2 + \tau\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

ただし, $\mathbb{W} = {}^T(w, z)$ とした. また, $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| < r\}$, r_0 を $\Omega^c \subset B_{r_0}$ を満たす定数, $\Omega_r = \Omega \cap B_r$ とする. さらに, $r > r_0$ に対して次を定義する：

$$L^2_r(\Omega) = \left\{f \in L^2(\Omega)^n \,|\, \text{supp}\, f \subset \Omega_r\right\},$$
$$\mathscr{H}_r(\Omega) = \left\{\mathbb{U} = {}^T(u, v) \in \mathscr{H}(\Omega) \,|\, u, v \in L^2_r(\Omega)\right\}.$$

このとき, 次の定理を得た.

定理 1.1. $\mathbb{A}$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ 上 C^0 半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を生成する.

定理 1.2. $n \geq 2$, m を非負整数, r を $r > r_0$ を満たす任意の数とする. このとき, 任意の $\mathbb{F} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して次が成り立つ:

$$\|\partial_t^m T(t)\mathbb{F}\|_{\mathscr{H}(\Omega_r)} \leq C_{m,n,r}(1+t)^{-\frac{n}{2}-m}\|\mathbb{F}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}, \quad t \geq 0.$$

ただし, $C_{m,n,r}$ は m, n, r に依存する定数である.

注意 1.3. 有界領域 Ω_r の場合, (1) で定義したノルムは, Poincaré の不等式から

$$\|\mathbb{U}\|_{\mathscr{H}(\Omega_r)} = \left(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \tau\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

と同値になる.

2 準備

次のレゾルベント問題について考える:

$$\lambda u + Au = f \quad \text{in}\,\Omega. \tag{2}$$

ここで, $\lambda \in \Sigma_{\ell,\epsilon} = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \,|\, |\lambda| < \ell, |\arg\lambda| < \pi - \epsilon\}$, $0 < \ell < 1$, $0 < \epsilon < \pi/2$ であり, A は Stokes 作用素である. また, (2) の解を $S(\lambda)f$ で定義し, $W_s^{m,2}(\Omega)$ を次で定義される重み付き Sobolev 空間とする:

$$W_s^{m,2}(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{s}{2}} \partial_j^k f \in L^2(\Omega),\, k \le m \right\}$$

ただし, m は非負整数, s は実数とする. さらに, $s > n/2$ and $s' < -n/2$ に対して

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(L^2_\sigma(\Omega) \cap W_s^{0,2}(\Omega)^n, L^2_\sigma(\Omega_r) \cap W_{s'}^{2,2}(\Omega)^n\right)$$

とおく. このとき, 次が知られている:

命題 2.1 ([5]). $\ell > 0$ 及び $S(\lambda) \in \mathrm{Hol}\,(\Sigma_{\ell,\epsilon}, \mathcal{B})$ が存在し, $S(\lambda)$ は次の展開式をもつ:

$$S(\lambda) = \begin{cases} G_1 \lambda^{\frac{n}{2}-1} \log\lambda + G_2(\lambda) + G_3(\lambda)\lambda^{\frac{n}{2}-1} & \textit{where } n \textit{ is even}, \\ G_1 \lambda^{\frac{n}{2}-1} + G_2(\lambda) + G_3(\lambda)\lambda^{\frac{n}{2}-1} & \textit{where } n \textit{ is odd}, \end{cases}$$

ここで, $G_1 \in \mathcal{B}$, $G_2(\lambda)$ は λ に関する $[n/2]-1$ 次多項式, $G_3(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to 0)$ である.

次節において, λ が原点付近の場合について, $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ の性質を調べる. そのために, 以下で定義される関数空間 $\mathcal{C}^k$ とその性質を用いる.

定義 2.2 ([2]). X を *Banach* 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $N \ge 0$ を整数とし, $k = N + \sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ とする. さらに

$$\mathcal{C}^k(\mathbf{R}; X) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}; X) \,|\, \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} < \infty \right\}$$

とする. ただし,

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} = \sum_{j=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^j f(\tau) \right|_X d\tau + \sup_{h \ne 0} |h|^{-\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_h \left(\frac{d}{d\tau}\right)^N f(\tau) \right|_X d\tau$$

であり, $\Delta_h f(\tau) = f(\tau + h) - f(\tau)$ とした.

命題 2.3 ([9]). N を非負整数, X を *Banach* 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $f \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}; X)$, $f(\tau) = 0$ *if* $|\tau| \ge 2$ を仮定し, $I = (-2, 2)$ とおく. さらに, $k = N + \sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ とし, $f(\tau)$ $(\tau \in I \setminus \{0\})$ が次の条件を満たすとする:

$$\left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^j f(\tau) \right|_X \le C_f \quad \textit{for any integer } j \in [0, N-1],$$
$$\left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^N f(\tau) \right|_X \le C_f |\tau|^{\sigma-1}, \quad \left| \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{N+1} f(\tau) \right|_X \le C_f |\tau|^{\sigma-2}.$$

このとき, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}; X)$ であり, 次が成り立つ:

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{k,X} \le C_{\sigma,N} C_f.$$

命題 2.4 ([9]). *X を Banach 空間とし, $|\cdot|_X$ をそのノルムとする. また, $N \geq 0$ を整数, $0 < \sigma < 1$ とし, $f \in \mathcal{C}^{N+\sigma}(\mathbf{R}; X)$ とする. さらに*

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau t} d\tau.$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

$$|F(t)|_X \leq C(1+|t|)^{-(N+\sigma)} \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{N+\sigma,X}.$$

3 証明の概要

3.1 C^0 半群の構成

Lumer–Phillips の定理 [6, Chapter 1, Theorem 4.3] から, 次の命題を示せば, $\mathbb{A}$ が $\mathscr{H}(\Omega)$ 上 C^0 半群を生成することがわかる. なお, 証明は省略する.

命題 3.1. (1) $\mathbb{A}$ は消散作用素である. すなわち, $\mathrm{Re}\,(\mathbb{A}\mathbb{U}, \mathbb{U})_{\mathscr{H}(\Omega)} \leq 0$.

(2) $\mathscr{R}(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \mathscr{H}(\Omega)$. ここで, $\mathscr{R}(\mathbb{I} - \mathbb{A})$ は $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ の値域を表す.

(3) $\mathscr{D}(\mathbb{A})$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ で稠密である.

ここで, 次の補題を用意しておく.

補題 3.2. *$b(a)$ を*

$$b(a) = \frac{a}{2a\sqrt{\tau} + 2(3a\tau + 1)\sqrt{\tau + 1}}.$$

で定める. このとき, 任意の $a > 0$ に対して $M_a > 0$ が存在して, 次を満たす:

$$\left\| (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))} \leq M_a$$

ただし, $\lambda \in D_{a,b(a)} = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, |\mathrm{Re}\,\lambda| \leq b(a), |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq a\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \geq b(a)\}$ である.

3.2 $\lambda = 0$ 付近での $(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ の解析

ここでは, $\lambda = 0$ 付近での $(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ を調べる. 以下, $(\cdot, \cdot)_D$ は $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)$ を表し, $\ell > 0$ は命題 2.1. と同じものとする. さらに, $\varphi_r(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n; [0,1])$ は $\varphi_r(x) = 1$ if $|x| \leq r$, $\varphi_r(x) = 0$ if $|x| \geq r+1$ を満たすものとし, $\rho_d(s) \in C_0^\infty(\mathbf{R}; [0,1])$ は $\rho_d(s) = 1$ if $|s| < d/2$, $\rho_d(s) = 0$ if $|s| > d$ を満たすものとする.

補題 3.3. *$Q_d = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < d, |\mathrm{Im}\,\lambda| < d\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.*

(1) *次を満たす $d > 0$ 及び $\mathbb{R}(\lambda) \in \mathrm{Hol}\,(Q_d, \mathcal{L}(\mathscr{H}_r(\Omega), \mathcal{H}(\Omega_r)))$ が存在する:*

$$\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} = (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega) \quad \text{and} \quad \lambda \in Q_d.$$

ただし,

$$\mathcal{H}(\Omega_r) = \left\{ {}^T(f, g) \,|\, f \in H^1(\Omega_r) \cap L^2_\sigma(\Omega),\, g \in L^2(\Omega_r) \cap L^2_\sigma(\Omega) \right\}.$$

(2) 任意の非負整数 m, $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$, $\mathbb{Y} \in \mathscr{H}(\Omega)$, 及び $\alpha < d$ に対して, 次を満たす定数 $C = C_{m,n,r,\rho_d,\varphi_r}$ が存在する:

$$\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot) s^m (\varphi_r \mathbb{R}(\alpha + i\cdot)\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\rangle\!\right\rangle_{\frac{n}{2}+m,\mathbf{R}} \le C \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.$$

補題 3.3-(2) を示すために, 次の補題を用いる.

補題 3.4. $\widetilde{\ell} = 2\ell/3$ とする. 任意の $f \in L^2_\sigma(\Omega) \cap L^2_r(\Omega)$, $g \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, $h \in L^2_\sigma(\Omega)$, 及び $0 < \alpha < \widetilde{\ell}$ に対して次が成り立つ:

$$\left\langle\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot) \left(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, g\right)_D \right\rangle\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \le C_{n,\varphi_r,\rho_{\widetilde{\ell}}} \|f\| \|\nabla g\|,$$
$$\left\langle\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot) \left(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, h\right)_D \right\rangle\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \le C_{n,\varphi_r,\rho_{\widetilde{\ell}}} \|f\| \|h\|.$$

証明. n が奇数の場合についてのみ示す. 命題 2.1 から, 以下の評価が成り立つ.

$$\left| \left(\frac{d}{ds}\right)^j \left\{ \rho_{\widetilde{\ell}}(s) \left(\varphi_r S(\alpha + is) f, g\right)_D \right\} \right| \le C \|f\| \|\nabla g\| \quad \text{for any integer } j \in \left[0, \frac{n-3}{2}\right],$$
$$\left| \left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \rho_{\widetilde{\ell}}(s) \left(\varphi_r S(\alpha + is) f, g\right)_D \right\} \right| \le C \|f\| \|\nabla g\| |s|^{-\frac{1}{2}},$$
$$\left| \left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \rho_{\widetilde{\ell}}(s) \left(\varphi_r S(\alpha + is) f, g\right)_D \right\} \right| \le C \|f\| \|\nabla g\| |s|^{-\frac{3}{2}}.$$

ただし, $C = C_{n,\rho_{\widetilde{\ell}},\varphi_r}$. したがって, 命題 2.3 から, n が奇数の場合について,

$$\left\langle\!\left\langle \rho_{\widetilde{\ell}}(\cdot) \left(\varphi_r S(\alpha + i\cdot) f, g\right)_D \right\rangle\!\right\rangle_{\frac{n}{2},\mathbf{R}} \le C \|f\| \|\nabla g\|.$$

第 2 式も同様である. □

補題 3.3 の証明. (1) $S(\lambda)$ を用いて, $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ を表現する. $\mathbb{X} = {}^T(f, g)$ 及び

$$(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{U} = \mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{U} \in \mathscr{D}(\mathbb{A})$$

とする. このとき

$$v = \lambda u - f \quad \text{and} \quad \{\lambda(\tau\lambda + 1) + A\}u = (\tau\lambda + 1)f + \tau g$$

である. $\ell' < \ell$ を十分小にとり, $\lambda \in \Sigma_{\ell',\epsilon'}$ のとき, $\lambda(\tau\lambda + 1) \in \Sigma_{\ell,\epsilon}$ となるような $\epsilon' < \pi/2$ が存在するようにとる. ここで

$$\mathbb{R}(\lambda) = \begin{bmatrix} (\tau\lambda + 1)S(\lambda(\tau\lambda + 1)) & \tau S(\lambda(\tau\lambda + 1)) \\ \lambda(\tau\lambda + 1)S(\lambda(\tau\lambda + 1)) - 1 & \tau\lambda S(\lambda(\tau\lambda + 1)) \end{bmatrix} \tag{3}$$

とおけば, $\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} \in \mathscr{D}(\mathbb{A})$ がわかり,

$$\mathbb{R}(\lambda)\mathbb{X} = (\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \quad \text{for} \quad \mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega) \quad \text{and} \quad \lambda \in \Sigma_{\ell',\epsilon'}$$

となる. したがって, $d = 2\ell'/3$ として $\mathbb{R}(\lambda)$ は (1) の性質をもつ .

(2) $\lambda=\alpha+is$ 及び $\mathbb{Y}={}^T(y,z)$ とする. 補題 3.4, (3), 及び Poincaré の不等式から,

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m(\varphi_r\mathbb{R}(\alpha+i\cdot)\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)}\right\rangle\!\right\rangle &\le \left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r(\tau\lambda+1)S(\lambda(\tau\lambda+1))f,y\right)_D\right\rangle\!\right\rangle\\ &\quad+\tau\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r S(\lambda(\tau\lambda+1))g,y\right)_D\right\rangle\!\right\rangle\\ &\quad+\tau\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r\lambda(\tau\lambda+1)S(\lambda(\tau\lambda+1))f,z\right)\right\rangle\!\right\rangle\\ &\quad+\tau\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r f,z\right)\right\rangle\!\right\rangle\\ &\quad+\tau^2\left\langle\!\left\langle \rho_d(\cdot)s^m\left(\varphi_r\lambda S(\lambda(\tau\lambda+1))g,z\right)\right\rangle\!\right\rangle\\ &\le C\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.\end{aligned}$$

ただし, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{n/2,\mathbf{R}}$ とした. □

3.3 局所エネルギー減衰評価

本節では, 定理 1.2 を示す. まず, 定理 1.1 及び命題 3.1 から次が成り立つ:

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))}\le 1,\quad \forall t\ge 0. \tag{4}$$

このとき, Huang [4, Lemma 1] ([2, Lemma 4.2] も参照) から, 次が知られている.

補題 3.5. $\alpha>0$ 及び $\mathbb{X}\in\mathscr{H}(\Omega)$ とする. また,

$$g(\omega)=\left\|((\alpha+i\omega)\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}\right\|_{\mathscr{H}(\Omega)}.$$

とする. このとき, $g(\omega)\in L^2(\mathbf{R})$ であり, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\lim_{|\omega|\to\infty}g(\omega)=0,\\ &\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)^2d\omega\le\frac{\pi}{\alpha}\|\mathbb{X}\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)}.\end{aligned}$$

定理 1.2 を証明するためには, 次を示せばよい.

命題 3.6. φ_r を補題 3.3 と同じとし, m を非負整数とする. このとき, 任意の $\mathbb{X}\in\mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して

$$\|\varphi_r\partial_t^m T(t)\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}\le C(1+t)^{-\frac{n}{2}-m}\|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)},\quad t\ge 0 \tag{5}$$

が成り立つ. ここで, $C=C_{M_a,m,n,\varphi_r,}$ であり, M_a は補題 3.2 に現れる定数である.

証明. (4) が成り立つので, $\mathbb{X}\in\mathscr{D}(\mathbb{A}^2)$ に対して次の表現を得る:

$$T(t)\mathbb{X}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega}e^{\lambda t}(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{X}d\lambda,\quad \alpha>0 \tag{6}$$

(cf [6, Chapter 1, Corollary 7.5]). $\mathscr{D}(\mathbb{A}^2)$ は $\mathscr{H}(\Omega)$ で稠密ゆえ, (6) は $\mathscr{H}(\Omega)$ 上の表現として成り立つ. 以後, 簡単のため $\rho(s)=\rho_d(s)$ とする. $\alpha<d$, $\mathbb{X}\in\mathscr{H}_r(\Omega)$, 及び $\mathbb{Y}\in\mathscr{H}(\Omega)$ とする. このとき,

$$(\varphi_r T(t)\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\mathscr{H}(\Omega)}=J_0(t)+J_\infty(t)$$

である. ただし,

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \rho(s) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds,$$
$$J_\infty(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \lim_{\omega \to \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds.$$

補題 3.3 と命題 2.4 から

$$|\partial_t^m J_0(t)| \leq C e^{\alpha t} (1 + t)^{-\frac{n}{2} - m} \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \tag{7}$$

ここで,

$$J_\infty(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \lim_{\omega \to \infty} L_\omega(t)$$

とする. ただし,

$$L_\omega(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} ds$$

とした. 関係式 $(it)^{-1} de^{ist}/ds = e^{ist}$ と部分積分から

$$L_\omega(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(-1)^{k-1}}{(it)^k} L_\omega^k(t) + \frac{(-1)^\ell}{(it)^\ell} M_\omega^\ell(t)$$

を得る. ただし,

$$L_\omega^k(t) = \left[e^{ist} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left\{ (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\} \right]_{s=-\omega}^{s=\omega},$$
$$M_\omega^\ell(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{ist} \frac{d^\ell}{ds^\ell} \left\{ (1 - \rho(s)) \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right\} ds.$$

である. 補題 3.2 から

$$\left\| \frac{d^j}{ds^j} ((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))} \leq j! M_a^j \left\| ((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(\Omega))}, \quad |s| \geq a$$

が従うので, 補題 3.5 から

$$\left| L_\omega^k(t) \right| \to 0, \quad \omega \to \infty \tag{8}$$

を得る. Leibniz の公式と $\mathbb{A}$ の共役作用素 $\mathbb{A}^*$ を用いて,

$$\begin{aligned} \left| M_\omega^\ell(t) \right| &\leq \ell! \int_{\frac{d}{2} \leq |s| \leq \omega} (1 - \rho(s)) \left| \left(((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-\ell} \mathbb{X}, ((\alpha - is)\mathbb{I} - \mathbb{A}^*)^{-1} \varphi_r \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right| ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{k} k! \int_{\frac{d}{2} \leq |s| \leq d} \left| \frac{d^{\ell-k}}{ds^{\ell-k}} \rho(s) \right| \left| \left(\varphi_r((\alpha + is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-k-1} \mathbb{X}, \mathbb{Y} \right)_{\mathscr{H}(\Omega)} \right| ds \\ &= K_1 + K_2. \end{aligned}$$

$a < d/2$ とすれば, 補題 3.2 と補題 3.5 から

$$K_1 \le C\ell! M_a^{\ell-1} \left(\int_{\frac{d}{2}\le|s|} \left\| ((\alpha+is)\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{X} \right\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)} ds \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left(\int_{\frac{d}{2}\le|s|} \left\| ((\alpha-is)\mathbb{I} - \mathbb{A}^*)^{-1}\varphi_r \mathbb{Y} \right\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)} ds \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le C_{\ell,M_a} \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \tag{9}$$

さらに, 補題 3.2 から

$$K_2 \le C_{\ell,M_a} \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)}. \tag{10}$$

したがって, (8), (9), 及び (10) を合わせれば, 任意の自然数 ℓ に対して

$$|J_\infty(t)| \le \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} t^{-\ell} C_{\ell,M_a} \|\mathbb{X}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \|\mathbb{Y}\|_{\mathscr{H}(\Omega)} \tag{11}$$

を得る. (7) と (11) で $\alpha \to 0$ とすれば, 任意の $\mathbb{X} \in \mathscr{H}_r(\Omega)$ に対して (5) を得る. □

参考文献

[1] W. Dan, Y. Shibata, On the L_q-L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, *J. Math. Soc. Japan*, **51**, (1999), 181–207.

[2] W. Dan, Y. Shibata, On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation, Funkcial. Ekvac. 38 (1995) 545–568.

[3] W. Dan, T. Kobayashi, Y. Shibata, On the local energy decay approach to some fluid flow in an exterior domain, Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid, 1–51, *Lecture Notes Numer. Appl. Anal*, **16**, Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[4] F. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Differential. Equations. 1 (1985) 43–56.

[5] H. Iwashita, L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q, *Math. Ann*, **285**, (1989), 265–288.

[6] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I: Local well-posedness, *Evol. Equ. Control Theory*, **1**, (2012), 195–215.

[8] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations II: Global existence of small solutions, *Evol. Equ. Control Theory*, **1**, (2012), 217–234.

[9] Y. Shibata, On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain, Tsukuba J. Math. 7 (1983) 1–68.

様々な格子上の離散シュレディンガー作用素の長距離散乱理論

只野之英 (YUKIHIDE TADANO)

1. 導入

N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ 上の Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = (-\Delta_x + V(t,x))u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

は量子力学の基礎方程式として提唱されて以来，数学において様々な研究がなされている．ポテンシャル $V(t,x)$ が時間依存しない場合，(1) の可解性は Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta_x + V(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^N) \tag{2}$$

の自己共役性と同値である．(1) の解 $u(t,\cdot) = e^{-itH}u_0$ の挙動は H のスペクトルによって決定されることが知られおり，2 節で詳説する．

本講演では，Schrödinger 作用素 (2) のラプラシアン Δ_x および V を格子上に離散化して得られる**離散 Schrödinger 作用素の散乱理論**を考察する．Δ_x は中心差分近似または最近接点の値の和（の定数倍）によって離散化するが，格子の形状によって作用素の形が変わってくることに注意する．

例 1. (1) 正方格子上の離散 Schrödinger 作用素[1]

$$H_s u(x) = -\frac{1}{2}\sum_{|y-x|=1} u(y) + V(x)u(x), \quad x \in \mathbb{Z}^N, u \in \ell^2(\mathbb{Z}^N).$$

(2) 2 次元三角格子上の離散 Schrödinger 作用素

$$H_t u[x] = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} u(x+n_j) + V(x)u(x), \quad x \in \mathbb{Z}^2,$$

ただし $n_1 = (1,0), n_2 = (-1,0), n_3 = (0,1), n_4 = (0,-1), n_5 = (1,-1), n_6 = (-1,1)$．座標の取り方は下図参照．

東京大学大学院数理科学研究科 D2 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)
Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science
E-mail: tadano@ms.u-tokyo.ac.jp.

[1]中心差分近似であれば $-\frac{1}{2}\sum_{|y-x|=1}(u(y)-u(x))$ とするべきだが，両者の差は恒等作用素の定数倍なのでスペクトルの性質に影響しない．

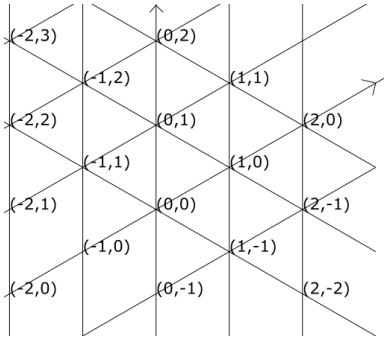


FIGURE 1. 三角格子.

(3) 2次元六角格子上の離散Schrödinger作用素: $u = {}^t(u_1, u_2) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}^2) = \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ に対し

$$H_h u(x_1, x_2) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_2(x_1, x_2) + u_2(x_1 - 1, x_2) + u_2(x_1, x_2 - 1) \\ u_1(x_1, x_2) + u_1(x_1 + 1, x_2) + u_1(x_1, x_2 + 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1(x) u_1(x) \\ V_2(x) u_2(x) \end{pmatrix}.$$

各座標 (x_1, x_2) に対し 2 点が割り振られているため，先の 2 例より複雑な構造になっている.

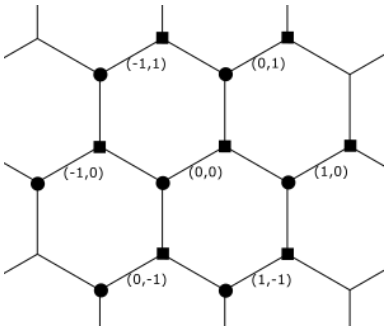


FIGURE 2. 六角格子．座標 (x_1, x_2) が六角形の左上または右下の辺に付けられ，辺の丸の点が第 1 成分，四角の点が第 2 成分に対応する.

ここで本アブストラクトの流れを述べておこう．2 節では $\mathbb{R}^N$ 上の Schrödinger 作用素 (2) の散乱理論について知られていることを解説する．同時に自己共役性の十分条件とスペクトルの一般的な分類を紹介する．各スペクトルに対応する部分空間が量子力学的な束縛状態と散乱状態とうまく対応していることも説明する．3 節では離散 Schrödinger 作用素の散乱理論における先行研究を紹介する．最後の 4 節では主定理を述べる．4.1 項の定理 6 で，例 1 の H_s, H_t を含むクラスにおける長距離散乱に対する修正波動作用素を構成をし，その存在および漸近完全性について紹介する．H_h の場合は定理 6 を適用できないが，この場合でも同様の結果（定理 7）が示されたことも 4.2 項で報告する.

2. Schrödinger 作用素の既知の結果

2.1. **自己共役性.** Schrödinger 作用素の自己共役性は加藤-Rellich の定理によって示されており，具体的には以下のことが知られている．

定理 2 ([6] p.12)**.** $V(x)$ は実数値で

$$N \leq 3 \text{ なら } V \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N),$$
$$N \geq 4 \text{ なら } V \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N),\ p > N/2$$

とする．このとき $H = -\Delta + V,\ D(H) = C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ は本質的自己共役であり，$D(\overline{H}) = H^2(\mathbb{R}^N)$ である．

2.2. **スペクトルの性質.** H をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とすると，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp}(H) \oplus \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H)$ と分解される．$\mathcal{H}_{pp}(H)$, $\mathcal{H}_{ac}(H)$, $\mathcal{H}_{sc}(H)$ はそれぞれ H の点スペクトル空間，絶対連続部分空間，特異連続部分空間とよばれる：

$$\mathcal{H}_{pp}(H) := \overline{\text{L.h.}\{u \in \mathcal{H} : H \text{ の固有値 }\}},$$
$$\mathcal{H}_{ac}(H) := \{u \in \mathcal{H};\, f_u(\cdot) \text{: Lebesgue 測度について絶対連続 }\},$$
$$\mathcal{H}_{sc}(H) := \{u \in \mathcal{H};\, f_u(\cdot) \text{: Lebesgue 測度について特異連続 }\}.$$

ここで $f_u(B) := \int_B d(E_H(\lambda)u, u),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $E_H(\lambda)$: H のスペクトル分解である．各スペクトルを以下で定義する．

$$\sigma_{pp}(H) := \{H \text{ の固有値 }\} \quad H \text{ の点スペクトル}$$
$$\sigma_{ac}(H) := \sigma(H|_{\mathcal{H}_{ac}}) \quad H \text{ の絶対連続スペクトル}$$
$$\sigma_{sc}(H) := \sigma(H|_{\mathcal{H}_{sc}}) \quad H \text{ の特異連続スペクトル}$$

$\mathcal{H}_{pp}(H)$ の元は**束縛状態**とも呼ばれ，特に $Hu_0 = \lambda u_0$ であれば (1) の解は $u(t) = e^{-itH}u_0 = e^{-it\lambda}u_0$ である．コペンハーゲン解釈によれば，時間 t において領域 U 内に粒子が存在する確率が $\int_U |u(t,x)|^2 dx / \|u(t)\|^2$ となるので，束縛状態では粒子が時間発展していないことが分かる．

一方，$\mathcal{H}_{ac}(H)$ の元は**散乱状態**と呼ばれ，以下の主張はその解釈を正当化している．定理 2 の条件下の Schrödinger 作用素は定理 3 の仮定をみたす．

定理 3 ([6] p.36)**.** $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の自己共役作用素 H が局所コンパクト性，すなわち任意の $R > 0$ に対して $\chi_{\{|x|<R\}}(H+i)^{-1}$ がコンパクト，を満たすとする．このとき任意の $R > 0$ と $u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ に対して

$$\int_{|x|<R} |e^{-itH}u(x)|^2 dx \to 0,\ t \to \pm\infty.$$

$\mathcal{H}_{ac}(-\Delta) = L^2(\mathbb{R}^N)$, $\sigma(-\Delta) = [0, \infty)$ であるから，ポテンシャルなしの場合は散乱状態のみである．

$\mathcal{H}_{sc}(H) = 0$ である場合しか扱わないため，$\mathcal{H}_{sc}(H)$ には特に触れない．

2.3. **散乱理論.** 散乱理論はSchrödinger方程式の解の長時間挙動の解析として研究されている．散乱理論の基本的な動機は，V が無限遠で減衰しているとき $u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ なら粒子が無限遠に飛んでいくので，時間が十分たてば $e^{-itH}u$ はポテンシャルが0のときのように振舞うだろうという疑問である．言い換えれば，$H_0 = -\Delta$ とするとき，任意の $u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ に対して

$$e^{-itH}u - e^{-itH_0}u_\pm \to 0,\ t \to \pm\infty$$

をみたす $u_\pm \in L^2(\mathbb{R}^N) = \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ が一意に存在するかを調べることである．e^{itH} のユニタリ性より $\|e^{-itH}u - e^{-itH_0}u_\pm\| = \|u - e^{itH}e^{-itH_0}u_\pm\|$ なので，さらに次のように定式化される：
i) **波動作用素**

$$W^\pm := \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH}e^{-itH_0}$$

が存在するか？
ii)$W^\pm$ が存在するとき（$W^\pm$ はユニタリ作用素），$W^\pm$ は**漸近完全か？**すなわち $\operatorname{Ran} W^\pm = \mathcal{H}_{ac}(H)$ か？

V が短距離型，すなわちある $\rho > 1$ が存在して $V(x) = O(\langle x\rangle^{-\rho})$ ($\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$) をみたすとき，i),ii) がともに成り立つことが知られている ([5],[10])．

一方，V が短距離型より遅い減衰をするとき，波動作用素 $W^\pm$ が存在するとは限らないことが知られている ([14] p.169) ため，$W^\pm$ を何らかの方法で修正した修正波動作用素を用いて議論する必要がある．修正波動作用素は何種類かあるが，今回は磯崎-北田型の修正波動作用素を紹介する．次のアイコナール方程式

$$|\nabla_x\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) = |\xi|^2 \tag{3}$$

を $\{|x| > R = R_\xi, \xi \neq 0, |x\cdot\xi/(|x||\xi|)| > 1-\varepsilon\}$ 上でみたす φ を用いて

$$Ju(x) := (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(\varphi(x,\xi)-y\cdot\xi)}u(y)dyd\xi \tag{4}$$

とおく．磯崎-北田修正波動作用素は，

$$W_J^\pm(\Gamma) = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH}Je^{-itH_0}E_{H_0}(\Gamma),\quad \Gamma \Subset (0,\infty) \tag{5}$$

で定義される作用素[2]で，漸近完全性は $\operatorname{Ran} W_J^\pm(\Gamma) = E_H(\Gamma)\mathcal{H}_{\rm ac}(H)$ で置き換えられる．V が長距離型，すなわちある $\rho > 0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha\langle x\rangle^{-|\alpha|-\rho},\ x \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{N}_{\ge 0}^N$$

をみたすとき，(5) で定義された修正波動作用素が任意の $\Gamma \Subset (0,\infty)$ で存在し漸近完全であることが磯崎-北田 [7] によって示されている．

[2]エネルギー区間を Γ の範囲で制限しているのは，上で定義した作用素 J が有界作用素にならないからである．その原因は φ を $\xi = 0$ の近傍で特異性を持つように構成する必要があることによる．一方，$JE_{H_0}(\Gamma)$ は有界作用素になる．

3. 離散 Schrödinger 作用素の散乱理論に関する先行研究

V が有限台を持つとき，例 1 の 3 つの格子を含むクラスで波動作用素が存在し漸近完全であることが安藤-磯崎-森岡 [2] によって示されている．また，Parra-Richard [13] により V が短距離型の場合に拡張されている．V が長距離型，すなわち後述の仮定 5 をみたすとき，正方格子の場合は中村 [11] によって磯崎-北田型とは異なる修正波動作用素の構成について議論されている．

4. 主定理

4.1. **H_s, H_t を含むクラス．** f を，$f[-x] = \overline{f[x]}$ をみたす $\mathbb{Z}^N$ 上の急減少関数とし，H_0 を

$$H_0 u[x] = \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} f[y] u[x-y]$$

とおく．H_0 は $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ 上の有界自己共役作用素である．離散 Fourier 変換 $F : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \to L^2(\mathbb{T}^N)$ を

$$Fu(\xi) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^N} e^{-ix\cdot\xi} u[x], \quad \xi \in \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$$

とすると H_0 は

$$H_0 u[x] = F^*(h_0(\cdot) F u(\cdot))[x],$$
$$h_0(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^N} e^{-ix\cdot\xi} f[x]$$

と表わされ，$h_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^N; \mathbb{R})$ である．自由作用素 H_0 に対して次を仮定する．

仮定 4. $v(\xi) = \nabla_\xi h_0(\xi)$, $A(\xi) = {}^t\nabla_\xi \nabla_\xi h_0(\xi)$ とし，

$$\mathcal{T} = \{h_0(\xi) \mid \xi \in \mathbb{T}^N,\ v(\xi) = 0\}$$

とおくと，$\mathcal{T}$ は内点をもたず，

$$\{\xi \in \mathbb{T}^N | v(\xi) \neq 0, \det A(\xi) \neq 0\}$$

は $\mathbb{T}^N$ で稠密である．

正方格子，三角格子の場合，それぞれ $h_s(\xi) = \sum_{j=1}^N \cos\xi_j$, $h_t(\xi) = -\frac{1}{3}(\cos\xi_1 + \cos\xi_2 + \cos(\xi_1 - \xi_2))$ であるから仮定 4 をみたすことが分かる．

V を $\mathbb{Z}^N$ 上の実数値関数とし，

$$H = H_0 + V$$

とおく．V に対して次を仮定する．

仮定 5. ある $\rho > 0$ と V の拡張 $\tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ が存在して，

$$|\partial_x^\alpha \tilde{V}(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|-\rho}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^N$ と多重指数 α で成り立つ．

上記の仮定の下で一つ目の主定理を述べる．

定理 6 ([15])**.** 仮定 4，5 の下で，次をみたす $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ 上の作用素 J が存在する：任意の $\Gamma \Subset h_0(\mathbb{T}^N)\backslash\mathcal{T}$ に対して，修正波動作用素

$$W_J^{\pm}(\Gamma) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} E_{H_0}(\Gamma)$$

が存在し，以下が成り立つ：
i)Intertwining property: $HW_J^{\pm}(\Gamma) = W_J^{\pm}(\Gamma)H_0$,
ii) 部分等長性: $\|W_J^{\pm}(\Gamma)u\| = \|E_{H_0}(\Gamma)u\|$,
iii) 漸近完全性: $\operatorname{Ran} W_J^{\pm}(\Gamma) = E_H(\Gamma)\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$.

定理中の J は (3), (4) とほぼ同様にして構成される．φ は x-ξ 空間上のある領域での eikonal 方程式

$$h_0(\nabla_x\varphi(x,\xi)) + \tilde{V}(x) = h_0(\xi)$$

の解として構成し，作用素 J を

$$Ju\,[x] = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{y\in\mathbb{Z}^N} e^{i(\varphi(x,\xi)-y\cdot\xi)} u[y] d\xi$$

と定義する．

4.2. **六角格子の場合．** 考えるヒルベルト空間が $\ell^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{C}^2)$ であることが正方格子等の場合と異なり，修正波動作用素の構成のために対角化の議論が必要である．H_{h0} を H_h に $V_1 = V_2 = 0$ を代入した作用素，$\mathcal{F} := F \oplus F$ とおくと

$$\mathcal{F}\circ H_{h0}\circ\mathcal{F}^* = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha(\xi)} \\ \alpha(\xi) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^2;\mathbb{C}^2)),$$

である．ただし $\alpha(\xi) := 1 + e^{i\xi_1} + e^{i\xi_2}$．ここで

$$p(\xi) = |\alpha(\xi)|,$$
$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha(\xi)}/|\alpha(\xi)| \\ -\alpha(\xi)/|\alpha(\xi)| & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\alpha(\xi) \neq 0$ ($\Leftrightarrow (\xi_1,\xi_2) \neq (\pm\frac{2\pi}{3}, \mp\frac{2\pi}{3})$) ならば

$$\tilde{H}_{h0}(\xi) := U(\xi) \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha(\xi)} \\ \alpha(\xi) & 0 \end{pmatrix} U(\xi)^* = \begin{pmatrix} p(\xi) & 0 \\ 0 & -p(\xi) \end{pmatrix}$$

$\max_{\xi\in\mathbb{T}^2} p(\xi) = 3$, $\min_{\xi\in\mathbb{T}^2} p(\xi) = 0$ より $\sigma(H_{h0}) = [-3,3]$ で，

$$\{p(\xi) \mid \xi \notin p^{-1}(0),\ \nabla p(\xi) = 0\} = \{1,3\}$$

となる．六角格子の場合の長距離散乱について以下の結果が得られた．
（$H_h = H_{h0} + \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ に注意.）

定理 7 (T., 2016)**.** $\mathbb{Z}^2$ 上の実数値関数 V_1, V_2 は仮定 5 をみたし，$V_1 - V_2$ は仮定 5 の条件 $\rho > 0$ を $\rho > 1$ に置き換えたものをみたすとする．このとき磯崎-北田型の修正波動作用素が構成できる．すなわち，作用素 J が存在して，任意の $\Gamma \Subset [-3,3]\backslash\{0, \pm 1, \pm 3\}$ に対して修正波動作用素

$$W_J^{\pm}(\Gamma) = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH_h} J e^{-itH_{h0}} E_{H_{h0}}(\Gamma)$$

が存在し，以下が成り立つ：
i)Intertwining property: $H_h W_J^{\pm}(\Gamma) = W_J^{\pm}(\Gamma) H_{h0}$,
ii) 部分等長性: $\|W_J^{\pm}(\Gamma)u\| = \|E_{H_{h0}}(\Gamma)u\|$,
iii) 漸近完全性: $\operatorname{Ran} W_J^{\pm}(\Gamma) = E_{H_h}(\Gamma)\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H_h)$.

5. 証明の概略

定理 6 の証明は作用素 J の構成を含め，本論文の証明の大部分は磯崎-北田 [7] に沿っている．修正波動作用素の存在は定常位相法で証明し，漸近完全性の証明は量子力学的直観に基づいた Enss の方法による．

六角格子の場合（定理 7）は，$\mathbb{C}^2$ 値関数の解析をするため少々厄介である．非摂動項 H_{h0} の対角化と同時に V_1, V_2 が

$$\mathcal{U}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}\mathcal{U}^*$$

の変形を受けることに注意する．ただし $\mathcal{U} := \mathcal{F}^* \circ U(\cdot) \circ \mathcal{F}$．$V_1, V_2$ を $\mathbb{T}^2$ 上の擬微分作用素と（modulo smoothing operator で）同一視し，$U(\xi)$ の特異性を無視すれば，擬微分作用素の基本的な計算により上式は

$$\begin{pmatrix} (V_1+V_2)/2 & 0 \\ 0 & (V_1+V_2)/2 \end{pmatrix} + (\text{short-range term})$$

となるから，各対角成分で定理 6 と同様の議論に帰着させる．

References

[1] W. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu: C_0-groups, commutator methods and spectral theory of N-body Hamiltonians. Progress in Mathematics, 135. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[2] K. Ando, H. Isozaki, H. Morioka: Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices. Ann. Henri Poincaré **17** (2016), 2103-2171.

[3] A. Boutet de Monvel, J. Sahbani: On the spectral properties of discrete Schrödinger operators: (The multi-dimensional case). Rev. Math. Phys. **11** (1999), 1061-1078.

[4] J. Dereziński, C. Gérard: Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems. Springer Verlag, 1997.

[5] M. Hack: On the convergence to the the Møller wave operators. Nouro Cimento **9** (1958), 731-733.

[6] 磯崎洋: 多体シュレーディンガー方程式, シュプリンガー現代数学シリーズ 第 13 巻. 丸善出版, 2012.

[7] H. Isozaki, H. Kitada: Modified wave operators with time-independent modifiers. J. Fac. Sci. Uni. Tokyo Sect. IA Math. **32** (1985), no. 1, 77-104.

[8] H. Isozaki, I. Korotyaev: Inverse Problems, Trace Formulae for Discrete Schorödinger Operators. Ann. Henri Poincaré **13** (2012), 751-788.

[9] H. Kitada: Scattering theory for Schrödinger equations with time-dependent potentials of long-range type. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), 353-369.
[10] S. Kuroda: On the existence and the unitarity property of the scattering operator. Nouro Cimento **12** (1959), 431-454.
[11] S. Nakamura: Modified wave operators for discrete Schrödinger operators with long-range perturbations. J. Math. Phys. **55** (2014), 112101 (8 pages).
[12] S. Nakamura: Microlocal properties of scattering matrices. Comm. Partial Differential Equations 41 (2016), 894-912.
[13] D. Parra, S. Richard: Spectral and scattering theory for Schrödinger operators on perturbed topological crystals. Preprint 2016 July. (https://arxiv.org/abs/1607.03573)
[14] M. Reed, B. Simon: The Methods of Modern Mathematical Physics, Volume III, Scattering Theory. Academic Press, 1979.
[15] Y. Tadano: Long-range scattering for discrete Schrödinger operators. Preprint 2016 May. (https://arxiv.org/abs/1605.02466)
[16] D. R. Yafaev: Mathematical scattering theory. Analytic theory. Mathematical Surveys and Monographs, 158. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
[17] C. Zworski: Semiclassical Analysis. Graduate Studies in Mathematics, Volume 138. American Mathematical Society, Providence, 2012.

A Functional Directional Derivative in Infinite Dimensional Spaces and Its Application to $\bar{\partial}$-equations

Yuta Aihara
相原　祐太
北海道大学大学院理学研究院

1　序

無限次元空間における微積分法は様々な方法で研究されてきた。例えば、そのような研究の一つでフレッシェ微分の概念とその一般化を用いたものが [6] にある。筆者はある抽象ボース場の分配関数の $h \to 0$（h はプランク定数）についての漸近解析をボソンフォック空間における汎関数微分の概念を用いて行ったが、それによって、無限次元空間における微分の概念の応用が有効であることが一定程度示された [1,2]。一方で、微分作用素のあるクラスがボソン生成作用素とボソン消滅作用素から構成される。そのような微分作用素の観点から無限次元空間の構造を研究することは興味深く、これまでに十分にはなされていないかもしれない。本稿の目的は、そのような研究にとって基本的かつ一般的な結果とその応用の一つを示すことにある。よく知られているように、$\bar{\partial}$-方程式は有限次元の複素多様体の解析において重要な役割を演じる。だから、$\bar{\partial}$-方程式を複素無限次元空間において考察することは自然である。この主題に関しては、既に研究がなされている [6]。[6] においては、核型空間が無限次元空間として取られ、用いられている微分の概念は主に Silva-微分である。本稿において、我々は抽象ボソンフォック空間 $L^2(Q, d\mu)$ をいわゆる Q-空間表現 (例えば、[5,9] を参照) によって考察し、それとは異なる微分の概念を導入する。それから、我々はある単純な汎関数のクラスについて、$\bar{\partial}$-方程式を解く。ここで導入される $L^2(Q, d\mu)$ における微積分法の定式化と $\bar{\partial}$-方程式についての結果は新しいものと思われる。

2 準備

$\mathscr{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ で $\mathscr{H}$ の複素化を表す。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上のボソンフォック空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{\psi=\{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\;\middle|\;\psi^{(n)}\in\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}}, n\geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\|\psi^{(n)}\|^2_{\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}}<\infty\right\},\end{aligned}$$

で定義する。ここで、$\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ は $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ の n 重対称テンソル積である （$\otimes_s^0\mathscr{H}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}$）。$f\in\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ における試験ベクトル f に付随するボソン消滅作用素を $a(f)$ で表す。作用素 $a(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり、その共役 $a(f)^*$ は次の形を取る：

$$(a(f)^*\psi)^{(0)}=0,\ (a(f)^*\psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\psi^{(n-1)}),\ n\geq 1,\ \psi\in D(a(f)^*).$$

ここで、S_n は $\otimes^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称化作用素を表す。作用素 $a(f)^*$ は試験ベクトル f に付随する生成作用素と呼ばれる。

$(Q,\mathscr{B},\mu)$ を確率空間、$\{\phi(f)|f\in\mathscr{H}\}$ を以下の式を満たすガウス超過程とする。

$$\int_Q e^{i\phi(f)}d\mu(\phi)=e^{-\|f\|^2_{\mathscr{H}}/4},\quad f\in\mathscr{H}.$$

$f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$ に対して、$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ で確率変数 $\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n)$ のウィック積を表す。ウィック積 $:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ は次の漸化式を満たす。

$$:\phi(f_1):=\phi(f_1),$$

$$\begin{aligned}:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): &= \phi(f_1):\phi(f_2)\cdots\phi(f_n): \\ &- \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\langle f_1,f_j\rangle:\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n):\quad n\geq 2,\end{aligned}$$

ここで、$\widehat{\phi(f_j)}$ は $\phi(f_j)$ を除くことを意味する。ベクトル $\Omega\in\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\Omega:=(1,0,0,\cdots),$$

で定義する。ベクトル Ω は $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ におけるフォック真空と呼ばれる。次の事実はよく知られている（例えば、[5,9]）。

定理 2.1. 次を満たすボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(Q,d\mu)$ へのユニタリー作用素が一意的に存在する。

$$U\Omega=1,$$

$$U(a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega)=(\sqrt{2})^n:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):,\quad f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$$

$f \in \mathscr{H}$ に対して、作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := U\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\big(a(f)^* - a(f)\big)}\right)U^{-1}.$$

で定義する。すると、$f \in \mathscr{H}$ に対して、$\pi(f)$ は自己共役作用素になる。

すべての $\mathscr{H}$ に対して、f 方向の汎関数的方向微分と呼ばれる D_f を

$$D_f := i\pi(f) + \phi(f).$$

で定義する。すると、よく知られているように [5]、すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して、D_f は $L^2(Q, d\mu)$ 上の可閉線形作用素になる。

定義 2.2. $\mathbb{R}^n$ 上の関数 F は、すべての $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\partial^\alpha F$ が多項式的に有界になるとき、$C^\infty_{\text{p.b.}}(\mathbb{R}^n)$ に属する、といわれる。

以下、微分作用素 $\overline{D_g}$ を単に D_g と書く。関数空間 $\mathscr{T}(Q)$ を

$$\mathscr{T}(Q) := \{F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) | F \in C^\infty_{\text{p.b.}}(\mathbb{R}^n),\ f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H},\ n \in \mathbb{N}\}$$

と定義する。すると、次の命題が成り立つ。

命題 2.3. すべての $g \in \mathscr{H}$ に対して、 $\mathscr{T}(Q) \subset D(D_g)$ が成り立つ。 さらに、すべての $F \in C^\infty_{\text{p.b.}}(\mathbb{R}^n)$ と $g, f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H}$ に対して

$$D_g F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle (\partial_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

が成り立つ。

変数 x_j について一般化された偏微分作用素を D_j で表す。

命題 2.4. 関数 $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を多項式的に有界で $D_j F \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$, を満たすものとする。このとき、ベクトル $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$ が、「分散-共分散行列 $A = (\int_Q \phi(f_i)\phi(f_j) d\mu(\phi))$ が正定値である。」という条件を満たすならば $F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in D(\overline{D_g|_{\mathscr{T}(Q)}}) \subset D(D_g)$ かつ

$$D_g F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle (D_j F)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)).$$

3 ボソンフォック空間における微積分法の諸公式

次の積分記号下の微分公式が成り立つ。

命題 3.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ を区間の直積、$g \in \mathscr{H}$、F を $Q \times A$ で定義された関数で

$$F(\phi,\cdot), D_gF(\phi,\cdot) \in C(A),\ \mu - a.e.\ \phi \in Q,\ F(\cdot,t) \in D(D_g),\ t \in A.$$

を満たすものとする。このとき、

$$\sup_{t\in A}|F(\phi,t)|,\ \sup_{t\in A}|D_gF(\phi,t)|, \int_A |F(\phi,t)|dt, \int_A |D_gF(\phi,t)| \in L^2(Q,d\mu).$$

を満たすならば、$\int_A F(\phi,t)dt \in D(D_g)$ かつ

$$D_g \int_A F(\phi,t)dt = \int_A D_gF(\phi,t)dt.$$

すべての $\phi = (\phi_1,\phi_2) \in Q \times Q$ と $f \in \mathscr{H}$ に対して,$\phi(f)$ を

$$\phi(f) := (\phi_1(f), \phi_2(f)).$$

によって定義する。$g \in \mathscr{H}$ かつ、F を $Q \times Q$ 上の関数で、すべての $\phi_1, \phi_2 \in Q$ に対して $F(\cdot,\phi_2), F(\phi_1,\cdot) \in D(D_g)$ が成り立つものとする。このとき、D_g^1F, D_g^2F を

$$(D_g^1F)(\phi_1,\phi_2) := D_gF(\cdot,\phi_2)(\phi_1),\ (D_g^2F)(\phi_1,\phi_2) := D_gF(\phi_1,\cdot)(\phi_2), \quad \phi_1,\phi_2 \in Q.$$

で定義する。

定義 3.2. F を $Q\times Q$ 上の関数で、すべての $\phi_1,\phi_2 \in Q$ に対して $F(\cdot,\phi_2), F(\phi_1,\cdot) \in D(D_g)$ が成り立つものとする。ある $n \in \mathbb{N}$, $f_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1,\cdots,n)$,$G_j^k \in L^2(Q \times Q, d(\mu\otimes\mu))$ $(k = 1,2)$ が存在して、すべての $g \in \mathscr{H}$ に対して、$D_g^kF = \sum_{j=1}^n \langle f_j, g\rangle G_j^k$, $k = 1,2.$ が成立するとき、F は $\mathscr{D}$ に属するといわれる。

ここで、ある種の複素微分形式を定義する。その起源は [3,4] にある。$F \in \mathscr{D}$, $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする。$\mathscr{H}_\mathbb{C}$ から $L^2(Q\times Q, d(\mu\otimes\mu))$ への実線形作用素 $\bar\partial F$ を

$$\bar\partial F(g) := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \langle e_n,\bar g\rangle \frac{1}{2}(D_{e_n}^1 + iD_{e_n}^2)F\right), \quad g = g_1 + ig_2,\ g_1,g_2 \in \mathscr{H}.$$

で定義する。この定義は CONS の取り方によらない。

命題 2.3, 命題 3.1 と一般化されたコーシーの積分公式 [7] により、次の定理が得られる。

定理 3.3. $F \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ かつ $f \in \mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $g \in \mathscr{H}_\mathbb{C}$ に対して,

$$\bar\partial\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{C} F(\phi(f)+\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}\right)(g) = F(\phi(f))\langle f,\bar g\rangle.$$

が成り立つ。

次の形のボソンフォック空間における部分積分公式が得られる。

命題 3.4. [5, 8] $g \in \mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $F \in D(\overline{D_g|_{\mathscr{T}(Q)}})$ と $G \in \mathscr{T}(Q)$ に対して、

$$\int_Q (D_g F) G d\mu = \int_Q F(\phi) \left(2\phi(g)G(\phi) - (D_g G)(\phi)\right) d\mu(\phi).$$

が成り立つ。

有限次元空間の解析学における場合と同様に、命題 3.4 により、汎関数的方向微分作用素 D_g は一般化され、すべての $F \in L^2(Q, d\mu)$ が D_g で微分できるようになる。この一般化された微分の意味で、命題 2.4 により定理 3.3 はある一般のクラスの関数に対して拡張される。

参考文献

[1] Y. Aihara, Semi-classical asymptotics in an abstract Bose field model, *IJPAM* **85** (2013), 265-284.

[2] Y. Aihara, Semi-classical asymptotic expansions up to any finite orders of the partition function of an abstract Bose field model, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* **19** (2016), 1650028 (16 pages).

[3] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.* **82** (1989), 330-369.

[4] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), 342-408.

[5] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, 2010.

[6] J.F. Colombeau, "Differential Calculus and Holomorphy," North-Holland, 1982.

[7] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, D.van Nostrand Publ, 1966.

[8] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer, 1997.

[9] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Prinston University Press, 1974.

極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数について

藤野 弘基 (Hiroki FUJINO)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD *

概要

1956 年, Beurling–Ahlfors によって実数直線上の擬対称写像に対し上半平面への擬等角拡張が与えられた. それ以来よりよい擬等角拡張を得るためにいくつかの拡張定理が示されてきた. その中で本論説のメインテーマになるのが 2010 年に Bonsante–Schlenker によって与えられた, 双曲的面積を保存し, グラフが上半平面の直積空間内の極小曲面となるような擬等角拡張 (極小ラグランジュ拡張) である. グラフの極小性については 2 階の偏微分方程式によって書くことができるはずだが, Bonsante–Schlenker の証明においてはその微分方程式は具体的に, 特に標準的な座標に対して与えられていない. 本論説では上半平面から上半平面への滑らかな関数に対し, グラフの極小性を表す偏微分方程式の導出を行う. さらにその結果から, 面積を保存する擬等角写像に対しグラフが極小となるための必要十分条件がベルトラミ係数の条件として書けることを示す.

1 擬対称写像の擬等角拡張.

1.1 擬等角写像. 複素平面を $\mathbb{C}$ で表し, 領域 $D, D' \subset \mathbb{C}$ 間の向きを保つ可微分同相写像 $f : D \to D'$ を考える. このとき点 $z \in D$ での f のベルトラミ係数 $\mu(z) = \mu_f(z)$, および歪曲係数 $K(z) = K_f(z)$ は次で与えられる;

$$\mu(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}, \quad K(z) = \frac{\max\{\|(df)_z(v)\| \mid v \in T_zD, \|v\| = 1\}}{\min\{\|(df)_z(v)\| \mid v \in T_zD, \|v\| = 1\}}.$$

ただし, 歪曲係数の定義においてベクトルの長さはユークリッド計量によって測るものとするが, ベクトルの長さの比をとっているのでユークリッド計量と等角な計量を用いても値は変わらない. 従って, 歪曲係数はリーマン面間の向きを保つ可微分同相写像 $f : R \to R'$ に対しても定義することができ, R 上の非負値関数を与える (定義より $K \geq 1$ である). 一方, ベルトラミ係数についても $(-1, 1)$ 形式として $\mu = \mu d\bar{z}/dz$ と定義すればリーマン面間の向きを保つ可微分同相写像に対して定義できる. 簡単な計算により

$$K(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

*本論説は第 14 回数学総合若手研究集会 (2 月 27 日 (火)〜3 月 2 日 (金), 於: 北海道大学) のテクニカルレポートである. 本研究は JSPS 特別研究員奨励費, 科研費 (16J02185) の助成を受けたものである.

が得られる. 従って, 歪曲係数 $K(z)$ およびベルトラミ係数 $\mu(z)$ は共に, 全微分 $(df)_z$ がどのくらい円周を歪ませて楕円に移すのかを表す指標であると考えられる.

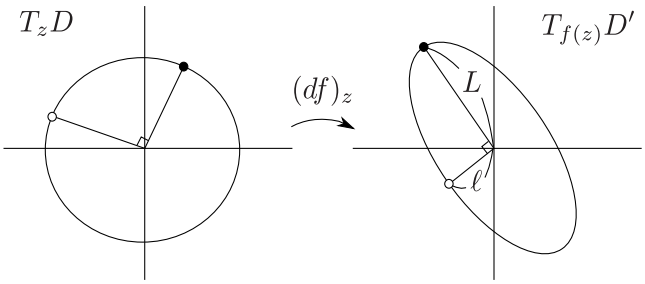


図 1： $\ell = |f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|,\ L = |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|$.

実数 $K \geq 1$ に対し f が K-擬等角であるとは, 全ての $z \in D$ に対して $K(z) \leq K$ が成り立つことを言う. また, ある $K \geq 1$ に対して f が K-擬等角になるとき, 単純に f は擬等角であると言う. つまり, 擬等角写像とは全微分による円周の歪め具合が一様に抑えられる写像のことである. リーマン面間の擬等角写像についても同様に定義される. また上の議論から f が擬等角となることと, $\|\mu\|_\infty := \mathrm{ess.sup}|\mu| < 1$ となることは同値である.

擬等角写像の定義は線上絶対連続 (ACL) なクラスの (向きを保つ) 同相写像 $f : D \to D'$ へ一般化できる. このとき, $\mu_f(z) = f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)$ はほとんど至る所で定義することができ, $L^\infty(D)_1 := \{\mu \in L^\infty(D) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$ の元を定める. 次の強力な定理によって擬等角写像はベルトラミ係数によって完全に決定する.

Theorem (Ahlfors–Bers の可測写像定理) 任意の $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})_1$ に対し, 擬等角写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ であって, $\mu_f = \mu$ がほとんど至る所成立するものが存在する. さらにこのような擬等角写像は $\widehat{\mathbb{C}}$ のメビウス変換の後からの合成を除いて一意である.

$\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ を上半平面とする. この定理の系として, 任意の $\mu \in L^\infty(\mathbb{H})_1$ に対し, $\mu_f = \mu$ がほとんど至る所成立するような擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ が存在することが分かる. さらにこのような擬等角写像は $\mathbb{H}$ のメビウス変換の後からの合成を除いて一意である.

1.2 擬対称写像と Beurling–Ahlfors の定理. 1956 年に Beurling–Ahlfors は, 上半平面の自己擬等角写像の境界値対応を特徴づけるために擬対称写像という概念を導入した. 実数直線 $\mathbb{R}$ の向きを保つ自己同相写像 φ が $M \geq 1$ に対し M-擬対称であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ に対し以下の不等式を満たすことを言う;

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \leq M.$$

また, ある $M \geq 1$ に対して φ が M-擬対称となるとき, φ は単純に擬対称であると言う. 一般に擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は境界 $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ まで連続に拡張し, $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ の自己同相写像になる. ここで, 次の定理が成り立つ.

Theorem (Beurling–Ahlfors の拡張定理 [BA56], 1956) K-擬等角写像 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ の $\overline{\mathbb{H}}$ への同相拡張が無限遠点を固定する時, 境界値対応 $\varphi = f\,|_{\mathbb{R}}$ は M-擬対称である. ただし $M = M(K) \geq 1$ は K にのみ依存する定数である.

逆に $\mathbb{R}$ の向きを保つ同相写像 φ が M-擬対称である時,

$$f_\varphi(x+iy) = \frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt + \frac{i}{y}\left(\int_{x}^{x+y} \varphi(t)dt - \int_{x-y}^{x} \varphi(t)dt\right)$$

は, φ の $\mathbb{H}$ への C^1 級 K-擬等角拡張を与える. ここで $K = K(M) \geq 1$ は M にのみ依存する定数である. 特に $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ならば $f_\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ となる.

同様に, 単位円周 $S^1 := \partial\mathbb{D}$ 上の同相写像に対して擬対称性を定義することができ Beurling–Ahlfors の定理が成り立つ; すなわち, S^1 の向きを保つ自己同相写像 ψ が M-擬対称であることを, 任意の θ と $0 < t < 2\pi$ に対して

$$\frac{1}{M} \leq \left|\frac{\psi(e^{i(\theta+t)}) - \psi(e^{i\theta})}{\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i(\theta-t)})}\right| \leq M$$

を満たすことと定めると, $\mathbb{D}$ の自己 K-擬等角写像の境界値対応は $M = M(K)$-擬対称となり, 逆に S^1 の M-擬対称写像は $\mathbb{D}$ への $K = K(M)$-擬等角拡張を持つことが示される.

現在では擬等角性の定義はより高次元の空間へと拡張されている [Väi71], [Väi99]. 擬対称性についても一般の距離空間の間の写像へと定義が拡張されている [TV80]. そして高次元においても Beurling–Ahlfors の定理が成り立つ [Ahl64], [Car74], [TV82]. 一方, ユークリッド空間の一般の部分集合上で定義された擬対称埋め込みの擬等角拡張可能性 (Väisälä の第 8 問題 [Väi95]) については大部分が未解明であり, 現在も研究が行われている, [TV99], [KO11], [Vel15, Vel16], [Fuj16].

1.3 種々の Beurling–Ahlfors の定理. Beurling–Ahlfors の定理はタイヒミュラー空間論において重要な役割を果たす. 特に Beurling–Ahlfors 拡張は具体的な積分によって与えられるため, 擬等角写像やそのベルトラミ係数を解析的に調べるのに役に立つ. 一方で擬対称写像のより良い擬等角拡張を得ることによって, タイヒミュラー理論へのさらなる応用を得ようという研究がいくつかある.

1.3.1 Douady–Earle の拡張定理. 擬等角拡張がメビウス変換に関して同変となることは応用上極めて重要である. 次の定理は重心拡張定理と呼ばれる;

Theorem (Douady–Earle[DE86],1986) 任意の M-擬対称写像 $\psi : S^1 \to S^1$ と $z \in \mathbb{D}$ に対し,

$$\frac{1-|w|^2}{2\pi}\int_{S^1} \frac{\psi(\zeta)-w}{1-\psi(\zeta)\overline{w}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}|d\zeta| = 0$$

を満たす唯一の $w \in \mathbb{D}$ を $F_\psi(z)$ と定めると, F_ψ は ψ の $\mathbb{D}$ への実解析的な $K = K(M)$-擬等角拡張を与える. さらに以下の性質が成り立つ;

1. メビウス変換 $g, h \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ に対して, $F_{h\circ\psi\circ g} = h \circ F_\psi \circ g$ が成り立つ.

2. $\psi = \mathrm{id}_{S^1}$ ならば $F_\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

3. $\displaystyle\int_{S^1} \psi(z)dz = 0$ ならば $F_\psi(0) = 0$.

Douady–Earle 拡張は性質 (1),(3) によって特徴付けられる; すなわち S^1 の擬対称写像に対し, $\mathbb{D}$ への擬等角拡張を与える対応 $\psi \mapsto G_\psi$ が性質 (1),(3) を満たすならば $G_\psi = F_\psi$ となる. また, 双曲型リーマン面間の擬等角写像 $f : R \to S$ が与えられた時, 普遍被覆 $\pi_R : \mathbb{D} \to R$ および $\pi_S : \mathbb{D} \to S$ によって, f は擬等角写像 $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に持ち上がる. この時, π_R および π_S に関する被覆変換群をそれぞれ Γ_R, $\Gamma_S \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})$ とすると, $\Gamma_S = F \circ \Gamma_R \circ F^{-1}$ が成り立つ. 従って, 境界値対応 $\psi = F\mid_{S^1}$ も $\Gamma_S = \psi \circ \Gamma_R \circ \psi^{-1}$ を満たす. 逆に擬対称写像 ψ が $\Gamma_S = \psi \circ \Gamma_R \circ \psi^{-1}$ を満たせば, 性質 (3) から Douady–Earle 拡張も $\Gamma_S = F_\psi \circ \Gamma_R \circ F_\psi^{-1}$ を満たす. 従って F_ψ は擬等角写像 $f : R \to S$ を誘導することがわかる. 性質 (3) は等角自然性と呼ばれる.

1.3.2 Schoen 予想 (調和拡張). 一般にリーマン多様体間の滑らかな写像 $f : (M^m, g) \to (N^n, h)$ が調和であるとは, エネルギー汎関数 $E(f) = \displaystyle\int_M \mathrm{Tr}_g(f^*h)\, v_M$ の臨界点であることを言う. ただし v_M は g に関する体積要素を表す. これは, 各局所座標に関して $f : x = (x^1, \cdots, x^m) \mapsto f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x))$ と書いた時

$$\triangle_g f^k + \sum_{\alpha,\beta,i,j} g^{\alpha\beta} \cdot {}^N\Gamma_{ij}^k \circ f \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial x^\beta} = 0, \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

が成り立つことと同値である. ただし, $\triangle_g = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$ は g に関するラプラス・ベルトラミ作用素, $(g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ は $g = (g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ と行列表示した時の g の逆行列, そして ${}^N\Gamma_{ij}^k$ は h に関するクリストッフェル記号とする.

滑らかな写像 $f : (\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}}) \to (\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ を考える. ただし $g_{\mathbb{H}}$ は上半平面のポアンカレ計量, すなわち $g_{\mathbb{H}}(z) = \sigma(z)^2|dz|^2$ $(\sigma(z) = (\mathrm{Im}z)^{-1})$ とする. この時, 調和写像の方程式 (1) は標準的な複素座標を用いて

$$f_{z\bar{z}} + 2\left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \circ f\right) f_z f_{\bar{z}} = 0$$

と書ける. 次の Schoen 予想 [Sch93] は, 一意性は Li–Tam[LT93a, LT93b] によって 1993 年に, 存在性は Markovic[Mar17] によって 2017 年に解決された;

Theorem $\mathbb{R}$ 上の擬対称写像は, $\mathbb{H}$ への調和な擬等角拡張をただ一つ持つ.

$\mathbb{H}$ のメビウス変換はポアンカレ計量に関して等長的であった. 拡張の一意性から調和拡張も等角自然性を持つことが分かる. 従って双曲型リーマン面 R に対し, タイヒミュラー同値類 $[f : R \to S] \in T(R)$ は, $\mathbb{D}$ のポアンカレ計量から誘導される双曲計量 g_R および g_S に関して調和な擬等角変形 $f_H : R \to S$ を (S の自己同型による違いを除き) ただ一つもつ. 特に, 任意の擬等角変形 $g : R \to S$ はただ一つの調和擬等角変形にアイソトピックである.

1.3.3　極小ラグランジュ拡張.　本論説のメインテーマとなるのが, Bonsante–Schlenker によって得られた次の拡張定理である;

Theorem　(Bonsante–Schlenker の極小ラグランジュ拡張 [BS10], 2010) $\mathbb{R}$ の擬対称写像 φ は, 以下の性質を満たすただ一つの擬等角拡張 $f = f_{\mathrm{ML}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ をもつ;

1. f はポアンカレ計量 $g_{\mathbb{H}}$ に関して面積を保存する. すなわち, 面積要素を $v_{\mathbb{H}} = \sqrt{\det g_{\mathbb{H}}}\, dxdy = \sigma(z)^2 dxdy$ $(z = x + iy)$ とすると, 任意の可測集合 $A \subset \mathbb{H}$ に対し以下が成り立つ;

$$\int_{f(A)} v_{\mathbb{H}} = \int_A v_{\mathbb{H}}.$$

2. f のグラフ $\Gamma_f := \{(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{H}\}$ は $(\mathbb{H} \times \mathbb{H}, g_{\mathbb{H}} + g_{\mathbb{H}})$ 内の極小部分多様体となる.

一般に多様体 S からリーマン多様体 (N, h) への滑らかな埋め込み (あるいはより一般にはめ込み) $\Phi : S \to (N, h)$ が面積汎関数 $A(\Phi) = \displaystyle\int_S \Phi^* v_N$ の臨界点となるとき, Φ およびその像 $\Phi(S) \subset N$ は極小であると言う. これは $M = \Phi(S)$ の平均曲率ベルトル場 H_M が 0 になることと同値である. グラフ Γ_f は実次元 2 の部分多様体であるので, Γ_f が極小部分多様体となるとき極小曲面と呼ぶ. 第 3 節で説明するが, $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ にはケーラー多様体の構造が入る. このとき, f_{ML} の満たす性質 (1) は, シンプレクティック構造 $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ に関して Γ_f がラグランジュ部分多様体となることと同値である[1]. 以上の意味で f_{ML} は極小ラグランジュ (minimal Lagrangian) 擬等角拡張と呼ばれる. 証明, 特に拡張の構成法については第 2 節で説明するが, ローレンツ幾何, 特に反ド・ジッター空間の幾何学を用いる.

拡張の一意性を使えば, 極小ラグランジュ擬等角拡張も等角自然性を持つことがわかる. 特に, 双曲型リーマン面間の擬等角写像は, ポアンカレ計量からそれぞれのリーマン面に誘導される双曲計量に関して面積を保存するような擬等角写像とアイソトピックである.

2　極小ラグランジュ擬等角拡張の構成.

第 1 節で述べた Bonsante–Schlenker の極小ラグランジュ擬等角拡張について、その構成法の概略を述べる. 詳しい内容については [BS10], [Bar16], ローレンツ幾何の基本的事項については [O'N83] が参考になる.

単位円板 $\mathbb{D}$ と実数直線 $\mathbb{R}$ の直積空間に, ローレンツ計量

$$(g_{\mathrm{AdS}^3})_{(w,t)} := (g_{\mathbb{D}})_w - \left(\frac{1 + |w|^2}{1 - |w|^2}\right)^2 dt^2$$

を入れたものを AdS^3 と書き, (3 次元) 反ド・ジッター空間と呼ぶ. ただし, $(w, t) \in \mathrm{AdS}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ を標準的な座標, $g_{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ 上のポアンカレ計量とする. やや

[1] つまり, $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}\,|_{\Gamma_f} = 0$ となる.

天下りな定義であるが, 関数 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ が空間的であるとは $|g_w|^2<(1+|w|^2)^{-2}$ を満たすことする[2]. 空間的な関数 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ のグラフを $S\subset \mathrm{AdS}^3$ とする. このときガウス写像と呼ばれる対応, $S\to\mathbb{D}\times\mathbb{D}, p\mapsto(J_L(p),J_R(p))$ が得られる. $G:\mathbb{D}\to\mathrm{AdS}^3$ を $G(w)=(w,g(w))$ と定め, $\widetilde{J_L}=J_L\circ G, \widetilde{J_R}=J_R\circ G$ を計算すると

$$\widetilde{J_L} = \frac{-2iw+(1+|w|^2)(\overline{g_w}-w^2g_w)}{(1+|w|^2)(1+2\mathrm{Im}(wg_w))+(1-|w|^2)\sqrt{1-(1+|w|^2)^2|g_w|^2}}\,e^{ig}$$
$$\widetilde{J_R} = \frac{2iw+(1+|w|^2)(\overline{g_w}-w^2g_w)}{(1+|w|^2)(1-2\mathrm{Im}(wg_w))+(1-|w|^2)\sqrt{1-(1+|w|^2)^2|g_w|^2}}\,e^{-ig}$$

となることが分かる. ここで $f:=J_R\circ J_L^{-1}=\widetilde{J_R}\circ\widetilde{J_L}^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ と置く. この時, 一般に f は $\mathbb{D}$ 上のポアンカレ計量に関して面積を保存する写像になることが示される.

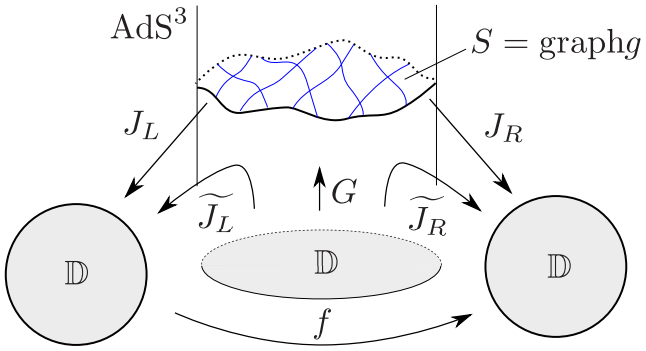


図 2 双曲的面積を保存する写像の構成.

例えば, $g(w)=(u-9)^2/18$ $(w=u+iv)$ とすれば f は下図のような対応になる. ただし, 最も右の図は $\widetilde{J_L}$ および $\widetilde{J_R}$ によって移された三角形の像を一つの円板上に描いたものである.

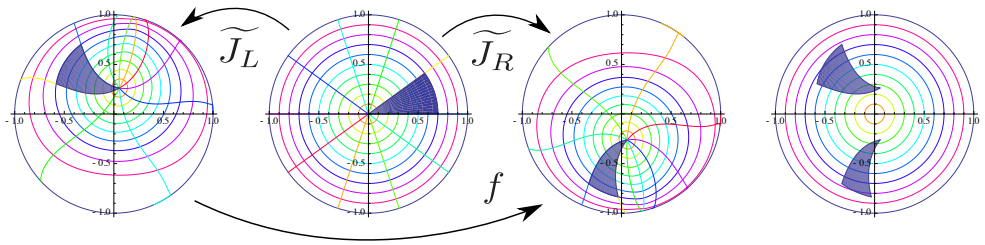


図 3 $g(w)=(u-9)^2/18$ の場合.

ローレンツ幾何においてもリーマン幾何と同様にして, レビ・チビタ接続, リーマン曲率テンソル, 各種曲率が定義される. ローレンツ幾何では平均曲率ベクトル場が恒等的に消えるような (空間的) 曲面を極大曲面と呼ぶ. もし g の

[2]関数 g のグラフを $S\subset\mathrm{AdS}^3$ と置く. 通常ならば, g が空間的であるとは S への g_{AdS^3} の制限が正定値となることと定義される.

グラフ S が極大であれば f は極小ラグランジュとなることが示される．つまり, f は双曲的面積を保存し, そのグラフは $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ の極小曲面を定めるのである．さらに, S のガウス曲率が一様に負であれば f が擬等角となることも示される．より詳しく, S の主曲率によって f の歪曲度が書ける．つまり g のグラフの曲がり具合に f の歪曲度・ベルトラミ係数の情報が現れるのである．

Bonsante–Schlenker は $S^1=\partial\mathbb{D}$ の擬対称写像から g の境界値条件を設定し, 境界値条件を満たす g で S が極大かつ一様負なガウス曲率を持つようなものを構成することによって定理を示している．

3　極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数.

極小ラグランジュ擬等角写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ は, ポアンカレ計量に関して面積を保存し, グラフ $\Gamma_f=\{(z,f(z))\mid z\in\mathbb{H}\}$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 内の極小曲面となるような擬等角写像であった．グラフが極小曲面になるという条件は, Γ_f の平均曲率ベクトル場が 0 になることに対応するため f に関する 2 階の微分方程式によって書くことができるはずである．この節では, Γ_f が極小曲面となるために必要な f に関する微分方程式を導出し, それによって面積を保存する擬等角写像が極小ラグランジュとなるための必要十分条件を与える．またその条件はベルトラミ係数の条件によって書くことができることを説明する．

3.1　空間 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$.　上半平面を $\mathbb{H}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ としポアンカレ計量 $(g_{\mathbb{H}})_z=\sigma(z)^2|dz|^2$ $(\sigma(z)=(\mathrm{Im}z)^{-1})$ が入っているものとする．また $g_{\mathbb{H}}$ に関する体積形式を $(\omega_{\mathbb{H}})_z=2^{-1}i\sigma(z)^2dz\wedge d\bar{z}=\sigma(z)^2dx\wedge dy$ とする．空間 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ には次のリーマン計量 $g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ およびシンプレクティック形式 $\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ が入る;

$$(g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,w)}=(g_{\mathbb{H}})_z+(g_{\mathbb{H}})_w,$$
$$(\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,w)}=(\omega_{\mathbb{H}})_z-(\omega_{\mathbb{H}})_w.$$

このとき, $(\mathbb{H}\times\mathbb{H},g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}},\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})$ はケーラー多様体になっている．向きを保つ可微分同相写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ に対し, そのグラフ $\Gamma_f=\{(z,f(z))\mid z\in\mathbb{H}\}$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ のラグランジュ部分多様体になるとは, $(\omega_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}})_{(z,f(z))}$ の $T_{(z,f(z))}\Gamma_f$ への制限が消えるということだが, これは $f^*\omega_{\mathbb{H}}=\sigma(f(z))^2(|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2)dx\wedge dy=\sigma(z)^2dx\wedge dy=\omega_{\mathbb{H}}$ と同値である．つまり, Γ_f がラグランジュ部分多様体になることと, f がポアンカレ計量に関して面積を保存することは同値である．

標準的な座標 $(z=x_1+ix_2,w=x_3+ix_4)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ に関して, $\{\partial/\partial x_j\}_{j=1}^4$ は $T_{(z,w)}\mathbb{H}\times\mathbb{H}=T_z\mathbb{H}\oplus T_w\mathbb{H}$ の基底を与える．$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ のレビ・チビタ接続を ∇ としたとき, 点 (z,w) でのクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は, $\Gamma_{11}^2=-\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{21}^1=-\Gamma_{22}^2=\sigma(z)$, $\Gamma_{33}^4=-\Gamma_{34}^3=-\Gamma_{43}^3=-\Gamma_{44}^4=\sigma(w)$ となり, これ以外の (i,j,k) に対しては $\Gamma_{ij}^k=0$ となる．

3.2　極小グラフ.　実 2 次元曲面 S の $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ への滑らかな埋め込み $\Phi:S\to\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ を考える．$\zeta=(\xi,\eta)$ を S の局所座標として, $\Phi(\zeta)=(\Phi^1(\zeta),\Phi^2(\zeta))$, また $\Phi^1(\zeta):=\varphi^1(\zeta)+i\varphi^2(\zeta),\Phi^2(\zeta):=\varphi^3(\zeta)+i\varphi^4(\zeta)$ と書くことにする．S 上にリーマン計量が入っているとき, Φ が調和写像になることと各 φ^k $(k=1,2,3,4)$ が調和写像の方程式 (1) を満たすことは同値であるが, これは Φ のテンション場が 0 となることに対応している．特に Φ が等長埋め込みであるとき, テン

ション場と平均曲率ベクトル場は (定義によっては定数倍の違いを除いて) 一致する. すなわち等長埋め込みに対しては極小性と調和性は同値になる (参考: [BW03]). ここで, $g = \Phi^* g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ によって Φ を等長埋め込みと見なすことにする. 接空間 $T_\zeta S$ の複素化 $T^{\mathbb{C}}_\zeta S = T_\zeta S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を考え,

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right),$$

を用いると, 調和写像の方程式 (1) は

$$\triangle_g \Phi^k + i\sigma\circ\Phi^k \cdot \left(a\ \Phi^k_\zeta\ \Phi^k_\zeta + b\ \Phi^k_\zeta\ \Phi^k_{\overline{\zeta}} + c\ \Phi^k_{\overline{\zeta}}\ \Phi^k_\zeta + d\ \Phi^k_{\overline{\zeta}}\ \Phi^k_{\overline{\zeta}}\right) = 0 \quad (k = 1, 2), \tag{2}$$

と書けることが分かる. ただし, 局所座標 $\zeta = (\xi, \eta)$ において, $g^{-1} = (g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ と書いたとき,

$$\begin{cases} a = g^{11} + ig^{12} + ig^{21} - g^{22}, \\ b = g^{11} - ig^{12} + ig^{21} + g^{22}, \\ c = g^{11} + ig^{12} - ig^{21} - g^{22}, \\ d = g^{11} - ig^{12} - ig^{21} - g^{22}, \end{cases}$$

とする. 以上から, $\Phi(S)$ が $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の極小曲面になるための必要十分条件は, 計量 $g = \Phi^* g_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$ に関して方程式 (2) を満たすこととなる.

ここで領域 $U \subset \mathbb{H}$ 上の滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{H}$ に対し, $\Phi(z) = (z, f(z))$ を適用すると以下の結果が得られる;

Theorem A 領域 U 上の滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{H}$ に対し, グラフ $\Gamma_f \subset \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ が極小になるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである;

$$\bullet\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\overline{f_z} f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} + \frac{i\sigma\overline{f_z} f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ &\frac{\partial}{\partial z}\frac{|f_z|^2 f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\alpha f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\alpha f_z}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{|f_{\bar z}|^2 f_z}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} - \frac{i\sigma^2}{\sigma\circ f}\frac{f_z f_{\bar z}}{\sqrt{\alpha^2 - |f_z|^2|f_{\bar z}|^2}} = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\alpha := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma^2}{(\sigma\circ f)^2} + |f_z|^2 + |f_{\bar z}|^2\right)$, $\sigma(z) := \dfrac{1}{\mathrm{Im} z}$, とする.

3.3　極小ラグランジュ擬等角写像のベルトラミ係数.　$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を極小ラグランジュ擬等角写像とする. このとき f のグラフは極小なので方程式 (3), (4) を満たす. さらに, ポアンカレ計量に関して面積を保存するので $(\sigma\circ f)^2(|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2) = \sigma^2$ が成り立ち, 方程式 (3), (4) において $\alpha = |f_z|^2$ となる. $\mu = \mu_f = f_{\bar z}/f_z$ を f のベルトラミ係数とすれば, それぞれの方程式は以下のようになる;

$$\bullet\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{\sqrt{1 - |\mu|^2}} - \frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{\sqrt{1 - |\mu|^2}} + i\sigma\frac{\mu}{\sqrt{1 - |\mu|^2}} = 0, \tag{3'}$$

$$\bullet\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(f_z\sqrt{1-|\mu|^2}\right)+i\sigma\mu\frac{f_z^2}{|f_z|}=0. \tag{4'}$$

一方, ラグランジュ性 (つまりポアンカレ計量に関して面積を保存する性質) を仮定したとき, 擬等角写像の極小性は (3') のみから導かれる. すなわち以下の結果が得られる;

Theorem B ポアンカレ計量に関して面積を保存する滑らかな擬等角写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ に対し, f が極小となるための必要十分条件は, ベルトラミ係数 $\mu=\mu_f$ が次の微分方程式を満たすことである;

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}-\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}}+\frac{i}{\mathrm{Im}z}\frac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}=0.$$

ラグランジュ性についても微分方程式の言葉で書くことができるので, 極小ラグランジュ擬等角写像を特徴づける微分方程式系が得られる;

Theorem C 滑らかな擬等角写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ が極小ラグランジュとなるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである;

$$\begin{cases}\dfrac{|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2}{\mathrm{Im}f}=\dfrac{1}{\mathrm{Im}z},\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}-\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\dfrac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}}+\dfrac{i}{\mathrm{Im}z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}=0.\end{cases}$$

また, 単位円板 $\mathbb{D}$ に対して書き直すと以下のようになる;

Theorem D 滑らかな擬等角写像 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ が極小ラグランジュとなるための必要十分条件は以下の二つの微分方程式を満たすことである;

$$\begin{cases}\dfrac{|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2}{(1-|f|^2)^2}=\dfrac{1}{(1-|z|^2)^2},\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}-\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\dfrac{1}{\sqrt{1-|\mu|^2}}+\dfrac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-|\mu|^2}}=0.\end{cases}$$

しかし, 定理 C, D において, ラグランジュ性を表す微分方程式がベルトラミ係数の条件によって書けていないという課題が残る.

REFERENCES

[Ahl64] Lars V. Ahlfors, *Extension of quasiconformal mappings from two to three dimensions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 768–771. MR0167617

[BA56] A. Beurling and L. V. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. **96** (1956), 125–142. MR0086869 (19,258c)

[Bar16] T. Barbot, *Lorentzian kleinian groups*, 2016. arXiv:1609.03863 [math.DG].

[BS10] Francesco Bonsante and Jean-Marc Schlenker, *Maximal surfaces and the universal Teichmüller space*, Invent. Math. **182** (2010), no. 2, 279–333. MR2729269

[BW03] Paul Baird and John C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 29, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003. MR2044031

[Car74] Lennart Carleson, *The extension problem for quasiconformal mappings*, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), 1974, pp. 39–47. MR0377046

[DE86] A. Douady and C. J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), no. 1-2, 23–48. MR857678 (87j:30041)

[Fuj16] H. Fujino, *Quasisymmetric embedding of the integer set and its quasiconformal extension*, 2016. arXiv:1605.08855 [math.MG].

[KO11] Leonid V. Kovalev and Jani Onninen, *An N-dimensional version of the Beurling-Ahlfors extension*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **36** (2011), no. 1, 321–329. MR2797699

[LT93a] Peter Li and Luen-Fai Tam, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 1, 167–201. MR1200080

[LT93b] ———, *Uniqueness and regularity of proper harmonic maps*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 1, 167–201. MR1200080

[Mar17] Vladimir Markovic, *Harmonic maps and the Schoen conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 799–817. MR3630088

[O'N83] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity. MR719023

[Sch93] Richard M. Schoen, *The role of harmonic mappings in rigidity and deformation problems*, Complex geometry (Osaka, 1990), 1993, pp. 179–200. MR1201611

[TV80] P. Tukia and J. Väisälä, *Quasisymmetric embeddings of metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), no. 1, 97–114. MR595180

[TV82] ———, *Quasiconformal extension from dimension n to $n+1$*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), no. 2, 331–348. MR647809

[TV99] D. A. Trotsenko and J. Väisälä, *Upper sets and quasisymmetric maps*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24** (1999), no. 2, 465–488. MR1724387

[Väi99] Jussi Väisälä, *The free quasiworld. Freely quasiconformal and related maps in Banach spaces*, Quasiconformal geometry and dynamics (Lublin, 1996), 1999, pp. 55–118. MR1709974

[Väi71] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR0454009 (56 #12260)

[Väi95] ———, *Questions on quasiconformal maps in space*, Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995), 1995. MR1488460

[Vel15] Vyron Vellis, *Quasisymmetric extension on the real line*, 2015. arXiv:1509.06638 [math.MG].

[Vel16] V. Vellis, *Extension properties of planar uniform domains*, 2016. arXiv:1609.08763 [math.MG].

分子気体力学による流体中の物体運動の解析

小池 開（Kai Koike）*

1 序

気体中を物体が運動すると，物体と気体分子は衝突して，運動量をやりとりする．すなわち，物体は気体から力を受ける；一方，その反作用として，気体は乱される．こうして，物体と気体は互いに影響をおよぼしつつ運動する．

この運動を，分子のミクロな運動から理解することはできるだろうか？ Newton の法則にもとづいて分子の力学を記述することは，分子数が膨大なため，骨が折れる；そこで，分子集団を統計的に記述する，**分子気体力学**の立場でこの問題にとり組んでみる．

次の §2 では，分子気体力学の基本事項を説明する．§3 で，剛体の直線運動を分子気体力学で扱った数学的な研究を紹介する．最後に §4 で，紹介した定理の証明の概略，関連する話題について議論する．

2 分子気体力学の基本事項

この節では，分子気体力学の基本事項を説明する．詳しく学ぶには [16] をおすすめする．

2.1 速度分布関数

分子気体力学では，気体を**速度分布関数**で記述する．まず，このことを説明しよう．以下では，質量 m の単原子分子からなる理想気体を考える．気体中の微小体積 $\Delta x \subset \mathbb{R}^3$ に着目しよう．この中には多数の気体分子があり，いろいろな速度 $\xi \in \mathbb{R}^3$ で動いている．速度分布関数 $f = f(x, \xi, t)$（t は時刻）を以下のように定義する：$\Delta\xi$ を速度空間 $\mathbb{R}^3$ 内の微小体積として，

$$m^{-1} \int_{\Delta x \times \Delta \xi} f dx d\xi = \Delta x \text{ 内で速度 } \xi \in \Delta\xi \text{ を持つ分子の（平均）個数.}$$

気体の種々の巨視量は f を用いて表せる：密度を $\rho = \rho(x,t)$，流速を $u = u(x,t)$，温度を $T = T(x,t)$ と

* 1) School of Fundamental Science and Technology, Keio University, 3–14–1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223–8522, Japan koike@math.keio.ac.jp 2) Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN, 1–4–1 Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo, 103–0027, Japan kai.koike@riken.jp

すると，

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,\xi,t)\,d\xi,$$
$$u = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}^3} \xi f(x,\xi,t)\,d\xi,$$
$$3R_gT = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}^3} |\xi-u|^2 f(x,\xi,t)\,d\xi;$$

ここで $R_g = \kappa_B/m$（κ_B は Boltzmann 定数）は（1mol 当りの）気体定数である．また，応力 p_{ij} $(i,j=1,2,3)$[*1] は

$$p_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (\xi_i - u_i)(\xi_j - u_j) f(x,\xi,t)\,d\xi \tag{2.1}$$

と表せる．

2.2 運動論方程式

分布関数 f の時間発展を記述する偏微分方程式を，**運動論方程式**（kinetic equations）という．典型的には次のように書ける：

$$\partial_t f + \xi\cdot\nabla_x f = a(x,\xi,t); \tag{2.2}$$

ここで $\nabla_x = {}^T[\partial_{x_1}\,\partial_{x_2}\,\partial_{x_3}]$ は空間変数に関する勾配を表す．$a = a(x,\xi,t)$ はある関数で，たいていの場合 f にも依存する：$a = a[f](x,\xi,t)$.

もっとも有名な運動論方程式は Boltzmann 方程式で，a は以下のように表せる：

$$a = Q[f,f](x,\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} B(\xi-\xi',\omega)\{f(x,\eta,t)f(x,\eta',t) - f(x,\xi,t)f(x,\xi',t)\}\,d\omega d\xi';$$
$$\omega\in\mathbb{S}^2,\quad \eta = \xi - (\xi-\xi')\omega,\quad \eta' = \xi' + (\xi-\xi')\omega;$$

ここで $B = B(\xi-\xi',\omega)$ は非負の関数で，分子間相互作用を決めると 1 つ定まる．たとえば，分子同士が弾性衝突する場合には

$$B(\xi-\xi',\omega) = \sigma_0|(\xi-\xi')\cdot\omega| \qquad (\sigma_0 \text{ は定数})$$

である．

方程式 (2.2) で $a=0$ とおいたもので記述される気体（およびその流れ）を**自由分子流**という（§3.2）．§3.3 では **Lorentz 気体**とよばれる気体と，それに対応する運動論方程式も登場する．

2.3 Maxwell 分布

気体を（乱したりせずに）放っておくと，熱平衡状態とよばれる普遍的な状態に近づく（熱力学の第 0 法則）．熱平衡状態を表す速度分布関数は **Maxwell 分布**とよばれ，次の形を持つ：

$$f_{\rho,u,T}(\xi) = \frac{\rho}{(2R_gT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{|\xi-u|^2}{2R_gT}\right);$$

[*1] 微小面積 $\Delta S\subset\mathbb{R}^3$ にかかる力は応力 p_{ij} を用いて表せる：ΔS の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$，ΔS の速度を u_S と表す．このとき，$\mathbf{n}$ 方向の気体が ΔS におよぼす力の第 i 成分は $-\sum_j[p_{ij}+\rho u_i(u_j-u_{Sj})]n_j\Delta S$.（というより，これが応力の定義である．）

ここで，ρ, u, T は気体の密度，流速，温度である（§2.1 参照）.[*2] これは実験事実とおもってもよいが，Boltzmann 方程式から導くこともできる [6, Chap. II.6].

2.4 特性曲線の方法

この節では，運動論方程式 (2.2) に対する**特性曲線の方法**を説明する．$\Omega = \Omega(t)$ を気体の占める領域（開集合）とし，その境界 $\partial\Omega(t)$ の速度を $u_w = u_w(x,t)$，気体方向の単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x,t)$ $(x \in \partial\Omega(t))$ とおこう．

(x,ξ) は $x \in \Omega(t)$，または $x \in \partial\Omega(t)$ かつ $(\xi - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t) < 0$ をみたすとしよう；このとき $x(s;\xi,t) = x - (t-s)\xi$ とおくと，十分 t に近い $s(<t)$ に対しては，$x(s;\xi,t) \in \Omega(s)$ である．$x(s;\xi,t)$ を (x,ξ) を出発する（後ろ向き）特性曲線という．

方程式 (2.2) から，解 f に対して

$$f(x,\xi,t) - f(x(s;\xi,t),\xi,s) = \int_s^t a(x(\sigma;\xi,t),\xi,\sigma)\,d\sigma$$

が成り立つ；ただし，この式は $x(s;\xi,t) \in \partial\Omega(s)$ をみたす最大の $s(<t)$ を $\tau_1 = \tau_1(x,\xi,t)$ とおくとき，[*3] $\tau_1 \le s \le t$ で成り立つ．もし $\tau_1 \le 0$ であれば，初期条件

$$f(x,\xi,0) = f_0(x,\xi) \tag{2.3}$$

を与えたとき，

$$f(x,\xi,t) = f_0(x(0;\xi,t),\xi) + \int_0^t a(x(s;\xi,t),\xi,s)\,ds \tag{2.4}$$

である．一方，$\tau_1 > 0$ の場合には，

$$f(x,\xi,t) - f(x(\tau_1;\xi,t),\xi,\tau_1) = \int_{\tau_1}^t a(x(s;\xi,t),\xi,s)\,ds \tag{2.5}$$

が得られるだけで，f と初期条件 (2.3) はまだ結びついていない．

そこで，式 (2.5) の $f(x(\tau_1;\xi,t),\xi,\tau_1)$ に注目する．τ_1 の定義から

$$x(\tau_1;\xi,t) \in \partial\Omega(\tau_1), \quad (\xi - u_w(x(\tau_1;\xi,t),\tau_1)) \cdot \mathbf{n}(x(\tau_1;\xi,t),\tau_1) > 0$$

である；従って，$f(x(\tau_1;\xi,t),\xi,\tau_1)$ は境界 $\partial\Omega(\tau_1)$ から飛び出る分子の速度分布である．$f(x(\tau_1;\xi,t),\xi,\tau_1)$ を，境界 $\partial\Omega(\tau_1)$ に入射する分子の速度分布と関係づけられれば，式 (2.5) を導いた議論を τ_1 より前の時刻に続けられる．分子気体力学の境界条件は，まさに境界から飛び出る分子（反射分子）の速度分布と，入射する分子の速度分布を結びつける．

2.5 鏡面反射の境界条件

この節では，運動論方程式 (2.2) の境界条件のひとつ，鏡面反射の境界条件について説明する．拡散反射や Maxwell 型の境界条件も重要であるが，紙数の都合で紹介できない．他の境界条件については文献 [6, 16] を見てほしい．

[*2] 熱平衡状態というと，静止状態 $u = 0$ を想像するかもしれないが，そうとは限らない；たとえば，等速運動する座標系で静止熱平衡状態を観測した場合，$u \neq 0$ である．$u = 0$ の場合の Maxwell 分布を，絶対 Maxwell 分布とよぶ.

[*3] そのような s が存在しなければ，$\tau_1 = -\infty$ とする.

鏡面反射の境界条件は以下の式で与えられる：

$$f(x,\xi,t) = f(x,\xi',t) \qquad (x \in \partial\Omega(t),\, (\xi - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t) > 0, t > 0); \tag{2.6}$$

ただし

$$\xi' = \xi - 2[(\xi - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t)]\mathbf{n}(x,t). \tag{2.7}$$

式 (2.6) に現れる $(\xi - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t) > 0$ という条件は，ξ が境界 $\partial\Omega(t)$ から飛び出る速度であることを表す；一方，

$$(\xi' - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t) = -(\xi - u_w(x,t)) \cdot \mathbf{n}(x,t) < 0$$

より，ξ' は境界に入射する速度である．ξ' の式 (2.7) は以下のような意味を持つ：分子が境界で弾性衝突するとき，速度 ξ' で入射した分子は，速度 ξ で反射する．[*4] 鏡面反射の境界条件 (2.6) は，分子が境界で弾性衝突することを，分布関数の等式で表したものである．

3　分子気体力学と剛体運動

本稿の主題である，剛体運動の話に入ろう．以下では，数学的な研究について，これまでに知られていることの一部を紹介する．[*5]

3.1　剛体の直線運動の定式化

この節では，剛体の直線運動の定式化について述べる．

剛体として，“次元” $d = 1, 2, 3$ で区別される 3 種類の形状を考える（図 1）：それぞれ円柱（$d = 3$），x_3 方向に無限に伸びた（厚み有限の）平板（$d = 2$），および x_2, x_3 方向に無限に伸びた（厚み有限の）平面壁（$d = 1$）である．$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_d) = (x_1, x_\perp) \in \mathbb{R}^d$ と書き，x_1 から x_d が貼る平面 $\mathbb{R}^d$ による剛体の断面が

$$C(t) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid X(t) - 1/2 \le x_1 \le X(t) + 1/2,\, |x_\perp| \le 1\} \tag{3.1}$$

となるよう，[*6] 剛体の座標系に対する位置，およびその寸法を決める．$X(t)$ は時間的に変動する未知量である（$X(0) = 0$ とする）．剛体の速度を $V(t) = dX(t)/dt$ と書く．

$V(t)$ の従う運動方程式を説明するために，まず剛体周囲の気体について説明する．

気体は剛体の外側の領域を占め，その状態を分布関数 $f = f(x,\xi,t)$ で記述する（§2.1）．f の時間発展は運動論方程式 (2.2) に従うとする．また，初期分布は空間一様な Maxwell 分布（§2.3）とする：

$$f(x,\xi,0) = f_0(\xi) \coloneqq \pi^{-3/2} \exp(-|\xi|^2). \tag{3.2}$$

以下，方程式 (2.2) の右辺 $a = a(x,\xi,t)$ は $x_{d+1}, \ldots, x_3$ には依存しないとする；このとき，剛体形状と初期条件 (3.2) の対称性から，f も $x_{d+1}, \ldots, x_3$ には依存しない．従って $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$，$\bar{f}(\bar{x},\xi,t) = f(x,\xi,t)$ とおくと，$\bar{f}$ は

$$\partial_t \bar{f} + \bar{\xi} \cdot \nabla_{\bar{x}} \bar{f} = a(\bar{x},\xi,t) \qquad (\bar{x} \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

[*4] 境界の質量は分子より十分大きく，実質的に無限大とみなせると仮定する．
[*5] 本稿の性質上，著者の結果が強調された形になることをご容赦いただきたい．
[*6] $d = 1$ のとき，条件 $|x_\perp| \le 1$ は無視せよ．

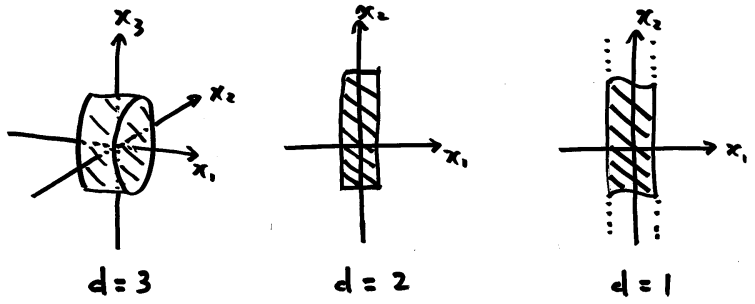


図 1　剛体の形状：左から円柱（$d=3$），平板（$d=2$），平面壁（$d=1$）．

をみたす；ここで $\Omega(t)=\mathbb{R}^d\backslash C(t)$, $\nabla_{\bar{x}}={}^T[\partial_{x_1}\ \dots\ \partial_{x_d}]$ である．また，初期条件は

$$\bar{f}(\bar{x},\xi,0)=f_0(\xi)\coloneqq \pi^{-3/2}\exp(-|\xi|^2). \tag{3.3}$$

このことを踏まえ，以下では $\bar{x}$, $\bar{f}$ をあらためて x, f と書くことにする．

境界条件として，鏡面反射の境界条件（§2.5）を課す：$\mathbf{e}_1\in\mathbb{R}^d$ を x_1 方向の単位ベクトル，$\mathbf{n}=\mathbf{n}(x,t)$ $(x\in\partial C(t))$ を $\partial\Omega(t)=\partial C(t)$ の（気体方向の）単位法線ベクトルとすると，

$$f(x,\xi,t)=f(x,\xi-2[(\xi-V(t)\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n},t)\qquad (x\in\partial C(t),(\xi-V(t)\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n}>0,t>0) \tag{3.4}$$

である．

剛体の速度 $V(t)$ の従う運動方程式について説明しよう．

剛体は気体から抵抗力 $D(t)$ を受ける；$D(t)$ は応力の式 (2.1) より

$$D(t)=\int_{\partial C(t)}dS\int\xi_1(\xi_1-V(t))f(x,\xi,t)\,d\xi$$

と書ける．

$$I^{\pm}(t)=\{x\in C(t)\mid x_1=X(t)\pm 1/2\}\times\{\xi\in\mathbb{R}^3\mid \xi_1\lessgtr V(t)\} \tag{3.5}$$

とおくと，境界条件 (3.4) を用いて

$$D(t)=2\left(\int_{I^+(t)}(\xi_1-V(t))^2f(x,\xi,t)\,d\xi-\int_{I^-(t)}(\xi_1-V(t))^2f(x,\xi,t)\,d\xi\right) \tag{3.6}$$

と書き直せる．[*7]

剛体の速度 $V(t)$ は Newton の法則に従うとする：

$$dV(t)/dt=-D(t),\quad V(0)=\gamma. \tag{3.7}$$

初期速度 γ は正とする．

[*7] とくに側面からの寄与はないことに注意する．これは側面で起こる分子と剛体の衝突では，分子の x_1 方向の運動量は変化しないことによる．

以上の方程式を解けば，剛体と気体の運動が求まる．f と V の方程式は両方向に連成していることに注意しよう：境界条件 (3.4) は $V(t)$ を含む；一方，Newton の運動方程式 (3.7) は $D(t)$ の式 (3.6) を通して f を含む．

以下，§§3.2, 3.3 で，$V(t)$ の漸近挙動に関する定理を紹介する．

3.2 剛体速度の漸近挙動：自由分子流の場合

この節では，自由分子流中の剛体運動に関する定理を紹介する．自由分子流とは，分子同士がまったく衝突しないような，極限的に希薄な気体のことである；その支配方程式は，方程式 (2.2) で $a = 0$ とおいた

$$\partial_t f + \bar{\xi} \cdot \nabla_x f = 0 \qquad (x \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0) \tag{3.8}$$

である．[*8]

定理を述べるために，いくつか記号を導入する．

関数 $D_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D_0(U) = c_d \left(\int_{-\infty}^{U} (u-U)^2 e^{-u^2}\, du - \int_{U}^{\infty} (u-U)^2 e^{-u^2}\, du \right) \qquad (U \in \mathbb{R})$$

と定める；ここで $c_1 = 2\pi^{-1/2}$, $c_2 = 4\pi^{-1/2}$ および $c_2 = 2\pi^{1/2}$ である．このとき簡単な微分計算により，$D_0 = D_0(U)$ は滑らかで（狭義）単調増大な奇関数であり，区間 $[0, \infty)$ で凸であることが分かる [4].

$0 < \gamma \le 1$ に対して，$C_0 = D_0'(0)$, $C_\gamma = D_0'(\gamma)$, $t_\gamma = (\log \gamma^{-1})/C_\gamma$ とおく．D_0 が（区間 $[0, \infty)$ 上で）単調増大かつ凸であることから，$0 < C_0 < C_\gamma \le D_0'(1)$ である．

剛体の速度 $V(t)$ の漸近挙動に関して，以下の定理が成り立つ [3].

Theorem 3.1 (Caprino–Cavallaro–Marchioro)**.** γ が十分小さいとき，方程式 (3.8), (3.3), (3.4)；および方程式 (3.7), (3.6) の解 (f, V) で，次の不等式をみたすものが存在する：

$$V(t) \ge \gamma e^{-C_\gamma t} - \gamma^3 \frac{A_1}{(1+t)^{d+2}}, \tag{3.9}$$

$$V(t) \le \gamma e^{-C_0 t} - \gamma^5 \frac{A_2}{t^{d+2}} \mathbf{1}_{\{t \ge 2t_\gamma\}}; \tag{3.10}$$

ただし，A_1, A_2 は d のみに依存する正定数，$\mathbf{1}$ は集合の支持関数である．また，任意の解 (f, V) は上の不等式をみたし，$V(t)$ は区間 $[0, t_\gamma]$ で単調減少である．

Remark 3.1. (i) 定理は $V(t)$ が代数的に減衰することを示している：$V(t) \approx Ct^{-(d+2)}$．その指数は次元 d に依存する．(ii) 解の一意性は未解決である；上の定理は，少なくとも，漸近挙動の指数 $d+2$ は一意的であることを保証している．(iii) $V(t)$ は符号を変える：$V(t) > 0$ $(t \le t_\gamma)$ かつ $V(t) < 0$ $(t \ge 5t_\gamma)$ が不等式 (3.9), (3.10) から従う（必要に応じて γ を小さくする）．

速度に比例する抵抗力を仮定すると，$V(t)$ は指数的に減衰する．すなわち，方程式 (3.7) の代わりに，C_D

[*8] 右辺は $\xi_{d+1}, \dots, \xi_3$ に依存しない；そのため，f をこれらの変数に関して積分し，分布関数を簡約化できる．本稿で引用した論文では，この簡約化した分布関数を用いているので，速度変数 ξ も d-次元ベクトルとなっていることに注意してほしい．§3.3 で扱う Lorentz 気体の場合には，この簡約化はできない．

を正定数として

$$dV(t)/dt = -C_D V(t), \quad V(0) = \gamma$$

とすると，$V(t) = \gamma e^{-C_D t}$ である．上の定理は，このようなシンプルなモデルは漸近挙動を正しく捉えないことを示している．

他の境界条件（拡散反射，Maxwell 型）や，他の剛体形状などに関しては，文献 [1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13] を見てほしい．

3.3 剛体速度の漸近挙動：Lorentz 気体の場合

この節では，（特殊な）Lorentz 気体中を運動する剛体を扱う．

Lorentz 気体の物理的な描像は，気体中に（球形の）障害物がランダムに分散している，というものである．この障害物は気体の凝縮相のような働きをする．[*9] すなわち，障害物は気体分子を吸収・放出する．障害物の分布，放出分子の分布は既知として，それぞれ（別々の）Maxwell 分布（§2.3）に従うとする．また，分子同士の衝突は，分子と障害物の衝突と比べて十分少なく，障害物の熱運動は分子の熱運動に比べて十分弱いとする．詳しい説明は [17] を見てほしい．

このとき，気体分子の分布関数 f は次の運動論方程式に従う [17]：

$$\partial_t f + \bar{\xi} \cdot \nabla_x f = \frac{\nu_\varepsilon(|\xi|)}{\kappa}(f_0 - f) \qquad (x \in \Omega(t), \xi \in \mathbb{R}^3, t > 0); \tag{3.11}$$

ここで $f_0 = \pi^{-3/2} \exp(-|\xi|^2)$ である．$\kappa \geq 1$ は分子と障害物の衝突頻度（の逆数）を表す定数，$\varepsilon \geq 0$ は障害物の熱運動の強さを表す定数である．また $\mathrm{erf}(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-y^2}\, dy$ を誤差関数として，

$$\nu_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon}{2}\left[\exp(-z^2/\varepsilon^2) + \pi^{1/2}\left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2z}\right)\mathrm{erf}(z/\varepsilon)\right]$$

である．

Lorentz 気体中を運動する剛体の漸近挙動について，Tsuji と Aoki は数値的な検討を行った [17]；以下の定理は，数値的に観測された漸近挙動を数学的に証明した結果である [12]. [*10]

定理を述べるために，以下の記号を導入する：

$$w_{\varepsilon,\kappa,d}(t) = \frac{1}{(1+t)^{d+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + t/(\varepsilon\kappa)}} + \frac{1}{1 + t/\kappa}\right)^{3-d}.$$

Theorem 3.2 (K.). $\kappa \geq 1$, $\varepsilon \leq \kappa C_0/4$ とする．γ が十分小さいとき，方程式 (3.11), (3.3), (3.4)；および方程式 (3.7), (3.6) の解 (f, V) で，次の不等式をみたすものが存在する：

$$V(t) \geq \gamma e^{-C_\gamma t} - \gamma^3 A_1 w_{\varepsilon,\kappa,d}(t) e^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa}t},$$
$$V(t) \leq \gamma e^{-C_0 t} - \gamma^5 A_2 w_{\varepsilon,\kappa,d}(t) e^{-\frac{\varepsilon}{\kappa}t} \mathbf{1}_{\{t \geq 2t_\gamma\}};$$

ただし，A_1, A_2 は d のみに依存する正定数である．また，任意の解 (f, V) は上の不等式をみたし，$V(t)$ は区間 $[0, t_\gamma]$ で単調減少である．

[*9] 気体を水蒸気とすると，この障害物は水滴にあたる；もっとも，今は単原子分子を考えているので，水蒸気というのは比喩である．

[*10] より正確には，Tsuji と Aoki は方程式 (3.7) ではなく，線形復元力の付いた方程式 $dV(t)/dt = -X(t) - D(t)$ を扱った．また，境界条件は鏡面反射ではなく，拡散反射である．数値計算的には鏡面反射より拡散反射の方が易しい；数学的には拡散反射より鏡面反射の方が易しい．

Remark 3.2. (i) $\varepsilon \neq 0$ で κ が有限の場合，$V(t)$ は指数的に減衰する；$\varepsilon = 0$ で κ が有限の場合，$V(t)$ は次元 d に依存しない指数 -5 で代数的に減衰する；$\kappa = \infty$ の場合，$V(t)$ は次元 d に依存する指数 $-(d+2)$ で代数的に減衰する．(ii) 解の一意性は自由分子流の場合（§3.2）と同様，未解決である．(iii) $V(t)$ は自由分子流の場合と同様，符号を変える：$V(t) > 0$ $(t \geq t_\gamma)$ かつ $V(t) < 0$ $(t \geq 8t_\gamma)$ が成り立つ．(iv) $\varepsilon \leq \kappa C_0/4$ をみたさないとき，この定理は必ずしも成り立たない．実際，$\varepsilon \geq 2\kappa C_0$ であれば，$V(t)$ は常に正で，指数的に減衰する [12].

4 論議

4.1 証明の方針

証明の基本的なアイデアは，解 (f, V) を適切な写像の不動点として構成することである．設定をはっきりさせるため，§3.3 の状況を考えよう；とはいえ，以下しばらくは自由分子流（§3.2）と Lorentz 気体（§3.3）に共通の内容である．

$W\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を Lipschitz 連続な関数として，$X_W(t) = \int_0^t W(s)\,ds$ とおく．$C_W(t)$ を式 (3.1) の右辺で $X(t)$ を $X_W(t)$ で置きかえたもので定義する；$I_W^{\pm}(t)$ を式 (3.5) の右辺で $C(t)$, $X(t)$, $V(t)$ を $C_W(t)$, $X_W(t)$, $W(t)$ で置きかえたもので定義する．

$f = f_W$ を方程式 (3.11), (3.3) および

$$f(x,\xi,t) = f(x,\xi - 2[(\xi - W(t)\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n}, t) \qquad (x \in \partial C_W(t), (\xi - W(t)\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n} > 0, t > 0)$$

の解とする．f_W は §2.4 で述べた特性曲線の方法で構成できる．（W は未知量ではなく，既知の関数であることに注意する．）

次に，$V_W\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を以下のように定める．まず，

$$r_W^{\pm}(t) = \pm 2 \int_{I_W^{\pm}(t)} (\xi_1 - W(t))^2 (f_W - f_0)\,d\xi dS \tag{4.1}$$

とおく．次に，関数 $K\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を

$$K(U) = D_0(U)/U \qquad (U \neq 0); \quad K(0) = D_0'(0)$$

と定める．そうして，V_W を次の方程式の解とする：

$$dV_W(t)/dt = -K(W(t))V_W(t) - r_W^+(t) - r_W^-(t), \quad V_W(0) = \gamma.$$

これは明示的に解けて，

$$V_W(t) = \gamma e^{-\int_0^t K(W(s))\,ds} - \int_0^t e^{-\int_s^t K(W(\tau))\,d\tau} (r_W^+(s) + r_W^-(s))\,ds.$$

V を写像 $W \mapsto V_W$ の不動点とすると，(f_V, V) は方程式 (3.11), (3.3), (3.4)；および方程式 (3.7), (3.6) の解である．このことは

$$D_0(V(t)) = 2\left(\int_{I_V^+(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f_0\,d\xi dS - \int_{I_V^-(t)} (\xi_1 - V(t))^2 f_0\,d\xi dS \right)$$

に注意すれば分かる．（上の式が成り立つように定数 c_d を定義した．）

不動点 V の存在を示すには，写像 $W \mapsto V_W$ の定義域 $\mathcal{K}$ を適切に定める必要がある；とくに，$W \in \mathcal{K}$ ならば $V_W \in \mathcal{K}$ が成り立つようにしたい．$\mathcal{K}$ の定義には，$r_W^{\pm}(t)$ の $t \to \infty$ での減衰評価が密接に関わっている．

4.2 $r_W^{\pm}(t)$ の評価と再衝突

$r_W^{\pm}(t)$ の評価が証明のもっとも本質的な部分であるが，それをここで述べる余裕はない；ここでは $R_W(t) \coloneqq r_W^{+}(t) + r_W^{-}(t) \neq 0$ であることについて，少しだけ説明しておく．式 (4.1) より，$R_W(t) \neq 0$ であるためには，ある $(x,\xi) \in I_W^{\pm}(t)$ で $f_W \neq f_0$ となる必要がある．(x,ξ) に対して，§2.4 で述べたように，τ_1 を定義する．$\tau_1 \leq 0$ であれば，$f_W = f_0$ が従う．（自由分子流の場合は，式 (2.4) から従う；Lorentz 気体の場合にも，同様の計算から従う．）つまり，$R_W(t) \neq 0$ であるためには，ある (x,ξ) で $\tau_1 > 0$ となる必要がある．これは，$x \in \partial C_W(t)$ に速度 ξ で衝突する分子が，過去にも剛体に衝突していたこと（再衝突；recollision）に対応する．

再衝突は実際に起こり，この影響が漸近挙動を決定する．再衝突のために，時刻 t での抵抗力 $D(t)$ は運動の履歴に依存する（履歴効果）．Lorentz 気体では，気体中の障害物が分子を散乱（吸収・放出）し，履歴効果を破壊する．その結果，Lorentz 気体中では，自由分子流の場合と異なり，（$\varepsilon \neq 0$, $\kappa < \infty$ のとき）指数的な漸近挙動となる；$\varepsilon = 0$ の場合には，障害物は熱運動をせず，そのあいだを縫って再衝突が起こり，代数的な漸近挙動となる（定理 3.2）．

4.3 工学的な問題との関連

非常に小さなスケールの気体流れは，Navier–Stokes 方程式ではなく，分子気体力学の方程式（Boltzmann 方程式など）で記述する必要がある．MEMS (micro–electro–mechanical systems) とよばれる系では，微小流路中で，物体と気体の相互作用を解析する必要がある．そのような問題は，本稿で扱った問題と関連が深い．MEMS に対する分子気体力学からのアプローチについては，文献 [9, 14, 15, 19] を挙げておく．

4.4 Boltzmann 方程式の場合

本稿では自由分子流と Lorentz 気体の場合に，分子気体力学から剛体運動を論じた研究を紹介した；Boltzmann 方程式（§2.2）の場合には漸近挙動どころか，短い時間の解の存在すら分かっていない．現状，文献 [18] で漸近挙動の数値的な検討が行われている．それによると Boltzmann 方程式の場合，剛体の速度 $V(t)$ は代数的に減衰する；ただし，その指数は自由分子流の場合（§3.2）とは異なる．漸近挙動の数学的な研究はまったく手つかずで，今後の研究によって明らかにすべきである．

参考文献

[1] K. Aoki, G. Cavallaro, C. Marchioro and M. Pulvirenti, *On the motion of a body in thermal equilibrium immersed in a perfect gas*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **42** (2008), 263–275.

[2] P. Buttà, G. Cavallaro and C. Marchioro, *Mathematical Models of Viscous Friction*, Lecture Notes in Mathematics, **2135**, Springer, 2015.

[3] S. Caprino, G. Cavallaro and C. Marchioro, *On a microscopic model of viscous friction*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (2007), 1369–1403.

[4] S. Caprino, C. Marchioro and M. Pulvirenti, *Approach to equilibrium in a microscopic model of friction*, Comm. Math. Phys., **264** (2006), 167–189.

[5] G. Cavallaro, *On the motion of a convex body interacting with a perfect gas in the mean-field approximation*, Rend. Mat. Appl., **27** (2007), 123–145.

[6] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer, 1988.

[7] X. Chen and W. Strauss, *Approach to equilibrium of a body colliding specularly and diffusely with a sea of particles*, Arch. Ration. Mech. Anal., **211** (2014), 879–910.

[8] X. Chen and W. Strauss, *Velocity reversal criterion of a body immersed in a sea of particles*, Comm. Math. Phys., **338** (2015), 139–168.

[9] G. Dechristé and L. Mieussens, *Numerical simulation of micro flows with moving obstacles*, J. Phys. Conf. Ser., **362** (2012), 1–10.

[10] C. Fanelli, F. Sisti and G. V. Stagno, *Time dependent friction in a free gas*, J. Math. Phys., **57** (2016), 1–12.

[11] K. Koike, *Wall effect on the motion of a rigid body immersed in a free molecular flow*, Kinet. Relat. Models, to appear.

[12] K. Koike, *Motion of a rigid body in a special Lorentz gas: Loss of memory effect causes exponential decay*, in preparation.

[13] C. Ricciuti and F. Sisti, *Effects of concavity on the motion of a body immersed in a Vlasov gas*, SIAM J. Math. Anal., **46** (2014), 3579–3611.

[14] G. Russo and F. Filbet, *Semilagrangian schemes applied to moving boundary problems for the BGK model of rarefied gas dynamics*, Kinet. Relat. Models, **2** (2009), 231–250.

[15] S. Shrestha, S. Tiwari, A. Klar and H. Steffen, *Numerical simulation of a moving rigid body in a rarefied gas*, J. Comput. Phys., **292** (2015), 239–252.

[16] Y. Sone, *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications*, Birkäuser, 2007.

[17] T. Tsuji and K. Aoki, *Decay of a linear pendulum in a free-molecular gas and in a special Lorentz gas*, J. Stat. Phys., **146** (2012) 620–645.

[18] T. Tsuji and K. Aoki, *Moving boundary problems for a rarefied gas: Spatially one-dimensional case*, J. Comput. Phys., **250** (2013) 574–600.

[19] T. Tsuji and K. Aoki, *Gas motion in a microgap between a stationary plate and a plate oscillating in its normal direction*, Microfluidics Nanofluidics, **16** (2014) 1033–1045.

Complex interpolation of B^u_w-function spaces

Denny Ivanal Hakim *
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Osawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397, Japan
Email: dennyivanalhakim@gmail.com,

1 Introduction

In this note, we inverstigate the first and second complex interplation of $\dot{B}^u_w$-spaces. Let us recall the definition of these spaces (see [4]). Let $1 \le u, p \le \infty$ and $w : (0,\infty) \to (0,\infty)$ be a nonincreasing function. For $r > 0$ denote by $B(r)$ the open ball in $\mathbb{R}^n$ centered at the origin. The space $\dot{B}^u_w(L^p)$ and $B^u_w(L^p)$ are defined to be the sets of all measurable functions f on $\mathbb{R}^n$ for which

$$\|f\|_{\dot{B}^u_w(L^p)} \equiv \begin{cases} \left(\int_0^\infty (w(r)\|f\|_{L^p(B(r))})^u \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{u}}, & \text{for } u < \infty \\ \sup\limits_{r>0} w(r)\|f\|_{L^p(B(r))}, & \text{for } u = \infty. \end{cases}$$

and

$$\|f\|_{B^u_w(L^p)} \equiv \begin{cases} \left(\int_1^\infty (w(r)\|f\|_{L^p(B(r))})^u \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{u}}, & \text{for } u < \infty \\ \sup\limits_{r\ge 1} w(r)\|f\|_{L^p(B(r))}, & \text{for } u = \infty. \end{cases}$$

are finite. In order to guarantee that $\chi_{B(R)} \in \dot{B}^u_w(L^p)$, we assume that

$$\int_0^R \frac{w(r)^u |B(r)|^{u/p}}{r}\, dr < \infty \quad \text{and} \quad \int_R^\infty \frac{w(r)^u}{r}\, dr < \infty, \tag{1}$$

for every $R > 0$. Note that if $w(r) = 1$ and $u = \infty$, then $\dot{B}^u_w(L^p) = L^p$.

We now recall the definition of the complex interpolation method, introduced by A. P. Calderón (see [1, 2]). Let $\overline{S} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\}$ and S be its

*joint work with Shohei Nakamura (Tokyo Metropolitan University), Yoshihiro Sawano (Tokyo Metropolitan University), and Takuya Sobukawa (Waseda University)

interior. Recall that a pair (X_0, X_1) is said to be a compatible couple of Banach spaces if there exists a Hausdorff topological vector space Z such that X_0 and X_1 are subspaces of Z.

Definition 1.1 (Calderón's first complex interpolation functor)**.** Let (X_0, X_1) be a compatible couple of Banach spaces. The space $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ is defined to be the set of all continuous functions $F : \overline{S} \to X_0 + X_1$ such that

1. $\sup_{z\in\overline{S}} \|F(z)\|_{X_0+X_1} < \infty$,
2. F is holomorphic on S,
3. the functions $t \in \mathbb{R} \mapsto F(j + it) \in X_j$ are bounded and continuous on $\mathbb{R}$ for $j = 0, 1$.

The norm on $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ is defined by

$$\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} := \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1}\right\}.$$

Definition 1.2 (Calderón's first complex interpolation spaces)**.** Let $\theta \in (0, 1)$ and (X_0, X_1) be a compatible couple of Banach spaces. The complex interpolation space $[X_0, X_1]_\theta$ with respect to (X_0, X_1) is defined by

$$[X_0, X_1]_\theta := \{f \in X_0 + X_1 : f = F(\theta) \text{ for some } F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}$$

The norm on $[X_0, X_1]_\theta$ is defined by

$$\|f\|_{[X_0,X_1]_\theta} := \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : f = F(\theta) \text{ for some } F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}.$$

The fact that $[X_0, X_1]_\theta$ is a Banach space can be seen in [2] and [1, Theorem 4.1.2]. When X_0 and X_1 are Lebesgue spaces, Calderón gave the following description of $[X_0, X_1]_\theta$.

Theorem 1.3. [2] *Let $\theta \in (0, 1)$, $1 \le p_0 \le \infty$, and $1 \le p_1 \le \infty$. Then*

$$[L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p$$

where p is defined by

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

Note that the Riesz-Thorin complex interpolation theorem can be seen as a corollary of Theorem 1.3 and the following Calderón's result.

Theorem 1.4. [2] *Let (X_0, X_1) and (Y_0, Y_1) be two compatible couples of Banach spaces and let $\theta \in (0,1)$. Suppose that T is a bounded linear operator from X_k to Y_k for $k = 0, 1$. Then, T is bounded from $[X_0, X_1]_\theta$ to $[Y_0, Y_1]_\theta$.*

We now move on to the second complex interpolation method. First let us recall the definition of Banach space-valued Lipschitz continuous functions. Given a Banach spaces X. The space $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}, X)$ is defined as the set of all functions $f : \mathbb{R} \to X$ for which

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X)} := \sup_{-\infty<s<t<\infty} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|}$$

is finite.

Definition 1.5. [1, 2](Calderón's second complex interpolation functor) Let (X_0, X_1) be a compatible couple of Banach spaces. Denote by $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ the set of all continuous functions $G : \bar{S} \to X_0 + X_1$ such that:

1. G is holomorphic on S,
2. $\sup_{z\in\bar{S}} \left\| \frac{G(z)}{1+|z|} \right\|_{X_0+X_1} < \infty$,
3. the functions
$$t \in \mathbb{R} \mapsto G(j + it) - G(j) \in X_j$$
are Lipschitz continuous on $\mathbb{R}$ for $j = 0, 1$.

The space $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ is equipped with the norm

$$\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} := \max\left\{ \|G(i\cdot)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_0)},\ \|G(1+i\cdot)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_1)} \right\}. \tag{2}$$

Definition 1.6. [1, 2](Calderón's second complex interpolation space) Let $\theta \in (0,1)$. The second complex interpolation space $[X_0, X_1]^\theta$ with respect to (X_0, X_1) is defined to be the set of all $f \in X_0 + X_1$ such that $f = G'(\theta)$ for some $G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)$. The norm on $[X_0, X_1]^\theta$ is defined by

$$\|f\|_{[X_0,X_1]^\theta} := \inf\{\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} : f = G'(\theta) \text{ for some } G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)\}.$$

2 Main results

We now state our main results. Suppose that we have 3 functions $w_0, w_1, w : (0,\infty) \to (0,\infty)$ and 7 parameters $0 < \theta < 1 \le u_0, p_0, u_1, p_1, u, p \le \infty$ satisfying

$$p_0 \neq p_1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1-\theta}{u_0} + \frac{\theta}{u_1}, \quad w = {w_0}^{1-\theta} {w_1}^{\theta}. \tag{3}$$

For the case u_0 and u_1 are finite, in addition to (3), we assume that

$$\frac{u_0}{p_0} = \frac{u_1}{p_1} \quad \text{and} \quad \omega_0^{u_0} = \omega_1^{u_1}. \tag{4}$$

We first describe the first complex interpolation $[\dot{B}^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]_\theta$ and the second complex interpolation $[\dot{B}^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]^\theta$ for the case u_0 and u_1 are finite.

Theorem 2.1. [3] *Suppose that $u_0, u_1 < \infty$. Assume that* (3) *and* (4) *hold. Then*

1. $[\dot{B}^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]_\theta = [\dot{B}^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]^\theta = \dot{B}^{u}_{w}(L^{p})$.
2. $[B^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), B^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]_\theta = [B^{u_0}_{w_0}(L^{p_0}), B^{u_1}_{w_1}(L^{p_1})]^\theta = B^{u}_{w}(L^{p})$.

For the case $u_0 = u_1 = u = \infty$, we have the following result.

Theorem 2.2. [3] *Let $\theta \in (0,1)$, $1 \le p_0, p_1 < \infty$, and $w_0, w_1 : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Suppose that $w_0(r)^{p_0} = w_1(r)^{p_1}$. Define p and w by*

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{and} \quad w := w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}.$$

Then

$$[\dot{B}^{\infty}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{\infty}_{w_1}(L^{p_1})]_\theta = \left\{ f \in \dot{B}^{\infty}_{w}(L^{p}) : \lim_{j\to\infty} \|f - \chi_{\{\frac{1}{j} \le |f| \le j\}} f\|_{\dot{B}^{\infty}_{w}(L^{p})} = 0 \right\} \tag{5}$$

and

$$[\dot{B}^{\infty}_{w_0}(L^{p_0}), \dot{B}^{\infty}_{w_1}(L^{p_1})]^\theta = \dot{B}^{\infty}_{w}(L^{p}) \tag{6}$$

References

[1] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces. An introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **no. 223**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[2] A.P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. **24** (1964), no.2, 113–190.

[3] D. I. Hakim, S. Nakamura, Y. Sawano, and T. Sobukawa, Complex Interpolation of B^u_w-spaces, Complex variables and elliptic equations, online, (2017), DOI: http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2017.1327954.

[4] E. Nakai and T. Sobukawa, B^w_u-function spaces and their interpolation, Tokyo J. of Math., **39** (2016), no. 2, 483–517.

p-優調和関数への CARLESON 評価について

原 宇信 (TAKANOBU HARA)
北海道大学大学院理学研究院数学部門 学術研究員

Abstract. p 乗 Dirichlet 積分の Euler-Lagrange 方程式としてあらわれる p-ラプラス方程式に外力をつけて考察する. 領域内部での正値解の挙動は外力の Wolff ポテンシャルで両側から各点評価されることがわかっている. 本講演では, 正値優解の領域近傍での大域的可積分性と, 境界で消える解の境界近傍での各点評価について取り扱う.

1. 序

Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の領域とし, 指数 $1 < p < \infty$ を固定する. Ω 上で p 乗 Dirichlet 積分の Euler-Lagrange 方程式である p-Laplace 方程式とその弱優解 u を考える. 正の超関数は測度として表現できるので, ある測度 $\mu \in W^{-1,p'}(\Omega)$ が存在して u は方程式

$$-\triangle_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \mu \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

の弱解となる. 以下では各点評価を取り扱うため, 下半連続修正された弱優解のみを考える.

次の Harnack の不等式が知られている: u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の弱解とする. このとき n と p にのみ依存する定数 C が存在して $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ となる任意の球 $B(x_0, R)$ に対し

$$u(x_0) \leq C \inf_{B(x_0,R)} u.$$

Harnack の不等式は領域内部での評価であり, 一般に境界に触れる集合上では類似の評価は成り立たない. しかしながら, Ω 内部への適当な条件のもとで, 境界で消える解に対して Carleson 評価と呼ばれる類似の評価が成り立つ. 実際, 2005 年, Aikawa と Shanmugalingam は距離測度空間の一様領域 (定義 3.6 参照) 上の p-調和関数に対する次の評価を得た. 特に有界 Lipschitz 領域は一様領域であることに注意する.

定理 1.1 ([1])**.** Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y, \partial\Omega)/R$ とする. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の有界かつ非負の解で $u = 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ を quasi-everywhere にみたすものとする. このとき n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $x_0 \in \Omega \cap B(\xi, \theta R/4)$ に対して

$$u(x_0) \leq C \inf_{B(y,\theta R/5)} u.$$

他方, 1994 年, Kilpeläinen と Malý は次の一般の弱優解に対する領域内部での各点評価を得た.

定理 1.2 ([5])**.** u を $-\triangle_p u = \mu$ in Ω の非負の弱解とする. $x_0 \in \Omega$ とし $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ とする. このとき, n と p にのみ依存する定数 C が存在して

$$u(x_0) \leq C \left(\inf_{B(x_0,R)} u + \mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, 2R) \right).$$

ただし $\mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, 2R)$ は

$$\mathbf{W}_p^{\mu}(x, R) = \int_0^R \left(\frac{\mu(B(x,s))}{s^{n-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

で定義される μ の Wolff ポテンシャル.

$p=2$ の場合, 方程式の線型性を用いると, 2 つの不等式を組み合わせた形の弱優解に対する境界近傍での各点評価も正しいことがわかる. 実際, このとき Riesz の分解定理から u は非負の調和関数 h と Ω の Green 関数 $G(x,y)$ を用いて

$$u(x)=h(x)+\int_\Omega G(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

と表示される. また, $p=2$ のとき, Fubini の定理から Wolff ポテンシャルは Newton ポテンシャルの形に書き換えることができ, Green ポテンシャルを上から評価できる. したがって h に対して Carleson 評価を用いることで求める不等式が得られる. しかし, $p\neq 2$ の場合, 方程式 (1) は線型ではなく, このような解の分解や表示公式は成り立たない.

2. 主結果

$p\neq 2$ の場合も含めてこれら 2 つの定理が組み合わさった形の定理を得た [3].

定理 2.1. Ω を一様領域とし, $\xi\in\partial\Omega$ とする. $y\in\Omega$ とし, $R=|\xi-y|$, $\theta=d(y,\partial\Omega)/R$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi,2R))$ に属するという意味で $u\le 0$ on $\partial\Omega\cap B(\xi,2R)$ かつ $\mu(B(\xi,2R))$ が有限になるものとする. このとき n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $x_0\in\Omega\cap B(\xi,\theta R/4)$ に対して

$$u(x_0)\le C\left(\inf_{B(y,\theta R/5)}u+\mathbf{W}_p^\mu(x_0,R)\right).$$

証明のため, Harnack の不等式 (1) の証明に立ち返る. 証明は 2 つの部分に分かれていた. まず, u が $-\triangle_p u=0$ の非負の弱優解のとき, 弱 Harnack 不等式と呼ばれる積分評価 (補題 3.1) がある $s>0$ に対して成り立つ. 他方, u が $-\triangle_p u=0$ の弱劣解のとき, 各 $s>0$ に対して u に対して劣平均値の不等式型の上からの各点評価

$$u_+(x_0)\le C\left(⨍_{B(x_0,R)}u_+^s\,\mathrm{d}x\right)^{1/s} \tag{2}$$

が成り立つ. ここで $f_+=\max\{f,0\}$, $⨍_A f\,\mathrm{d}x=|A|^{-1}\int_A f\,\mathrm{d}x$. 2 つの不等式を組み合わせて $-\triangle_p u=0$ の非負の解に対する Harnack の不等式が得られる. 定理 1.1, 1.2 の証明の方針も, この 2 つの部分からなることは変わらない. そこで我々は次の二段階に分けて定理 2.1 を行う. まず, 領域が一様領域であることと領域内部では弱 Harnack 不等式が成り立つことを利用し定理 1.1 の境界近傍での積分評価は $-\triangle_p u=0$ の非負の弱優解に対しても成り立つことを示す (Section 3). 次に境界上で u が消えていることを利用し定理 1.2 の劣平均値型の各点評価を領域境界を超えて拡張する (Section 4). 2 つの評価を組み合わせて, 求める定理 2.1 が得られる.

3. 大域的積分評価

p-Laplace 方程式についての弱 Harnack 不等式はよく知られている (たとえば, [4, Theorem 3.59]).

補題 3.1. u を $-\triangle_p u=0$ in Ω の非負の弱優解とする. このとき n と p から定まる正数 s と定数 C が存在して $B(x_0,2R)\subset\Omega$ となる任意の球 $B(x_0,R)$ に対し

$$\left(⨍_{B(x_0,R)}u^s\,\mathrm{d}x\right)^{1/s}\le C\inf_{B(x_0,R)}u.$$

この不等式, および [1] と [6] の方法を用いて大域的積分評価 (定理 3.8) を証明する. 証明のため, 領域境界から距離の離れた球の鎖を考え, 弱 Harnack の不等式 (補題 3.1) を繰り返し用いる. 鎖の長さを制御するのが次の擬双曲距離である.

定義 3.2. Ω を $\partial\Omega \neq \emptyset$ となる領域とする. $x, y \in \Omega$ の擬双曲距離 $k_\Omega(x,y)$ を

$$k_\Omega(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{d(z(s), \partial\Omega)}$$

で定義する. ただし, 下限は x と y を結ぶ Ω 内の曲線 γ についてとる.

Ω が $\mathbb{R}^2$ 内の連結領域であれば $k_\Omega(x,y)$ は x と y の間の双曲距離と同値になる. 次の条件をみたす球の鎖がとれる ([6, Lemma 0] を参照).

補題 3.3. 任意の $x, y \in \Omega$ に対し次の条件をみたす有限個の球の族 $\{B_i\}_{i=0}^m = \{B(x_i, r_i)\}_{i=0}^m$ が存在する.

(i) 各 i に対し, $r_i = d(x_i, \partial\Omega)/5$).
(ii) $x_0 = x$, $x_m = y$.
(iii) 各 $0 \leq i \leq m-1$ に対し, $x_{i+1} \in B_i$ かつ $B_{i+1} \subset \frac{11}{5} B_i$.
(iv) $m \leq C(n) k(x,y) + 1$.

各 $\frac{11}{5} B_i$ 上で補題 3.1 を用いることで次の不等式を得る.

補題 3.4. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき n と p にのみ依存する定数 A が存在して $5B \subset \Omega$ となる任意の球 B に対して

$$\fint_B u^s \,\mathrm{d}x \leq e^{A(k_\Omega(c(B),y)+1)} \inf_{B(y, d(y,\partial\Omega)/5)} u^s.$$

ただし $c(B)$ は B の中心.

この不等式と被覆定理から次の積分評価を得る. ただし, (3) の右辺の積分は一般に収束しないことに注意する.

補題 3.5. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき任意の $0 < \sigma \leq 1$ に対し n, p, σ にのみ依存する定数 C が存在して任意の $\xi \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$ に対して

$$\int_{\Omega \cap B} u^{\sigma s} \,\mathrm{d}x \leq \left(C \int_{\Omega \cap \frac{26}{25} B} e^{\sigma A k_\Omega(x,y)} \,\mathrm{d}x \right) \inf_{B(y, d(y,\partial\Omega)/5)} u^{\sigma s}. \tag{3}$$

ただし A は 補題 3.4 の定数.

(3) の右辺の積分の収束のための一つの十分条件は, 領域 Ω が一様領域であることである (例えば [1, Lemma 4.4]). 可積分性のためのより一般的な十分条件については [6] を参照.

定義 3.6. ある定数 c_1 と c_2 で任意の $x, y \in \Omega$ に対して

$$k_\Omega(x,y) \leq c_1 \log \left(\frac{|x-y|}{\min\{d(x,\partial\Omega), d(y,\partial\Omega)\}} \right) + c_2$$

となるものが存在するとき, Ω を一様領域とよぶ.

補題 3.7. Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y, \partial\Omega)/R$ とする. このとき, n と c_1 にのみ依存する正数 $\tau > 0$ と, n, c_1, c_2, θ にのみ依存する正数 $C > 0$ が存在して, 任意の $0 < \rho \leq \theta R$ に対し

$$\int_{\Omega \cap B(\xi, \rho)} e^{\tau k(x,y)} \,\mathrm{d}x \leq C \rho^n.$$

$\sigma = \frac{\tau}{A}$, $\rho = \frac{13}{25}\theta R$ として補題 3.5 と 系 3.7 を組み合わせて次の評価を得る.

定理 3.8. Ω を一様領域とし, $\xi \in \partial\Omega$ とする. $y \in \Omega$ とし, $R = |\xi - y|$, $\theta = d(y, \partial\Omega)/R$ とする. u を $-\triangle_p u = 0$ in Ω の非負の優解とする. このとき, n, p, c_1, c_2, θ にのみ依存する正数 t_0 と定数 C が存在して

$$\left(\frac{1}{(\theta R)^n} \int_{\Omega \cap B(\xi, \theta R/2)} u^{t_0} \,\mathrm{d}x \right)^{1/t_0} \leq C \inf_{B(y, \theta R/5)} u.$$

4. 上からの各点評価

Kilpeläinen と Malý の領域内部での各点評価を, 符号付き外力を伴う方程式に対しての評価に改良した.

補題 4.1 ([2])**.** μ_+ と μ_- を $W^{-1,p'}(\Omega)$ に属する非負の測度とする. u を $-\triangle_p u = \mu_+ - \mu_-$ in Ω の弱解とする. $x_0 \in \Omega$ とし $B(x_0, 2R) \subset \Omega$ とする. このとき任意の t に対し n, p, t にのみ依存する定数 C が存在して

$$u_+(x_0) \le C \left\{ \left(\fint_{B(x_0,R)} u_+^t \, \mathrm{d}x \right)^{1/t} + \mathbf{W}_p^{\mu_+}(x_0, 2R) \right\}.$$

境界近傍での各点評価 (定理 4.3) を証明するため, 境界条件 $u = 0$ on $\partial\Omega$ が u に与える影響を外力の形に書き改める. この書き換えにより, 求める境界評価は符号付き外力を伴う方程式の解の内部評価に帰着される. 具体的には, 部分積分公式を近似することにより次の拡張定理を示せる.

補題 4.2. $\xi \in \partial\Omega$, $R > 0$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi, 2R))$ に属するという意味で $u \le 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ かつ $\mu(B(\xi, 2R))$ が有限になるものとする. このとき $W^{-1,p'}(\Omega)$ に属する非負の測度 ν が存在して

$$-\triangle_p \widetilde{u_+} = \mu\lfloor_{\{u>0\}} - \nu \quad \text{in } B(\xi, R).$$

Remark 4.1. 実際には ν は

$$\int_{B(\xi,R)} \varphi \, \mathrm{d}\nu = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0<u<\epsilon\}} |\nabla u|^p \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B(\xi, R))$$

で与えられる. さらに $p = 2$ かつ $\{u = 0\}$ が滑らかであればその単位外法線ベクトル n と面素 $\mathrm{d}S$ を用いて $\mathrm{d}\nu = -\nabla u \cdot n \, \mathrm{d}S$.

拡張された関数 $\widetilde{u_+}$ に定理 4.1 を用いることで次の評価を得る.

定理 4.3. $\xi \in \partial\Omega$, $R > 0$ とする. u を (1) の弱解で u_+ のゼロ拡張 $\widetilde{u_+}$ が $W^{1,p}(B(\xi, 2R))$ に属するという意味で $u \le 0$ on $\partial\Omega \cap B(\xi, 2R)$ かつ $\mu(B(\xi, 2R))$ が有限になるものとする. このとき任意の $t > 0$ に対し, n, p, t にのみ依存する定数 C が存在して任意の $0 < r \le R$ と任意の $x_0 \in \Omega \cap B(\xi, r/4)$ に対して

$$u(x_0) \le C \left\{ \left(\frac{1}{r^n} \int_{\Omega \cap B(x_0, r/4)} u^t \, \mathrm{d}x \right)^{1/t} + \mathbf{W}_p^{\mu}(x_0, r/2) \right\}.$$

定理 2.1 の証明. $t = t_0$, $r = \theta R$ として定理 4.3 と定理 3.8 を組み合わせる. □

References

[1] H. Aikawa and N. Shanmugalingam. Carleson-type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces. *Michigan Math. J.*, 53(1):165–188, 2005.

[2] T. Hara. The Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations with signed data. *Manuscripta Math.*, 150(1-2):45–58, 2016.

[3] T. Hara. Carleson-type estimates for p-superharmonic functions. preprint.

[4] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1993 original.

[5] T. Kilpeläinen and J. Malý. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.*, 172(1):137–161, 1994.

[6] D. A. Stegenga and D. C. Ullrich. Superharmonic functions in Hölder domains. *Rocky Mountain J. Math.*, 25(4):1539–1556, 1995.

Department of Mathematics,, Hokkaido University,, Kita 8 Nishi 10 Sapporo, 060-0808, Japan

E-mail address: takanobu.hara.math@gmail.com

q超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形

朴　佳南　(Kanam PARK)*

概　　要

q超幾何級数は, ガウスの超幾何級数のq類似として, 19世紀にHeineによって導入された. このq超幾何級数は, ハイネの公式と呼ばれる等式を満たし, 定積分のq類似であるジャクソン積分によって表されることが知られている. 本講演では, q超幾何級数の拡張$\mathcal{F}_{M,N}$を定義し, ハイネの公式の拡張, そして$\mathcal{F}_{N,M}$で表される特殊解を持つモノドロミー保存変形の, $N=1$の場合について話す.

1. q超幾何関数

q超幾何級数は, ガウスの超幾何級数のq類似として導入された. ガウスの超幾何級数とは次のような式である.

定義 1.1 (ガウスの超幾何級数)**.** ガウスの超幾何級数は, 次で定義される

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n,\ |x|<1. \tag{1}$$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$である.

(1)のq類似として定義されるq超幾何級数とは次のような式である

定義 1.2 (q超幾何級数)**.** q超幾何級数は, 次で定義される [1][2]

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(q)_n}x^n,\ |x|<1. \tag{2}$$

ここで, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^n a)_\infty}$である.

ここで, q超幾何関数(2)の重要な性質である, ハイネの公式と積分表示を紹介する. まず, ハイネの公式とは次のような等式である.

命題 1.1 (ハイネの公式)**.** (2)は, 次の等式を満たす

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\right)=\frac{(b)_\infty(ax)_\infty}{(c)_\infty(x)_\infty}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\frac{c}{b},x\\ ax\end{matrix};b\right). \tag{3}$$

この証明は, 二項定理のq類似であるq-二項定理と, 和の順序交換をすることで示される. ここで, q-二項定理とは次のようなものである

定理 1.1 (q-二項定理)**.** 次の等式が成り立つ

$$ \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}=\sum_{m\geq 0}\frac{(a)_m}{(c)_m}z^m. \tag{4}$$

神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程1年
* 〒657-8501　神戸市灘区六甲台町1-1 神戸大学大学院理学研究科
e-mail: kpaku@math.kobe-u.ac.jp

次に, (2) の積分表示について述べる. 定積分の q 類似であるジャクソン積分は次のように定義される.

定義 1.3 (Jackson 積分)**.**

$$\int_0^c f(t)d_qt = c(1-q)\sum_{n\geq 0} f(cq^n)q^n. \tag{5}$$

$q \to 1$ のとき, この和はリーマン積分に移行する. これを用いると, (3) は, 次のように積分表示として解釈される.

命題 1.2 (q 超幾何関数の積分表示)**.** (3) に対して, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と代入すると, (3) は次のような式になる

$${}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix}q^\alpha, q^\beta \\ q^\gamma\end{matrix}; x\Big) = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}\frac{(qt)_\infty(q^\alpha xt)_\infty}{(q^{\gamma-\beta}t)_\infty(xt)_\infty}d_qt, \tag{6}$$

ここで, $\Gamma_q(x) = \frac{(q)_\infty}{(q^x)_\infty}(1-q)^{1-x}$ である.

2. q 超幾何関数の拡張

1 でみた q 超幾何関数の拡張を考える. (2) の拡張として, 関数 $\mathcal{F}_{M,N}$ を次のように定義する.

定義 2.1 (q 超幾何級数の拡張 $\mathcal{F}_{M,N}$)**.**

$$\mathcal{F}_{M,N}\Big(\begin{matrix}\{a_i\}, \{b_j\} \\ \{c_i\}\end{matrix}; \{y_j\}\Big) = \sum_{n_j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(a_i)_{|n|}}{(c_i)_{|n|}}\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j)_{n_j}}{(q)_{n_j}}\prod_{j=1}^{N}y_j^{n_j}. \tag{7}$$

ここで, $|n| = \sum_{j=1}^{N} n_j$, $(a)_n = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a) = \frac{(a)_\infty}{(q^na)_\infty}$ を表す.

$M = 1$, $N = 1$ のとき, (7) は (2) に相等する. (3), (6) に対応するように, 定義した関数 $\mathcal{F}_{M,N}$ において, 次の等式がなりたつ.

命題 2.1 (ハイネの公式の拡張)**.**

$$\mathcal{F}_{N,M}\Big(\begin{matrix}\{y_j\}, \{a_i\} \\ \{b_jy_j\}\end{matrix}; \{x_i\}\Big) = \frac{(\{y_j\}, \{a_ix_i\})_\infty}{(\{b_jy_j\}, \{x_i\})_\infty}\mathcal{F}_{M,N}\Big(\begin{matrix}\{x_i\}, \{b_j\} \\ \{a_ix_i\}\end{matrix}; \{y_j\}\Big). \tag{8}$$

この証明は, 命題 1.1 と同様に, 定理 1.1 と和の順序交換によって示される. (8) により, 関数 $\mathcal{F}_{N,M}$ に対して, (6) と同様にして次を得る.

命題 2.2 ($\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示)**.** (8) に対して, $a_i = q^{\alpha_i}$, $b_j = q^{\beta_j}$, $y_j = q^{\gamma_j}$ を代入すると, (8) は次のような式になる

$$\mathcal{F}_{N,M}\Big(\begin{matrix}\{q^{\gamma_j}\}, \{q^{\alpha_i}\} \\ \{q^{\beta_j}q^{\gamma_j}\}\end{matrix}; \{x_i\}\Big) = \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_q(\beta_j+\gamma_j)}{\Gamma_q(\beta_j)\Gamma_q(\gamma_j)}\prod_{j=1}^{N}\int_0^1 d_qt_j\prod_{j=1}^{N}\frac{(qt_j)_\infty}{(q^{\beta_j}t_j)_\infty}\prod_{i=1}^{M}\frac{(x_iq^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{N}t_j)_\infty}{(x_i\prod_{j=1}^{N}t_j)_\infty}t_j^{\gamma_j-1}. \tag{9}$$

3. $\mathcal{F}_{1,M}$ が満たすモノドロミー保存変形

Tsuda[5] は, 微分の場合に, 次のようなハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$(H_j はある $\{p_n^{(i)}, q_n^{(i)}\}$ の多項式)

$$\mathcal{H}_{L,N}: \quad \frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \begin{pmatrix} 1 \le i, j \le N \\ 1 \le n \le N+1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

の特殊解を, 次のガウスの超幾何関数の拡張式 $F_{L,N}$

$$F_{L,N} = \sum_{m_i \ge 0} \frac{(\alpha_1)_{|m|} \cdots (\alpha_{L-1})_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|m|} \cdots (\gamma_{L-1})_{|m|} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_N}} x^m \tag{11}$$

$$\{|x_1| < 1, \cdots |x_N| < 1\} \subset \mathbb{C}^N, \tag{12}$$

で求めた. まず, $F_{L,N}$ の積分表示を用いてパフ系を構成し, 次に $\mathcal{H}_{L,N}$ のラックス形式を見ると, それが $F_{L,N}$ が満たすパフ系に帰着するので, $F_{L,N}$ で $\mathcal{H}_{L,N}$ の特殊解を表せることがわかる. 今回定義した $\mathcal{F}_{M,N}$ は, この $F_{L,N}$ の q 類似 ($M = L-1$) であり, 我々の目標は, (10) の q 類似を得ることである. これについて, $N = 1$ の場合の結果を得たので, 本稿ではそれについて述べる.

3.1. $\mathcal{F}_{1,M}$ が満たすパフ系

まず, $\mathcal{F}_{1,M}$ の積分表示を用いて, それが満たすパフ系を構成する. (9) の $N = 1$ における被積分関数を, Φ とおく ($t_1 = u_1$)

$$\Phi = u_1^{\gamma_1} \prod_{i=1}^{M} \frac{a_i x_i u_1}{x_i u_1} \quad (x_0 = b_1,\ a_0 x_0 = q). \tag{13}$$

これに対して

$$\Phi p_0,\ \Phi p_{1,i},\ (1 \le i \le M) \tag{14}$$

の u_1 に関する積分が, パフ系の解の基底になる. ここで, $p_0 = 1$, $p_{1,i} = (1 - b_1 u_1) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1 - x_k u_1}{1 - a_k x_k u_1} \cdot \frac{1}{1 - a_i x_i u_1}$ である. それぞれ Ψ_0, $\Psi_{1,i}$ $(1 \le i \le M)$ で表し, 互換 $\sigma_i = \{x_i \leftrightarrow x_{i+1}, a_i \leftrightarrow a_{i+1}\}$ とおくと, 次が成り立つ

$$\sigma_i \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{1,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_i - a_{i+1} x_{i+1}} \begin{bmatrix} (1 - a_i) x_i & a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & (1 - a_{i+1}) x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{1,i+1} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\sigma_i(p_{1,k}) = p_{1,k} (k \ne i, i+1). \tag{16}$$

また, 変数 x_M の q シフト ($T_{x_M}(f(x_M)) = f(q x_M)$) に対して, 次が成り立つ

$$T_{x_M}(\Phi p_0) = \Phi \frac{1 - x_M u_1}{1 - a_M x_M u_1} = (1 - 1/a_1) \Phi \rho(p_{1,1}) + 1/a_1 \Phi \rho(p_0), \tag{17}$$

$$T_{x_M}(\Phi p_{1,i}) = \Phi \frac{1 - x_M u_1}{1 - a_M x_M u_1} p_{1,i} = \Phi \rho(p_{1,i+1}),\ (1 \le i \le M-1) \tag{18}$$

$$T_{x_M}(\Phi p_{1,M}) = q^{-\gamma_1} \Phi \frac{1 - b_1 u_1}{1 - a_M x_M u_1} = q^{-\gamma_1} \Phi \rho(p_{1,1}). \tag{19}$$

ここで, $\rho = \sigma_{M-1} \sigma_{M-2} \cdots \sigma_1$ とおくと, (15)-(19) より, 次が言える.

命題 3.1. 関数$\mathcal{F}_{1,M}$は, 次のパフ系を満たす [3]

$$T_{x_M}(\Psi_0) = \frac{x_M - b_1}{a_M x_M - b_1}\ \rho(\Psi_0) + \frac{(a_M - 1)x_M}{a_M x_M - b_1}\rho(\Psi_{1,1}), \tag{20}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,i}) = \rho(\Psi_{1,i+1})\ (1 \le i \le M-1), \tag{21}$$

$$T_{x_M}(\Psi_{1,M}) = \frac{q^{-\gamma_1}(1-b_1)}{a_M x_M - b_1}\left[\rho(\psi_0) + \frac{a_M x_M - 1}{1-b_1}\rho(\Psi_{1,1})\right]. \tag{22}$$

x_M以外の変数に対するqシフトは, 置換σ_iを用いることによって求められる.

3.2. $\mathcal{F}_{1,M}$が満たすモノドロミー保存変形

$\mathcal{F}_{1,M}$は上のパフ系を満たすので, その係数行列は両立条件を満たす. このことから, それを特殊化し, 簡約したものをあるモノドロミー保存変形のラックス形式と解釈して目標の方程式を得る.

定理 3.1. 行列A, Bを

$$A = dX_1^{-1}X_2\cdots X_{2M-1}^{-1}X_{2M}, \tag{23}$$

$$B = X_{2M}(z/q,t)^{-1}\cdot X_{2M-1}(z/q,t), \tag{24}$$

とする. ただし, dは対角行列, $X_i = X_i(z,t) = \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ z & c_i/u_i \end{pmatrix}$とする. このとき

$$A(z,t)\cdot B(qz,t) = B(z,t)\cdot A(z,qt), \tag{25}$$

によって定まるモノドロミー保存変形[1]は, $\mathcal{F}_{1,M}$で表される特殊解を持つ.

証明の概要を述べる. $\mathcal{F}_{1,M}$の積分表示から得られるパフ系の係数行列が, (23),(24)のように表されることが分かれば良い. ここで, 命題3.1において, $\overrightarrow{\Psi} = (\Psi_0,\cdots,\Psi_{1,M})$とおき, 行列で次のような積の形で表すことができる

$$T_{x_M}\overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi}A, \tag{26}$$

$$A = R_{M-1}R_{M-2}\cdots R_1 Q_M. \tag{27}$$

ここで, 行列R_i, Q_Mは$(M+1)$次正方行列で, それぞれ作用素σ_i, T_{x_M}より導かれる行列である. これに対して, パラメーター$a_M = 1$と特殊化すると同時に, $x_M = z$とおくと, (27)における因子は, 次のようになる

$$R_i = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ i+2 \\ i+3 \\ \vdots \\ M+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & i & i+1 & i+2 & i+3 & \cdots & M+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{(1-a_i)x_i}{x_i-z} & 1 & & & \\ & & & \frac{a_i x_i - z}{x_i - z} & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{28}$$

[1] q-KPの相似簡約のラックス形式 [4] を変形して構成したもの

$$Q_M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ M+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & M & M+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{q^{-\gamma_1}(1-b_1)}{z-b_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-q^{-\gamma_1}(z-1)}{z-b_1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{29}$$

また, このとき, パフ系 (20)-(22) における未知関数 Ψ_0, Ψ_1, $\cdots$,Ψ_M のうち,Ψ_M だけが z に依存する. そこで, 他の関数の比 $\frac{\Psi_1}{\Psi_0}$, $\cdots$ $\frac{\Psi_{M-1}}{\Psi_0}$ を $x_1, \cdots, x_{M-1}$ にのみ依存する関数としてそれぞれ r_1, r_2, $\cdots$ r_{M-1} とおくと, 式 (26), (27) は Ψ_0 と Ψ_M だけの連立方程式として, 次のように表すことができる

$$T_z(\Psi_0, \Psi_M) = (\Psi_0, \Psi_M)\ d' Y_1^{-1} Y_2 \cdots Y_{2M-1}^{-1} Y_{2M}, \tag{30}$$

ここで, d' は対角行列で, $i = 1, \cdots M-1$ において

$$Y_{2i-1} = \begin{pmatrix} \frac{q^{\gamma_1}}{r_{M-i}} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1} x_{M-i} r_{M-i} \end{pmatrix}, \quad Y_{2i} = \begin{pmatrix} \frac{q^{\gamma_1}}{r_{M-i}} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1} x_{M-i} a_{M-i} r_{M-i} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

最後2つの因子は

$$Y_{2M-1} = \begin{pmatrix} q^{\gamma_1} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1} b_1 \end{pmatrix}, \quad Y_{2M} = \begin{pmatrix} q^{\gamma_1} & 1 \\ z & q^{-\gamma_1} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

これと (23) を見比べて, 結果を得る (行列 B も同様).

参考文献

[1] E.Heine., *Uber die Reihe...*, Reine.Angew.Math., **32** (1846), 210–212.

[2] E.Heine., *Untersuchungen uber die Reihe...*, Reine.Angew.Math., **34** (1847), 285–328.

[3] Mimachi K.,*Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type*,Nagoya.Math.J.,**116**(1989),149–161

[4] Kajiwara K.,Noumi M., and Yamada Y., *q-Painleve systems arising from q-KP hierarchy*, Lett. Math. Phys. **62**(2002),259–268

[5] Tsuda T., *Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type*, Quart. J. Math, **63** (2012), 489–505.

Carathéodory の核収束定理について

小山 剛史 (KOYAMA Takeshi)
岡山大学大学院 教育学研究科 教科教育学専攻 修士課程 2 年

概 要

Carathéodory の核収束定理は複素解析学における古典的な結果の 1 つである．私は単葉関数論における大きな問題の 1 つであった Bieberbach 予想について研究している際に，核収束定理が予想の証明に関連していることを知った。核収束定理については様々な文献に結果と証明が書かれている．それらの中から 5 つの文献 ([3], [5], [6], [9], [10]) を調べたところ，いくつか不明瞭な部分がみつかった．本発表では，Carathéodory の核収束定理とその証明について改良した点を中心に述べていく．尚，本発表の内容は岡山大学大学院教育学研究科の出耒光夫先生との共同研究「An elementary proof of the Carathéodory kernel convergence theorem」に基づいている．

1 Bieberbach 予想と核収束定理の関連

1.1 Bieberbach 予想とは

本資料では，$a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して，$B(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ と定める．特に，$\mathbb{D} := B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ と表す．

まず，単葉関数論において最も基本的かつ重要な関数の族 $\mathcal{S}$ を定義する．

定義 1.1. 次の条件を満たす関数 f の族を $\mathcal{S}$ で表す：

1. f は $\mathbb{D}$ 上正則かつ単射である．
2. $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ である．

次に，Bieberbach 予想と深いつながりがある Koebe 関数を定義する．

定義 1.2 (Koebe 関数)**.** ある $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて表される次の関数を Koebe 関数という：

$$f(z) := \frac{z}{(1+e^{i\beta}z)^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

予想 (Bieberbach 予想 [1])**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

と表す．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_n| \leq n$$

が成り立つ．等号成立は f が Koebe 関数である場合に限る．

Bieberbach 予想は，正則であることと Taylor 展開可能であることが同値であるという複素解析学における重要な結果をもとに，$\mathbb{D}$ における正則性と単射性のみを仮定した関数の族 $\mathcal{S}$ に含まれる関数の展開係数の大きさがどのくらいになるかという問題である．

1.2 Bieberbach 予想の証明と核収束定理の関連

Bieberbach 予想は de Branges [2] によって証明された．その後，Fitzgerald と Pommerenke によって別証明 [4] が与えられた．以下，Fitzgerald と Pommerenke による Bieberbach 予想の証明の手順の一部を説明する．まず，Robertson 予想と予想の定式化に必要な命題を記載する．

命題 1.3. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対して次の 2 条件を満たすある関数 $g \in \mathcal{S}$ が存在する：

(i) すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $g(z)^2 = f(z^2)$.

(ii) g は $\mathbb{D}$ 上の奇関数.

命題 1.4 (Robertson 予想)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f に対して命題 1.3 を用いて得られる関数を g とする．g の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を，g が奇関数であることに注意して，

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}$$

と表す．このとき，各 $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ に対して，

$$1 + \sum_{k=2}^{n} |c_{2k-1}|^2 \leq n$$

が成り立つ．

この Robertson 予想を仮定すると，Bieberbach 予想が成り立つことを証明できる．Robertson 予想は，次の Milin 予想を仮定すると証明することができる．

命題 1.5 (Milin 予想)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．f に対して $\mathbb{D}$ 上で正則な関数 h で，$h(0) = 0$ かつ $\mathbb{D}$ 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{f(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる．h の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を，

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k$$

と表す．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ．

つまり，Fitzgerald と Pommerenke による別証明に従うと，Bieberbach 予想を証明するということは，Milin 予想を証明することであると言うことができる．

次に，Carathéodory の核収束定理と Bieberbach 予想の証明の関連について説明するために必要な截線領域，截線写像を定義する．尚,「截線」という言葉は小松 [8] から引用した．

定義 1.6 (截線領域，截線写像)**.** $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $z = z(t)$ で，$t \in [0, t_0)$ で連続，$z(0) = z_0$ かつ $\lim_{t \to t_0} |z(t)| = +\infty$ を満たすものを z_0 から無限遠点 ∞ を結ぶ曲線の方程式という．$\Gamma \subset \mathbb{C}$ を，ある点 $z_0 \in \mathbb{C}$ から ∞ を結ぶある単純閉曲線とする．このとき，単連結領域 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ を截線領域という．さらに，$\mathbb{D}$ 上正則かつ $\mathbb{D}$ からある截線領域への全単射である関数を截線写像という．

次の定理 1.7 を証明するために Carathéodory の核収束定理が用いられる．

定理 1.7. $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ を截線写像の族とする．このとき，各 $g \in \mathcal{S}^*$ に対してある $\mathbb{D}$ 上で正則な関数 h で，$h(0) = 0$ かつ $\mathbb{D}$ 上で

$$e^{2h(z)} = \frac{g(z)}{z}$$

を満たすものを定義できる．h の $\mathbb{D}$ 上の Taylor 展開を

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

と表すとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|c_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$$

が成り立つならば，Milin 予想は真である．

定理 1.7 によって，部分族 $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ に対して Milin 予想の結論の不等式 (1.1) が成り立つことを証明すれば Bieberbach 予想が証明されることになる．つまり，族 $\mathcal{S}$ 自身ではなく，$\mathcal{S}$ よりも条件を少し強くした部分族 $\mathcal{S}^*$ について考えればよいということになる．

2 核収束定理の証明の準備

以下，Carathéodory の核収束定理の証明に関連する重要な定理と，それらの定式化に必要な定義について記載している．

2.1 単葉関数論からの準備

定理 2.1 (Riemann の写像定理)**.** 任意の単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ と任意の点 $z_0 \in \Omega$ に対して，Ω から $\mathbb{D}$ への全単射である正則関数 f で，$f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ を満たすものが唯 1 つ存在する．

定理 2.2 (Koebe の 1/4 定理)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．このとき，$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(\mathbb{D})$ が成り立つ．

定理 2.3 (Koebe の歪曲定理)**.** $f \in \mathcal{S}$ とする．このとき，すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して，

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

が成り立つ．

2.2 Vitali の定理と Montel の定理

定義 2.4. $\mathcal{F}$ はある開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上で定義された関数の族とする．

1. $E \subset \Omega$ とする．このとき，ある定数 $M > 0$ が存在し，すべての $z \in E$ とすべての $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つとき，$\mathcal{F}$ は E 上一様有界であるという．
2. 任意の有界閉集合 $K \subset \Omega$ に対して $\mathcal{F}$ が K 上一様有界であるとき，$\mathcal{F}$ は Ω 上広義一様有界であるという．

3. 任意の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対して $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列で Ω 上広義一様収束するものが存在するとき，$\mathcal{F}$ は Ω で正規族であるという．

定理 2.5 (Montel の定理)**.** $\mathcal{F}$ はある開集合 Ω 上で正則な関数の族とする．このとき，$\mathcal{F}$ が Ω 上広義一様有界であるならば，$\mathcal{F}$ は Ω で正規族である．

定理 2.6 (Vitali の定理)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある領域 Ω 上正則な関数の列で，$A \subset \Omega$ は $A^d \cap \Omega \neq \emptyset$ を満たすものとする．ここで，A^d は A の集積点全体のなす集合である．また，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω で正規族であり，ある部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，Ω 上ある関数 g に広義一様収束するものが存在し，さらに $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が A 上 g に各点収束すると仮定する．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上広義一様収束する．

3 Carathéodory の核収束定理と証明の概要

本章ではまず Carathéodory の核収束定理を定式化するために必要な概念である領域の核と核収束を定義し，その例をいくつか与える．その後，Carathéodory の核収束定理の定式化と証明について説明する．

3.1 領域の列の核と核収束の定義とその例

定義 3.1 (領域の列の核，核収束)**.** $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in D_n$ を満たすある領域の列とする．集合 D' を次で定める：

$$D' := \{w \in \mathbb{C} \,|\, \{0, w\} \subset H \text{ を満たすある領域 } H \text{ が存在し，} \\ \text{十分大きなすべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } H \subset D_n\}.$$

このとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D を，

$$D := \{0\} \cup D'$$

によって定義する．$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての部分列が $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ と同じ核 D をもつとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D に核収束するといい，$D_n \to D$ と書く．

注意 3.2. $D' = \emptyset$ のとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は $D = \{0\}$ である．

例 3.3. (i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \backslash \left\{1 + it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．このとき，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は，

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z < 1\}$$

である．さらに，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので，$D_n \to D$ である．

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \backslash \left\{it \mid |t| \geq \frac{1}{n}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．すると，どのように $\varepsilon \in (0, 1)$ をとってきてもある $n_0 \in \mathbb{N}$ で，$B(0, \varepsilon) \not\subset D_{n_0}$ となってしまうので，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は $D = \{0\}$ である．さらに，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列も同じ核 D を持つので，$D_n \to D$ である．

(*iii*) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$D_n := \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z = (-1)^n\}$$

で定義される領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．すると，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核 D は，

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > -1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 1\}$$

だが，部分列 $\{D_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ の核は，

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 1\}$$

となってしまい，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D に核収束しない．

3.2 Carathéodory の核収束定理と証明の概要

核収束定理については様々な文献に結果と証明が書かれている．それらの中でも特に [3], [9] は単葉関数論の古典的な名著であり，[5], [6], [10] は Bieberbach 予想の証明についても解説がある．これら 5 つの文献を調べたところ，以下のような不明瞭な部分が見つかった．

· 関数列と領域の列の評価について（Vitali の定理，Riemann の写像定理の一意性）．

· 単連結領域の列の核は単連結領域であるか．

さらに，Carathéodory の核収束定理は今回参考にした 5 つの文献には必要十分条件の形で 1 つの定理として書かれていた．一方の証明に他方の結論を用いることを強調するために，私は以下の 2 つの定理に分けて定式化した．定理 3.4，定理 3.5 は [7] による．

定理 3.4. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である関数の列で，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ を満たすとする．$f_n(\mathbb{D}) = D_n$ と表し，領域の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上ある関数 f に広義一様収束するならば，$f(\mathbb{D}) = D$ である．

定理 3.5. $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n \subsetneq \mathbb{C}$ かつ $0 \in D_n$ を満たすある単連結領域の列とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上正則なある関数の列で，$\mathbb{D}$ から D_n への全単射で，$f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ を満たすとする．$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の核を D とする．このとき，以下が成立：

(*i*) $D_n \to D$ かつ $D = \{0\}$ であるならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 0 に広義一様収束する．

(*ii*) $D_n \to D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ が単連結領域であるならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上定数でないある関数 f に広義一様収束し，$f(\mathbb{D}) = D$ である．

参考にした 5 つの文献には，定理 3.5 の証明に関する内容について，先程述べたような不明瞭な部分があった．私は Step3，Step4 でそれらを改善した．Step3 で Riemann の写像定理の写像の一意性と定理 3.4 を用いる．Step4 では定理 2.6(Vitali の定理) と定理 3.4 を用いる．本発表では，定理 3.5 の証明の概要を説明するが，以下には自己完結した証明を記載しておく．

定理 3.5 の証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n'(0) > 0$ より，$\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である関数

$$F_n(z) := \frac{f_n(z)}{f_n'(0)}$$

を定義できる．$F_n(0) = 0$, $F_n'(0) = 1$ より，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ である．

(i) の証明 : Step1. $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 0$ を示す．もし 0 に収束しないと仮定すると，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，どのように $n \in \mathbb{N}$ をとってきても，ある $n_0 \geq n$ で，$f_{n_0}'(0) \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する．つまり，

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在して, } f_{n_1}'(0) \geq \varepsilon \\
&n_1 \text{に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{が存在して, } f_{n_2}'(0) \geq \varepsilon \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&n_{k-1} \text{に対してある番号 } n_k > n_{k-1} \text{が存在して, } f_{n_k}'(0) \geq \varepsilon
\end{aligned}
$$

を満たす $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．ここで，各 F_{n_k} に対して定理 2.2(Koebe の 1/4 定理) を用いると，

$$B\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset F_{n_k}(\mathbb{D})$$

が成り立つ．ここで，$w \in B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right)$ を任意にとると，$|w| < \frac{f_{n_k}'(0)}{4}$, $\frac{|w|}{f_{n_k}'(0)} < \frac{1}{4}$ である．これより，ある $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在して，

$$\frac{w}{f_{n_k}'(0)} = F_{n_k}(z_0) = \frac{f_{n_k}(z_0)}{f_{n_k}'(0)}$$

と表される．つまり，$w = f_{n_k}(z_0)$ となる．したがって，

$$B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ．これより，

$$B\left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

で，$\{D_{n_k}\}$ の核は少なくとも $B(0, \frac{\varepsilon}{4})$ を含んでしまい，$D_n \to \{0\}$ であることに矛盾する．

Step2. 広義一様収束することを示す．有界閉集合 $K \subset \mathbb{D}$ を任意にとる．関数 $\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ は K 上で連続なので，$M_1 := \max_{z\in K} \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ が存在する．各 F_n に対して定理 2.3(Koebe の歪曲定理) を用いると，K 上

$$|F_n(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq M_1$$

が成り立つ．これより，

$$|f_n(z)| = |F_n(z)||f_n'(0)| \leq |f_n'(0)|M_1 \to 0 \ (n \to +\infty)$$

となるので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 0 に広義一様収束する．

(ii) の証明 : Step1. $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示す．$\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界でないと仮定する．このとき，部分列 $\{f_{n_k}'(0)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(0) = +\infty$ を満たすものが存在する．各 F_{n_k} に対して定理 2.2(Koebe の 1/4 定理) を用いると，(i) の Step1 の証明内の議論から，

$$B\left(0, \frac{f_{n_k}'(0)}{4}\right) \subset f_{n_k}(\mathbb{D}) = D_{n_k}$$

が成り立つ．いま，$f_{n_k}'(0) \to +\infty \ (k \to \infty)$ であるので，$\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ を核にもつ．これは $D_n \to D$ かつ $D \subsetneq \mathbb{C}$ に矛盾する．よって，$\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．

Step2. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族であることを示す．Step1 より，ある定数 $M_2 > 0$ が存在し，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n'(0)| \leq M_2$ が成り立つ．各 F_n に対して定理 2.3(Koebe の歪曲定理) を用いると，すべての $z \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &\leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \\ |f_n(z)| &= |F_n(z)||f_n'(0)| \\ &\leq M_1 M_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は K 上一様有界であるので，定理 2.5(Montel の定理) より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族である．

Step3. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ で正規族であるので，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\mathbb{D}$ 上広義一様収束するものが存在する．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数を g とする．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束することを示す．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ 上各点収束しないと仮定する．すると，ある $\alpha \in \mathbb{D}$ と $\varepsilon > 0$ が存在し，どのように $N \in \mathbb{N}$ をとってきても，ある番号 $n > N$ で，$|f_n(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$ を満たすものが存在する．つまり，

$$\begin{aligned} &1 \text{ に対してある番号 } n_1 > 1 \text{ が存在し}, |f_{n_1}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \\ &n_1 \text{に対してある番号 } n_2 > n_1 \text{が存在し}, |f_{n_2}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &n_{k-1} \text{に対してある番号 } n_k > n_{k-1} \text{が存在し}, |f_{n_k}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

を満たす部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．再び $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{D}$ で正規族であることを用いると，$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ で，$\mathbb{D}$ 上広義一様収束するものが存在する．$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ の極限関数を f とする．さらに，すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha)| \geq \varepsilon$$

を満たしているので，

$$\lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}(\alpha) - g(\alpha) \neq 0$$

つまり $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ である．一方，$\{f_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して定理 3.4 を用いると，$f(\mathbb{D}) = D$ かつ $g(\mathbb{D}) = D$ である．また，

$$f(0) = \lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}(0) = 0$$

であり，Weierstrass の定理より，$\{f_{n_{k_l}}'(0)\}_{l=1}^{\infty}$ は $f'(0)$ に収束するので，

$$f'(0) = \lim_{l\to\infty} f_{n_{k_l}}'(0) \geq 0$$

となる．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上正則かつ単射なので，f も $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射である．したがって，$\mathbb{D}$ 上で $f'(z) \neq 0$，つまり $f'(0) > 0$ である．同様にして，$g(0) = 0$ かつ g は $\mathbb{D}$ 上で正則かつ単射で，$g'(0) > 0$ である．このことと，f, g は $\mathbb{D}$ 上正則かつ $\mathbb{D}$ から単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ への全単射なので，Riemann の写像定理の写像の一意性より，すべての $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z) = g(z)$ となってしまい，$f(\alpha) \neq g(\alpha)$ に矛盾する．よって，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束する．

Step4. 定理の結論を示す．Step3 より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上 g に各点収束するので，定理 2.6(Vitali の定理) より，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{D}$ 上広義一様収束する．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して定理 3.4 を用いると，$g(\mathbb{D}) = D$ となる． □

参考文献

[1] L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. **38** (1916), 940–955.

[2] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. **154** (1985), 137–152.

[3] P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 259. Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] C. H. Fitzgerald and Ch. Pommerenke, The de Branges theorem on univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 683–690.

[5] S. Gong, The Bieberbach Conjecture, Translated from the 1989 Chinese original and revised by the author. With preface by Carl H. FitzGerald. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 12. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 1999.

[6] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis Volume 3: Discrete Fourier analysis–Cauchy integrals–construction of conformal maps–univalent functions, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

[7] M. Izuki and T. Koyama, An elementary proof of the Carathéodory kernel convergence theorem, Azerbaijan Journal of Mathematics, **8** (2018), to appear.

[8] 小松勇作, 等角写像論 上巻, 共立出版株式会社, 1949.

[9] Ch. Pommerenke, Univalent Functions with a chapter on Quadraic Differentials by Gerd Jensen, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[10] S. L. Segal, Nine Introductions in Complex Analysis. Revised Edition, North-Holland Mathematics Studies, 208. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2008.

パラレルセッション
会場Ｄ

パーシステントホモロジーの機械学習

草野　元紀　(Genki Kusano)*

本研究の概要

本講演では点集合のトポロジーを考える. ただ単に点集合のホモロジー群を考えても面白くはないが, パーシステントホモロジー [ZC05] というものを考えると点集合の特徴的なトポロジーを記述する事ができる. パーシステントホモロジーの材料科学での応用 [HNH+16] では, シリカ (SiO_2) という物質の原子配置を点集合として考える. シリカは固体液体の他に, ガラス状態という特殊な状態になる事がありその構造解析が材料科学の応用での目標になる. 固体状態であれば結晶構造になるが, 温度を上げて液体やガラス状態になると, 熱揺らぎの影響も受けて図 1 のように一見無秩序な配置に見える.



図 1: 液体状態（左）とガラス状態（右）のシリカの原子配置.

材料科学者の目には液体は確かに無秩序だが, ガラスは何かしらの規則・幾何構造があるのではという考察がなされていた. しかし, その幾何構造は名前のつくほど知られたものでもなければ, どのように特徴付けて良いか分からずシリカの液体ガラス相転移点付近での構造解析は未解決問題であった. [HNH+16] では, 原子配置からパーシステントホモロジーを計算し, それをパーシステント図として可視化する事でガラスの幾何構造を解析している. 図 2 を見ると, 液体とガラスのパーシステント図は違うため, 液体とガラスの幾何構造は違うと結論付けられる.



図 2: 液体状態（左）とガラス状態（右）のシリカから作られるパーシステント図.

筆者の研究は, “（データの幾何形状を表現した）パーシステント図を見てその違いを判別する” という恣意的な作業を “**パーシステント図に対する統計解析・機械学習[1]の手法を確立して, その手法を用いて定量的に違いを評価する**” に変える事である. ここでは, パーシステント図に対する統計解析・機械学習手法としてカーネル法を用いる. 一般に, データが非ベクトルデータの場合はその平均などの統計量を直接求める事がで

本研究は研究は JSPS 科研費 JP17J02401 の助成を受けたものである.

* 〒 980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3 東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程 2 年
e-mail: genki.kusano.r5@dc.tohoku.ac.jp

[1] 統計と機械学習の違いに関する私的意見としては, 統計は既にあるデータからその特徴を説明することを目的にし, 機械学習は手元にあるデータから未来のデータを予測することを目的にしている.

きない. 一方で, 任意のデータがベクトルの構造を持っているとも限らず, パーシステント図もベクトルとして扱うことはできない. カーネル法は任意のデータをベクトルに変換する手法であり, 数学的にはデータを無限次元ヒルベルト空間の元に変換するものの, 計算機上での実装が容易にできる点で機械学習でよく用いられる. 筆者はパーシステント図に対するカーネル法として, 福水健次氏（統数研）, 平岡裕章氏（東北大）との共同研究でPersistence weighted Gaussian kernel (PWGK, [KFH16, KFH17]) を提案して, 数理的性質の研究とデータ解析を行っている. 材料科学への応用では液体ガラス転移点問題を主成分分析や変化点検出により特徴付け, タンパク質の構造解析ではサポートベクターマシンによる二値分類を行った. 本講演ではパーシステントホモロジー, パーシステント図のカーネル法の構成法, 数値計算結果を紹介する.

本稿の残りは, 以下のキーワードの解説に当てる.

1章 パーシステントホモロジー・パーシステント図.

2章 Persistence weighted Gaussian kernel.

カーネル法に関しては [福10] を参照されたい.

1. パーシステントホモロジー

距離空間 (M, d_M) の有限点集合を X, X を中心とした半径 a の球の和集合を $B(X;a) := \bigcup_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{x}_i; a)$ とする. ただし, $B(\boldsymbol{x}; a) = \{\boldsymbol{y} \in M \mid d_M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq a\}$ とする. 球の和集合を半径パラメーター a で集めた集合 $\mathbb{B}(X) := \{B(X;a)\}_{a \geq 0}$ をここでは X のフィルトレーションという. $a \leq b$ ならば包含関係 $B(X;a) \subset B(X;b)$ があるため, ホモロジー群間の射 $u_a^b : H_q(B(X;a)) \to H_q(B(X;b))$ を包含写像から誘導する. このとき, ホモロジー群の系列

$$H_q(\mathbb{B}(X)) : \cdots \to \ H_q(B(X;a)) \ \xrightarrow{u_a^b} \ H_q(B(X;b)) \ \to \cdots \ (a \leq b)$$

を X の q 次元パーシステントホモロジーという. パーシステントホモロジーは体係数多項式環や $\mathbf{A}_n$ 型箙の表現などの言葉で解釈する事ができ, 分解定理 [ZC05, CdS10] により適切な区間表現 $\mathbb{I}[b_i, d_i]$ を通じて

$$H_q(\mathbb{B}(X)) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{I}[b_i, d_i] \ \ (b_i \leq d_i)$$

と分解される. これをユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ 内に表示した多重集合

$$D_q(X) := \{(b_i, d_i) \mid i \in I\}$$

を X の q 次元パーシステント図という. パーシステント図の元 (b_i, d_i) はホモロジーの生成元の発生時間（birth time）を b_i, 消滅時間（death time）を d_i と記録しているものと解釈できる. ある生成元 $\alpha \in H_q(B(X;a))$ の発生消滅の組みが (b, d) であるとき, $\alpha = \iota_b^a(\beta)$ なるゼロでない生成元 $\beta \in H_q(B(X;b))$ の $b \leq a$ の最小値が発生時間であり, $\iota_a^d(\alpha) \in H_q(B(X;d))$ が初めてゼロ元となる $d \geq a$ が消滅時間である. 生存時間 $d - b$ が長い (resp. 短い) ほど, 対応する生成元が特徴的 (resp. ノイズ) であると捉えられる.

パーシステント図 D, E 間の距離としてはbottleneck距離

$$d_{\mathrm{W}_\infty}(D, E) = \inf_{\gamma} \sup_{x \in D \cup \Delta} \|x - \gamma(x)\|_\infty$$

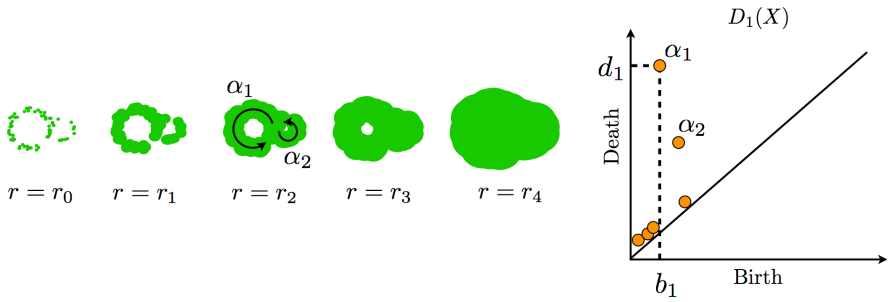


図 3: 球モデルのフィルトレーション (左) と対応するパーシステント図 (右)

が知られている． ただし, Δ は多重度が無限大の対角線集合 $\{(a,a) \mid a \in \mathbf{R}\}$ であり $\gamma : D \cup \Delta \to E \cup \Delta$ は全単射 [2]である． パーシステント図の集合を $\mathcal{D} := \{D : \text{persistence diagram} \mid d_{\mathrm{W}_\infty}(D,\Delta) < \infty\}$ とすると, $(\mathcal{D}, d_{\mathrm{W}_\infty})$ は距離空間になる. 次の, 写像 $X \mapsto D_q(X)$ がリプシッツ連続になる性質はパーシステント図の安定性として知られている:

命題 1 ([CdSO14]). 距離空間 (M, d_M) の有限部分集合 X, Y に対し,

$$d_{\mathrm{W}_\infty}(D_q(X), D_q(Y)) \leq d_{\mathrm{H}}(X,Y)$$

が成立する. ただし, d_H はハウスドルフ距離

$$d_{\mathrm{H}}(X,Y) = \max\left\{\sup_{\boldsymbol{x}\in X}\inf_{\boldsymbol{y}\in Y} d_M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \sup_{\boldsymbol{y}\in Y}\inf_{\boldsymbol{x}\in X} d_M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}$$

である.

例えば, X を真のデータ, Y を X の観測データとした時に, 多少ノイズが乗ったとしてもそのパーシステント図は大きく異ならないため, Y から X の位相的情報を推論する事ができる（図 4）.

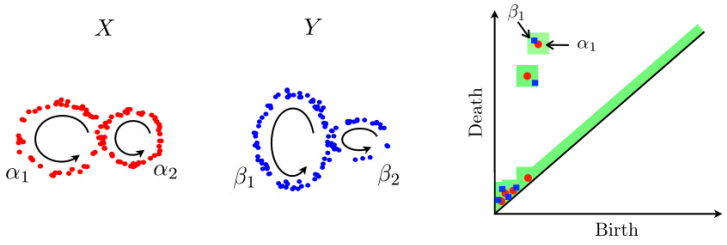


図 4: 二つの集合 X, Y (左) と対応するパーシステント図 (右). 緑の領域は $D_q(Y)$ の $\|\cdot\|_\infty$ での ε 近傍であり, $D_q(X)$ のすべての点が緑の領域に入っていることがわかる.

2. Persistence weighted Gaussian kernel

関数 $k : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $\mathbf{R}^2$ 上の正定値カーネル [3]とする. Moore-Aronszajn の定理から正定値カーネルに付随する再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_k$ がただ一つ存在し, $\mathcal{H}_k$ は関

[2] 対角線集合の多重度を考慮することで $D \cup \Delta$ から $E \cup \Delta$ への全単射は常に存在する.

[3] 集合 Ω 上の正定値カーネル $k : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$ とは (i) 対称関数 $k(x,y) = k(y,x)$ であり, (ii) 任意の $x_1, \cdots, x_n \in \Omega$ に対し行列 $(k(x_i,x_j))_{i,j=1,\cdots,n}$ が半正定値行列になるものとして定義される.

数族 $\{k(\cdot,x) \mid x \in \mathbf{R}^2\}$ を基底に持ち, その内積は $\langle k(\cdot,y), k(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}_k} = k(x,y)$ として与えられる. 正定値カーネル k が可測で有界のとき, 関数 $w : \mathbf{R}^2 \to [0,\infty)$ に対して, Persistence weighted Gaussian kernel (PWGK, [KFH16]) によるパーシステント図 D のベクトル表現を次のように与える[4]:

$$V^{k,w}(D) := \sum_{x\in D} w(x)k(\cdot,x) \in \mathcal{H}_k$$

関数 w は重み関数と呼び, パーシステント図の各点はその位置（主に, 対角線集合からの距離）によって重要度が異なるため, w によってその重要度を調整する. 正定値カーネル k としてガウスカーネル $k_{\mathrm{G}}(x,y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}}$ を選択すると, $V^{k_{\mathrm{G}},w}(D)$ はパーシステント図の各点を正規分布に置き換えたものになる. 加えて, 次の安定性定理を得た.

定理 1 ([KFH17])**.** 正定値カーネル k は可測, 有界, 連続とし, 重み関数 w には次の定数 $B, L > 0$ が任意の $D, E \in \mathcal{D}$ に対し存在するとする:

$$\sup_{D\in\mathcal{D}} \sum_{x\in D} w(x) \le B, \quad \sup_{\gamma: D\cup\Delta\to E\cup\Delta} \sum_{x\in D\cup\Delta} |w(x) - w(\gamma(x))| \le L \sup_{x\in D\cup\Delta} \|x - \gamma(x)\|_\infty .$$

このとき, 写像 $D \mapsto V^{k,w}(D)$ はリプシッツ連続になる.

この定理は命題1と同様に, データの摂動が本統計解析手法に致命的な影響を与えないことを保証している.

参考文献

[CdS10] Gunnar Carlsson and Vin de Silva. Zigzag persistence. *Foundations of computational mathematics*, 10(4):367–405, 2010.

[CdSO14] Frédéric Chazal, Vin de Silva, and Steve Oudot. Persistence stability for geometric complexes. *Geometriae Dedicata*, 173(1):193–214, 2014.

[HNH+16] Yasuaki Hiraoka, Takenobu Nakamura, Akihiko Hirata, Emerson G Escolar, Kaname Matsue, and Yasumasa Nishiura. Hierarchical structures of amorphous solids characterized by persistent homology. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(26):7035–7040, 2016.

[KFH16] Genki Kusano, Kenji Fukumizu, and Yasuaki Hiraoka. Persistence weighted gaussian kernel for topological data analysis. In *International Conference on Machine Learning*, pages 2004–2013, 2016.

[KFH17] Genki Kusano, Kenji Fukumizu, and Yasuaki Hiraoka. Kernel method for persistence diagrams via kernel embedding and weight factor. *arXiv preprint arXiv:1706.03472*, 2017.

[ZC05] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2):249–274, 2005.

[福10] 福水健次. **カーネル法入門—正定値カーネルによるデータ解析**. 朝倉書店, 2010.

[4] より正確には, パーシステント図の重み付き測度表示を Bochner 積分によるカーネル埋め込み (Kernel embedding) で定義される.

マルコフシステムのランダム複素力学系

渡邉天鵬 (Takayuki WATANABE)
大阪大学 大学院理学研究科数学専攻 修士二年

概要

研究の目標は，複素力学系の派生として，写像を選択する方法がマルコフ連鎖のようにランダム性があるランダム複素力学系を考察することである．独立同分布で写像を選択するランダム複素力学系で知られていた結果を一般化し，ある意味で力学系が穏やかになるための十分条件を与える．さらに特殊な状況の時に，無限遠点に収束する確率の関数により，鋭敏な初期値の集合を特徴付けられることを示す．本講演は京都大学の角大輝氏との共同研究に基づく．

1 導入

非定数有理関数全体を Rat とおき，$f \in \mathrm{Rat}$ を自然な方法でリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への正則写像とみる．$\hat{\mathbb{C}}$ は 1 次元複素射影空間であり，実 2 次元の球面と同相である．複素力学系では，初期値 z_0 に繰り返し f を反復合成した時の漸近的な振る舞いを考察する．これは一つの規則で時間発展する現象の抽象化であり，数学に限らない科学全般の数理モデルに頻繁に現れるため，応用上も価値がある研究である．

応用をより強く意識した時，一つの規則だけでなく「複数の選択肢から毎回（ランダムに）一つの手段を選ぶ」ような状況を考える必要があるかもしれない．この状況を数学的に，例えば次のようなランダム力学系として考えたい．m 個の有理関数 $f_1, \ldots, f_m$ を固定し，初期値 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ からランダムに写像 f_i を選んで時間発展するようなランダム力学系を考える．写像を独立同分布で選ぶ力学系は [1] などで研究されてきたが，これを一般化し，**写像 f_i を選んだ後には確率 p_{ij} で f_j を選ぶ** という条件をつけた，マルコフ的ランダム力学系を考察することが本研究の目標である．現在ランダム力学系の研究は急速に発展しているが，独立同分布なシステムに関する研究が多い．本稿は，独立同分布でないランダム力学系を考えているという点で重要である．

本稿では，筆者がマルコフシステムと呼んでいるものを導入し，そのジュリア集合の基本的な性質を 2,3 節で述べる．4 節では力学系がある意味で穏やかになるための十分条件を与える．さらに，多項式のみからなるマルコフシステムに対し，無限遠点に収束する確率の関数を考え，それによるジュリア集合の特徴づけを与える．また，以上の状況を一つの具体例を通して眺め，その様子を観察する．

2　設定と定義

設定 2.1. $m \in \mathbb{N}$ とする．Rat 上の m^2 個の（非負値）測度 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ で，任意の $i = 1, \cdots, m$ に対し $\sum_{j=1}^{m} \tau_{ij}$ が Rat 上で全測度 1 になるものが与えられたとする．ただし，$\tau_{ij} \equiv 0$ かもしれない．$\hat{\mathbb{C}} \times \{1, \cdots, m\}$ 上の点 (z, i) からボレル集合 $B \times \{j\}$ への遷移確率が $\tau_{ij}(\{f \in \mathrm{Rat}; f(y) \in B\})$ であるマルコフ連鎖を考える．

定義 2.2 (マルコフシステム)**.** 設定 2.1 にある測度の組み τ が与えられたとき， S_τ を次で定める．頂点集合を $V := \{1, 2, \cdots, m\}$ ，辺集合を $E := \{(i, j) \in V \times V; \tau_{ij} > 0\}$ とする有向グラフを考える．各有向辺 $e = (i, j) \in E$ に有理関数族 $\Gamma_e := \operatorname{supp} \tau_{ij}$ を対応させる．これらの組み $S_\tau := (V, E, (\Gamma_e)_{e \in E})$ を有理関数からなる $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフシステムという．また，$i, t : E \to V$ を第一成分，第二成分への射影とし，$i(e), t(e) \in V$ を有向辺 $e \in E$ の始点，終点と定める．

例 2.3. $g_1(z) = z^2 - 1$, $g_2(z) = \frac{z^2}{4}$ とし，$f_1 = g_1 \circ g_1, f_2 = g_2 \circ g_2$ とする．f_n に重みを持つディラック測度を δ_n とし，$\tau_{11} = \frac{1}{2}\delta_1$, $\tau_{12} = \frac{1}{2}\delta_1$, $\tau_{21} = \delta_2$, $\tau_{22} = 0$ とする．

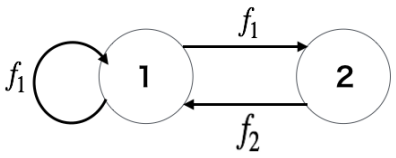


図 1　例 2.3 のグラフ

以下，τ は設定 2.1 で与えられたものとする．定義 2.2 により定まるマルコフシステム S_τ で，そのグラフ (V, E) が（強）連結なものを考える．

定義 2.4.　(i) $e = (e_1, e_2, \ldots, e_N) \in E^N$ が長さ $N \in \mathbb{N}$ の（有限） admissible word であるとは，任意の $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対して，$t(e_n) = i(e_{n+1})$ を満たすことである．この word に対し，$i(e_1), t(e_N)$ を e の始点，終点といい，$i(e), t(e)$ とおく．

(ii) admissible word $e = (e_1, e_2, \ldots, e_N) \in E^N$ に付随する N 個の写像 $f_{e_n} \in \Gamma_{e_n}$ に対し，合成 $f_{e_N} \circ \cdots \circ f_{e_2} \circ f_{e_1}$ の全体を $H(S_\tau)$ とする．これらのうち，$i(e) = i$ となる合成の全体を $H_i(S_\tau)$ とし，さらに $t(e) = j$ となるもの全体を $H_i^j(S_\tau)$ とする．

定義 2.5. 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z_0 で同程度連続であるとは，任意の正の数 ϵ に対して，ある正の数 δ が存在して，z_0 との距離が δ 未満の任意の点 z と任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して，$h(z)$ と $h(z_0)$ との距離が ϵ 未満となることをいう． 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z で局所同程度連続であるとは，z の近傍 U が存在して，その各点 $z_0 \in U$ で同程度連続であることをいう．

(i) 写像族 $H(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ のファトウ集合という．そうでない点の全体を $J(S_\tau)$ とおき，S_τ のジュリア集合

という．

(ii) $i \in V$ に対し，写像族 $H_i(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F_i(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ の i におけるファトウ集合という．そうでない点の全体を $J_i(S_\tau)$ とおき，S_τ の i におけるジュリア集合という．

ファトウ集合・ジュリア集合は力学系を考える上で最も基本的な対象である．実際，ファトウ集合は「力学系が安定的な振る舞いをする初期値」の集合である．すなわち，初期値 z が少しずれても，時間発展した点は少ししかずれない．ジュリア集合はそうではない初期値の集合である．つまり，初期値に対し鋭敏に反応し，誤差を許しても時間発展した時の様子が予測できないことを意味する．後者になることは決して稀ではなく，例えば次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば，そのジュリア集合 $J(S_\tau)$ は非可算集合になる．また，定義から $F(S_\tau) = \bigcap_{i\in V} F_i(S_\tau), J(S_\tau) = \bigcup_{i\in V} J_i(S_\tau)$ が成り立つ．

3　ジュリア集合の性質

この節では，2 節で定義したジュリア集合（ファトウ集合）の基本的な性質を述べる．ジュリア集合 $J(S_\tau)$ を各頂点ごとのジュリア集合 $J_i(S_\tau)$ に分割すると，それぞれの関係が明らかになる．重要なことは，ファトウ集合は「前向き」，ジュリア集合は「後ろ向き」に不変だということである．

記号 3.1. 写像族 $\mathcal{F}$ と集合 X に対して，$\mathcal{F}(X) := \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(X)$, $\mathcal{F}^{-1}(X) := \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(X)$ と定める．これらをそれぞれ $\mathcal{F}X, \mathcal{F}^{-1}X$ と略記することがある．

また，V で添え字づけられた $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i\in V}, (\tilde{L}_i)_{i\in V}$ について $(L_i)_{i\in V} \subset (\tilde{L}_i)_{i\in V}$ とは，任意の $i \in V$ に対し $L_i \subset \tilde{L}_i$ となることをいう．

定義 3.2. (i) $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i\in V}$ が，S_τ 前向き不変であるとは，任意の $e \in E$ に対し $\Gamma_e(L_{i(e)}) \subset L_{t(e)}$ が成り立つことをいう．

(ii) $\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合たち $(L_i)_{i\in V}$ が，S_τ 後ろ向き不変であるとは，任意の $e \in E$ に対し $\Gamma_e^{-1}(L_{t(e)}) \subset L_{i(e)}$ が成り立つことをいう．

補題 3.3. (i) $(F_i(S_\tau))_{i\in V}, (J_i(S_\tau))_{i\in V}$ はそれぞれ S_τ 前向き，後ろ向き不変である．

(ii) 各々 3 点以上を含む $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合たち $(L_i)_{i\in V}$ が S_τ 後ろ向き不変ならば，$(J_i)_{i\in V} \subset (L_i)_{i\in V}$ となる．

(iii) 高々 2 点を除く $J_j(S_\tau)$ の点 z について，任意の $i \in V$ に対し $J_i(S_\tau) = \overline{(H_i^j)^{-1}(z)}$ となる．

(iv) 各辺 $e \in E$ に対し，Γ_e が Rat のコンパクト集合だったとする．このとき，任意の $i \in V$ について，$\bigcup_{i(e)=i} \Gamma_e^{-1}(J_{t(e)}(S_\tau)) = J_i(S_\tau)$ が成り立つ．

注意 3.4. (iii) により，コンピュータを用いてジュリア集合 $J(S_\tau)$ の図を描くことができる．図 2 はこの方法により描画した．また (iv) により，ジュリア集合 J_i は $J_{t(e)}$ の「コピー」たち $\Gamma_e^{-1}(J_{t(e)})$ の和集合であり，そのために「フラクタル」の形になる．正則関数は微分が消え

ない点で共形的 (conformal) であることに注意する.

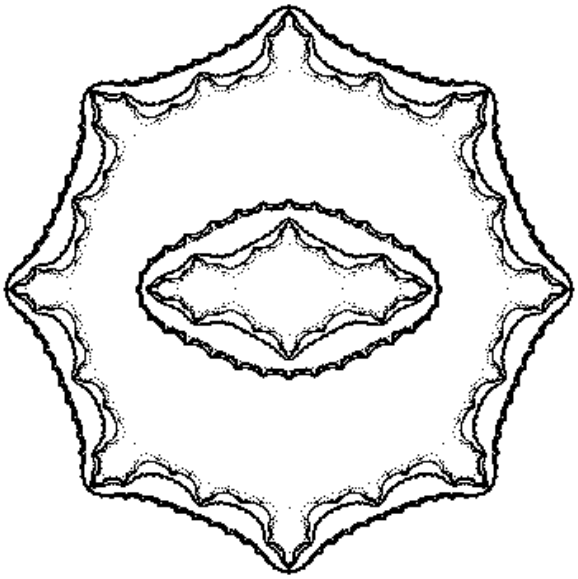


図 2　例 2.3 のジュリア集合

定義 3.5. S_τ が non-elemantary であるとは，任意の $i \in V$ に対し J_i が 3 点以上を含むことをいう.

次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば，そのシステムは non-elementary になる. したがって，非常に多くの場合にシステムは non-elementary である.

補題 3.6. S_τ が non-elementary なら，各 $J_i(S_\tau)$ は孤立点を持たない. したがって，非可算集合になる.

定理 3.7. S_τ が non-elementary なら，任意の $i \in V$ に対して $h \in H_i^i(S_\tau)$ の反発的固定点全体は $J_i(S_\tau)$ 内で稠密である. ここで，有理関数 h の固定点 z が反発的であるとは，z での h の微分の絶対値が 1 より大きいことをいう.

定義 3.8. 集合 $J_{\ker,i}(S_\tau) := \bigcap_{j\in V}\bigcap_{h\in H_i^j(S_\tau)} h^{-1}(J_j(S_\tau))$ をマルコフシステム S_τ の $i \in V$ における核ジュリア集合という. $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) := \bigcup_{i\in V} J_{\ker,i}(S_\tau) \times \{i\} \subset \hat{\mathbb{C}} \times V$ とおく.

定義 3.9. マルコフシフテム S_τ が後ろ向き分離条件を満たすとは，始点を共有する二辺 $e_1, e_2 \in E$ と任意の $f_{e_1} \in \Gamma_{e_1}, f_{e_2} \in \Gamma_{e_2}$ に対し，$f_{e_1}^{-1}(J_{t(e_1)}(S_\tau)) \cap f_{e_2}^{-1}(J_{t(e_2)}(S_\tau)) = \emptyset$ となることをいう. ただし，$e_1 = e_2$ かつ $f_{e_1} = f_{e_2}$ となる場合を除く.

補題 3.10. S_τ が後ろ向き分離条件を満たすとする. さらに，始点 $i \in V$ を共有する二辺 $e_1, e_2 \in E$ と $f_1 \in \Gamma_{e_1}, f_2 \in \Gamma_{e_2}$ が存在して，$e_1 \neq e_2$ または $f_1 \neq f_2$ が成り立つと仮定する. このとき，$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ となる.

4　無限遠点に発散する確率

$\mathbb{Y} := \hat{\mathbb{C}} \times V$ と定める．$\hat{\mathbb{C}}$ の球面距離を用いて $\mathbb{Y}$ 上に距離 $d_{\mathbb{Y}}$ を定めることができ，位相的に $\hat{\mathbb{C}}$ のコピーの非交和と同一視する：$\mathbb{Y} \cong \sqcup_V \hat{\mathbb{C}}$.

定義 4.1. 次の作用素 M_τ を τ の推移作用素という：

$$M_\tau \phi(y,i) := \sum_{j \in V} \int_{\Gamma_{ij}} \phi(\gamma(y), j)\, \mathrm{d}\tau_{ij}(\gamma), \quad (y,i) \in \mathbb{Y}.$$

$\mathbb{Y}$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体の空間に上限ノルムをつけたバナッハ空間を $\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ とする．リースの表現定理より，バナッハ空間としての $\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ の双対空間 $\mathrm{C}(\mathbb{Y})^*$ は，$\mathbb{Y}$ 上の複素ボレル測度全体と同一視できる．

記号 4.2. $\mathbb{Y}$ 上のボレル確率測度全体を $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ とし，$\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y}) \subset \mathrm{C}(\mathbb{Y})^*$ に汎弱位相を入れる．すなわち，$\mu_n \to \mu$ とは，任意の $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して $\mu_n(\phi) \to \mu(\phi)$ となることである．ここで，$\mu \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ に対して，$\mu(\phi) := \int_{\mathbb{Y}} \phi \,\mathrm{d}\mu$, $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ とおく．

補題 4.3. 推移作用素 M_τ に対し，次が成り立つ．

(i) 任意の $\phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して $M_\tau \phi \in \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ である．
(ii) 推移作用素 $M_\tau : \mathrm{C}(\mathbb{Y}) \to \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ は線形であり，その作用素ノルムは 1 である．したがって，M_τ の随伴作用素 M_τ^* は非負値有限測度を非負値有限測度に写し，かつその全測度を保つ．

注意 4.4. 位相空間 $\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ は次のように距離化可能であり，それによってコンパクト距離空間となる：$\mathbb{Y}$ のコンパクト性から，$\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ の可算稠密な関数族 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．そこで，$\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ の距離を $d_0(\mu_1,\mu_2) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_1(\phi_n)-\mu_2(\phi_n)|}{1+|\mu_1(\phi_n)-\mu_2(\phi_n)|}$ によって定める．

定義 4.5. 推移作用素 $M_\tau : \mathrm{C}(\mathbb{Y}) \to \mathrm{C}(\mathbb{Y})$ に対して，$F_{\mathrm{meas}}(M_\tau^*)$ を随伴写像の n 回合成からなる写像族 $\{(M_\tau^*)^n : \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y}) \to \mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が局所同程度連続な点の集合とする．

定義 4.6. 無限アドミッシブルワードとそれに付随する写像列の全体を

$$X(S_\tau) := \{\xi = (\gamma_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{Rat} \times E)^{\mathbb{N}}; \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して} \gamma_n \in \Gamma_{e_n}\}$$

とおく．これらのうち，始点が $i \in V$ の列全体を $X_i(S_\tau)$ とおく．また，有限集合 E に離散位相を入れ，積位相により $X(S_\tau)$ は位相空間とする．

記号 4.7. $\xi = (\gamma_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X(S_\tau)$ に対して，$\gamma_{N,M} := \gamma_N \circ \cdots \circ \gamma_M$ とおく．

定義 4.8. 各 $\xi = (\gamma_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X(S_\tau)$ に対して，写像族 $\{\gamma_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が局所同程度連続である点の全体を ξ のファトウ集合 F_ξ とし，$F^\xi := \{\xi\} \times F_\xi \subset X \times Y$ とおく．ジュリア集合を $J_\xi := Y \setminus F_\xi$, $J^\xi := \{\xi\} \times J_\xi$ と定める．

定義 4.9. $X_i(S_\tau)$ 上のボレル確率測度 $\tilde{\tau}_i$ を次のように定める：

Rat の N 個のボレル集合 $A'_n\,(n=1,\cdots,N)$ と $(e_1,\ldots,e_N)\in E^N$ に対して，$A_n = A'_n\times\{e_n\}$ とする．$\tilde{\tau}_i$ を

$$\begin{aligned}&\tilde{\tau}_i(A_1\times\cdots\times A_N\times\prod_{N+1}^{\infty}(\mathrm{Rat}\times E))\\ &=\begin{cases}\tau_{e_1}(A'_1)\cdots\tau_{e_N}(A'_N) & ,(e_1,\ldots,e_N)\text{ が }i\in V\text{ から始まるアドミッシブルワード}\\ 0 & ,\text{そうでないとき}\end{cases}\end{aligned}$$

となるように定める．ここで，$e=(ij)$ に対し $\tau_e=\tau_{ij}$ である．定め方から $\operatorname{supp}\tilde{\tau}_i = X_i(S_\tau)$ である．

補題 4.10. $p_{ij}=\tau_{ij}(\mathrm{Rat})$ とおき行列 $P=(p_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ を考えると，次が成り立つ．

(i) 各成分が正の横ベクトル $p=(p_1,\ldots,p_m)$ が存在して，$pP=p$ かつ $\sum_{i=1}^m p_i=1$ が成り立つ．

(ii) 上の p について $\tilde{\tau}=\sum_{i=1}^m p_i\tilde{\tau}_i$ とおくと，$\tilde{\tau}$ は $X(S_\tau)$ 上のシフト写像に関して不変である．

定理 4.11 (協調原理の一般化). $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau)=\emptyset$ なら， $F_{\mathrm{meas}}(M^*_\tau)=\mathfrak{M}_1(\mathbb{Y})$ かつ任意の $i\in V$ について $\tilde{\tau}_i$ -a.e. $\xi\in X_i(S_\tau),\mathrm{Leb}(J_\xi)=0$ が成り立つ．

以下本稿では，τ_{ij} たちのサポートは有限集合であり，かつ 2 次以上の多項式のみからなるとする．

定義 4.12. 点 $(z,i)\in\hat{\mathbb{C}}\times V$ に対し，i から始まる無限 admissible word による時間発展が無限遠点に収束する確率を

$$\hat{T}_\infty(z,i):=\tilde{\tau}_i(\{\xi=(\gamma_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X_i(S_\tau)\,;\,d(\gamma_{n,1}(z),\infty)\to 0\,(n\to\infty)\})$$

と定める．また補題 4.10 のベクトル p を固定し，$T_\infty(z):=\sum_{i=1}^m p_i\hat{T}_\infty(z,i)$ と定める．

定義 4.13. $H_i(S_\tau)(z)$ が有界であるような点 z の全体を $K_i(S_\tau)$ とおき，$i\in V$ での最小充填ジュリア集合という．

命題 4.14. 連続関数 $\phi\in\mathrm{C}(\mathbb{Y})$ で，$\phi(\cdot,i)$ のサポートが $K_i(S_\tau)$ と交わらないとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $n\to\infty$ のとき，$M^n_\tau\phi\to\hat{T}_\infty$ となる．

(ii) $M_\tau\hat{T}_\infty=\hat{T}_\infty$ が成り立つ．

(iii) さらに $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau)=\emptyset$ なら， $\hat{T}_\infty$ は $\mathbb{Y}$ 上連続である．

(iv) $\hat{T}_\infty(\cdot,i)$ は $F_i(S_\tau)$ 上で局所定数である．

定理 4.15 (ジュリア集合の特徴づけ). 後ろ向き分離条件を満たすシステム S_τ について，T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続である．また，最小充填ジュリア集合が空でなければ，$i\in V$ でのジュリア集合

$J_i(S_\tau)$ は $\hat{T}_{\infty,\tau}(\cdot, i)$ が局所定数でない点全体と一致する．最小充填ジュリア集合が空なら，T_∞ は値 1 をとる定数関数である．

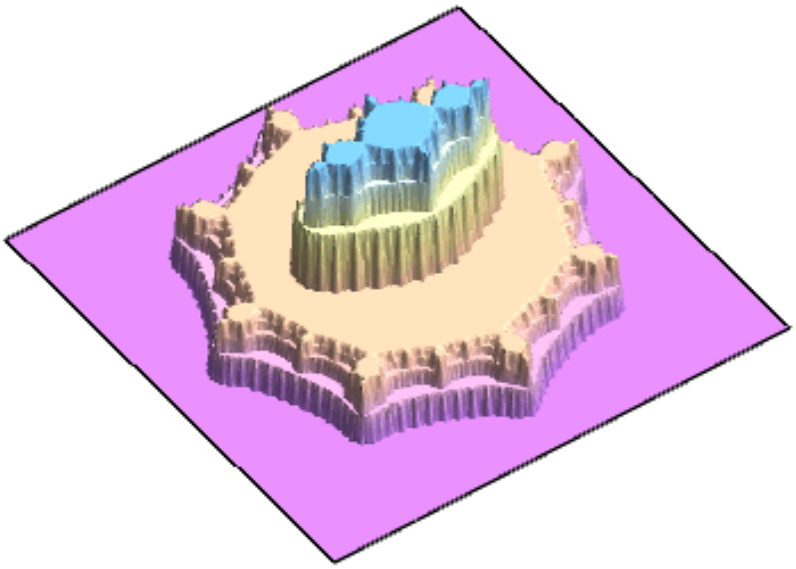


図 3　例 2.3 での，無限遠点に収束しない確率 $1 - T_\infty$ のグラフ

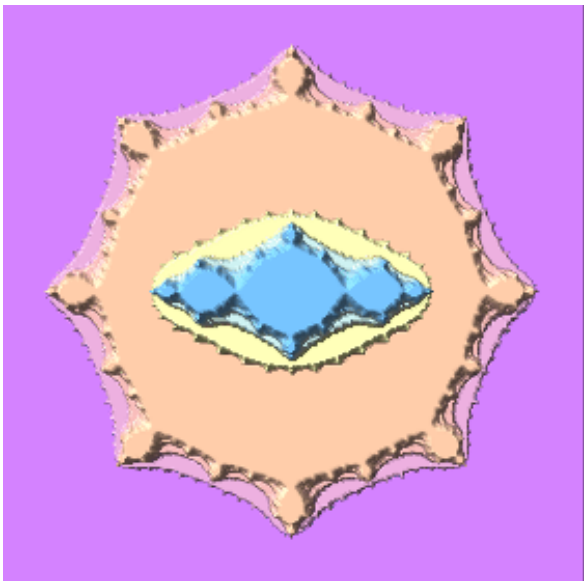


図 4　図 3 を真上から見た様子

参考文献

[1] H. Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 102 (2011), no. 1, 50-112.

グラフ上のボーズ・アインシュタイン凝縮と非因子性, その応用について

九州大学大学院数理学府数理学専攻
博士後期課程２年
神田　智弘 (Tomohiro KANDA)*

1　背景

統計力学は，ミクロな構成単位が従う物理法則から，系全体の従うマクロな法則を導き出す理論である．ミクロな構成単位が古典力学に従うとき古典統計力学，量子力学に従うとき量子統計力学という．数理物理学においては，統計力学で考察される格子上の模型の平衡状態の一意性などが研究対象になる．空間の平衡状態に対応するのが KMS 状態である．KMS 状態とは，KMS(Kubo–Martin–Schwinger) 条件，量子統計力学において熱平衡状態にある系の性質を数学的に記述する条件を満たす状態のことである．

ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) は，超電導や超流動に関連する物理的に非常に特異な現象である．数学的にはワイル CCR 環を用いて理想ボーズ気体においてある条件下で BEC が起こることが Lewis と Pulé[8] によって得られている．理想ボーズ気体における BEC はワイル CCR 環上の状態は準自由状態と呼ばれる特別なもので表現され，[8] では BEC が起こる時の準自由状態は非因子的であることが示唆されている．これは，BEC が起こっているときはある状態の重ね合わせで表せるであろうということである．この場合の具体的な計算方法は，[4] や [8] をみてほしい．他にも 1 粒子のハミルトニアンを変えて BEC が起こるかどうかの研究もある．

グラフ上でも理想ボーズ気体と同様のモデルを考えることができる．グラフにおいてはシュレディンガー方程式に現れるラプラシアンをグラフラプラシアンに変えて，自由粒子の場合と同様の議論を行うことで自由粒子の場合と類似した条件下で BEC が起こることが計算できる [9]．この場合では，ある特別な条件があると BEC が起こっている時の準自由状態は KMS 状態であることがわかり，非因子的であることもわかる．つまり，BEC を起こっている時準自由状態は何らかの KMS 状態の重ね合わせで書ける．

今回は，まずグラフ上の BEC についての結果 [6]，[9] について紹介する．そして，今回の主結果である「BEC を表している状態が非因子的である」ことの証明の概略を述べる．この結果が [7] の主結果である．

2　準備

この章では，ワイル CCR 環と準自由状態について考察する．この準自由状態の特別な場合が BEC に対応している．準自由状態の解析に有用なので [1]，[2]，[3] の結果の記号と定義を用いてワイル CCR 環の定義と準自由状態の定義や成り立つ事実を述べる．

* t-kanda@math.kyushu-u.ac.jp

$\tilde{K}$ を $\mathbb{C}$-線形空間，$\Gamma_{\tilde{K}}$ を反線形形式で $\Gamma_{\tilde{K}}^2 = \mathbb{1}$ を満たすものとする．$\gamma_{\tilde{K}} : \tilde{K} \times \tilde{K} \to \mathbb{C}$ を半双線形形式で，$\gamma_{\tilde{K}}(\Gamma_{\tilde{K}} f, \Gamma_{\tilde{K}} g) = -\gamma_{\tilde{K}}(g, f)$ を満たすとする．$(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の CCR 環 $\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ を $B(f)$, $f \in \tilde{K}$, その共役 $B(f)^*$, $f \in \tilde{K}$ と単位元から生成される $*$-環とし，これらの元は以下の関係式を満たすとする：

1. $B(f)$ は f に対して $\mathbb{C}$-線形,
2. $B(f)^* B(g) - B(g) B(f)^* = \gamma_{\tilde{K}}(f, g)\mathbb{1}$,
3. $B(\Gamma_{\tilde{K}} f)^* = B(f)$.

$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の線形汎関数 φ が条件 $\varphi(A^* A) \geq 0$, $A \in \mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ と $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ を満たす時，φ を状態と呼ぶ．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ に対して，φ に付随する GNS-表現空間 $(\mathfrak{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ が存在する．$\mathrm{Re}\tilde{K} := \{ f \in \tilde{K} \mid \Gamma_{\tilde{K}} f = f \}$ と定義する．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ で任意の $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ に対して $\pi_\varphi(B(f))$ が本質的自己共役であるとき，状態 φ は正則状態と呼ばれる．このとき $W_\varphi(f) = \exp(i\pi_\varphi(B(f)))$, $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ と定義すると $W_\varphi(f)$ はワイル・シーガルの関係式を満たす：

$$W\varphi(f) W_\varphi(g) = \exp(-\gamma_{\tilde{K}}(f, g)/2) W_\varphi(f + g), \quad f, g \in \mathrm{Re}\tilde{K}. \tag{2.1}$$

より一般的には，ワイル CCR 環は式 (2.1) を満たすユニタリ元 $W(f)$, $f \in \mathrm{Re}\tilde{K}$ より生成される普遍的 C*-環として定義され $\mathcal{W}(\mathrm{Re}\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}})$ と書く．(詳しくは [4, Theorem 5.2.8.]．)

$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の状態 φ が以下の等式

$$\begin{aligned} &\varphi(B(f_1) \cdots B(f_{2n-1})) = 0, \\ &\varphi(B(f_1) \cdots B(f_{2n})) = \sum \prod_{j=1}^{n} \varphi(B(f_{s(j)}) B(f_{s(j+n)})), \end{aligned} \tag{2.2}$$

を満たす時，状態 φ は準自由であるという．ここで，$n \in \mathbb{N}$ で和は $s(1) < s(2) < \cdots < s(n), s(j) < s(j+n)$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たす全ての置換 s を走る．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の任意の準自由状態 φ に対して，半双線形形式 $S_{\tilde{K}} : \tilde{K} \times \tilde{K} \to \mathbb{C}$ を

$$S_{\tilde{K}}(f, g) = \varphi(B(f)^* B(g)), \quad f, g \in \tilde{K} \tag{2.3}$$

と定義すると，半正定値で $B(f)$ の満たす関係式 2 より

$$\gamma_{\tilde{K}}(f, g) = S_{\tilde{K}}(f, g) - S_{\tilde{K}}(\Gamma g, \Gamma f), \quad f, g \in \tilde{K}. \tag{2.4}$$

を満たす ([1, Lemma 3.2.])．$\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の任意の準自由状態 φ は式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S を定め，逆に式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S があると，式 (2.3) を満たす準自由状態 φ が一意的に定まり，φ は正則状態であることがわかる ([1, Lemma 3.5.])．なので，式 (2.4) を満たす K 上の半正定値双線形形式 S から定まる $\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態を φ_S と書くことにする．半正定値双線形形式 $(\cdot, \cdot)_S$ より定まる半正定値双線形形式を

$$(f, g)_S := S_{\tilde{K}}(f, g) + S_{\tilde{K}}(\Gamma_{\tilde{K}} g, \Gamma_{\tilde{K}} f), \quad f, g \in \tilde{K} \tag{2.5}$$

で定め，また $N_S := \{ f \in \tilde{K} \mid \|f\|_S = 0 \}$，$\|f\|_S = (f, f)_S^{1/2}$ とする．この半正定値双線形形式で $\tilde{K}/N_S$ を完備化した空間を K と書くことにする．$S_{\tilde{K}}(f, f) \leq \|f\|_S^2$ と $|\gamma_{\tilde{K}}(f, f)| \leq \|f\|_S^2$ より，K 上の有界作用素 S_K を

$$(\xi, S_K \eta)_S = S_K(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in K \tag{2.6}$$

として定義する．

定義 2.1. $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の正則状態 φ が因子的であるとは，表現空間 $(\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi)$ 上の作用素 $W_\varphi(f)$ から生成されるフォン・ノイマン環

$$R_\varphi := \overline{\{\, W_\varphi(f) \mid f \in \mathrm{Re}\tilde{K} \,\}}^{w} \tag{2.7}$$

が因子的である時にいう．つまり，$R_\varphi \cap R'_\varphi = \mathbb{C}\mathbb{1}$．ここで，有界線形作用素の部分集合 $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ に対して，$\overline{A}^{w}$ は A の弱位相による閉包で，$R\varphi'$ は R_φ の元全てと可換になる $\mathfrak{H}_\omega$ 上の有界線形作用素すべてを集めた環である．

補題 2.2. [2, Lemma 2.4.] 作用素 S_K が固有値 $1/2$ を持つことと準自由状態 φ_S が非因子的であることは同値．

2.1 準自由状態の準同値性

まず，表現の準同値性について定義する．

定義 2.3. [2, Definition 6.1.] $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} に対して，π_{S_1} と π_{S_2} をそれぞれの準自由状態に付随する表現とする．この準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} が準同値であるとは，R_{φ_1} から R_{φ_2} へのフォン・ノイマン環としての同型写像 τ が存在して，

$$\tau(W_{S_1}(f)) = W_{S_2}(f), \quad f \in \mathrm{Re}\tilde{K}, \tag{2.8}$$

を満たす時にいう．ここで，$W_{S_1}(f) = \exp(i\pi_{S_1}(B(f)))$，$W_{S_2}(f) = \exp(i\pi_{S_2}(B(f)))$ である．

この時以下が成立する．

定理 2.4. [3, Theorem] $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ 上の準自由状態 φ_{S_1} と φ_{S_2} が準同値であることと，以下が成立することは同値：

1. $\|\cdot\|_{S_1}$ と $\|\cdot\|_{S_2}$ から誘導される位相は同じものである．
2. K を $\|\cdot\|_{S_1}$ もしくは，$\|\cdot\|_{S_2}$ で $\tilde{K}$ を完備化した空間とする．このとき，$S_1^{1/2} - S_2^{1/2}$ が K 上でヒルベルト・シュミットクラスである．ここで S_1 と S_2 は K 上の作用素で式 (2.6) で定義されるものである．

2.2 ワイル CCR 環と $\mathcal{A}(\tilde{K},\gamma_{\tilde{K}},\Gamma_{\tilde{K}})$ の対応

定義 2.5. $\mathfrak{h}$ をあるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分空間とする．$\sigma(f,g) := \mathrm{Im}\langle f,g\rangle$，$f,g \in \mathfrak{h}$ とする．$W(f)$ を関係式

$$W(0) = \mathbb{1}, \quad W(f)^* = W(-f), \quad W(f)W(g) = e^{-\frac{i\sigma(f,g)}{2}} W(f+g) \tag{2.9}$$

を満たすとする．ワイル *CCR* 環 $\mathcal{W}(\mathfrak{h},\sigma)$ は $W(f)$ から生成される普遍的 C*-環である．

ワイル CCR 環上の状態 φ が正則であるとは，任意の f に対して，$\varphi(W(tf))$ が $t \in \mathbb{R}$ について連続である時をいう．φ をワイル CCR 環上の正則状態とすると，GNS 表現空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ 上に関係式 $\pi_\varphi(W(f)) = \exp(i\Psi_\varphi(f))$ を満たす自己共役作用素 $\Psi_\varphi(f)$，$f \in \mathfrak{h}$ が取れる．この Ψ_φ を用いて表現空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ 上に消滅作用素 $a_\varphi(f)$ と生

成作用素 $a^\dagger_\varphi(f)$，$f \in \mathfrak{h}$ を

$$a_\varphi(f) = \frac{\Psi_\varphi(f) - i\Psi_\varphi(if)}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger_\varphi(f) = \frac{\Psi_\varphi(f) + i\Psi_\varphi(if)}{\sqrt{2}} \tag{2.10}$$

と定義する．以下では $a_\varphi(f)$ と $a^\dagger_\varphi(f)$ の φ を省略する．

ワイル CCR 環と正則状態 φ があった時に $\mathcal{A}(\tilde{K}, \gamma_{\tilde{K}}, \Gamma_{\tilde{K}})$ を構成する．まず，$\tilde{K} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ とおく．$f \in \mathfrak{h}$ に対して，正規直交基底による分解が与えられるが，その分解を一つ固定し，$f = \sum f_k e_k$ となるとする．ここで，$f_k \in \mathbb{C}$，$\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は正規直交基底である．この分解に対して，$\overline{f}$ を $\overline{f} := \sum \overline{f_k} e_k$ と定義する．$f_1, f_2 \in \mathfrak{h}$ に対して，$\Gamma_{\tilde{K}}(f_1 \oplus f_2) := \overline{f_2} \oplus \overline{f_1}$ と定義し，

$$\gamma(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2) = \frac{\langle f_1, g_1\rangle - \langle f_2, g_2\rangle}{2}, \quad B(f_1 \oplus f_2) := \frac{a^\dagger(f_1) + a(\overline{f_2})}{\sqrt{2}} \tag{2.11}$$

とおく．すると，$\mathcal{W}(\mathrm{Re}\tilde{K}, \gamma \restriction_{\mathrm{Re}\tilde{K}}) = \mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ となる．

3 グラフ上の BEC について

$G = (VG, EG)$ を無向グラフとする．ここで，VG は G の頂点の集合で，EG は G の辺の集合である．$x, y \in VG$ に対して，x と y がつながっていることを $x \sim y$ と書き，任意の頂点 $x \in VG$ に対して，x の次数を $\deg(x) = |\{\, y \in VG \mid x \sim y \,\}|$，$\deg := \sup_{x\in VG} \deg(x)$ とおく．ここで集合 A に対して，$|A|$ は A の元の個数を表す．ここでは，$\deg < \infty$，連結，可算無限この頂点を持つとする．δ_x，$x \in VG$ を $\delta_x(z) = 0$，$z \neq x$，$\delta_x(x) = 1$ となる $\ell^2(VG)$ のベクトルとする．グラフ G の隣接行列 A_G を $\langle \delta_x, A_G \delta_y\rangle$ が x から y への辺の数となるように定義する．すると，$\sqrt{\deg} \le \|A_G\| \le \deg$ となることがわかり，今の場合は A_G は $\ell^2(VG)$ 上の自己共役な有界作用素となる．グラフ G の次数行列 D_G を $f \in \ell^2(VG)$ に対して，$(D_G f)(x) = \deg(x) f(x)$，$x \in VG$ と定義する．グラフ G 上のグラフラプラシアン Δ_G を $\Delta_G = D_G - A_G$ で定義する．

グラフ G が有限グラフの増大列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持ち，かつ

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \lim_{n\to\infty} G_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|\partial G_n|}{|G_n|} = 0, \tag{3.12}$$

を満たすとする．ここで，$|\partial G_n|$ は G_n から $G \backslash G_n$ へつながる辺を持つ頂点の数を表すものとする．それぞれの有限グラフ G_n に対して，$\omega_n^{(\beta,\rho)}$ を $\mathcal{W}(\ell^2(G_n), \sigma)$ 上の逆温度 β，密度 ρ のグランドカノニカル分布より定まる KMS 状態

$$\begin{aligned}
&\omega_n^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\Big\langle f, (e^{\beta(h_n-\mu_n)} + \mathbb{1})(e^{\beta(h_n-\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1} f\Big\rangle\right),\\
&\omega_n^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \Big\langle g, (e^{\beta(h_n-\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1} f\Big\rangle,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

とする．ここで，$h_n = \|A_{G_n}\|\mathbb{1} - A_{G_n}$，もしくは $h_n = \Delta_{G_n}$ で $\mu_n < 0$ は次の方程式

$$\rho = \frac{1}{|G_n|} \sum_{k\in VG_n} \omega_n^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(\delta_k)a(\delta_k)) = \frac{1}{|G_n|} \mathrm{Tr}\Big((e^{\beta(h_n-\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1}\Big) \tag{3.14}$$

より一意的に定まる数とする．μ_n は化学ポテンシャルと呼ばれている数である．$\overline{\rho}(\beta)$ を

$$\overline{\rho}(\beta) = \sup_{\mu<0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|G_n|} \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{e^{\beta(h_n-\mu)} - \mathbb{1}}\right) \tag{3.15}$$

と定義する．もし任意の δ_x，$x \in VG$ に対して，h が

$$\sup_{x \in VG} \left\langle \delta_x, h^{-1}\delta_x \right\rangle < \infty, \tag{3.16}$$

を満たす時 h を非再帰的であると言う．ベクトル $f = \sum_{x \in VG} f(x)\delta_x \in \ell^2(VG)$ が有限個の $x \in VG$ でしか値を持たない時，f をコンパクト台を持つベクトルということにする．[9, Proposition 1.1 and Theorem 1.1] では，h がグラフラプラシアンの場合に，h が非再帰的，$\overline{\rho}(\beta) < \infty$ と熱力学極限における状態 $\omega^{(\beta,\rho)}$ が式 (3.13) で定義される状態の部分列の極限として表され，

$$\omega^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle f, (e^{\beta(h-\mu_\infty)} + \mathbb{1})(e^{\beta(h-\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle\right) & (0 < \rho \leq \overline{\rho}(\beta)) \\ \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle f, (e^{\beta h} + \mathbb{1})(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle - \frac{\rho - \overline{\rho}(\beta)}{2} |\langle v_G, f\rangle|^2\right) & (\overline{\rho}(\beta) < \rho) \end{cases}, \tag{3.17}$$

$$\omega^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \begin{cases} \left\langle g, (e^{\beta(h-\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle & (0 < \rho \leq \overline{\rho}(\beta)) \\ \left\langle g, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle + (\rho - \overline{\rho}(\beta))\overline{\langle v_G, g\rangle}\langle v_G, f\rangle & (\overline{\rho}(\beta) < \rho) \end{cases}, \tag{3.18}$$

が成立する．ここで，$f, g \in \ell^2(VG)$ はコンパクト台を持つベクトルで，v は A_G に対するペロン・フロベニウスベクトルに対応するもので任意のコンパクト台を持つベクトル f に対して，$\langle v, A_G f\rangle = \|A_G\|\langle v, f\rangle$ となるものである．このような v の存在性は [5, Proposition 4.1] で示されているが，通常 v は $\ell^2(VG)$ の元ではない．今の場合は，全ての $x \in VG$ に対し $v(x) = 1$ となる．$\rho > \overline{\rho}(\beta)$ のときは，BEC が起こっている時に対応し，$\rho \leq \overline{\rho}(\beta)$ のときは BEC が起こっていない時に対応する．

定義 3.6. $\mathcal{C}$ を単位元を持つ C*-環とし，ω を $\mathcal{C}$ 上の状態とする．また，α を $\mathcal{C}$ 上の 1 径数自己同型群とし，$\beta > 0$ とする．ω が α 不変，つまり，任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して

$$\omega(\alpha_t(A)) = \omega(A), \tag{3.19}$$

かつ，任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $I_\beta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < \beta \,\}$ 上で解析的，I_β の閉包 $\overline{I_\beta}$ 上で連続かつ有界であるような複素関数 $F_{A,B}$ が存在して，

$$F_{A,B}(t) = \omega(A\alpha_t(B)), \quad F_{A,B}(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(B)A), \quad A, B \in \mathcal{C} \tag{3.20}$$

を満たすときに，ω を (α, β)-*KMS* 状態であるという．

[6, Theorem 4.5] では，$h = \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ の時に，h が非再帰的であるとすると，ある条件を満たす $\mathfrak{h} \subset \ell^2(VG)$ の任意の元 $f \in \mathfrak{h}$ と $D \geq 0$ に対し，

$$\omega_D(a^\dagger(f)a(g)) = \left\langle g, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle + D\overline{\langle v, g\rangle}\langle v, f\rangle \tag{3.21}$$

で定義される準自由状態が $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の (α, β)-KMS 状態になっていることが示された．ここで, $\alpha_t(W(f)) = W(e^{ith}f)$，$f \in \mathfrak{h}$ である．

3.1 BEC と準自由状態の非因子性

$\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,\{\, e^{ith}\delta_x \mid t \in \mathbb{R}, x \in VG \,\}$ とすると，式 (3.21) により定まる状態 ω_D は $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の KMS 状態である．この状態はとくに正則状態である．2.2 節の対応関係を用いて双線形形式 S_D は

$$\begin{aligned} &S_D(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2) = \omega_D(B(f)^* B(g)) \\ =&\frac{\left\langle f_1, e^{\beta h}(e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_1 \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle f_2, (e^{\beta h} - \mathbb{1})^{-1} g_2 \right\rangle}{2} + \frac{D}{2}\overline{\langle v, f_1\rangle}\langle v, g_1\rangle + \frac{D}{2}\overline{\langle v, f_2\rangle}\langle v, g_2\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

となり，また

$$
\begin{aligned}
&(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2)_D := S_D(f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2) + S_D(\Gamma(g_1 \oplus g_2), \Gamma(f_1 \oplus f_2)) \\
=&\frac{\left\langle f_1, (e^{\beta h}+\mathbb{1})(e^{\beta h}-\mathbb{1})^{-1} g_1 \right\rangle + \left\langle f_2, (e^{\beta h}+\mathbb{1})(e^{\beta h}-\mathbb{1})^{-1} g_2 \right\rangle}{2} + D\overline{\langle v, f_1\rangle}\langle v, g_1\rangle + D\overline{\langle v, f_2\rangle}\langle v, g_2\rangle
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

となる．ここで，$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathfrak{h}$．ここから得られる $\tilde{K} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ の $\|\cdot\|_D$ による完備化した空間 K_D は

$$
K_D = \begin{cases} \mathbb{C}^2 \oplus \overline{\tilde{K}}^0 & (D > 0) \\ \overline{\tilde{K}}^0 & (D = 0) \end{cases} \tag{3.24}
$$

となることが示せる [7, Lemma 4.1]．ここで，$\overline{\tilde{K}}^0$ は $\|\cdot\|_0$ で $\tilde{K}$ を完備化した空間である．さらに K_D 上の作用素 S_D は定義より $D > 0$ の時に $1/2$ の固有値を持ち，$D = 0$ の時は $1/2$ の固有値を持たないことがわかる．とくに $D > 0$ の時が，BEC が起こっている状態，$D = 0$ のときが，BEC が起こっていない時の状態に対応しているので，以下を得る．

定理 3.7. [7, Theorem 4.5] $h := \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ とし，h が非再帰的とする．この時，式 (3.21) で定義される状態 ω_D は，$D > 0$ の時非因子的であり，$D = 0$ の時因子的である．つまり，*BEC* が起こっている時は非因子的であり，*BEC* が起こっていない時は因子的である．

表現の規約分解と同様に状態が非因子的な場合は因子的な状態に分解できる．今の場合は

$$
\omega_D(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h}+\mathbb{1})(e^{\beta h}-\mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} - \frac{D}{2}|\langle v, f\rangle|^2 \right) \tag{3.25}
$$

なので，特に

$$
\begin{aligned}
&\omega_D(W(f)) = \omega_0(W(f)) \exp\left(\frac{D}{2}|\langle v, f\rangle|^2 \right) \\
=&\omega_0(W(f)) \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-iD^{1/2} \frac{s_1 \mathrm{Re}\langle v, f\rangle + s_2 \mathrm{Im}\langle v, f\rangle}{2} \right) e^{-\frac{s_1^2+s_2^2}{2}} ds_1 ds_2
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

とできる．ここで，ω_{s_1,s_2} を

$$
\omega_{s_1,s_2}(W(f)) = \omega_0(W(f)) \exp\left(-iD^{1/2} \frac{s_1 \mathrm{Re}\langle v, f\rangle + s_2 \mathrm{Im}\langle v, f\rangle}{2} \right) \tag{3.27}
$$

と定義すると，これは $\mathcal{W}(\mathfrak{h}, \sigma)$ 上の KMS 状態であり，特に因子的になる [7, Theorem 3.2]．また，$s_1 \neq t_1$ もしくは $s_2 \neq t_2$ が成立している時には準同値でないことがわかる [7, Theorem 3.4]．よって，以下が得られる．

定理 3.8. [7, Theorem 4.5] $D > 0$ のとき ω_D は因子分解

$$
\omega_D = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_{s_1,s_2} d\mu(s_1, s_2) \tag{3.28}
$$

をもつ．また ω_{s_1,s_2} は因子的であり，互いに準同値でない．

注意 3.9. 以上の議論と同様に $\mu < 0$ に対して

$$\omega(W(f)) := \exp\left(-\frac{\langle f, (e^{\beta(h-\mu)}+\mathbb{1})(e^{\beta(h-\mu)}-\mathbb{1})^{-1}f\rangle}{4}\right) \tag{3.29}$$

となる ω に対しても因子性が導かれる．ここで $h = \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ で，$f \in \mathfrak{h}$ である．

参考文献

[1] H. Araki, M. Shiraishi: On quasifree states of the canonical commutation relations. I, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **7** (1971/72), 105–120.

[2] H. Araki: On quasifree states of the canonical commutation relations. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **7** (1971/72), 121–152.

[3] H. Araki, S. Yamagami: On quasi-equivalence of quasifree states of the canonical commutation relations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), no. 2, 703–758

[4] O. Bratteli, D. Robinson: Operator algebras and quantum statistical mechanics II, 2nd edition (Springer, 1997.)

[5] F. Fidaleo, D. Guido, T. Isola: Bose-Einstein condensation on inhomogeneous amenable graphs. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **14** (2011), no. 2, 149–197.

[6] F. Fidaleo: Harmonic analysis on inhomogeneous amenable networks and the Bose-Einstein condensation. *J. Stat. Phys.* **160** (2015), no. 3, 715–759.

[7] T. Kanda: Remarks on BEC on graphs. *Rev. Math. Phys.* **29** (2017), no.8, 1750024, 19pp.

[8] J. T. Lewis, J. V. Pulè: The equilibrium states of the free Boson gas. *Comm. Math. Phys.* **36** (1974), 1–18.

[9] T. Matsui: BEC of free bosons on networks. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006), no. 1, 1–26.

粘性項を変形した流体方程式に対する大域解の有界性と Energy Cascade の考察

岸本 展 (Kishimoto Nobu)* , 斉木 吉隆 (Saiki Yoshitaka)† ,
○中井 拳吾 (Nakai Kengo)‡ , 米田 剛 (Yoneda Tsuyoshi)§

1 導入

我々は, Navier–Stokes 方程式の粘性項を一般化した次の方程式を考察する.

$$\mathrm{GNS}\begin{cases}\partial_t v+\nu P_{>\Lambda}(-\Delta)^{A/2}v+(v\cdot\nabla)v+\nabla\pi=0, \quad \nabla\cdot v=0, & \mathbb{T}^3\times(0,\infty),\\ v\big|_{t=0}=v_0 \quad \text{with } \nabla\cdot v_0=0, & \mathbb{T}^3.\end{cases}$$

ただし, $\nu>0$: 動粘性係数, $\pi(x,t)$: 圧力, $v(x,t)=(v_1(x,t),v_2(x,t),v_3(x,t))$: 速度ベクトルとする. また, $\xi\in\mathbb{R}^3$, $\Lambda\in[1,\infty)$ に対して, $P_{>\Lambda}:=\mathcal{F}^{-1}\chi_{\{|\xi|>\Lambda\}}\mathcal{F}$, $(-\Delta)^{A/2}:=\mathcal{F}^{-1}|\xi|^A\mathcal{F}$ と定義する. ただし, χ を定義関数, $\mathcal{F}$ をフーリエ変換とした. $P_{>\Lambda}$ は波数空間上でのカットオフ関数に相当する. 特に, $\Lambda=0$ かつ $A=2$ の場合は通常の Navier–Stokes 方程式に相当する. 我々は $A>2$ の場合, つまり超粘性の場合を考える. また, $\Lambda\in(1,\infty)$ の場合を考える. このように一部の周波数に対して粘性の効果が入るように一般化した粘性を部分粘性と呼ぶこととする.

この方程式に関して, Lions [4] は, $A\geq 5/2$, $\Lambda=0$, かつ $s>A$ に対して $v_0\in H^s$ のとき, 時間大域的な古典解が存在することを証明した. また, Elgindi, Hu と Šverák [2] らは, 2 次元の場合に関して一部の周波数に対して粘性を入れた場合についての解の一意性を証明した.

一方で Navier–Stokes 方程式は, 乱流を含めた流体運動を記述できることが知られている. 特に, 3 次元乱流では外力によってエネルギーが注入されると, 流体要素がねじられたり引き伸ばされたりすることによってより小さなスケールの運動を引き起こす. つまり, 注入されたエネルギーが小さなスケールに遷移することが知られている [[5]-pp.66]. このエネルギーが遷移する現象はエネルギーカスケードと呼ばれている. そして, ある程度小さいスケールまでエネルギーが遷移すると, 最終的に粘性などの効果によりそのエネルギーが消費される.

また, 波数 $k\in\mathbb{N}$ に関するエネルギー関数 $E(k,t)$ を以下で定義する.

$$E(k,t):=\frac{1}{2}\int_{D_k}\left|\mathcal{F}_{[v]}(K,t)\right|^2 dK.$$

ただし, 積分範囲は $D_k:=\{K\in\mathbb{R}^3 | k-0.5\leq|K|<k+0.5\}$ と定義する. このとき実際の十分に発達した乱流について, エネルギーを注入するスケールと消費する領域の間 (慣性領域と呼ぶ) では粘性に依存しないという仮定 [3] と次元解析などを用いると次のべき則が導かれることが知られている.

$$E(k,t)\approx Ck^{-5/3} \quad {}^\forall t>0.$$

*博 (理) 京都大学 数理解析研究所（〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町）
†博 (数理科学) 一橋大学 商学研究科（〒 186-8601 東京都国立市中 2-1）
‡東京大学大学院数理科学研究科（〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1, E-mail: knakai@ms.u-tokyo.ac.jp）
§博 (数理科学) 東京大学大学院数理科学研究科（〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1）

ただし, C は k に依存しない定数とする. このべき則はコルモゴロフの 5/3 則と呼ばれている [3]. 実際の乱流や Navier–Stokes 方程式の直接数値計算によって得られた解に対してエネルギースペクトルが 5/3 則に従うことが確認されている [6].

エネルギーカスケード現象は任意の速度場の時間発展の過程で観測されるわけではない. 例えば, $\nu = 0$ とした Euler 方程式の定常解として知られている Arnold–Beltrami–Childress Flow (ABC-Flow) [1] は GNS の定常解である. つまり, ABC-Flow を初期値とする速度場を時間発展させたときは, エネルギーカスケードしない.

一方でコルモゴロフの仮説において慣性領域での粘性の効果を無視することなどを持ちいて 5/3 則を導いていた. しかし, 実際 Navier-Stokes 方程式は慣性領域を含めてすべての波数に粘性の効果が入っている. そこで我々はエネルギーカスケードの 5/3 乗則の根源を解明する手がかりを探るために, まずは慣性領域の粘性の効果を除去した GNS について数学解析として大域解の存在証明をした. また, 数値計算を用いてまずはエネルギー関数 $E(k,t)$ を考察した.

2 数学結果

次のように $A = 5/2$ かつ $\Lambda \in [1, \infty)$ の場合について, 任意の初期値に対する時間大域的な一様有界性を証明した.

定理. *$A = 5/2$, $\Lambda \in [1, \infty)$ とする. 任意の $v_0 \in H^1$ に対して, 積分方程式の解 v が次の関数クラスにおいて一意に時間大域解的に存在する:*

$$C_b([0,\infty); H^1) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^{9/4}) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{T}^3),$$

ただし, C_b は有界な連続関数の空間を表す. また, 次の不等式が成立する.

$$\|v\|^2_{L^\infty(0,\infty;H^1)} \le C \left(\|v_0\|^2_{H^1} + \Lambda^2 \|v_0\|^2_{L^2} + \Lambda^{\frac{9}{4}} \|v_0\|^3_{L^2} \right) e^{C\|v_0\|^2_{L^2}},$$

ただし, $C > 0$ は Λ, v_0 とは独立した値とする. さらに, $\|P_{>\Lambda} v(t)\|_{H^1} \to 0$ $(t \to \infty)$ が成立する.

3 数値計算結果

GNS に対する直接数値計算で得られた速度場におけるエネルギースペクトルを考察する. 直接数値計算では, 境界を 3 次元周期境界とし, 切断波数は $(269 * 2 + 1)^3$ としてフーリエスペクトル法を用いる. ただし, 離散フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) というアルゴリズムを利用するが, FFT により現れるエイリアスエラーは 3/2 ルールに基づいて除去する. また, 4 次精度の Runge–Kutta 法を基本的には 1/800 秒刻みで時間発展をさせる. ただし, エネルギーの総和 ($\sum E(k,t)$) が発散する傾向にある場合は適宜時間刻みを細かくするアダプティブメッシュを用いる. 初期条件は適当ななめらかな速度場とし, 定常乱流を得るために $|K| < 2$ を満たすいくつかの波数 $K \in \mathbb{N}^3$ におけるフーリエ係数が下記の等式が整理するように外力を入れる.

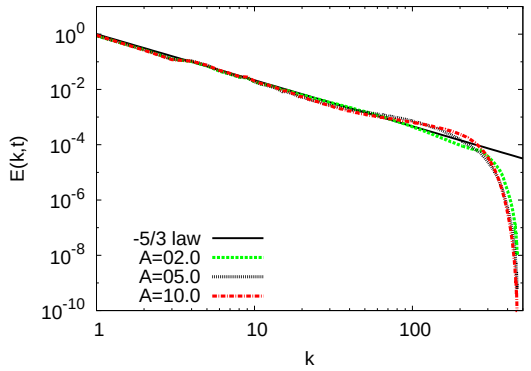
$$\mathcal{F}_{[v]}(K,t) = \mathcal{F}_{[v]}(K,0) \quad (|K| < 2).$$

この直接数値計算の方法を用いて, 次の表のように $A = 2, 5, 10$ かつ $\Lambda = 0$ の場合と $A = 5$ かつ $\Lambda = 100$ の場合について $E(k,t)$ を計算をした.

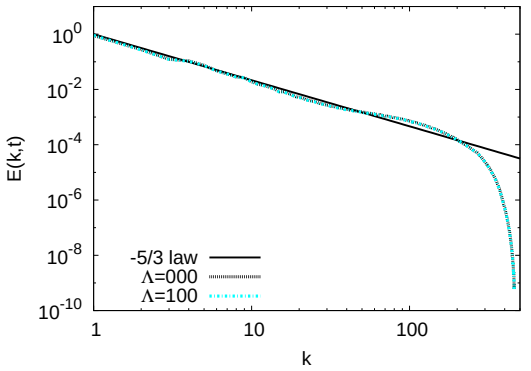
	$\Delta^{A/2}$	Λ	ν	viscosity term
図 1(a)	$\Delta^{2/2}$	0	0.15×10^{-3}	usual Navier–Stokes
図 1(a)(b)	$\Delta^{5/2}$	0	0.40×10^{-10}	hyperviscosity
図 1(b)	$\Delta^{5/2}$	100	0.40×10^{-10}	partial hyperviscosity
図 1(a)	$\Delta^{10/2}$	0	0.80×10^{-22}	hyperviscosity

表 1: 直接数値計算するパラメータの値

ただし, $E(k,t)$ の計算は渦レイノルズ数やエネルギー散逸率などの変動がほとんどなくなる $t = 10$ から $t = 30$ の値の時間平均値を取ることとする.



(a) $A = 2, 5, 10$ の場合の $E(k,t)$ をプロットした. ただし, $\Lambda = 0$ は固定した.



(b) $\Lambda = 0, 100$ の場合の $E(k,t)$ をプロットした. ただし, $A = 5$ は固定した.

図 1: 各パラメータ A, Λ に対するエネルギースペクトル $E(k,t)$ を両対数メモリでプロットした. ただし, 各エネルギースペクトルは $t = 10$ から $t = 30$ の値の時間平均をとって得たものである. また, 実線はコルモゴロフの 5/3 則を表す.

図 1(a)(b) のいずれの場合も, 慣性領域 (およそ波数 $k \in [10, 100]$ 程度の領域) では 5/3 則の線に沿っていることが見て取れる. つまり, 部分粘性や超粘性の場合についても通常の Navier–Stokes 方程式と同様にコルモゴロフの 5/3 則におよそ従っていることがわかる.

さらに, 外力をなくした場合の $(A, \Lambda) = (2, 0), (5, 100)$ について $E(k,t)$ を計算をした. ただし初期値は, 各々のパラメータ (A, Λ) に対して上記の方法で低周波領域 $|K| < 2$ にエネルギーを注入して時間発展させて得た速度場を初期値として計算した.

その結果, $(A, \Lambda) = (5, 100)$ の場合も, およそ $(A, \Lambda) = (2, 0)$ の場合と同様に時間減衰していることが見て取れた. このことから, 高周波にのみ粘性を入れた GNS でも低周波部分のエネルギー減衰は, 通常の Navier–Stokes 方程式と同様に引き起こされていることがわかる.

4 結論

GNS について, 定理では任意の初期値に対する時間大域的な有界性が証明された. この定理より速度の高周波成分は, 低周波成分の粘性非粘性にかかわらず有界性が保証されていることがわかる. 一方で, 数値計算結果としていくつかの初期値についてエネルギーカスケードを引き起こし, エネルギーが減衰することが得られた. これに対して, ABC-Flow の速度場のように時間発展させたときに, エネルギーカスケードを引き起こさない初期値が存在する. つまり, GNS においてエネルギー減衰をいうためには, 少なくとも初期値をエネルギーカスケードするか否かで分類する必要があることがわかった.

また，これらの結論から通常の Navier–Stokes 方程式に対して次のことが考えられる．Navier–Stokes 方程式の解の L^2 ノルムの減衰性は示されるが，H^1 ノルムの減衰性などは示されていない．また，L^2 ノルムの減衰性を示すときは，Navier–Stokes 方程式と速度 v との L^2 内積を取ることで得られるエネルギー不等式によって示される．しかし，今回見たようにエネルギーカスケードするならば，高周波だけの粘性の効果でエネルギーの時間減衰がいえるはずである．つまり，初期値をエネルギーカスケードするか否かで分類できた場合，従来のエネルギー不等式よりシャープな空間での減衰性が言える可能性があることが示唆される．

参考文献

[1] T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A. M. Soward. Chaotic streamlines in the abc flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 167:353–391, 1986.

[2] T. Elgindi, W. Hu, and V. r. Šverák. On 2d incompressible Euler equations with partial damping. *Comm. Math. Phys.*, 355(1):145–159, 2017.

[3] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 30:301–305, 1941.

[4] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.

[6] K. R. Sreenivasan. On the universality of the Kolmogorov constant. *Physics of Fluids*, 7(11):2778–2784, 1995.

Young tableauを用いたrooted treeの数え上げ

石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA)
お茶の水女子大学 理学部数学科

概 要

n 頂点のラベル付き根付き木の個数はケイリーの公式により n^{n-1} で与えられることが知られているが、ラベルのない根付き木の個数を与える明示公式は未だ得られていない。本稿では、“ある条件”を満たす根付き木の個数を与える明示公式を Young tableau の数え上げを用いて求める。

1 導入

根つき木は計算機科学において重要なデータ構造である．特に二分木は基本的なデータ構造として有名だが，AI の発達や IoT の普及などにより情報化が進む現代では，より複雑なデータ構造が必要とされている．また，データ構造におけるアルゴリズムを考える上で，その構造の数学的特徴を捉えることは必要不可欠である．既に，根つき木やラベルつき根つき木の数え上げ母関数の関係式は得られているが，これらは明示的ではない [1] [2]．本稿で述べる根つき木“finely-bounded tree” は，その木にセル内の数が重複しない Young tableau の組が対応するように定義することで数え上げ明示公式を導出した．さらに，セル内の数の重複を許した場合にも同様に数え上げ公式が得られれば，一般の根つき木の数え上げ明示公式が得られることが期待される．

2 準備

rooted tree (根つき木) とは，唯一つ区別される頂点をもつ tree (木グラフ) のことである．区別される頂点を **root (根)** と言い，本稿では木と言えば rooted tree を指すこととする．

木の数え上げは“ グラフの同型”による同値類の数え上げである．木の同型の定義は以下の通りである:

Definition 1. (根つき木の同型) $T=(V,E),\ T'=(V',E')$ はそれぞれ $R\in V,\ R'\in V'$ を根とする根付き木とする．このとき，

$$T,T'\text{は同型} \underset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}\,\phi : V\to V' : \text{bij s.t.}\{u,v\}\in E \Rightarrow \{\phi(u),\phi(v)\}\in E',\ \phi(R)=R'$$

この定義は以下のように捉えることができる:

Lemma 1. $T=(V,E),\ T'=(V',E')$ はそれぞれ $R\in V,\ R'\in V'$ を根とする根付き木とする．また，

$$C_T=\{T\text{ において, }R\text{ に隣接する点を根とし, }R\text{ と }R\text{ に接続している辺を除去したグラフ }\}$$

とおく．このとき，

$$T, T' \text{は同型} \iff for\ {}^{\forall}c \in C_T\ {}^{\exists}\varphi : C_T \to C_{T'} : \text{bij s.t. } c \simeq \varphi(c)$$

ここで，後に用いる整数の分割，Young diagram，Young tableau の定義を述べておく．

Definition 2. (整数の分割) ある整数 n に対し，$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)$ $(\lambda_i \in \mathbb{Z})$ が以下の 2 つの条件を満たすとき，λ は n の**分割 (partition)** であるという．

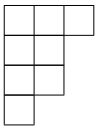
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$

また，このとき $\lambda \vdash n$ と書き，k を分割 λ の**長さ**という．

$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k) \vdash n$ のとき，$\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) = (i^{m_i})$ $(m_i = \#\{j|\lambda_j = i\})$ とも表す．ここで，各 i に対し m_i が 0 または 1 のとき，λ は **strict partition** という．

Definition 3. (Young diagram, Young tableau) $\lambda = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k) \vdash n$ に対し，$i = 1, 2, \cdots k$ 行目に λ_i 個のセルを左端を揃えて並べた図形を **Young diagram** という．また，各セルに数を入れたものを **Young tableau** という．

Example 1. $\lambda = (3221) = 1^1 2^2 3^1 \vdash \iff$



3 主結果

$T = (V, E)$ を木とする．$v \in V$ について，

$$d(v)$$

を根から頂点 v まで経由する辺の最少数とし，これを v の**深さ**という．また，

$$\max\{d(v)|v \in V\}$$

を T の**高さ**という．T の高さを h とし，$i = 1, 2, \cdots, h$ に対し，

$$\begin{cases} V_i = \{v \in V | d(v) = i\} \\ E(V_{i-1}, V_i) = \{\{u, v\} \in E | u \in V_{i-1}, v \in V_i\} \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$T_i = (V_{i-1} \cup V_i, E(V_{i-1}, V_i))$$

を V_{i-1} の頂点全てを根とする根つき木の組とする．また，接続する辺がただ 1 つの頂点を**葉**という．ここで，本稿にて数え上げる対象は以下の木である：

Definition 4. (finely-bounded tree) 高さ h の根つき木 T が以下の条件を満たすとき，T を **finely bounded tree** という*:*

(1) T の任意の葉 v に対し $d(v) = h$,

(2) T_h の任意の 2 つの根つき木は互いに非同型.

特に T が有限グラフであり，正整数列 $\underline{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ に対し

$$|V_i| = r_i \quad (i = 1, 2, \cdots, h)$$

となるとき，T を $\underline{r}$**−finely bounded tree** という.

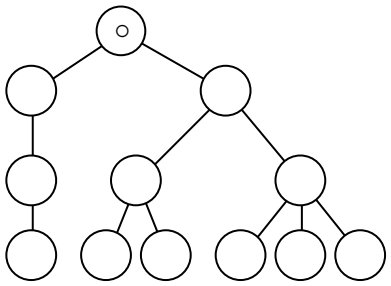


Figure 1: 根つき木 T

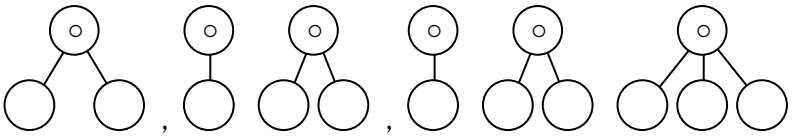


Figure 2: T_1, T_2, T_3

Figure 1 の木 T の高さは 3 で，任意の葉は V_3 に属する．さらに，T_3 は 3 つの互いに非同型な根つき木からなる (Figure 2)．よって，これは (2,3,6)-finely-bounded tree である.

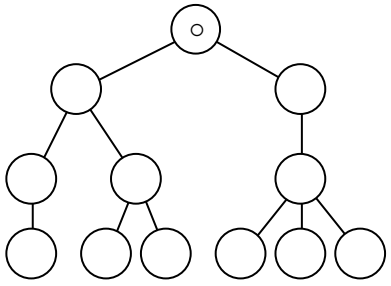


Figure 3: Figure 1 と非同型な根つき木 T'

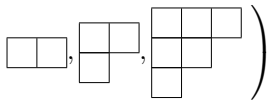
それでは，表題にある Young tableau と木の関係を見ていく．T_i は高さ 1 の根つき木の組である．その各根つき木の葉の個数を非増加に並べることにより，T_i には $|V_i|$ の長さ $|V_{i-1}|$ の分割

$$\lambda^{(i)}$$

が対応する．これより，T に対応する h 個の分割の列

$$\lambda(T) = (\lambda^{(i)})_{i=1}^{h}$$

が得られる．例えば Figure 1 の木 T について，T_1, T_2, T_3 は Figure 2 のようになる．これは分割列 $\lambda(T) = (2, 21, 321)$ に対応する．$\lambda(T)$ を Young diagram を用いて表すと，

$\lambda(T) =$ 

となる．この λ を，高さ h の木の集合から h 個の Young diagram の組の集合への写像と見ると，この写像は全射であるが単射ではない．

これは，Figure 1 の木 T に対応する分割列 $\lambda(T)$ は Figure 3 の木 T' に対応する分割列でもあることからも明らかである．以降，数え上げを行うにあたり，finely-bounded tree 全体の集合と“ある条件”を満たす Young tableaux の列全体の集合との間の全単射を構成することが目標である．今，木 T を

$$\bigcup_{i=1}^{h} T_i = T$$

と表記することにより，根つき木における“filtration”を以下のように定義できる．

Definition 5. (根つき木の filtration) T を高さ h の根つき木とする．$\mathcal{F}_i$ を

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{h-i}^{h} T_i$$

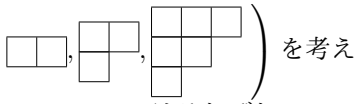
とおく．このとき，$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots \mathcal{F}_h$ に関する包含列

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_h$$

を T の **filtration** と呼ぶ.

我々は木に Young tableaux の組を対応させるのだが，その手続きを Figure 1 の例を用いて説明する．

Figure 1 の木 T について，

(1) $\lambda(T) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}) =$  を考える．また，Figure 2 の根つき木を左から $t_1, t_2, \cdots t_6$ とおくと，T_1, T_2, T_3 はそれぞれ

$$T_1 = (t_1), T_2 = (t_2, t_3), T_3 = (t_4, t_5, t_6)$$

となる．

(2) $\mathcal{F}_1$ は $\lambda^{(3)}$ に対応しており，T_3 の要素 t_4, t_5, t_6 はそれぞれ λ_3 の第 3,2,1 行に対応する．また，各 i 行のセルは $C_{t_{7-i}}$ の各要素に対応する．今，$C_{\mathcal{F}_1} = V_3$ の任意の 2 つのグラフは互いに同型であるから，$\lambda^{(3)}$ の全てのセルには同じ数を入れる:

1	1	1
1	1	
1		

.

(3) $\mathcal{F}_2$ は $\lambda^{(2)}$ に対応しており，T_2 の要素 t_2, t_3 はそれぞれ $\lambda^{(2)}$ の第2,1行に対応している．Lemma 1 より，$C_{\mathcal{F}_2}$ の任意の 2 つの木は非同型であるから，$\lambda^{(2)}$ の各セルにはそれぞれ相異なる数を入れる:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

(4) $\mathcal{F}_3$ は $\lambda^{(1)}$ に対応しており，t_1 は第 1 行に対応している．Lemma 1 より，$C_{\mathcal{F}_3}$ の任意の 2 つの木は非同型であるから，$\lambda^{(1)}$ の各セルにはそれぞれ相異なる数を入れる:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}.$$

(5) 以上より，根つき木 T に対応する Young tableaux の組 $\Lambda_{(T)}$ は以下のようになる:

$$\Lambda_{(T)} = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \right).$$

このように定めた Young tableaux に以下の操作を施しても，それらに対応する木は元の木と同型な木であることがわかる:

- セルの個数が等しい任意の 2 つの行の入れ替え．
- 同行内の任意の 2 つのセルの入れ替え．
- セル内の数が等しい任意の 2 つのセルの入れ替え．

逆に，セル内の数が互いに異なる異行内の 2 つのセルの入れ替えを施せば，その Young tableaux に対応する木は元の木と非同型な木であると言える．例えば，上で定めた Young tableaux の組 $\Lambda_{(T)}$ に対し，Figure 3 の木 T' に対応する Young tableaux の組 $\Lambda_{(T')}$ は

$$\Lambda_{(T')} = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \right)$$

となる．ここで $\Lambda_{(T)}, \Lambda_{(T')}$ を比較すると，$\Lambda_{(T')}$ の第二成分は $\Lambda_{(T)}$ の第二成分の 2 と 3 を入れ替えたものである．2,3 は互いに異なる行に属しており，かつ $2 \neq 3$ であるから，T と T' は Lemma 1 から非同型であることがわかる．これらの性質を用いて，正整数列 $\underline{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ に対し，$\underline{r}$-finely bounded tree の数え上げを考える．

$$\begin{cases} \mathrm{Tab}_{r_i} = \{r_i\text{次の Young tableaux}\} \\ \underline{r}\text{−Tab} = \{(s_1, s_2, \cdots, s_h) | s_i \in \mathrm{Tab}_{r_i}, i = 1, 2, \cdots, h\} \end{cases}$$

とすれば，上の 3 つの操作により生成される $\underline{r}$-Tab 上の同値関係を $\sim$ で表せば，1 対 1 対応

$$\{\underline{r} - \text{finely bounded trees}\}/\text{同型} \leftrightarrow \underline{r} - \mathrm{Tab}/\sim$$

が得られる．これにより，以下で定める “tree tableau” は $\underline{r}$-Tab $/\sim$ の代表系の元となり，この定義は木に対応する Young tableau の標準的な取り方を与えている．

Definition 6. (tree tableau) Y を Young tableau，$Y(i, j)$ を Y の i 行 j 列のセル内の数とする．Y が以下の条件を満たすとき，Y は **tree tableau** であるという．

- 任意の i に対し，$Y(i,j) \leq Y(i,j+1)$.
- $i, i+1$ 行内のセルの個数が等しいとき，$Y(i,1) \leq Y(i+1,1)$.

以上の議論から，木の数え上げは tree tableaux の組の数え上げに帰着されることがわかる．これにより，以下の $\underline{r}$-finely bounded tree の数え上げ明示公式が得られた．

Theorem 1. $SP_k(n)$ を長さ k の n の strict partitions の集合，$P_k(n)$ を長さ k の n の分割の集合とする．高さ h，正整数列 $\underline{r} = (r_i)_{i=1}^h$ が与えられた $\underline{r}$-finely bounded tree の総数は以下で与えられる．

$$|SP_{r_{h-1}}(r_h)| \prod_{k=1}^{h-1} \sum_{\lambda \in P_{r_{k-1}}(r_k)} \frac{1}{m_\lambda!} \binom{r_k}{\lambda}.$$

ただし，$m_\lambda! = m_1! m_2! \cdots$，$\binom{r_k}{\lambda}$ は多項係数である．

Proof. finely-bounded の定義より，T_h に対応する分割は strict partition である．また，$C_{\mathcal{F}_1} = V_h$ で，任意の 2 つの木 (頂点) は明らかに同型であるから，$\mathcal{F}_1$ に対応する tree tableau は，その strict partition に対応する Young diagram の全てのセルに同じ数を入れたものである．従って，$\mathcal{F}_1$ の tree tableau は $|SP_{r_{h-1}}(r_h)|$ 通り存在する．

$C_{\mathcal{F}_2}$ $(= \mathcal{F}_1 = T_h)$ の任意の 2 つの根つき木は， finely-bounded tree の定義より互いに非同型である．よって，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau 内の数は全て異なる．これより，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau は

$$\sum_{\lambda \in P_{r_{h-2}}(r_{h-1})} \frac{1}{m_\lambda!} \binom{r_{h-1}}{\lambda}.$$

通り存在する．

また，$\mathcal{F}_2$ の tree tableau 内の数が全て異なることから，$C_{\mathcal{F}_2}$ の任意の 2 つの根つき木は互いに非同型である．よって，$\mathcal{F}_3$ に対応する tree tableau 内の数も全て異なる．

以降同様に議論できるので，各 $\mathcal{F}_k$ に対応する tree tableau の総数の積を取れば，求める $\underline{r}$-finely bounded tree の総数となる． □

参考文献

[1] 田澤新成，グラフの数え上げ　母関数を礎にして，共立出版, 2014.

[2] M.Aigner, Combinatorial Theory, Springer-Verlag, 1979.

初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の時間発展による単峰性

北海道大学大学院理学院 数学専攻
植田 優基 (Yuki UEDA)*

本研究は, 長谷部 高広氏 (北海道大学) との共同研究である (詳細は [6] による).

1 単峰性と強単峰性

確率論や数理統計学で重要な性質の一つとして, 分布の単峰性というものがある.

定義 1.1. 1 次元確率分布 μ がモード $c \in \mathbb{R}$ の単峰であるとは, μ が以下のように表示されることをいう.

$$\mu = \mu(\{c\})\delta_c + f(x)dx,$$

ただし $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $(-\infty, c)$ 上で単調非減少, (c, ∞) 上で単調非増加な関数である. 値 $\mu(\{c\})$ は 0 となることもある. また, モードを指定せず単に μ が単峰であるということもある. 更に, 集合 T を $[0, \infty)$ の部分集合, $t \geq 0$ に対して X_t を確率分布 μ_t に従うある確率空間で定義された確率変数としたとき, 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が T で単峰であるとは, 確率分布 μ_t が $t \in T$ で単峰であることをいう.

分布の単峰性は, 数理統計学の視点から見れば, 分布の散布度, 歪度などの分布に現れる統計的特性を統計指標で要約するために必要な性質として, 確率論の視点から見れば, L 分布 (自己分解可能分布) のもつ著しい性質として現れてくる. 例えば, ある確率空間上で定義された 1 次元ブラウン運動は全ての時刻で単峰である. なぜなら, ブラウン運動をなす分布族は正規分布族であり, 正規分布 $N(0, t)$ は全ての $t > 0$ でモード 0 の単峰確率分布となるからである. なおブラウン運動は安定過程, 自己分解可能過程, そしてレヴィ過程 (無限分解可能過程) と呼ばれる広いクラスの確率過程の代表的な例である. より一般に安定過程, 自己分解可能過程やレヴィ過程の単峰性に関する研究は, 主に山里, 渡辺, Wolfe らを中心に進められてきた. 有名な結果として, 安定過程と自己分解可能過程は全ての時刻で単峰であることが知られている. 対して一般のレヴィ過程に関しては, 全ての時刻で単峰とはならないレヴィ過程が存在する事が知られている. 具体的には μ を無限分解可能分布としたとき, もし μ がガウス部分 (レヴィ-ヒンチン表現をしたときに現れる非負係数部分) をもたず, そのレヴィ測度が 0 でない平均と有限の分散の値をもつならば μ からなるレヴィ過程は十分大な時刻で単峰ではないという結果がある (これらの詳細は [10], [11], [12] などによる).

つぎに, 単峰性より強い性質として強単峰性というものについて解説する. 一般に単峰性は分布のたたみこみによって保存されない. つまり単峰確率分布 μ, ν でそれらのたたみこみ分布 $\mu * \nu$ が単峰でないようなものが存在する (構成については [9] を参照). ここで強単峰性の定義は次のようにされる.

定義 1.2. 確率分布 μ が強単峰であるとは, 任意の単峰確率分布 ν に対して, たたみこみ $\mu * \nu$ が単峰となることをいう. また, $t \geq 0$ に対して X_t を確率分布 μ_t に従うある確率空間で定義された確率変数とする. このとき確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が $T \subset [0, \infty)$ で強単峰であるということを, 確率分布 μ_t が $t \in T$ で強単峰であることと定義する.

デルタ確率測度は単峰なので, 確率分布が強単峰ならばそれは自動的に単峰となる. また特殊な場合として μ, ν が対称な単峰確率分布であれば $\mu * \nu$ もまた対称な単峰確率分布となる. 一般に単峰確率分布同士のたたみこみが単峰であるか否かを確認するのは容易ではないが, Ibragimov は確率分布が強単峰になるための必要十分条件を次で与えた.

命題 1.3. (**Ibragimov**: [7]) デルタ分布でない確率分布 μ に関して以下は同値である.
(1) μ は強単峰である,
(2) $-\infty \leq a < b \leq \infty$ と区間 (a, b) 上の対数凹関数 $f(x)$ が存在して, $\mu((a, b)) = 1$ かつ μ は (a, b) 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続で $f(x)$ がその密度関数となる.

*e-mail: yuuki1114@math.sci.hokudai.ac.jp

この結果によりブラウン運動はすべての時刻で強単峰になることが分かる. さらに Ibragimov は, すべての時刻で強単峰な安定過程はブラウン運動のみであるという事を示した (詳細は [9] を参照).

2 自由確率論と単峰性

第 1 節では主に確率論における単峰性, 強単峰性に関する準備を行った. この節では, 非可換確率論の一つである自由確率論と呼ばれる概念の準備と, 自由確率論における単峰性に関する議論を行う.

2.1 自由独立性と自由たたみこみ

自由確率論における重要な概念である自由独立と自由たたみこみについて解説する. そのために, まず非可換確率空間と非可換確率変数の定義をする.

定義 2.1. $\mathcal{A}$ を単位元 $1_{\mathcal{A}}$ をもつ複素数体 $\mathbb{C}$ 上の (非可換) 代数とする.
(1) $\mathcal{A}$ が $*$-代数であるとは, 代数 $\mathcal{A}$ に以下の条件をもつ写像 $* : \mathcal{A} \ni a \mapsto a^* \in \mathcal{A}$ を付随したものをいう: 全ての $a, b \in \mathcal{A}$ に対して (i) $(ab)^* = b^*a^*$, (ii) $(a^*)^* = a$.
(2) $*$-代数 $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数 ϕ が状態であるとは, $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ で, 全ての $a \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(a^*a) \geq 0$ が成り立つときをいう.
(3) 組 $(\mathcal{A}, \phi)$ が非可換 ($*$-) 確率空間であるとは, $\mathcal{A}$ が単位元をもつ $\mathbb{C}$ 上 ($*$-) 非可換代数, ϕ をその上の状態であるときをいう.
(4) $(\mathcal{A}, \phi)$ を非可換確率空間とするとき, $\mathcal{A}$ の元のことを (非可換) 確率変数, ϕ のことを期待値 (関数) と呼ぶことがある. とくに $a \in \mathcal{A}$ が自己共役 (すなわち, $a^* = a$) のとき, a を実確率変数と呼ぶ.
(5) $a \in \mathcal{A}$ に対して, 値 $\phi((a^*)^{m_1}a^{n_1} \cdots (a^*)^{m_k}a^{n_k})$ $(m_1, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_2 \cdots m_k, n_1, \cdots n_{k-1} \in \mathbb{N})$ のことを a のモーメントという. とくに, 値 $\phi(a^n)$ を a の n 次モーメントという. 一般に $a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{A}$ とそれらの共役たちの積の期待値のことを, $a_1, \cdots, a_n$ の混合モーメントという.

非可換確率変数同士の積は非可換であるので, 一般にはこれらの混合モーメントを計算することは困難である. ここで, 非可換確率変数の自由独立性というものを定義する.

定義 2.2. $(\mathcal{A}, \phi)$ を非可換確率空間とする. このとき,
(1) $\mathcal{A}$ の $*$-部分代数 $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ が自由独立であるとは, 任意の $1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$ で $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $\cdots$, $i_{k-1} \neq i_k$ なるものと, 任意の $a_{i_l} \in \mathcal{A}_{i_l}$, $(l = 1, \cdots, k)$ で $\phi(a_{i_l}) = 0$, $(l = 1, \cdots, k)$ となるとき,

$$\phi(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) = 0, \tag{2.1}$$

が成立することをいう.
(2) $\mathcal{A}$ の部分集合 $A_1, \cdots, A_n$ が自由独立であるとは, 単位元 $1_{\mathcal{A}}$ と集合 A_i で生成される $*$-部分代数を $\mathcal{A}_i := *\text{-Alg}(1_{\mathcal{A}}, A_i)$, $(i = 1, \cdots, n)$ とおくとき, $\mathcal{A}_1 \cdots, \mathcal{A}_n$ が自由独立であることをいう.
(3) $a_1 \cdots, a_n \in \mathcal{A}$ を (実) 確率変数とする. このとき $a_1, \cdots, a_n$ が自由独立であるとは, $A_i := \{a_i\}$, $(i = 1, \cdots, n)$ を $\mathcal{A}$ の部分集合として, $A_1, \cdots, A_n$ が自由独立であることをいう.

確率変数が自由独立である時, 例えば次のような混合モーメントを計算することができるようになる.

例 2.3. a_1, a_2 を自由独立な確率変数とする. このとき,
(1) $\phi(a_1a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$,
(2) $\phi(a_1a_2a_1) = (\phi(a_1^2) - \phi(a_1)^2)\phi(a_2)$.
実際, (1) は $X_i := a_i - \phi(a_i)1_{\mathcal{A}}$ $(i = 1, 2)$ とおくことで, X_1, X_2 もまた自由独立な確率変数となり, $\phi(X_1) = \phi(X_2) = 0$ なので $\phi(X_1X_2) = 0$. 後はこの左辺を展開することで $\phi(a_1a_2)$ の計算結果が得られる. (2) も同様である.

この概念は確率論における”独立性”と類似した概念である. 実際, たとえば (可積分な) 確率変数 X, Y が独立であれば, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ が成立するし, その他にも期待値の計算がいくつかできるようになる. このようにして, 独立性とはいうものは混合モーメント (期待値) に何らかの計算規律を与える物として解釈することが出来る. では自由独立となるような確率変数は本当に存在するのかという疑問が生じるが, 実際にこのような確率変数は存在する. このことを解説するためにいくつかの準備をしていく.

定義 2.4. G を群, $G_1,\cdots,G_n$ を G の部分群とする. また e を $G,G_1,\cdots,G_n$ の単位元とする. このとき, $G_1,\cdots,G_n$ が G において自由であるとは, 任意の $1\leq i_1,\cdots,i_k\leq n$ で $i_1\neq i_2$, $i_2\neq i_3$, $\cdots$, $i_{k-1}\neq i_k$ なるに対して, $g_{i_l}\in G_{i_l}\setminus\{e\}$, $(l=1,\cdots,k)$ であるならば,

$$g_{i_1}\cdots g_{i_n}\neq e,$$

をみたすことをいう.

つぎに自由積を定義する. 群 G,H が与えられたとき, これらの自由積とは元が G と H の縮約された語であり, 積は連結して縮約したものとする群のことである. G と H の自由積を $G*H$ とかく. 構成から G,H は $G*H$ の部分群として含まれる. たとえば, $\mathbb{F}_n$ を n 個の生成元からなる自由群としたとき, $\mathbb{F}_m*\mathbb{F}_n=\mathbb{F}_{m+n}$ である. また n 個の群に関しても同様にして自由積が定義でき, $G_1*\cdots*G_n$ と表すことにする. 最後に群 G から生成される基本的な非可換確率空間について説明する. G から生成される ($\mathbb{C}$ 上の) 群環を $\mathbb{C}[G]$ で表すことにする. $\mathbb{C}[G]$ は以下の共役演算を入れることによって自然と (単位的な)$*$-代数になる.

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)^*:=\sum_{g\in G}\overline{\alpha_g}g^{-1},\qquad \alpha_g\in\mathbb{C}.$$

さらに $\mathbb{C}[G]$ 上の線形汎関数として以下のようなものを定義する.

$$\phi_G\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right):=\alpha_e$$

ただし, $e\in G$ は G の単位元とする. このとき ϕ_G は $\mathbb{C}[G]$ 上の状態となり, これらによって非可換確率空間 $(\mathbb{C}[G],\phi_G)$ が構成される. これらの定義から以下のような事実が知られている.

命題 2.5. $G_1,\cdots,G_n$ を群とする. このとき次の 2 条件は同値である.
(1) $G_1,\cdots,G_n$ は $G=G_1*\cdots*G_n$ において自由である.
(2) $\mathbb{C}[G]$ の $*$-部分代数 $\mathbb{C}[G_1],\cdots,\mathbb{C}[G_n]$ は自由独立である.

(2) の定義は (2.1) において ϕ_G を使うだけである. ただし $\phi_G|_{\mathbb{C}[G_i]}=\phi_{G_i}$, $(i=1,\cdots,n)$ であることに注意する. これより自由群 $\mathbb{F}_{i_1},\cdots,\mathbb{F}_{i_n}$, $(i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{N})$ を考えれば, $\mathbb{F}_{i_1},\cdots,\mathbb{F}_{i_n}$ は $\mathbb{F}_{i_1+\cdots+i_n}$ において自由であるから, 上の命題から $\mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_1}],\cdots,\mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_n}]$ は $\mathbb{C}[\mathbb{F}_{i_1+\cdots+i_n}]$ の $*$-部分代数として自由独立である. ゆえに自由独立な確率変数の存在がわかった. なお自由独立の概念をはじめとする自由確率論は, 作用素環論に現れる (自由) 群フォンノイマン環の構造解析のために, Voiculescu によって展開されたのが始まりである (これらの詳細や命題 2.5 の証明などは [8] が詳しい).

つぎに確率論の時と同様, 非可換確率変数に従う確率分布と (自由) たたみこみの定義を与える.

定義 2.6. $(\mathcal{A},\phi)$ を非可換確率空間として $a\in\mathcal{A}$ を実確率変数とする. もし $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が存在して,

$$\phi(a^n)=\int_{\mathbb{R}}x^n d\mu(x),\qquad n\in\mathbb{N},\tag{2.2}$$

が成立するとき, このような μ は次の意味で一意である: もし他の確率測度 ν が (2.2) を満たすとき, 任意の $f\in C_b(\mathbb{R})$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)d\nu(x),$$

が成立する. この μ を確率変数 a の確率分布という. もしくは, 確率変数 a は確率分布 μ に従うという.

このとき μ は $\mathbb{R}$ 上のコンパクトサポートをもつ確率測度であるという事に注意する. 次に a,b を自由独立な実確率変数として, μ,ν をそれぞれ a,b の従う確率分布とする. このとき Voiculescu は a と b の和の確率分布が存在することを示した. この確率分布を $\mu\boxplus\nu$ と表すことにする. すなわち,

$$\phi((a+b)^n)=\int_{\mathbb{R}}x^n d(\mu\boxplus\nu)(x),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

μ,ν はコンパクトサポートをもつので, $\mu \boxplus \nu$ もまたコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上の確率測度となる.

この段階ではコンパクトサポートをもつ確率分布同士の自由たたみこみしか定義されていなかったが, Voiculescu, Bercovici は, 複素関数の手法 (Cauchy 変換, Voiculescu 変換など) を用いて, 一般の確率分布に対しての自由たたみこみの定義を与えた (詳しくは [2] を参照).

2.2 自由ブラウン運動の単峰性

自由確率論においても, 確率分布の単峰性の定義は確率論の場合とまったく同様である. ここで全ての時刻で単峰になるような非可換確率過程を与える.

定義 2.7. ある (非可換) 確率空間上で定義された非可換実確率過程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が 1 次元自由ブラウン運動であるとは, 次の条件をみたすものをいう.
(1) $W_0 = 0$,
(2) 任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し, $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は自由独立,
(3) 任意の $0 \leq t < s$ に対して, $W_s - W_t$ は分散 $s-t$ の標準ウィグナー半円分 $w_{s-t}(dx)$ に従う.

ここで分散 $t > 0$ の標準ウィグナーの半円分布とは以下のような連続密度関数をもつ確率分布 $w_t(dx)$ のことである.

$$w_t(dx) := \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2} \cdot 1_{[-2\sqrt{t},2\sqrt{t}]}(x)dx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

まずこのような非可換確率過程は存在することは知られている. 1 次元自由ブラウン運動をなす分布族はウィグナーの半円分布族であり $w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ でモード 0 でコンパクトサポートをもつ単峰確率分布となる. したがって自由ブラウン運動もまた全ての時刻で単峰であるといえる.

自由確率論においても自由安定過程, 自由自己分解可能過程, 自由レヴィ過程 (自由無限分解可能過程) などが定義され, 自由ブラウン運動はこれらの確率過程に含まれている. 自由安定過程, 自由自己分解可能過程はすべての時刻で単峰であるという, 古典確率論における安定過程, 自己分解可能過程の単峰性の結果と完全に類似した結果が, Biane, 長谷部, Thorbjørnsen らによって証明された (詳しくは, [1], [5] を参照). しかし長谷部, 佐久間は, μ を自由無限分解可能分布としたとき, μ の自由レヴィ測度がコンパクトサポートをもつならば, μ からなる自由レヴィ過程は十分大な時刻で単峰になるという結果を与えている. すなわち, 古典の場合と合わせると以下のような命題が得られたことになる.

命題 2.8. (**Wolfe**: [11], **長谷部, 佐久間**: [4]) ガウス部分をもたない複合 Poisson 分布 μ で,
(1) μ^{*t} は単峰にならない,
(2) $\Lambda(\mu)^{\boxplus t}$ は単峰になる,
をある十分大な $t > 0$ で同時に満たすようなものが存在する.

(2) の分布 $\Lambda(\mu)$ は自由複合 Poisson 分布と呼ばれる. なお, 写像 Λ は無限分解可能分布全体の集合 ID から自由無限分解可能分布全体の集合 FID への全単射写像であり, $\mu \in ID$ の特性三つ組を (a, η, ν) ($a \geq 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, ν は $\mathbb{R}$ 上レヴィ測度) としたとき, $\Lambda(\mu) \in FID$ は特性三つ組 (a, η, ν) をもつ自由無限分解可能分布を表す. この全単射 $\Lambda : ID \to FID$ を Bercovici-Pata 全単射と呼ぶ. (詳しくは [1] を参照).

これらのことから, 古典確率論におけるレヴィ過程の単峰性に関する結果と正反対の結果となっていることが分かる. そして単峰性という性質が確率論と自由確率論の間にどれだけ違いがあるかということについても興味深いものとなった.

3 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性に関する課題点

第 1, 2 節では, 古典, 自由ブラウン運動の単峰性について触れてきた. 古典, 自由ブラウン運動をそれぞれ単に分布族としてみたとき, それらの初期分布はいずれも 0 でのデルタ分布 δ_0 である. ここで我々は, 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性について研究してきた. 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動とは, 初期分布をデルタ分布でない適当な確率分布 μ に変更するときに得られる古典, 自由レヴィ過程のことをいい, これらの確率過程をなす分布族は古典の場合は $\mu * N(0,t)$, 自由の場合は $\mu \boxplus w_t(dx)$ である. 初期分布つき古典, 自由ブラウン運動の単峰性は, もちろん初期分布 μ に依存して変化し, 一般には

すべての時刻で単峰ではなくなる. 例えば $\mu = \frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$(対称ベルヌーイ分布) と取れば, $\mu * N(0,t)$ は $t \geq 1$ で単峰, $\mu \boxplus w_t(dx)$ は $t \geq 4$ で単峰になる (自由の場合は Figure 1-6). ここで我々の本研究での問題点は, 初期分布がどのようなクラスであれば初期分布つき古典, 自由ブラウン運動は,

- (**All time unimodality**) すべての時刻で単峰になるか,
- (**Large time unimodality**) 十分大な時刻で単峰になるか,
- (**Non-unimodality**) すべての時刻で単峰にならないか,

について考察することである.

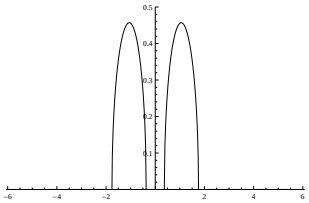


Figure 1: $\mu \boxplus w_{0.25}(dx)$

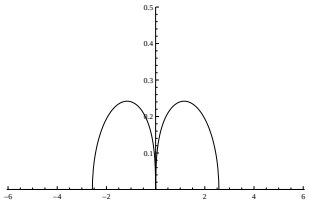


Figure 2: $\mu \boxplus w_1(dx)$

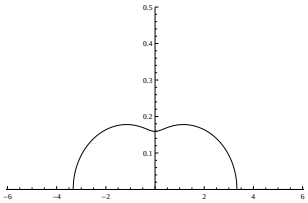


Figure 3: $\mu \boxplus w_2(dx)$

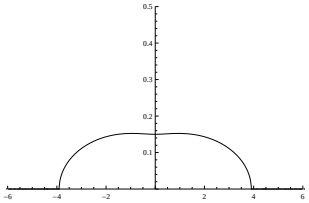


Figure 4: $\mu \boxplus w_3(dx)$

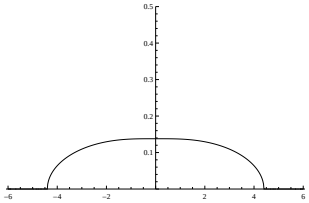


Figure 5: $\mu \boxplus w_4(dx)$

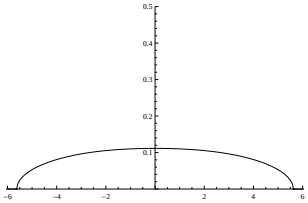


Figure 6: $\mu \boxplus w_7(dx)$

4 Biane の密度関数公式

第 2 節で定義した自由たたみこみによる分布の計算は一般的には困難であり, それを導出するような公式は未だ与えられていない. しかし Biane は特殊な場合として, 一般の $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ とウィグナーの半円分布 $w_t(dx)$ との自由たたみこみ $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数を陰関数表示する公式を与えた. この節ではその公式について解説する. なお詳細は [3] による.

定義 4.1. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度, $t > 0$ とする. ここで以下のような集合を定義する.

$$U_{t,\mu} := \left\{ u \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2} d\mu(x) > \frac{1}{t} \right\}.$$

この集合は $\mathbb{R}$ 上開であることに注意する.

定義 4.2. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度とする. $t > 0$ と $u \in \mathbb{R}$ に対して, 次の方程式:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + v^2} d\mu(x) = \frac{1}{t},$$

をみたす $y \geq 0$ が一意的に定まり, この $v \geq 0$ を $v = v_t(u)$ と表示することにする.

ここで関数 $v_t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $\mathbb{R}$ 上連続であり, 開集合 $U_{t,\mu}$ 上で実解析的となる. また $v_t(u) > 0$ となるための必要十分条件は $u \in U_{t,\mu}$ となることである. このとき Biane は陰関数 v_t の表示を使い, μ に関する $\mu \boxplus w_t(dx)$ の subordination function というものを求めることによって $\mu \boxplus w_t(dx)$ のコーシー変換を計算した. 最後に Stieltjes の逆変換公式によって, 以下のような $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数公式を与えた.

命題 4.3. (**Biane**: [3]) μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度とする. このとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続であり, その確率密度関数を p_t とするとき p_t は以下のように表示される.

$$p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = \frac{v_t(x)}{\pi t} \cdot 1_{\psi_{t,\mu}(\overline{U_{t,\mu}})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

さらに関数 p_t は $\mathbb{R}$ 上連続であり, $\{x \in \mathbb{R} : p_t(x) > 0\}$ 上で実解析的である. ただし $\psi_{t,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下の表示:

$$\psi_{t,\mu}(x) := x + \int_{\mathbb{R}} \frac{x-u}{(x-u)^2 + v_t(x)^2} d\mu(u), \qquad x \in \mathbb{R},$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上同相写像である.

5 研究結果

5.1 初期分布つき自由ブラウン運動に関する研究結果

第 4 節の Biane の密度関数公式に関する結果を用いることで, 初期分布つき自由ブラウン運動の単峰性に関する結果を得る. この節では結果の主張および証明の概略を与える. なお詳細は [6] による.

定理 5.1. (**All time unimodality**) μ を対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率測度とするとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての時刻 $t > 0$ で単峰になる.

この定理を証明をするために 2 つの補題を用意する (詳細は [6] を参考).

補題 5.2. μ を Lebesgue 測度に関して絶対連続な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする. また μ の密度関数 $p(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続関数に拡張され $\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$ 上で実解析的であるとする. このとき μ が単峰であることの必要十分条件は, 任意の $a > 0$ に対して方程式 $p(x) = a$ の解 x の個数が 2 個以下であるということである.

確率分布の単峰性の定義によると, 単峰確率分布の密度関数は不連続点をもつことがあり得る. さらには $\mathbb{R}$ のある区間で平坦になっていることもあり得る. 補題 5.2 ではこういった状態が起こらない場合に関する単峰確率分布の条件を与えていることになる.

補題 5.3. μ を $\mathbb{R}$ 上確率測度, $t > 0$ とする. もし任意の $R > 0$ に対して, 方程式

$$\Xi_R(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + R^2} d\mu(u) = \frac{1}{t} \tag{5.1}$$

の解 x の個数が 2 個以下であるならば $\mu \boxplus w_t(dx)$ は単峰である.

証明. 命題 4.3 の $\psi_{t,\mu}$ が $\mathbb{R}$ の同相写像であることと補題 5.2 により, 任意の $a > 0$ に対して方程式 $p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = a$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示せばよい. ここで $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して, 値 $v_t(x)$ は正のとき方程式 (5.1) の一意的な解であったので,

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : a = \frac{v_t(x)}{\pi t} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + (\pi a t)^2} d\mu(u) = \frac{1}{t} \right\}, \tag{5.2}$$

が成立する. したがって今の仮定から (5.2) の右辺の解空間の元の個数は 2 個以下である. ゆえに方程式 $p_t(\psi_{t,\mu}(x)) = a$ の解 x の個数は 2 個以下であることが示された. □

定理 *5.1* の証明. μ を対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする. 補題 5.3 より, 任意の $R > 0$ と $t > 0$ に対して方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示せばよい. 任意に $R > 0$ と $t > 0$ をとり, 方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ を考える. ところでパラメーター $R > 0$ の対称コーシー分布を $C_R(dx)$ と書くことにすれば, μ とのたたみこみ $\mu * C_R(dx)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続で, その密度関数は $\mathbb{R}$ 上連続かつ正の部分で実解析的である. さらに $C_R(dx)$ もまた対称かつ単峰なので $\mu * C_R(dx)$ は単峰であり

$$\frac{d(\mu * C_R)}{dx}(x) = \frac{R}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2 + R^2} d\mu(u) = \frac{R}{\pi} \cdot \Xi_R(x) = \frac{R}{\pi t}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

となるので, 補題 5.2 より方程式 (5.3) の解 x の個数は 2 個以下であることがわかる. 関数 $\Xi_R(x)$ は関数 $\frac{d(\mu * C_R)}{dx}(x)$ の定数倍に過ぎないので, 方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数も 2 個以下であることが言える. □

つぎに Large time unimodality に関する結果について述べていく．なお証明では簡単な計算は全て省き, 概要のみを述べることにする．

定理 5.4. (**Large time unimodality**) μ をコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とし, D_μ を μ のサポートの長さとする．このとき $\mu \boxplus w_t(dx)$ は $t \geq 4D_\mu^2$ で単峰になる．

証明. μ をコンパクトサポートを持つ確率測度として, $t \geq 4D_\mu^2$ のとき, 任意の $R > 0$ に対して $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示す．デルタ測度で自由たたみこみをとれば分布の密度関数は平行移動するので, はじめから μ の台は $\left[-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right]$ に含まれると仮定してよい．また $t \geq 4D_\mu^2$ として $t > 0$ をとっておく いま明らかに, 全ての $x < -\frac{D_\mu}{2}$ に対して $\Xi_R'(x) > 0$, 全ての $x > \frac{D_\mu}{2}$ に対して $\Xi_R'(x) < 0$ であり Ξ_R' は $\mathbb{R}$ 上連続である．もし $0 < R < \sqrt{3}D_\mu$ ならば, 全ての $x \in \left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ に対して $\Xi_R(x) > \frac{1}{t}$ となるため, 方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数は 2 個以下であることが分かる．つぎに $R \geq \sqrt{3}D_\mu$ ならば, 全ての $x \in \left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ に対して $\Xi_R''(x) < 0$ が成立する．ゆえに中間値の定理から Ξ_R は $\left(-\frac{D_\mu}{2}, \frac{D_\mu}{2}\right)$ 上に唯一つの極大点をもつ．これは方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることを示している．したがって $t \geq 4D_\mu^2$ のとき, 任意の $R > 0$ に対して方程式 $\Xi_R(x) = \frac{1}{t}$ の解 x の個数が 2 個以下であることが示された． □

逆にコンパクトサポートをもたない初期分布で, それが付いた自由ブラウン運動が全ての時刻で単峰とならないような例も構成した．ここでは構成の方法のみについて述べ, 証明は行わないことにする．

定理 5.5. (**Non-unimodality**) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を可測関数とする．このとき,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) < \infty,$$

となるような $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ で単峰にならないようなものが存在する．

構成の方法. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を可測関数とする．実数列 $\{a_n\}_n$ を狭義単調増加で $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \infty$ となるようにとる．さらに実数列 $\{w_n\}_n$ を以下のようにして定義する:

$$w_n := \frac{c}{n^2 \max\{f(a_n), 1\}} > 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ここで $c > 0$ は正規化する定数とする．すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1$ とするような正定数とする．これらの実数列を使って構成した $\mathbb{R}$ 上確率測度 $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} w_n \delta_{a_n}$ はコンパクトサポートをもたず, $\mu \boxplus w_t(dx)$ はすべての $t > 0$ で単峰にならないことがいえる．その証明は [6] による． □

以上の結果から第 3 節で挙げた問題に対する一つの解答が得られたことになる．最後に All time unimodality に関する結果において, 次のような問題が自然に出てくることに触れておく．

問題 5.6. 定理 5.1 において μ の対称性の仮定は除けるのだろうか.

結論から言うと, この問いに関する答えは”No”である．このことについては自由強単峰性という概念と深く関わるので, 第 6 節の”自由強単峰性”で触れることにする．

5.2 初期分布つき古典ブラウン運動に関する研究結果

つぎに初期分布つき古典ブラウン運動の単峰性に関する研究結果について述べる．まず All time unimodality についてだが, 初期分布 μ として単峰なものをとれば, Ibragimov の結果により, 正規分布 $N(0, t)$ はすべての $t > 0$ で強単峰であるので $\mu * N(0, t)$ はすべての $t > 0$ で単峰になることがわかる．我々は初期分布つき古典ブラウン運動の単峰性 (Large time unimodality 及び Non-unimodality) に関して以下のような結果を得た．証明は [6] による．

定理 5.7. (**Large time unimodality**) μ を次の性質をもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とする: ある $A > 0$ があって,

$$\alpha := \int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^2} \mu(dx) < \infty.$$

このとき $\mu * N(0, t)$ は $t \geq \frac{36 \log(2\alpha)}{A}$ のとき単峰になる．

定理 5.8. (**Non-unimodality**) 任意の $A > 0$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^p}\mu(dx) < \infty, \ \ (0 < p < 2), \text{ and } \int_{\mathbb{R}} e^{A|x|^2}\mu(dx) = \infty,$$

となるような $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * N(0,t)$ はすべての $t > 0$ で単峰にならないものが存在する.

5.3 初期分布つき指数 1/2 と 1 の安定過程の単峰性

本題ではないが, 指数 1/2 の片側安定過程と指数 1 の (狭義) 安定過程に関しても, 特定の初期分布をつけることで十分大時刻で単峰になること (Large time unimodality) と, 全ての時刻で単峰にならない例 (Non-unimodality) を構成したので報告する. これらの証明も [6] による. はじめに指数 1 の狭義安定分布 (またはコーシ分布) を以下の記号を使って定義する.

$$C_t(dx) := \frac{t}{\pi(x^2+t^2)} \cdot 1_{\mathbb{R}}(x)dx, \qquad t > 0,$$

ここで分布族 $C_t(dx)$ からなるレヴィ過程を指数 1 の (狭義) 安定過程, またはコーシー過程といい, 初期分布 μ つきコーシー過程を分布族 $\mu * C_t(dx)$ からなるレヴィ過程と定義する. このとき初期分布つきコーシー過程の単峰性に関して以下の結果が得られた. All time unimodality に関しては, 単峰性の一般論から, μ が対称かつ単峰な $\mathbb{R}$ 上確率分布であれば $\mu * C_t(dx)$ は全ての $t > 0$ で単峰になることが言える.

定理 5.9. (**Large time unimodality**) μ を絶対 3 次モーメントが有限な $\mathbb{R}$ 上確率測度とする, すなわち,

$$\beta := \int_{\mathbb{R}} |x|^3\mu(dx) < \infty$$

をみたすとする. このとき, $\mu * C_t(dx)$ は $t \geq 20\beta^{1/3}$ のとき単峰になる.

さらに初期分布つき古典ブラウン運動の結果と類似した結果も得られた.

定理 5.10. (**Non-unimodality**) 以下の性質:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p\mu(dx) < \infty, \ \ (0 < p < 3), \text{ and } \int_{\mathbb{R}} |x|^3\mu(dx) = \infty,$$

をみたす $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * C_t(dx)$ がすべての時刻で単峰にならないものが存在する.

説明は省略したが, コーシー変換の計算によって, 任意の $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ に対して,

$$\mu * C_t(dx) = \mu \boxplus C_t(dx),$$

が成立し, さらに指数 1 の自由狭義安定分布 (自由コーシー分布) は指数 1 の狭義安定分布 (コーシー分布) と一致する (詳しくは [1] を参照). したがって, 以下の定理も同時に得る.

定理 5.11. 初期分布つき自由コーシー過程に関しても, 定理 5.9, 定理 5.10 が成立する.

次に指数 1/2 の片側安定分布 (またはレヴィ分布) を以下の記号を使って定義する.

$$L_t(dx) := \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{t^2}{2x}}}{x^{3/2}} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)dx,$$

分布族 $L_t(dx)$ からなるレヴィ過程を指数 1/2 の片側安定過程, または単に片側安定過程といい, 初期分布 μ つき片側安定過程を分布族 $\mu * L_t(dx)$ からなるレヴィ過程と定義する. このとき初期分布つき片側安定過程に関する単峰性について, 以下のような結果を得た.

定理 5.12. (**Large time unimodality**) μ をコンパクトサポートをもつ $\mathbb{R}$ 上確率測度とし, D_μ を μ の台の長さとする. このとき $\mu * L_t$ は $t \geq (90/4)^{1/4}D_\mu^{1/2}$ のとき単峰になる.

定理 5.13. (**Non-unimodality**) 以下の性質:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx) < \infty, \ \ (0 < p < 5/2), \text{ and } \int_{\mathbb{R}} |x|^{5/2} \mu(dx) = \infty,$$

をみたす $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ で $\mu * L_t(dx)$ がすべての時刻で単峰にならないものが存在する.

初期分布つき片側安定過程の単峰性に関しては, 定理 5.9, 定理 5.10 のように絶対値モーメントの挙動で与えられてはいないが, 定理 5.12 の初期分布に関する仮定を絶対 5/2 次モーメント有限な初期分布という仮定に変更にしても成立すると予想される. 最後に, 指数 1/2 の自由片側安定分布は,

$$fL_t(dx) := \frac{\sqrt{4x-t}}{2\pi t x^2} \cdot 1_{[t/4,\infty)}(x)dx, \qquad t > 0,$$

によって与えられ, 分布族 $fL_t(dx)$ からなる自由レヴィ過程 (自由片側安定過程) も定義されるが, 初期分布つき自由片側安定過程に関しては, その密度関数もまだ与えられておらず, どのような初期分布のときに単峰になったりならなかったりするのかということはまだ何もわかっていない. 当然, より一般に初期分布付き古典/自由安定過程やレヴィ過程などが考えられるが, これらの単峰性に関してもまだよくわかっていない.

6 自由強単峰性

最後に自由強単峰性について触れ, 今回得た結果について報告する. 確率分布 μ が自由強単峰であるとは, 任意の単峰確率分布 ν に対して, $\mu \boxplus \nu$ が単峰になることである. たたみこみによらずに定義される単峰性と違い, 強単峰性はたたみこみによって定義されたので, 自由たたみこみによる強単峰性のようなものも (天下り的には) 定義できる. しかし Ibragimov によって得られた強単峰性の特徴付けのように, 自由強単峰性にはまだ特徴付けのようなものは存在していない. それどころかデルタ測度以外に自由強単峰となるような例すら未だ見つかっておらず, このような性質を満たす $\mathbb{R}$ 上確率分布の発見, および特徴付けは今後の課題になる. 少なくとも現時点では自由強単峰性に関して以下のような結果を得た.

定理 6.1. ウィグナーの半円分布は自由強単峰ではない. さらに一般に, 分散が有限である確率分布はすべて自由強単峰ではない.

前半の証明. 後半の証明には自由中心極限定理などを用いるため, ここでは証明省略し, 前半の証明のみ行う. Ibragimov の結果 (命題 1.3) から対称コーシー分布 $C_1(dx)$ は強単峰でないため, ある単峰確率測度 μ が存在して $\mu * C_1(dx)$ は単峰でない. したがって補題 5.2 からある $t > 0$ が存在して, 方程式:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-u)^2+1} d\mu(u) = \pi \cdot \frac{d(\mu * C_1)}{dx}(x) = \frac{1}{t},$$

の異なる解 x の個数が少なくとも 3 個以上あることがわかる. 簡単のためこの方程式の異なる解の個数を 3 個とし, それぞれの異なる解を $x = x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ としておく. したがって関数 v_t の定義から, $i = 1, 2, 3$ において $v_t(x_i) = 1$ となることがいえる. したがって p_t を $\mu \boxplus w_t(dx)$ の密度関数とすれば, $i = 1, 2, 3$ において $p_t(\psi_{t,\mu}(x_i)) = \frac{1}{\pi t}$ を意味しているので, $\mu \boxplus w_t(dx)$ は単峰ではない. $w_t(dx)$ の時刻 $t > 0$ のスケールを変えれば, 全て $t > 0$ でウィグナーの半円分布 $w_t(dx)$ は自由強単峰でないことがわかる. □

この定理から自由ブラウン運動は全ての時刻で自由強単峰でないことがわかる. 言い方を変えれば, 単峰確率分布 μ が存在して $\mu \boxplus w_t(dx)$ がある $t > 0$ で単峰でないことがわかった. これは問題 5.6 の解答になっていることがわかる. ところで古典ブラウン運動は Ibragimov の結果により全ての時刻で強単峰となるので, このことから強単峰性と自由強単峰性の間には大きな違いがあることがわかる.

最後に, 自由たたみこみと単峰性に関する問題を一つ挙げる. まず古典確率論では μ, ν が対称かつ単峰であれば $\mu * \nu$ もまた対称かつ単峰であったことを思い出す. 定理 5.1 によると, 対称単峰確率分布とウィグナーの半円分布 (対称かつ単峰である) の自由たたみこみは単峰であることがわかっているが, より一般的なことは解っていない. つまり, このことは以下の問題として定式化される.

問題 6.2. μ, ν を対称かつ単峰な確率分布とするとき, $\mu \boxplus \nu$ が単峰であるか.

謝辞

本研究は, 科研費若手研究 (B)15K17549 および，独立行政法人日本学術振興会と MAEDI との二国間交流事業共同研究による支援を受けたものである.

参考文献

[1] H. Bercovici and V. Pata, with an appendix by P. Biane, Stable laws and domains of attraction in free probability theory, Annals of Mathematics, **149** (1999), 1023-1060.

[2] H. Bercovici and D. V. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, Indiana University Mathematics Journal **42** (1993), 733-773.

[3] P. Biane, On the free convolution with a semi-circular distribution, Indiana, Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 705-718.

[4] T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 2, 916-936.

[5] T. Hasebe and S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws, J. Theoret. Probab. **29** (2016), no. 3, 922-940.

[6] T. Hasebe and Y. Ueda, Large time unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions, preprint, arXiv:1710.08240.

[7] I. A. Ibragimov, On the composition of unimodal distributions, TPA **1** (1956), 255-260.

[8] A. Nica and R. Speicher, Lectures on the Combinatorics of Free probability, 2006, London Mathematical Society Lecture Note Series.

[9] K. Sato, Lévy processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge Studies in Advanced Math. **68**. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR1739520.

[10] T. Watanabe, On the strong unimodality of Lévy processes, Nagoya Math. J. Vol. **121** (1991), 195-199.

[11] S. J. Wolfe, On the unimodality of infinitely divisible distribution functions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **45** (1978), 329-335.

[12] M. Yamazato, Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L, Ann. Probab. **6**, 523–531 (1978).

Bicategory of Classical First-Order Theories

荒武 永史 (Hisashi Aratake) * †

概要

圏論的一階述語論理は、数理論理学（特にモデル理論）の圏論的解釈として、Makkai らによって創られた分野である。彼らの研究により、Gödel の完全性定理や Beth の定義可能性定理が圏論的に一般化された。本講演では、古くから知られていた「モデル理論と圏論の対応」が「古典一階理論の双圏 $\mathfrak{Th}$ と Boolean pretopos の 2-圏 $\mathfrak{BPretop}_*$ との双同値」として統一される、という結果を紹介する。さらに、この枠組みによるモデル理論への応用の展望を示す。

1 理論と翻訳

現代数学においては、

(1) 興味のある構造の性質を抽出して公理系をつくり、
(2) 公理系から定理を証明し、
(3) 最後に元の構造に定理を適用する

というプロセスが重要であることは周知の通りである。数理論理学者はこれらのプロセスについて数学的考察を行う、すなわち、

- 構造とは何か
- 「構造がある性質を満たす」とはどういうことか
- 「公理系から定理を証明する」とはどういうことか

を論理学の言葉によって定義し、数学的手法[*1]を用いてこれらの概念を分析する。数理論理学者は「数学者（の営み）を数学する」という意味で「メタ数学者である」とも言える。通常、数学者の興味関心は、特定の構造の研究にある。一方、数理論理学者は「公理系」「証明」なども一つの構造と見なして研究対象とする。本研究は数理論理学の一領域である**モデル理論**を背景としているので、以後はモデル理論の話題に絞って概説する。key concept となる「理論」「モデル」「翻訳」という 3 つの概念について順番に紹介していく。

* 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系博士後期課程 1 回. 日本学術振興会特別研究員 DC. 本研究は JSPS 科研費 17J06041 の助成を受けたものです。
† e-mail: aratake@kurims.kyoto-u.ac.jp
[*1] ここでいう「数学的手法」は、メタ論理体系によって形式化されなければならない。

1.1 古典一階理論とそのモデル

モデル理論では「公理系を満たす構造たちの性質」を「公理系の性質」と関連づけて考察する。本稿では、環・体や順序集合の具体例を通して、種々の概念を紹介する。

$$xy = yx, \qquad (x \leq y) \vee (y \leq x), \qquad x \neq 0 \to \exists y(xy = 1)$$

などの自由変数を含むような文のことを**論理式**という。ここで、論理式には一般に

論理結合子: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ (not)
量化子: $\exists$, $\forall$

が含まれることに注意する。$xy = yx$ は 2 つの自由変数を持つ一方、$\forall x \forall y(xy = yx)$ は全ての変数が量化（束縛）されている。後者のような論理式のことを**閉論理式**といい、閉論理式の集合のことを**（古典一階）理論**という[*2]。これが、数理論理学における「公理系」の定義である。

理論 T が与えられたときに、「T の公理をすべて満たす構造」のことを T の**モデル**という：

理論 T	群（resp. アーベル群、環、体、半順序、線型順序、順序体 etc.）の公理系
T のモデル	群（resp. アーベル群、環、体、半順序、線型順序、順序体 etc.）

モデル理論において理論とモデルの関係を論じるには、まず与えられた理論の**モデルが存在する**かどうかを知る必要がある。Gödel の完全性定理から、

$$\text{理論 } T \text{ のモデルが存在} \iff T \text{ が無矛盾}$$

ということが知られている。また、完全性定理の系として、「T の任意の有限部分集合がモデルを持つならば、T 自身もモデルを持つ」という**コンパクト性定理**が成り立つ。

モデルの存在が保証された後は、理論の次のような問題について考察をしていく。

- T が“いいモデル”を持つか？
- T のモデルは同型を除いてどのくらい存在するか？

ここで“いいモデル”とは、

- 多くの方程式系が共通解を持つような“飽和モデル”
- 任意のモデルに埋め込めるような“素モデル”（e.g. 標数 p の素体）

などのことを指す。これらの問題を考える際には、モデルが論理式（の族）に対してどのように振る舞うかが重要である。特に、“T と無矛盾な論理式系の数が少ない”ときに T は**安定**であるといい、安定な理論の研究は現代モデル理論の根幹を成している。実際、適切な強さの安定を持つ理論に対しては、体の超越次元やベクトル空間の次元のような**次元の一般論**が展開でき、“いいモデル”の存在やモデルの同型による分類が与えられる。

[*2] ここで「古典一階」というのは、論理体系の記述能力、言い換えれば「どの程度複雑な公理が許されているのか」を表す。例えば、ねじれのないアーベル群の公理系を記述するには古典一階（述語）論理では不十分で、**無限論理**で考える必要がある。

1.2 理論間の翻訳

理論の概念が定義されたことにより、理論自身が数学的対象と見なされる。すると、複数の理論の間の関係性を議論しようとするのは、自然な発想であろう。複数の理論を関係づけるような具体例をいくつか挙げる。

Example 1.1.

(1) 理論の拡大 $T \subseteq T'$、すなわち公理の追加。
(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ の理論は（原理的には）実数体 $\mathbb{R}$ の理論に帰着できる。より一般に任意の実閉体 R に対して、$\mathbb{C}$ と同様の方法で R^2 に演算を入れることで代数閉体が得られる。
(3) 代数閉体 k に対して、射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ は $k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の商空間として得られる。
(4) 群の作用 $G \times X \to X$ に対して、X を忘却して G を得る対応。 □

これらの具体例は**翻訳**という概念に一般化することができる。

Definition 1.2. T, T' を理論とする。T から T' への翻訳 $I\colon T \to T'$ とは、T-論理式 φ に対して“T'-論理式の商 φ^I/Δ^I”を対応させるもので、これらのデータによって T'-モデルから自然に T-モデルがつくれるようなもの。 □

理論の種々の性質は翻訳可能性で保たれることが多い。例えば、翻訳 $I\colon T \to T'$ が存在するとき、T' が安定ならば T も安定であることが知られている。したがって、翻訳について調べることは理論/モデルの性質を知るのに役に立つ。しかし、既存のモデル理論で翻訳が用いられるのは、非常に限定的な場面しかない。実際、上に挙げたような具体例について翻訳可能性を使ったり、あるいは「群・体などの詳しく調べられている構造に翻訳可能な」より一般の構造についての研究はあるが、翻訳から新たに翻訳を構成するなどといった研究はされていない。翻訳を通して**理論間の相互作用**を包括的に調べることは、本研究の目的の一つである。

2 圏論的一階述語論理

本節では、前節で見た理論・モデル・翻訳の概念が圏論的対応物を持つことを紹介する。

2.1 classifying pretopos

Definition 2.1 (*cf.* [2])**.** 理論 T に対して、“論理式の圏” $\mathcal{P}_T$ が構成できる[*3]。ここで、射 $[\chi]\colon \varphi(\boldsymbol{x}) \to \psi(\boldsymbol{y})$ は任意の T-モデルで次が成り立つような論理式 $\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$（の T-同値類）である：

$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \varphi(\boldsymbol{x}) \wedge \psi(\boldsymbol{y}), \qquad \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \qquad \varphi(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{y} \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

このとき、$\mathcal{P}_T$ は *Boolean pretopos* と呼ばれる圏になっている、すなわち、

- 有限極限を持つ。
- 任意の“同値関係”に関して、その coequalizer が存在。
- 部分対象の束 $\mathrm{Sub}(\varphi(\boldsymbol{x}))$ は Boole 代数。

[*3] 正確には、“論理式の商”まで含めて $\mathcal{P}_T$ が構成される。

- finite coproduct が存在して、それらは disjoint。
- 上に挙げた構造は pullback で保たれる。

$\mathcal{P}_T$ は T の *classifying pretopos* と呼ばれる。 □

classifying pretopos は命題論理における Lindenbaum 代数の類似になっており、理論に対する圏論的対応物である。ここで、集合と写像の圏 **Set** も Boolean pretopos であることに注意する。

$\mathcal{P}_T$ を用いると、T-モデルも圏論的に表現される：

Proposition 2.2. 任意の T-モデル $\mathcal{M}$ に対して、*pretopos functor* (= pretopos の構造を保つ函手) $G_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{P}_T \to \mathbf{Set}$ が誘導される。ここで、$G_{\mathcal{M}}$ は論理式 φ を**定義可能集合** $\varphi(\mathcal{M})$ に写す。

さらに、この対応 $\mathcal{M} \mapsto G_{\mathcal{M}}$ は次の圏同値を与える：

$$\mathbf{Elem}(T) \simeq \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})$$

- $\mathbf{Elem}(T)$ は T-モデルと**基本埋め込み**（= 任意の論理式の真偽を保つような強い準同型）の圏
- $\mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set})$ は、$\mathcal{P}_T$ から **Set** への pretopos functor と自然変換の圏 □

上の命題より、T-モデルと pretopos functor は圏同値の意味で対応しており、classifying pretopos は “T-モデルを分類している” ということがわかる。

本稿で詳しく述べることはできないが、上のようなロジックと圏論の対応によって、ロジックの（メタ）定理の圏論的一般化が得られている：

- Gödel の完全性定理 vs. Deligne の定理（[7, Theorem 3.5.5], [4, §D3.3]）
- Beth の定義可能性定理（[6]）

2.2 翻訳と pretopos functor

続いて、翻訳に pretopos functor が対応することを見る。翻訳 $I \colon T \to T'$ とは、T-論理式 φ に対して T'-論理式の商 φ^I/Δ^I を対応させるものだった。この対応は、T-論理式の商から T'-論理式の商への対応に自然に拡張される。したがって、函手 $\mathcal{P}_I \colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が得られ、これは pretopos functor になる。

ここで、翻訳 $I \colon T \to T'$ が与えられると、T'-モデル $\mathcal{M}$ から自然に T-モデル $\mathcal{M}|_I$ が誘導されることを思い出そう。実はより強く、翻訳から函手 $\mathbf{Elem}(T') \to \mathbf{Elem}(T)$ が誘導される。一方、$\mathcal{P}_I \colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ が構成されたので、次のような函手を考えることができる：

$$\mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_{T'}, \mathbf{Set}) \to \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set}) \qquad G \mapsto G \circ \mathcal{P}_I$$

これらの観察と **Proposition 2.2** より、次の図式は（自然同型を除いて）可換である：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Elem}(T') & \xrightarrow{(-)|_I} & \mathbf{Elem}(T) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_{T'}, \mathbf{Set}) & \xrightarrow{(-) \circ \mathcal{P}_I} & \mathfrak{BPretop}(\mathcal{P}_T, \mathbf{Set}) \end{array}$$

したがって、翻訳によるモデルの対応は圏論的に表現される。

3　古典一階理論の双圏

以上で見てきたように、

$$\text{理論} \mapsto \text{Boolean pretopos} \qquad \text{翻訳} \mapsto \text{pretopos functor}$$

という対応がある一方で、逆向きの対応については先行研究ではほとんど調べられていなかった。実際、

$$\text{任意の small Boolean pretopos はある理論の classifying pretopos と圏同値}$$

という結果はよく知られていたが、

- 圏同値 $\mathcal{P}_T \simeq \mathcal{P}_{T'}$ があるときに、T と T' はモデル理論の言葉でどのような関係にあるか？
- 任意の pretopos functor $I\colon \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ は、T から T' への翻訳から誘導されるか？

といった問題について明確な回答は与えられていなかった。

そこで本研究ではまず、理論と翻訳に加えて**翻訳の間のホモトピー**という 2-射を持つような**双圏** $\mathfrak{Th}$ を定義し、上の対応が「small Boolean pretopos と pretopos functor と自然同型が成す 2-圏 $\mathfrak{BPretop}_*$」への pseudo-functor $\mathfrak{Th} \to \mathfrak{BPretop}_*$ を与えることを示した。さらに、この pseudo-functor が双圏の間の双圏同値になっていることを示すことで、上述の問題を解決した。

3.1　双圏 $\mathfrak{Th}$ の構成

Definition 3.1 (*cf.* [3, Chap. 5 §4(c)])**.** $I, J\colon T \to T'$ を翻訳とする。**ホモトピー** $h\colon I \Rightarrow J$ は、任意の T'-モデル $\mathcal{M}$ に対して T-モデルの同型 $\mathcal{M}|_I \simeq \mathcal{M}|_J$ を与えるような適切なデータから成る。 □

ホモトピー $h\colon I \Rightarrow J$ からは、自然な方法で自然同型 $\mathcal{P}_h\colon \mathcal{P}_I \Rightarrow \mathcal{P}_J$ が構成される。よって、理論・翻訳・ホモトピーから適当な 2-圏を定義できるように思われるが、ここで次のような問題が生じる：翻訳 $I\colon T_0 \to T_1$, $J\colon T_1 \to T_2$, $K\colon T_2 \to T_3$ に対して、$(KJ)I$ と $K(JI)$ は翻訳として一致するとは限らない[*4]。したがって、安直に $\mathfrak{Th}$ を 2-圏として定義することはできない。

一方、$K(JI)$ と $(KJ)I$ との間には自然にホモトピーが存在する。このように結合律（や恒等律）が同型な 2-射を除いて成立するような「弱い 2-圏」のことを**双圏**という（[5]）：

Proposition 3.2. 理論・翻訳・ホモトピーは双圏 $\mathfrak{Th}$ を構成する。

Proof 次の条件を確かめればよい：

- T から T' への翻訳とその間のホモトピーは圏 $\mathfrak{Th}(T, T')$ を成す。
- 自然な方法で“水平合成函手” $H_{TT'T''}\colon \mathfrak{Th}(T', T'') \times \mathfrak{Th}(T, T') \to \mathfrak{Th}(T, T'')$ が定義される。

[*4] この不一致は翻訳の定義に現れる技術的な条件に依る。大雑把に言えば、翻訳の定義に含まれるデータをできる限り最小限に抑えたとき、それを canonical な方法で論理式の対応に拡張することができないのが原因である。

- ホモトピー $h^{KJI}\colon (KJ)I \Rightarrow K(JI)$ は、次の図に現れる自然同型 h を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{id} \times H_{T_0T_1T_2} \\ \mathfrak{Th}(T_2,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_1,T_2)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_1) & \longrightarrow & \mathfrak{Th}(T_2,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_2) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_{T_1T_2T_3}\times\mathrm{id}} & \overset{h}{\nearrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle H_{T_0T_2T_3}} \\ \mathfrak{Th}(T_1,T_3)\times\mathfrak{Th}(T_0,T_1) & \xrightarrow[H_{T_0T_1T_3}]{} & \mathfrak{Th}(T_0,T_3) \end{array}$$

- 恒等律についても結合律と同様に適当なホモトピーが存在する。
- 以上のデータが coherence axiom を満たす。 ■

Theorem 3.3. 上述の対応は pseudo-functor $\mathfrak{Th} \to \mathfrak{BPretop}_*$ を与える。さらに、これは双圏同値になっている。 □

3.2 定理からの帰結

Definition 3.4. 理論 T, T' が**双翻訳可能**であるとは、翻訳 $I\colon T \to T'$, $J\colon T' \to T$ が存在して $JI \simeq \mathrm{id}_T$, $IJ \simeq \mathrm{id}_{T'}$ が成り立つことをいう。 □

双翻訳可能性は「双圏 $\mathfrak{Th}$ の中における同値」になっている。したがって、双圏同値を通して次が得られる：

Corollary 3.5. 理論 T, T' について、次は同値：

(1) T, T' は双翻訳可能
(2) 圏同値 $\mathcal{P}_T \simeq \mathcal{P}_{T'}$ が存在（この条件は**森田同値**とも呼ばれている） □

また、双圏同値から、特に hom-圏の間の函手 $\mathfrak{Th}(T,T') \to \mathfrak{BPretop}_*(\mathcal{P}_T, \mathcal{P}_{T'})$ が圏同値である。したがって、本質的全射性より、

Corollary 3.6. 任意の pretopos functor $\mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_{T'}$ は、$\mathcal{P}_I$ の形の函手に自然同型。 □

以上より、本節のはじめに掲げた問題に対する回答が得られた。

4 Future Directions

本稿の最後に今後の展望を示す。

4.1 Category Theory for Model Theory

$\mathfrak{Th}$ と $\mathfrak{BPretop}_*$ の双圏同値を示したことにより、Boolean pretopos に関する定理をモデル理論の定理へと直接翻訳することが可能になる。これに基づいて、先行研究の延長として、「圏論を用いてモデル理論の定理を示す」という可能性がある：

(1) 理論の双翻訳可能性と classifying pretopos の圏同値（森田同値）が等価なので、「理論の性質で双翻訳可

能性で不変なものを圏論的に特徴づける」という問題が考えられる。例えば、理論の安定性は双翻訳可能性で不変であることが知られている。したがって、次の定義が well-defined になる：

Definition 4.1. small Boolean pretopos $\mathcal{B}$ に対して、ある安定な理論 T が存在して $\mathcal{B} \simeq \mathcal{P}_T$ であるとき、$\mathcal{B}$ は**安定**であるという。 □

この定義は圏論の言葉で書かれていないので、圏論的特徴付けを考えるのは自然である。もしモデル理論的性質を圏論的に特徴付けできた場合、その性質が種々の圏論的構成（Boolean pretopos の極限・余極限など）で閉じているかを調べることで、安定性の新しい判定法などが得られると期待される。

また、双翻訳可能性で不変な性質 P に対して、$\mathfrak{BPretop}_*^P$ を“性質 P を持つ”Boolean pretopos が成す $\mathfrak{BPretop}_*$ の充満部分-2-圏とするとき、$\mathfrak{BPretop}_*^P$ と $\mathfrak{BPretop}_*$ の関係性を調べることも有用である。特に、埋め込み $\mathfrak{BPretop}_*^P \hookrightarrow \mathfrak{BPretop}_*$ が左-2-随伴を持つことがわかれば、任意の理論 T に対して性質 P を持つような T^P で適当な普遍性を持つものが構成できる。

(2) §1.2 の最後で言及した「翻訳の概念を通して理論間の相互作用を調べる」という問題に対しても、圏論的手法が有用になると予想される。実際、T-モデル $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の elementary diagram と呼ばれる理論 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ がモデル理論では重要で、この構成は双圏同値を通して Boolean pretopos のある種の weighted colimit として表現される。このようなモデル理論における理論の構成と圏論的構成の対応を他の例でも調べることにより、**理論の新しい構成法**が得られると予想される。

(3) classifying pretopos について考察するだけでも先述のような応用の可能性があるが、さらに踏み込んで *classifying topos* という圏を考察することもできる。理論 T の classifying topos は、$\mathcal{P}_T$ に自然に入る Grothendieck 位相 J_T を利用して、$\mathcal{P}_T$ 上の J_T-層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{P}_T, J_T)$ として定義される。一般に層の圏は *Grthendieck topos* と呼ばれる非常にいい圏になっている。$\mathbf{Sh}(\mathcal{P}_T, J_T)$ を $\mathbf{Set}[T]$ と書くことにする。classifying topos は次のような性質を持つ：

- T-モデルは“$\mathbf{Set}[T]$ の点”に対応する。
- $\mathbf{Set}[T]$ から $\mathcal{P}_T$ を復元することが可能である。
- $\mathbf{Set}[T]$ は *coherent topos* と呼ばれるいい性質を持つ Grothendieck topos になっている。
- $\mathbf{Set}[T]$ は様々な同値な構成が存在する：T-モデルの圏に Grothendieck 位相を入れたものや、T-モデルとその間の**同型**から構成される位相亜群から $\mathbf{Set}[T]$ を構成することができる。

したがって、$\mathcal{P}_T$ の情報を保ったままで、より幅広い表現を使ってモデル理論と圏論の関係性を議論することができる。この考え方は、Caramello の“toposes as bridges”の思想に基いている（[1]）。

4.2 Model Theory for Category Theory

モデル理論と圏論の対応に基づけば、「モデル理論の手法を用いて圏論の定理を示す」という可能性も考えられる。実際、pretopos に関する多くの定理はモデル理論的な証明に翻訳することが可能である。さらには、$\mathfrak{BPretop}_*$ における weighted colimit の構成は、2-圏論の一般論を用いるよりもモデル理論的に証明したほうが簡単である。このようにモデル理論的手法が圏論的論理学にとって有用である一方、(small) pretopos そのものが圏論的論理学以外の数学で出てくる場面は多くないため、この手法は一見して数学にあまり関係しないように思われる。

しかし、pretopos から topos へと興味を移すと事情が変わってくる。上述の構成によって pretopos は coherent topos と対応することが知られており、しかも coherent topos は**数学においてもしばしば重要な役割を果たす**。例えば、ホモトピー論で使われる単体的集合の圏 $\mathbf{Set}_{\Delta}$ や、代数幾何で現れる種々の topos [*5]は coherent topos である。また、任意の coherent topos はある理論の classifying topos になる。したがって、圏論的論理学（モデル理論）の手法を用いて数学に現れる topos を調べることが可能である。この方向性の先行研究はほとんど存在しないが、数理論理学と数学との新しいつながりを示唆しているという点で大きな可能性を秘めている、と筆者は考えている。

参考文献

[1] O. Caramello. “The Unification of Mathematics via Topos Theory”. June 20, 2010. arXiv: 1006.3930 [math.CT].

[2] V. Harnik. “Model Theory vs. Categorical Logic: Two Approaches to Pretopos Completion (a.k.a. T^{eq})”. In: *Models, Logics, and Higher-Dimensional Categories: A Tribute to the Work of Mihály Makkai*. MakkaiFest. (Montréal, June 18–20, 2009). Ed. by B. Hart et al. CRM Proceedings & Lecture Notes 53. Centre de Recherches Mathématiques. American Mathematical Society, 2011, pp. 79–106.

[3] W. Hodges. *Model Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 42. Cambridge University Press, 1993.

[4] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Vol. 2. Oxford Logic Guides 44. Clarendon Press, 2002.

[5] T. Leinster. “Basic Bicategories”. Oct. 4, 1998. arXiv: math/9810017.

[6] M. Makkai. “Duality and Definability in First Order Logic”. In: *Memoirs of the American Mathematical Society* **105**.503 (1993). x+106 pp. DOI: 10.1090/memo/0503.

[7] M. Makkai and G. E. Reyes. *First Order Categorical Logic: Model-Theoretical Methods in the Theory of Topoi and Related Categories*. Lecture Notes in Mathematics 611. Springer-Verlag, 1977.

[*5] そもそも topos の概念は、数論幾何におけるコホモロジー論の研究の過程で Grothendieck らによって生みだされたものである。

Finite Euclidean graphs and related combinatorial problems

佐竹 翔平 (Shohei Satake)*

概　　要

Terras らによって導入された Euclid 距離空間の有限類似では, 興味深いことに, Euclidean グラフとよばれるネットワークとしてよい性質 (Ramanujan グラフ) をもつグラフが登場し, その固有値は Kloosterman 和で表されるなどの整数論的な対象との関連も見られる. 一方で, Erdős の距離問題などの Euclid 距離空間での組合せ論的問題を有限類似の空間上で考える研究も近年盛んに行われている.

本稿では, 上記の流れを概説した後, Euclid 距離空間の s-距離集合の問題を有限類似の空間上で考え, Euclidean グラフの固有値の情報を用いたグラフ理論的手法から, その最大サイズの上界を与える. また, 有限上半平面などの他の有限空間への拡張や, 一般化された Euclidean グラフの固有値に関する観察についても触れる.

1. 序

n 次元 Euclid 距離空間は, 実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に, Euclid 距離とよばれる距離関数 $e(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ を導入することで定義される. Euclid 距離空間は数学の様々な分野で登場するもっとも基本的な距離空間であり, 組合せ論や離散幾何学においても, 後述する Erdős の距離問題や s-距離集合などの様々な問題が研究されてきた.

その一方で, Euclid 距離空間の有限類似に関しての研究も近年注目されつつある. Terras ら [13] によって提案された有限類似は, 位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ に, 距離に対応する関数として $d(x,y)=(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$ を導入するというものである. ここで, $d(x,y)$ は平行移動に関する不変性は持つが, 三角不等式などの距離関数のその他の性質は持ちえないため, 空間 $(\mathbb{F}_q^n,d)$ は距離空間ではない. しかし Euclidean グラフという応用上重要なクラス (Ramanujan グラフ) に属するグラフが登場し, また上記で述べたような Euclid 空間で研究された問題をこの空間で考えることで, 加法的数論との関連が見られるなどの点で極めて興味深い.

本稿では, 上記の流れを概説したのち, Euclid 距離空間の s-距離集合の問題を空間 $(\mathbb{F}_q^n,d)$ 上で考える. 本稿の構成は以下の通りである. まず第 2 節と第 3 節で Euclidean グラフと Ramanujan グラフについて述べ, 第 4 節で Erdős の距離問題と関連する結果を述べる. 第 5 節では s-距離集合の問題と著者の主結果について述べ, 最後に第 6 節では他の有限空間への結果の拡張や一般化された Euclidean グラフの固有値に関する観察を述べる.

2. Euclidean グラフ

本節では, Euclidean グラフに関する諸性質と Ramanujan グラフについて述べる. 以下では $q=p^r$ は奇素数べきとする.

* 〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学 大学院システム情報学研究科 情報科学専攻
e-mail: 155x601x@stu.kobe-u.ac.jp

定義 2.1 ([13])**.** $a \in \mathbb{F}_q$ とする. このとき, 頂点集合に $\mathbb{F}_q^n$ をもち, 異なる 2 頂点 x, y が $d(x,y) = a$ のとき隣接すると定義されるグラフ $E_q(n,a)$ を *Euclidean* グラフとよぶ.

グラフ $E_q(n,a)$ に関しては次の事実が知られている.

命題 2.2 ([13])**.** $E_q(n,a)$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) $n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ の場合を除き, $E_q(n,a)$ は $q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})$-正則である. すなわち各頂点の次数 (接続する辺の数) は $q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})$ である. $n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ のとき, $E_q(n,a)$ の各頂点の次数は 0 であり, $E_q(n,q)$ は辺を持たない.

(2) $n = 2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ かつ $a = 0$ の場合を除き, $E_q(n,a)$ は連結, すなわち任意の 2 頂点を結ぶ道が存在する.

さらに, $E_q(n,a)$ の隣接行列の固有値については, 次の結果が知られている. ただし, グラフ G の隣接行列 $A(G) = (a_{u,v})_{u,v \in V(G)}$ は, u と v が隣接するとき $a_{u,v} = 1$, そうでないとき $a_{u,v} = 0$ として定義される. 本稿では, $A(G)$ の固有値を単に G の固有値とよぶことにする.

命題 2.3 ([13])**.** $E_q(n,a)$ の固有値は, 以下の表示を持つ:

$$\lambda_b = G_1^n \cdot K(\varepsilon^n \mid a, d(b/2, 0)).$$

ここで, $\varepsilon(t)$ は $\mathbb{F}_q$ の平方剰余指標とする. すなわち,

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \text{が平方元;} \\ -1 & t \text{が非平方元;} \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

また, G_1 は Gauss 和, すなわち

$$G_1 = \sum_{t \in \mathbb{F}_q} \varepsilon(t) \exp\Big(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(t)\Big)$$

であり, $\mathbb{F}_q$ の乗法指標 χ に対し, $K(\chi \mid c,d)$ は Kloosterman 和, すなわち

$$K(\chi \mid c,d) = \sum_{t \in \mathbb{F}_q^*} \chi(t) \exp\Big(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(-ct - dt^{-1})\Big)$$

である.

3. Ramanujan グラフ

次に Ramanujan グラフについて述べる. 以下では, G は k-正則 n 頂点グラフとする. まずグラフ G の拡大定数 $h(G)$ を次で定義する:

$$h(G) = \min_{1 \le |S| \le \frac{n}{2}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

ただし, S は G の頂点部分集合を動くとし, $\partial S = \{u \notin S \mid \exists v \in S,\, u \text{ は } v \text{ と隣接する}\}$ とおく. $h(G)$ は G における局所的な辺の「結ばれ具合」を測る量である. また, $\mathrm{diam}(G)$ で G の直径 (G 内の最長道の長さ) とおく. 上の 2 つの量は G の固有値によって, 次のように評価できる.

事実 3.1 (e.g. [10])**.** k-正則グラフ G が連結であるとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{diam}(G) \le \frac{\log(n-1)}{\log \frac{k}{\lambda(G)}} + 1,$$

$$h(G) \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda(G)}{k}\right).$$

ただし, $\lambda(G) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } |\lambda| \ne k \text{ なる } G \text{ の固有値}\}$ とおく.

さて, k-正則グラフ G をネットワークとみなしたとき, 断線に対するある程度の強さを保証するためには $h(G)$ の値は大きい方が望ましい. また, 各 2 点が通信する場合, 経由する地点は少ない方がよいため, $\mathrm{diam}(G)$ は小さい方が望ましい. よって, これら 2 つの要請を満たすには, $\lambda(G)$ を小さくすればよい. だが, Alon-Boppana による次の漸近的な下界が知られている.

定理 3.2 ([12])**.** 固定された k に対し, $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を $|V(G_i)| \to \infty$ $(i \to \infty)$ なる任意の k-正則グラフの無限列とする. このとき,

$$\liminf_{i\to\infty} \lambda(G_i) \ge 2\sqrt{k-1}.$$

この下界から, Lubotzky-Phillips-Sarnak [12] によって, Ramanujan グラフが定義された.

定義 3.3 ([12])**.** k-正則グラフ G が $\lambda(G) \le 2\sqrt{k-1}$ を満たすとき, G を *Ramanujan* グラフとよぶ.

さて, 前節で Euclidean グラフを紹介したが, 命題 2.2, 2.3 と Kloosterman 和に関する Weil の結果から次が言える.

定理 3.4 ([13])**.** $|\lambda(E_q(n,a))| \le 2q^{\frac{n-1}{2}}$. すなわち, $E_q(n,a)$ は ($q \to \infty$ のとき) 漸近的に *Ramanujan* グラフとなる.

注意 3.5. n が奇数かつ $a = 0$ のとき, 実際は $E_q(n,a)$ は *Ramanujan* グラフとなる.

注意 3.6. ネットワークは, 「よく結ばれて」いて, かつ「辺が多すぎない (疎である)」という 2 つの相反する要請を満たしてほしい. しかし $E_q(n,a)$ の次数を見ると, 辺が多くなってしまうように思われる. 一般に, *Ramanujan* グラフの構成の問題においては, 固定された次数に対する *Ramanujan* グラフの頂点増大無限列を作ることがゴール

になっている (と思われる). なぜなら, 固定された次数に対して, そのような列が取れれば, 十分大きな頂点数に着目したとき疎であるような *Ramanujan* グラフが得られる (前述の *Ramanujan* グラフの登場の流れから, 1 つ目の要請は満たされていて, インターネットのネットワークなどを考えると大きなものがほしいはず). しかし, 現在のところ, そのような無限列の存在性は任意の次数に対して非構成的手法で示されているが, 明示的構成に関しては, 非常に限られた次数と頂点数のパラメータに対してしか知られていない. よって, *Euclidean* グラフのような次数が固定されない *Ramanujan* グラフの頂点増大列も興味深い対象である. 詳細は *[10], [15]* 等を参照されたい.

4. Erdős の距離問題

Erdős の距離問題は, Erdős [7] の仕事から始まり, 今日まで多くの数学者が挑戦してきた問題である. より詳細については, 教科書 [8] 等を参照されたい.

問題 4.1 ([7])**.** 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $\Delta(X) := \{e(x,y) \mid x,y \in X, x \neq y\}$ とおく. このとき, 自然数 m に対し, $g_n(m) := \min\{|\Delta(X)| \mid |X| = m\}$ を決定せよ.

例えば, $n = 2$ のとき, 容易にわかるとおり $g_2(3) = 1$, $g_2(4) = 2, \ldots$ となる. しかし, $n = 2$ のときにおいても, m が大きくなると $g_2(m)$ を決定することは極めて難しい. $n = 2$ の場合は, 2015 年に Guth-Katz [9] によって, 次の結果が得られている.

定理 4.2 ([9])**.**

$$g_2(m) \geq m^{1-o(1)}.$$

また一般の n に関しては Solymosi-Vu [14] による次の結果が知られている.

定理 4.3 ([14])**.**

$$g_n(m) \geq \Omega(m^{2/n-2/n(n+2)}).$$

一方で, 有限空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ 上で, Erdős の距離問題を考える研究が Bourgain-Katz-Tao [5], Iosevich-Rudnev [11] らによって行われている.

問題 4.4 ([11])**.** $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対し, $\Delta_d(X) := \{d(x,y) \mid x,y \in X, x \neq y\}$ とおく. このとき, 自然数 m に対し, $g_{q,n}(m) := \min\{|\Delta_d(X)| \mid |X| = m\}$ を決定せよ.

本問題は Erdős の距離問題の自然な類似・拡張であり, 加法的数論における "sum-product estimate" の問題と関連する (興味のある方は, [5, Section 7] 等を参照されたい). 現在のところ, 次の結果がもっともよい評価であるように思われる.

定理 4.5 ([9])**.** 十分大きな定数 C に対し $m \geq Cq^{\frac{n}{2}}$ ならば,

$$g_{q,n}(m) \geq \min\Big\{q, \frac{m}{q^{\frac{n-1}{2}}}\Big\}.$$

オリジナルの証明では Fourier 解析の手法が用いられているが, Vinh [16] によって, Euclidean グラフの固有値とランダムグラフの理論における結果を用いたグラフ理論的な別証明が与えられた. 次節で述べる著者の主結果も, Vinh [16] のアプローチから着想を得ている.

5. s-距離集合と主結果

距離集合の問題は「均整の取れた点の配置とは何か?」という問いに端を発し, 代数的組合せ論や離散幾何学で研究されてきた. より詳細は, 坂内-坂内 [2] 等を参照されたい.

問題 5.1. s を正の整数とする. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $|\Delta(X)| = s$ が成り立つとき, X を $\mathbb{R}^n$ 上の s-距離集合とよぶ. $\mathbb{R}^n$ 上の s-距離集合のサイズの最大値 $f_n(s)$ を求めよ.

この問題については, Bannai-Bannai-Stanton [3] による次の結果がよく知られており, 定理内の評価で等号を達成する例などについて盛んに研究されている.

定理 5.2 ([3])**.**

$$f_n(s) \leq \binom{n+s}{s}.$$

本稿では有限空間 $(\mathbb{F}_q^n, d)$ における s-距離集合を定義し, 上記の問題の自然な類似を考える (ただし, もともとの問題の幾何的な動機からは離れてしまったものになるかもしれない).

問題 5.3. $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対して, $|\Delta_d(X)| = s$ が成り立つとき, X を $\mathbb{F}_q^n$ 上の s-距離集合とよぶ. このとき, $\mathbb{F}_q^n$ の s-距離集合の濃度の最大値 $f_{n,q}(s)$ を求めよ.

以下が本稿における主結果である.

定理 5.4. 任意の s と $n \geq 2$, そして十分大きな q に対し, 次が成り立つ.

$$f_{n,q}(s) \leq \frac{2sq^{\frac{n-1}{2}} + 1}{1 - o(1)}.$$

以下では証明のアイデアを述べる. まず, ランダムグラフの理論において次の性質がよく知られている.

補題 5.5 (e.g. [1])**.** G を非 2 部的な k-正則 n 頂点グラフとする. このとき, G の任意の頂点部分集合 X に対し,

$$\left| e_G(X) - \frac{k}{2n}|X|^2 \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \lambda(G) \cdot |X|$$

が成り立つ. ただし, $e_G(X)$ は X 内に両端点をもつ G の辺の総数とする.

さて, 命題 2.2 より 2.3 から, $e(B)$ の上界が q と n を用いて表される. すなわち,

$$e_{E_q(n,a)}(X) \leq \frac{2q^{\frac{n-1}{2}}}{2}|X| + \frac{q^{n-1} + O(q^{\frac{n}{2}})}{2q^n}|X|^2. \tag{1}$$

さらに, $X \subset \mathbb{F}_q^n$ に対して,

$$\binom{|X|}{2} = \sum_{a \in \Delta_d(X)} e_{E_q(n,a)}(X). \tag{2}$$

いま, X が $\mathbb{F}_q^n$ 上の s-距離集合であるとすると, $|\Delta_d(X)| = s$ である. さらに, $a_1 \neq a_2$ ならば $E_q(n, a_1)$ と $E_q(n, a_2)$ は辺を共有しないことに注意し, (1) を (2) に代入し $|X|$ について解くことで, 定理を得る.

6. 諸注意

本節では, 関連する諸注意を述べる. まず$\mathbb{F}_q$上の非退化な2次形式Qに対し, $d(x,y)$の代わりに$Q(x-y)$をとっても, すなわち有限空間$(\mathbb{F}_q^n, Q)$上でs-距離集合の問題を考えても同様の結果が得られる. ここでは, Euclideanグラフの代わりに一般化されたEuclideanグラフ$E_q(Q,n,a)$を考える. ただし, グラフ$E_q(Q,n,a)$は, 頂点集合に$\mathbb{F}_q^n$をもち, 異なる2頂点x,yが$Q(x-y)=a$のとき隣接すると定義されるグラフである. このグラフはBannai-Shimabukuro-Tanaka [4]によって定義され, Ramanujanグラフであるかどうかが議論されている. その際$E_q(Q,n,a)$の固有値もKloosterman和で表されることが代数的組合せ論におけるアソシエーションスキームの指標表を見ることで示されている. しかし (本質的には同じなのかもしれないが), [13]またはCarlitz [6]の初等的な指標和の計算を用いれば, 彼らが示した事実は単純な計算から示すことができる.

また, 非Euclid空間である距離空間の一つとして, 複素上半平面があるが, 上半平面についても有限体上への類似 (有限上半平面) が与えられている.

定義 6.1 (see [15] or [10]). δを$\mathbb{F}_q$の非平方元とする. このとき, $H_q := \{x+y\sqrt{\delta} \mid x,y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0\}$を$\mathbb{F}_q$上の有限上半平面とよぶ. また, H_qの2点z, wの *"Poincaré*距離*"*を

$$P(z,w) = \frac{N(z-w)}{Im(z)Im(w)} \in \mathbb{F}_q$$

とおく. ただし$z = x+y\sqrt{\delta} \in H_q$に対して, $N(z) = z\bar{z} = (x+y\sqrt{\delta})(x-y\sqrt{\delta})$, $Im(z) = y$とする.

$a \in \mathbb{F}_q$に対して, 頂点集合にH_qを持ち, 異なる2点z, wが$P(z,w)=a$のとき隣接すると定義されるグラフを$X_q(\delta,a)$で表す. $X_q(\delta,a)$はq^2-q個の頂点を持ち, $a \neq 0, 4\delta$のとき連結な$(q+1)$-正則グラフになる. また$a = 0, 4\delta$のときは非連結であり, 各連結成分が2点からなることが知られている ([15]または[10]参照). さらに, $a \neq 0, 4\delta$のときは, Soto-Andrade和の評価から$X_q(n,a)$はRamanujanグラフとなる ([15]参照). 以上から主定理の証明と同様にして次の定理が得られる.

定理 6.2. H_q上の *"Poincaré*距離*"*Pに関するs-距離集合のサイズの最大値を$h_q(s)$とおく. このとき,

$$h_q(s) \leq \frac{2s\sqrt{q}+1}{1-o(1)}.$$

参考文献

[1] N. Alon, J. H. Spencer, The Probabilistic Method, John Wiley & Sons, Inc., 2016.

[2] 坂内英一, 坂内悦子, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー, 1999.

[3] Ei. Bannai, Et. Bannai, D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space II, *Combinatorica* **3** (1983), no. 2, 147–152.

[4] Ei. Bannai, O. Shimabukuro, H. Tanaka. Finite Euclidean graphs and Ramanujan graphs. *Discrete Math.* **309** (2009), no. 20, 6126-6134.

[5] J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, A sum-product estimate in finite fields, and applications, *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), no. 1, 27–57.

[6] L. Carlitz, Weighted quadratic partitions over a finite field, *Canadian J. Math.* **5** (1953), 317-323.

[7] P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly* **53**, (1946), 248–250.

[8] J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger, The Erdős Distance Problem, American Mathematical Society, 2011.

[9] L. Guth, N. H. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane, *Ann. of Math.* (2) **181** (2015), no. 1, 155–190.

[10] 平松 豊一, 知念 宏司, 有限数学入門 有限上半平面とラマヌジャングラフ, 牧野書店, 2003.

[11] A. Iosevich, M. Rudnev, Erdős distance problem in vector spaces over finite fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 12, 6127–6142.

[12] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica* **8** (1988), no. 3, 261–277.

[13] A. Medrano, P. Myers, H. M. Stark, A. Terras, Finite analogues of Euclidean space, *J. Comput. Appl. Math.* **68** (1996), no. 1-2, 221-238.

[14] J. Solymosi, V. H. Vu, Near optimal bounds for the Erdős distinct distances problem in high dimensions, *Combinatorica* **28** (2008), no. 1, 113–125.

[15] A. Terras, Fourier Analysis on Finite Groups and Applications, Cambridge University Press, 1999.

[16] L.A. Vinh. Explicit Ramsey graphs and Erdős distance problems over finite Euclidean and non-Euclidean spaces. *Electron. J. Combin.* **15** (2008), no. 1, #R5.

New upper bounds for anti-collusion schemes: A graph theoretical approach

Yujie Gu

Graduate School of Systems and Information Engineering,
University of Tsukuba

s1530147@u.tsukuba.ac.jp

1 Introduction

To protect the copyright of digital contents, a dealer who possesses a large amount of copyrighted data would charge for the copyright of data. The one who paid for the copyright can get the access to data, and the guy who did not pay would be held back. In broadcast encryption, the dealer encrypts the copyrighted data and uploads to a public cloud. Anyone can download the public encrypted contents, but a decryption key is required to recover the original data.

To hinder the illegal redistribution of the decryption key, the dealer would assign each authorized user, who purchased the copyright of data, a personal decoder, which is a collection of base decryption keys and can be used to recover the data (maybe with the help of some devices). However, several dishonest users (traitors) may work together to generate a new decoder (pirate) and distribute it to several unauthorized users. Anti-collusion schemes were introduced to help the dealer design the judicious key-distribution strategy and trace back to traitors once a pirate copy is confiscated [2, 3].

Based on a threshold secret sharing scheme, Stinson *et al.* [9] proposed the traceability scheme for the anti-collusion key-distribution in broadcast encryption and studied it from a combinatorial viewpoint. In this setting, a traceability scheme(v, k) is a set system $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ with the desired properties, where $\mathcal{X}$ is a finite set of size v and $\mathcal{B}$ is collection of k-subsets of $\mathcal{X}$. The ground set $\mathcal{X}$ corresponds to the set of v base keys. Each authorized user, who paid for the copyright, is assigned with a k-subset of $\mathcal{X}$, which can be used to decrypt the encrypted contents. Thus the family $\mathcal{B}$ of k-subsets of $\mathcal{X}$ represents all the authorized users.

A *t-collusion* means that t dishonest users (traitors) $B_1, \ldots, B_t \in \mathcal{B}$ work together to generate a k-subset (pirate) $T \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq t} B_i$ and redistribute T to some unauthorized users. Stinson *et al.* [9] showed that their traceability scheme can ensure that once a pirate in a t-collusion is confiscated, at least one traitor can be traced back. Also in the same setting, parent-identifying set system was investigated in [4] with the advantage that can accommodate more users than traceability schemes, where the required properties are weaker than that of traceability schemes. The idea of parent-identifying property was introduced by Hollmann *et al.* in [8]. We first state the definition of parent-identifying set systems as follows.

Definition 1. *A (w, v) t-parent-identifying set system (or t-IPPS(w, v), for short) is a pair $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ such that $|\mathcal{X}| = v$, $\mathcal{B} \subseteq \binom{\mathcal{X}}{w}$, with the property that for any w-subset $T \subseteq \mathcal{X}$, either $P_t(T)$ is empty, or*

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in P_t(T)} \mathcal{P} \neq \emptyset,$$

where

$$P_t(T) = \{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B} : \ |\mathcal{P}| \leq t, \ T \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{P}} B\}.$$

When a pirate T generated by a s-collusion, $1 \leq s \leq t$, is confiscated, t-IPPSs ensure that at least one traitor can be traced back. In fact, one could check each subset of $\mathcal{B}$ with size at most t and then get $P_t(T)$. By Definition 1, the intersection of all members in $P_t(T)$ is nonempty, and each guy in the intersection is a traitor.

The cardinality of $\mathcal{B}$ is called the *size* of the set system. Since the size of the set system corresponds to the number of authorized users in this scheme, we expect that the size can be as large as possible. Denote $I_t(w, v)$ as the maximum size of a t-IPPS(w, v). A t-IPPS(w, v) is called *optimal* if it has size $I_t(w, v)$. Given parameters t, w and v, the goal is to explore the exact value of $I_t(w, v)$ and to construct optimal t-IPPS(w, v). In the next section, we will argue the bounds of $I_t(w, v)$.

The following is one example of 2-IPPS.

Example 1. *Let $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, 11\}$ and $\mathcal{B} = \{B_1 = \{1, 2, 3, 4\}, B_2 = \{3, 5, 6, 7\}, B_3 = \{4, 7, 8, 9\}, B_4 = \{2, 7, 10, 11\}\}$. By Definition 1, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ is a 2-IPPS$(4, 11)$.*

For instance, if $T = \{2, 3, 5, 7\}$, we have

$$\{2, 3, 5, 7\} \subseteq B_1 \cup B_2,$$
$$\{2, 3, 5, 7\} \subseteq B_2 \cup B_4.$$

Then $P_2(T) = \{\{B_1, B_2\}, \{B_2, B_4\}\}$ and $\bigcap_{\mathcal{P} \in P_2(T)} \mathcal{P} = \{B_2\} \neq \emptyset$.

One can check that for each 4-subset $T \subseteq \mathcal{X}$, the desired property in Definition 1 can be satisfied. Thus $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ is a 2-IPPS$(4, 11)$.

2 Bounds for IPPS

2.1 Known results

In the literature, a combinatorial structure called *own-subset* by Erdős, Frankl and Füredi [5] was used to derive upper bounds for IPPS. In a set system $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $B \in \mathcal{B}$, a subset $B_0 \subseteq B$ is called a $|B_0|$-*own-subset* of B if for any $B' \in \mathcal{B} \setminus \{B\}$, we have $B_0 \nsubseteq B'$.

The first upper bound for IPPS was given by Collins in [4] by investigating own-subsets with size $\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil$.

Theorem 1 ([4])**.** *Let $v \geq w \geq 2, \ t \geq 2$ be integers. Then*

$$I_t(w, v) \leq \frac{\binom{v}{\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil}}{\binom{\lceil \frac{w}{\lfloor t/2 \rfloor + 1} \rceil - 1}{\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil - 1}} = O(v^{\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil}).$$

In [7], Gu and Miao improved the above upper bound by showing that some block of a t-IPPS must contain at least one own-subset with a smaller size than $\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil$, that is, own-subsets with size $\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + t} \rceil$. Obviously, $\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + t} \rceil \leq \lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + \lceil t/2 \rceil} \rceil$ holds for all $v \geq w \geq 2$ and $t \geq 2$.

Theorem 2 ([7]). *Let $v \geq w \geq 2$, $t \geq 2$ be integers. Then*

$$I_t(w, v) \leq \binom{v}{\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + t} \rceil} = O(v^{\lceil \frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + t} \rceil}).$$

Furthermore, Gu *et al.* [6] provided a lower bound for IPPS by virtue of the probabilistic methods, which shows that the upper bound in Theorem 2 has the best possible exponent for certain cases.

Theorem 3 ([6]). *Let w and t be fixed positive integers such that $t \geq 2$. Then there exists a constant c, depending only on w and t, with the following property. For any sufficiently large integer v, there exists a t-IPPS(w, v) with size at least $cv^{\frac{w}{u-1}}$, that is, $I_t(w, v) \geq cv^{\frac{w}{u-1}}$, where $u = \lfloor (\frac{t}{2} + 1)^2 \rfloor$.*

2.2 New results

We can see that the upper bound in Theorem 2 and the lower bound in Theorem 3 have the same order of magnitude, $\frac{w}{\lfloor t^2/4 \rfloor + t}$, when $\lfloor t^2/4 \rfloor + t$ is a divisor of w and v is sufficiently large. However, when $\lfloor t^2/4 \rfloor + t$ is not a divisor of w, there is a gap between the order of magnitude in Theorem 2 and in Theorem 3. In the following, we consider the case that $t = 2$ and $w = 4$, where $3 \nmid 4$.

First, we have the following corollary directly from Theorem 2 and Theorem 3.

Corollary 1. *For sufficiently large v, we have*

$$cv^{4/3} \leq I_2(4, v) \leq \frac{1}{2}v^2,$$

where c is a positive constant.

One interesting problem is to determine the order of magnitude of the size of 2-IPPS$(4, v)$. By using a graph theoretic method, we show that

Theorem 4. $\lim_{v \to \infty} I_2(4, v) = o(v^2)$.

The tool exploited in the argument of Theorem 4 is the well-known graph removal lemma proved by Alon, Duke, Lefmann, Rödl and Yuster in [1].

Lemma 1 ([1]). *For every $\gamma > 0$ and every positive integer k, there exists a constant $\delta = \delta(k, \gamma) > 0$ such that every graph G on n vertices, containing less than δn^k copies of the complete graph K_k on k vertices, contains a set of less than γn^2 edges whose deletion destroys all copies of K_k in G.*

Theorem 4 can be generated to the case $t = 3$ and $w = 6$ by a similar argument.

Theorem 5. $\lim_{v\to\infty} I_3(6,v) = o(v^2)$.

However, for $t \geq 4$ and $w = \lfloor(\frac{t}{2}+1)^2\rfloor$, we may cannot have a similar argument as that of Theorem 4. Since in a graph, we can only get $2t$ points from t distinct edges, and the fact $w = \lfloor(\frac{t}{2}+1)^2\rfloor > 2t$ for any $t \geq 4$ implies that $2t$ points are not enough to form a w-subset. But we believe that this obstacle can be removed by virtue of hypergraphs or some elaborate analyses. To be precise, we have the following conjecture.

Conjecture 1. *Suppose $t \geq 4$ is a positive integer, then*

$$\lim_{v\to\infty} I_t(w,v) = o(v^2),$$

where $w = \lfloor(\frac{t}{2}+1)^2\rfloor$.

Moreover, we conjecture that the upper bound in Theorem 4 is the best possible for 2-IPPS$(4,v)$. To be exact, we have

Conjecture 2. *For any constant $\epsilon > 0$ and sufficiently large v, there exists a 2-IPPS$(4,v)$ with size $cv^{2-\epsilon}$, where c is a positive constant.*

We remark that to prove Conjecture 2, some techniques or tools in number theory and additive combinatorics may be required.

References

[1] N. Alon, R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, and R. Yuster, The algorithmic aspects of the regularity lemma, *J. Algorithms*, vol. 16, pp. 80–109, 1994.

[2] B. Chor, A. Fiat, and M. Naor, Tracing traitors, *in Cryto'94 (Lecture Notes in Computer Science),* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, vol. 839, pp. 480–491, 1994.

[3] B. Chor, A. Fiat, M. Naor, and B. Pinkas, Tracing traitors, *IEEE Trans. Inf. Theory,* vol. 46, no. 3, pp. 893–910, May 2000.

[4] M.J. Collins, Upper bounds for parent-identifying set systems, *Des. Codes Cryptogr.,* vol. 51, pp. 167–173, 2009.

[5] P. Erdős, P. Frankl, and Z. Füredi, Families of finite sets in which no set is covered by the union of r others, *Israel J. Math.,* vol. 51, pp. 79–89, 1985.

[6] Y. Gu, M. Cheng, G. Kabatiansky, and Y. Miao, Probabilistic existence results for parent-identifying schemes, preprint.

[7] Y. Gu and Y. Miao, Bounds on traceability schemes, *IEEE Trans. Inf. Theory,* to appear.

[8] H. D. L. Hollmann, J. H. van Lint, J.-P. Linnartz, and L. M. G. M. Tolhuizen, On codes with the identifiable parent property, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 82, pp. 121–133, 1998.

[9] D.R. Stinson and R. Wei, Combinatorial properties and constructions of traceability schemes and frameproof codes, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 11, pp. 41–53, 1998.

Spiking Neural Network にみられる線形分離性

北海道大学大学院理学院数学専攻　博士課程 1 年　藤堂真登 Todo Masato

1　導入

脳の情報表現に関する問題は, 脳科学における最も重要な問題の一つである. 特に人間の知的な振る舞いを可能にする脳部位である大脳皮質の情報表現を理解することは, 知能とは何かを考える上で, 一つの大きな手掛かりとなるだろう. 本研究では同期発火するセルアセンブリを情報表現の手法だと仮定する. その上で, 情報伝達の物理的拘束条件が, 線形不等式から得られることを指摘し, そのことを数値シミュレーションにより確認する.

2　線形不等式による連想記憶モデルの解法

b を m 次元実ベクトル, A を $m \times n$ 型実行列とし, 次の線形不等式を考える.

$$Aw \leq b \tag{1}$$

(1) 式を満たす解 $w \in \mathbb{R}^n$ は Fourier-Motzkin 法を用いることで求められる. 次の定理は, Fourier-Motzkin 法を用いることで証明できる [1].

定理 1. *(1)* が解 $w \in \mathbb{R}^n$ をもたない $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^m_+ \ \ s.t. \ \ A^T y = 0, b^T y < 0$

次に連想記憶モデルと呼ばれるニューラルネットワークを考える. 2 層の階層型ニューラルネットワークを考え, 入力層の状態を $x \in \{0,1\}^M$, 出力層の状態を $y \in \{0,1\}^N$ とする. パターン対 $(x^d, y^d)_{d=1}^D$ に対して, 次のようなモデルを考える.

定義 1. *(2 値相互想起型連想記憶モデル)* 次のような $N \times M$ 型実行列 W が存在するとき, *2* 値相互想起型連想記憶モデルという.

$$\forall d \qquad y^d = H(Wx^d + \theta) \tag{2}$$

ここで, $\theta \in \mathbb{R}^N$ はバイアス項と呼ばれ, $H : \mathbb{R}^M \to \{0,1\}^N$ は, 各成分が次のようなステップ関数 $h : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ からなるとする.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{3}$$

以上の連想記憶モデルの解法として, 行列 W を相関行列と呼ばれる行列にとる方法や, 一般化逆行列にとる方法が知られている. 相関行列は, Hebb 則と呼ばれるニューラルネットワークの学習則から得られる. 一般化逆行列は, 一般の線形方程式を解くために使われる. 一方で (2) 式のような 2 値の連想記憶モデルには, 次のよ

うに線形不等式を解くのが自然であると考える. 行列 W の i 行目の行ベクトルを w_i とし, y_i^d, θ_i をそれぞれ y^d, θ の第 i 成分とする. 任意の $d \in \{1, ..., D\}, i \in \{1, ..., N\}$ に対し, 次が成り立つとき (2) 式を満たす.

$$\begin{cases} y_i^d = 1 \Rightarrow w_i \cdot x^d + \theta_i \geq 0 \\ y_i^d = 0 \Rightarrow w_i \cdot x^d + \theta_i < 0 \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad w_i \cdot x^d + \theta_i \leq -\epsilon \end{cases} \tag{4}$$

(4) 式はさらに, $\forall i$, $\forall \epsilon > 0$ に対し,

$$X_i w_i \leq \Theta_i \tag{5}$$

と表せる. ここで X_i は, d 行目の行ベクトルとして $-(2y_i^d - 1)x^d$ をとる $D \times M$ 行列で, Θ_i は d 成分として $(2y_i^d - 1)\theta_i + (y_i - 1)\epsilon$ をとる D 次元ベクトルである. 定理 1 を使うことで, 次のように連想記憶モデルの可解性を判定することができる.

例題 1. *$M = 2, N = 1$ の場合において, 次のパターン対 $\{x^d, y^d\}_{d=1}^4$ に対する 2 値相互想起型連想記憶モデルは存在しない. パターン対 $x^1 = (1, 0),\ y^1 = 1,\ x^2 = (0, 1),\ y^2 = 1,\ x^3 = (1, 1),\ y^3 = 0, x^4 = (0, 0), y^4 = 0$. 実際, (x^4, y^4) から $\theta < 0$ である. $z = (1, 1, 1)^T$ とすると, $X^T z = 0$, $\Theta^T \cdot z = \theta - \epsilon < 0$. ゆえに定理 1 から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し (5) 式を満たす解 w_1 が存在しないことがわかる.*

このようなパターン対の識別を XOR 問題といい, 例題 1 は XOR パターンが線形分離不可能ということを示したことになる [2].$w_1 = (w_{11}, w_{12})$ とおくと, このことは (w_{11}, w_{12}) 平面上で図 1 のように現れる. ここで $\theta < 0$ とし, 領域 $H_1, \cdots, H_7$ は, 超平面 $h_{10} = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta = 0\}, h_{01} = \{w_1 | w_1 \cdot x^2 + \theta = 0\}, h_{11} = \{w_1 | w_1 \cdot x^3 + \theta = 0\}$ で分割される領域を $h_{10}^u = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta \geq 0\}, h_{10}^d = \{w_1 | w_1 \cdot x^1 + \theta < 0\}$ などとおき, $H_1 = h_{10}^u \cap h_{01}^u \cap h_{11}^u,\ H_2 = h_{10}^u \cap h_{01}^d \cap h_{11}^u, H_3 = h_{10}^d \cap h_{01}^u \cap h_{11}^u, H_4 = h_{10}^d \cap h_{01}^d \cap h_{11}^u, H_5 = h_{10}^u \cap h_{01}^d \cap h_{11}^d, H_6 = h_{10}^d \cap h_{01}^u \cap h_{11}^d, H_7 = h_{10}^d \cap h_{01}^d \cap h_{11}^d$ と表される領域である. 明らかに $h_{10}^u \cap h_{01}^u \cap h_{11}^d$ が存在しない.

3 Spiking Neuron Network の概要

神経細胞 (Neuron) は, 脳の情報表現を担う最小単位のユニットであると考えられている. 神経細胞の生理学的な振る舞いを常微分方程式で表現したのが, Spiking Neuron である. 一般的に次のように表せる.

$$\frac{dv}{dt} = f(v, u), \quad \frac{du}{dt} = g(v, u) \tag{6}$$

ここで, 時間 $t \in [0, \infty)$, 膜電位 $v \in \mathbb{R}^1$, チャネル変数 $u \in \mathbb{R}^n$ とし,f, g をベクトル値関数とする. n=1 のモデルとして Fitzhugh-Nagumo モデル, n=3 では Hodgkin-Huxley モデルが有名である. 以上のような Spiking Neuron は, 理論的には力学系の分岐理論によって確立している [3]. その理論では, 神経細胞の閾値がセパラトリクスによって定義される. 特に excitable state にある場合閾値は, サドルの安定多様体に対応する.

次に, Spiking Neuron に外部刺激を加えた状況を考える. 外部刺激とは, 他の神経細胞からのスパイクや, 環境ノイズのことである. 特に生体内の大脳皮質の神経細胞は興奮性と抑制性があり, それらはポアソン過程でスパイクを発することが知られている. そこで興奮性と抑制性の外部刺激をそれぞれ $I_E(t), I_G(t)$ で表すと,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f(v, u) + I_E(t) + I_G(t), \quad \frac{du}{dt} = g(v, u) \\ I_E(t) &= a_E \sum_j \alpha(t - t_E^j), \quad I_G(t) = a_G \sum_j \alpha(t - t_G^j) \end{aligned} \tag{7}$$

とかける. ここで a_E, a_G をそれぞれ興奮性と抑制性の背景活動の大きさとし, $\alpha(t)$ は, スパイクに対する応答関数とする. 興奮性と抑制性のスパイク列 $\{t_E^j\}, \{t_G^j\}$ が平均発火率 λ_E, λ_G のポアソン過程で生成されるとする. このようなノイズの影響で膜電位は確率的に変動する. Spiking Neuron として Integrate-and-Fire モデル, 応答関数としてデルタ関数を考え, a が十分小さいと仮定すると, Fokker-Planck 方程式を使って膜電位の確率密度関数の時間発展を解析することができる [4,5].

4 線形分離性によるセルアセンブリの物理的拘束条件

大脳皮質の情報表現の手段の一つとして, セルアセンブリ仮説というものがある. 複数の神経細胞の発火状態の組み合わせ, セルアセンブリが情報の単位となっているという仮説である. セルアセンブリにもいくつかの様式が考えられるが, ここでは synfire chain を考える [6]. synfire chain とは, 数ミリ秒の間隔内で同期したスパイクを発するセルアセンブリを一つの単位とし, そのようなセルアセンブリからの同期したスパイク入力が次のセルアセンブリを形成するという仮説である.

本質的には, セルアセンブリ $x \in \{0,1\}^M$ から入力を受け取る後細胞 y が発火するか, しないかということなので, 同期したスパイクからの外部刺激を $I_{syn}(t)$ で表し, 後細胞の Spiking Neuron を次のように表す.

$$\frac{dv}{dt} = f(v,u) + I_E(t) + I_G(t) + I_{syn}(t), \quad \frac{du}{dt} = g(v,u)$$
$$I_E(t) = a_E \sum_j \alpha(t - t_E^j), \quad I_G(t) = a_G \sum_j \alpha(t - t_G^j)$$
$$I_{syn} = \sum_{k=1}^{M} x_k w_k \alpha(t - T) \tag{8}$$

ここで, w_k は k 番目の神経細胞からのスパイクの大きさとする. 時刻 T で x からの入力を受け取るとする. そこで $\alpha(t) = h(t)exp(-\frac{t}{\tau})$ とする. $h : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ は (3) 式のステップ関数である.

以降は数値シミュレーションの概要である. Spiking neuron として Izhkevich モデルを使い,excitability state をとるパラメータを選択する. セルアセンブリ x を確率的に生成し, 後細胞が区間 $[T, T+\delta t]$ で発火する確率 $p(y=1|x)$ を, サンプリングにより求めた. $M=2$ とし, (w_1, w_2) 上の $p(y=1|x)$ について次のように分類したのが, 図 2 である. ある点 (w_1, w_2) を決めて, 例題 1 のパターン x^d $(d=1,2,3)$ それぞれに対し $p(y=1|x^d)$ が 0.5 以上か未満かで分類し, 色分けした. 例えば赤い色は, $p(y=1|x^1) < 0.5 \wedge p(y=1|x^2) < 0.5 \wedge p(y=1|x^3) < 0.5$ となる点 (w_1, w_2) である. このシミュレーション結果から, (5) 式の線形不等式の可解性がセルアセンブリの情報伝達の物理的な拘束条件を与えることが予想される. 高次元の線形不等式に対しては, 線形計画法のソルバーを使うことで現実的な時間で可解性を判定できる.

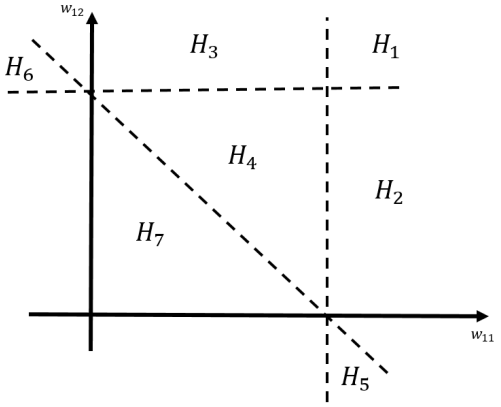


図 1　(w_{11}, w_{12}) 平面上の線形分離領域

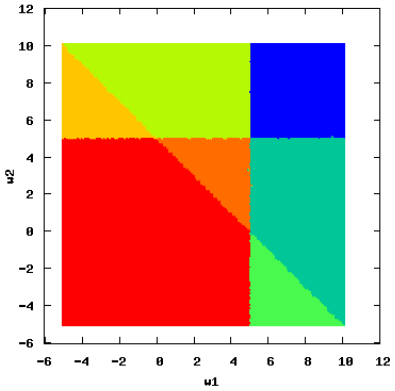


図 2　(w_1, w_2) に対して, Spiking Neuron の発火確率 $p(y = 1|x)$ を 0.5 を基準に分類した図.

参考文献

[1] 室田一雄, 杉原正顯 『線形代数 (東京大学工学教程 基礎系 数学)』, 丸善出版 (2013)

[2] M. ミンスキー , S. パパート『パーセプトロン』斉藤正男 訳, 東京大学出版会 (1971)

[3] Izhikevich M, ”Dynamical systems in neuroscience”,The MIT Press(2010)

[4] 甘利俊一, 深井朋樹 『脳の計算論 (シリーズ脳科学 1)』東京大学出版会 (2009)

[5] Wulfram Gerstner, Werner M. Kistler, Richard Naud and Liam Paninski,”Neuronal Dynamics”,Cambridge University Press(2014)

[6] M.Abeles,”Corticonics”,Cambridge University Press(1991)

分化の波に対する数理モデルの連続化と Planar 進行波解への数理解析

○田中吉太郎 [1]，八杉徹雄 [2]，佐藤純 [2]，栄伸一郎 [1]
Yoshitaro Tanaka, Tetsuo Yasugi, Makoto Sato and Shin-Ichiro Ei
[1] 北海道大学大学院 理学研究院，[2] 金沢大学 新学術創成研究機構
yoshitaro.tanaka@math.sci.hokudai.ac.jp

概 要

ショウジョウバエの視覚中枢形成時には，神経上皮細胞から神経幹細胞への分化が波のように伝搬していく現象が観察される．この伝播機構を解析するために，適当な積分核との合成積を用いて離散モデルを連続化する手法を提案した．またこの現象や数理モデルの数値計算結果を動機として，簡略的な 1 変数の非局所発展方程式の Planar 進行波解を解析する．本講究録では，この方程式にある条件で，Planar 進行波解が存在することを示し，その安定性に関して形式的な計算から説明する．

1 はじめに

ショウジョウバエは，人の脳と類似した構造を有しており，遺伝子操作が簡単であることから，よく生物学的な実験で用いられる．生物の脳の神経の構造や発生機構の解明においても，ショウジョウバエを用いた基礎研究は数多くの重要な知見を見出してきた．ショウジョウバエの視覚中枢では，神経上皮細胞から神経幹細胞への分化が波のように伝搬する現象が観察される．この分化の伝搬は，Proneural wave (PW) と呼ばれ，人の脳の構造や神経の形成過程を調べるのに，良い生物モデルとして実験的に扱われている [7, 8, 9].

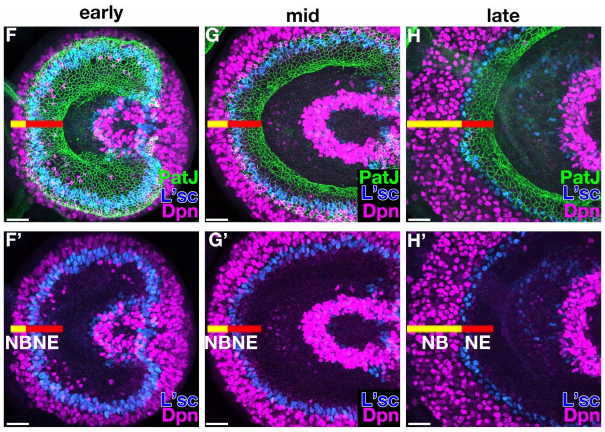
生命現象や生命の発生過程においては，細胞一つの大きさや細胞間相互作用が重要な働きをしていることから，空間離散モデルが多く提案されている．離散モデルは，細胞の大きさや形状を取り入れて，実際の実験により近い形で構築されるので実験との相性がよく，実験結果の予測や，実際のパターンの制御へ用いられている．PW に対する空間離散モデルは，2016 年に佐藤等のグループに考案され，実際の実験結果に対するかなり良い再現性が報告されている [9]．一方，現象やパターンの形成機構を解析的に調べようとすると，離散モデルでは困難なことが多い．そこで，第 2 章で我々は，適当な積分核を用いて，細胞一つの大きさと形状を取り込める形で，離散モデルを連続化する方法を考案する．この連続化によって，実験データを組み込める形で数値シミュレーションや解析を行うことができる．また細胞分裂の効果も導入しやすい.

第 3 章では，PW のような現象やその連続化モデルの数値計算結果を動機として，簡略化された 1 変数の非局所発展方程式の Planar 進行波解の解析を行う．私たちは，1 次元の進行波解の存在を仮定することで，Planar 進行波解の存在を証明する．最後に，形式的な計算から，非局所発展方程式の Planar 進行波解の安定性が積分核の形状に依存することを説明する.

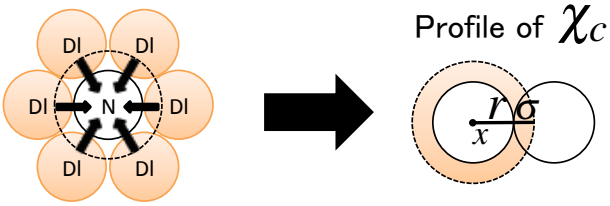
2 Proneural wave に対する数理モデルの連続化

2.1 Proneural wave と離散モデル

この節では，Proneural wave (PW) と先行研究 [9] の離散モデルについて説明する．ショウジョウバエ成虫脳を構成する神経細胞の大部分は幼虫期に形成される．視覚中枢を構成する神経細胞 は 3 齢幼虫期にその数を飛躍的に増加させる．幼虫期において，視覚中枢は半球状の構造をしており，その表面は神経上皮細胞（NE）と呼ばれる一層の上皮細胞群に



(a)



(b)

図 1: (a) Proneural Wave が medial 側から lateral 側に進行する様子．3 齢幼虫初期 (左)，中期 (中央)，後期 (右) の視覚中枢．緑色が神経上皮細胞 (NE)，青色が分化のトリガー，Letahl of Scute (L'sc) を発現している NE，マゼンタ色が神経幹細胞 (NB) を表す．発生の進行と共に Proneural Wave は medial 側（左）から lateral 側（右）に進行する．(A ', B ', C ') は L'sc と神経幹細胞のみの発現を示す．(b) 側方抑制とその連続化の模式図．Dl が Delta を表し，N が Notch を表す．

覆われる（図 1（緑色の領域））．次にこれら NE は神経幹細胞（NB）へと分化する（図 1（マゼンダ色の領域））．この NE から NB への分化は medial 側から lateral 側へと一定の方向性をもって進行する（図 1）．この時空間的に制御された NE から NB への分化の伝搬を Proneural wave と呼ぶ．この分化の波は，ショウジョウバエの脳の構造を作る上で欠かせない働きをしている [7].

近年，生物学的実験や数理モデルとの相補的な研究から，PW における主要な働きをもつシグナルやその相互作用などの伝搬機構が明らかになりつつある [8, 9, 10, 11]．中でも，上皮成長因子 (EGF) と Delta/Notch シグナルという細胞間で情報を伝達する物質が主要なものとして挙げられる [7, 9]．Delta/Notch シグナルは，ある細胞で分化度を表す AS-C 遺伝子が発現すると，その細胞の周りの細胞の AS-C の発現を抑制する働きがある（側方抑制）(図 1(b)(左))．この側方抑制の効果によって，複眼原基では分化している細胞と未分化の細胞が互い違いに形成され，この非一様なパターンは，ごま塩パターンと呼ばれる．2016 年に佐藤等は，Delta/Notch シグナルの PW の伝搬機構における働きを調べるために，EGF, Notch，AS-C の 3 種のシグナル経路の相互作用を取り入れた数理モデルを提案した [9]：

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} &= d_e \Delta E - k_e E + a_e A(A_0 - A), \\ \dfrac{dN_{i,j}}{dt} &= -k_n N_{i,j} + d_t \displaystyle\sum_{j \in \Lambda_i} D_{l,m} - d_c N_{i,j} D_{i,j}, \\ \dfrac{dD_{i,j}}{dt} &= -k_d D_{i,j} + a_d A_{i,j}(A_0 - A_{i,j}), \\ \dfrac{dA_{i,j}}{dt} &= e_a (A_0 - A_{i,j}) \max\{E_{i,j} - N_{i,j}, 0\}, \end{cases} \qquad x \in \Omega,\ t > 0,
$$

ここで，時刻は $t > 0$ で，計算領域は L, L_y を正の数として，$\Omega = [0, L] \times [0, L_y]$ であり，$E = E(x, y, t)$ は EGF リガンドの濃度とシグナルの複合的な変数，$N_{i,j} = N_{i,j}(t)$，$D_{i,j} = D_{i,j}(t)$ と $A_{i,j} = A_{i,j}(t)$ は，i, j 番目の細胞領域（Ω を格子上に分割したときの正方領域）における，Notch のシグナル量と Delta の発現量，AS-C の発現度とし，$d_e, k_e, a_e, k_n, d_t, d_c, k_d, a_d, e_a$ は正定数である．また，添え字なしの場合の未知変数は，各細胞がもつ値を領域全体へと結合した量，$E_{i,j}$ は 1 つの細胞内の E の平均の量とする．

佐藤等の数理モデルは PW やその変異体の実験結果に対して非常によい再現性をもつことが報告されたが，細胞一つと数値計算上の空間分割が一致していなくてはならないという，理論的な不整合性がある．また，PW とごま塩パターンを進行波解として特徴付けることを動機に，このモデルを連続化する方法を考えた．

2.2 連続化モデルの提案

先行研究 [9] の空間離散モデルの連続化において以下を仮定した：

(A1) ある一つの細胞領域の中においても，Notch と Delta，AS-C には空間的な分布がある．

(A2) 周りの細胞内にある Delta からの側方抑制の影響力は，周りの細胞の特定の領域内にあるの Delta の積分量によって決まる（ 図 1(b)）．

これらの仮定をもとに，(1) を以下のように連続化した：

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} &= d_e \Delta E - k_e E + a_e A(A_0 - A), \\ \dfrac{dN}{dt} &= -k_n N + d_t \chi_c * D - d_c N D, \\ \dfrac{dD}{dt} &= -k_d D + a_d A(A_0 - A), \\ \dfrac{dA}{dt} &= e_a (A_0 - A) \max\{E - N, 0\}, \end{cases} \qquad x \in \Omega,\ t > 0.
$$

ここで，$\chi_c * D = \int_\Omega \chi_{c(x)}(x - y) D(y, t) dy$ と定義し，積分核 χ_c はステップ関数で，中心 x で半径 r の円 $B(x, r)$ を用いて，

$$
\chi_{c(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in c(x), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}
$$

$$
c(x) = B(x, r + \sigma) \setminus B(x, r),
$$

と定義する．ここで，r は細胞一つの直径に対応するパラメーターで，σ は Delta が Notch に影響を及ぼす範囲に対応するパラメーターであり，Delta の Notch への影響が細胞膜近傍に限定される場合は, σ は十分小さい定数である．$y \in [0, L_y]$ に対して $[0, y]$ 上では斉次 Neumann 境界条件，$[L, y]$ では斉次 Dirichlet 境界条件を課し，$x \in [0, L]$ に対して $[x, 0] \cup [x, L_y]$ 上では，周期境界条件を課す．

2.3 数値計算結果

連続化モデル (2) の数値計算を行った．図 2 は，(2) の二次元領域における数値計算結果である．図 2(a) では，野生型の PW が時間の経過とともに進行していく様子が観察される．さらに，EGF 式内の AS-C からの活性作用のパラメーター a_e を順に，小さくすることで，図 2(b),(c) に示されるように，ストライプパターンやごま塩パターンに対応するパターンが

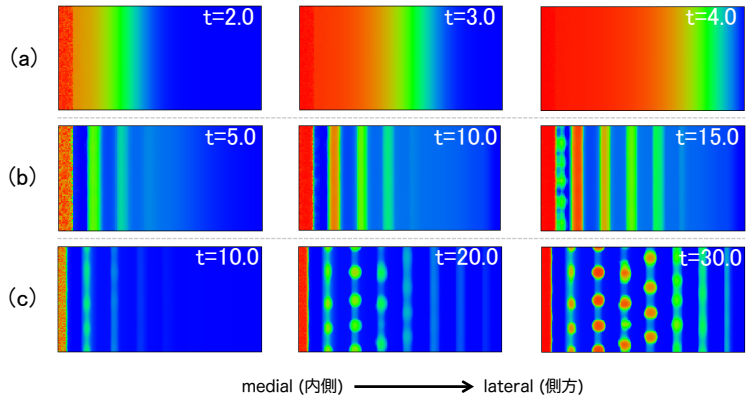


図 2:　二次元領域 Ω における (2) の A の数値計算結果．赤色が高濃度，青色が低濃度を表す．パラメーターは $d_e = 2.0$, $k_e = 1.0$, $k_n = 3.0$, $d_t = 2.0$, $d_c = 0.5$, $k_d = 1.5$, $a_d = 1.0$, $e_a = 10.0$, $A_0 = 1.0$, $r = 1$, $\sigma = 0.25$ となっている．(a) $a_e = 2.0$, PW モード．(b) $a_e = 0.8$, ストライプモード．(c) $a_e = 0.5$, ごま塩モード．

得られた．これらのパターンは離散モデルを用いた先行研究 [9] で報告されたパターンに対応するものである．図 2 の数値計算結果から，パラメーター a_e が PW のモードから，ごま塩のモードへと変化させる分岐パラメーターであると予想できる．

数値計算と数理モデリングの観点から，波の長さと，積分核 χ_c に以下のような関係があることがわかった．簡単のために，一次元の場合ごま塩パターンを考える．一次元のごま塩パターンで，分化している領域と，分化していない領域をそれぞれ l_{NB}, l_{NE} とすると，積分核 χ_c の r と σ に対して，おおよそ

$$\begin{cases} l_{NB} = r \\ l_{NE} = r + \sigma \end{cases}$$

がなりたつ．この関係式から，実際の生体内の NB の大きさとその間にある未分化の NE の大きさを数理モデルに適用して，数値計算や数理解析を行うことができる．

2.4　細胞分裂と細胞増殖の記述

連続モデルの利点として，細胞分裂の記述の簡易さがあげられる．空間方向が連続のモデルでは，

細胞分裂=領域の拡大,
細胞増殖 (細胞自身の拡大・縮小) = 積分核の拡大・縮小変換,

とみなすことができる．離散モデルでは，細胞一つを，どのタイミングで，どの方向に分裂されるのかということがしばしば問題になるようであるが，連続モデルではそれらを考慮せずに，細胞分裂の効果を導入することができる．ショウジョウバエの視覚中枢では，神経上皮細胞（NE）の細胞分裂によって，視覚中枢表面の大きさが成長する．NE において細胞分裂が行われたとしても，波面が歪むことなく一様に進むことが視覚中枢形成において重要な働きをしており，その機構を調べることが必要となっている．これらを踏まえて，我々はモデル (2) において，

$$\Omega = [0, L(t)] \times [0, L_y], \ L(t) = L_0 + L_x(1 - e^{-ct})$$

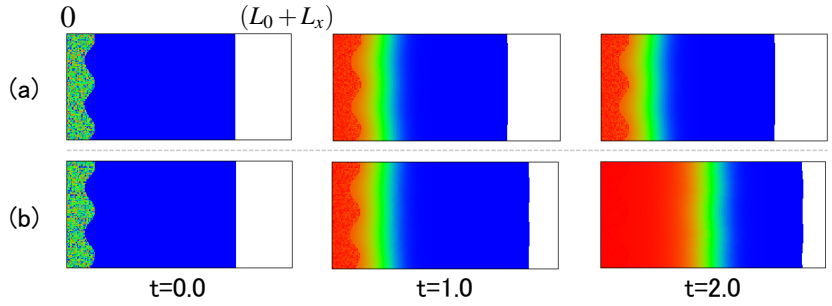


図 3:　二次元領域 Ω における (2) と (3) の A の数値計算結果．赤色が高濃度，青色が低濃度を表す．パラメーターは $a_e = 5.0$ で，図 2 と同じになっている．(a) $c = 0.1$ のときの数値計算結果．(b) $c = 1.0$ のときの数値計算結果．

として，領域を x 方向だけ増やして数値計算を行い解の振る舞いを観察した．ここで，パラメーター c は細胞分裂による領域の拡大の速さに関するパラメーターである．細胞分裂は NB の領域では行われないので，ある閾値 t_h を導入し，$A(x,t) \geq t_h$ を満たす x の領域では数理モデル (2) を計算し，$A(x,t) < t_h$ を満たす x の領域では，$\tilde{x} = (L/L(t))x$ と変数変換をして，

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{E}}{\partial t} &= d_e \left(\left(\dfrac{L}{L(t)} \right)^2 \tilde{E}_{xx} + \tilde{E}_{yy} \right) - k_e \tilde{E} + a_e \tilde{A}(A_0 - \tilde{A}), \\ \dfrac{d\tilde{N}}{dt} &= -k_n \tilde{N} + \dfrac{d_t L(t)}{L} \tilde{\chi}_c * \tilde{D} - d_c \tilde{N} \tilde{D}, \end{cases} \qquad \tilde{x} \in [0, L], t > 0,$$

を計算することで，細胞分裂の効果を導入した．ここで，$\tilde{\chi}_c(\tilde{x}) = \chi_c(L(t)\tilde{x}/L)$ であり，$\tilde{D}$ と $\tilde{A}$ に関しては (2) と同じである．この数値計算結果が，図 3 である．図 3 の左図のように，初期値を y 方向に関して，波打つのような形で与えてみても，PW の波面がまっすぐなまま分化が伝搬していることが観察された．

3　1 変数非局所発展方程式の Planar 進行波解

3.1　1 次元進行波解の存在

PW の数理モデルや現象を動機として，合成積の非局所相互作用による Planar 進行波解を調べる．最初からシステムを考えるのは難しいと予想されるため，以下の 1 変数非局所発展方程式の Planar 進行波解を解析する：

$$(4)\quad \begin{cases} u_t &= K * u - u + f(u), \ x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

ここで，K は

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)dx = 1, \quad K = K(|r|) > 0, \quad \text{for all } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を満たす積分核で，$K * u = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)u(y,t)dy$ は $\mathbb{R}^2$ 上の合成積，f は単安定もしくは双安定でなめらかな関数である．合成積 K の典型例は，ガウス核で $K = e^{-(x^2+y^2)}/\pi$ であり，単安定の非線形項は本講究録では

$$(5)\quad \begin{aligned} f(u) &= u(1-u), \\ f(u) &= u(1-u^2), \end{aligned}$$

とする [5]．また双安定の非線形項は

$$f(u) = u(1-u)(u-\theta),\ \theta \in (0,1)$$

と定義する [1].

非局所発展方程式の 1 次元進行波解については解析が進められている．(4) の Planar 進行波解の存在の証明に用いるので，その先行研究の結果について紹介する．反応拡散系モデルの拡張や，生物の分散や移動の記述として以下の非局所発展方程式が調べられている：

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} u_t = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y,t)dy - u + f(u), & \text{in } \mathbb{R}\times\{t>0\}, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}\times\{t=0\}, \end{cases}$$

ここで，J はなめらなか正値な偶関数で，$J \in L^1(\mathbb{R})$ である．

f が (5) のような単安定の場合，[2, 3, 5] によって，(6) における進行波解の存在が報告されている．1 次元進行波解のために,

$$U(x-ct) = u(x,t), \quad c > 0$$

を用いて (6) を動座標変換し，動座標上で以下の方程式の解を考える,

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} cU' &= J*U - U + f(U), \quad \text{in } \mathbb{R}, \\ U(-\infty) &= 1, \\ U(+\infty) &= 0. \end{cases}$$

以下を仮定する：

$$\text{(H1)} \qquad J(x) \in C^1(\mathbb{R}), \quad J(x) = J(-x) \geq 0, \text{ for all } x, \quad \int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1, \quad J' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{(H2)} \qquad {}^{\exists}\lambda > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} J(x)e^{\lambda x}dx < +\infty$$

[5] より 1 次元進行波解の存在定理を以下のように引用する：

Theorem 3.1. *([5, Theorem 1.1])* (H1) と (H2) を仮定し，f は単安定とする．このとき，ある $c^* > 0$ が存在し，すべての $c \geq c^*$ に対して， (7) の単調増加関数 $U \in C^1(\mathbb{R})$ を解としてもつ.

f が双安定の場合，[1, 4] によって，(6) における進行波解の存在が報告されている．以下を仮定する：

$$\text{(A1)} \qquad J(x) \in C^1(\mathbb{R}), \quad J \geq 0, \quad J(x) = J(-x), \quad \int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1, \quad J' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{(A2)} \qquad \int_{\mathbb{R}} J(x)|x|dx < \infty$$

さらに，弱形式を与えておく：

$$(P_w) \qquad \int_{\mathbb{R}} [J*U - U + f(U)]\phi - c\int_{\mathbb{R}} U\phi' = 0, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

このとき，一次元上の進行波解の存在定理を，[1] より以下のように引用する：

Theorem 3.2. *([1])* (A1) と (A2) を仮定し，f は双安定と仮定する．このとき，(P_w) の弱解 (U,c) が存在し，$f(u)$ に依存する $r \geq 0$ に対して，$U \in C^{1+r}(\mathbb{R})$ となり，単調増加となる．さらに，もし V が速度 c' の他の解とすると，$c = c'$ と $V(x) = U(x+p)$ がある $p \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ.

空間 2 次元における非局所発展方程式の Planar の進行波解の存在については，f が単安定の場合で，積分核が

$$J(x) = \prod_{j=1}^{N} J_i(x_i),$$

で，各 $J_i(x_i)$ が (H1) と (H2) を満たす場合に，[6] で報告されている．証明は，一次元に帰着することで，示すことができる．

3.2 Planar 進行波解の存在

(6) における一次元進行波解の存在を仮定することで，(4) の Planar 進行波解の存在を証明することができる．最初に Planar 進行波解による動座標変換を，任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して以下のように行う：

$$U(x - ct) = u(x, y, t).$$

すると，f が (5) の単安定の場合，(4) は以下の方程式に書き換えられる：

$$(P) \quad \begin{cases} cU' &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})U(x - z_1 - ct)dz_1dz_2 - U + f(U), \quad \text{in } \mathbb{R} \\ U(-\infty) &= 1 \\ U(+\infty) &= 0 \end{cases}$$

Planar 進行波解の存在定理のために，正値な球対象関数 K に対して，以下の関数を定義する：

$$J(x) := \int_{|x|}^{\infty} \frac{2rK(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}dr. \tag{8}$$

Theorem 3.3. f は単安定だとし，$K = K(x, y)$ は正値な球対象関数で，K に対して (8) で定義された関数 Jが (H1) と (H2) を満たすと仮定する．このとき，ある定数 $c^* > 0$ が存在して，全ての $c \geq c^*$ に対して，(P) に対して，単調増加関数 $U \in C^1(\mathbb{R})$ を解として持つ．

Proof. 一次元の問題 (7) に帰着させる．$U(x - ct)$ を問題 (7) に代入させると，

$$cU' = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})U(x - z_1 - ct)dz_1dz_2 - U + f(U)$$

を得る．積分核の項は以下のように計算することができる：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})U(x - z_1 - ct)dz_1dz_2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})dz_2U(x - z_1 - ct)dz_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{|z_1|}^{+\infty} \frac{2rK(r)}{\sqrt{r^2 - z_1^2}}drU(x - z_1 - ct)dz_1 \\ &= J * U. \end{aligned}$$

したがって，J が (H1) と (H2) を満たしていれば，定理 3.1 より，Planar の進行波解の存在が示せる． □

同様の計算で，非線形項 f が双安定の場合についても，Planar の進行波解の存在を示すことができる．まず動座標変換した式は

$$\begin{cases} cU' &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})U(x - z_1 - ct)dz_1dz_2 - U + f(U), \quad \text{in } \mathbb{R} \\ U(-\infty) &= 1 \\ U(+\infty) &= -1 \end{cases}$$

とかける．

Theorem 3.4. f は双安定だとし，$K = K(x,y)$ は正値な球対象関数で，K に対して (8) で定義された関数 J が (A1) と (A2) を満たすとする．このとき，(P_w) の弱解 (U,c) が存在し，$f(u)$ の関数クラスに依存する $r \geq 0$ に対して，$U \in C^{1+r}(\mathbb{R})$ となる．さらに，もし V が速度 c' の他の解とすると，$c = c'$ と $V(x) = U(x+p)$ がある $p \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．

3.3 Planar 進行波解の安定性

Planar 進行波解に y 方向に摂動を与えたときの安定性を考える．Planar 進行波解の安定性について，形式的な計算から説明する．(4) において，非線形項を十分なめらかな関数 $f(u)$ で置き換えた問題に対して，一次元進行波解 $\Phi(x)$ が存在し，

$$0 = (J * \Phi)(z) + c\Phi_z + f(\Phi), \quad z \in [-\infty, \infty]. \tag{9}$$

を満たすとする．ここで，$-\Phi$ の項は $f(\Phi)$ の項へ含めて書き，J は積分核 K に対して (8) で定義された関数である．この安定性を考える．つまり，

$$u(t, x_1, x_2) = \Phi(x_1 - ct) + v(t, x_1 - ct, x_2)$$

とおく．ここで，v は x_2 方向に依存する十分小さい摂動項である．これは，x_2 方向に Φ を並べるときに，少しずらすことを考えて，

$$\Phi(x_1 - ct - b(t, x_2)) = \Phi(x_1 - ct) - \Phi_z(x_1 - ct)b(t, x_2) + \cdots . \tag{10}$$

と展開することから類推される．(4) に代入し，線形化を行うと，

$$-c\Phi_z - cv_z + v_t = (J * \Phi) + (K * v) + f(\Phi) + f'(\Phi)v + G$$

ここで，$G \leq O(|v^2|)$ である．したがって，(9) を代入すれば，

$$v_t = (K * v) + cv_z + f'(\Phi)v + G$$

を得る．形式的に G を無視して，x_2 方向についてフーリエ変換を

$$\mathcal{F}_2[v](\xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} v(x_1, x_2) e^{-i\xi_2 x_2} dx_2$$

として，$\hat{v} = \mathcal{F}_2[v](x_1, \xi_2)$ とおく．この表記を用いると

$$\hat{v}_t = \mathcal{F}_2[K * v] + c\hat{v}_z + f'(\Phi)\hat{v} \tag{11}$$

を得る．合成積の項

$$\mathcal{F}_2[K * v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} K(|y|) v(x - y) dy_1 dy_2 \right) e^{-i\xi_2 x_2} dx_2.$$

を計算する．まず，(10) の計算から，形式的に $v(t, x_1, x_2) = \alpha(x_1 - ct)\beta(t, x_2)$ としよう．このとき，

$$K * v = \int_{\mathbb{R}^2} K(|y|)\alpha(z - y_1)\beta(t, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(z - y_1)(K_2 * \beta)_2(t, y_1, x_2) dy_1,$$

ここで，$K_2 = K_2(y_2; y_1) = K(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})$ である．よって，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[K * v](\xi_2) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(z - y_1)\mathcal{F}_2[(K_2 * \beta)_2](t, y_1, \xi_2) dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(z - y_1)\sqrt{2\pi}\hat{K}_2(\xi_2; y_1)\hat{\beta}(t, \xi_2) dy_1 \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{\beta}(t, \xi_2)(\alpha * \hat{K}_2(\xi_2; \cdot))(z). \end{aligned}$$

したがって，(11) に $\hat{v}(t,z,\xi_2)=\alpha(z)\hat{\beta}(t,\xi_2)$ を代入して，

$$\alpha\hat{\beta}_t(t,\xi_2)=\hat{\beta}(t,\xi_2)\left(\sqrt{2\pi}(\alpha*\hat{K}_2(\xi_2;\cdot))(z)+c\alpha_z+f'(\Phi)\alpha\right).$$

$\beta^*(\xi_2)$ を固有値 $\lambda(\xi_2)$ に対する固有関数として，$\hat{\beta}(t,\xi_2)=e^{\lambda(\xi_2)t}\beta^*(\xi_2)$ とすると，

$$\lambda(\xi_2)\alpha=\sqrt{2\pi}(\alpha*\hat{K}_2(\xi_2;\cdot))(z)+c\alpha_z+f'(\Phi)\alpha$$

となる．(10) の計算より，$\alpha(z)=\Phi_z(z)$ のときが重要だから，

$$\lambda(\xi_2)\Phi_z=\sqrt{2\pi}(\Phi_z*\hat{K}_2(\xi_2;\cdot))(z)+c\Phi_{zz}+f'(\Phi)\Phi_z.$$

摂動がない場合，Planar 進行波解は平行移動するので，$\lambda(0)=0$ を得る．$\lambda(0)=0$ は，$0=\sqrt{2\pi}(\Phi_z*\hat{K}_2(0;\cdot))(z)+c\Phi_{zz}+f'(\Phi)\Phi_z$ に同値なので，

$$\lambda(\xi_2)\Phi_z=\sqrt{2\pi}(\hat{K}_2(\xi_2;\cdot)-\hat{K}_2(0;\cdot))*\Phi_z$$

を得る．Φ_z を両辺に掛けて，$\mathbb{R}$ 上で積分して整理すれば，

$$\lambda(\xi_2)=\frac{\sqrt{2\pi}\langle(\hat{K}_2(\xi_2;\cdot)-\hat{K}_2(0;\cdot))*\Phi_z,\Phi_z\rangle_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\Phi_z\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}$$

となる．最後に z 方向にフーリエ変換すれば，パーセバルの等式より，

$$\lambda(\xi_2)=\frac{\sqrt{2\pi}\langle\hat{K}(\xi_2;\cdot)-\hat{K}(0;\cdot),\hat{\Phi}_z^2(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\Phi_z\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \tag{12}$$

を得る．ここで，$\hat{K}=\mathcal{F}[K](\xi_2;\xi_1)$ は K の $\mathbb{R}^2$ 上のフーリエ変換，$\hat{\Phi}_z$ は $\Phi_z(z)$ の $\mathbb{R}$ 上フーリエ変換である．(12) を用いると，固有値 $\lambda(\xi_2)$ の正負は，任意の ξ_1 に対する $\hat{K}(\xi_2;\xi_1)-\hat{K}(0;\xi_1)$ の符号によって与えられる．例えば，積分核 K がガウス核であるときは，そのフーリエ変換を計算し，ξ_1 を任意にとって，ξ_2 の関数とみると

$$\hat{K}(\xi_2;\xi_1)-\hat{K}(0;\xi_1)=\frac{e^{-\frac{\xi_1^2}{D}}}{2\pi}\left(e^{-\frac{\xi_2^2}{D}}-1\right)\leq 0.$$

したがって，積分核がガウス核の場合には，任意の $\xi_2\in\mathbb{R}$ に対して，$\lambda(\xi_2)<0$ となり，Planar 進行波解は安定だということが示される．一般にフーリエ変換が単調減少である積分核に関しては Planar 進行波解は安定であることが示唆された．

4　まとめと展望

本講究録では，まず第 2 章で，適当な積分核 χ_c を用いることで，離散モデルを連続化する方法を提案した．細胞間相互作用である Delta/Notch シグナルを，積分核を用いることで連続モデルで記述し，空間メッシュに依存しない，離散的な解の挙動を再現することに成功した．このモデリングでは，積分核の形状を楕円型にしたり，領域の形状や場所に依存して形状を変化させることで，異方性を与えることができると考えている．また，この手法では，細胞の形状を計測し，実測値に基づいた平均の形を積分核に導入することができる．対象としている現象に対して，積分核を選択・変化させればよいので，汎用性の高い方法だと考えている．

また，連続化の利点として，細胞分裂の導入の簡易さについて紹介した．連続モデルの場合，細胞分裂を領域の拡大・縮小という形で導入できるので，解析的にも取り扱いがしやす

いように思われる．図 3 にあるように，NE の領域で領域を拡大しても，PW は波面を歪ませずに，伝搬していく．また，実際のショウジョウバエでの視覚中枢は，球面の形をしているので，さらなる応用として，曲面上の数理モデルを構築し，数値計算を行う予定である．

第 3 章では，非局所発展方程式における Planar 進行波解の解析として，その存在証明と安定性の形式的な計算を行った．安定性に関しては，今回導出した公式から，一次元上の進行波と積分核の形状に依存していることが予想される．この公式から，ガウス核の場合には palanr 進行波解が安定であることが示唆された．今後はこの形式計算の正当化と，ガウス核以外の積分核の planar 進行波解の安定性を調べることが課題である．これらの発展からより詳細な安定性への条件がでると考えられる．

参考文献

[1] Bates, P. W., Fife, P. C., Ren, X., Wang, X.: Traveling Waves in a Convolution Model for Phase Transitions. Arch. Rational Mech. Anal. **138**, 105–136 (1997)

[2] Schumacher, *Travelling-front solutions for integro-differential equations. I.*, J. Reine Angew. Math. **316**, 54-70 (1980)

[3] J. Carr, A. Chmaj, *Uniqueness of travelling waves for nonlocal monostable equations*, Proc. Am. Math. Soc. **132**, 2433-2439 (2004)

[4] X. Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Diff. Eqns, **2**, 125-160 (1997)

[5] Coville, Dupaigne, *On a non-local equation arising in population dynamics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **137A**, 727-755 (2007)

[6] Huang, Mei, Wang, *Planar Traveling Waves For Nonlocal Dispersion Equation With Monostable Nonlinearity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. A, **32**, 3621-3649 (2011)

[7] M. Sato, T. Suzuki, Y. Nakai, Waves of differentiation in the fly visual system, *Developmental Biology*, Vol. 380, pp. 1-11 (2013)

[8] T. Yasugi, D. Umetsu, S. Murakami, M. Sato and T. Tabata, *Development*, Drosophila optic lobe neuroblasts triggered by a wave of proneural gene expression that is negatively regulated by JAK/STAT, Vol. 135, pp.1471-1480 (2008)

[9] M. Sato, T. Yasugi, Y. Minami, T. Miura, and M. Nagayama, Notch-mediated lateral inhibition regulates proneural wave propagation when combined with EGF-mediated reaction diffusion, *Proc Natl Acad Sci USA Published online*, pp. E5153-E5162 (2016)

[10] 田中吉太郎，八杉徹雄，佐藤純，長山雅晴，栄伸一郎, 分化の波のノイズ抑制機構に対する数理モデリングと実験からのアプローチ, 計算工学講演会論文集 Vol. 22 (2017 年)

[11] Y. Tanaka, T. Yasugi, M. Nagayama, M. Sato, and Shin-Ichiro Ei, JAK/STAT guarantees robust neural stem cell differentiation by shutting off biological noise, Submitted to *Scientific reports*.

G-TUTTE POLYNOMIAL VIA ALGEBRAIC COMBINATORICS, TOPOLOGY AND ENUMERATION

TAN NHAT TRAN

This is based on the joint work with Ye Liu and Masahiko Yoshinaga

ABSTRACT. We introduce and study the notion of the G-Tutte polynomial for a list $\mathcal{A}$ of elements in a finitely generated abelian group Γ and an abelian group G, which is defined by counting the number of homomorphisms from associated finite abelian groups to G. The G-Tutte polynomial is a common generalization of the (arithmetic) Tutte polynomial for realizable (arithmetic) matroids, the characteristic quasi-polynomial for integral arrangements, Brändén-Moci's arithmetic version of the partition function of an abelian group-valued Potts model, and the modified Tutte-Krushkal-Renhardy polynomial for a finite CW-complex. As in the classical case, G-Tutte polynomials carry topological and enumerative information (e.g., the Euler characteristic, point counting and the Poincaré polynomial) of abelian Lie group arrangements. We also discuss differences between the arithmetic Tutte and the G-Tutte polynomials related to the axioms for arithmetic matroids and the (non-)positivity of coefficients.

1. INTRODUCTION

The Tutte polynomial is one of the most important invariants of a graph. The significance of the Tutte polynomial is that it has several important specializations, including chromatic polynomials, partition functions of Potts models ([28]), and Jones polynomials for alternating links ([30]). Another noteworthy aspect of the Tutte polynomial is that it depends only on the (graphical) matroid structure, and thus one can define the Tutte polynomial for a matroid. Matroids and (specializations of) Tutte polynomials play a role in several diverse areas of mathematics ([27, 31]).

Matroids and Tutte polynomials are particularly important in the study of hyperplane arrangements ([26]), because the Tutte polynomial and one of its specializations, the characteristic polynomial, carry enumerative and topological information about the arrangement. For instance, the number of points over a finite field, the number of chambers for a real arrangement and the Betti numbers for a complex arrangement are all obtained from the characteristic polynomial.

In the context of hyperplane arrangements, matroids are considered to be the data that encode the pattern of intersecting hyperplanes. It should be noted that the isomorphism class of a subspace is determined by its dimension (or codimension), or equivalently, by the rank function in matroid theory. This is the reason that matroids are extremely powerful in the study of hyperplane arrangements.

It is natural to consider arrangements of subsets of other types. There have been many attempts to consider arrangements of submanifolds inside a manifold. Recently, arrangements of subtori in a torus, or so-called toric arrangements, have received considerable attention ([12]), which has origin in the study of the moduli space of curves ([23]) and regular semisimple elements in an algebraic group ([21]).

However, beyond linear subspaces, the notion of rank is no longer sufficient to determine the isomorphism class of intersections of an arrangement. We need additional structure to describe intersection patterns combinatorially.

The notions of arithmetic Tutte polynomials and arithmetic matroids invented by Moci and collaborators ([24, 11, 8, 15]) are particularly useful for studying toric arrangements. As in the case of hyperplane arrangements, arithmetic Tutte polynomials carry enumerative and topological information about toric arrangements. It is generally difficult to explicitly compute the arithmetic Tutte polynomial. Arithmetic Tutte polynomials for classical root systems were computed by Ardila, Castillo and Henley ([1]).

Key words and phrases. Tutte polynomial, characteristic quasi-polynomial, Poincaré polynomial, arithmetic matroids.

Another (quasi-)polynomial invariant for a hyperplane arrangement defined over integers, the characteristic quasi-polynomial introduced by Kamiya, Takemura and Terao [18], is a refinement of the characteristic polynomial of an arrangement. The notion of the characteristic quasi-polynomial is closely related to Ehrhart theory on counting lattice points, and has increased in combinatorial importance recently. The characteristic quasi-polynomial for root systems was essentially computed by Suter [29] (see also [19]). By comparing the computations of Suter with those of Ardila, Castillo and Henley, it has been observed that the last constituent of the characteristic quasi-polynomial is a specialization of the arithmetic Tutte polynomial.

The purpose of this paper is to introduce and study a new class of polynomial invariant that forms a common generalization of the Tutte, arithmetic Tutte and characteristic quasi-polynomials, among others. The key observation to unify the above "Tutte-like polynomials" is that they are all defined by means of counting homomorphisms between certain abelian groups (this formulation appeared in [8, §7]). This observation has prompted us to introduce the notion of the *G-Tutte polynomial* $T^G_{\mathcal{A}}(x, y)$ for a list of elements $\mathcal{A}$ in a finitely generated abelian group Γ and an abelian group G with a certain finiteness assumption on the torsion elements (see §3.2 for details). We mainly consider abelian Lie groups G of the form

$$G = F \times (S^1)^p \times \mathbb{R}^q,$$

where F is a finite abelian group and $p, q \geq 0$. When the group G is $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, or the finite cyclic group $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, the G-Tutte polynomial is precisely the Tutte polynomial, the arithmetic Tutte polynomial, or a constituent of the characteristic quasi-polynomial, respectively. We will see that many known properties (deletion-contraction formula, Euler characteristic of the complement, point counting, Poincaré polynomial, convolution formula) for (arithmetic) Tutte polynomials are shared by G-Tutte polynomials. (See [14] for another attempt to generalize arithmetic Tutte polynomials.)

The organization of this paper is as follows.

§2 gives a summary of background material. We recall definitions of the Tutte polynomial $T_{\mathcal{A}}(x, y)$, arithmetic Tutte polynomial $T^{\mathrm{arith}}_{\mathcal{A}}(x, y)$ and the characteristic quasi-polynomial $\chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}}(q)$ for a given list of elements $\mathcal{A}$ in $\Gamma = \mathbb{Z}^\ell$.

In §3, we study the problem from an algebraic combinatorial approach, which is a source of our main motivation. We define arrangements $\mathcal{A}(G)$ of subgroups in $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ and its complements $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$ for arbitrary abelian group G. We see that the set-theoretic deletion-contraction formula holds. In §3.2, the G-Tutte polynomial $T^G_{\mathcal{A}}(x, y)$ is defined using the number of homomorphisms of certain finite abelian groups to G (the G-multiplicities). If $G = S^1$ or $\mathbb{C}^\times$, then the G-multiplicities satisfy the five axioms of arithmetic matroids given in [11]. A natural question to ask is whether the G-multiplicities satisfy these axioms for general groups G. In §3.4, we show that four of the five axioms are satisfied by the G-multiplicities. We also prove that the G-multiplicity function satisfies another important formula, the so-called convolution formula, which has been a formula of interest recently [3, 13].

§4 contains an application of the G-Tutte polynomials via algebraic topology where we prove a formula that expresses the Poincaré polynomial of $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$ in terms of G-characteristic polynomials under the assumption that G is a non-compact abelian Lie group with finitely many connected components. This formula covers several classical results, including hyperplane arrangements (Orlik-Solomon [25] and Zaslavsky [34]), subspace arrangements (Goresky-MacPherson [16], Björner [6]) and toric arrangements (De Concini-Procesi [12], Moci [24]).

In §5, we will be concerned with an enumerative point counting problem. We show that the Euler characteristic $e(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G))$ of the complement can be computed as a special value of the G-Tutte polynomial (or G-characteristic polynomial) when G is an abelian Lie group with finitely many components. As a special case, when G is finite, we obtain a formula that counts the cardinality $\#\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$. The equality between the arithmetic characteristic polynomial and the last constituent of the characteristic quasi-polynomial is also proved. In §5.3 we compute the Poincaré polynomial for toric arrangements associated with root systems (considering positive roots to be a list in the root lattice).

This report is an extended abstract of the preprint [22], to which the interested reader is suggested to refer for many details and for all the proofs, which are omitted here.

2. BACKGROUND

2.1. **(Arithmetic) Tutte polynomials.** Let $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{Z}^\ell$ be a list of integer vectors, let $\alpha_i = (a_{i1}, \ldots, a_{i\ell})$. We may consider α_i to be a linear form defined by

$$\alpha_i(x_1, \ldots, x_\ell) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i\ell}x_\ell.$$

A sublist $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ determines a homomorphism $\alpha_\mathcal{S} : \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow \mathbb{Z}^{\#\mathcal{S}}$. Let G be an abelian group. Define

$$H_{\alpha_i,G} := \mathrm{Ker}(\alpha_i \otimes G : G^\ell \longrightarrow G) \leq G^\ell.$$

The list $\mathcal{A}$ determines an arrangement $\mathcal{A}(G) = \{H_{\alpha,G} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ of subgroups in G^ℓ. Denote their complement by

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^\ell, G) := G^\ell \smallsetminus \bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{A}} H_{\alpha_i,G}.$$

The arrangement $\mathcal{A}(G)$ of subgroups and its complement $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^\ell, G)$ are important objects of study in many contexts. We list some of them below.

(i) When G is the additive group of a field (e.g., $G = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_q$), $\mathcal{A}(G)$ is the associated hyperplane arrangement ([26]).
(ii) When $G = \mathbb{R}^c$ with $c > 0$, $\mathcal{A}(G)$ is called the c-plexification of $\mathcal{A}$ (see [6, §5.2]).
(iii) When G is $\mathbb{C}^\times$ or S^1, $\mathcal{A}(G)$ is called a toric arrangement.
(iv) When $G = S^1 \times S^1$ (viewed as an elliptic curve), $\mathcal{A}(G)$ is called an elliptic (or abelian) arrangement. ([5]).
(v) When G is a finite cyclic group $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(G)$ is related to the characteristic quasi-polynomial studied in [18, 19] (see 2.2). There is also an important connection with Ehrhart theory and enumerative problems ([7, 32, 33]).

To define the arithmetic Tutte polynomial, we need further notation. The linear map $\alpha_\mathcal{S}$ is expressed by the matrix $M_\mathcal{S} = (a_{ij})_{i\in\mathcal{S}, 1\leq j\leq \ell}$ of size $\#\mathcal{S} \times \ell$. Denote by $r_\mathcal{S}$ the rank of $M_\mathcal{S}$. Suppose that $d_{\mathcal{S},i}$ with $1 \leq i \leq r_\mathcal{S}$, $0 < d_{\mathcal{S},i}$ divides $d_{\mathcal{S},i+1}$ are the invariant factors of $M_\mathcal{S}$. The Tutte polynomial $T_\mathcal{A}(x, y)$ and the arithmetic Tutte polynomial $T^{\mathrm{arith}}_\mathcal{A}(x, y)$ of $\mathcal{A}$ are defined as follows ([24, 8]).

$$T_\mathcal{A}(x, y) = \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{A}} (x-1)^{r_\mathcal{A}-r_\mathcal{S}}(y-1)^{\#\mathcal{S}-r_\mathcal{S}},$$
$$T^{\mathrm{arith}}_\mathcal{A}(x, y) = \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{A}} m(\mathcal{S})(x-1)^{r_\mathcal{A}-r_\mathcal{S}}(y-1)^{\#\mathcal{S}-r_\mathcal{S}},$$

where $m(\mathcal{S}) = \prod_{i=1}^{r_\mathcal{S}} d_{\mathcal{S},i}$.

These polynomials encode combinatorial and topological information about the arrangements. For instance, the characteristic polynomial of the ranked poset of flats of the hyperplane arrangement is $\chi_\mathcal{A}(t) = (-1)^{r_\mathcal{A}} t^{\ell-r_\mathcal{A}} T_\mathcal{A}(1-t, 0)$, and the Poincaré polynomial of $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^\ell, \mathbb{R}^c)$ is ([16, 6])

$$P_{\mathcal{M}(\mathcal{A};\mathbb{Z}^\ell,\mathbb{R}^c)}(t) = t^{r_\mathcal{A}\cdot(c-1)} \cdot T_\mathcal{A}\left(\frac{1+t}{t^{c-1}}, 0\right). \tag{2.1}$$

Note that the special cases $c = 1$ and $c = 2$ reduce to the famous formulas given by Zaslavsky [34] and Orlik-Solomon [25], respectively. Similarly, as proved by De Concini-Procesi [12] and Moci [24], the characteristic polynomial of the layers (connected components of intersections) of the corresponding toric arrangement is $\chi^{\mathrm{arith}}_\mathcal{A}(t) = (-1)^{r_\mathcal{A}} t^{\ell-r_\mathcal{A}} T^{\mathrm{arith}}_\mathcal{A}(1-t, 0)$, and the Poincaré polynomial of $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^\ell, \mathbb{C}^\times)$ is

$$P_{\mathcal{M}(\mathcal{A};\mathbb{Z}^\ell,\mathbb{C}^\times)}(t) = (1+t)^{\ell-r_\mathcal{A}} \cdot t^{r_\mathcal{A}} \cdot T^{\mathrm{arith}}_\mathcal{A}\left(\frac{1+2t}{t}, 0\right). \tag{2.2}$$

The cohomology ring structure of $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \mathbb{Z}^\ell, \mathbb{C}^\times)$ was recently described by Callegaro-Delucchi [9].

2.2. **Characteristic quasi-polynomials.** Kamiya, Takemura and Terao [18] proved that $\#\mathcal{M}(\mathcal{A};\mathbb{Z}^\ell,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ is a quasi-polynomial in q ($q\in\mathbb{Z}_{>0}$), denoted by $\chi^{\text{quasi}}_{\mathcal{A}}(q)$, with period

$$\rho_{\mathcal{A}} := \operatorname{lcm}(d_{\mathcal{S},r_{\mathcal{S}}} \mid \mathcal{S}\subset\mathcal{A}).$$

More precisely, there exist polynomials $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_{\rho_{\mathcal{A}}}(t)\in\mathbb{Z}[t]$ such that for any positive integer q,

$$\chi^{\text{quasi}}_{\mathcal{A}}(q) := \#\mathcal{M}(\mathcal{A};\mathbb{Z}^\ell,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = f_k(q),$$

where $k\equiv q \mod \rho_{\mathcal{A}}$. The polynomial $f_k(t)$ is called the k-constituent. They also proved that $f_k(t)=f_m(t)$ if $\gcd(k,\rho_{\mathcal{A}})=\gcd(m,\rho_{\mathcal{A}})$. Furthermore, the 1-constituent $f_1(t)$ (and more generally, $f_k(t)$ with $\gcd(k,\rho_{\mathcal{A}})=1$) is known to be equal to the characteristic polynomial $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ ([2]).

We will show that the most degenerate constituent $f_{\rho_{\mathcal{A}}}(t)$ is obtained as a specialization of the arithmetic Tutte polynomial, and that the other constituents can also be described in terms of the G-Tutte polynomials introduced later (Theorem 5.3, Corollary 5.4).

3. Algebraic Combinatorics

Throughout the paper, the term **list** refers to synonym of multiset. Let Γ be a finitely generated abelian group, $\mathcal{A}\subset\Gamma$ a list of finitely many elements, and G an arbitrary abelian group.

3.1. **Arrangements over abelian groups.** Let us denote the subgroup of torsion elements of Γ by $\Gamma_{\text{tor}}\subset\Gamma$, and the rank of Γ by r_Γ. More generally, for a sublist $\mathcal{S}\subset\Gamma$, denote the rank of the subgroup $\langle\mathcal{S}\rangle\subset\Gamma$ generated by $\mathcal{S}$ by

$$r_{\mathcal{S}} = \operatorname{rank}\langle\mathcal{S}\rangle.$$

We now define the "arrangement" associated with a list $\mathcal{A}$ over an arbitrary abelian group G. The total space is the abelian group

$$\operatorname{Hom}(\Gamma,G) = \{\varphi:\Gamma\longrightarrow G \mid \ \varphi \text{ is a homomorphism}\}$$

of all homomorphisms from Γ to G. For each $\alpha\in\Gamma$, define

$$H_{\alpha,G} := \{\varphi\in\operatorname{Hom}(\Gamma,G)\mid \varphi(\alpha)=0\}.$$

The collection of subgroups $\mathcal{A}(G)=\{H_{\alpha,G}\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$ is called the G-plexification of $\mathcal{A}$. Denote the complement of $\mathcal{A}(G)$ by

$$\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G) := \operatorname{Hom}(\Gamma,G)\smallsetminus\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} H_{\alpha,G}.$$

Fix $\alpha\in\mathcal{A}$. Denote $\mathcal{A}':=\mathcal{A}\smallsetminus\{\alpha\}$ as a list of elements in the same group $\Gamma':=\Gamma$. Set $\Gamma'':=\Gamma/\langle\alpha\rangle$, and $\mathcal{A}'':=\mathcal{A}/\{\alpha\}=\{\overline{\alpha'}\mid\alpha'\in\mathcal{A}'\}\subseteq\Gamma''$, the contraction of $\mathcal{A}$ to $\{\alpha\}$. The group $\operatorname{Hom}(\Gamma'',G)$ can be identified with

$$H_{\alpha,G}=\{\varphi\in\operatorname{Hom}(\Gamma,G)\mid\varphi(\alpha)=0\}.$$

Proposition 3.1 (Deletion-Contraction formula)**.**

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}';\Gamma',G)=\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G)\sqcup\mathcal{M}(\mathcal{A}'';\Gamma'',G).$$

3.2. **G-Tutte polynomials.**

Definition 3.2. An abelian group G is said to be *torsion-wise finite* if the subgroup of d-torsion points $G[d]:=\{x\in G\mid d\cdot x=0\}$ is finite for all $d\in\mathbb{Z}_{>0}$.

Convention: In the remaining of this paper, we assume that G is always a torsion-wise finite group.

Definition 3.3. The *G-multiplicity* $m(\mathcal{S};G)\in\mathbb{Z}_{>0}$ for each $\mathcal{S}\subseteq\Gamma$ is defined by

$$m(\mathcal{S};G) := \#\operatorname{Hom}\left((\Gamma/\langle\mathcal{S}\rangle)_{\text{tor}},G\right).$$

Definition 3.4.

(1) The *multivariate G-Tutte polynomial* $Z^G_{\mathcal{A}}(q, \boldsymbol{v})$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$Z^G_{\mathcal{A}}(q, \boldsymbol{v}) = Z^G_{\mathcal{A}}(q, v_1, \dots, v_n) := \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}} m(\mathcal{S}; G) q^{-r_{\mathcal{S}}} \prod_{\alpha_i \in \mathcal{S}} v_i.$$

(2) The *G-Tutte polynomial* $T^G_{\mathcal{A}}(x, y)$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$T^G_{\mathcal{A}}(x, y) := \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}} m(\mathcal{S}; G)(x-1)^{r_{\mathcal{A}} - r_{\mathcal{S}}}(y-1)^{\#\mathcal{S} - r_{\mathcal{S}}}.$$

(3) The *G-characteristic polynomial* $\chi^G_{\mathcal{A}}(t)$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$\chi^G_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{S}} m(\mathcal{S}; G) \cdot t^{r_\Gamma - r_{\mathcal{S}}}.$$

These three polynomials are related by the following formulas:

$$T^G_{\mathcal{A}}(x, y) = (x-1)^{r_{\mathcal{A}}} \cdot Z^G_{\mathcal{A}}((x-1)(y-1), y-1, \dots, y-1),$$
$$\chi^G_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^{r_{\mathcal{A}}} \cdot t^{r_\Gamma - r_{\mathcal{A}}} \cdot T^G_{\mathcal{A}}(1-t, 0).$$

Recall that $\alpha \in \mathcal{A}$ is called a loop (resp. coloop) if $\alpha \in \Gamma_{\mathrm{tor}}$ (resp. $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A} \smallsetminus \{\alpha\}} + 1$). An element α that is neither a loop nor a coloop is called proper ([11, §4.4]).

Lemma 3.5. *Let $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ be the triple associated with $\alpha_i \in \mathcal{A}$. Then*

$$Z^G_{\mathcal{A}}(q, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} Z^G_{\mathcal{A}'}(q, \boldsymbol{v}) + v_i \cdot Z^G_{\mathcal{A}''}(q, \boldsymbol{v}), & \text{if } \alpha_i \text{ is a loop,} \\ Z^G_{\mathcal{A}'}(q, \boldsymbol{v}) + v_i \cdot q^{-1} \cdot Z^G_{\mathcal{A}''}(q, \boldsymbol{v}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Corollary 3.6. *The G-Tutte polynomials satisfy*

$$T^G_{\mathcal{A}}(x, y) = \begin{cases} T^G_{\mathcal{A}'}(x, y) + (y-1) T^G_{\mathcal{A}''}(x, y), & \text{if } \alpha_i \text{ is a loop,} \\ (x-1) T^G_{\mathcal{A}'}(x, y) + T^G_{\mathcal{A}''}(x, y), & \text{if } \alpha_i \text{ is a coloop,} \\ T^G_{\mathcal{A}'}(x, y) + T^G_{\mathcal{A}''}(x, y), & \text{if } \alpha_i \text{ is proper.} \end{cases}$$

Corollary 3.7. *The G-characteristic polynomials satisfy*

$$\chi^G_{\mathcal{A}}(t) = \chi^G_{\mathcal{A}'}(t) - \chi^G_{\mathcal{A}''}(t).$$

3.3. **Specializations.** The G-Tutte polynomial has several specializations. We choose to mention some of important ones.

Proposition 3.8. *Let $\mathcal{A}$ be a list in the free abelian group $\Gamma = \mathbb{Z}^\ell$.*

(1) *Suppose that G is a torsion-free abelian group. Then $T^G_{\mathcal{A}}(x, y) = T_{\mathcal{A}}(x, y)$ and $\chi^G_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t)$.*
(2) *Suppose $G = S^1$ or $\mathbb{C}^\times$. Then $T^G_{\mathcal{A}}(x, y) = T^{\mathrm{arith}}_{\mathcal{A}}(x, y)$ and $\chi^G_{\mathcal{A}}(t) = \chi^{\mathrm{arith}}_{\mathcal{A}}(t)$.*

The arithmetic Tutte polynomial can also be obtained as another specialization of the G-Tutte polynomial. Suppose that $(\Gamma / \langle \mathcal{S} \rangle)_{\mathrm{tor}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k_{\mathcal{S}}} \mathbb{Z}/d_{\mathcal{S},i}\mathbb{Z}$, where $k_{\mathcal{S}} \geq 0$ and $d_{\mathcal{S},i} | d_{\mathcal{S},i+1}$. Define $\rho_{\mathcal{A}}$ by

$$\rho_{\mathcal{A}} := \mathrm{lcm}(d_{\mathcal{S},k_{\mathcal{S}}} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{A}).$$

Proposition 3.9. $T^{\mathbb{Z}/\rho_{\mathcal{A}}\mathbb{Z}}_{\mathcal{A}}(x, y) = T^{\mathrm{arith}}_{\mathcal{A}}(x, y)$.

3.4. **Relationship with arithmetic matroids.**

Theorem 3.10. *The G-multiplicities satisfy the following four properties (we borrow the numbering from [11, §2.3]).*

(1) *If $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ and $\alpha \in \mathcal{A}$ satisfy $r_{\mathcal{S} \cup \{\alpha\}} = r_{\mathcal{S}}$, then $m(\mathcal{S} \cup \{\alpha\}; G)$ divides $m(\mathcal{S}; G)$.*
(2) *If $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ and $\alpha \in \mathcal{A}$ satisfy $r_{\mathcal{S} \cup \{\alpha\}} = r_{\mathcal{S}} + 1$, then $m(\mathcal{S}; G)$ divides $m(\mathcal{S} \cup \{\alpha\}; G)$.*
(4) *If $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ and $r_{\mathcal{S}} = r_{\mathcal{T}}$, then*

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}; G) := \sum_{\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}} (-1)^{\#\mathcal{B} - \#\mathcal{S}} m(\mathcal{B}; G) \geq 0.$$

(5) *If $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ and $r_{\mathcal{T}} = r_{\mathcal{S}} + \#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{S})$, then*

$$\rho^*_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}; G) := \sum_{\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}} (-1)^{\#\mathcal{T} - \#\mathcal{B}} m(\mathcal{B}; G) \geq 0.$$

Additionally, if G is a (torsion-wise finite) divisible abelian group, that is, the multiplication-by-k map $k : G \longrightarrow G$ is surjective for any positive integer k, then the G-multiplicities satisfy the following.

(3) *If $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ and $\mathcal{T}$ is a disjoint union $\mathcal{T} = \mathcal{S} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ such that for all $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, we have $r_{\mathcal{R}} = r_{\mathcal{S}} + \#(\mathcal{R} \cap \mathcal{B})$, then*

$$m(\mathcal{S}; G) \cdot m(\mathcal{T}; G) = m(\mathcal{S} \sqcup \mathcal{B}; G) \cdot m(\mathcal{S} \sqcup \mathcal{C}; G).$$

Theorem 3.11. *Let G be a torsion-wise finite divisible abelian group. Then the coefficients of the G-Tutte polynomial $T^G_{\mathcal{A}}(x, y)$ are positive integers.*

Theorem 3.12 (Convolution formula)**.** *Let $\mathcal{A} \subset \Gamma$ be a list in a finitely generated group Γ, and let G_1 and G_2 be torsion-wise finite groups. Then*

$$T^{G_1 \times G_2}_{\mathcal{A}}(x, y) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} T^{G_1}_{\mathcal{B}}(0, y) \cdot T^{G_2}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(x, 0).$$

4. Algebraic Topology

4.1. **Torus cycles.** We introduce a special class of homology cycles in $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$, called torus cycles, which are lifts of cycles in a compact torus. Let $G = F \times (S^1)^p \times \mathbb{R}^q$, where F a finite abelian group. Write $G_c = F \times (S^1)^p$ (compact part) and $V = \mathbb{R}^q$ (non-compact part). Let Γ be a finitely generated abelian group. Fix a decomposition $\Gamma = \Gamma_{\text{tor}} \oplus \Gamma_{\text{free}}$, where $\Gamma_{\text{free}} \simeq \mathbb{Z}^{r_\Gamma}$. Then

$$\text{Hom}(\Gamma, G) \simeq \text{Hom}(\Gamma, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V). \tag{4.1}$$

(Note that $\text{Hom}(\Gamma_{\text{tor}}, V) = 0$). We can decompose this further as follows:

$$\text{Hom}(\Gamma, G) \simeq \text{Hom}(\Gamma_{\text{tor}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V). \tag{4.2}$$

Let $\alpha = (\beta, \eta) \in \Gamma_{\text{tor}} \oplus \Gamma_{\text{free}}$. According to decomposition (4.1),

$$H_{\alpha, G} = H_{\alpha, G_c} \times H_{\eta, V},$$

where $H_{\alpha, G_c} \subset \text{Hom}(\Gamma, G_c)$ and $H_{\eta, V} \subset \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V)$. If $\alpha \in \Gamma_{\text{tor}}$, or equivalently $\alpha = (\beta, 0)$, then using (4.2) gives

$$H_{\alpha, G} = H_{\beta, G_c} \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V),$$

where H_{β, G_c} is a subgroup of the finite abelian group $\text{Hom}(\Gamma_{\text{tor}}, G_c)$. In this case, $H_{\alpha, G}$ is a collection of connected components of $\text{Hom}(\Gamma, G)$. If $\mathcal{A} \subset \Gamma_{\text{tor}} \subset \Gamma$, then

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) = \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma_{\text{tor}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V). \tag{4.3}$$

Therefore, $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$ is also a collection of some of connected components of $\text{Hom}(\Gamma, G)$.

Let $\mathcal{A} \subset \Gamma$ be a list of elements. Define $\mathcal{A}_{\text{tor}} := \mathcal{A} \cap \Gamma_{\text{tor}}$. Consider the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\text{tor}}; \Gamma, G) & \xrightarrow{\subset} & \text{Hom}(\Gamma, G) \ni (f, t, v) \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\text{tor}}; \Gamma, G_c) & \xrightarrow{\subset} & \text{Hom}(\Gamma, G_c) \ni (f, t), \end{array} \tag{4.4}$$

where $\pi : \text{Hom}(\Gamma, G) \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma, G_c)$ is the projection defined by $\pi(f, t, v) = (f, t)$ for $(f, t, v) \in \text{Hom}(\Gamma_{\text{tor}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, G_c) \times \text{Hom}(\Gamma_{\text{free}}, V) \simeq \text{Hom}(\Gamma, G)$.

Now assume that $q > 0$. The fiber of the projection π is isomorphic to $\text{Hom}(\Gamma, V) \simeq V^{r_\Gamma} \simeq \mathbb{R}^{q \cdot r_\Gamma}$. Hence

$$\mathcal{M}(\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{\text{tor}}; \Gamma, V) = \text{Hom}(\Gamma, V) \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{\text{tor}}} H_{\alpha, V}$$

is non-empty. Fix an element $v_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, V)$. For a given $(f,t) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G_c)$, define $i_{v_0}(f,t) := (f,t,v_0)$. This induces a map

$$i_{v_0} : \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, G_c) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G),$$

which is a section of the projection $\pi|_{\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G)} : \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, G_c)$ in (4.4).

Definition 4.1. Assume that $q > 0$. A cycle $\gamma \in H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$ is said to be a *torus cycle* if there exist a connected component $T \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, G_c)$, a cycle $\widetilde{\gamma} \in H_*(T, \mathbb{Z}) \subset H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, G_c), \mathbb{Z})$ and $v_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, V)$ such that

$$\gamma = (i_{v_0})_*(\widetilde{\gamma}).$$

The subgroup of $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$ generated by torus cycles is denoted by $H_*^{\mathrm{torus}}(\mathcal{A}(G))$.

4.2. **Meridian cycles.** The torus cycles introduced in the previous section are not enough to generate the homology group $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$. We also need to consider meridians of $H_{\alpha,G}$ to generate $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$. Let us first recall the notion of layers. A layer of $\mathcal{A}(G)$ is a connected component of a non-empty intersection of elements of $\mathcal{A}(G)$. Let $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Every connected component of $H_{\mathcal{S},G} := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{S}} H_{\alpha,G}$ is isomorphic to $\left((S^1)^p \times \mathbb{R}^q\right)^{r_\Gamma - r_{\mathcal{S}}}$. We sometimes call the number $r_{\mathcal{S}}$ the rank of the layer. Since $H_{\emptyset,G} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, a connected component of $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ is a layer of rank 0. Similarly, a connected component of $H_{\alpha,G}$ for $\alpha \in \mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}_{\mathrm{tor}}$ is a layer of rank 1.

Let L be a layer. Denote the set of α such that $H_{\alpha,G}$ contains L by $\mathcal{A}_L := \{\alpha \in \mathcal{A} \mid L \subset H_{\alpha,G}\}$, and the contraction by $\mathcal{A}^L := \mathcal{A}/\mathcal{A}_L$. Note that L can be considered to be a rank 0 layer of $\mathcal{A}^L(G)$. Define

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^L(\mathcal{A}) :=& L \smallsetminus \bigcup_{H_{\alpha,G} \not\supset L} H_{\alpha,G} \\ =& L \cap \mathcal{M}(\mathcal{A}^L; \Gamma/\langle \mathcal{A}_L \rangle, G).\end{aligned}$$

Let $L_1 \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ be a rank 1 layer of $\mathcal{A}(G)$, and let L_0 be the rank 0 layer that contains L_1. We wish to define the meridian homomorphism

$$\mu^{\varepsilon}_{L_0/L_1} : H_*(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{*+\varepsilon\cdot(g-1)}(\mathcal{M}^{L_0}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}),$$

where $g = \dim G = p + q > 0$ and $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Since the normal bundle of L_1 in L_0 is trivial, there is a tubular neighborhood U of $\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A})$ in L_0 such that $U \simeq \mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times D^g$ with the identification $\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times \{0\}$. Then $U \cap \mathcal{M}^{L_0}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times D^{g*}$, where $D^{g*} = D^g \smallsetminus \{0\}$. We denote the corresponding inclusion by $i : \mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times D^{g*} \hookrightarrow M^{L_0}(\mathcal{A})$. For a given $\gamma \in H_*(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$, define the element $\mu^{\varepsilon}_{L_0/L_1}(\gamma) \in H_{*+\varepsilon\cdot(g-1)}(\mathcal{M}^{L_0}(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ as follows.

(0) For $\varepsilon = 0$, let $p_0 \in D^{g*}$. Then $\gamma \times [p_0] \in H_*(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A})) \otimes H_0(D^{g*}) \subset H_*(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times D^{g*})$, and $\mu^0_{L_0/L_1}(\gamma) := i_*(\gamma \times [p_0])$.

(1) For $\varepsilon = 1$, let $S^{g-1} \subset D^{g*}$ be a sphere of small radius. Then $\gamma \times [S^{g-1}] \in H_*(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A})) \otimes H_{g-1}(D^{g*}) \subset H_{*+g-1}(\mathcal{M}^{L_1}(\mathcal{A}) \times D^{g*})$ (this part is essentially the Gysin homomorphism). Now define $\mu^1_{L_0/L_1}(\gamma) := i_*(\gamma \times [S^{g-1}])$.

Similarly, we can define the meridian map

$$\mu^{\varepsilon}_{L_j/L_{j+1}} : H_*(\mathcal{M}^{L_{j+1}}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{*+\varepsilon\cdot(g-1)}(\mathcal{M}^{L_j}(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$$

between layers $L_j \supset L_{j+1}$ with consecutive ranks.

Definition 4.2. A cycle $\gamma \in H_d(\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G), \mathbb{Z})$ is called a *meridian cycle* if there exists some $k \geq 0$ and

(a) a flag $L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k$ of layers with $\mathrm{rank}\, L_j = j$, such that $L_0 \cap \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) \neq \emptyset$ (or equivalently, $L_0 \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathrm{tor}}; \Gamma, G)$),

(b) a sequence $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$, and

(c) a torus cycle $\tau \in H_{d-(g-1)\sum_{i=1}^k \varepsilon_i}(\mathcal{M}^{L_k}(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$,

such that

$$\gamma = \mu^{\varepsilon_1}_{L_0/L_1} \circ \mu^{\varepsilon_2}_{L_1/L_2} \circ \cdots \circ \mu^{\varepsilon_k}_{L_{k-1}/L_k}(\tau).$$

We call the minimum such k the depth of γ.

4.3. **Poincaré polynomials for non-compact groups.** Throughout this section, we assume that $G = (S^1)^p \times \mathbb{R}^q \times F$, where F is a finite abelian group, $q > 0$, and $g := \dim G = p + q$. The Poincaré polynomial of G is $P_G(t) = (1+t)^p \times \#F$. For simplicity, we also set $\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}') := \mathcal{M}(\mathcal{A}'; \Gamma, G)$, and $\mathcal{M}(\mathcal{A}'') := \mathcal{M}(\mathcal{A}''; \Gamma'', G)$.

Theorem 4.3. *The following hold:*

(i) $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ *is generated by meridian cycles. That is* $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}) = H_*^{\mathrm{merid}}(\mathcal{A}(G))$, *and furthermore it is torsion free.*

(ii) *If* α *is not a loop, then* $H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathcal{M}(\mathcal{A}'), \mathbb{Z})$ *is surjective.*

(iii) *Let* $\alpha \in \mathcal{A}$. *Then*

$$P_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(t) = \begin{cases} P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}')}(t) - P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}'')}(t), & \text{if } \alpha \text{ is a loop,} \\ P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}')}(t) + t^{g-1} \cdot P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}'')}(t), & \text{if } \alpha \text{ is not a loop.} \end{cases}$$

Theorem 4.4.

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(t) &= P_G(t)^{r_\Gamma - r_\mathcal{A}} \cdot t^{r_\mathcal{A}(g-1)} \cdot T^G_\mathcal{A}\left(\frac{P_G(t)}{t^{g-1}} + 1, 0\right) \\ &= (-t^{g-1})^{r_\Gamma} \cdot \chi^G_\mathcal{A}\left(-\frac{P_G(t)}{t^{g-1}}\right). \end{aligned}$$

5. Enumeration

5.1. **Euler characteristic of the complement.** We briefly recall the notion of Euler characteristic for semialgebraic sets (see [10, 4] for further details). Every semialgebraic set X has a decomposition $X = \bigsqcup_{i=1}^N X_i$ such that each X_i is a semialgebraic subset that is semialgebraically homeomorphic to the open simplex $\sigma_{d_i} = \{(x_1, \ldots, x_{d_i}) \in \mathbb{R}^{d_i} \mid x_i > 0, \sum x_i < 1\}$ for some $d_i = \dim X_i$. The semialgebraic Euler characteristic of X is defined by

$$e_{\mathrm{semi}}(X) := \sum_{i=1}^N (-1)^{d_i}.$$

Unlike the topological Euler characteristic $e_{\mathrm{top}}(X) := \sum (-1)^i b_i(X)$, the semialgebraic Euler characteristic $e_{\mathrm{semi}}(X)$ is not homotopy invariant. However, if X is a manifold (without boundary), then $e_{\mathrm{semi}}(X)$ and $e_{\mathrm{top}}(X)$ are related by the following formula:

$$e_{\mathrm{semi}}(X) = (-1)^{\dim X} \cdot e_{\mathrm{top}}(X).$$

Here we assume that G is of the form $G = (S^1)^p \times \mathbb{R}^q \times F$, where F is a finite abelian group. Such a group G can be realized as a semialgebraic set, with the group operations defined by C^∞ semialgebraic maps. Hence subsets defined by using group operations are always semialgebraic sets. The Euler characteristics of G are easily computed as

$$e_{\mathrm{semi}}(G) = \begin{cases} 0, & \text{if } p > 0, \\ (-1)^{p+q} \cdot \#F, & \text{if } p = 0, \end{cases}$$

$$e_{\mathrm{top}}(G) = \begin{cases} 0, & \text{if } p > 0, \\ \#F, & \text{if } p = 0. \end{cases}$$

Let $\mathcal{A}$ be a finite list of elements in a finitely generated abelian group Γ. The space $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$ is a semialgebraic set, and, if it is not empty, it is also a manifold (without boundary) of $\dim \mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) = r_\Gamma \cdot \dim G$. The G-Tutte polynomial can be used to compute the Euler characteristic of $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$.

Theorem 5.1. *Let G be an abelian Lie group with finitely many connected components, and let $g = \dim G$. Then,*

$$e_{\mathrm{semi}}(\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G)) = \chi^G_{\mathcal{A}}(e_{\mathrm{semi}}(G)),$$

or equivalently,

$$e_{\mathrm{top}}(\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G)) = (-1)^{g\cdot r_\Gamma}\cdot\chi^G_{\mathcal{A}}\left((-1)^g\cdot e_{\mathrm{top}}(G)\right).$$

5.2. **Point counting in complements.** In the case that G is finite, the complement $\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G)$ is also a finite set. Every finite set can be considered as a 0-dimensional semialgebraic set whose Euler characteristic is equal to its cardinality. The following theorem immediately follows from Theorem 5.1.

Theorem 5.2. *Let $\mathcal{A}$ be a finite list of elements in a finitely generated abelian group Γ, and let G be a finite abelian group. Then*

$$\#\mathcal{M}(\mathcal{A};\Gamma,G) = \chi^G_{\mathcal{A}}(\#G).$$

Theorem 5.3. *(See §2.2 for notation.) Let $\mathcal{A}$ be a finite list of elements in $\Gamma=\mathbb{Z}^\ell$, and let k be a divisor of $\rho_{\mathcal{A}}$. The k-constituent $f_k(t)$ of the characteristic quasi-polynomial $\chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}}(q)$ is equal to*

$$f_k(t) = \chi^{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}_{\mathcal{A}}(t).$$

Corollary 5.4. *The last constituent $f_{\rho_{\mathcal{A}}}(t)$ of the characteristic quasi-polynomial $\chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}}(q)$ is equal to both $\chi^{\mathbb{C}^\times}_{\mathcal{A}}(t)$ and $\chi^{\mathrm{arith}}_{\mathcal{A}}(t)$.*

5.3. **Examples: root systems.** Let Φ be an irreducible root system of rank ℓ, and let $\Gamma = \mathbb{Z}\cdot\Phi$ be the root lattice of Φ. Consider the list $\mathcal{A}_\Phi := \Phi^+ \subset \Gamma$ of positive roots. The characteristic quasi-polynomial $\chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}_\Phi}(q)$ was computed by Suter [29] and Kamiya-Takemura-Terao [19]. Using formula (2.2), or Theorem 4.4, the Poincaré polynomial for the corresponding toric arrangement is $P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_\Phi;\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) = (-t)^\ell\chi^{\mathbb{C}^\times}_{\mathcal{A}_\Phi}\left(-\frac{1+t}{t}\right)$. We only show exceptional cases.

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_{E_6};\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) =& 1+42t+705t^2+6020t^3+27459t^4+63378t^5+58555t^6\\
P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_{E_7};\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) =& 1+70t+2016t^2+30800t^3+268289t^4+1328670t^5\\
&+3479734t^6+3842020t^7\\
P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_{E_8};\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) =& 1+128t+6888t^2+202496t^3+3539578t^4+37527168t^5\\
&+235845616t^6+818120000t^7+1313187309t^8\\
P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_{F_4};\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) =& 1+28t+286t^2+1260t^3+2153t^4\\
P_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_{G_2};\Gamma,\mathbb{C}^\times)}(t) =& 1+8t+19t^2
\end{aligned}$$

Acknowledgements: The author thanks the coauthors Ye Liu (Hokkaido University) and Masahiko Yoshinaga (Hokkaido University) for letting him use the preprint [22] for writing up this report. He also gratefully acknowledges the support of the scholarship program of the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology (MEXT) under grant number 142506.

REFERENCES

[1] F. Ardila, F. Castillo, M. Henley, The arithmetic Tutte polynomials of the classical root systems. *Int. Math. Res. Not.* **IMRN 2015**, no. 12, 3830-3877.
[2] C. A. Athanasiadis, Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *Adv. Math.* **122** (1996), no. 2, 193–233.
[3] S. Backman, M. Lenz, A convolution formula for Tutte polynomials of arithmetic matroids and other combinatorial structures. Preprint, arXiv:1602.02664
[4] S. Basu, R. Pollack, M. -F. Roy, Algorithms in real algebraic geometry. Second edition. Algorithms and Computation in Mathematics, 10. *Springer-Verlag, Berlin*, 2006. x+662 pp.
[5] C. Bibby, Cohomology of abelian arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), no. 7, 3093-3104.
[6] A. Björner, Subspace arrangements. *First European Congress of Mathematics, Vol. I (Paris, 1992)*, 321-370, Progr. Math., 119, Birkhäuser, Basel, 1994.

[7] A. Blass, B. Sagan, Characteristic and Ehrhart polynomials. *J. Algebraic Combin.* **7** (1998), no. 2, 115-126.
[8] P. Brändén, L. Moci, The multivariate arithmetic Tutte polynomial. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), no. 10, 5523-5540.
[9] F. Callegaro, E. Delucchi, The integer cohomology algebra of toric arrangements. *Advances in Mathematics*, **313**, 746-802.
[10] M. Coste, Real Algebraic Sets. *Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry*, 1-32, Panor. Synthèses, 24, Soc. Math. France, Paris, 2007.
[11] M. D'Adderio, L. Moci, Arithmetic matroids, the Tutte polynomial and toric arrangements. *Adv. in Math.* **232** (2013) 335-367.
[12] C. De Concini, C. Procesi, On the geometry of toric arrangements. *Transform. Groups* **10** (2005), no. 3-4, 387-422.
[13] E. Delucchi, L. Moci, Colorings and flows on CW complexes, Tutte quasi-polynomials and arithmetic matroids. Preprint, arXiv:1602.04307.
[14] E. Delucchi, S. Riedel, Group actions on semimatroids. Preprint, arXiv:1507.06862.
[15] A. Fink, L. Moci, Matroids over a ring. *J. Eur. Math. Soc.* **18** (2016), no. 4, 681-731.
[16] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse Theory, in: Ergeb. Math. Grenzgeb., Vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
[17] J. E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990. xii+204 pp.
[18] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *J. Algebraic Combin.* **27** (2008), no. 3, 317–330.
[19] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. *Arrangements, local systems and singularities*, 177–190, **Progr. Math., 283**, *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2010.
[20] W. Kook, V. Reiner, D. Stanton, A convolution formula for the Tutte polynomial. *J. Combin. Theory Ser. B* **76** (1999), no. 2, 297-300.
[21] G. I. Lehrer, A toral configuration space and regular semisimple conjugacy classes. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **118** (1995), no. 1, 105-113.
[22] Y. Liu, T. N. Tran, M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. Preprint, arXiv:1707.04551v1.
[23] E. Looijenga, Cohomology of $\mathcal{M}_3$ and $\mathcal{M}_3^1$. *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Göttingen, 1991/Seattle, WA, 1991)*, 205-228, Contemp. Math., 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
[24] L. Moci, A Tutte polynomial for toric arrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no. 2, 1067-1088.
[25] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.* **56** (1980), 167–189.
[26] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xviii+325 pp.
[27] J. Oxley, Matroid theory. Second edition. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 21. Oxford University Press, Oxford, 2011. xiv+684 pp.
[28] A. D. Sokal, The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids. *Surveys in combinatorics 2005*, 173-226, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 327, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
[29] R. Suter, The number of lattice points in alcoves and the exponents of the finite Weyl groups. *Math. Comp.* **67** (1998), no. 222, 751–758.
[30] M. B. Thistlethwaite, A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* **26** (1987), no. 3, 297-309.
[31] D. J. A. Welsh, Complexity: knots, colourings and counting. London Mathematical Society Lecture Note Series, 186. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. viii+163 pp.
[32] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. (arXiv:1501.04955) To appear in *Tohoku Math. J.*
[33] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems. Preprint, arXiv:1610.07841
[34] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* 1 (1975), no. 154, vii+102 pp.

TAN NHAT TRAN, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, KITA 10, NISHI 8, KITA-KU, SAPPORO 060-0810, JAPAN.
E-mail address: trannhattan@math.sci.hokudai.ac.jp

ソリトンとネットワーク

○田中悠太 (Yuta Tanaka)*，城戸真弥†，渡邉靖之*，丸野健一‡，筧三郎§

1　イントロダクション

2 次元浅水波を記述する代表的な数理モデルとして Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 3u_{yy} = 0 \tag{1}$$

が知られている．特に $\sigma^2 = -1$ の時は KP I 方程式，$\sigma^2 = 1$ の時は KP II 方程式と呼ばれている．KP II 方程式はソリトン解を持つことが知られており，その解は Wronskian で表示することができる．最近，KP II 方程式の Wronskian 解のソリトン相互作用は組み合わせ論的手法を用いることでより深く解析できることがわかってきた [1, 2, 3, 4]．

本稿では KP II 方程式の拡張の一つとして知られている DKP(coupled KP) 方程式 [5, 6]

$$\begin{cases} (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 24(v^+v^-)_{xx} \\ 2v_t^{\pm} + 3uv_x^{\pm} + v_{xxx}^{\pm} \mp 3\left(v_{xy}^{\pm} + v^{\pm}\int^x u_y dx\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

のソリトン相互作用を扱う．DKP 方程式 (2) は $v^+ = v^- = 0$ とした時に KP II 方程式 (1) に一致するので，この方程式は KP II 方程式の全ての解を厳密解として含んでいる．Isojima-Willox-Satsuma は広田の方法を用いて DKP 方程式のソリトン解を求め，spider-web 解と呼ばれる蜘蛛の巣状パターンのソリトン相互作用の持つ解を発見した [7]．この spider-web 解の発見の後，Biondini-Kodama は KP II 方程式も spider-web 解を持つことを発見し [8]，これがきっかけとなり 2 次元ソリトンの相互作用の研究が活発化することとなった．Chakravarty-Kodama は KP II 方程式のソリトン解の Wronskian 表示に対して Cauchy-Binet の公式を適用し，KP II 方程式のソリトン解の分類に成功した [1]．その後，Kodama らによって KP II 方程式のソリトン解の分類は chord 図，J-diagram，ネットワークなどを用いることで完全置換と対応することが示された [3]．Kodama-Maruno は DKP 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示に対して石川・若山の Pfaffian の和公式を適用し，DKP ソリトン相互作用の詳細な解析を行ったが，DKP ソリトン相互作用は KP ソリトン相互作用に比べて非常に複雑であり，数学的道具の不足も相まってソリトン解の分類にまでは至っていない [9]．そのため，DKP ソリトン相互作用の分類を行うためにはまず数学的道具を整備する必要がある．本研究の目標は，Kodama-Maruno による DKP 方程式のソリトン相互作用の研究をさらに前進させ，DKP 方程式のソリトン解の分類を行い，ソリトン相互作用の詳細を理解することである．本稿では KP II 方程式のソリトン相互作用と置換，chord 図，J-diagram，ネットワークについて解説した後，DKP 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示に対してネットワークを構成する方法を提案する．

*早稲田大学大学院数学応用数理専攻
†早稲田大学基幹理工学部応用数理学科
‡早稲田大学理工学術院
§立教大学理学部

2　KP II 方程式の Wronskian 解とネットワーク

KP II 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0 \tag{1}$$

は従属変数変換 $u(x,y,t) = 2\left(\log\tau(x,y,t)\right)_{xx}$ によって双線形方程式

$$\left(D_x^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2\right)\tau\cdot\tau = 0 \tag{3}$$

に変形され，この双線形方程式 (3) は Wronskian 解

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix},$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \tag{4}$$

を持つ．ただし D_x, D_y, D_t は広田の D 演算子

$$D_x^l D_y^m D_t^n f(x,y,t)\cdot g(x,y,t)$$
$$= \frac{\partial^l}{\partial x'^l}\frac{\partial^m}{\partial y'^m}\frac{\partial^n}{\partial t'^n} f(x+x', y+y', t+t')g(x-x', y-y', t-t')\Big|_{\substack{x'=0\\y'=0\\t'=0}}$$

である．特に分散関係式 (4) を満たす f_i として

$$f_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij}e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_jx + k_j^2y + k_j^3t \qquad (k_1 < k_2 < \cdots < k_M, \quad N < M)$$

を考えると τ 関数は

$$\tau = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1}e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1}e^{\theta_M} \end{pmatrix}\right|$$
$$=: \left|\hat{A}E\right|$$

と表され，これは KP II 方程式 (1) のソリトン解になる．このように表されたソリトン解の相互作用を分類するために $\hat{A}$ 行列に次の 2 条件を課す:

- $\hat{A}$ 行列の $N\times N$ 小行列式が全て非負である．(totally non-negative, TNN)
- $\hat{A}$ 行列を行基本変形で階段行列にした時，全ての行のピボット以外の成分および全ての列に非零の成分が存在する．(reduced row echelon form, RREF)

ここで 1 つ目の条件は τ 関数が零点を持たない，つまりもとの従属変数 u が特異点を持つような非物理的な解でないことに対応し，2 つ目の条件はゲージ変換を含めて本質的に指数関数が M 個全て残ることに対応している．$\hat{A}$ 行列に行基本変形を施してもゲージ変換により u が変化しないことに注意し，階段行列に変形した後の成分の残り方に注目すると，例えば $\hat{A}$ 行列のサイズが 2×4 の場合の相互作用のパターンは全部で表 1 にあるような 7 タイプだということがわかる．

次に，先程分類したソリトン相互作用のそれぞれのタイプが置換と対応していることをネットワークを通して説明する．そのためにまず Maekawa-diagram を導入する．Maekawa-diagram とは Young 図形の中に次の Maekawa-property と呼ばれる条件に従って白丸を配置したものである [10]:

- 白丸が入った箱があった場合，その箱より上の箱全て，もしくはその箱より左の箱全てに白丸が入っている．
- 白丸が入った箱のみの行および列が存在しない．

例えば，図 1 はJ-diagram であるが，図 2 や図 3 はJ-diagram になっていない．

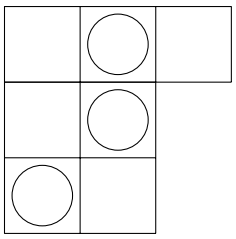


図 1: J-diagram の例

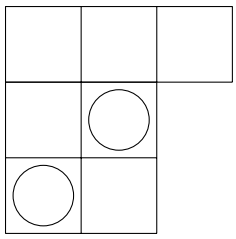


図 2: J-diagram でない例

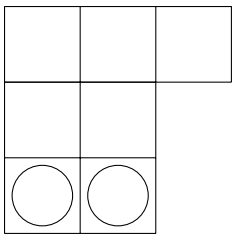


図 3: J-diagram でない例

J-diagram は完全置換と 1 対 1 に対応する．ここで完全置換とは M 次完全置換 π で $i \neq \pi(i) \quad (i = 1, \ldots, M)$ を満たすものである．J-diagram から対応する完全置換の構成方法は以下の手順に従う:

1. 図 4 のルールに従って空き箱，白丸の入った箱を全て置き換える．
2. Young 図形の右，下枠に一番右上から数字を 1 から順に M まで並べる．
3. 図 4 のルールで数字が移ると考えて Young 図形の左，上枠に対応する数字を並べる．
4. Young 図形の右，下枠の数字 i に対して向かい合う左，上枠の数字を $\pi(i)$ としたものが完全置換 π である．



図 4: J-diagram の書き換え

例えば，図 1 のJ-diagram に手順 1~3 を適用したのが図 5 であり，手順 4 で得られる完全置換は

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

である．

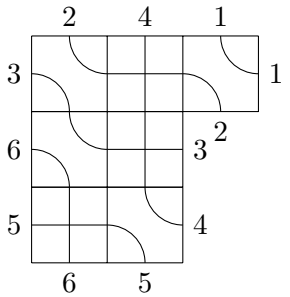


図 5: 図 1 と完全置換との対応

さらに，J-diagram はネットワークとも対応する．J-diagram からネットワークの構成方法は以下の通りである:

1. 空き箱を y_i に，白丸の入った箱を s_i に置き換える．このとき，y, s の添字は
   - 一番右上の箱の添字は 1
   - 右または上に箱があればその添字 $+1$

   で決定され，各パラメータ p_j は全て正とする．
2. 一番下の行から，同じ行の中では一番右の箱から順に図 6 のようにネットワークに置き換え，右につなげていく．



図 6: y_i, s_i とネットワークの対応

例えば，図 1 のJ-diagram に上の手順を施したのが図 7，図 8 である．

$y_3(p_7)$	s_2	$y_1(p_5)$
$y_4(p_4)$	s_3	
s_5	$y_4(p_1)$	

図 7: 図 1 とネットワークとの対応

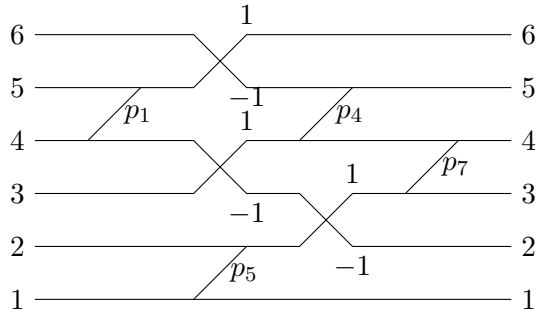


図 8: 図 1 に対応するネットワーク

このようにして得られたネットワークは行列として解釈することができる．具体的には，ネットワーク上に振られている数字をその経路の重み (何も書かれていない場合は重み 1) と考え，ネットワークの左の番号 i から右の番号 j への経路の重みを $M \times M$ 行列 A の第 $M-i+1, M-j+1$ 成分とする．さらにここで得られた行列 A に対して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{MN} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$$

という操作を施すことで $N \times M$ 行列 $\hat{A}$ が得られ，これは TNN かつ RREF なので確かに KP II 方程式のソリトングラフと対応する．ただし，N はJ-diagram に対応する完全置換で $l < \pi(l)$ を満たす元 l の個数とする．図 8 のネットワークの場合は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 p_7 & p_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} p_5 p_7 & p_7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

3 DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian 解

DKP 方程式

$$\begin{cases}(-4u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3u_{yy}=24(v^+v^-)_{xx}\\ 2v_t^{\pm}+3uv_x^{\pm}+v_{xxx}^{\pm}\mp 3\left(v_{xy}^{\pm}+v^{\pm}\int^x u_y dx\right)=0\end{cases} \tag{2}$$

は従属変数変換 $u=2(\log\tau_n)_{xx}, v^{\pm}=\tau_{n\pm1}/\tau_n$ によって双線形方程式

$$\begin{cases}(-4D_xD_t+D_x^4+3D_y^2)\tau_n\cdot\tau_n=24\tau_{n-1}\tau_{n+1}\\ (2D_t+D_x^3\mp 3D_xD_y)\tau_{n\pm1}\cdot\tau_n=0\end{cases} \tag{5}$$

に変形され，この双線形方程式 (5) は Wronski 型 Pfaffian 解

$$\begin{aligned}&\tau_n=\mathrm{Pf}[\mathcal{Q}_n]=\sum_{\Omega}\sigma(i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n)Q_{i_1,j_1}Q_{i_2,j_2}\ldots Q_{i_n,j_n},\\ &\mathcal{Q}_n=(Q_{i,j})_{1\le i,j\le 2n},\\ &\frac{\partial}{\partial t_k}Q_{i,j}=Q_{i+k,j}+Q_{i,j+k}\quad(t_1=x,t_2=y,t_3=t)\end{aligned} \tag{6}$$

を持つ [6]．ただし，$\mathcal{Q}_n$ は $2n$ 次反対称行列，$\Omega=\{1\le i_1<\cdots<i_n\le 2n, i_k<j_k, k=1,\ldots,n\}$ であり，

$$\sigma(i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n)=\mathrm{sign}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2n-1&2n\\ i_1&j_1&\cdots&i_n&j_n\end{pmatrix}$$

である．ここで，$\mathcal{Q}_n$ を M 次反対称パラメータ行列 $B\quad(M>2n)$ を用いて，

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}_n=\mathcal{E}_nB\mathcal{E}_n^{\top}\\ &\mathcal{E}_n=\begin{pmatrix}E_1&E_2&\cdots&E_M\\ E_1^{(1)}&E_2^{(1)}&\cdots&E_M^{(1)}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ E_1^{(2n-1)}&E_2^{(2n-1)}&\cdots&E_M^{(2n-1)}\end{pmatrix},E_i^{(j)}={k_i}^j\exp(k_ix+k_i^2y+k_i^3t)\end{aligned}$$

と選ぶとこれは分散関係式 (6) を満たす．この表示によって得られる τ 関数は石川・若山のパフィアンの和公式を用いて以下のように展開される [9]:

$$\tau_n=\mathrm{Pf}[\mathcal{E}_nB\mathcal{E}_n^{\top}]=\sum_{1=i_1<\cdots<i_{2n}\le M}\mathrm{Pf}[B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}]\det[(\mathcal{E}_n)_{i_1,\ldots,i_{2n}}]. \tag{7}$$

ただし，$B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}$ は行列 B の $i_1,\ldots,i_{2n}$ 行および $i_1,\ldots,i_{2n}$ 列を抜き出した小行列を表し，$(\mathcal{E}_n)_{i_1,\ldots,i_{2n}}$ は $\mathcal{E}_n$ の $i_1,\ldots,i_{2n}$ 列を抜き出した小行列を表す．このように展開した時，全ての $\mathrm{Pf}[B^{i_1,\ldots,i_{2n}}_{i_1,\ldots,i_{2n}}]$ が非負であればこれはソリトン解を与える．

4　DKP 方程式のソリトン解とネットワーク

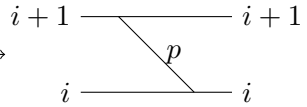
式 (7) の τ 関数のパラメータ行列 B が与えられた時，そこから対応するネットワークが得られることを簡単に説明する．そのためにまず次のような $M \times M$ 行列を導入する:

$$J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & q_1 & & & \\ -q_1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & 0 & q_l \\ & & & -q_l & 0 \\ \hline & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{array}\right)_{M\times M}$$

このような $J_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l)$ を M 次反対称行列の標準形と呼ぶことにする．さらに

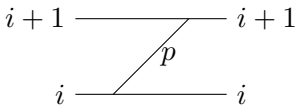
$$\phi_i\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は } (M-i, M-i) \text{ 成分}),$$

$$x_i(p) = \phi_i\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



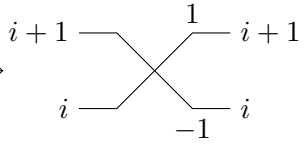
,

$$y_i(p) = \phi_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



,

$$s_i = \phi_i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



なる $x_i(p), y_i(p), s_i$ の積で表される行列 A で

$$B = AJ_M^{(2l)}(q_1,\ldots,q_l)A^\top$$

の形にすることを反対称行列 B の標準化と呼ぶことにする．この時，行列 A はその構成方法からネットワークで表すことができる．例えば，

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は $A_1 = y_1(3)y_3(2)s_2$ を用いて $B_1 = A_1 J_4^{(2)}(1)A_1^\top$ と分解されるので，この B_1 行列に図 9 のネットワークを対応させることができる．これは KP II 方程式の Wronskian 解で現れたネットワークに他ならず，

$$\tau_2 = \mathrm{Pf}[\mathcal{E}_2 B_1 \mathcal{E}_2^\top]$$

ととるとこれは KP II 方程式の解にもなっている．

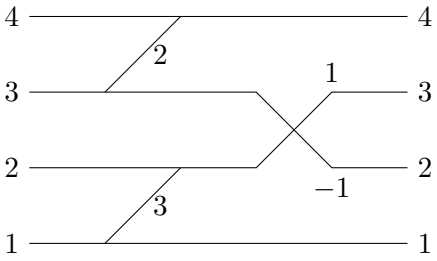


図 9: A_1 に対応するネットワーク

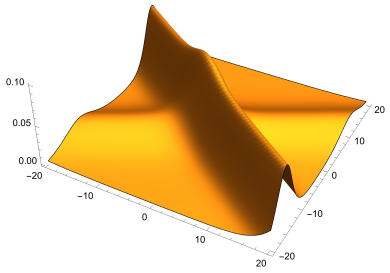


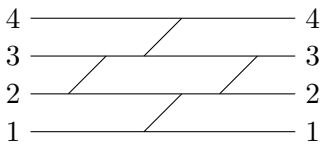
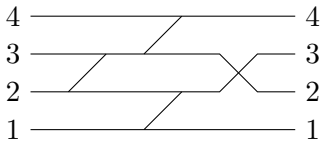
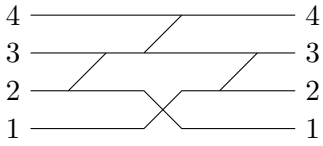
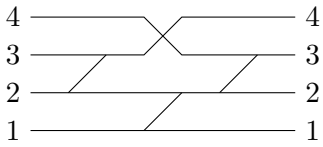
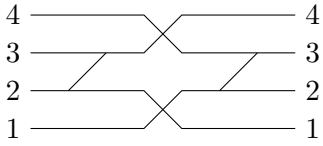
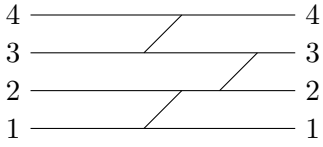
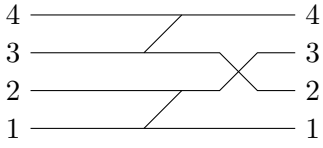
図 10: B_1 に対応するソリトンのグラフ

また，この手順を逆に辿ることで KP II 方程式の Wronskian 解の解析で現れたネットワークからその解の Wronski 型 Pfaffian 表示が得られる．

5　まとめ

KP II 方程式のソリトン解の分類は Wronskian 表示に対するネットワークなどを用いて詳細な解析がなされていたが，今回，ネットワークを用いて DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian で表されるソリトン解の解析を行うことを試みた．その結果，DKP 方程式の Wronski 型 Pfaffian で表されるソリトン解とネットワークを関連付けることに成功した．また，今回の手法を用いることによって KP II 方程式のソリトン解の Wronski 型 Pfaffian 表示が簡単に得られ，それを用いることによってソリトン解に対応するネットワークがより統一的に得られるようになった．しかしながら，本研究の目的である DKP 方程式のソリトン解の分類を行い，ソリトン相互作用の詳細を理解するには必要な数学的道具がまだ整っておらず，今後，必要な手法を整備していく必要がある．本研究で提案した手法をさらに発展させることによって DKP 方程式のソリトン相互作用についてより詳しい解析を行いたい．

表 1: $\hat{A}$ 行列のサイズが 2×4 の時の解の分類

$\hat{A}$ 行列	ネットワーク	ソリトンのグラフ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}, (ad - bc < 0)$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}, (ad - bc = 0)$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$		

参考文献

[1] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, *Classification of the line-soliton solutions of KP II*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 275209.

[2] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, *Soliton Solutions of the KP Equation and Application to Shallow Water Waves*, Stud. Appl. Math. **123**, 83-151.

[3] Y. Kodama, L. K. Williams, 2011, *KP solitons, total positivity, and cluster algebras*, PNAS. **108**, 8684-8989.

[4] Y. Kodama, 2017, *KP Solitons and the Grassmanians – Combinatorics and Geometry of Two-Dimensinal Wave Patterns* (Springer, Singapore).

[5] M. Jimbo, T. Miwa, 1983, *Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.**19**, 943-1001.

[6] R. Hirota, Y. Ohta, 1990, *Hierarchies of Coupled Soliton Equations.I*, J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 798-809.

[7] S. Isojima, R. Willox and J. Satsuma, 2003, *Spider-web solutions of the coupled KP equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 9533-9552.

[8] G. Biondini, Y. Kodama, 2003, *On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 10519-10536.

[9] Y. Kodama, K. Maruno, 2006, *N-soliton solutions to the DKP equation and Weyl group actions.* J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 4063-4086.

[10] A. Postnikov, 2006, *Total Positivity, Grassmannians, and Networks* arXiv: math.CO/0609764

反応拡散系に現れるカオス的挙動

小林 俊介（Shunsuke Kobayashi）*

1 導入

カオス現象とは，「解の振る舞いが決定論的システムに従うにも関わらず，僅かな数値誤差に鋭敏に依存し，予測不可能な挙動を示す」というパラドキシカルな現象である．例えば，紙の自由落下における軌道や天気予報の長期予測不可能性などが卑近な例である．決定論的システムに従うにも関わらず，些細な誤差により将来の予測ができないという事実は，我々の常識を覆すものであり，バタフライ効果とも呼ばれ，世界中で注目を浴び続けている．この現象は微分方程式などにも姿を現わす．最も有名な例はローレンツ方程式（[6]）であろう．これについては精度保証付き数値計算の援用により，解の挙動がカオスであることが数学的に示されている（[11]）．また，化学反応物質の濃度変化など，様々な現象を再現するモデルとして盛んに研究されている反応拡散系においても，数値的にはカオス現象が観測されている（[7]）．

しかし，反応拡散系も含めた偏微分方程式におけるカオス現象の結果の殆どが数値的な報告であり，解析的な結果は講演者の知る限り存在しない．冒頭で述べたように，カオス現象は初期値などを真の値で計測できない限り，精度保証付き数値計算を除けば，その存在性を保証することは不可能である．したがって，カオス現象の解析的解決は重要課題である．特に工学に関連する分野では，複雑な振る舞いを見せる数値実験結果が数多くあり，そのシミュレーション予測精度の向上などの為にも，数学的解明は喫緊の課題の一つである．

このようなモチベーションの下，講演者はこれまでに以下のような積分項をもつ反応拡散系に現れるカオス的挙動について，局所分岐理論の立場から考察してきた：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u,v) + \dfrac{s}{L}\displaystyle\int_0^L u(t,x)dx, & x \in (0.L), \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u,v), & x \in (0,L), \quad t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここでは，Neumann 境界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,L) = 0 \tag{1.2}$$

の下で考察する．$u(t,x) \in \mathbb{R}$，$v(t,x) \in \mathbb{R}$ は未知関数であり，$D_1 > 0$ は u の拡散係数, $D_2 > 0$ は v の拡散係数，$s > 0$ は積分項のコントロールパラメータである．なお，これは化学電気実験における数理モデルとして導出されたものである ([8])．反応拡散方程式系 (1.1)–(1.2) の定める力学系の相空間を

$$X := \{(u,v) \in H^2(0,L) \times H^2(0,L);\ u_x(t,0) = u_x(t,L),\ v_x(t,0) = v_x(t,L) = 0\}$$

とする．システム (1.1) に対して次の仮定をおく：

* 明治大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程 1 年（〒214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1，E-mail: s.kobayashi.meiji@gmail.com）

Assumption 1. 反応項 $f(u,v)$, $g(u,v)$ は十分滑らかであり $f(0,0)=g(0,0)=0$ かつ

$$f_u>0,\quad f_v<0,\quad g_u>0,\quad g_v<0,\quad \frac{f_vg_u}{g_v}+g_v<0$$

を満たす．さらに，システム (1.1) は自明解においてチューリング不安定性をもつ．すなわち

$$f_u+g_v<0\quad \text{かつ}\quad f_ug_v-f_vg_u>0$$

が成り立っている．したがって，自明解から空間非一様な定常解が分岐しうる．ここで

$$f_u=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0),\quad f_v=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0),\quad g_u=\frac{\partial g}{\partial u}(0,0),\quad g_v=\frac{\partial g}{\partial v}(0,0).$$

現在までに，システム (1.1) に対してカオス的な挙動をする解が数値的に報告されている ([1, 9, 10])．例えば，以下のようにパラメータと反応項をおく：

$$D_1=0.25,\quad f(u,v)=u-10v-u^2-2u^3,\quad g(u,v)=2u-5v-0.8u^2,$$
$$D_2=26.877118,\quad s=2.98901,\quad \frac{\pi}{L}=0.86008.$$

このときの数値計算によって得られた数値解を図 1 に示す．

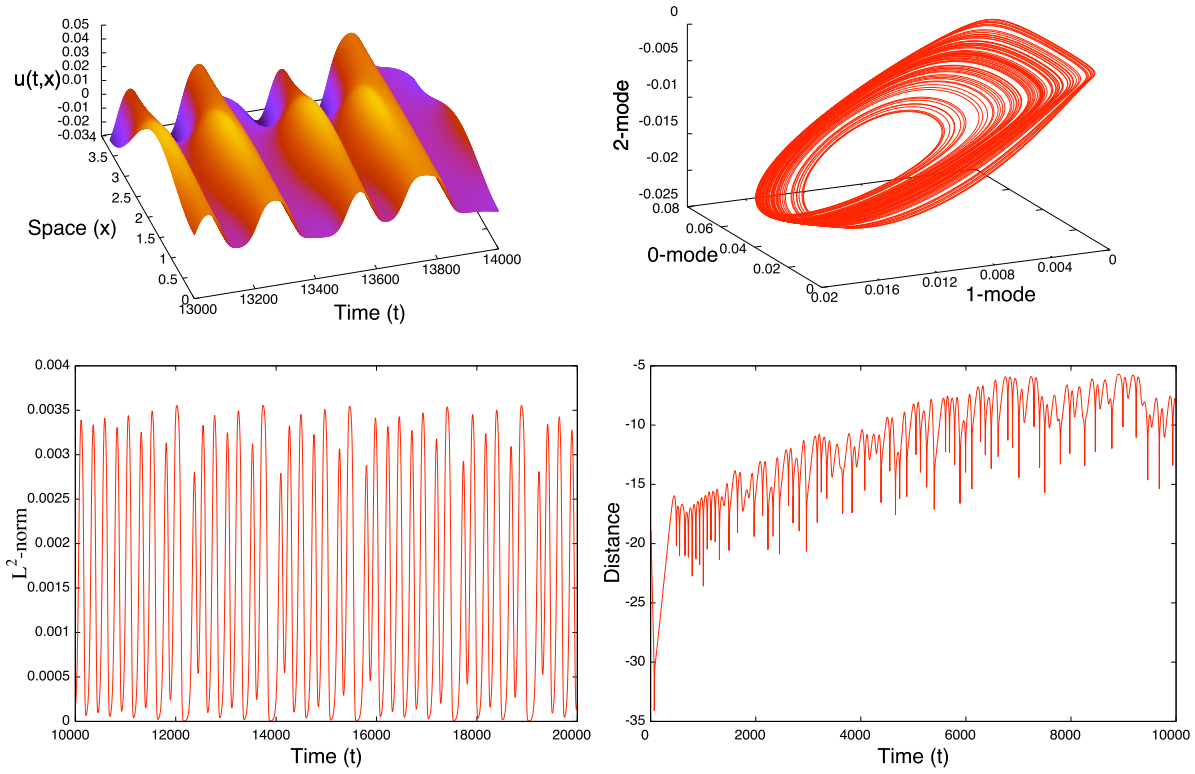


図 1.1　3 重臨界点付近におけるシステム (1.1) の数値解.

上段左図は $u(t,x)$ の $(t,x)\in[13000,14000]\times[0,L]$ における鳥瞰図であり，上段右図は高速フーリエ変換によって得られた，フーリエ空間上における $(u_0(t),u_1(t),u_2(t))$ の軌道を表している．ここで u_j

は $u(t,x)$ の j 番目のフーリエ係数を表している．また，下段左図は $u(t,x)$ の L^2-ノルム $\|u\|_{L^2}(t)$ を表しており，下段右図は初期値鋭敏性を表すグラフである．横軸は時間 t，縦軸は解の誤差の log プロット：$\log|\,\|u^1\|_{L^2}(t)-\|u^2\|_{L^2}(t)\,|$ である．ここで，$(u^2(t,x),v^2(t,x))$ は初期値を $(u^2(0,x),v^2(0,x))=(u^1(0,x),v^1(0,x))+(10^{-6},0)$ として得られるシステム (1.1) の数値解である．

このように，数値的にはカオス的挙動をする解が観測される．ここで自然に浮かぶ疑問は

1. どのようにしてパラメータを選んでいるのか；
2. どのようなプロセスを経てこのような解が発生するのか；

である．これらに答えるため，自明解まわりにおける解の分岐に焦点をあて，カオス的挙動をもつ解が発生する分岐構造の解明に取り組んできた．現在までに，自明解からの分岐の枝を追跡することで，Hopf-Pitchfork 分岐が非自明な平衡点において発生することが分かった．さらに Dumortier et al. [2] による結果を応用すれば，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形と呼ばれる 3 次元常微分方程式系（本稿第 3 章を参照）

$$\begin{cases}\dot r=(\mathrm{Re}\lambda+\mathrm{Re}J_1r^2+\mathrm{Re}J_2x^2)r+\varphi_1(r,x),\\ \dot x=(\nu_0+K_1|w|^2+K_2x^2)x+\varphi_2(r,x),\\ \dot\theta=\omega+\varphi_3(r,x)\end{cases}$$

がヘテロクリニックサイクルをもちうることが分かる．すなわち，ある条件のもとで積分項をもつ空間 1 次元反応拡散系は，それに対応する複雑なダイナミクスをもちうる ([1])．

解析方法の中心になるのは，中心多様体理論，標準形理論である．第 2 章では解をフーリエ展開し，フーリエ係数による無限次元力学系を得る．そして中心多様体縮約を行い，有限次元の力学系へと落とし込む．さらに第 3 章では，自明解から分岐する非自明な解に着目し，標準形理論を適用することで，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形を導出する．第 4 章では，[2] の結果を適用することで，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形に，一つの平衡点と一つの周期軌道とを結ぶヘテロクリニックサイクルが存在しうることを紹介し，第 5 章で本稿のまとめを行う．

2　中心多様体縮約

この章では，中心多様体理論により縮約方程式を導出する．すなわち，無限次元力学系を，ある有限次元の力学系へと落とし込む．そのための準備として，hidden symmetry を利用する．$(u(t,x),v(t,x))\in X$ を (1.1) の解としたとき，

$$\tilde u(t,x)=\begin{cases}u(t,x) & x\in[0,L],\\ u(t,2L-x) & x\in[L,2L].\end{cases}\quad\tilde v(t,x)=\begin{cases}v(t,x) & x\in[0,L],\\ v(t,2L-x) & x\in[L,2L]\end{cases}\tag{2.1}$$

は $(0,2L)$ へと拡張された，以下のシステムの解であることがわかる：

$$\begin{cases}u_t=D_1u_{xx}+f(u,v)+\dfrac{s}{2L}\displaystyle\int_0^{2L}u(t,x)dx, & x\in(0,2L),\quad t>0,\\ v_t=D_2v_{xx}+g(u,v), & x\in(0,2L),\quad t>0,\\ u(t,x)=u(t,x+2L),\ u_x(t,x)=u_x(t,x+2L), & t>0,\\ v(t,x)=v(t,x+2L),\ v_x(t,x)=v_x(t,x+2L), & t>0.\end{cases}\tag{2.2}$$

したがって，システム (2.2) を相空間：

$$X_{per} := \{(u,v) \in H^2_{per}(0,2L) \times H^2_{per}(0,2L); (u(x),v(x)) = (u(2L-x),v(2L-x))\} \tag{2.3}$$

の下で考える．逆に，(2.2) の解を $(0,L)$ に制限したものは (1.1) の解となるから，本稿では (2.2)-(2.3) を扱うこととする．このとき，解を以下のようにフーリエ展開できる：

$$u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m(t)e^{imkx}, \quad v(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m(t)e^{imkx}.$$

これらをシステム (2.2) に代入し，三角関数の直交性を利用することで，以下のフーリエ係数による無限次元力学系を得る：

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{v}_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m \\ G_m \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

ただし

$$M_0 = \begin{pmatrix} f_u + s & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} f_u - D_1 j^2 k^2 & f_v \\ g_u & g_v - D_2 j^2 k^2 \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

であり，

$$\begin{aligned}
F_m &= \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1,m_2\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{f_{uu}}{2} u_{m_1}u_{m_2} + f_{uv}u_{m_1}v_{m_2} + \frac{f_{vv}}{2} v_{m_1}v_{m_2} \right) \\
&+ \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{f_{uuu}}{6} u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3} + \frac{f_{uuv}}{2} u_{m_1}u_{m_2}v_{m_3} + \frac{f_{uvv}}{2} u_{m_1}v_{m_2}v_{m_3} + \frac{f_{vvv}}{6} v_{m_1}v_{m_2}v_{m_3} \right) + \cdots, \\
G_m &= \sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_1,m_2\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{g_{uu}}{2} u_{m_1}u_{m_2} + g_{uv}u_{m_1}v_{m_2} + \frac{g_{vv}}{2} v_{m_1}v_{m_2} \right) \\
&+ \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{g_{uuu}}{6} u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3} + \frac{g_{uuv}}{2} u_{m_1}u_{m_2}v_{m_3} + \frac{g_{uvv}}{2} u_{m_1}v_{m_2}v_{m_3} + \frac{g_{vvv}}{6} v_{m_1}v_{m_2}v_{m_3} \right) + \cdots.
\end{aligned}$$

ここで，$f_{uu} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)$ などとしている．我々は無限次元力学系 (2.4) を以下のフーリエ空間 X_F において考える：

$$X_F := \Big\{ \{(u_m,v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}; (u_m,v_m) = (u_{-m},v_{-m}), \|\{(u_m,v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\|^2_{X_F} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (1+m^2)^2 |(u_m,v_m)|^2 < \infty \Big\}.$$

これは，射影 $\mathcal{P}(u,v) : X_{per} \to X_F$;

$$\mathcal{P}(u,v) = \left\{ \frac{1}{2L} \int_0^{2L} (u(t,x),v(t,x)) e^{-imkx} dx \right\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

によって X_{per} と同値である．ここで，$u(t,x) \in \mathbb{R}, v(t,x) \in \mathbb{R}$ と対称性 (2.1) から，$(u_m,v_m) = (u_{-m},v_{-m}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ であることに注意されたい．よって，$m \geq 0$ において力学系 (2.4) を考えればよい．

以下，分岐パラメータを s, D_2, k とし，中立安定曲線と呼ばれるものを定義する：

Definition 1. 中立安定曲線とは，$\mathrm{Det}\, M_m = 0$ を満たす分岐パラメータ (D_2, k) により定まる曲線のことである．すなわち，中立安定曲線は各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$D_2(k;m) = \frac{g_v D_1 m^2 k^2 - \delta}{m^2 k^2 (D_1 m^2 k^2 - f_u)}$$

で定まる．ここで，$\delta := f_u g_v - f_v g_u$ としている．

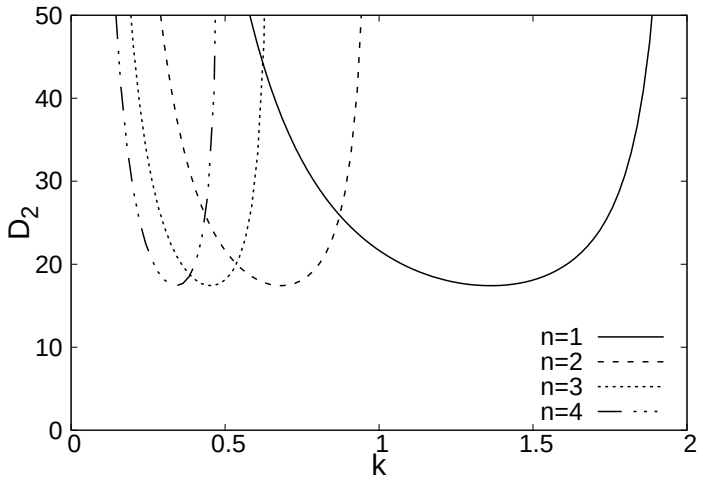


図 2.1　$f_u = 1$, $f_v = -10$, $g_u = 2$, $g_v = -5$，$D_1 = 1/4$ のときの中立安定曲線．右から $n = 1, 2, 3, 4$ に対応する．

本講演では，0 : 1 : 2 モードの線型化行列が同時に 0 固有値をもつ状況を考え，これを満たすように $(s, D_2, k) = (s_*, D_2^*, k_*)$ をとる．このパラメータの組 (s_*, D_2^*, k_*) のことを 3 重臨界点と呼ぶこととする．このとき力学系 (2.4) に対して

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = T_0^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} = T_m^{-1} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}, \quad (m = 1, 2)$$

による変換を施す．ここで

$$T_0 = \begin{pmatrix} -g_v & \frac{f_v g_u}{g_v} \\ g_u & g_u \end{pmatrix}, \; T_m = \begin{pmatrix} -g_v + D_2^* m^2 (k^*)^2 & f_u - D_1 m^2 (k^*)^2 \\ g_u & g_u \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2)$$

である．すると以下の無限次元力学系を得る：

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \dfrac{1}{g_v^2 + f_v g_u} \left(-\tilde{F}_0 + \dfrac{f_v}{g_v} \tilde{G}_0 \right), \\ \dot{\beta}_0 = (\mathrm{Tr}\, M_0)\beta_0 + \dfrac{1}{g_v^2 + f_v g_u} \left(\tilde{F}_0 + \dfrac{g_v}{g_u} \tilde{G}_0 \right), \\ \dot{\alpha}_1 = \dfrac{1}{\mathrm{det} T_1} \left\{ g_u \tilde{F}_1 + (D_1 (k^{1,2})^2 - f_u) \tilde{G}_1 \right\}, \\ \dot{\beta}_1 = (\mathrm{Tr}\, M_1)\beta_1 + \dfrac{1}{\mathrm{det} T_1} \left\{ -g_u \tilde{F}_1 + (D_2^{1,2} (k^{1,2})^2 - g_v) \tilde{G}_1 \right\}, \\ \dot{\alpha}_2 = \dfrac{1}{\mathrm{det} T_2} \left\{ g_u \tilde{F}_2 + (4 D_1 (k^{1,2})^2 - f_u) \tilde{G}_2 \right\}, \\ \dot{\beta}_2 = (\mathrm{Tr}\, M_2)\beta_2 + \dfrac{1}{\mathrm{det} T_2} \left\{ -g_u \tilde{F}_2 + (4 D_2^{1,2} (k^{1,2})^2 - g_v) \tilde{G}_2 \right\}, \\ \begin{pmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{v}_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m \\ G_m \end{pmatrix} \quad (|m| \geq 3). \end{cases} \tag{2.5}$$

ここで $\tilde{F}_m$，$\tilde{G}_m$ は α_m，β_m に関する高次項を表す．上の力学系 (2.5) に中心多様体定理 ([4, 5]) を適用することで，3 次元に縮約された常微分方程式系（縮約方程式）を得る．

Theorem 1. 3 重臨界点：$(s, D_2, k) = (s_*, D_2^*, k_*)$ 近傍における中心多様体上の力学系は，以下の常微分方程式（縮約方程式）が定める力学系と局所位相同値である：

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \mu_0\alpha_0 + A_1\alpha_0^2 + A_2\alpha_1^2 + A_3\alpha_2^2 + (a_1\alpha_0^2 + a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_2^2)\alpha_0 + a_4\alpha_1^2\alpha_2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4), \\ \dot{\alpha}_1 = \mu_1\alpha_1 + B_1\alpha_0\alpha_1 + B_2\alpha_1\alpha_2 + (b_1\alpha_0^2 + b_2\alpha_1^2 + b_3\alpha_2^2)\alpha_1 + b_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4), \\ \dot{\alpha}_2 = \mu_2\alpha_2 + E_1\alpha_0\alpha_2 + E_2\alpha_1^2 + (e_1\alpha_0^2 + e_2\alpha_1^2 + e_3\alpha_2^2)\alpha_2 + e_4\alpha_0\alpha_1^2 + O(|(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)|^4). \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで，係数 A_j, B_j, E_j, a_j, b_j, $e_j \in \mathbb{R}$ はシステム (1.1) の定数 D_1 と反応項 $f(u, v)$，$g(u, v)$ から定まる定数であり，μ_j ($|\mu_j| \ll 1$) は s, D_2, k に依存する分岐パラメータである．

上で得られた縮約方程式は，変換 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\alpha_0, -\alpha_1, \alpha_2)$ の下で不変である．以下，得られた縮約方程式を 3 次項までで打ち切った力学系：

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \mu_0\alpha_0 + A_1\alpha_0^2 + A_2\alpha_1^2 + A_3\alpha_2^2 + (a_1\alpha_0^2 + a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_2^2)\alpha_0 + a_4\alpha_1^2\alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 = \mu_1\alpha_1 + B_1\alpha_0\alpha_1 + B_2\alpha_1\alpha_2 + (b_1\alpha_0^2 + b_2\alpha_1^2 + b_3\alpha_2^2)\alpha_1 + b_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2, \\ \dot{\alpha}_2 = \mu_2\alpha_2 + E_1\alpha_0\alpha_2 + E_2\alpha_1^2 + (e_1\alpha_0^2 + e_2\alpha_1^2 + e_3\alpha_2^2)\alpha_2 + e_4\alpha_0\alpha_1^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

を扱うこととし，$A_j \neq 0$, $B_j \neq 0$, $E_j \neq 0$, $a_j \neq 0$, $b_j \neq 0$, $e_j \neq 0$ とする．

3 Hopf-Pitchfork 分岐

この節では，非自明な平衡点 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$ からの解の分岐を調べる．次の補題を得ることができる：

Lemma 1. $A_3E_1 < 0$ が成り立っていると仮定する．$\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を

$$2(\rho^2 e_3 + a_1) + A_1 - \rho^2 A_3 = 0$$

を満たすようにとる．この ρ に対して

$$\begin{aligned} &\alpha_0^* = \frac{\rho^2 A_3 - A_1}{2(a_1 + \rho^2 e_3)}, \quad \alpha_2^* = \rho\alpha_0^*, \\ &\mu_0 = \mu_0^* := -\alpha_0^*\{A_1 + a_1\alpha_0^* + \rho^2(A_3 + a_3\alpha_0^*)\}, \\ &\mu_1 = \mu_1^* := -\alpha_0^*\{B_1 + \rho B_2 + (b_1 + \rho b_4 + \rho^2 b_3)\alpha_0^*\}, \\ &\mu_2 = \mu_2^* := -\alpha_0^*\{E_1 + (e_1 + \rho^2 e_3)\alpha_0^*\} \end{aligned}$$

とすると，$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$ における線型化行列は単純 0 固有値とペアの純虚数固有値を同時にもつ．

平衡点 $(\alpha_0^*, 0, \alpha_2^*)$ を原点に平行移動したのち，Hopf 分岐の標準形変換と近恒等変換 ([5]) を施すことで，Hopf-Pitchfork 分岐の標準形を得る：

$$\begin{cases} \dot{z} = (\lambda + J_1|z|^2 + J_2x^2)z + O(|(z, \bar{z}, x)|^4), \\ \dot{x} = (\nu + K_1|z|^2 + K_2x^2)x + O(|(z, \bar{z}, x)|^4). \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで，$z \in \mathbb{C}$，$x \in \mathbb{R}$ であり，$\lambda \in \mathbb{R}$，$\nu \in \mathbb{R}$ は新たな分岐パラメータ，$J_j, K_j \in \mathbb{C}$ である．$z = r(t)e^{\theta(t)}$ と変換し，さらに適切なスケーリングを施すことで，

$$\begin{cases} \dot{r} = (\nu_1 + r^2 + bx^2)r + \varphi_1(r, x), \\ \dot{x} = (\nu_2 + cr^2 + dx^2)x + \varphi_2(r, x), \\ \dot{\theta} = \omega + \varphi_3(r, x) \end{cases} \tag{3.2}$$

と書き換えることができる．ここで，$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ は新たな分岐パラメータ，$d = \pm 1$，$\omega \in \mathbb{R}$，$\varphi_j(r, x)$ は r, x に関する 4 次以上の高次項を表す．力学系 (3.2) は変換 $(r, x) \mapsto (-r, -x)$ の下で不変であることに注意されたい．これは元の縮約方程式 (2.6) がもつ対称性を保つような平衡点まわりでの分岐を考えていることによる恩恵である．

4 標準形解析

この章では，力学系 (3.2) がヘテロクリニックサイクルを持ちうることを議論する．もし，力学系 (3.2) に θ 方向への回転対称性がある場合には，ドーム型の不変曲面が存在することが知られている ([3])．しかし，今回の場合にはそのような対称性（つまり S^1-symmetry）は引き継がれない．このような状況では，Dumortier et al. [2] により紹介されている手法が有効である．実はこの対称性が崩れた場合には，S^1-symmetric な状況で形成される不変曲面が崩壊し，その結果コネクティングオービットが作られる．

以下，φ_n はすべて C^∞ 級と仮定し，Dumortier et al. [2] による手法を適用する．力学系 (3.2) について，blow-up を行う．十分小さな $\varepsilon > 0$ によって

$$\mu_1 = \varepsilon^2 \bar{\mu}, \quad \mu_2 = \varepsilon^2, \quad r = \varepsilon \bar{r}, \quad x = \varepsilon \bar{x}$$

の変換と，時間のリスケーリング $d\tau = \varepsilon^2 dt$ を行うことで

$$\begin{cases} r' = r(\mu + r^2 + bx^2) + \varphi_1(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^3, \\ x' = x(1 + cr^2 + dx^2) + \varphi_2(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^3, \\ \theta' = \omega/\varepsilon^2 + \varphi_3(\varepsilon r, \varepsilon x)/\varepsilon^2 \end{cases} \tag{4.1}$$

を得る．ここで，“$^-$” は省略し，$'$ は τ による微分を表す．回転部分と $O(\varepsilon)$ の項を無視すると，以下の平面上における力学系を得る：

$$\begin{cases} r' = r(\mu + r^2 + bx^2), \\ x' = x(1 + cr^2 + dx^2). \end{cases} \tag{4.2}$$

以下，次の仮定のもとで力学系 (4.2) を考える：

$$b > 0, \quad c < 0, \quad d = -1, \quad d - bc > 0, \quad \mu < 0. \tag{4.3}$$

このとき平衡点は

$$O := (0, 0), \quad p^1 := (0, 1), \quad p^2 := \left(\sqrt{\frac{c\mu - 1}{-1 - bc}}, \sqrt{\frac{b + \mu}{-1 - bc}} \right), \quad p^3 := (\sqrt{-\mu}, 0)$$

で与えられる．これらそれぞれに対応する (4.1) の平衡点を $p^1_{\mu,\varepsilon}$，$p^2_{\mu,\varepsilon}$，$p^3_{\mu,\varepsilon}$ とおき，$p^3_{\mu,\varepsilon}$ によって作られる閉軌道を $C_{\mu,\varepsilon}$ と書く．力学系 (4.2) は $\mu = \mu^* := (b + 1)/(c - 1)$ においてハミルトニアン $H(r, x)$ をもつ：

$$H(r, x) = r^\alpha x^\beta \{-\mu + (r^2 + \gamma x^2)\}.$$

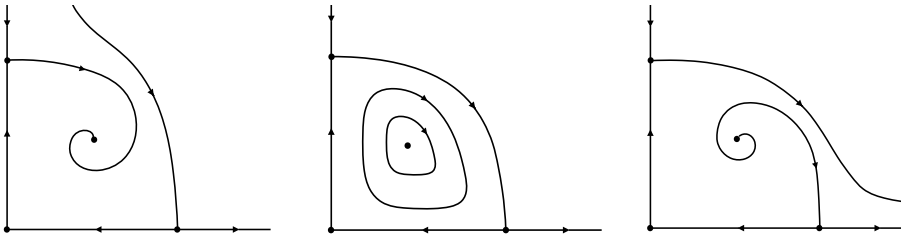


図 4.1　(4.2) の相図の模式図．左から $\mu < \mu^*$, $\mu = \mu^*$, $\mu > \mu^*$ に対応する．

ここで $\alpha = 2(1-c)/(-1-bc)$, $\beta = 2(1+b)/(-1-bc)$, $\gamma = (1+b)/(1-c)$, $-1-bc > 0$ である．

先に述べたように，図.4.1（中央）で得られた 3 つの平衡点を繋ぐヘテロクリニック軌道は，$\varphi_j(r,x)$ が S^1-symmetric を保つようなものであれば，3 次元空間においてもドーム型の不変曲面として存続することが知られている ([3])．ところが generic にはそのような対称性は保存されない．実際，縮約方程式 (2.7) から Hopf-Pitchfork 分岐の標準形 (3.1) に変換する過程で，4 次以上の高次項を無視している．有限次で考える限り θ 方向の回転対称性は保存されるが，無限次における項においては，もはやそのような対称性は残っていない．このような無限次における対称性を破壊するような影響を考慮にいれると，実は平衡点 O と p^1 における 1 次元不変多様体が分離しうる．それにより不変ドームが崩壊し，そこにコネクティングオービットが生成されうる．ここでは，平衡点 $p^3_{\mu,\varepsilon}$ によって形成される周期軌道 $C_{\mu,\varepsilon}$ と原点を繋ぎ合わせるヘテロクリニックサイクルの存在を議論する．

さて，いくつかの記号の定義を行う．

- Σ: (r,x,θ) 空間における 2 次元断面のことであり，$\Sigma := \{(r,x,\theta) | x = \sqrt{(b+\mu)/(-1-bc)}\}$；
- $C^u : \Sigma \cap W^u(p^1_{\mu,\varepsilon})$ で表される単純閉曲線；
- $C^s : \Sigma \cap W^s(C_{\mu,\varepsilon})$ で表される単純閉曲線；
- q: $W^u(O)$ と断面 Σ との二つ目の交点．

Definition 2. *Exceptional set* $\mathcal{E}$ を以下で定義する：

$$\mathcal{E} := \{(\mu,\varepsilon) \neq (0,0) | \text{ 平衡点 } (0,0) \text{ と } (1,0) \text{ の 1 次元不変多様体が交差しない．}\}$$

Definition 3. 力学系 (4.1) またはそれに対応するパラメーターの点が *forward trapping* にあるとは，C^u が C^s の内部にあるときのことをいう（図.4.1（左））．さらに，C^u と C^s で囲まれた平面 Σ 上の環状の領域と，2 次元不変多様体 $W^s(C_{\mu,\varepsilon})$ と $W^u(p^1_{\mu,\varepsilon})$ の一部を *forward trapping region* と呼ぶ．力学系 (4.1) またはそれに対応するパラメーターが *backward trapping* にあるとは，C^s が C^u の内部にあるときのことをいう（図.4.1（右））．さらに *backward trapping region* も上と同様に定義する．

いま，条件 (4.3) に加えて $b+c<0$，$\mu^* := (c-1)/(b+1) < 0$ とする．さらに，パラメータ (μ,ε) を exceptional set $\mathcal{E}$ と交差しないように動かせるとする．このとき，O の 1 次元不安定多様体と $p^1_{\mu,\varepsilon}$ の 1 次元安定多様体とが互いに交差することなく forward trapping から backward trapping へと入れ替わる，すなわち，C^u と C^s の位置が入れ替わることがわかる（図.4.2）．さらに，Σ 上の点 q の位置に着目すれば，点 q と C^s が断面 Σ 上でぶつかるようなパラメータがとれる．つまり，O における 1 次元不安定多様体と $p^3_{\mu,\varepsilon}$ における 1 次元安定多様体とが交差する．したがって，ある (μ_*,ε_*) が存在して $(\mu,\varepsilon) = (\mu_*,\varepsilon_*)$ のときに O を出発して，元のドーム型の不変曲面の近くを辿り，再び O に戻ってくるような軌道が存在する（図.4.3）．た

だし，これらのことが成り立つためには，力学系 (3.2) について [1] で示されるいくつかの仮定を満たすことが必要となる．

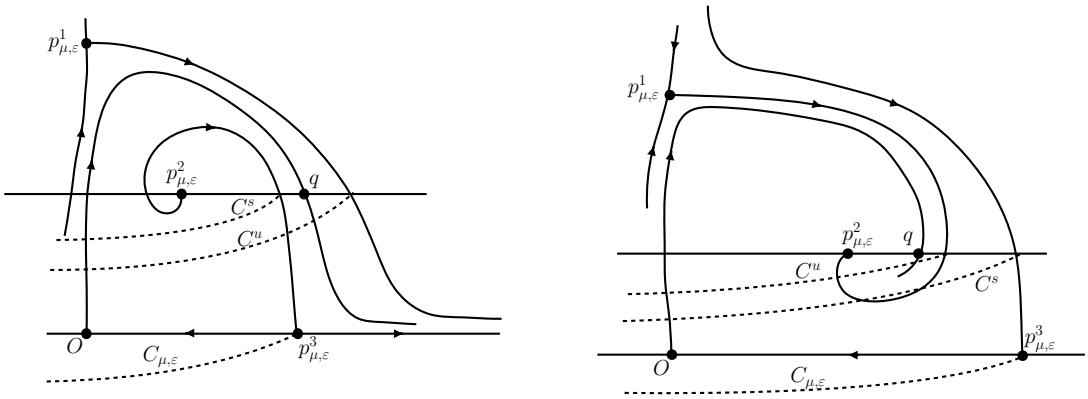


図 4.2　1 次元不変多様体が分離するときの (4.1) の流れの模式図．左図は $\mu < \mu^*$（backward trapping），右図は $\mu > \mu^*$（forward trapping）にそれぞれ対応する．

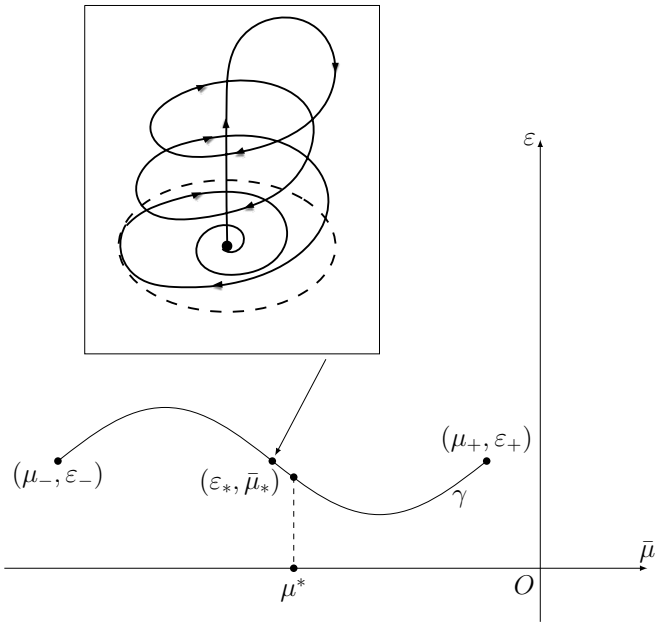


図 4.3　$\mu - \varepsilon$ 空間におけるヘテロクリニックサイクルの分岐の模式図．(μ_-, ε_-) は backward trapping，(μ_+, ε_+) は forward trapping に対応している．与えられた $\mu_- < \mu^* < \mu_+ < 0$ に対して exceptional set $\mathcal{E}$ と交わらないようなパス γ を (μ_-, ε_-) と (μ_+, ε_+) をつなぐようにとれるなら，(4.1) がヘテロクリニックサイクルをもつようなパラメータ $(\mu_*, \varepsilon_*) \in \gamma$ が存在する．

5 まとめ

$\{(r,x,\theta)\,|\,(r,x)=(r^*,x^*)\}$, $r^*,x^*\neq 0$ を力学系 (4.1) のリミットサイクルとする．このリミットサイクルは Hopf 分岐を起こす．すなわち，Hopf-Pitchfork 分岐は滑らかなトーラスを作る．このトーラスはヘテロクリニックサイクル分岐曲線から離れたところでは存続することが予想され，この分岐曲線にパラメータを近づけるにつれて，トーラスが崩壊する．したがって，反応拡散系 (1.1) は滑らかなトーラス上での 2 重周期に対応する解をもつだけでなく，上の考察で得られたヘテロクリニックサイクル（もしくはその近傍を通るような軌道）に対応するカオス的挙動を示す解をもちうる．実際に，ヘテロクリニックサイクルやそのまわりに馬蹄が存在するための条件を満たすようなパラメータや反応項を与えて得られた数値結果が，冒頭の図 1.1 である．また，中心多様体縮約により導出される縮約方程式は，元々の偏微分方程式と境界条件に関する対称性や，それに由来する固有関数の対称性により形が決定される．したがって，本稿で扱った方程式のみならず，同様の対称性を満たす偏微分方程式を考えると，同じ縮約方程式を導出することが可能である．本稿ではシステム (1.1) を空間 1 次元において考察したが，講演時には，時間が許せば，ヘテロクリニックサイクルのまわりに馬蹄が形成されることや，空間 2 次元におけるシステム (1.1) の解析結果も紹介したい．

References

[1] S. Kobayashi and T. O. Sakamoto, *Hopf Bifurcation and Hopf-Pitchfork Bifurcation in an Integro-Differential Reaction-Diffusion System*, submitted.

[2] F. Dumortier F, S. Ibáñez, H. Kokubu and C. Simó, *About the unfolding of a Hopf-zero singularity*, Discrete and Continuous Dynamical Systems series A, **33** (2013), 4435–4471.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] M. Haragus and G. Iooss, "Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimentional Dynamics Systems", Springer, 2010.

[5] Yu A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd edition", Springer-Verlag, New York, 2004.

[6] E. N. Lorentz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atom. Sci., **20** (1963) 130–141.

[7] Y. Nishiura and D. Ueyama, *Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model*, Physica D **150** (2001) 137–162.

[8] T. Ogawa, *Degenerate Hopf instability in oscillatory reaction-diffusion equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplements, **Special vol.** (2007), 784-793.

[9] T. Ogawa and T. Okuda, *Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance*, Networks and Heterogeneous Media, **7** (4) (2012) 893–926.

[10] T. Ogawa and T. O. Sakamoto, *Chaotic dynamics in an integro-differential reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance*, Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future (2016, Nov.) 531–562.

[11] W. Tucker, *A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem*, Found. Comput. Math. **2** (2002) 53–117.

2 次元 4 状態スプリットステップ量子ウォークの固有値解析

船川　大樹 (Daiju Funakawa)*
北海道大学大学院理学研究院　専門研究員

概要

本研究は，2 次元 4 状態の量子ウォークについて，局在化がどのような条件の下で起こるのか調べたものである。量子ウォークとは，ランダムウォークの量子版とも言えるモデルである。本紙では特に 2 次元の格子点の上をウォークする内部自由度 4 の粒子についての量子ウォークに限定している。この 2 次元 4 状態の量子ウォークは 1 次元スプリット・ステップ量子ウォークの拡張版である。量子ウォークが局在化を起こすことは，量子ウォークの時間発展を記述するユニタリ作用素 U の固有値問題と対応しており，本紙では U が固有値を持つための条件をできる限り精密に調べていく。尚，本研究は北海道大学の布田徹氏，笹山智司氏，信州大学の鈴木章斗氏との共同研究である。

1　1 次元 2 状態の量子ウォークの定義と局在化

本章では，まず 2 次元スプリット・ステップ量子ウォークの基礎となる 1 次元 2 状態の量子ウォークについて，その定義と性質を解説する。1 次元 2 状態の量子ウォークは 2010 年に Kitagawa らによって定式化された 1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク [4] が基となって定義されている。1 次元スプリット・ステップ量子ウォークとは，次で与えられたモデルである：$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$ とする．この行列による $\mathcal{H}$ 上の掛け算作用素も同じ記号で $R(\theta)$ と書くことにする。さらに，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 $S_{\pm}$ を

$$(S_+\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x-1) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (S_-\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x+1) \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \Psi \in \mathcal{H}$$

と定義する。このとき，1 次元スプリット・ステップ量子ウォークは

$$U_{\mathrm{ss}}(\theta_1, \theta_2) := S_- R(\theta_2) S_+ R(\theta_1), \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

と定義される。ここで，θ_1, θ_2 は $x \in \mathbb{Z}$ に依存した関数 $\theta_1 = \theta_1(x)$，$\theta_2 = \theta_2(x)$ としても良い。以下，上記の 1 次元スプリット・ステップ量子ウォークを一般化した 1 次元 2 状態の量子ウォークを考える。そのため，状態のヒルベルト空間を

$$\mathcal{H} := \{\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2 \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} < \infty\}.$$

* 博 (理) 北海道大学大学院理学研究院数学部門（〒060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目, E-mail:funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp）

と定義する。上記に挙げた 1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク $U_{\rm ss}(\theta_1,\theta_2)$ もヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素である。1 次元 2 状態の量子ウォークとして，本紙では特に次の時間発展を考える：

$$\Psi_{t+1}(x) = P(x+1)\Psi_t(x+1) + Q(x-1)\Psi_t(x-1) + R(x)\Psi(x), \quad (x,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \quad (1)$$

ただし，$P(x), Q(x), R(x)$ は $x \in \mathbb{Z}$ に依存した 2×2 の行列であり，$\Psi_t(x)$ とは $\Psi_t \in \mathcal{H}$ を満たす，t 回時間発展した際の位置 $x \in \mathbb{Z}$ における状態を表す。以下，(1) の時間発展を記述する $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素を定義する。まず，ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の作用素 L を

$$(Lf)(x) := f(x+1), \quad f \in \mathcal{H}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

と定義する。この時，ユニタリ作用素 $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を

$$S := \begin{pmatrix} pI & qL \\ q^*L^* & -pI \end{pmatrix}$$

と定義する。ただし，L^* は L の共役作用素，I は $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の恒等作用素，$(p,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ は $p^2 + |q|^2 = 1$ を満たす数であり，q^* は q の複素共役を意味する。この S は**シフト作用素**と呼ばれ，粒子の移動に対する時間発展を記述している。
次に各 $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$C(x) \in U(2)$ を取る。この $C(x)$ による掛け算作用素を $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ と表すことにする, i.e.

$$(C\Psi)(x) := C(x)\Psi(x), \quad \Psi \in \mathcal{H}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

この C は $C(x) \in U(2)$ なため，ユニタリ作用素であり，**コイン作用素**と呼ばれる粒子の内部自由度に対する時間発展を記述している。上記の S と C の積によって

$$U := SC \quad (2)$$

と $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素を定義する。この U が (1) の時間発展を記述するユニタリ作用素である。実際,

$$C(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

と表すとき

$$P(x) = q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a(x) & b(x) \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \bar{q}\begin{pmatrix} c(x) & d(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = p\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ -c(x) & -d(x) \end{pmatrix}$$

と定義すると，$\Psi_t = U^t\Psi_0$ は，(1) を満たす。ここで，$\Psi_0 \in \mathcal{H}$ ($\|\Psi_0\| = 1$) は，初期状態である。さらに重要な性質として，次の条件 (*) の下で U と $U_{\rm ss}(\theta_1,\theta_2)$ はユニタリ同値である [6]。実際，パウリ行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，$p := \sin\frac{\theta_2}{2}$, $q := \cos\frac{\theta_2}{2}$, $C(x) := R(x)\sigma_1$ としたとき (*),

$$U = \sigma_1 U_{\rm ss}(\theta_1,\theta_2)\sigma_1$$

を直接計算によって示すことができる。このため，U と 1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク $U_{\rm ss}(\theta_1,\theta_2)$ はスペクトルの構造が全く同一である。よって，以下では (2) で定義した U のことを 1 次元スプリット・ステップ量子ウォークと呼ぶことにする。本研究において調べる量子ウォークの性質は次で定義した**局在化**と呼ばれる現象についてである：

定義 1　U が初期状態 Ψ_0 の下で局在化を起こすとは，$\lim_{t\to\infty}\|(U^t\Psi_0)(x)\|^2>0$ となるような $x\in\mathbb{Z}$ が存在することである。

量子ウォークが局在化を起こすと Grover の探索アルゴリズムの解が導出可能であると言われている。Grover の探索アルゴリズムとは量子コンピュータへの応用が期待されたアルゴリズムであるため，量子ウォークの局在化がいつ起こるのかは大変重要な問題である。本紙の量子ウォークに限らず，様々な量子ウォークに対して，局在化についての研究は多々見られる。[5]
さて，局在化には同値条件が存在する：

命題 1.1　U は特異連続スペクトルを持たないとする。
このとき，U が初期状態 Ψ_0 の下で局在化を起こすことと，Ψ_0 が U の固有空間と overlap することは同値である。

上記の命題によって，U が固有値を持つときに，その固有空間と overlap するように初期状態 Ψ_0 を取ることによって局在化を起こすことができる。例えば，U が固有値 λ を持つときにその固有空間 $\ker(U-\lambda)$ と overlap するようなベクトルとは U の λ に対する固有ベクトルが挙げられる。以下では量子ウォークが局在化を起こすことを示すために，U の固有値の有無を議論する。特に (2) で定義された 1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク U の局在化については次の先行研究がある：

定理 1.2　(T.Fuda, D.Funakawa, A.Suzuki (2017)[3]) 次の条件を満たすとき, U は ±1 の固有値を持つ (よって局在化が起こる):

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{(p\pm1)\,\bar{\chi}_2(x)}{q\bar{\chi}_1(x)}\right|<1 \text{ かつ } \limsup_{x\to-\infty}\left|\frac{q\bar{\chi}_1(x)}{(p\pm1)\,\bar{\chi}_2(x)}\right|<1.\ \text{(複合同順)}$$

2　多次元量子ウォークへの拡張と先行結果

本章では，前章で定義した 1 次元スプリット・ステップ量子ウォーク (2) の空間次元を多次元に拡張した次のモデルを考える：
まず，状態のヒルベルト空間を

$$\mathcal{H}:=\ell^2(\mathbb{Z}^d;\mathbb{C}^{2d}):=\{\Psi:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}^{2d}\mid\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d}\|\Psi(x)\|^2<\infty\}$$

として定義する。次に $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上の線形作用素 L_j を

$$(L_jf)(\boldsymbol{x}):=f(\boldsymbol{x}+\mathbf{e}_j),\ \ \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d,\ \ f\in\ell^2(\mathbb{Z}^d),\ j=1,\dots,d$$

として定義する。ただし，$\{\mathbf{e}_j\}_j$ とは $\mathbb{Z}^d$ 上の標準基底である。この L_j を基にシフト作用素 $S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ を次のように定義する：

$$S:=\oplus_{j=1}^dS_j,\ \ S_j:=\begin{pmatrix}p_jI & q_jL_j\\ q_j^*L_j^* & -p_jI\end{pmatrix},\ \ (p_j,q_j)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C},\ p_j^2+|q_j|^2=1,\ j=1,\cdots,d.$$

さらにコイン作用素 $C:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ を次で定義する：

$$(C\Psi)(\boldsymbol{x}):=C(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x}),\ \ C(\boldsymbol{x})\in U(2d)\text{:エルミート},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d,\ \Psi\in\mathcal{H}.$$

上記のシフト作用素 S とコイン作用素 C を使って d 次元 $2d$ 状態の量子ウォークの時間発展を記述するユニタリ作用素 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を

$$U := SC \tag{3}$$

で定義する。(3) のことをしばしば多次元量子ウォークとも呼ぶ。多次元量子ウォークに対する局在化の定義も定義 1 と同様に定義する：

定義 2 U が初期状態 Ψ_0 の下で局在化を起こすとは，$\lim_{t\to\infty} \|(U^t\Psi_0)(\boldsymbol{x})\|^2 > 0$ となるような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ が存在することである。

多次元量子ウォークの局在化も 1 次元の時と同様に，U の固有値解析へと帰着する。多次元量子ウォーク U の固有値解析を行うために以下のような準備を行なう。

定義 3 (One-defect)
コイン C は次を満たすように取る：

$$C(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} C_0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \\ C_1, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

このようなコイン C に対して U を **one-defect モデル**と呼ぶ。

さて，C はユニタリな自己共役作用素であるから，C のスペクトル $\sigma(C)$ は $\sigma(C) \subset \{\pm 1\}$ を満たす。特に，多次元量子ウォークにおいては次を仮定する：

$$\dim \ker(C(\boldsymbol{x}) - 1) = 1$$

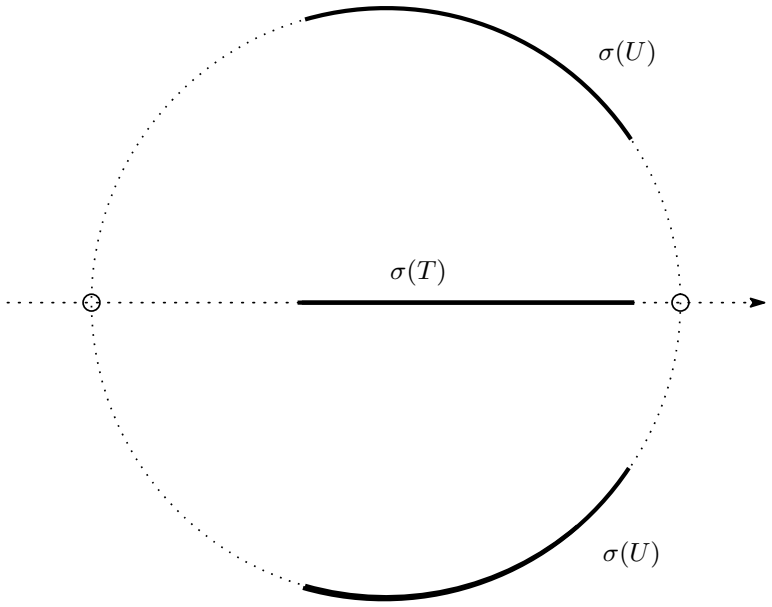
このとき，$\chi(\boldsymbol{x}) \in \ker(C(\boldsymbol{x}) - 1)$，$\|\chi(\boldsymbol{x})\| = 1$ とすると，$C(\boldsymbol{x}) = 2|\chi(\boldsymbol{x})\rangle\langle\chi(\boldsymbol{x})| - 1$ とスペクトル分解することができる。特に $d : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ を $(d\Psi)(\boldsymbol{x}) := \langle\chi(\boldsymbol{x}), \Psi(\boldsymbol{x})\rangle$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ と定義すると，コイン作用素 C は $C = 2d^*d - 1$ を満たす。この d を使って discriminant operator $T : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ を次で定義する：

$$T := dSd^*.$$

Discriminant operator T のスペクトルは U のスペクトルとある意味で対応している。実際，次の定理が存在する：

定理 2.1 (スペクトル写像定理 [7])
$\{e^{i \arccos \xi} \mid \xi \in \sigma_\#(T)\} \subset \sigma(U)$，$\sigma_\# = \sigma, \sigma_{\mathrm{p}}$.
ただし，線形作用素 A に対して，$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ は“A の固有値の集合”を表している。

スペクトル写像定理は次のような図を意味している。



故に，T が固有値を持てば U も固有値を持つことを意味し，局在化を起こすことが出来る。このことから T の固有値問題に帰着する。よって，以下 T を陽に書き下す。そのため，次の記号を導入する。まず，$\chi(\boldsymbol{x}) \in \ker\left(C(\boldsymbol{x})-1\right) \subset \mathbb{C}^{2d}$ より，

$$\chi(\boldsymbol{x}) = {}^t(\chi_{1,1}(\boldsymbol{x}), \chi_{1,2}(\boldsymbol{x}), \chi_{2,1}(\boldsymbol{x}), \chi_{2,2}(\boldsymbol{x}), \cdots, \chi_{d,1}(\boldsymbol{x}), \chi_{d,2}(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d \tag{4}$$

と成分表示する。今，U は one-defect モデルなので，$\Omega := \chi(\mathbf{0})$, $\Phi := \chi(\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$ と記述する。(4) と同様に Ω, Φ も以下のように成分表示する：

$$\Omega = {}^t(\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \ldots, \omega_{d,1}, \omega_{d,2}), \quad \|\Omega\| = 1,$$
$$\Phi = {}^t(\phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \cdots, \phi_{d,1}, \phi_{d,2}), \quad \|\Phi\| = 1.$$

このとき，$T = dSd^*$ を計算すると以下を得る：

$$T = \sum_{j=1}^{d} \{p_j \left(|\chi_{j,1}|^2 - |\chi_{j,2}|^2\right) + q_j \chi_{j,1}^* L_j \chi_{j,2} + \left(q_j \chi_{j,1}^* L_j \chi_{j,2}\right)^2\}.$$

ここで $\chi_{j,i}$ $(i = 1, 2, j = 1, \cdots, d)$ は $\chi_{j,i}(\boldsymbol{x})$ による掛け算作用素である。この T の固有値を探すために以下の Feshbach map を利用する：
射影作用素 $\Pi := |\mathbb{1}_{\{\mathbf{0}\}}\rangle\langle\mathbb{1}_{\{\mathbf{0}\}}|$, $\Pi^\perp := I - \Pi$ によって，T の Feshbach map を

$$F(\lambda) := \Pi^\perp(T-\lambda)\Pi^\perp - \Pi^\perp T \Pi \left(\Pi(T-\lambda)\Pi\right)^{-1}_{\mathrm{Ran}\Pi} \Pi T \Pi^\perp, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

と定義する。このとき次の補題に注意する。

補題 2.2 次の 2 つは必要十分である：
(1) $(\Pi(T-\lambda)\Pi)^{-1}_{\mathrm{Ran}\Pi}$ が存在する。
(2) $\lambda \neq a_0(\mathbf{p}) := \sum_{j=1}^{d} p_j \left(|\omega_{j,1}|^2 - |\omega_{j,2}|^2\right)$.

Feshbach map は上記の補題によって $\lambda \neq a_0(\mathbf{p})$ の下で well-defined である。Feshbach map が有用な理由は次の定理からくる：

定理 2.3 ([1]) 次の 2 つは必要十分である：
(1) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ である。
(2) $F(\lambda)\psi_\lambda = 0$ となる $\psi_\lambda \in \mathrm{Ran}\Pi^\perp \backslash \{\mathbf{0}\}$ が存在する。

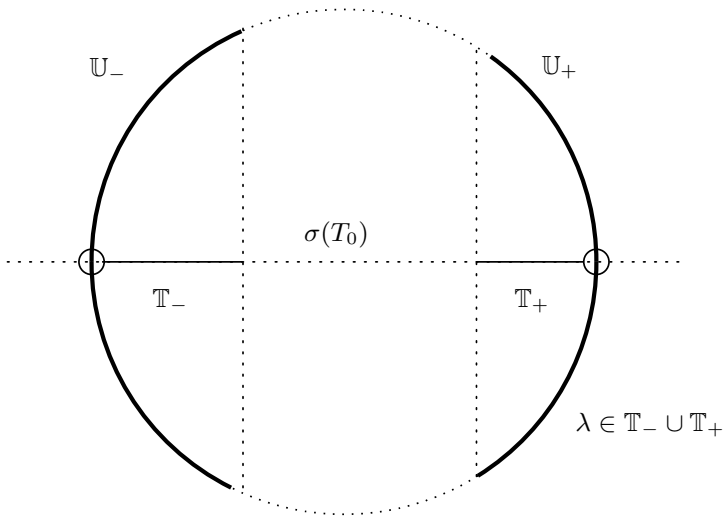
Feshbach map$F(\lambda)$ は直接計算によって次のように表示される：

$$F(\lambda) = \Pi^\perp \left(T_0 - \lambda - \frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{a_1(\mathbf{p}) - \lambda} \right) \Pi^\perp.$$

ただし，T_0 は $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上の自己共役作用素，φ は $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上のベクトルであり，次で定義されるものである：

$$\begin{aligned}
T_0 &:= a_1(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{d} \{ q_j \phi_{j,1}^* \phi_{j,2} L_j + (q_j \phi_{j,1}^* \phi_{j,2} L_j)^* \}, \\
a_1(\mathbf{p}) &:= \sum_{j=1}^{d} p_j \left(|\phi_{j,1}|^2 - |\phi_{j,2}|^2 \right), \\
\varphi &:= \sum_{j=1}^{d} \left(q_j \omega_{j,1} \phi_{j,2}^* \mathbb{1}_{\{-\mathbf{e}_j\}} + q_j^* \omega_{j,2} \phi_{j,1}^* \mathbb{1}_{\{\mathbf{e}_j\}} \right).
\end{aligned}$$

さて，$\lambda_0 := 2\sum_{j=1}^{d} |q_j \phi_{j,1} \phi_{j,2}|$ とすると，$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \sigma(T_0) = [a_1(\mathbf{p}) - \lambda_0, a_1(\mathbf{p}) + \lambda_0]$ が得られる。よって以下では，$\mathbb{T}_- := (-1, a_1(\mathbf{p}) - \lambda_0)$，$\mathbb{T}_+ := (a_1(\mathbf{p}) + \lambda_0, 1)$ として，$\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$ 上で T の固有値を探していく。



上図のように，$\mathbb{T}_\pm$ 上に T の固有値が現れれば，U は $\mathbb{U}_\pm$ 上に固有値を持つことがスペクトル写像定理より分かる。今，特に $\left(T_0 - \lambda - \frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{a_1(\mathbf{p})-\lambda} \right) \psi_\lambda = 0$ を満たす $\psi_\lambda \in \mathrm{Ran}\Pi^\perp \backslash \{0\}$ は $F(\lambda)\psi_\lambda = 0$ も満たす。そのため，$\left(T_0 - \lambda - \frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{a_1(\mathbf{p})-\lambda} \right) \psi_\lambda = 0$ について考察するが，このような ψ_λ は

$$\psi_\lambda = (T_0 - \lambda)^{-1} \varphi$$

の定数倍に限られることが示される。また，ここから $\left(T_0 - \lambda - \frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{a_1(\mathbf{p})-\lambda}\right)\psi_\lambda = 0$ と

$$f(\lambda) := \lambda - a_1(\mathbf{p}) + \langle\varphi, (T_0 - \lambda)\varphi\rangle = 0$$

は同値であることが確かめられる。さらに，本章では以下，次の仮定を設ける。

仮定 2.4
(1) 全ての $j = 1, \cdots, d$ に対して，$\omega_{j,1}\phi_{j,2} + \omega_{j,2}\phi_{j,1} = 0$ が成立する。
(2) ある $l = 1, \cdots, d$ に対して $\omega_{j,1}\phi_{j,2} \neq 0$ が成立する。

この仮定の下で次が成り立つ：

補題 2.5
(i) 仮定 2.4(1) が成立するとき，$\psi_\lambda \in \mathrm{Ran}\Pi^\perp$ である。
(ii) 仮定 2.4(2) が成立するとき，$\varphi \neq 0$ である。
特に仮定 2.4 の下で $\psi_\lambda \in \mathrm{Ran}\Pi^\perp \backslash \{0\}$ となる。

故に f の零点が存在すれば U が局在化を起こすことが分かる。先行研究 [2] では，上記の議論を経て f の零点の存在を証明した：

定理 2.6 (T.Fuda, D.Funakawa, A.Suzuki (2017)[2])
任意の $j = 1, \cdots, d$ に対して集合 D_j を

$$D_j := \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d \mid p_j q_j \neq 0\}$$

と定義する。ある $\mathbf{p}_0 \in \{-1, 1\}^d$ が存在し，$a_0(\mathbf{p}_0) \neq a_1(\mathbf{p}_0)$ を満たすとする。また，仮定 2.4(2) を見たす番号を l と書くことにする。このとき，$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{D}_l$ であり，$\|(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p}_0, \mathbf{0})\|$ が十分小さいならば，f は $\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$ 上に零点を持つ。故に，U は局在化を起こす。

上記の定理によって，任意の空間次元 $d \in \mathbb{N}$ に対して多次元量子ウォークが局在化を起こすための十分条件を提示することが出来た。次章では“$\mathbf{q}$ が $\mathbf{0}$ に十分近い”という条件を外すことを考える。

3　2 次元 4 状態量子ウォークと主結果

本章では，前章の空間次元を $d = 2$ で固定することによって，f が零点を持つための必要十分条件を提示する。特に本紙では以下のモデルの解析を行なう：

$$U := SC \ \text{ acting on } \ \mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^4) = \left\{\Psi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2} \|\Psi(\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{C}^4}\right\},$$

$$S := \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ L_1^* & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ L_2^* & 0 \end{pmatrix} \ \text{ on } \ \mathcal{H}.$$

C は 4×4 のユニタリかつエルミートな行列 $C(\boldsymbol{x})$ による掛け算作用素で定義される。さて，正規化された $\mathbb{R}^4$ 上のベクトル Ω, Φ を $\Omega = {}^t(\omega_{1,1}, 0, \omega_{2,1}, \omega_{2,2}) \in \mathbb{R}^4$，$\Phi = {}^t(\phi_{1,1}, 0, \phi_{2,1}, \phi_{2,2}) \in \mathbb{R}^4$ として取る。ただし，各成分は次を満たすものとする：

$$\omega_{2,1}\omega_{2,2}\phi_{2,1}\phi_{2,2} \neq 0,$$
$$\omega_{2,2}\phi_{2,1} + \omega_{2,1}\phi_{2,2} = 0.$$

また，本研究のモデルにおいて，$C(\boldsymbol{x})$ は以下を満たすように定義する：

$$C(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C_0 = 2|\Omega\rangle\langle\Omega| - 1, & (\boldsymbol{x} = \mathbf{0}), \\ C_1 = 2|\Phi\rangle\langle\Phi| - 1, & (\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}). \end{cases}$$

本章のモデルにおいては，$p_j = 0$ であるから $a_1(\mathbf{p}) = 0$ となる。また，$q_j = 1$ なので $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = [-2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|, 2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|]$ であることが直接計算によって確かめられる。故に，本モデルでは $\mathbb{T}_\pm$ を $\mathbb{T}_- = (-1, -2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|)$, $\mathbb{T}_+ = (2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|, 1)$ となることが分かる。先行研究よりも f の零点の存在について精度よく調べていくと次の結果を得る：

定理 3.1 次の 2 つは同値である：
(1) T が $\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$ 上に固有値を持つ。
(2) T が $\mathbb{T}_-$ と $\mathbb{T}_+$ に固有値を一つずつ持つ。
(3) $|\phi_{2,2}| < |\omega_{2,2}|$ が成り立つ。

次の系は定理 3.1 から直ちに従う。

系 3.2 $\omega_{1,1} = 0$ を仮定する。このとき，定理 3.1 の (3) は常に成り立つ。よって，$\omega_{1,1} = 0$ の下で，U が局在化を起こすような初期状態 Ψ_0 は常に取ることができる。

以上の結果によって，$\mathbf{q}$ が $\mathbf{0}$ に近くない場合 (特に $q_j = 1$, $j = 1, 2$ の場合でも)，U は局在化を起こすことが証明できた。以下，f の零点について少し補足をする。まず，f の定義の中に $(T_0 - \lambda)^{-1}$ が使われていることと，今回 ± 1 が固有値であるか否かを考慮していないため，f の定義域を $\mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$ としていた。しかし，元々の Feshbach map $F(\lambda)$ に立ち戻れば，$\lambda \neq a_0(\mathbf{p})$ でさえあれば Feshbach map を定義できた。今 $a_0(\mathbf{p}) = 0$ であるから，T の固有値の候補である λ は $(-1, 1)\backslash\{0\}$ から探しても良いことになる。よって，以下では f の零点問題について少し λ の範囲を広げた議論を行なう。今後，$\Lambda_\pm := \pm 2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|$ とし，ψ_λ のことを改めて ψ_a と書くことにする。ただし，$a := \frac{\lambda}{2\phi_{2,1}\phi_{2,2}}$ で定義する。この時，$\phi_{2,1}\phi_{2,2}$ の符号に依存して $\lambda \to \Lambda_\pm$ は $a \to \pm 1$ と同値であることに注意されたい。今，f について，次のことが分かる：

命題 3.3 $|\phi_{2,2}| = |\omega_{2,2}|$ を仮定する。この時

$$\lim_{a \to 1+0} f(\lambda) = \lim_{a \to -1-0} f(\lambda) = 0.$$

よって，$\lambda = \pm 2|\phi_{2,1}\phi_{2,2}|$ も T の固有値の候補となるが，この場合 $\psi_{\pm 1} \notin \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ である。この事実は $\ell^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2([0, 2\pi), \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2})$ でのフーリエ変換

$$(\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}) := \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{x}} \psi(\boldsymbol{x}), \quad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in [0, 2\pi)^2$$

を使い，$\hat{\psi}_{\pm 1} := (\mathcal{F}\psi_{\pm 1}) \notin L^2([0, 2\pi), \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2})$ を示すことによって確かめられる。上記のように，固有方程式を満たしても，固有ベクトルがヒルベルト空間の元ではないような λ は**レゾナンス**と呼ばれる。しかし，T が $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上の作用素であることから，「$T\psi_{\pm 1} = \Lambda_\pm \psi_{\pm 1}$, $\psi_{\pm 1} \notin \ell^2(\mathbb{Z}^2)$」などと書くことは宜しくない。よって，本研究では以下のようにレゾナンスを処理する。

まず，正値な関数 ρ に対して，$L^2_\rho := L^2([0,2\pi)^2, \frac{\rho(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{(2\pi)^2})$ と書くことにする。また，関数の集合 $\mathcal{D}_\pm$ を次のように定義する：

$$\mathcal{D}_+ := \left\{ \rho : [0,2\pi)^2 \to \mathbb{R}_+ \mid \begin{array}{c} \rho(\mathbf{k}) = O(k_2^{1+\varepsilon}),\ (k_2 \to 0)\ \ \mathbf{k} = (k_1,k_2) \in [0,2\pi)^2,\ \varepsilon > 0, \\ \int_{[0,2\pi)^2} \rho(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} < \infty \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{D}_- := \left\{ \rho : [0,2\pi)^2 \to \mathbb{R}_+ \mid \begin{array}{c} \rho(\mathbf{k}) = O\left((k_2-\pi)^{1+\varepsilon}\right),\ (k_2 \to \pi)\ \ \mathbf{k} = (k_1,k_2) \in [0,2\pi)^2,\ \ \varepsilon > 0, \\ \int_{[0,2\pi)^2} \rho(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} < \infty \end{array} \right\}.$$

このとき，次の結果が得られる：

定理 3.4 任意の $\rho_\pm \in \mathcal{D}_\pm$ に対して次が成り立つ：

$$\hat{\psi}_{\pm 1} \in L^2_{\rho_\pm},\quad \lim_{a \to \pm 1 \pm 0} \|\hat{\psi}_a - \hat{\psi}_{\pm 1}\|_{L^2_{\rho_\pm}} = 0.$$

参考文献

[1] V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, *Adv. Math. 137* (1998) 205298

[2] T. Fuda, D. Funakawa, A. Suzuki, Localization of a multi-dimensional quantum walk with one defect, Quantum Inf. Process. (2017).

[3] T.Fuda, D.Funakawa, A.Suzuki, Localization of a One-Dimensional Split-Step Quantum Walk with a Position-Dependent Coin, in preparation.

[4] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg. E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Phys. Rev. A* (2010).

[5] 今野 紀雄, 量子ウォーク, 森北出版株式会社 (2014).

[6] H. Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, *Quantum Inf. Process.* (2016).

[7] E. Segawa, A. Suzuki, Generator of an abstract quantum walk, *Quantum Stud.: Math. Found. 3* (2016) 11-30.

Discriminantal arrangementとプリュッカー行列、グラスマン多様体の超曲面

山形 颯（YAMAGATA So）*
北海道大学大学院理学院数学専攻

概 要

$\mathbb{C}^k$ 上に n 枚の超平面を一般の位置に配置した arrangement を一つ固定し，その超平面の平行移動全体を考えると自然に $\mathbb{C}^n$ の中の超平面の配置を誘導する．この配置は discriminantal arrangement と呼ばれ 1989 年に Manin-Schectman らによって Braid arrangement の一般化として定義された．本講演では Discriminantal arrangement がある組み合わせ論的構造を持つような超平面の平行移動全体は，グラスマン多様体 $Gr(3,n)$ 内に超曲面としての特徴づけを与えることができることを紹介する．本研究は S.Sawada 氏，S.Settepanella 氏との共同研究の結果である．

1 導入

有限枚の超平面の集合 $\mathcal{A}$ のことを超平面配置，arrangement と呼ぶ．1989 年 Manin と Schctman は古典的な Braid arrangement の一般化を与えるような超平面の族を与え，discriminantal arrangement と呼び，その組み合わせ論的，位相的性質の研究を行った [12]．$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を一般の位置に配置された $\mathbb{C}^k$ 上の n 枚の超平面の配置 (generic arrangement) とし，その平行移動全体は $\mathbb{C}^n$ と考えることができる．更に一般の位置にあるという条件を落とすような平行移動全体は $\mathbb{C}^n$ の中に超平面の配置を誘導し，これが discriminantal arrangement と呼ばれる配置であり $\mathcal{B}(n,k)$ と書かれる．$\mathcal{B}(n,k)$ は純ブレイド群の一般化であると捉えることができ，実際 $\mathcal{B}(n,1)$ は純ブレイド群と一致する (例えば [14])．この arrangement は例えば [12], [1], [3] のように組み合わせ論を含む幅広い問題と関係がある．高次圏との関わりでは Zamolodchikov equation に関連した研究があり [7]，トーリック多様体上のバンドルのコホモロジーの消滅との関係では [15] のような研究がなされている．[12] では一般の位置に配置された超平面の平行移動全体のなす空間におけるザリスキー開集合 $\mathcal{Z}$ 上で combinatorics が一定であるような配置 (つまり combinatorics が n と k にのみ依存する配置) から誘導される $\mathcal{B}(n,k)$ に焦点を当てた研究が行われたものの，$\mathcal{Z}$ を明示的に記述はしていない．

1994 年に Falk は [5] において [13] の sect. 8, [14] や [9] で述べられていたことに対し，$\mathcal{A}$ がザリスキー開集合 $\mathcal{Z}$ 上で変化するとき，対応する discriminantal arrangement の combinatorics の型が異なるような $\mathcal{A}$ の具体例を挙げることで $\mathcal{B}(n,k)$ の combinatorics の型が $\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ にも依存することを指摘した．1997 年に Bayer と Brandt は [3] で discriminantal arrangement がもとの配置に依存するとき，そのもとの配置を *very generic* そうでないときは *non very generic* として

*Email:so.yamagata.math@gmail.com. The author is supported by The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology through Program for Leading Graduate School (Hokkaido University "Ambitious Leader's Program")

分類し，さらに *very generic* の場合の discriminantal arrangement の組み合わせ論的な記述に対する予想を与え，1999 年には Athanasiadeis が [1] で彼らの予想を解決した．現在のところ *non very generic* については完全な combinatorics の記述が得られていない．しかし 2016 年になり，Libgober と Settepanella は [11] においてその部分的な記述を与えることに成功した．そこで講演者らは彼らの研究 [11] で与えられた記述の代数幾何的な理解を進めた結果グラスマン多様体の超曲面として捉えるられることが分かった [10]．ここでは combinatorics の記述に関する話題には入らず，超平面配置の基本的な定義から始め，グラスマン多様体の超曲面が得られるまでのストーリーを概観することにする．

2 準備

2.1 超平面配置とは

$\mathbb{F}$ を体とする．ベクトル空間 $V \simeq \mathbb{F}^k$ において有限枚のアフィン超平面の集まり $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ を超平面配置 (arrangement of hyperplanes) という．体 $\mathbb{F}$ としては断りがなければ $\mathbb{C}$ を用いることにする．ここで一旦超平面の定義を確認しよう．線形超平面とは V の $(k-1)$-次元部分空間 H のことで，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{F}^k$ を固定した 0 でないベクトルとしたとき，H は次の形を持つ．

$$H = \{v \in V | \ \alpha \cdot v = 0\},$$

ここで $''\cdot''$ は次のようなドット積で定義されている：

$$\alpha \cdot v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_k) = \sum_{1 \le i \le k} \alpha_i \cdot v_i.$$

アフィン超平面は線形超平面の平行移動として定義出来る．即ちアフィン超平面は

$$J = \{v \in V | \ \alpha \cdot v = a, \ a \in \mathbb{C}\}$$

で定義される．

もし $V \simeq \mathbb{C}^{k+1}$ として，k-次元射影空間 $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ を考えるときは射影超平面が定義出来る．即ち，$V \simeq \mathbb{C}^{k+1}$ かつ H を k-次元線形部分空間とするとき，射影超平面は

$$\tilde{H} = \{P = [U] \in \mathbb{P}(V) | \ U \subset H\}$$

と書ける．この平行移動はアフィン超平面の射影的閉包とも呼ばれる．

$\mathcal{A}$ とかくと超平面配置を表すものとする．$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の部分配置という．いま $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ をベクトル空間 V または射影空間 $\mathbb{P}(V)$ 上の超平面配置とする．このとき，$\mathcal{A}$ の次元を V または $\mathbb{P}(V)$ の次元で定義することにする．

$\mathcal{A}$ が generic arrangement であるとは，任意の $1 \le p \le n$ に対し，以下を満たすことである．

$$\{H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p}\} \subset \mathcal{A}, p \le k \Rightarrow \dim(H_{i_1} \cap H_{i_2}, \cap \ldots, H_{i_p}) = k - p,$$

$$\{H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p}\} \subset \mathcal{A}, p > k \Rightarrow H_{i_1} \cap H_{i_2}, \cap \ldots, H_{i_p} = \emptyset.$$

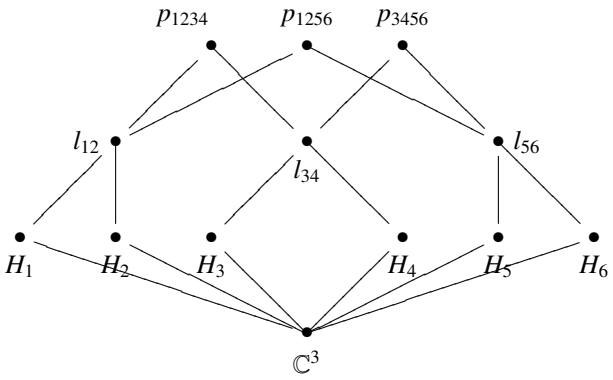


図 1: Intersection semilattice of $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

さて超平面配置の組み合わせ論的構造，性質を調べる上では交叉半順序集合 (intersection poset) と呼ばれる半順序集合が用いられる．これは超平面のすべての共通部分を集合の元，順序は逆包含関係によって定義される半順序集合である．即ち．交叉半順序集合とは

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \neq \emptyset | \ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\},$$

$$x < y \iff x \supset y$$

として定まる半順序集合である．順序の入れ方に関しては $x < y \iff x \subset y$ でもって定義しても同値であるが，慣例に従い以上のように定義することに注意する．Combinatorics というときは常にこの交叉半順序集合のことをさすこととする．

さて，一般に超平面配置の交叉半順序集合は特に semilattice の構造を持ち，さらに，超平面配置が中心的，即ちすべての超平面の共通部分が空でないような配置の時，交叉半順序集合は特に lattice の構造を持つ．

交叉半順序集合の例として $\mathbb{C}^3$ の generic arrangement$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_6\}$ を考えると，図 1 のようにハッセ図を用いた表現ができる．ただし，$l_{ij} = H_i \cap H_j$ は直線，$p_{ijkl} = l_{ij} \cap l_{kl}$ は点をそれぞれ表している．

2.2 Discriminantal arrangement の定義

$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の generic arrangement とする．超平面たち $H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0$ の平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}(H_1^0, ..., H_n^0)$ (H_i^0 が明らか或いは本質的でないときは単純に $\mathbb{S}$ とも書く) とは超平面の n-組 $H_1, ..., H_n$ のなす空間であって任意の $i = 1, ..., n$ に関して $H_i \cap H_i^0 = \emptyset$ または $H_i = H_i^0$ を満たすもの全体がなす空間である．つまり

$$\mathbb{S} = \{(H_1, H_2, \ldots, H_n) | \ H_i \cap H_i^0 = \emptyset \text{ or } H_i = H_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

このとき $\mathbb{S}$ は $\mathbb{C}^n$ と同一視することができ，特に $\mathcal{A}$ における超平面の順番は $\mathbb{S}$ の座標系を決定することが分かる ([11]).

Generic arrangement $\mathcal{A}$ を一つ固定し，generic arrangement ではなくなるような超平面の集合のなす $\mathbb{S}$ の閉部分集合を考えよう．この閉部分集合は，部分集合 $L = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \subset [n] := \{1, \ldots, n\}$ に対し $D_L = \{(H_1, H_2, \ldots, H_n) \in \mathbb{S} | \bigcap_{i_j \in L \subset [n], |L|=k+1} H_{i_j}\}$ とかける．Discriminantal arrangement はすべての部分集合 L に対する和集合 $\{D_L\}_{L\subset[n],|L|=k+1}$ として定義され，$\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ と書かれる．これは Mannin と Schectman らによって導入された [12].

Discriminantal arrangement は normal vector を使って定義することもでき，Bayer と Brandt によって [3] で以下のように与えられた.

Definition 2.1 (Bayer and Brandt [3])**.** $\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の *generic arrangement* とする．また $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ をそれぞれ $H_1^0, H_2^0 \ldots, H_n^0$ の *normal vector* を表すものとする．ただし，ここで *normal vector* は *section 2.1* で述べたようにドット積を用いて定義している：

$$(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) \cdot (v_1, v_2 \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i.$$

Discriminantal arrangement $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ とは $\mathbb{C}^n$ の超平面配置であり，各超平面の *normal vector* が次の形で書けるものである．

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \det(\alpha_{s_1}, \ldots, \hat{\alpha_{s_i}}, \ldots, \alpha_{s_{k+1}}) e_{s_i}, \tag{1}$$

ここで $\{s_1 < s_2 < \cdots < s_{k+1}\} \subset [n]$ とし $\{e_j\}_{1\le j\le n}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底とし，$\alpha_L \neq 0$ とする.

さて，今から $\mathbb{C}^k$ を $\mathbb{P}^k \setminus H_\infty$ とみることでコンパクト化を考えることにし，超平面としてアフィン超平面 H_i^0 の射影閉包 $\bar{H}_i^0$ が与えられているものとする．$\mathbb{C}^k$ 上の generic arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ に対し，無限遠における arrangement を $\mathcal{A}_\infty = \{H_{\infty,1}, H_{\infty,2}, \ldots, H_{\infty,n}\}$ とする．ここで各 i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し $H_{\infty,i} = \bar{H}_i^0 \cap H_\infty$ とする．$\mathcal{A}_\infty$ は $\mathbb{P}^k$ 上の超平面の n-組のなす空間における部分空間として，平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}$ を定義する．Generic arrangement $\mathcal{A}_\infty$ に対しても同様の議論で Discriminantal arrangement $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ が定義される．Discrimnantal arrangement の combinatorics は $\mathcal{A}_\infty$ に依存することが知られている [11] ため，以後は $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ ではなく $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ と記すこととする．$\mathcal{A}$ を generic arrangement とするとき，もし $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ の combinatorics が $\mathcal{A}$ に依存するとき，$\mathcal{A}$ を very generic, そうでないとき non very generic と呼ぶ.

2.3 good $3s$-partition と行列 $A(\mathcal{A}_\infty)$

$s \ge 2$，$n \ge 3s$ なる自然数 s, n が与えられたとき集合 $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ を考えよう．ここで L_i は $[n]$ の部分集合であって $|L_i| = 2s$, $|L_i \cap L_j| = s (i \neq j)$, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$ (特に $|\bigcup L_i| = 3s$) を満たし，$L_1 = \{i_1, \ldots, i_{2s}\}$, $L_2 = \{i_{s+1}, \ldots, i_{3s}\}$, $L_3 = \{i_1, \ldots, i_s, i_{2s+1} \ldots, i_{3s}\}$ とする．このとき $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ を *good* $3s$*-partition* と呼ぶ.

この記法のもと以下の Lemma が成り立つ．

Lemma 2.2 (Lemma 3.1 [11]). *$s \geq 2$, $n = 3s$, $k = 2s-1$ が与えられたとし，$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の generic arrangement とする．$[n] = [3s]$ とし，good $3s$-partition $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ が与えられたとき，無限遠 H_∞ における，余次元が s となる 3 つの部分空間 $H_{\infty,i,j} = \bigcap_{t \in L_i \cap L_j} H_{\infty,t}$ を考える．このとき $H_{\infty,i,j}$ が H_∞ において真部分空間をなすことと $D_{L_1} \cap D_{L_2} \cap D_{L_3}$ の余次元が 2 になることは同値である．ここで D_{L_i} は $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty)$ の超平面を表している．*

注意として，もし $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$，$L_1 = \{1,2,3,4\}$, $L_2 = \{1,2,5,6\}$, $L_3 = \{3,4,5,6\}$ が good 6-partition ならば $I_1 = L_1 \cap L_2$, $I_2 = L_2 \cap L_3$，$I_3 = L_1 \cap L_3$ に関して，超平面の共通部分 $\bigcup_{i \in I_1} H_{\infty,i}$, $\bigcup_{j \in I_2} H_{\infty,i}$，$\bigcup_{k \in I_3} H_{\infty,i}$ は H_∞ の真部分空間をなす．

[11] において，次のように dependent という概念が定義されている．$s \geq 2$, $\mathbb{P}^{2s-2}$ 上の generic arrangement $\mathcal{A}_\infty = \{W_{\infty,1}, \ldots, W_{\infty,3s}\}$ について，$[3s]$ の partition I_1, I_2, I_3 であって $P_i = \bigcap_{t \in I_i} W_{\infty,t}$ が $\mathbb{P}^{2s-2}$ の真部分空間を張るとき，$\mathcal{A}_\infty$ は dependent であるという．特に，$\{L_1, L_2, L_3\}$ が good $3s$-partition であるとき $I_1 = L_1 \cap L_2$, $I_2 = L_1 \cap L_3$, $I_3 = L_2 \cap L_3$ とおくと，lemma 2.2 の仮定は $\mathcal{A}_\infty$ が dependent であるということになる．

さて $\mathcal{P}_{k+1}([n]) = \{L \subset [n] \mid |L| = k+1\}$ を元の個数が $k+1$ である $[n]$ の部分集合たちのなす集合とする．このとき

$$A(\mathcal{A}_\infty) = (\alpha_L)_{L \in \mathcal{P}_{k+1}([n])} \tag{2}$$

を各行に超平面 D_L の normal vector α_L を持つような行列とし，$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ は各行に α_L, $L \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T} \subset \mathcal{P}_{k+1}([n])$ を持つような $A(\mathcal{A}_\infty)$ の部分行列とする．

2.4 グラスマン多様体 $Gr(k,n)$ とプリュッカー行列

$Gr(k,n)$ を $\mathbb{C}^n$ の k-次元部分空間全体のなすグラスマン多様体とし，

$$\gamma : Gr(k,n) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$$

$$< v_1, \ldots, v_k > \mapsto [v_1 \wedge \cdots \wedge v_k],$$

をプリュッカー埋め込みとする．このとき $[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ が $\gamma(Gr(k,n))$ の点であることと写像

$$\varphi_x : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^n$$

$$v \mapsto v \wedge x$$

の核の次元が k，即ち， $\ker \varphi_x = < v_1, \ldots, v_k >$ であることは同値である．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とするとき $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [n], i_1 < \cdots < i_k$ は $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の基底であり，$x \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ は以下のように一意的に書くことができる．

$$x = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k}} \beta_I e_I = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \beta_{i_1 \ldots i_k} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}). \tag{3}$$

ここで同次座標 β_I は $\mathbb{C}^n$ の順序つき基底 $e_1,\dots,e_n$ に関する $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ 上のプリュッカー座標とする．このとき φ_x の行列 $M_x = (b_{ij})$ は $\binom{n}{k+1}\times n$ 行列で，各行は順序のついた部分集合 $I \subseteq [n], |I| = k$ について，$i \in I$ のとき $b_{ij} = (-1)^i \beta_{I\cup\{j\}\setminus\{i\}}$ を，そうでないときは $b_{ij} = 0$ を成分に持つ．

プリュッカー関係式，即ち $\dim(\ker \varphi_x) = k$ となる条件は M_x の全ての $(n-k+1)\times(n-k+1)$ 小行列式が 0 になることである．よく知られているように (例えば [6]) プリュッカー関係式は次数 2 の関係式であり，以下のように書くことができる．

任意の $(i_1,\dots,i_{k-1},j_0,\dots,j_k)$ に対し

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \beta_{i_1\dots i_{k-1}j_l}\beta_{j_0\dots\hat{j_l}\dots j_k} = 0 \tag{4}$$

Remark 2.3. 方程式 *(1)* におけるベクトル α_L はプリュッカー行列 M_x における $I = L$ に対応する超平面 D_L に直交する，すなわち

$$A(\mathcal{A}_\infty) = M_x$$

であることに注意する．

この理由から，以後 $A(\mathcal{A}_\infty)$ のことをプリュッカー行列と呼ぶことにする．特に $\det(\alpha_{s_1},\dots,\hat{\alpha_{s_i}},\dots,\alpha_{s_{k+1}})$ はプリュッカー座標 $\beta_I, I = \{s_1,s_2,\dots,s_{k+1}\}\setminus\{s_i\}$ である．

2.5 例

$\mathbb{C}^3$ 上の generic arrangement $\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \dots, H_6^0\}$ と各超平面の normal vector $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, $1 \le i \le 6$ を考えよう．いま，$H_i^{t_i}$ を超平面 H_i^0 を α_i の方向に沿って平行移動して得られる超平面，すなわち $H_i^{t_i} = H_i^0 + t_i\alpha_i, t_i \in \mathbb{C}$ とする．

$\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ を [6] の good 6-partition とし，$L_1 = \{1,2,3,4\}, L_2 = \{1,2,5,6\}$,$L_3 = \{3,4,5,6\}$ としよう．このとき，

$$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = \begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_{234} & \beta_{134} & -\beta_{124} & \beta_{123} & 0 & 0\\ -\beta_{256} & \beta_{156} & 0 & 0 & -\beta_{126} & \beta_{125}\\ 0 & 0 & -\beta_{456} & \beta_{356} & -\beta_{346} & \beta_{345}\end{pmatrix}, \quad \beta_{ijk} = \det\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{j1} & a_{k1}\\ a_{i2} & a_{j2} & a_{k2}\\ a_{i3} & a_{j3} & a_{k3}\end{pmatrix}$$

はプリュッカー行列 $A(\mathcal{A}_\infty)$ の部分行列である．

$\alpha_i \times \alpha_j$ を α_i, α_j のクロス積とし，$(\alpha_i \times \alpha_{i+1})$ と書いて行列 $\begin{pmatrix}\alpha_1\times\alpha_2\\ \alpha_3\times\alpha_4\\ \alpha_5\times\alpha_6\end{pmatrix}$ を表すことにする．

このとき α_i と α_j はそれぞれ H_i と H_j の直交ベクトルなので $\alpha_i \times \alpha_j$ は直線 $H_i \cap H_j$ の方向ベクトルであり，$\operatorname{rank} A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ であることと $\operatorname{rank}(\alpha_i \times \alpha_{i+1}) = 2$ であることは同値である．

実際 $\operatorname{rank} A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ であることは $\operatorname{codim}(D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}) = 2$ と同値であるので Lemma 2.2 より点たち $\bigcap_{i\in L_1\cap L_2} \bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty = \bar{H}_3^{t_3}\cap\bar{H}_4^{t_4}\cap H_\infty$, $\bigcap_{i\in L_1\cap L_3} \bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty = \bar{H}_1^{t_1}\cap\bar{H}_2^{t_2}\cap H_\infty$, $\bigcap_{i\in L_2\cap L_3} \bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty = \bar{H}_5^{t_5}\cap\bar{H}_6^{t_6}\cap H_\infty$ が同一直線上に存在する．即ち，$H_i^{t_i}\cap H_{i+1}^{t_{i+1}}$ の方向ベクトルたちは一次従属であるから，$\operatorname{rank}(\alpha_i\times\alpha_{i+1}) = 2$ を得る． (図 2).

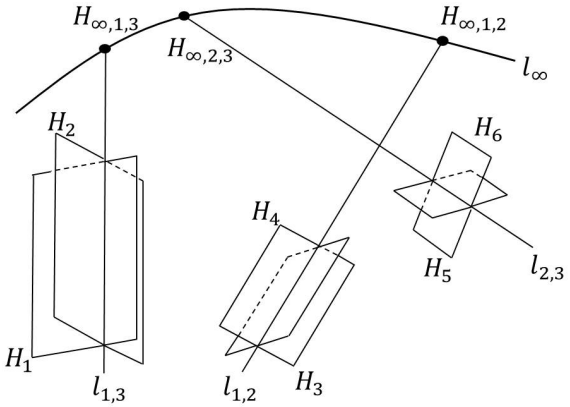


図 2: Picture of case $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}^0_\infty)$

さて，$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ の階数が 2 であることと $A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ のすべての 3 次小行列式がすべて 0 になることは同値である. これは即ち β_{ijk} が以下の方程式系の根であることになる：

$$\begin{cases} -\beta_{456}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0 \\ \beta_{356}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0 \\ -\beta_{346}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0 \\ \beta_{345}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0 \\ -\beta_{256}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0 \\ \beta_{234}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{346}=0 \\ -(\beta_{234}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{345})=0 \\ -(\beta_{234}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{346})=0 \\ \beta_{234}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{345}=0 \\ -\beta_{234}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \beta_{156}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0 \\ -(\beta_{134}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{346})=0 \\ \beta_{134}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{345}=0 \\ \beta_{134}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{346}=0 \\ -(\beta_{134}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{345})=0 \\ \beta_{134}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0 \\ -\beta_{126}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0 \\ \beta_{125}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0 \\ -\beta_{124}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0 \\ \beta_{123}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0 \end{cases} \tag{5}$$

3 主結果：グラスマン多様体 $Gr(3,n)$ の超曲面

$\mathcal{A}$ を section 2.5 で考えたように $\mathbb{C}^3$ 上の 6 枚の超平面の generic arrangement とする． 行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix} \tag{6}$$

を各行に超平面 $H^0_i \in \mathcal{A}$ の normal vector α_i を持つような行列とする．$\mathcal{A}$ は generic であるので，A の列は一次独立な $\mathbb{C}^6$ のベクトルであり，$\mathbb{C}^6$ に 3 次元の部分空間を張る．即ち，グラスマン多様体

$Gr(3,6)$ の点が得られる．A の 0 でない 3 次小行列式はプリュッカー座標 β_{ijk} であり，$A(\mathcal{A}_\infty)$ は

$$\varphi_x : \mathbb{C}^6 \to \bigwedge^4 \mathbb{C}^6$$

$$v \mapsto v \wedge x,$$

の行列である．ここで $x = \sum_{1\le i<j<k\le n} \beta_{ijk}(e_i \wedge e_j \wedge e_k)$ とする．

もし $\mathcal{A}_\infty$ が dependent ならば β_{ijk} は古典的なプリュッカー関係式と方程式系 (5) の両方を満たさないといけない．ここで後者の方程式系は以下のように簡略化することができる:

$$(I): \begin{cases} (a): \beta_{134}\beta_{256} - \beta_{234}\beta_{156} = 0 \\ (b): \beta_{124}\beta_{356} - \beta_{123}\beta_{456} = 0 \\ (c): \beta_{125}\beta_{346} - \beta_{126}\beta_{345} = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad (II): \begin{cases} (d): \beta_{234}\beta_{126}\beta_{456} + \beta_{124}\beta_{256}\beta_{346} = 0 \\ (e): \beta_{234}\beta_{125}\beta_{456} + \beta_{124}\beta_{256}\beta_{345} = 0 \\ (f): \beta_{234}\beta_{126}\beta_{356} + \beta_{123}\beta_{256}\beta_{346} = 0 \\ (g): \beta_{234}\beta_{125}\beta_{356} + \beta_{123}\beta_{256}\beta_{345} = 0 \\ (h): \beta_{134}\beta_{126}\beta_{456} + \beta_{124}\beta_{156}\beta_{346} = 0 \\ (i): \beta_{134}\beta_{125}\beta_{456} + \beta_{124}\beta_{156}\beta_{345} = 0 \\ (j): \beta_{134}\beta_{126}\beta_{356} + \beta_{123}\beta_{156}\beta_{346} = 0 \\ (k): \beta_{134}\beta_{125}\beta_{356} + \beta_{123}\beta_{156}\beta_{345} = 0 \end{cases}.$$

更に簡単な計算により (a) から (k) の式はすべて (a) の式一本に簡略化することができる．従って以下の式を得る．

$$\beta_{134}\beta_{256} - \beta_{234}\beta_{156} = 0. \tag{7}$$

この一本の式 (a) への簡略化の議論は次の Lemma の直接の結果である．

Lemma 3.1 (Lemma 5.1 [10])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の *generic arrangement* とし，$A(\mathcal{A}_\infty)$ をそのプリュッカー行列とする．また $\{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \subset [n]$ を選び，$\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$，$L_1 = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}, L_2 = \{i_1, i_2, i_5, i_6\}, L_3 = \{i_3, i_4, i_5, i_6\}$ を *good 6-partition* とする．もし $A(\mathcal{A}_\infty)$ の成分 β_I がプリュッカー関係式を満たすとき $\mathrm{rank} A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ と $A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ の全ての *3* 次小行列式のうちどれか一つが *0* になることは同値である．

Remark 3.2. もし $\mathcal{A}$ が $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の *generic arrangement* であるとき行列 $A(\mathcal{A}_\infty)$ は $\binom{n}{4} \times n$ 行列であって，任意の $L = \{s_1 < s_2 < s_3 < s_4\}$ に関し行ベクトル α_L の成分 $(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_{i_j} = (-1)^j \beta_{I_j}$, $I_j = L \setminus \{s_j\}, j = 1, 2, 3, 4$ を除いてすべて *0* である．従って任意の固定した *6* つの添え字 $s_1 < \ldots < s_6 \in [n]$ に関し $A(\mathcal{A}_\infty)$ の部分行列として $\binom{6}{4} \times 6$ のものを得ることになる．ここでこの部分行列は各行が α_L, $L \subset \{s_1, \ldots, s_6\}, | L | = 4$ からなり，列は第 $s_1, \ldots, s_6$ 列をとることで得られる行列である *(*行列 $(\alpha_L)_{L\subset\{s_1,\ldots,s_6\}, |L|=4}$ の全ての j 列目（$j \notin \{s_1, \ldots, s_6\}$）は *0* である）. 以上から，一般に $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の配置を考えたとしても，本質的には $n = 6$ の場合に帰着することが分かる．

一方で簡単な注意として，$s_1 < \ldots < s_6 \in [n]$ を *6* つの固定された添え字とし，$\mathbb{T} = \{\{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{s_1, s_2, s_5, s_6\}, \{s_3, s_4, s_5, s_6\}\}$ を *good 6-partition* とする（これは添え字集合 $\{1, \ldots 6\}$ の場合で言うと

$\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\}$ に対応する）．このとき，$\{s_1,\ldots,s_6\}$ 上の *good* 6-*partition* は次の形をしている．

$$\sigma.\mathbb{T} = \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\} \tag{8}$$

ただし $i_j = \sigma(s_j)$, $\sigma \in \mathbf{S_6}$．$\mathbf{S_6}$ は $\{s_1,\ldots,s_6\}$ の入れ替え全体のなす群である． ここで，一般に i_j は順序付けられているとは限らず，$i_j > i_{j+1}$ の場合もあり得ることに注意する．

このとき以下の Lemma が従う．

Lemma 3.3 (Lemma 5.3 [10])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^3$ 上 n 枚の超平面の *generic arrangement* とし，$\sigma.\mathbb{T} = \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\}$ を添え字集合 $s_1 < \ldots < s_6 \in [n]$ の *good* 6-*partition* とし，$\mathrm{rank}A_{\sigma.\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ を満たすとする．このとき $\mathcal{A}$ は次の式が定義する超曲面における点になる．

$$\beta_{i_1i_3i_4}\beta_{i_2i_5i_6} - \beta_{i_2i_3i_4}\beta_{i_1i_5i_6} = 0 \quad . \tag{9}$$

Remark 3.2 と Lemma 3.3 から次の主定理を示すことができる．

Theorem 3.4 (Theorem 5.4 [10])**.** $\mathbb{C}^3$ の超平面配置を考える．このとき *dependent* な部分配置を含むような *generic arrangement* の集合は，グラスマン多様体 $Gr(3,n)$ の超曲面の点の集合であって，各成分はグラスマン多様体と二次曲面との共通部分になっている．

参考文献

[1] C. A. Athanasiadis. The Largest Intersection Lattice of a Discriminantal Arrangement, Beiträge Algebra Geom., 40 (1999), no. 2, 283–289.

[2] A. Bachemand and W. Kern, Adjoints of oriented matroids, Combinatorica 6 (1986) 299–308.

[3] M. Bayer and K.Brandt, Discriminantal arrangements, fiber polytopes and formality, J. Algebraic Combin. 6 (1997), 229–246.

[4] H.Crapo, Concurrence geometries , Adv. in Math., 54 (1984), no. 3, 278–301.

[5] M. Falk, A note on discriminantal arrangements, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), no.4, 1221-1227.

[6] Joe Harris, Algebraic Geometry: A First Course, Springer-Verlag.

[7] M. Kapranov, V.Voevodsky, Braided monoidal 2-categories and Manin-Schechtman higher braid groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 92 (1994), no. 3, 241–267.

[8] Y. Kawamata, Shaeikukannokikagaku (Geometry in projective space), Asakura Publishing Co., Ltd.

[9] R.J. Lawrence, A presentation for Manin and Schechtman's higher braid groups, MSRI pre-print (1991): http://www.ma.huji.ac.il/ ruthel/papers/premsh.html .

[10] S. Sawada, S. Settepanella and S. Yamagata, Discriminantal arrangement, 3×3minors of Plücker matrix and hypersurfaces in Grassmannian Gr(3,n), C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 1111-1120.

[11] A. Libgober and S. Settepanella, Strata of discriminantal arrangements, arXiv:1601.06475 .

[12] Yu. I. Manin and V. V. Schectman, Arrangements of Hyperplanes, Higher Braid Groups and Higher Bruhat Orders, Advanced Studies in Pure Mathematics 17, 1989 Algebraic Number Theory in honor K. Iwasawa pp. 289-308.

[13] P. Orlik, Introduction to arrangements, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989).

[14] P.Orlik,H.Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]." 300, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[15] M. Perling, Divisorial Cohomology Vanishing on Toric Varieties, Documenta Math. 16 (2011), 209–251.

ポスターセッション
会場E

自明理想グラフと補可約グラフの彩色対称関数

辻栄　周平（Shuhei TSUJIE）*
北海道大学大学院理学研究院数学部門

概要

Stanley により，彩色対称関数は木に対する完全不変量であると予想されている．また，Gasharov により，爪自由なグラフの彩色対称関数は s-positive であると予想されている．本発表では，彩色対称関数は自明理想グラフに対する完全不変量であることと，爪自由な補可約グラフの彩色対称関数が e-positive（したがって s-positive）であるという結果について紹介する．

1　対称関数

$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を可算無限個の不定元とする．形式的冪級数 $f \in \mathbb{Z}[[\boldsymbol{x}]]$ が**対称関数** (symmetric function) であるとは以下が成り立つときに言う．

(i) f の単項式の次数は有界である．
(ii) f は変数の置換に関して不変である．

たとえば，冪乗和関数 $p_k \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$ は対称関数である．対称関数がなす集合は $\mathbb{Z}[[\boldsymbol{x}]]$ の部分環をなし，これを Sym と表す．

$k \in \mathbb{N}$ に対し，**基本対称関数** e_k を

$$e_k \coloneqq \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

と定める．さらに，整数分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し，$e_\lambda \coloneqq e_{\lambda_1}\cdots e_{\lambda_\ell}$ と定める．ただし，空分割 $\varnothing$ に対しては，$e_\varnothing \coloneqq 1$ とする．$\{e_\lambda\}_\lambda$ は Sym の $\mathbb{Z}$ 基底をなすことが知られている．対称関数 f が **e-positive** であるとは，f を $\{e_\lambda\}_\lambda$ の線形結合で表したとき，その係数がすべて非負であるときにいう．

整数分割 λ に対し，**Schur 関数** s_λ を

$$s_\lambda \coloneqq \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\le i,j\le\lambda_1}$$

と定める．ただし，λ' は λ の双対である．$\{s_\lambda\}_\lambda$ も Sym の $\mathbb{Z}$ 基底をなす．対称関数 f が **s-positive** であるとは，f を $\{s_\lambda\}_\lambda$ の線形結合で表したとき，その係数がすべて非負であるときにいう．一般に，e-positive な対称関数は s-positive でもあることが知られている．

* e-mail: tsujie@math.sci.hokudai.ac.jp

対称関数のなす環 Sym は対称群の表現論と密接な関係がある．R_n を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標が生成する $\mathbb{Z}$ 加群とする．直和 $R \coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ には自然に次数付き代数の構造が入る．R と $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} \coloneqq \mathrm{Sym} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の間には次数付き代数としての同型が存在し，整数分割 λ に付随する既約指標と Schur 関数 s_λ が対応している．したがって，s-positive な対称関数は対称群の指標に対応している．詳しくは，[Mac95] を参照.

2　彩色対称関数

$G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ を単純グラフとする．写像 $\kappa\colon V_G \to V_H$ が G から H への準同型であるとは，以下を満たすときにいう．

$$\{u, v\} \in E_G \Rightarrow \{\kappa(u), \kappa(v)\} \in E_H.$$

G から H への準同型がなす集合を $\mathrm{Hom}(G, H)$ と書く．特に，G から完全グラフ K_n への準同型がなす集合は

$$\mathrm{Hom}(G, K_n) = \{\, \kappa\colon V_G \to \{1, \dots, n\} \mid \kappa(u) \neq \kappa(v) \text{ for } \forall \{u, v\} \in E_G \,\}$$

となっている．集合 $\{1, \dots, n\}$ を色の集合と思うと，$\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_n)$ は G の隣り合っている頂点を異なる色で塗り分ける n 色での彩色である．

Definition 2.1. 有限単純グラフ G に対して，

$$\chi(G, n) = \#\,\mathrm{Hom}(G, K_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たす多項式 $\chi(G, t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在する．これを G の**彩色多項式** (chromatic polynomial) という.

Stanley [Sta95] は彩色多項式の対称関数による一般化を導入した.

Definition 2.2. 有限単純グラフ G に対し，

$$X(G, \boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_{\mathbb{N}})} \prod_{v \in V_G} x_{\kappa(v)} \in \mathrm{Sym}$$

を G の**彩色対称関数**（chromatic symmetric function）という．ただし，$K_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ を頂点集合とする完全グラフである.

$\mathbf{1}^n \coloneqq (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0 \dots)$ に対し，

$$X(G, \mathbf{1}^n) = \sum_{\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_n)} 1 = \#\,\mathrm{Hom}(G, K_n) = \chi(G, n)$$

となるので，彩色対称関数は彩色多項式よりも強い不変量である.

2.1 木に関する予想

木（tree）とは閉路を持たない連結グラフのことである．頂点数が n である木の彩色多項式は $t(t-1)^{n-1}$ となるので，彩色多項式は頂点数が同じである木を全く区別できない．Stanley はより強い不変量である彩色対称関数であれば，木を完全に区別できると予想している．

Conjecture 2.3 (Stanley [Sta95])**.** T_1, T_2 を木とする．もし，$X(T_1, \boldsymbol{x}) = X(T_2, \boldsymbol{x})$ であれば，T_1 と T_2 は同型である．

この予想は，23 頂点以下だと正しいことが Li-Yang Tan により計算機を用いて確認されているようである．また，いくつかの部分クラスに対しては予想が正しいということが証明されている（[MMW08]）．

グラフの代わりに半順序集合を用いて類似の問題を考えることもできる．[HT17] により，根付き木（rooted tree）に対し，Conjecture 2.3 の類似が成立することが証明されている．

2.2 e-positivity に関する予想

半順序集合 P の**比較不可能グラフ**（incomparability graph）$\mathrm{inc}(P)$ とは，頂点集合を P とするグラフで，$u, v \in P$ が隣接していることと u, v が比較不可能であることが同値になっているグラフのことである．$i, j \in \mathbb{N}$ に対し，半順序集合 P が $(i+j)$ **自由**（$(i+j)$-free）であるとは，P が i 個の元からなる全順序集合と j 個の元からなる全順序集合の非交和を誘導部分半順序集合として持たないときにいう．

Conjecture 2.4 (Stanley-Stembridge [SS93, Sta95])**.** P を $(3+1)$ 自由半順序集合とする．このとき，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ は e-positive である．

この予想が正しいことを示すためには，より狭いクラスで成り立っていることを証明すればよいことが分かっている．

Theorem 2.5 (Guay-Paquet [GP13])**.** 任意の $(3+1)$ 自由かつ $(2+2)$ 自由な半順序集合 P に対して，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ が *e-positive* であるならば，*Conjecture 2.4* は正しい．

Guay-Paquet　は探索範囲をより狭めることで，Conjecture 2.4 が 20 元以下では正しいことを計算機を用いて示した．

また，Conjecture 2.4 よりも弱い結果が示されている．

Theorem 2.6 (Gasharov [Gas96])**.** P を $(3+1)$ 自由半順序集合とする．このとき，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ は *s-positive* である．

完全二部グラフ $K_{1,3}$ を爪（claw）と呼ぶ．爪を誘導部分グラフとして持たないグラフを**爪自由**（claw-free）という．$(3+1)$ 自由半順序集合の比較不可能グラフは爪自由となる．Gasharov は以下を予想している．

Conjecture 2.7 (Gasharov)**.** G を爪自由なグラフとする．このとき，$X(G, \boldsymbol{x})$ は s-positive である．

3　自明理想グラフと補可約グラフ

グラフ G, H に対し，$G \sqcup H$ で G と H の非交和（disjoint union），つまり，G と H を単に並べてできるグラフを表す．$G + H$ で G と H の結び（join），つまり，G と H を並べ，さらに G の頂点と H の頂点をすべて辺で結んでできるグラフを表す．$\overline{G}$ で G の補グラフ（complement graph）を表す．いくつかのグラフのクラスはこれらの演算を用いて生成されるクラスとして定義される．以下の条件を考える．

(1) $K_1 \in \mathcal{C}$.
(2) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow G \sqcup K_1 \in \mathcal{C}$.
(3) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow G + K_1 \in \mathcal{C}$.
(4) $G, H \in \mathcal{C} \Rightarrow G \sqcup H \in \mathcal{C}$.
(5) $G, H \in \mathcal{C} \Rightarrow G + H \in \mathcal{C}$.
(6) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{G} \in \mathcal{C}$.

グラフ G が条件 (1)(2)(3) を用いて生成されるとき，G を**閾値グラフ**（threshold graph）という．条件 (1)(3)(4) を用いて生成されるとき，G を**自明理想グラフ**（trivially perfect graph）という．条件 (1)(4)(6) を用いて生成されるとき，G を**補可約グラフ**（complement-reducible graph, cograph）という．これは，条件 (1)(4)(5) で生成されることと同値である．これら 3 つのクラスの間には

$$\{ \text{閾値グラフ} \} \subseteq \{ \text{自明理想グラフ} \} \subseteq \{ \text{補可約グラフ} \}$$

という包含関係がある．

4　主結果

[HT17] で用いられた方法と類似の方法を用いて以下を示した．

Theorem 4.1. G, H を自明理想グラフとする．このとき，$X(G, \boldsymbol{x}) = X(H, \boldsymbol{x})$ であれば，G と H は同型である．

Proposition 4.2. 補可約グラフのクラスでは，同型でないが彩色対称関数が一致するグラフが存在する．

また，e-positivity に関して以下を示した．

Theorem 4.3. 爪自由な補可約グラフの彩色対称関数は *e-positive* である（したがって *s-positive* でもある）．

参考文献

[Gas96] Vesselin Gasharov, *Incomparability graphs of (3 + 1)-free posets are s-positive*, Discrete Mathematics **157** (1996), no. 1, 193–197.

[GP13] Mathieu Guay-Paquet, *A modular relation for the chromatic symmetric functions of (3+1)-free posets*, arXiv:1306.2400 (2013), arXiv: 1306.2400.

[HT17] Takahiro Hasebe and Shuhei Tsujie, *Order quasisymmetric functions distinguish rooted trees*, Journal of Algebraic Combinatorics **46** (2017), no. 3-4, 499–515.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford mathematical monographs, Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York, 1995.

[MMW08] Jeremy L. Martin, Matthew Morin, and Jennifer D. Wagner, *On distinguishing trees by their chromatic symmetric functions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **115** (2008), no. 2, 237–253.

[SS93] Richard P Stanley and John R Stembridge, *On immanants of Jacobi-Trudi matrices and permutations with restricted position*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **62** (1993), no. 2, 261–279.

[Sta95] R. P. Stanley, *A Symmetric Function Generalization of the Chromatic Polynomial of a Graph*, Advances in Mathematics **111** (1995), no. 1, 166–194.

Discriminantal arrangement and Pappus' Theorem for quadrics in Grassmannian

澤田 すみれ（SAWADA Sumire)
北海道大学大学院理学院数学専攻

概要

Discriminantal arrangement は Braid arrangment の高次化として，Manin 及び Schechtman によって定義された．現在，射影空間の超平面配置を考えると，グラスマン多様体上の 2 次の超曲面とランク 2 の 3 重点を持つ Discriminantal arrangement に対応関係があることがわかっている．本稿では，この超平面配置に関するパップスの定理を紹介する．本研究は北海道大学の Simona Settepanella 氏，山形颯氏との共同研究である．

1 準備

1.1 Discriminantal arrangement

$\mathbb{C}^k$ 上の n 枚の超平面からなる超平面配置 $\{H_1, \cdots, H_n\}$ を考える．これが generic であるとは，任意の k 枚の超平面が一次独立であることをいう．

この超平面配置に関する空間 $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ を，H_i に平行（一致も含む）な超平面の組全体とする．つまり，

$$\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) = \left\{ (H'_1, \cdots, H'_n) \,|\, H'_i \cap H_i = \emptyset \text{ or } H'_i = H_i \, (i = 1, \cdots, n) \right\} \quad .$$

このとき，$\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ は $(H_1, \cdots, H_n)$ を原点と対応させることで $\mathbb{C}^n$ と同一視できる．さらに，$\mathbb{C}^k$ を $\mathbb{P}^k \setminus H_\infty$ であると考えると，H_i に対応する射影平面 $\mathbb{P}^{k-1}$ 上の超平面 $H_{\infty,i}$ は

$$H_{\infty,i} = \bar{H}_i \cap H_\infty$$

となる．ただし $\bar{H}_i$ は H_i の $\mathbb{P}^k$ での閉包である．

ここで，$L = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\} \subset [n] := \{1, \cdots, n\}$ に対し，

$$D_L = \left\{ (H'_1, \cdots, H'_n) \in \mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \,|\, \textstyle\bigcap_{i \in L} H_i \neq \emptyset \right\}$$

とすると，D_L は $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ の超平面となる．D_L たちが成す超平面配置を Discriminantal arrangement という．

D_L の法線ベクトル α_L は次のように与えられることが知られている．$L = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\}$ を

$L = \{s_1 < \cdots < s_{k+1}\}$ と並び替えると

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \det(\alpha_{s_1}, \ldots, \hat{\alpha_{s_i}}, \ldots, \alpha_{s_{k+1}}) e_{s_i},$$

ただし，$\alpha_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik})$ は H_i の法線ベクトル，$\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ は $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \simeq \mathbb{C}^n$ の標準基底とする．

例 1.1　$k = 1$ の場合，$L = \{i_1, i_2\}$ について

$$D_L = \left\{ (H'_1, \cdots, H'_n) \in \mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \,|\, H'_{i_1} = H'_{i_2} \right\}$$

となり，これは Braid arrangement を構成する．この意味で，Discriminantal arrangement は Braid arrangement の高次元化といえる．

1.2　グラスマン多様体 $Gr(3, \mathbb{C}^n)$

ここからは $k = 3$ の場合，つまり $\mathbb{C}^3$ 上の超平面配置について考える．
$Gr(3, \mathbb{C}^n)$ をグラスマン多様体とするとき，

$$\begin{aligned} \gamma : Gr(3, \mathbb{C}^n) &\to \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n) \\ < v_1, v_2, v_3 > &\mapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge v_3] \end{aligned}$$

をプリュッカー埋め込みという．このとき，$[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n)$ が $\gamma(Gr(3, \mathbb{C}^n))$ の元であることと写像 φ_x

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{C}^n &\to \bigwedge^4 \mathbb{C}^n \\ v &\mapsto x \wedge v \end{aligned}$$

について $\dim(\ker \varphi_x) = 3$ となることが同値である． もし $e_1, \ldots, e_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底であるならば，$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}$（$I = \{i_1, i_2, i_3\} \subset [n], i_1 < \cdots < i_3$）は $\bigwedge^3 \mathbb{C}^n$ の基底としてとれて，$x \in \bigwedge^3 \mathbb{C}^n$ は

$$x = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = 3}} \beta_I e_I = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_3 \leq n} \beta_{i_1 \ldots i_3} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_3})$$

と一意にかける．ここで，斉次座標 β_I を $\mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$ でのプリュッカー座標という． φ_x の表現行列を M_x と書くと，$\dim(\ker \varphi_x) = k$ の条件は M_x のすべての $(n-2) \times (n-2)$ 小行列式が 0 であることと同値．これらの関係式は $\{p_1, \ldots, p_2, q_0, \ldots, q_3\} \subset [n]$ に対し

$$\sum_{l=0}^{3} (-1)^l \beta_{p_1 \ldots p_2 q_l} \beta_{q_0 \ldots \hat{q_l} \ldots q_3} = 0 \tag{1}$$

と書き表せる．この関係式をプリュッカー関係式という．

1.3 Discriminantal arrangement と $Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の関係

ここからは，$H_1,\cdots,H_n$ から 6 枚の超平面を選び，それらを改めて $H_1,\cdots,H_6$ と名づける．$\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_6\}$ と $\mathcal{A}_\infty=\{H_{\infty,1},\cdots,H_{\infty,6}\}$ について考える．

H_i の法線ベクトル $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})$ について，i 行目を α_i とした行列 A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathcal{A}$ は generic なので， A の列ベクトルは $\mathbb{C}^6$ 上で一次独立．したがってこの 3 つの列ベクトルは，$\mathbb{C}^6$ の 3 次の部分空間の基底となる．つまり A は $Gr(3,\mathbb{C}^6)\subset Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の元である．このようにして $\mathcal{A}$ は $Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の点とみなせる．

ここで，Discriminantal arrangement との対応を考えるために，次のような超平面の添え字に関する部分集合 L_1,L_2,L_3 を考える．

記号　$L_1,L_2,L_3\subset[6]$ を $|L_i|=4$, $|L_i\cap L_j|=2$ $(i\neq j)$, $L_1\cap L_2\cap L_3=\emptyset$ を満たす集合とするとき，$\mathbb{T}=\{L_1,L_2,L_3\}$ を good 6-partition という．このとき L_1,L_2,L_3 は $L_1=\{i_1,i_2,i_3,i_4\},L_2=\{i_1,i_2,i_5,i_6\},L_3=\{i_3,i_4,i_5,i_6\}$ のように書ける．

ここからは，good 6-partition に対する Discriminantal arrangement の超平面 D_{L_1},D_{L_2},D_{L_3} を考える．

A. Libgober 氏と S. Settepanella 氏の結果から，$\bigcap_{t\in L_1\cap L_2}H_{\infty,t}$, $\bigcap_{t\in L_1\cap L_3}H_{\infty,t}$, $\bigcap_{t\in L_2\cap L_3}H_{\infty,t}$ が H_∞ 上で共線的であることと，$D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ の余次元が 2 であることの同値性がわかっている （Lemma 3.1 [3]）．α_{L_i} は D_{L_i} の法線ベクトルなので，$D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ の余次元が 2 であることは，$\begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_2}\end{pmatrix}$ の階数が 2 であることと同値．

さらに，S. Settepanella 氏と山形氏との共同研究により，$\mathbb{T}=\{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\}$ を超平面の添え字に関する good 6-partition とすると（$i_j=\sigma(j)$, $\sigma\in\mathbf{S_6}$），$\begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_2}\end{pmatrix}$ の階数が 2 であることと，$\mathcal{A}$ が $Gr(3,\mathbb{C}^6)\subset Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の二次曲面

$$\beta_{i_1i_3i_4}\beta_{i_2i_5i_6}-\beta_{i_2i_3i_4}\beta_{i_1i_5i_6}=0$$

の点であることが等しいことを示した．（cf. [4]）

つまり，この二次曲面と，$\mathbb{P}^2$ 上の $\mathcal{A}_\infty$ の 2 つの超平面の共通部分が共線的であることが対応していることがわかる．

2　パップスの定理

射影平面における古典的な定理の一つに，パップスの定理がある．

定理 2.1（Pappus） 射影平面上の 2 つの直線 l_1，l_2 を考える．l_1，l_2 上の 3 点 A, B, C，A', B', C' に対し，X, Y, Z をそれぞれ $AB' \cap A'B$，$AC' \cap A'C$，$BC' \cap B'C$ とすると，3 点 X, Y, Z を通るような直線 l_3 が存在する．

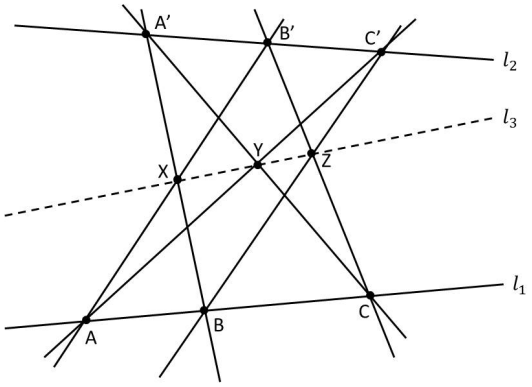


図 1　パップスの定理

今，$\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の generic な超平面配置から 6 枚の超平面を選び，それらを $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_6\}$ とし，$\mathcal{A}_\infty = \{H_{\infty,1}, \cdots, H_{\infty,6}\}$ とかくこととする．$Gr(3, \mathbb{C}^n)$ 上の 2 次曲面についてこの定理を考えると，$\mathbb{P}^2$ の直線 AB', $A'B$, BC', $B'C$, AC', $A'C$ は $\mathcal{A}_\infty$ の超平面 $H_{\infty,1}, \cdots, H_{\infty,6}$ に対応し，l_1, l_2, l_3 はそれぞれ $\mathcal{A}_\infty$ の 2 つの超平面の共通部分が共線的であることに対応していることがわかる．

このことから，good 6-partition $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$, $L_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $L_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $L_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ に対し，$\mathcal{A}$ が $Gr(3, \mathbb{C}^6)$ 上の 2 次曲面

$$Q_1 : \beta_{134}\beta_{256} - \beta_{234}\beta_{156} = 0. \tag{2}$$

の点であるとすると，これは $\bigcap_{i \in L_1 \cap L_2} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_1 \cap L_3} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_2 \cap L_3} H_{\infty,i}$ が共線的であることに対応する．

同様にして，good 6-partition $\mathbb{T}_2 = \{L_1', L_2', L_3'\}$, $L_1' = \{4, 6, 2, 5\}$, $L_2' = \{4, 6, 1, 3\}$, $L_3' = \{2, 5, 1, 3\}$ と $\mathbb{T}_3 = \{L_1'', L_2'', L_3''\}$, $L_1'' = \{2, 4, 1, 6\}$, $L_2'' = \{2, 4, 3, 5\}$, $L_3'' = \{1, 6, 3, 5\}$ について，3 点 $\bigcap_{i \in L_1' \cap L_2'} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_1' \cap L_3'} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_2' \cap L_3'} H_{\infty,i}$ と $\bigcap_{i \in L_1'' \cap L_2''} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_1'' \cap L_3''} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_2'' \cap L_3''} H_{\infty,i}$ の共線性と $\mathcal{A}$ が

$$Q_2 : \beta_{425}\beta_{613} - \beta_{625}\beta_{413} = 0, \tag{3}$$

$$Q_3 : \beta_{216}\beta_{435} - \beta_{416}\beta_{235} = 0 \tag{4}$$

の点であることがそれぞれ対応している．

これらの記法を用いると，次の定理がしたがう．

定理 2.2 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置とする．$\mathcal{A}$ が Q_1, Q_2, Q_3 のいずれか 2 つに含まれれば，$\mathcal{A}$ は残りの 1 つにも含まれている．

言い換えると，以下が成り立つ．

$$Q_{i_1} \cap Q_{i_2} = \bigcap_{i=1}^{3} Q_i, \quad \{i_1, i_2\} \subset [3]$$

前章 1.3 より，この 2 次曲面は超平面の共通部分の共線性に対応する (図 2)．

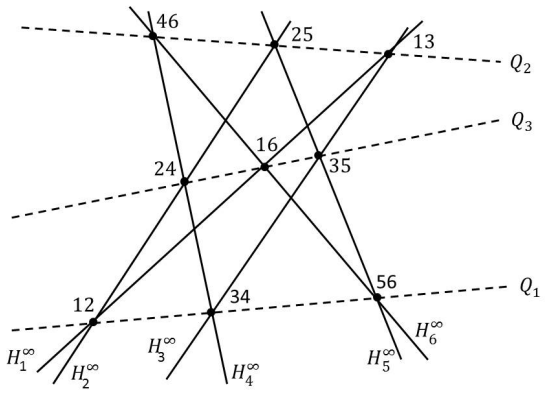


図 2 (ij は $H_{\infty,i} \cap H_{\infty,j}$ を表す)

この 3 つの共線は，すべて異なる超平面の共通部分を含んでいることが必要十分である．そこで，2 つの good 6-partition $\mathbb{T} = \{K_1, K_2, K_3\}$, $\mathbb{T}' = \{K_1', K_2', K_3'\}$ に対し，

$$K_i \cap K_j \neq K_{i'}' \cap K_{j'}' \quad (1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq i' < j' \leq 3)$$

となるとき，$\mathbb{T}$ と $\mathbb{T}'$ は disjoint であると呼び，good 6-partition $\mathbb{T}$ により定まる 2 次曲面を $Q_{\mathbb{T}}$ とかくと，次の定理が得られる．

定理 2.3 (パップスの定理) $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_6\}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置とする．disjoint な good 6-partition $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ に対し，$\mathcal{A}$ が $Q_{\mathbb{T}}$, $Q_{\mathbb{T}'}$ の点ならば，$\mathcal{A} \in Q_{\mathbb{T}''}$ となる good 6-partition $\mathbb{T}''$ が唯一つ存在する．

この定理は，2 次曲面の方程式 (2), (3), (4) とプリュッカー関係式 (1) を用いて示される．

参考文献

[1] C. A. Athanasiadis. The Largest Intersection Lattice of a Discriminantal Arrangement, Beiträge Algebra Geom., 40 (1999), no. 2, 283–289.

[2] Joe Harris, Algebraic Geometry: A First Course, Springer-Verlag

[3] A. Libgober and S. Settepanella, Strata of discriminantal arrangements, arXiv:1601.06475

[4] S. Sawada, S. Settepanella and S. Yamagata, Discriminantal arrangement, 3×3minors of Plücker matrix and hypersurfaces in Grassmannian $Gr(3, n)$, Comptes Rendus Mathematique Volume 355, Issue 11(2017), pp.1111-1200

[5] Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, Arrangements of Hyperplanes, Higher Braid Groups and Higher Bruhat Orders, Advanced Studies in Pure Mathematics 17, 1989 Algebraic Number Theory in honor K. Iwasawa, pp. 289-308.

[6] P.Orlik,H.Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]." 300, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

Persistent Stiefel-Whintey homology classes for posets and categories

村井 涼　　石橋 浩太
Ryo MURAI*　　Kota ISHIBASHI†

概要

Stiefel-Whitney ホモロジー類は Sullivan によって特異空間に対して定義された特性類であり，空間上の構成的関数関手からホモロジー関手への自然変換に一般化されることが知られている．本研究ではこの特性類を，有限ポセットと有限圏を対象に証明も含めて組合せ論的に再構成した．さらに，これをパーシステントホモロジーの文脈に一般化し，「パーシステント Stiefel-Whitney ホモロジー類」を構成した．

1 はじめに

可微分多様体の重要な不変量として，特性類というコホモロジー類が可微分多様体の接束に対して定義されることが知られているが[*1]，接束が定まらない特異空間に対しても，その空間のあるホモロジー類として特性類を定義できることがある．このうちで最初のものが Sullivan が mod. 2 オイラー空間[*2]に対して定義した Stiefel-Whitney ホモロジー類である [6] [*3]．以下，これを単に「Stiefel-Whitney 類」と呼ぶ．

本研究では，この Stiefel-Whitney 類を有限ポセット（有限半順序集合）に対して定義した．また，特異空間の特性ホモロジー類は空間上のある関手からホモロジー関手への自然変換として捉えられることが知られているが (c.f. [5])，我々の理論でもポセット（の順序複体）上の「よい」構成的関数がなす関手 $\mathcal{F}^{eu}$ を構成することで，ポセット上の Stiefel-Whitney 類を $\mathcal{F}^{eu}$ からホモロジー関手 H_* への自然変換に一般化している．このように自然変換に一般化された Stiefel-Whitney 類を特に「Stiefel-Whitney 類変換」と呼ぶことにする．（第 2 節）

有限圏は一般に有限ポセットより複雑な構造を持つ対象であるが，ある仕方で有限ポセットを

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士課程 2 年（発表者）
† 株式会社ワークスアプリケーションズ

*1 例えば [4] を参照されたい．

*2 実代数的集合や実解析的集合がその例になっている．

*3 特異空間のホモロジーに値を取るこの種の特性類についての包括的なサーベイとしては [5] が挙げられる．日本語の文献としては，[10, 12, 9] がある．Stiefel-Whitney ホモロジー類については，[13] の最終章にも簡単な紹介がある．

対応させることにより，有限圏に対する Stiefel-Whitney 類変換を定義することができる．（第 3 節）[*4]

以上の応用として，近年位相的データ解析の基礎理論として活発な研究がなされているパーシステントホモロジー理論に適合する仕方で Stiefel-Whitney 類変換を一般化した．（第 4 節）

また，本稿ではその実装の詳細については触れないが，ポセットのホモロジー群及びオイラーポセットの Stiefel-Whitney 類を計算する，第二著者による C++ プログラム [2] がある．

以下，ポセットと圏は特に断らない限り有限のもののみを考える．ポセットや圏の定義及び単体複体のホモロジー論，パーシステントホモロジー理論についての知識は仮定した．単体複体のホモロジー論については [8] などのトポロジーの教科書を，パーシステントホモロジーについては [1, 7, 14] を参照されたい．

2 ポセット上の Stiefel-Whitney 類変換

2.1 ポセット上の構成的関数

ポセット P に対し，その非空な全順序部分集合すべてからなる集合は抽象単体複体の構造を持つ．これを順序複体 (order complex) と言い，$\Delta(P)$ で表す．$\Delta(P)$ の単体（すなわち P の全順序部分集合）σ に対し，その次元を $\dim\sigma := \#\sigma - 1$ と定義し，ポセット P の次元を $\dim P := \max\{\dim\sigma \,|\, \sigma \in \Delta(P)\}$ と定義する．ポセット P の重心細分 (barycentric subdivision) を $Sd(P) := (\Delta(P), \prec)$ で定める．ここで $\prec$ は単体間の面関係 (face relation)，すなわち P の全順序部分集合間の包含順序関係である．また，順序複体 $\Delta(P)$ の重心細分を $\Delta^2(P) := \Delta(Sd(P))$ で定義する．帰納的に，$\mathrm{Sd}^k(P)$ と $\Delta^k(P)$ が定義される．

R を単位元を持つ可換環とする．ポセット P 上の R-構成的関数 (R-constructible function) とは，関数 $\alpha : \Delta(P) \to R$ のことであり，このような関数の集合を $\mathcal{F}(P;R)$ と書く（R が文脈から明らかなときは単に $\mathcal{F}(P)$ と書くこともある）．$\mathcal{F}(P;R)$ には，R の演算から自然に R-代数の構造が入る．$\sigma \in \Delta(P)$ に対し，$\mathbb{1}_\sigma$ を σ に対して 1 を，その他の単体に対しては 0 を対応させるような関数とすると，$\{\mathbb{1}_\sigma\}_{\sigma\in\Delta(P)}$ は $\mathcal{F}(P;R)$ の基底になる．すなわち，任意の構成的関数 α は，$m_\sigma \in R$ を用いて

$$\alpha = \sum_{\sigma\in\Delta(P)} m_\sigma \mathbb{1}_\sigma$$

と一意に書ける．また，$\Delta(P)$ の部分集合 $S \subset \Delta(P)$ に対して

$$\mathbb{1}_S := \sum_{\sigma\in S} \mathbb{1}_\sigma$$

と定める．

$f : P \to Q$ をポセット間の順序を保つ写像とする（このような写像を以下「ポセット間の射」と

[*4] 第 2 節及び第 3 節の内容は，基本的に第二著者による修士論文 [11] に基づいている．

呼ぶ)．f の押し出し (pushforward)$f_* : \mathcal{F}(P;R) \to \mathcal{F}(Q;R)$ を以下の線形拡張により定義する．

$$f_*(\mathbb{1}_\sigma) := (-1)^{\dim\sigma - \dim f(\sigma)}\mathbb{1}_{f(\sigma)}$$

$\mathbf{Posets_{fin}}$ を有限ポセットとポセット間の射がなす圏，$\mathbf{Mod}_R$ を R-加群と加群準同型がなす圏とすると，この対応により $\mathcal{F}(-;R) : \mathbf{Posets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ は共変関手となる．

2.2 ポセット上のオイラー標数積分

構成的関数に対してはそのオイラー標数積分 (Euler integral) が定義できる．与えられた部分集合 $S \subset \Delta(P)$ と $\alpha \in \mathcal{F}(P)$ に対して，α の S 上でのオイラー標数積分は以下で定義される：

$$\int_S \alpha := \sum_{\sigma\in S}(-1)^{\dim\sigma}\alpha(\sigma) \in R.$$

特に，$\mathbb{1}_{\Delta(P)} : \Delta(P) \to \mathbb{Z} \in \mathcal{F}(P;\mathbb{Z})$ に対しては以下が成り立つ．

$$\int_{\Delta(P)} \mathbb{1}_{\Delta(P)} = \sum_{\sigma\in\Delta(P)} (-1)^{\dim\sigma} = \chi(\Delta(P))$$

ここで，$\chi(\Delta(P))$ は抽象単体複体 $\Delta(P)$ のオイラー標数であり，その定義はまさに $\sum_{\sigma\in\Delta(P)} (-1)^{\dim\sigma}$ である．また，$\alpha \in \mathcal{F}(P;R)$ のオイラー標数積分は以下のようにも書けることが簡単にわかる．

$$\int_S \alpha = pt_*(\alpha \cdot \mathbb{1}_S) \in \mathcal{F}(pt;R) \cong R.$$

ここで，$pt : P \to pt$ はポセット P から一点ポセット pt への唯一の写像とする．

2.1 節で定義したポセット間の射 $f : P \to Q$ の押し出しは，オイラー標数積分を用いて以下のようにも書ける．

$$f_*(\alpha)(\sigma) = (-1)^{\dim\sigma}\int_{f^{-1}(\sigma)} \alpha \qquad (\sigma \in \Delta(Q))$$

オイラー標数積分についてはフビニの公式が成り立つ．

命題 2.1　ポセット間の射 $f : P \to Q$ と $\alpha \in \mathcal{F}(P)$ に対し，以下が成り立つ．

$$\int_{\Delta(P)} \alpha = \int_{\Delta(Q)} f_*\alpha$$

2.3 ポセットの Stiefel-Whitney 類変換

2.3.1 ポセットのオイラー性

ポセット P 上の構成的関数に対する絡み作用素 (link operator) $\Lambda_R : \mathcal{F}(P;R) \to \mathcal{F}(P;R)$ を以下で定義する．

$$\Lambda_R(\mathbb{1}_\sigma) := (1 + (-1)^{\dim\sigma - 1})\mathbb{1}_\sigma + (-1)^{\dim\sigma - 1}\mathbb{1}_{Bd(\sigma)}.$$

ここで $Bd(\sigma) := \{\, \tau \in \Delta(P) \mid \tau \prec \sigma,\ \tau \neq \sigma\}$ であり，σ の境界を意味する．Λ_R は $\mathcal{F}(-;R)$ 上の自然変換になっている．

定義 2.2　ポセット P が R-オイラーであるとは，$\Lambda_R(\mathbb{1}_{\Delta(P)}) = 0$ であることをいう．

註 2.3　$R = \mathbb{Z}_2$ と取ると，P が $\mathbb{Z}_2$-オイラーであることは，その順序複体 $\Delta(P)$ が $\mathbb{Z}_2$-オイラー空間であること，すなわち任意の $\sigma \in \Delta(P)$ に対して，

$$\chi(\mathrm{lk}_{\Delta(P)}(\sigma)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}.2)$$

となることと同値．ここで，単体複体 K と $\tau \in K$ について，τ の K におけるリンクは，

$$\mathrm{lk}_K(\tau) := \{\rho \in K \mid \rho \cap \tau = \emptyset, \rho \cup \tau \in K\}$$

と定義される．

$\mathbb{Z}_2$-オイラー性については以下の同値な条件がある．

補題 2.4　ポセット P についての以下の 3 つの条件は同値である．

(a)　$\mathbb{Z}_2$-オイラーである．
(b)　$\Delta(\mathrm{Sd}(P))$ の各 $q-1$ 単体 τ に対して $\tau \prec \sigma$ なる q 単体 $\sigma \in \Delta(\mathrm{Sd}(P))$ の数が偶数である．
(c)　P の任意の頂点 v と任意の頂点のペア v_1, v_2 について以下が成立する：
　　$P_{<v} := \{w \in P \mid v > w\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．
　　$P_{>v} := \{w \in P \mid v < w\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．
　　$P_{v_1 v_2} := \{w \in P \mid v_1 < w < v_2\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．

$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットは「Stiefel-Whitney 類が定義できるポセット」として我々の理論の中で重要な意味を持つ．Stiefel-Whitney 類を自然変換に拡張するために，[3] における algebraic constructible function と似た構成により，「オイラー構成的関数」がなす関手 $\mathcal{F}^{eu}$ を導入する．

定義 2.5　T を R-オイラーポセット，$\phi_T : T \to P$ をポセット間の射とし，$\{(\phi_T)_* \mathbb{1}_{\Delta(T)}\}_{\phi_T}$ たちで生成される $\mathcal{F}(P;R)$ の部分群を $\mathcal{F}^{eu}(P;R)$ と書く．$\mathcal{F}^{eu}(P;R)$ の元を P の R-オイラー構成的関数と呼ぶ．

$\alpha \in \mathcal{F}^{eu}(P)$ に対して $f_*\alpha \in \mathcal{F}^{eu}(Q)$ が成り立つので，$\mathcal{F}^{eu}$ は $\mathcal{F}$ の部分関手になる．

2.3.2　Stiefel-Whitney 類変換

R を係数に持つポセット P のホモロジーは，

$$H_*(P;R) := H_*(\Delta(P);R).$$

として定義される．ポセット間の射 $f : P \to Q$ は単体写像 $\Delta(P) \to \Delta(Q)$ を自然に誘導するから，$f_* : H_*(P;R) \to H_*(Q;R)$ が定義でき，この対応によって $H_* : \mathbf{Posets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ という共変関手が得られる．

以下，$R=\mathbb{Z}_2$ の設定のもとで考える．P を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットとする．

$$s_q(P) := \sum_{\dim\sigma=q} \sigma \quad \in C_q(\Delta^2(P);\mathbb{Z}_2)$$

という $\Delta^2(P)$ ($\Delta(P)$ の重心細分) 上の鎖を考えると, 補題 2.4 の (b) からこれがサイクルである, すなわち $\partial s_q(P)=0$ であることがわかる．したがって，サイクル $s_q(P)$ が代表する $H_q(\Delta^2(P);\mathbb{Z}_2)$ の元があり，これを Stiefel-Whitney 類という．

定義 2.6　$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットに対する q 次 Stiefel-Whitney 類を以下で定義する．

$$w_q(P) := [s_q(P)] \in H_*(P;\mathbb{Z}_2).$$

$w_*(P)=\sum_q w_q(P) \in H_*(P;\mathbb{Z}_2)$ を全 Stiefel-Whitney 類と呼ぶ．

$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットの Stiefel-Whitney 類は，以下の「Stiefel-Whitney 類変換」に一般化できる．

定理 2.7　ポセット P に対し，$\phi_{T_i}: T_i \to P$ を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット T_i から P への射，n_iを $\mathbb{Z}_2$ の元として，

$$w_q : \mathcal{F}^{eu}(P;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(P;\mathbb{Z}_2),\ \sum_i n_i(\phi_{T_i})_*(\mathbb{1}_{\Delta(T_i)}) \mapsto \sum_i n_i(\phi_{T_i})_*(w_*(T_i)),$$

と定めると，これは well-defined な $\mathbb{Z}_2$-準同型写像になっており，しかも P について自然である．すなわち，w_q は自然変換 $\mathcal{F}^{eu}(-;\mathbb{Z}_2) \Rightarrow H_q(-;\mathbb{Z}_2)$ を定める．

証明はトポロジー的な議論を経由せず，組合せ論的に straightforward にできる．定義から，$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット P に対して $w_q(\mathbb{1}_{\Delta(P)})=w_q(P)$ となるので，確かにこれは Stiefel-Whitney 類の一般化になっている．また，$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット P と，$\alpha\in\mathcal{F}(P;\mathbb{Z}_2)$ に対し，$w_0(\alpha)=\int_{\Delta(P)}\alpha$ が成り立つ．したがって，Stiefel-Whitney 類変換はオイラー標数積分の一般化と見ることができる．

3　有限圏上の Stiefel-Whitney 類変換

有限圏 $\mathbb{A}$ に対し，有限ポセット $E(\mathbb{A})$ を対応させることができ，$E(\mathbb{A})$ 上の Stiefel-Whitney 類を $\mathbb{A}$ の Stiefel-Whitney 類と定義する．以下，$E(\mathbb{A})$ の構成について説明する[*5]．

$[n]$ を $\{0\le 1\le\cdots\le n\}$ という順序集合を圏とみなしたものとする．有限圏 $\mathbb{A}$ に対し，

$$\Delta(\mathbb{A}) := \{\ \sigma : [n]\to\mathbb{A} \mid n\in\mathbb{N},\ \sigma\text{は対象について単射な関手}\ \}$$

とする．$\sigma,\sigma'\in\Delta(\mathbb{A})$ について以下のように半順序が定義できる．

$$\sigma\le\sigma' :\Leftrightarrow \text{ある単射な順序を保つ写像 } \phi:[n]\to[n'] \text{ について} \sigma=\sigma'\circ\phi \text{ が成り立つ．}$$

[*5] なお，$|\Delta(E(\mathbb{A}))|$ と $|N(\mathbb{A})|$（$\mathbb{A}$ の分類空間）は．ホモトピー同値にはならないことに注意．

$\sigma \in \Delta(\mathbb{A})$ に対し，$\mathrm{End}(\sigma) := \prod_{i=0}^{n} \mathrm{End}(\sigma(i))$（ここで $\mathrm{End}(\sigma(i))$ は $\sigma(i)$ 上の自己射がなすモノイド）とする．$\sigma \leq \sigma'$ のとき $\rho_\sigma^{\sigma'} : \mathrm{End}(\sigma) \to \mathrm{End}(\sigma')$ を，$g = (g_i)_i \in \mathrm{End}(\sigma)$ に対し，

$$\pi_j(\rho_\sigma^{\sigma'}(g)) = \begin{cases} g_i \ (j \in \phi([n]) \\ id_{\sigma'(j)} \ (j \notin \phi([n])) \end{cases}$$

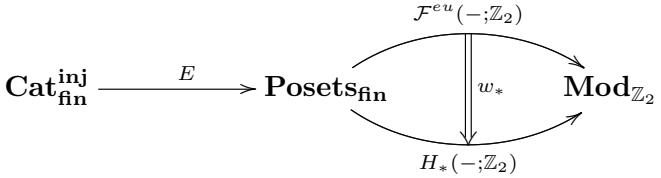
となるようなモノイド準同型として定義する．（ここで π_j は j 番目の射影）この対応により，関手 $\mathrm{End} : \Delta\mathbb{A} \to \mathbf{Monoids}$ が定義される．$E(\mathbb{A})$ は関手 End の category of elements として定義される: すなわち，$E(\mathbb{A})$ は，対象が $(\sigma, g)(\sigma \in \Delta\mathbb{A}, g \in \mathrm{End}(\sigma))$ であり，射（順序）$(\sigma, g) \leq (\sigma', g')$ が「$\sigma \leq \sigma'$ かつ $\rho_\sigma^{\sigma'}(g) = g'$」として定義されるようなポセットになる．特に，$\mathbb{A}$ がポセットのとき $E(\mathbb{A})$ は順序複体 $\Delta(\mathbb{A})$ の face poset$(\Delta(\mathbb{A}), \prec)$ に他ならない．

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ を有限圏の間の対象について単射な関手とする．このとき，ポセット間の射 $E(f) : E(\mathbb{A}) \to E(\mathbb{B})$ が以下のように定義される．

$$E(f)(\sigma, g) := (f \circ \sigma, (f(g_i))_i)$$

この対応により，E は有限圏を対象，その間の対象について単射な関手を射とする圏 $\mathbf{Cat}_{\mathbf{fin}}^{\mathbf{inj}}$ から $\mathbf{Posets}_{\mathbf{fin}}$ への関手となる．

それゆえ，$\mathbb{A}$ 上の Stiefel-Whitney 類変換を以下の図式の E と w_* の合成 w_{*E} として定義することができる．



4 パーシステント Stiefel-Whitney 類変換

$\mathbf{SeqPosets}_{\mathbf{fin}}$ を $\mathbb{K} : K_0 \xrightarrow{f_0} K_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$ というポセットの列がなす圏とする．ここで，射 $\varphi = (\varphi_n)_n : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ は，ポセットの射 $\varphi_n : K_n \to L_n$ の組であって，以下を可換にするものとして定義する:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{f_n} & K_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow{g_n} & L_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$\Xi : \mathbf{Posets}_{\mathbf{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ を共変関手とする．このとき，共変関手 $P\Xi : \mathbf{SeqPosets}_{\mathbf{fin}} \to \mathbf{Mod}_{R[x]}$ が以下のように定義される：$\mathbb{K}$ に対し，$R[x]$-加群 $P\Xi(\mathbb{K}) := \bigoplus_n \Xi(K_n)$ を対応させる．ここで，$R[x]$-作用は $\alpha \in \Xi(K_n)$ に対して $x.\alpha := f_{n*}\alpha \in \Xi(K_{n+1})$ により定義される．射 $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ に対しては，$R[x]$-準同型 $\varphi_* : P\Xi(\mathbb{K}) \to P\Xi(\mathbb{L})$ を $\varphi_*(\alpha) := \varphi_{n*}(\alpha) \quad (\alpha \in \Xi(K_n))$ により定義する．

ここで，Ξ として関手 $\mathcal{F}^{eu}$ と H_* を $R=\mathbb{Z}_2$ のもとで考える．このとき，自然変換

$$Pw_*: P\mathcal{F}^{eu}(\mathbb{K};\mathbb{Z}_2)\to PH_*(\mathbb{K};\mathbb{Z}_2)$$

が $Pw_*(\alpha_n):=w_*(\alpha_n)(\alpha_n\in\mathcal{F}^{eu}(K_n))$ により定義される．

$\mathbb{Z}_2[x]$-加群 $PH_*(\mathbb{K})$ の生成元を $\mathrm{Bar}(PH(\mathbb{K}))=\{b_0,b_1,\cdots\}$ と書くことにする．K_j が $\mathbb{Z}_2$-オイラーであるとき，K_j の Stiefel-Whitney 類は $\mathrm{Bar}(PH(\mathbb{K}))$ により以下のように表せられる．

$$SW(K_j):=Pw_*(\mathbb{1}_{K_j})=\gamma_{0j}.b_0+\gamma_{1j}.b_1+\cdots\quad(\gamma_{ij}\in\mathbb{Z}_2[x])$$

パーシステントホモロジーの理論では各々の生成元はホモロジーの生き死にの時刻を表す「バーコード」という表示を持つ[*6]．この表示のもとで，$SW(K_j)$ を $\mathbb{Z}_2[x]$ の元により色付けされたバーコードと解釈することができる（次節の例を参照）．

$SW(\mathbb{K})$ を集合 $\{SW(K_j)\}_{j\geq 0}$ とすると，次の定理が成り立つ．

定理 4.1　$\varphi:=\{\varphi_n:K_n\to L_n\}$ を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットの列 $\mathbb{K}$ と $\mathbb{L}$ の間の射とする． 任意の $n\in\mathbb{N}$ と $\sigma\in\Delta L_n$ に対し，$\#\varphi_{n*}^{-1}(\sigma)$ が奇数であるとすると，φ_* は $SW(\mathbb{K})$ を $SW(\mathbb{L})$ に移し，しかもこれは全射である．

4.1　例：実射影平面の配置

パーシステント Stiefel-Whitney 類の例を導入するため，$\mathbb{R}P^3$ 内での実射影平面の配置の系列を考える．これは，新たな実射影平面 L_j をそれより古い実射影平面の配置 $\bigcup_{i<j}L_j$ に加えていくことにより得られる．これらの空間は三角形分割可能なので face poset を取ることで，ポセットとして表示できる．

まず，$w_*(\mathbb{R}P^2)$ は，Stiefel-Whitney コホモロジー類

$$w^*(T\mathbb{R}P^2)=(1+a)^3=1+a+a^2\in H^*(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}_2[a]/(a^3)$$

のポアンカレ双対になっていることに注意する．ここで，$a=w^1(\gamma^*_{\mathbb{P}^2})$ は divisor class である（[4] を参照）．それゆえ，$w_k(\mathbb{R}P^2)$ $(k=0,1,2)$ は 0 でない．

L_i $(i=0,1,2)$ を $\mathbb{R}P^3$ 内で横断的に交わる実射影平面とする．$X_0:=L_0$，$X_1:=L_0\cup L_1$，$X_2:=L_0\cup L_1\cup L_2$，$X_3:=\mathbb{R}P^3$ と置き，包含写像による以下の列を考える．

$$\mathbb{X}:\quad X_0\xrightarrow{f_0}X_1\xrightarrow{f_1}X_2\xrightarrow{f_2}X_3.$$

ここで，$f^{i,j}:=f_{j-1}\circ\cdots\circ f_i:K_i\to K_j$ と定義し，Stiefel-Whitney 類 $w_*(X_k)(0\leq k\leq 3)$ の $f_*^{k,3}$ による像を考える：

$$\boldsymbol{a}_k:=(f_*^{k,3}w_0(X_k),f_*^{k,3}w_1(X_k),f_*^{k,3}w_2(X_k),f_*^{k,3}w_3(X_k))^T\in H_*(\mathbb{R}P^3)=(\mathbb{Z}_2)^4.$$

[*6] [1, 7] を参照.

また，X_k の generic な線形切断のオイラー標数の列を考える：

$$\boldsymbol{b}_k := (\chi(X_k), \chi(X_k \cap H), \chi(X_k \cap \ell), \chi(X_k \cap \{p\})^T \in (\mathbb{Z}_2)^4,$$

ここで H は generic な平面, ℓ は generic な直線, p は X_2 の外にある $\mathbb{R}P^3$ の点である．$\boldsymbol{a}_k$,$\boldsymbol{b}_k$ は以下のように計算される．

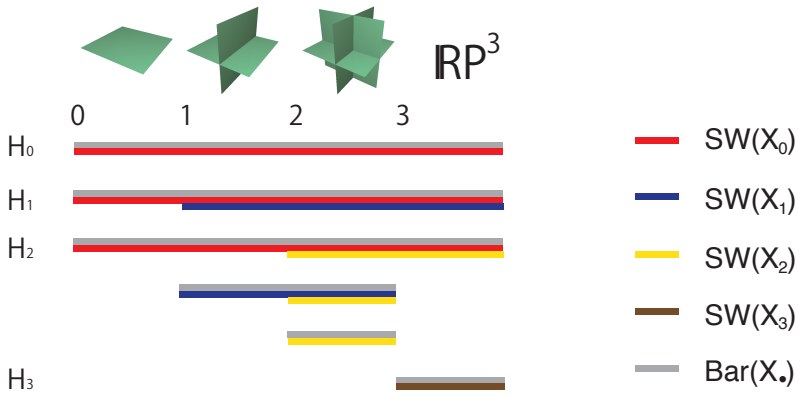
$$[\boldsymbol{a}_0\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{b}_0\ \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

これらは同じ情報を持つ，すなわち $\boldsymbol{a}_k = P\boldsymbol{b}_k$ なる $\mathbb{Z}_2$ 成分の正則行列 P があることが知られている．

$SW(\mathbb{X})$ はこれら 4 つのベクトルにホモロジー類の persistency の情報を付加したものと考えることができる．

$$H_0(X_k) = H_1(X_k) = \mathbb{Z}_2\ (k = 0, 1, 2, 3), \quad H_2(X_3) = H_3(X_3) = \mathbb{Z}_2,$$
$$H_2(X_0) = \mathbb{Z}_2, \quad H_2(X_1) = (\mathbb{Z}_2)^2, \quad H_2(X_2) = (\mathbb{Z}_2)^3.$$

であることに注意すると，$SW(\mathbb{X})$ は以下のような色つきのバーコードと理解できる．



参考文献

[1] Robert Ghrist. Barcodes: The persistent topology of data. Technical report, 2007.

[2] Kouta Ishibashi. posetHom. `https://github.com/Kouta-Ishibashi/posetHom`, 2016.

[3] Clint McCrory and Adam Parusiski. Algebraically constructible functions. *Annales Scientifiques de l'École Normale Suprieure*, 30(4):527 – 552, 1997.

[4] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

[5] Jörg Schürmann and Shoji Yokura. A survey of characteristic classes of singular spaces. In *Singularity Theory*, pages 865–952.

[6] D. Sullivan. Combinatorial invariants of analytic spaces. In C.T.C. Wall, editor, *Proceedings of Liverpool Singularities — Symposium I*, pages 165–177, Berlin, Heidelberg, 1971. Springer Berlin Heidelberg.

[7] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2):249–274, Feb 2005.

[8] 田村 一郎. **トポロジー**. 岩波書店, 1972.

[9] 大本 亨. 特異点の数え上げと同変 Chern 類. **数学**, 61(1):21–39, jan 2009.

[10] 與倉 昭治. モチヴィック特性類の話題から. **数学**, 68(2):151–176, 2016.

[11] 石橋 浩太. 有限圏上のオイラー標数積分とホイットニー特性類. 修士論文, 北海道大学, 2016.

[12] 諏訪 立雄. 特異多様体の特性類. **数学**, 52(4):376–393, 2000.

[13] 佐藤 肇. **位相幾何**. 岩波書店, 2006.

[14] 平岡 裕章. **タンパク質構造とトポロジー*:* パーシステントホモロジー群入門**. 共立出版, 2013.

最隣接相互作用する量子スピン系について

冨永隼人（Hayato TOMINAGA）
北海道大学大学院理学院数学専攻

1 導入

素粒子はスピンまたはスピン角運動量と呼ばれる角運動量の一種を持っていて，スピンは量子力学に特有のものである．スピンは磁性の起源であり，磁石のような磁性が関係する様々な現象の原因になっている．

磁石が示すいくつかの性質の中で，強磁性と反強磁性がある．強磁性は，物質全体として巨視的にみると磁化を持つ物質が示す磁性のことをいい，反強磁性は，巨視的には磁化を持たない物質が示す磁性のことをいう．

Heisenberg 模型は，格子上の隣り合う 2 つのスピンの間に相互作用が働く系を記述する基本的な模型である．量子系の反強磁性 Heisenberg 模型において，相転移が起きることは厳密に証明されている [1]．[1] は鏡映正値性という方法を用いて，長距離秩序と呼ばれる秩序が存在することを証明することで相転移が起きることを証明している．また，[1] と同様の方法で反強磁性 Heisenberg 模型において長距離秩序が存在することが証明されている [2]．しかし，強磁性 Heisenberg 模型において，相転移が起きるかどうか分かっていない．では強磁性 Heisenberg 模型の一部の相互作用を反強磁性的相互作用に置き換えた模型ではどのようなことが起きているだろうか？この変形した模型において長距離秩序と呼ばれる秩序が低温で存在する十分条件を [1] と同様の方法で求めることができたので，本講演ではこれを紹介する．

ν 次元超立方格子 $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu | 0 \leq \alpha_i \leq L_i - 1, L_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, \nu\}$ の各格子点に大きさが S のスピンがあるような系を考える．ただし，$S = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ である．サイト $\alpha \in \Lambda$ のスピンを $S_\alpha = (S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)})$ とおくと，$S_\alpha^{(j)}$ は $S_\alpha^{(j)} \in \mathcal{A}_\alpha := \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ $(\mathcal{H}_\alpha = \mathbb{C}^{2S+1})$ であり，自己共役である．

自己共役作用素 $S_\alpha^{(j)} \in \mathcal{A}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda, j = 1, 2, 3)$ は次の条件を満たす．

$$\begin{cases} [S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}] = iS_\alpha^{(3)}, \\ [S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)}] = iS_\alpha^{(1)}, \\ [S_\alpha^{(3)}, S_\alpha^{(1)}] = iS_\alpha^{(2)}, \\ S_\alpha^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} (S_\alpha^{(j)})^2 = S(S+1). \end{cases}$$

この $(S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)})$ をスピン S のスピン作用素という．

強磁性 Heisenberg 模型の一部の相互作用を反強磁性的相互作用に置き換えた模型を記述するハミルトニアンを次のように定義する．

定義 1.1. $n \in \mathbb{N}, r > 0, \nu \geq n + 1$ とし，H_Λ を

$$H_\Lambda = -\sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\sum_{m=n+1}^{\nu} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_m} - r \sum_{m=1}^{n} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_m} \right)$$

と定義する．ただし， δ_m は $(\delta_m)_i = \delta_{im}$ を満たすとし， Λ の境界条件は周期的境界条件とする．

[3] のように，H_Λ が記述する模型において，長距離秩序が存在するような r の範囲を求める．Λ に対して，$\mathcal{H}_\Lambda = \otimes_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{H}_\alpha$ とおき，$\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$ とおく．

定義 1.2. $A \in \mathcal{A}_\Lambda, \beta > 0$ として，分配関数を

$$Z_\Lambda = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H_\Lambda}\right]$$

と定義し，期待値を

$$\langle A \rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \mathrm{Tr}\left[A e^{-\beta H_\Lambda}\right]$$

と定義する．

定義 1.3.

$$\liminf_{|\Lambda|\to\infty} \left\langle \left(|\Lambda|^{-1} \sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} S_\alpha^{(3)} \right)^2 \right\rangle_\Lambda \neq 0$$

が成り立つとき，長距離秩序が存在するという．

いくつかの仮定を付け加えると，長距離秩序が存在することは

$$\liminf_{|x|\to\infty} \liminf_{|\Lambda|\to\infty} \left\langle (-1)^{x_1+\cdots+x_n} S_0^{(3)} S_x^{(3)} \right\rangle_\Lambda \neq 0$$

と同値になる．

2 主結果

定理 2.1. $n \geq 3, \nu, r, S$ が

$$\frac{2}{3} S(S+1)^2 > G(n) \left(r^{-1} S(\nu - n) + nS + \frac{1}{2} \right)$$

をみたすとき長距離秩序が存在する．

この定理から次の系が従う．

系 2.2. $n \geq 3$, $S \geq 1$ とする．r, ν が

$$r > \frac{2}{3}(\nu - 3)$$

をみたすとき長距離秩序が存在する．

定理 2.1 を証明するために，次の 2 つの命題を使う．

命題 2.3. L_i は偶数とし，$p \in \Lambda^*$ に対して，

$$\tilde{S}_p = |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} e^{-ip\alpha} S_\alpha$$

とおく．このとき

$$(\tilde{S}_{-p}^{(j)}, \tilde{S}_p^{(j)}) \leq \frac{1}{2r\beta E_p}$$

が成り立つ．ここで，$E_p = \sum_{m=1}^n (1 - \cos p_m)$ であり，$(\cdot,\cdot)$ は Duhamel two-point function である．

命題 2.4.

$$\sum_{j=1}^3 \left\langle \left[\tilde{S}_p^{(j)}, \left[\beta H_\Lambda, \tilde{S}_{-p}^{(j)} \right] \right] \right\rangle_\Lambda \leq 4F_p S^2 \beta + 4r E_p' S(S + (2n)^{-1})\beta$$

が成り立つ．ただし，

$$E'_p = \sum_{m=1}^{n} (1 + \cos p_m)$$
$$F_p = \sum_{m=n+1}^{\nu} (1 - \cos p_m)$$

である．

命題 2.3 と命題 2.4 は [1] と同様の手法で証明することができる．この 2 つの不等式を使うことで長距離秩序が存在するための十分条件を得ることができる．

参考文献

[1] F. J. Dyson, E. H. Lieb, B. Simon, J. Stat. Phys. 18, 335-383, 1978

[2] E. J. Neves, J. F. Perez, Phys. Lett. 114A, 331-333, 1986

[3] T. Kennedy, E. H. Lieb, B. S. Shastry, J. Stat. Phys. 53, 1019-1030, 1988

対応のパーシステントホモロジー

箙の表現論の視点から

竹内 博志（Hiroshi Takeuchi）*

概要

2014 年に Shaun Harker らによって提案された対応（correspondence）から誘導されるホモロジー準同型写像の理論は，ノイズや欠陥を含むデータ間の対応からも，真の写像の誘導写像の情報を復元することを可能にする強力な道具である．本研究では，応用トポロジーで研究されて来たパーシステント加群の枠組みで対応の誘導写像を再定義し，原論文で示されている諸定理を簡潔な形で示した．更にここで用いたアイディアを応用すれば，離散力学系において写像で対応付けられるホモロジー生成元のパーシステンスを解析することが出来る．

1 背景と先行研究

次のような問題設定を考える．

問題 1. 連続写像 $f\colon X \to Y$ が存在し，ある有限集合 $S \subset X$ 上の振る舞い $f|_S$ だけ与えられている．この時，ホモロジー誘導写像 $f_*\colon HX \to HY$ の情報を得ることが出来るだろうか．

先行研究 [1] では次のような解析を提案している．まず位相空間 X 及び Y を有限個に分割し，サンプル $\{\,(s, f(s)) \mid s \in S\,\}$ が乗っている領域（図 2 の紫の部分）を F とおく．

定義 2. $X \times Y$ の部分集合を（X から Y への）**対応**と呼ぶ．

定義 3. 対応 F に対し，標準的な射影から定まる図式 $X \xleftarrow{p} F \xrightarrow{q} Y$ を考える．二条件

- $\operatorname{Im} p_* = HX$ (homologically complete)
- $q_*(\operatorname{Ker} p_*) = 0$ (homologically consistent)

を満たす時，誘導写像 $F_* := q_* \circ p_*^{-1}\colon HX \to HY$ が well-defined に定まる．

ここで，連続写像 f のグラフ $\mathrm{Gr}(f)$ は対応であり，$\mathrm{Gr}(f)_*$ が定まるが，これは f_* と一致することに注意する．次の二定理により，分割が十分に細かくサンプルが十分に取れている時，f_* を F_* によって取り出せることが保証されている．

* 東北大学大学院理学研究科（〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3, E-mail: hiroshi.takeuchi.s6@dc.tohoku.ac.jp）

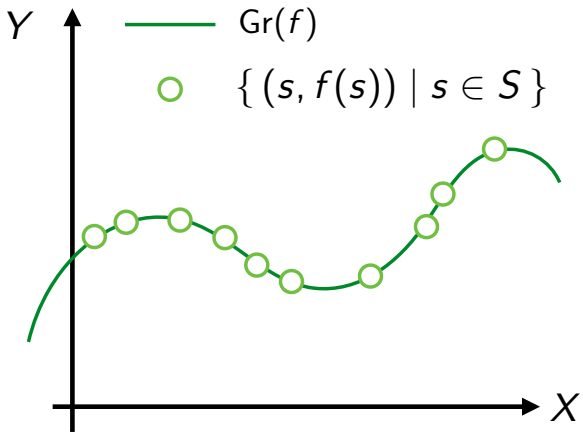


図 1　f のグラフ $\mathrm{Gr}(f)$ とサンプル

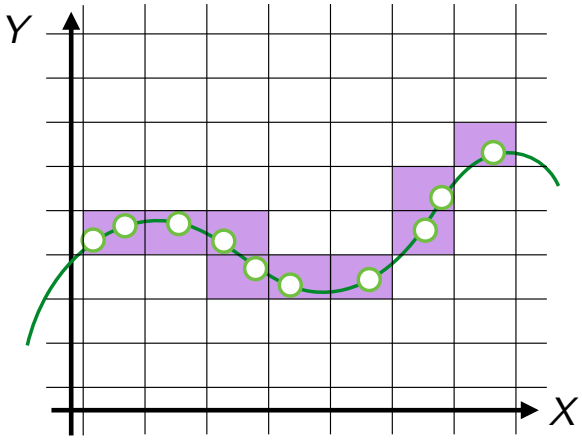


図 2　分割して対応 F を取り出す

定理 4 ([1, Theorem 3.10])**.** 対応 F が $\mathrm{Gr}(f) \subset F$ かつ homologically consistent 条件を満たすなら，F は homologically complete で F_* が定まり，$f_* = F_*$.

定理 5 ([1, Theorem 4.6])**.** 対応 F が homologically consistent 条件，対応 G が homologically complete 条件を満たし，さらに $G \subset F$ の時，F は homologically complete, G は homologically consistent で F_*, G_* が定まり，$G_* = F_*$.

我々はこれを箙の表現論の枠組みで捉え直し，更に様々な解析手法へと拡張した.

2　箙の表現論

以後，ベクトル空間の係数とホモロジー群の係数は全て体 K とする．**箙（えびら，***quiver***）** $Q = (Q_0, Q_1)$ とは，頂点集合が Q_0 で有向辺の集合が Q_1 で与えられる有向グラフのことである．箙 Q の頂点 $a \in Q_0$ から $b \in Q_0$ への辺 $\alpha \in Q_1$ を $\alpha\colon a \to b$ で表す.

箙 Q の**表現** $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$（もしくは簡単に (M_a, φ_α)）とは，各頂点 $a \in Q_0$ に有限次元ベクトル空間 M_a を割り当て，各辺 $\alpha\colon a \to b \in Q_1$ に線形写像 $\varphi_\alpha\colon M_a \to M_b$ を割り当てたものである．箙 Q の表現 $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ から表現 $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ への射 $f := \{ f_a\colon M_a \to M'_a \mid a \in Q_0 \}\colon M \to M'$ を

$$\forall \alpha\colon a \to b \in Q_1 \text{に対し，} \begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ \downarrow{\scriptstyle f_a} & & \downarrow{\scriptstyle f_b} \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array} \text{を可換にする.}$$

を満たすように定義すれば，表現の（加法）圏 $\mathrm{rep}(Q)$, 特に零対象・表現の同型・表現の直和が定まる.

表現 M は，$M \cong N \oplus N'$ なる任意の直和分解に対して常に $N = 0$ もしくは $N' = 0$ となるとき**直既約**という．Krull-Remak-Schmidt の定理によると，任意の表現 M は直既約な表現の直和

$M \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ に同型を除いて一意に分解出来ることが知られている．

$A_n(\tau_n)$ **型箙**（もしくは A_n **型箙**）とは，次のような n 個の頂点が $n-1$ 個の辺で結ばれた有向グラフのことである：

$$A_n(\tau_n): \overset{1}{\circ} \longleftrightarrow \overset{2}{\circ} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \overset{n}{\circ}.$$

ここで，$\longleftrightarrow$ は $\longrightarrow$ もしくは $\longleftarrow$ を表し，それぞれに記号 f, b (forward と backward) を用意し，$A_n(\tau_n)$ 型箙は f, b の $n-1$ 個の列 τ_n でその向き付けを表す．Gabriel の定理 [2] によると，A_n 型箙の任意の表現

$$M: M_1 \longleftrightarrow M_2 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow M_n$$

は，直既約な区間表現

$$\mathbb{I}[b,d]: 0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0 \longleftrightarrow \overset{b\text{ 番目}}{K} \overset{\mathrm{id}_K}{\longleftrightarrow} K \overset{\mathrm{id}_K}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{\mathrm{id}_K}{\longleftrightarrow} \overset{d\text{ 番目}}{K} \longleftrightarrow 0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0$$

の直和

$$M \cong \bigoplus_{1 \le b \le d \le n} \mathbb{I}[b,d]^{m_{b,d}}, \quad (m_{b,d} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}: \text{重複度}) \tag{1}$$

として同型を除いて一意に分解可能であることが知られている．位相的データ解析で中心的な役割を果たしているパーシステントホモロジー群

$$HX: HX_1 \to HX_2 \to \cdots \to HX_n$$

は，A_n 型箙の射の向きが全て揃った $\tau_n = ff\cdots f$ の特別な場合の表現（これを**パーシステント加群**と呼ぶ）として扱うことも出来，その直既約成分 $\mathbb{I}[b,d]$ は HX_b で発生し HX_{d+1} で消滅するホモロジー群の生成元を意味している．パーシステントホモロジー群の一意分解 (1) から定まる多重集合

$$D_M = \{\, (b,d) \mid 1 \le b \le d \le n,\ (b,d) \text{ は重複度 } m_{b,d} \text{をもつ} \,\},$$

またはこれを平面上に描画したものを**パーシステント図**と呼ぶ．この表示は視覚的にわかりやすく，パーシステントホモロジー群の応用においては頻繁に利用されている．

3　箙の表現による対応の誘導写像の別定義

図式 $HX \overset{p_*}{\leftarrow} HF \overset{q_*}{\to} HY$ は A_3 型箙の表現として直既約表現の直和に分解することが出来，$(HX \overset{p_*}{\leftarrow} HF \overset{q_*}{\to} HY) \cong \bigoplus_{1 \le b \le d \le 3} \mathbb{I}[b,d]^{m_{b,d}}$ と書ける．直既約分解は “良い” 基底の割り当てを選ぶことであり，例えば $\mathbb{I}[1,2]$ は HX の生成元を HY の 0 に割り当てている．従って，ここで非自明な割り当ては $\mathbb{I}[1,3] = (K \overset{\mathrm{id}_K}{\leftarrow} K \overset{\mathrm{id}_K}{\to} K)$ のみであり，他の直既約表現を HX から HY への 0 写像と見做すことによって，HX から HY への準同型写像 F_* を改めて定義することが出来る（図 3）．

この定義では定義 3 で述べた二条件は不要であり，またこの二条件を満たす時は，先行研究の定義と一致することが示せる．この定義の下で再び定理 4 及び定理 5 は成り立ち，可換梯子型パーシステント加群 [3] の議論を用いて非常に簡潔に証明した．

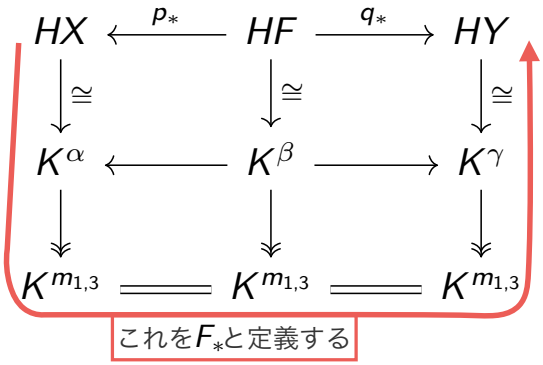


図 3　対応の誘導写像の別定義．1 行目から 2 行目は直既約分解．

上記の議論はこの形の図式に限らず，A_3 型箙の表現は向き付けに依らずに区間表現の直和に直既約分解することが可能であり，例えばジグザグ加群 $M_1 \to M_2 \leftarrow M_3$ において M_1 と M_3 の対応が重要な時，同様の定義で写像 $M_1 \to M_3$ を定義し，本質的な部分だけを取り出すことが出来る．

4　離散力学系のパーシステンス

直既約分解をして $\mathbb{I}[1,3]$ だけ見るという手法は，離散力学系の固有空間関手を用いた解析 [4] に別の視点を与えることが出来る．論文 [4] では，問題 1 に条件 $X = Y$ を追加した離散力学系の問題を設定している．すなわち，

問題 6. (X, d_X) を距離空間とする．連続写像 $f\colon X \to X$ が存在し，ある有限集合 $S \subset X$ 上の振る舞い $f|_S\colon S \to S$ だけ与えられている．この時，ホモロジー誘導写像 $f_*\colon HX \to HX$ の情報を得ることが出来るだろうか．

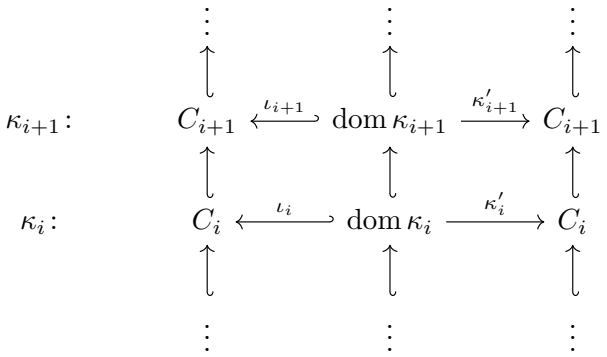
4.1　先行研究

先行研究では次のような解析手法を提案している．

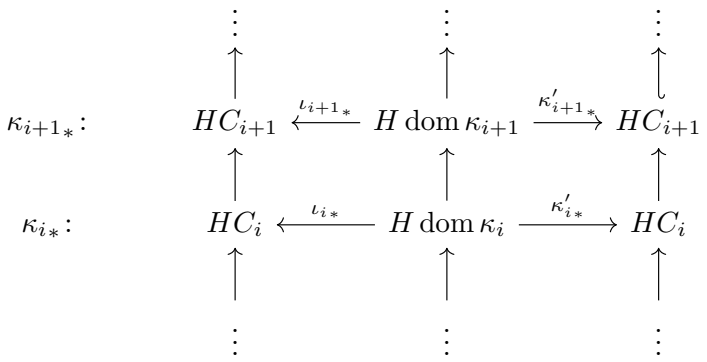
まず S の位相的形状を捉えるような，S の点を頂点に持つ 単体複体のフィルトレーション $\{ C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \}$（e.g. Čech フィルトレーション，アルファフィルトレーション等）を生成する．$f|_S$ を用いて各フィルター C_i の自己単体写像を誘導したいが，一般には部分写像[*1]（partial map）$\kappa_i\colon C_i \nrightarrow C_i$ を誘導する．この部分写像の列は，κ_i の定義域を $\operatorname{dom}\kappa_i$ と表記すれば，単体写像の組 (ι_i, κ_i') の列 $\{ C_i \xleftarrow{\iota_i} \operatorname{dom}\kappa_i \xrightarrow{\kappa_i'} C_i \}$ と見做せる．

[*1] 集合 X から Y への対応 F が部分写像であるとは，$x \in X$ に対し $F(x) := \{ y \in Y \mid (x,y) \in F \}$ と書いた時，任意の x について $F(x)$ が 1 点もしくは空集合であることをいう．つまり定義域が全体とは限らない写像．

注. この写像の組の列は，フィルトレーションの包含写像が誘導する写像によってフィルトレーションを成している．



この列にホモロジー関手を当てれば，$A_3(bf)$ 型箙の表現の列 $\{\, HC_i \overset{\iota_{i*}}{\leftarrow} H\operatorname{dom}\kappa_i \overset{\kappa'_{i*}}{\to} HC_i \,\}$ を得る：



(♣).

各フィルターでは表現圏 $\operatorname{rep}(A_3(bf))$ の対象であるが，“両端に同じベクトル空間を持つ” という制限を加えた充満部分圏 $\operatorname{Pairs}(\operatorname{Vect})$ の対象でもある，ということに注意すれば，次の関手を適用することが出来る．

定義 7. 関手 $E_\lambda\colon \operatorname{Pairs}(\operatorname{Vect}) \to \operatorname{Vect}$ を次で定義する．これを固有値 λ の**固有空間関手**と呼ぶ．

- 対象：$(V_1 \overset{f}{\leftarrow} V_2 \overset{g}{\to} V_1) \in \operatorname{obj}(\operatorname{Pairs}(\operatorname{Vect}))$
  $$\longmapsto E_\lambda(f,g) := \operatorname{Ker}(g-\lambda f)/(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \in \operatorname{obj}(\operatorname{Vect})$$
- 射：中央の線形写像から自然に誘導される．

f が恒等写像のとき，対象は g の通常の意味での固有値 λ の固有空間に対応づけられる．

この関手を（♣）に適用すれば，

$$E_\lambda(\iota_{1*},\kappa'_{1*}) \to E_\lambda(\iota_{2*},\kappa'_{2*}) \to \cdots \to E_\lambda(\iota_{n*},\kappa'_{n*})$$

であり，これは A_n 型箙の表現である．従ってこの表現を直既約分解すれば，各固有値に対してその固有ベクトルのパーシステンスをパーシステント図として描画することが出来る．以上が論文 [4] のあらましである．

4.2 本研究

本研究の手法を用いると，違ったアプローチで f_* を調べることが出来る．上の（♣）までは同様である．ここで各フィルターごとに直既約分解すると，この表現の列は

$$\Lambda : \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^1_{b,d}} \to \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^2_{b,d}} \to \cdots \to \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^n_{b,d}}$$

と同型であり，再び $\mathbb{I}[1,3]$ に制限することで，部分表現の列

$$\Lambda[1,3] : \mathbb{I}[1,3]^{m^1_{1,3}} \to \mathbb{I}[1,3]^{m^2_{1,3}} \to \cdots \to \mathbb{I}[1,3]^{m^n_{1,3}}$$

を得る．$\mathbb{I}[1,3] = (K \overset{\mathrm{id}_K}{\leftarrow} K \overset{\mathrm{id}_K}{\to} K)$ は K と見做しても情報は落ちないので，この列はベクトル空間の列

$$K^{m^1_{1,3}} \to K^{m^2_{1,3}} \to \cdots \to K^{m^n_{1,3}}$$

と見做すことが出来，これはパーシステント加群である．従って直既約分解することでパーシステント図を描画することが出来，両フィルトレーションで f によって繋がるホモロジーの生成元がどの程度持続しているかを調べることが出来る．

この手法では先行研究のように固有ベクトルを見ることは出来ないが，適用出来る範囲は広い．まず，固有空間関手を用いないので，両端に同じベクトル空間を持ってくる必要がない．従って，仮定で $f{\restriction_S}\colon S \to S$ としたところを $f{\restriction_S}\colon S \to f(S)$ に弱め，$f(S)$ で別のフィルトレーションを取ることが出来る（$f(S)$ が X 全体をサンプリング出来ていない時は代わりに $S \cup f(S)$ を取れば良い）．また先行研究の手法では固有値を決めてから解析する必要があるため，事前に写像 f のふるまいに予測をつけておかなければならないが，本研究の手法ではその必要は無い．

4.3 補足

4.3.1 $\Lambda[1,3]$ の構成について

$\Lambda[1,3]$ の構成には注意すべき点がある．直和から定まる標準的な射影，入射をそれぞれ

$$\pi_i\colon \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^i_{b,d}} \to \mathbb{I}[1,3]^{m^i_{1,3}}$$
$$\nu_i\colon \mathbb{I}[1,3]^{m^i_{1,3}} \to \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^i_{b,d}}$$

と表記し，Λ における射を

$$\Phi_i\colon \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^i_{b,d}} \to \bigoplus_{1\leq b\leq d\leq 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^{i+1}_{b,d}}$$

と表記する．この時，$\Lambda[1,3]$ における射

$$\Phi_i^{1:3}\colon \mathbb{I}[1,3]^{m^i_{1,3}} \to \mathbb{I}[1,3]^{m^{i+1}_{1,3}}$$

を

$$\Phi_i^{1:3} := \pi_{i+1} \circ \Phi_i \circ \nu_i$$

で定義する．この構成は自然に見えるが，実は “$\pi\colon \Lambda \to \Lambda[1,3]$” は表現圏の射ではない．即ち，

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{1\le b\le d\le 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^i_{b,d}} & \xrightarrow{\Phi_i} & \bigoplus_{1\le b\le d\le 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^{i+1}_{b,d}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{i+1}} \\ \mathbb{I}[1,3]^{m^i_{1,3}} & \xrightarrow{\Phi_i^{1:3}} & \mathbb{I}[1,3]^{m^{i+1}_{1,3}} \end{array}$$

は可換とは限らない．従って，各フィルターにおける直既約分解の同型の取り方によっては，別のパーシステント図が出力されてしまう可能性がある．この出力されるパーシステント図が意味を成すためには，どんな同型の取り方をしても同じパーシステント図が出力される必要があり，次の定理がそれを保証する．

定理 8. 2 つの射

$$\Phi_i, \Psi_i\colon \bigoplus_{1\le b\le d\le 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^i_{b,d}} \to \bigoplus_{1\le b\le d\le 3} \mathbb{I}[b,d]^{m^{i+1}_{b,d}}$$

が表現圏の射の圏で同型ならば，誘導される 2 つの射

$$\Phi_i^{1:3}, \Psi_i^{1:3}\colon \mathbb{I}[1,3]^{m^i_{1,3}} \to \mathbb{I}[1,3]^{m^{i+1}_{1,3}}$$

も同型である．

これは論文 [5] の議論を用いれば示すことが出来る．

4.3.2 安定性定理

パーシステント図が実データ解析において実用的であるためには，入力データにノイズが加わった時，出力されるパーシステント図もノイズ程度しか変動しないことが要求される [6, 7]．パーシステント図間には距離（bottleneck 距離）が定まっており，この距離はパーシステント加群間の距離（interleaving 距離）d_I と等しいことが知られている [8, 9]．先行研究の解析手法と同様に，本研究の解析手法においても次の安定性定理が成り立つ．

定理 9. $X \times X$ の距離を $d_{X\times X}((x_1,x_2),(x_1',x_2')) := \max\{d_X(x_1,x_1'), d_X(x_2,x_2')\}$ で与え，d_H を $d_{X\times X}$ から定まる Hausdorff 距離とする．また，使用する単体複体のフィルトレーションは Čech フィルトレーションもしくは Vietoris-Rips フィルトレーションとする．X の 2 つの有限部分集合 S, S' と，その上の写像 $h\colon S \to X, h'\colon S' \to X$ に対し，本研究の手法で誘導されるパーシステント加群をそれぞれ $M_h, M_{h'}$ とおけば，

$$d_I(M_h, M_{h'}) \le d_H(\mathrm{Gr}(h), \mathrm{Gr}(h'))$$

が成り立つ．

従って，S がノイズを含んでいても，その f による評価がノイズを含んでいても，得られるパーシステント加群及びパーシステント図には高々そのノイズ程度の影響しか与えない．

■**謝辞**　本研究は JSPS 科研費 JP16J03138 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow and P. Pilarczyk, *Inducing a Map on Homology from a Correspondence*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 1787–1801.

[2] 草場公邦．行列特論．裳華房．(1979).

[3] E. G. Escolar and Y. Hiraoka, *Persistence Modules on Commutative Ladders of Finite Type*, Discrete Comput. Geom. **55** (2016), 100–157.

[4] H. Edelsbrunner, G. Jabłoński and M. Mrozek, *The Persistent Homology of a Self-Map*, Found. Comput. Math. **15** (2015), 1213–1244.

[5] H. Asashiba, E. G. Escolar, Y. Hiraoka, and H. Takeuchi, *Matrix Method for Persistence Modules on Commutative Ladders of Finite Type*, arXiv:1706.10027.

[6] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer, *Stability of Persistence Diagrams*, Discrete Comput. Geom. **37** (2007), 103–120.

[7] F. Chazal, D. Cohen-Steiner, M. Glisse, L. J. Guibas, and S. Y. Oudot, *Proximity of Persistence Modules and their Diagrams*, In Proceedings of the Twenty-fifth Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG '09), ACM, New York, NY, USA, 237–246.

[8] M. Lesnick, *The Theory of the Interleaving Distance on Multidimensional Persistence Modules*, Found. Comput. Math., **15** (2015), 613–650.

[9] U. Bauer and M. Lesnick, *Induced Matchings of Barcodes and the Algebraic Stability of Persistence*, In Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG '14), ACM, New York, NY, USA, 355–364.

無限個の高次元周期再帰方程式の導出アルゴリズムについて

弓林　司 *(Tsukasa YUMIBAYASHI)
大妻女子大学社会情報学部

概要

n 周期再帰方程式とは任意の初期点が n 周期点となるような差分方程式である。本講演では周期再帰方程式の代数構造に注目した 1 つの基礎となる周期再帰方程式から無限個の周期再帰方程式を導出するアルゴリズムについて紹介する。

1 Introduction

n 周期再帰方程式[*1] F とは任意の初期点が n 周期点となるような差分方程式である [1][2]。

例 [1]:

- 2 周期再帰方程式:

$$X = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0, \quad x, X, a \in \mathbb{C} \tag{1}$$

- 5 周期再帰方程式:

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x, \quad x, y, X, Y \in \mathbb{C} \tag{2}$$

これらの周期性は以下のように “シンボリック” な計算によって確かめることができる：

- 2 周期再帰方程式:

$$x \to \frac{a}{x} \to \frac{a}{\frac{a}{x}} = x \tag{3}$$

- 5 周期再帰方程式:

$$\begin{aligned}(x,y) \to \left(\frac{1+x}{y}, x\right) \to \left(\frac{1+x+y}{xy}, \frac{1+x}{y}\right) \to \\ \to \left(\frac{1+y}{x}, \frac{1+x+y}{xy}\right) \to \left(y, \frac{1+y}{x}\right) \to (x,y)\end{aligned} \tag{4}$$

* E-mail: tsukasa.yumibayashi@otsuma.ac.jp

[*1] 広田, 矢作 [2] では単に再帰方程式（recurrence equation）と呼んでいたが、recurrence equation を単なる漸化式（recurrence relation）と誤解されることを避ける為、本公演では周期性を強調するこの呼び名を採用した。

シンボリックな計算とは、変数の代数構造以外、何も仮定していない計算のこととする[*2] 。本公演では周期再帰方程式が持つこの構造に注目し新たな周期再帰方程式を導出するアルゴリズムについて紹介したい。

周期再帰方程式は十分な不変量[*3] を持ち、重要な可積分系のクラスを与えると信じられてきた[*4] 。しかし、周期再帰方程式の例は最近まで [1][2][3][4] などで与えられた低い次元のものばかりで、しかも、数が多くなかった為か、或いは、職人芸的に発見され、その統一的構造が見えにくかった為か、ちゃんとした理由はわからないが、この方面の研究が大きく盛り上がることはなかった。そんな中で、[5] において不変周期点代数多様体（Invariant Variety of Periodic Points=IVPP）[6][7][8] を持つ高次元有理写像を用いて、（IVPP が明示的に与えられていれば原理的には無限個の）高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムが発見された。n 周期 IVPP とは、不変量を持つ有理写像の不変量一定面（等位面）であり、かつ、その等位面全体が n 周期点となるようなもののことである。

本公演では、周期再帰方程式がシンボリックな計算による周期性を持つことを利用し、複素変数（$x \in \mathbb{C}$）を陽に実 2 変数の形式（$x + iy, x, y \in \mathbb{R}$）で書き直し、改めて実変数を複素変数と見なす（$x, y \in \mathbb{C}$）こと（倍化）により高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムを紹介する。また、このアルゴリズムは繰り返し適用することが可能であり、これにより（原理的に）無限個の高次元周期再帰方程式が導出できることに注意する。特に、このアルゴリズムを IVPP を持つ有理写像に適用することで、本公演のアルゴリズムと [5] のアルゴリズムを組み合わせた、無限個の周期の高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムが得られる [9]。

2 IVPP について

本節では不変周期点代数多様体 (IVPP)[6][7][8]、特異点閉じ込め（Singularity Confinement=SC）[*5] [10][11] を用いた IVPP の導出アルゴリズム [12]、IVPP を用いた周期再帰方程式の導出アルゴリズム [5] について簡単にレビューする。

2.1 IVPP

d 次元有理写像

$$F : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^d \tag{5}$$

[*2] 可換な四則演算しか使っていないという意味で。

[*3] n 周期再帰方程式は、その周期性 $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_n = x_1$ より、$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ の対称多項式が不変量となる。

[*4] 例えば [3] が周期再帰方程式について詳しい。

[*5] SC はいわゆる連続系における “動く特異点を持たない” という Painlevé 性の離散系の対応物と考えられている。即ち、SC とは、ざっくばらんに言えば、例えば有理写像の分母の零点を初期点として写像を行えばナイーブには写像先は無限大となるが、うまく正規化することで、無限大を通過した点が初期点の情報を保ったまま有限の点へ返ってくる現象のことである。一時離散可積分性の為の判定テストとして期待されていた。

が p 個の不変量

$$\boldsymbol{r} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^p,\ \text{s.t. } \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}), \quad r(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

を持つとする。このとき n 周期点集合

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d \;\middle|\; (F^{(n)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = 0) \ \wedge\ (F^{(m)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} \neq 0,\ m \leq n) \right\} \tag{7}$$

が不変量のみの多項式の零点集合、即ち、代数多様体として与えられるとき

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d \;\middle|\; \boldsymbol{\gamma}^{(n)}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})) = 0 \right\}, \quad \boldsymbol{\gamma^{(n)}} \circ \boldsymbol{r} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d-p} \tag{8}$$

これを IVPP という。IVPP の重要な性質は以下の IVPP 定理に集約されている：

F を d 次元有理写像で p 個不変量を持つとする。条件 $p \geq d/2$ を満たすならば n 周期 IVPP と IVPP を成さない m 周期周期点集合[6] *は $^\forall n, m \in \mathbb{Z}$ に対し 1 つの写像に同時に存在しない。*

写像 (5) は選んだ初期点が含まれる等位面に制限される。逆に写像を等位面に制限した写像を構成することができる。従って、写像 (5) を n 周期 IVPP に制限した写像を構成すると、その写像は任意の初期点に対し n 周期点となる。即ち、写像を n 周期 IVPP へ制限して得られる写像は、n 周期再帰方程式となることがわかる。

2.2 SC を用いた IVPP の導出アルゴリズム

IVPP は更に重要な性質を持つ。それは特異点閉じ込め（SC）[10][11] を用いた IVPP の（帰納的）導出アルゴリズムの存在である [12]。このアルゴリズムと、前小節の結果を組み合わせると、このアルゴリズムは帰納的に（原理的に無限個）周期再帰方程式を与えることがわかる。本公演では簡単の為、以下の簡単な写像の場合を用いて、SC を用いた IVPP の導出アルゴリズムについて例示することにしよう。

- 2 次元 Möbius 写像 [13]:

$$X = x\frac{1-y}{1-x}, \quad Y = y\frac{1-x}{1-y}, \quad x, y, X, Y \in \mathbb{C} \tag{9}$$

及び、その 1 つの不変量

$$r(x, y) = r(X, Y) = xy \tag{10}$$

を考える。

- SC の為の初期点（ $\{\infty\}$ の原像）を不変量で径数付けた点を p_0 とする：

$$p_0 \in \{(1 - x = 0) \wedge (R = xy)\} \quad \Rightarrow \quad p_0 = (1, R), \quad R \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

*6 一般に等位面上の離散点集合を与える。

- 写像 (9) を初期点 (11) に対し繰り返し適用することで軌道を得る[*7] ：

$$p_0 = (1, R) \to (\infty, 0) \to (-1, -R) \to \\ \to \left(-\frac{1+R}{2}, -\frac{2R}{1+R}\right) \to \left(-\frac{1+3R}{3+R}, -\frac{R(3+R)}{1+3R}\right) \to \dots \tag{12}$$

- 次に $(\infty, 0)$ を起点として、n 回写像の後、再度 $(\infty, 0)$ に戻る為の係数に関する条件を見出すと、これが n 周期 IVPP の条件と等価であることがわかる：

$$\gamma^{(2)}(R) = none, \\ \gamma^{(3)}(R) = 3 + R, \quad \text{so on.} \tag{13}$$

- 最後に写像 (9) を n 周期 IVPP へ制限する。こうして得られた写像は n 周期再帰方程式となる：

$$X = \frac{x+3}{1-x}, \quad \text{so on.} \tag{14}$$

確認:

$$x \to \frac{x+3}{1-x} \to \frac{x-3}{1-x} \to x \tag{15}$$

3 アルゴリズム

本節では基礎方程式から高次元写像を導くためのアルゴリズムを与える。

F を d 次元 “複素” 写像 (5)

$$F : (x_1, \dots, x_d) \mapsto (X_1, \dots, X_d), \quad x_i, X_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, d$$

で p 個 “複素” 不変量 (6)

$$r_j := r_j(x_1, \dots, x_d) = r_j(X_1, \dots, X_d), \quad r_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, p$$

を持つものとする。

これら写像、及び、不変量は共に複素変数であるが、(5), (6) の表式ではそれが強調されていない。そこで複素変数を明示化する為に複素化写像

$$A_i^{(1)} : x_i \mapsto x_i + \sqrt{-1}x_{d+i}, \quad B_j^{(1)} : r_j \mapsto r_j + \sqrt{-1}r_{p+j}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, p \tag{16}$$

を定義する。この写像を用いることで F の複素変数の明示化は

$$F[1] : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_{2d}) \mapsto (X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, \dots, X_{2d}) \tag{17}$$

[*7] 初期点 p_0 の次の点は無限遠点となっているが、さらに次の点は有限点であり、かつ、初期点の情報を保持していることがわかる（詳細には立ち入らないが正規化の手続きが必要である）。

で与えられる。但し

$$X_i + \sqrt{-1}X_{d+i} = [F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i, \quad i = 1, \ldots, d \tag{18}$$

i.e.

$$X_i = [F[1](x_1, \ldots, x_{2d})]_i = \Re([F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i), \tag{19}$$

$$X_{d+i} = [F[1](x_1, \ldots, x_{2d})]_{d+i} = \Im([F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i), \qquad i = 1, \ldots, d \tag{20}$$

と置いた。

通常、我々は (18) を、$2d$ 次元 “実” 写像で $2p$ 個 “実” 不変量を持つものと考える。しかし、実変数 $(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d})$ を改めて複素変数と思うことで、$2d$ 次元複素写像、及び、$2p$ 個の複素不変量が得られる。

この操作は繰り返し用いることができることに注意する。従って、この操作を $^\forall k \in \mathbb{N}$ 回繰り返すことで、$2kd$ 次元複素写像、及び、$2kp$ 個の不変量を得ることができる：

$$X_i = \Re([F[k](A_1^{(k)}(x_1), \ldots, A_{kd}^{(k)}(x_{kd}))]_i), \tag{21}$$

$$X_{2kd+i} = \Im([F[k](A_1^{(k)}(x_1), \ldots, A_{kd}^{(k)}(x_{kd}))]_i), \quad i = 1, \ldots, 2kd \tag{22}$$

ここで、IVPP 定理の写像の次元と不変量の個数の関係の仮定 $p \geq d/2$ を思い出すと、この手続きを行ったとしても $2kp \geq 2kd/2$ となるだけで、仮定が不変に保たれていることがわかる。

4 例

本節では我々のアルゴリズムの使用例を与える。

4.1 2 周期再帰方程式

次の 2 周期再帰方程式 (1) を基礎方程式とする：

$$X = \frac{1}{x}$$

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}y$ に依る倍化写像は

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{23}$$

となる。

4.2　5 周期再帰方程式

次の 5 周期再帰方程式 (2) を基礎方程式とする：

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x$$

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}u, y \mapsto y + \sqrt{-1}v$ に依る倍化写像は

$$\begin{aligned} X &= \frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \\ U &= \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2}, \\ Y &= x, \\ V &= u \end{aligned} \tag{24}$$

となる。実際に (24) を シンボリックに写像すると

$$\begin{aligned} (x,u,y,v) &\to \left(\frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2}, x, u \right) \to \\ &\to \left(\frac{xy(1+x+y)+xv^2+yu^2-uv}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, -\frac{xv(1+x)+yu(1+y)+uv(u+v)}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2} \right) \to \\ &\to \left(\frac{x(1+y)+uv}{x^2+u^2}, -\frac{u(1+y)-xv}{x^2+u^2}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{xy(1+x+y)+xv^2+yu^2-uv}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, \frac{xv(1+x)+yu(1+y)+uv(u+y)}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)} \right) \to \\ &\to \left(y, v, \frac{x(1+y)+uv}{x^2+u^2}, -\frac{u(1+y)-xv}{x^2+u^2} \right) \to (x,u,y,v) \end{aligned} \tag{25}$$

を得る。即ち (24) が 5 周期再帰方程式となることが確かめられた。

4.3　2 次元 Möbius 写像

次の 2 次元 Möbius 写像 (9) を基礎方程式とする：

$$X = x\frac{1-y}{1-x}, \quad Y = y\frac{1-x}{1-y}$$

この写像は次の不変量 (10) を持っていた：

$$r(x,y) = xy$$

[13] で (8) の一般の IVPP を与える公式が与えられている：

$$\gamma^{(n)}(r) = r + \tan^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), \quad m = 1, 2 \ldots, n-1, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{26}$$

その幾つかを具体的に書くと

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(2)}(r) = none,\\
&\gamma^{(3)}(r) = 3 + r,\\
&\gamma^{(4)}(r) = 1 + r, \quad \text{so on.}
\end{aligned}$$

となる。

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}u, y \mapsto y + \sqrt{-1}v$ に依る倍化写像

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x(1-x)(1-y) - u^2(1-y) + uv}{(1-x)^2 + u^2},\\
U &= \frac{-xv(1-x) + u(1-y+uv)}{(1-x)^2 + u^2},\\
Y &= \frac{y(1-y)(1-x) - v^2(1-x) + uv}{(1-y)^2 + v^2},\\
V &= \frac{-yu(1-y) + v(1-x+uv)}{(1-y)^2 + v^2}
\end{aligned} \tag{27}$$

及び、不変量は

$$r(x, u, y, v) = xy - uv, \quad s(x, u, y, v) = xv + yu \tag{28}$$

となる。

ここで (27) の IVPP から周期再帰方程式を得る為に SC を用いた IVPP の導出を行おう：

1. SC の為の初期点（$\{\infty\}$ の原像）を不変量で係数付けた点を p_0 とする：

$$\begin{aligned}
p_0 \;=\; &\{(D_1^{(1)}(x, u, y, v) = 0) \wedge (D_1^{(2)}(x, u, y, v) = 0)\\
&\wedge (r(x, u, y, v) = R) \wedge (s(x, u, y, v) = S)\}\\
\Rightarrow p_0 = &\left(\frac{1}{4}(R \pm \sqrt{-1}S), -\frac{1}{4}(-S \pm (R-1)),\right.\\
&\left.\frac{\pm(R^2 - 3R - S^2) + \sqrt{-1}S}{\pm(1+R) + \sqrt{-1}S}, \frac{\pm 3S + \sqrt{-1}(R^2 - R + S^2)}{2(\pm(1+R) + \sqrt{-1}S)}\right)
\end{aligned} \tag{29}$$

2. 写像を初期点に対し繰り返し適用することで軌道を得る（簡単の為 x 成分のみ書き下すことにする）

$$\begin{aligned}
p_0 \to \infty \to \infty \to \frac{1}{4}(-R - 3 \pm \sqrt{-1}S) \to -\frac{\mp(R^2 + 10R + 5 + S^2) + 4\sqrt{-1}S}{4(\mp(R+3) + \sqrt{-1}S)}\\
\to \frac{R(R^2 + 21R + 35) + S^2(15 + R) \mp \sqrt{-1}S(R^2 + 6R + 9 + S^2)}{8(\pm(R+3) + \sqrt{-1}S)(\mp(R+1) + \sqrt{-1}S)} \to \ldots.
\end{aligned} \tag{30}$$

3. ∞ を起点として n 回写像の後、再度 ∞ に戻る為の係数に関する条件として n 周期 IVPP の条件を与える：

$$(\mp(R+3)+\sqrt{-1}S=0)\wedge(\mp(R+1)+\sqrt{-1}S=0),\quad \text{so on}, \tag{31}$$

4.3.1 注意

こうして得られた IVPP の条件 (31) は従来のアルゴリズムの構造からすれば 3 周期 IVPP の条件となるはずである。しかし実際は周期 12 を持つことがわかっている。このことは虚部 S を 0 にとれば倍化する前の写像 (9) のときの 3、及び、4 周期 IVPP の条件の共通部分を定義していることからも知ることができる。しかしこの現象の詳細な構造についてはまだよくわかっていない。こうして一見自明に見える我々のアルゴリズムであったが非自明な構造を持つことがわかった。

参考文献

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.

[2] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.

[3] 広田良吾, 高橋大輔, *"*差分と超離散*"*, 共立出版, 2003.

[4] A. Cima, A. Gasull, and V. Manõsa, *J. Difference Equations and Appl.*, **12**, 697716, 2006.

[5] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.

[6] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.

[7] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys*, **51** 063501, 2010.

[8] S. Saito and N. Saitoh, *"Invariant varieties of periodic points"* in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.

[9] T. Yumibayashi, *J. Difference Equations and Appl.*, **23**, 10811092, 2017.

[10] B. Grammaticos, A. Ramani, and V. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1825.
B. Grammaticos, A. Ramani, K. M. Tamizhmani, T. Tamizhmani, and A. S. Carstea, *Advances in Difference Equations*, Volume 2008, Article ID 317520
A. Ramani, B. Grammaticos, J.Satsuma, *Phys. Lett.* A 169 (1992) 323-328.

[11] S. Lafortune and A. Goriely, *J. Math. Phys.* **45**, 1191-1208 (2004).

[12] T. Yumibayashi, S. Saito, Y. Wakimoto, *Phys. Lett. A.*, **378**, 480-483, 2014.

[13] S. Saito, N. Saitoh, H. Harada, T. Yumibayashi and Y. Wakimoto, AIP Advances, AIP ID: 003306ADV, 2013.

ランダム方体複体における
パーシステントベッチ数の極限定理について

宮永　潤（Jun Miyanaga）*

共同研究者: 平岡　裕章 †

概要

ランダム方体複体とは, 基本方体と呼ばれる単位区間の有限直積を確率的に発生させて得られるモデルである. このモデルにおいて確率測度が定常性とエルゴード性を満たすとすると, システムサイズに対してベッチ数の大数の法則と中心極限定理が成立することが知られている. 本研究では, これらの結果がベッチ数の拡張であるパーシステントベッチ数においても成立することを示した.

1　研究の背景

ランダムトポロジーとは, 幾何学的対象にランダムネスを入れることで位相的な性質に関する量を確率変数とみなし, その振る舞いを研究する分野である. 本研究では, ランダム方体複体とよばれるモデルについて考える. このモデルについては 2 節と 3 節で詳しく述べるが, 方体集合 X の各基本方体 Q に対し $[0,1]$ 上へランダムに値 ω_Q を与え, 各 t に対してサブレベル集合 $X(t) := \{Q \in X : \omega_Q \leq t\}$ を考えることで得られる. 特に, $\mathbb{Z}^d$ 上の格子点や辺は 0 次元と 1 次元の基本方体であるので, このモデルは古典的なボンドパーコレーションモデルの自然な高次元化になっている. このランダム方体複体の上では 2 節で述べるようにホモロジーを考えることができ, ベッチ数を確率変数とみなすことができる. このランダム方体複体におけるベッチ数については平岡–角田 [1] により, 確率測度が定常性とエルゴード性を満たすとき, 以下の極限定理が成立することが示されている. ここで, $X^n(t) := X(t) \cap \Lambda_n$ はランダム方体複体 $X(t)$ を長さ $2n$ の d 次元立方体 $\Lambda_n = [-n, n]^d$ に制限したものとする.

定理 1.1 (平岡–角田, 2016[1])**.** ランダム方体複体 $X^n(t)$ に対し, $\hat{\beta}_q := \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]}{|\Lambda_n|}$ と定める. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_q(X^n(t))}{|\Lambda_n|} = \hat{\beta}_q \text{ a.s.}$$

が成立する.

定理 1.2 (平岡–角田, 2016[1])**.** 確率測度 P が直積測度であるとする. このとき, ある定数 σ^2 が存在し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathbb{E}\left[\left(\beta_q(X^n(t)) - \mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]\right)^2\right] = \sigma^2,$$

* 東北大学大学院理学研究科数学専攻 (〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6 - 3, E-mail: jun.miyanaga.r1@dc.tohoku.ac.jp)
† 東北大学材料科学高等研究所 (〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1, E-mail: hiraoka@tohoku.ac.jp)

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\left(\beta_q(X^n(t)) - \mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]\right) \overset{\text{law}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

が成立する．ここで, $\overset{\text{law}}{\Longrightarrow}$ は法則収束, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 の Gauss 分布である．

上記の 2 つの定理は, 定理 1.1 がベッチ数に対して大数の法則が成立することを, 定理 1.2 がベッチ数に対して中心極限定理が成立することを示している．本研究では, これらの結果をもとに 4 節で述べるパーシステントベッチ数への拡張を行った．

2　方体複体のホモロジー

まず, ランダムネスを入れる幾何学的対象である方体複体について簡単に説明する．詳細については [3] を参照されたい．単体複体が三角形の一般化である単体によって構成されるのと同様に, 方体複体は四角形の一般化である基本方体を用いて構成される．基本方体を定義するために, 以下の基本区間を定義する．

定義 2.1. 閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ が以下の形式で書けるとき，I を基本区間 (elementary interval) という．

$$I = [l, l] \text{ or } I = [l, l+1],\ (l \in \mathbb{Z}).$$

このとき, 幅がない基本区間 $[l,l]$ は退化しているといい, 幅のある基本区間 $[l,l+1]$ は非退化であるという．以後は記法を簡単にするために退化している基本区間に対して $[l] := [l,l]$ を用いるものとする．

ここで, $d \in \mathbb{N}$ を一つ固定する．本研究を通じて，d は後述する方体集合が埋め込まれている空間の次元を表すものとする．

定義 2.2. Q が基本方体 (elementary cube) であるとは, Q が基本区間の d 個の直積で表されることである．すなわち, $I_i \subset \mathbb{R}(1 \le i \le d)$ を基本区間として

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d.$$

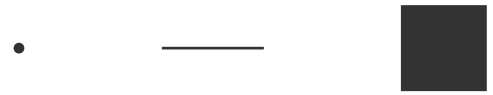
このとき，基本方体 Q の i 番目の成分を $I_i(Q) := I_i$ で表すものとする．

定義 2.3. 基本方体 Q の次元を, Q の非退化な基本区間の個数で定める．すなわち，

$$\dim Q := \#\{1 \le i \le d \ : I_i(Q) \text{ は非退化な基本区間 }\}.$$

ここで, $\#$ は集合の要素の個数を表す．

例 2.4. 以下に示す図はそれぞれ左から, 0 次元, 1 次元, 2 次元の基本方体である．これより次元の定義が我々の直感に適したものになっていることが分かる．



$[l,l] = [l]$　　$[l,l+1]$　　$[k,k+1] \times [l,l+1]$

図 1　基本方体の例：左から 0 次元, 1 次元, 2 次元の基本方体

この基本方体を用いて, 方体集合を定義する．$X \subset \mathbb{R}^d$ が方体集合であるとは, X が基本方体の和として表すことができるときをいう．

定義 2.5. 方体集合 X に対し, X 内の全ての k 次元基本方体と整数係数による有限形式和からなる自由 $\mathbb{Z}$ 加群を, k 次方体鎖群とよび $C_k^d(X)$ と表す. すなわち,

$$C_k^d(X) := \{c = \sum \alpha_i Q_i : Q_i \in \mathcal{K}_k^d(X), \alpha_i \in \mathbb{Z}\}.$$

定義 2.6. 基本方体 $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$ の非退化な基本区間を $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ とし, 各 $0 \leq j \leq 1$ の非退化な基本区間を $I_{i_j} = [l_j, l_j + 1]$ と表す. このとき,

$$Q_j^- := I_1 \times \cdots \times I_{i_{j-1}} \times [l_j] \times I_{i_{j+1}} \times \cdots \times I_d$$
$$Q_j^+ := I_1 \times \cdots \times I_{i_{j-1}} \times [l_j + 1] \times I_{i_{j+1}} \times \cdots \times I_d$$

として ∂_k を,

$$\partial_k(Q) := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} (Q_j^+ - Q_j^-)$$

と定める. この ∂_k を線形に拡張して得られる $\partial_k^X : C_k^d(X) \to C_{k-1}^d(X)$ を境界作用素と呼ぶ.

定義 2.7. 方体鎖群と境界作用素からなる系列, すなわち

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}^d(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} C_k^d(X) \xrightarrow{\partial_k^X} C_{k-1}^d(X) \longrightarrow \cdots$$

を方体鎖複体とよぶ.

定義 2.8. 方体鎖複体において,

$$Z_k(X) := \operatorname{Ker} \partial_k^X = \{c \in C_k^d(X) : \partial_k(c) = 0\}$$
$$B_k(X) := \operatorname{Im} \partial_{k+1}^X = \{c \in C_k^d(X) : \ ^\exists b \in C_{k+1}^d(X) \text{ s.t. } \partial_{k+1}(b) = c\}$$

とおき, $Z_k(X)$ を k 次サイクル群, $B_k(X)$ を k 次バウンダリ群と呼び, それぞれの元を k 次サイクルと k 次バウンダリと呼ぶ.

注意 2.9. 境界作用素の定義から $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ なので, $B_k(X) \subset Z_k(X)$ が成り立つ.

定義 2.10. k 次ホモロジー群 $H_k(X)$ を $Z_k(X)$ の $B_k(X)$ による剰余加群

$$H_k(X) := \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$$

で定める. このとき, 鎖群の係数として整数係数をとっていたので, 有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の構造定理より, 自由加群 $\mathbb{Z}^{\beta_k(X)}$ と捩れ加群 $\operatorname{Tor}_k(X)$ を用いて, k 次ホモロジー群 $H_k(X)$ は

$$H_k(X) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_k(X)} \oplus \operatorname{Tor}_k(X)$$

と書ける. ここで $\oplus$ は直和を表す. このとき, ホモロジー群の $H_k(X)$ の階数である $\beta_k(X)$ を X の k 次ベッチ数と呼ぶ.

3　ランダム方体複体について

ランダム方体複体とは, 前の節で定義した方体複体に以下のような確率空間を考えることでランダムネスを入れたものである. まず, 各基本方体に区間 $[0,1]$ 内の値をランダムに与えることを考える. このとき, 標本空間は $\Omega = \{\omega \colon \mathcal{K}^d \to [0,1]\} = [0,1]^{\mathcal{K}^d}$ となる. また, $\mathcal{F}$ を柱状集合からなる σ 加法族とする. このとき, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し, 次の 2 条件を満たす確率測度 P を入れる.

1. 平行移動不変性　任意の $A \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{Z}^d$ に対し, $P(\tau_x^{-1}A) = P(A)$ を満たす.
2. エルゴード性　$\tau_x^{-1}A = A$ ならば, $P(A) = 0$ または 1 である.

ここで, τ_x は $\tau_x\omega(Q) := \omega(-x+Q), \tau_x(A) = \{\tau_x\omega, \omega \in A\}$ であり, 平行移動を表す.

例 3.1. 上記の可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し以下のような周辺分布からなる直積測度は平行移動不変性とエルゴード性を満たす.

$$\begin{cases} P(\omega_Q = 0) = 1 & Q \in \mathcal{K}_l^d, l < k \\ P(\omega_Q \le t) = t & Q \in \mathcal{K}_k^d, 0 \le t \le 1 \\ P(\omega_Q = 1) = 1 & Q \in \mathcal{K}_l^d, k < l \end{cases}$$

このモデルは, l 次スケルトンに k 次の基本方体を確率的に発生させる. よって, パーコレーションモデルの高次元化を与える. 実際, $l = 0, k = 1$ のときは, ボンドパーコレーションモデルになる.

以上の準備をもとに, ランダム方体集合の定義を行う. このランダム方体集合についても方体集合のときと同様にして方体複体のホモロジーが定義でき, ベッチ数を確率変数とみなすことができる.

定義 3.2. 標本空間 Ω から標本 ω を一つ取る. $0 \le t \le 1$ に対し, ランダム方体集合 $X(t)$ を ω_Q の値が t 以下の基本方体を発生させたもの (サブレベル集合) として定義する. すなわち,

$$X(t) := \bigcup \{Q \in \mathcal{K}^d : \omega_Q \le t\}.$$

ここで, ランダム方体集合 $X(t)$ を定める変数 t を時刻と呼ぶことにする. また, 方体複体と同様に, 以後特に混乱の恐れがない場合は, 単に $X(t)$ でランダム方体複体も表すものとする.

このとき, ランダム方体複体 $X(t)$ は時刻 t に対して方体が単調に増大するので, t に関する方体複体の単調増大列であるフィルトレーション $\mathbb{X} = \{X(t)\}_{0 \le t \le 1}$ を考えることができる.

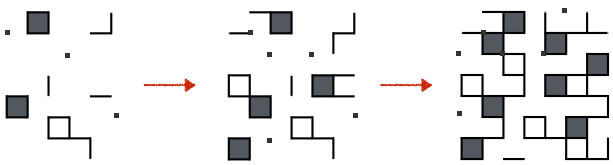


図 2　ランダム方体複体のフィルトレーション

4　パーシステントベッチ数について

先に示したようにランダム方体複体は時刻 t に関してフィルトレーションを定める事ができる．パーシステントベッチ数とは, そのようなフィルトレーションに対して定められるものであり, 穴の存続性についての情報をもっている．

定義 4.1. $\mathbb{X}$ をランダム方体複体のフィルトレーションとする．このとき, $0 \leq r \leq s \leq 1$ に対し, q 次パーシステントベッチ数 $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X})$ を時刻 r における q 次サイクル群 $Z_q(X(r))$ の, 時刻 s での q 次バウンダリ群との共通部分 $Z_q(X(r)) \cap B_q(X(s))$ による剰余加群の階数 (rank) として定義する．すなわち,

$$\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) := \operatorname{rank} \frac{Z_q(X(r))}{Z_q(X(r)) \cap B_q(X(s))}.$$

特に, r と s が一致するとき, その値を $t(= r = s)$ とおくと $\operatorname{rank} \dfrac{Z_q(X(t))}{Z_q(X(t)) \cap B_q(X(t))} = \operatorname{rank} \dfrac{Z_q(X(t))}{B_q(X(t))}$ より時刻 t でのランダム方体複体のベッチ数になる事が分かる．よって, パーシステントベッチ数はベッチ数の拡張になっている．また, q 次ベッチ数 $\beta_q(X(t))$ が時刻 t における q 次元の穴の個数を表していたのに対し, パーシステントベッチ数 $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X})$ は時刻 r から時刻 s まで存続する q 次元の穴の個数を意味する．

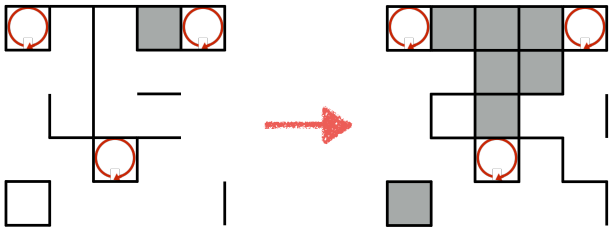


図 3　上の図のようなフィルトレーション $\mathbb{X}$ に対して時刻 r から時刻 s まで存続する穴は丸の書かれている部分である．よって, この図におけるパーシステントベッチ数の値は $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) = 3$ である．

5　主結果

5.1　パーシステントベッチ数に対する大数の法則

このランダム方体複体におけるパーシステントベッチ数について, 包含関係のある 2 つのランダム方体複体のフィルトレーションに対し, 次の結果が得られた．ここでフィルトレーションに包含関係があるとは, 各時刻におけるランダム方体複体に対して, 包含関係が成立していることである．

命題 5.1. ランダム方体複体のフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ に対し, 包含関係 $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ があるとする. すなわち, 各 $t \in [0,1]$ に対し $X(t) \subset Y(t)$ が成り立つとする．このとき,

$$\left|\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) - \beta_q^{r,s}(\mathbb{Y})\right| \leq \#\mathcal{K}(Y(s)) - \#\mathcal{K}(X(s)) + \#\mathcal{K}(Y(r)) - \#\mathcal{K}(X(r))$$

が成立する．つまり, パーシステントベッチ数の差の絶対値は時刻 r と時刻 s でのランダム方体複体に含まれる基本方体の差で上から評価できる．

命題 5.1 を用いることで, ランダム方体複体のパーシステントベッチ数について以下の大数の法則が成立するということを証明した.

定理 5.2. ランダム方体複体 $X(t)$ を Λ_n に制限したときのフィルトレーション $\mathbb{X}^n := \{X(t) \cap \Lambda_n\}_{0 \le t \le 1}$ に対し $\hat{\beta}_q^{r,s} := \lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]}{|\Lambda_n|}$ が存在し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)}{|\Lambda_n|} = \hat{\beta}_q^{r,s} \ \text{ a.s.}$$

が成立する.

更に, 定理 5.2 における $\hat{\beta}_q^{r,s}$ が正の値になる条件として, 次の結果が得られた.

命題 5.3. 長さ $2K$ で原点中心の d 次元立方体に含まれる方体集合を $\mathcal{L}_{0,K}$ とおく. また, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_{0,K}$ を含む任意の有限な方体集合とする. $\mathcal{L}$ に対し $\mathcal{L}$ 内のフィルトレーションを $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}$ と表し, $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}_{0,K}$ を除いた上でのフィルトレーションを $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}^{0,K}$ とする. ここで $\Omega_q(0,K,r,s)$ を $\mathcal{L}_{0,K}$ を含む任意の $\mathcal{L}$ に対し, $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}_{\mathcal{L}}) \ge 1 + \beta_q^{r,s}(\mathbb{X}_{\mathcal{L}}^{0,K})$ が成り立つ事象とする. このとき, ある正の整数 K が存在し, $P(\Omega_q(0,K,r,s)) > 0$ ならば, $\hat{\beta}_q^{r,s} > 0$ である.

5.2 パーシステントベッチ数に対する中心極限定理

ここで, ランダム方体複体モデルを次のように再構成する. まず, 基本方体で全ての基本区間の最小値が 0 になるものを $\mathcal{N}^d := \{N \in \mathcal{K}^d : \min I_i(N) = 0, 0 \le^{\forall} i \le d\}$ で表す. ここで, 各 $0 \le k \le d, k \in \mathbb{N}$ において $\binom{d}{k}$ 個の異なる k 次基本方体があるので, $\mathcal{N}^d$ に含まれる基本方体の個数は $\#\mathcal{N}^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} = (1+1)^d = 2^d$ となる.

このとき, d 次元正方格子 $x \in \mathbb{Z}^d$ と $N \in \mathcal{N}^d$ により, 基本方体 $Q = x + N$ が一意に定まる. この $\mathcal{N}^d$ を用いて, $\omega_{x,N} := \omega_{x+N} = \omega_Q$ として, $\{\omega_Q : Q \in \mathcal{K}^d\}$ を $\{\omega_x = (\omega_{x,N} : N \in \mathcal{N}^d) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ と書き直すことができる.

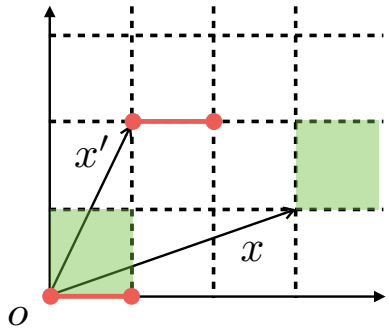


図 4　ランダム方体複体モデルの言い換え

この $\omega_{x,N}$ を用いることで, ランダム方体集合 $X(t)$ は, 以下のように書き直すことができる.

$$X(t) := \bigcup \{x + N : \omega_{x,N} \le t, x \in \mathbb{Z}^d, N \in \mathcal{N}^d\}$$

ここで, ω_0 の独立なコピーを $\left(\omega^*_{0,N} : N \in \mathcal{N}^d\right)$ とする. このとき ω_x に対して, ω^*_x を

$$\omega^*_x := \begin{cases} (\omega^*_{0,N} : N \in \mathcal{N}^d) & x = 0 \\ (\omega_{x,N} : N \in \mathcal{N}^d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると, $X(t)$ と同様にして $X^*(t)$ が定まる. ここで, $\mathcal{B} := \left\{B \subset \mathbb{Z}^d : B = (x + \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^d\right\}$ とする. また, $\preceq$ を辞書型順序とし原点 O に対し $x \preceq O$ なる格子点で添字付けられた ω_x によって生成される σ 加法族を $\mathcal{F}_o := \sigma\left(\{\omega_x : x \preceq O\}\right)$ で表す. 更に $\{H(\omega_x; B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ を B で添字付けられた実数値確率変数 H の族とし, $(D_oH)(B) := H(\omega; B) - H(\omega^*; B)$ で, B における $x = 0$ での違いによる確率変数 H の値の差を表す. このとき, 次に紹介する Penrose の定理 [2] が成立する.

定理 5.4 (Penrose, 2001[2])**.** 実数値確率変数の族 $\{H(\omega; B), B \in \mathcal{B}\}$ が次の 3 条件を満たすとする.

1. 並進不変性
   $H(\tau_x\omega; x + B) = H(\omega; B)$ が任意の $x \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}$ で成立する.
2. 安定性
   ある確率変数 $D_H(\infty)$ が存在して, 正方格子の列 $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ が $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たすならば, $(D_oH)(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} D_H(\infty)$ in Prob が成立する. ここで in Prob は確率収束を表す.
3. モーメント有界条件
   ある定数 $\gamma > 2$ が存在して, $\sup_{B\in\mathcal{B}} \mathbb{E}[|(D_oH)(B)|^\gamma] < \infty$ が成立する.

このとき, 正方格子の列 $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ が $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たすならば,

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(H(\omega; A_n) - \mathbb{E}\left[H(\omega; A_n)\right]\right)^2\right] \to \sigma^2$$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\mathbb{E}\left[H(\omega; A_n) - \mathbb{E}\left[H(\omega; A_n)\right]\right] \overset{\text{law}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

が成立する. ここで, $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[D_H(\infty)|\mathcal{F}_o\right]\right]$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 のガウス分布であり, $\overset{\text{law}}{\Longrightarrow}$ は法則収束を表す.

Penrose の定理の条件のうち, 並進不変性はパーシステントベッチ数の定義から, 有界モーメント条件は命題 5.1 と $\mathcal{N}^d$ の要素の個数から簡単に証明ができる. 安定性については次の命題を示すことで証明した.

命題 5.5. ランダム方体複体のフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ について, 任意の $0 \le t \le 1$ に対しその対称差 $X(t) \triangle Y(t)$ が有界集合であるとする. このとき, ある整数 θ_∞ が存在して, $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たす任意の正方格子の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, ある $n^\infty \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \ge n^\infty$ を満たす任意の n について

$$\beta^{r,s}_q(\mathbb{X}(A_n)) - \beta^{r,s}_q(\mathbb{Y}(A_n)) = \theta_\infty$$

が成立する. ここで, $\mathbb{X}(A_n), \mathbb{Y}(A_n)$ はそれぞれフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ を A_n に制限したものである.

この結果より確率 1 で $(D_oH)(A_n)$ の θ_∞ への収束が示されるので, 特に確率収束が従うことが分かる. よって, Penrose の定理 [2] の適用条件をパーシステントベッチ数がみたすので, パーシステントベッチ数に対しても次の中心極限定理が成立する.

定理 5.6. 整数 q $(0 \leq q < d)$ と $0 \leq r \leq s \leq 1$ を固定する．また, 確率測度 P が Ω 上の直積測度であるとする．このとき，ある定数 σ^2 が存在し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n) - \mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]\right)^2\right] = \sigma^2,$$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\left(\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n) - \mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]\right) \stackrel{\text{law}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

が成立する．ここで, $\stackrel{\text{law}}{\Longrightarrow}$ は法則収束, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 の Gauss 分布である．

参考文献

[1] Hiraoka, Y., Tsunoda, K.: Limit Theorems on Random Cubical Homology. arXiv:1612.08485 (2016).

[2] Penrose, M. D.: A Central Limit Theorem with Applications to Percolation, Epidemics and Boolean Model. Ann. Probab. **29**, 1515–1546 (2001).

[3] Kaczynski, T., Mishaikow, K., Mrozek, M.: Computational Homology. Springer-Verlag, New York (2004).

体心立方格子上の最近接モデルに対するレース展開

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)*†

1 導入

統計力学における課題の一つに相転移・臨界現象がある．これを解明するために，様々な確率モデルが考えられてきた．例えば，多孔質の物質における浸透現象はパーコレーションによって，強磁性・常磁性相転移は Ising 模型によって解析できる．パーコレーションでは格子上の各ボンドに対して開いている・閉じているという 2 つの状態を与え，開いたボンド同士を繋いでできる塊——クラスターを考える．Ising 模型でも格子上の各サイトに対してアップ・ダウンの 2 値をとるスピン変数を定義し，同じ値のスピンをつないでできる塊——クラスターを考える．それぞれのクラスターは開いている程度を表すパラメータ p，もしくは温度 T によって大きさが変化する．特に，臨界点 p_{c} および T_{c} をまたぐと巨大なクラスターが生成され，このとき相転移が起きる．実際，巨大なクラスターが存在する場合，パーコレーションでは浸透しない状態から浸透する状態へと変化し，また Ising 模型では巨視的にも磁石としての性質を示すようになる．

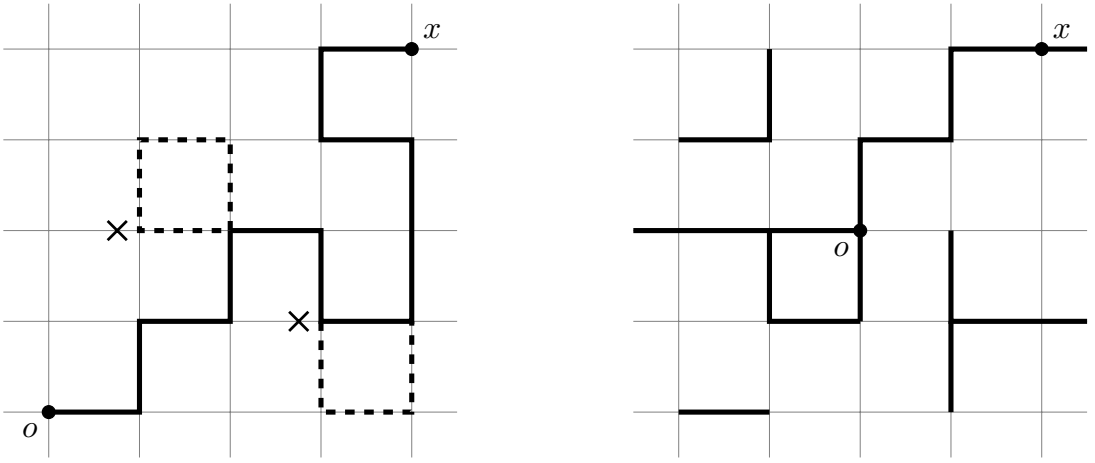
以上のモデル他に，自己回避歩行も相転移を示す．これは高分子鎖の配置を表すモデルとして知られている．自己回避歩行では原点から伸びる経路の本数 c_n を考え，それ（を最近接点の個数の n 乗で割ったもの）に対する母関数 $\chi_p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n/[\text{最近接点の個数}]^n$ を定義する．p をパラメータとみなして，この母関数 χ_p が発散する点（収束半径）が臨界点 p_{c} である．これを臨界点と呼ぶ理由はパーコレーションや Ising 模型の相転移と対比するとわかる．実際，p が小さいところでは長い経路からの寄与が小さいが，p が大きくなると長い経路からも効いてくる．ゆえに，p_{c} 付近では高分子鎖が巨大になっているとみなせる．以下では特に，自己回避歩行とパーコレーションの相転移・臨界現象について述べる．

ところで，自己回避歩行の χ_p（パーコレーションに対しては原点を含むクラスターの大きさの期待値に相当）は p_{c} の近傍で漸近的に[1] $\chi_p \asymp (p_{\mathrm{c}} - p)^{-\gamma}$ と振る舞うことが知られている．ここに現れた指数 γ を臨界指数という．モデルを考えている格子を取り換えれば，当然，臨界点 p_{c} は変わる．しかし，臨界指数 γ は格子のようなモデルの詳細によらず，空間次元や対称性といった少数の要素のみで決定されると信じられている．さらに，十分高次元においては臨界指数は簡単な値[2]に退化することが知られている．その簡単な値を平均場臨界指数と呼び，対応するランダム・ウォークの臨界指数に一致する．また，平均場臨界指数への退化が起こるぎりぎりの次元を

* 北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程
† kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp

1) 記号 '$\asymp$' は上下から同じオーダーで押さえられることを意味する．すなわち，Landau の記号を用いれば，関数 $f(p)$ と $g(p)$ に対して，$f \asymp g \iff \mathcal{O}(g(p)) \le f(p) \le \mathcal{O}(g(p))$ as $p \to p_{\mathrm{c}}$.

2) 整数値や分数値という意味．一般に臨界指数は小数で表されるような複雑な値をとる．



(a) 自己回避歩行　　**(b)** パーコレーション

図 1: モデルの概念図．自己回避歩行は自分自身と交わらないランダム・ウォークである．すなわち，破線のようにループができることを禁止している．パーコレーションは各ボンドに対して独立な確率で開と閉の状態を与えるモデルである．

上部臨界次元 d_{c} という．上部臨界次元は自己回避歩行で $d_{\mathrm{c}} = 4$，パーコレーションで $d_{\mathrm{c}} = 6$ と予想されている．

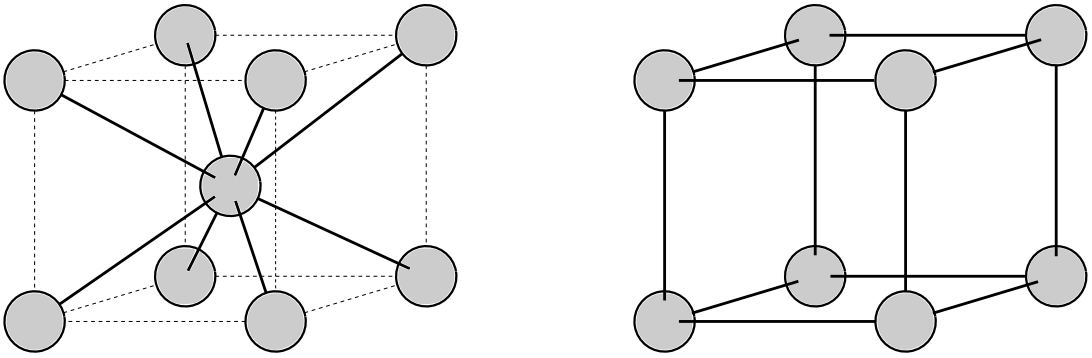
平均場臨界指数への退化は，最近接自己回避歩行に対しては原と Slade が $d \geq 5$ で証明した [4, 5]．一方で，最近接パーコレーションに対しては Fitzner と van der Hofstad が $d \geq 11$ で証明した [1, 2]．これらの論文で使われた手法がレース展開[3)]である．前者は上部臨界次元ぎりぎりのところで証明されているが，後者はそれより上であるため未解決である．それに加えて，前者でも後者でも，その論文は非常に長いため（$36 + 93$ 頁と $79 + 92$ 頁）初学者が理解するのは容易ではなかった．そこで，講演者らは体心立方格子上で解析を行った．後で述べるように，体心立方格子上ではランダム・ウォークの遷移確率が簡単になり，レース展開による解析の煩雑さを軽減する．その結果，60 頁程度の長さに抑えつつ，自己回避歩行に対しては $d \geq 6$ で，パーコレーションに対しては $d \geq 9$ で平均場臨界指数への退化を証明することができた [3]．以下では体心立方格子と最近接モデルの数学的な定義を述べたあと，その証明の概要を紹介する．

2　モデルの定義

2.1　体心立方格子

d 次元体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ とは，原点 $o = (0, \ldots, 0)$ を含み，かつ最近接点の集合 $\{\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \prod_{j=1}^{d} |x_j| = 1 \,\}$ を平行移動することによって生成される集合（図 2a）である．これは，単純立方格子 $\mathbb{Z}^d$ が最近接点の集合 $\{\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z} \mid \sum_{j=1}^{d} |x_j| = 1 \,\}$ を平行移動することによって生成されること（図 2b）と対比するとわかりやすい．単純立方格子の最近接点の数は $2d$ 個であるが，体心立方格子の最近接点の数は 2^d 個となることに注意されたい．また，点 $x, y \in \mathbb{L}^d$ が互いに隣接点，すなわち $\prod_{j=1}^{d} |x_j - y_j| = 1$ であることを $x \sim y$ で

3) 特にパーコレーションの論文では non-backtracking lace expansion という，通常のレース展開よりも複雑な展開方法を用いている．



(a) 体心立方格子 $\mathbb{L}^d$　　**(b)** 単純立方格子 $\mathbb{Z}^d$

図 2: 格子の概念図．実線は点同士が繋がっていることを表し，点線は繋がっていないことを表す．

表す．

上のように $\mathbb{L}^d$ を定義することによって，1 歩の変位に対する d 次元ランダム・ウォークの遷移確率が[4)]

$$D(x) \coloneqq \frac{1}{2^d}\mathbb{1}_{\{\,x\sim o\,\}} = \prod_{j=1}^{d}\frac{1}{2}\delta_{|x_j|,1}$$

と簡単な形になる．最後の表式は独立な d 個の 1 次元ランダム・ウォークの遷移確率に関する積になっている．1 次元ランダム・ウォークに対しては特に Stirling の公式[5)]を用いた評価ができる．すなわち，$2n$ 歩で原点に戻って来る確率は[6)]

$$D^{*2n}(o) = \underbrace{(D * \ldots * D)}_{2n\text{-fold}}(o) = \left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^d$$

と表されて，Stirling の公式によって二項係数のところを評価すれば

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^d \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\exp\left(\frac{1}{24n} - \frac{2}{12n+1}\right)\right]^d \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d \tag{1}$$

を得る．この不等式評価から，$D^{*2n}(o)$ は上から押さえられる．

さらに，ランダム・ウォークのループ ε_1 とバブル ε_2 とトライアングル ε_3 を

$$\varepsilon_j = \sum_{n=1}^{\infty} D^{*2n}(o) \times \begin{cases} 1 & [j=1] \\ (2n-1) & [j=2] \\ (2n-1)\,n & [j=3] \end{cases}$$

で定義する．これらの上界は (1) を用いて計算できる．その具体的な数値計算の結果を表 1 に示す．

[4)] $\delta_{\cdot,\cdot}$ は Kronecker デルタ，$\mathbb{1}_{\cdot}$ は指示関数．また ‘:=’ は右辺によって左辺を定義するという意味．

[5)] $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{12n+1} \leq \log\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n} \leq \dfrac{1}{12n}$.

[6)] 関数 $f, g\colon \mathbb{L}^d \to \mathbb{R}$ の畳み込みを $(f*g)(x) = \sum_{y\in\mathbb{L}^d} f(y)g(x-y)$ で表す．

2.2 ランダム・ウォークの臨界現象

モデルの定義を述べる前に，ランダム・ウォークを例としてその臨界指数が如何なる値になるかを示す．体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ における n 歩のランダム・ウォークの経路を，順序づけられた集合 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ で定義する．ただし，各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $\omega_i \in \mathbb{L}^d$ である．経路の歩数を $|\omega| = n$ と記す．原点 o から点 x に至る n 歩の経路全体を $\mathcal{W}_n(o,x) = \{\, \omega \mid \omega_0 = o,\ \omega_n = x \,\}$ で表す．原点 o から点 x に至る任意歩数の経路全体を $\mathcal{W}(o,x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n(o,x)$ で表す．

このとき，$p \in [0,1)$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して，（単純）ランダム・ウォークの Green 関数を

$$S_p(x) \coloneqq \sum_{\omega \in \mathcal{W}(o,x)} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D\left(\omega_j - \omega_{j-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(pD\right)^{*n}(x)$$

で定義する．総積の因子は経路 ω の変位が隣同士の点 $(\omega_j \sim \omega_{j-1},\, \forall j)$ であることを意味する．等号のところでは，ランダム・ウォークの経路は一歩々々の遷移が独立であることを用いた．また，ランダム・ウォークの帯磁率を $\chi_p^{\mathrm{RW}} \coloneqq \sum_{x \in \mathbb{L}^d} S_p(x)$ で定義する．p を 0 から大きくしていったとき，χ_p^{RW} が発散する点 p_{c} として臨界点を定義する．臨界点の近傍における帯磁率の振る舞い $\chi_p^{\mathrm{RW}} \asymp (p_{\mathrm{c}} - p)^{-\gamma}$ を特徴づける指数 γ が臨界指数である．ところが，単調収束定理により極限を交換できて

$$\chi_p^{\mathrm{RW}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$$

となるから，$p_{\mathrm{c}} = 1$ および $\gamma = 1$ とわかる．

2.3 自己回避歩行

自己回避歩行はランダム・ウォークに自分自身の経路と交わらないという条件を加えたモデルである．経路はランダム・ウォークのときと同様に定義する．そして，原点 o から点 x に至る n 歩の自己回避歩行の経路全体を $\Omega_n(o,x) = \{\, \omega \mid \omega_0 = o,\ \omega_n = x \ \&\ \omega_i \neq \omega_j \text{ if } i \neq j \,\}$ で表す．原点 o から点 x に至る任意歩数の自己回避歩行の経路全体を $\Omega(o,x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n(o,x)$ で表す．

このとき，$p \geq 0$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して，自己回避歩行の二点相関関数を

$$G_p(x) \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega(o,x)} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D\left(\omega_j - \omega_{j-1}\right)$$

で定義する．ランダム・ウォークのときと同様に，自己回避歩行の帯磁率と臨界点を

表 1: ランダム・ウォークのループ，バブル，トライアングルの上界．

d	3	4	5	6	7	8	9
ε_1	0.393216	0.118637	0.046826	0.020461	0.009406	0.004451	0.002144
ε_2	∞	∞	0.178332	0.044004	0.015302	0.006156	0.002678
ε_3	∞	∞	∞	∞	0.052689	0.012354	0.004148

$$\chi_p \coloneqq \sum_{x\in\mathbb{L}^d} G_p(x), \qquad\qquad p_{\mathrm{c}} \coloneqq \sup\{\, p\geq 0 \mid \chi_p<\infty \,\} \tag{2}$$

と定義する．n 歩の自己回避歩行の本数を c_n で表せば，帯磁率は

$$\chi_p = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sum_{\omega\in\Omega_n(o,x)} \prod_{j=1}^{n} D\left(\omega_j-\omega_{j-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^{dn}} p^n$$

と書き替えられる．ゆえに，これを $c_n/2^{dn}$ に対する母関数とみなすこともでき，臨界点は母関数の収束半径とも解釈できる．そのような収束半径は存在して，ランダム・ウォークの臨界点よりも大きくなることが知られている．これについての詳しい証明は文献 [8] などを参照されたい．

2.4 パーコレーション

点 $x,y\in\mathbb{L}^d$ を組にしたもの $\{x,y\}$ をボンドと呼ぶ．$\mathbb{L}^d$ 上のボンド全体の集合を $\mathcal{B}$ と書く．$\mathbb{L}^d$ 上の各ボンドに対して，開いている・閉じているという状態を独立に与えるモデルがパーコレーションである．すなわち，ボンド $\{u,v\}\in\mathcal{B}$ に対して互いに独立な Bernoulli 確率変数[7]

$$\xi(\{u,v\}) = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } pD(v-u), \\ 0 & \text{w.p. } 1-pD(v-u) \end{cases}$$

を与え，$\xi(\{u,v\})$ が 1 である場合を開いている，0 である場合を閉じていると称する．任意の数のボンドに対して ξ の結合分布を考える．その結合分布に対応する確率測度を $\mathbb{P}_p$ とし，その確率測度で定まる期待値を $\mathbb{E}_p$ と書く．また，$x\in\mathbb{L}^d$ から $y\in\mathbb{L}^d$ に至る自己回避歩行の経路 $\omega\in\Omega(x,y)$ が開経路であるとは，すべての $j\in\{0,1,\ldots,|\omega|\}$ に対して $\xi(\{\omega_{j-1},\omega_j\})=1$ が成り立つことをいう．x から y に至る開経路が存在するとき，x と y は繋がっているといい，$x\longleftrightarrow y$ と記す．

このとき，$p\in[0,2^d)$ と $x\in\mathbb{L}^d$ に対して，パーコレーションの二点相関関数を

$$G_p(x) \coloneqq \mathbb{P}_p\left(o\longleftrightarrow x\right) = \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\omega\in\Omega(o,x)} \{\,\omega \text{ は開経路}\,\}\right)$$

で定義する．帯磁率と臨界点は (2) によって定義する．原点 o から繋がっている点の全体を $\mathcal{C}_o$ としてそのサイズを $|\mathcal{C}_o|$ と表せば，帯磁率は

$$\chi_p = \mathbb{E}_p\left[\sum_{x\in\mathbb{L}^d} \mathbb{1}_{\{\,o\longleftrightarrow x\,\}}\right] = \mathbb{E}_p\left[|\mathcal{C}_o|\right]$$

と書き替えられる．ゆえに，これを o を含むクラスターのサイズの期待値とみなすこともでき，臨界点はそのクラスターが無限の大きさをもつような点とも解釈できる[8]．パーコレーションでも臨界点の存在が保証されているが，詳しくは文献 [6, 7] などを参照されたい．

---

[7] 'w.p.' は with probability の略.

[8] 厳密には「クラスターが無限の大きさになる確率が有限である」ことと「クラスターのサイズの期待値が無限大である」ことは異なる．しかしながら，今回考えているような格子上ではそれらの臨界点が一致することが知られている．

3　主結果

自己回避歩行とパーコレーションのそれぞれの χ_p に対して臨界指数 γ が平均場臨界指数に退化することを証明したい．ところで，bubble/triangle condition

$$G_p^{*n}(o) = \int_{[-\pi,\pi]^d} \hat{G}_p(k)^n \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} < \infty, \quad n = \begin{cases} 2 & [\text{自己回避歩行}] \\ 3 & [\text{パーコレーション}] \end{cases} \tag{3}$$

が成り立ち，かつこの量が十分小さければ，微分不等式による評価から $\gamma = 1$ となることが知られている [9]．ただし，$\hat{G}_p(k)$ は格子空間 $\mathbb{L}^d$ 上の関数 $G_p(x)$ の Fourier 変換 $\hat{G}_p(k) = \sum_{x\in\mathbb{L}^d} G_p(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ である．(3) から，γ が平均場の値に退化するための十分条件は次の主結果が成り立つことである．これは，$(1-\hat{D}(k))^{-1} = \lim_{p\uparrow 1} \hat{S}_p(k) =: \hat{S}_1(k)$ と書き替えてみればわかるとおり，$\hat{G}_p(k)$ が $\hat{S}_1(k)$ で近似できることを意味する．

定理 1 (赤外評価)**.** $\mathbb{L}^{d\geq 6}$ 上の自己回避歩行と $\mathbb{L}^{d\geq 9}$ 上のパーコレーションに対して，モデル依存の定数 $K \in (0,\infty)$ が存在して，$p \in [1,\infty)$ で一様に

$$\|(1-\hat{D})\hat{G}_p\|_\infty := \sup_{k\in[-\pi,\pi]^d} \big(1-\hat{D}(k)\big)|\hat{G}_p(k)| \leq K$$

と上から押さえられる．

多くの先行研究では赤外評価における p の初期値を 0 にとっている．主結果ではそれを 1 にとった．また，先行研究では $\hat{G}_p(k)$ と $\hat{S}_{\mu_p}(k)$ ($\mu_p = 1-\chi_p^{-1}$ は $p \in [0,p_\mathrm{c})$ に対して $\mu_p \in [0,1)$ の範囲を動くようにスケール変換したパラメータ) とを比べているが，主結果では $\hat{G}_p(k)$ と $\hat{S}_1(k)$ とを比べた．これらの点が本研究の特色であり，簡単化できた要因の一部でもある．特に $p \in [0,1)$ でも評価したい場合は次のようにすればよい．すなわち，$p_\mathrm{c} > 1$ だから $\chi_1 < \infty$ である．これと χ_p の単調性を用いると，$p \in [0,1)$ でも

$$\|(1-\hat{D})\hat{G}_p\|_\infty \leq 2\chi_1 < \infty$$

と上から押さえられる．

定理 1 を証明するには以下に示す 3 つの命題を証明する．それらの主張を述べるために，まず，3 つの関数 $\{\, g_i(p) \,\}_{i=1}^3$ を定義する．$g_1(p)$ と $g_2(p)$ は

$$g_1(p) := p, \qquad\qquad g_2(p) := \|(1-\hat{D})G_p(k)\|_\infty$$

とする．特に $g_2(p)$ が上から押さえられれば定理の題意が示される．$k,l \in [-\pi,\pi]^d$ と波数空間上の関数 $\hat{f}(l)$ に対して，離散ラプラシアンを 2 で割ったものを

$$\hat{\Delta}_k \hat{f}(l) := \frac{\hat{f}(l+k)+\hat{f}(l-k)}{2} - \hat{f}(l)$$

で定義する．不等式 [9, Lemma 5.7] を用いると，ランダム・ウォークの Green 関数の Fourier 変換 $\hat{S}_p(k)$ に対しては

$$|\hat{\Delta}_k \hat{S}_1(l)| \leq \hat{S}_1(k)^{-1} \left(\frac{\hat{S}_1(l+k)+\hat{S}_1(l-k)}{2} \hat{S}_1(l) + 4\hat{S}_1(l+k)\hat{S}_1(l-k) \right) =: \hat{U}(k,l)$$

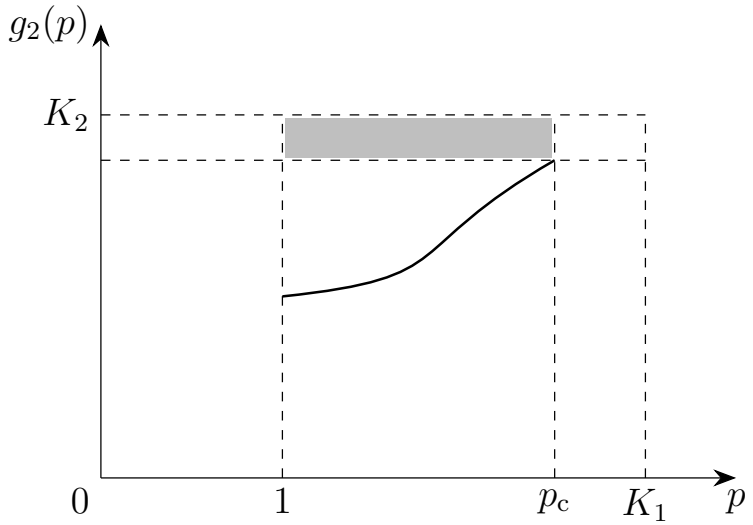


図 3: 定理 1 の証明の概念図．$g_2(p) \leq K_2$ を仮定したとき $g_2(p) < K_2$ となっている．初期値 $g_2(1)$ は K_1 より下にあり，かつ $g_2(p)$ は連続だから，$g_2(p)$ が越えられない禁止帯ができる．また，$g_1(p)$ でも同様の方法を適用することによって $p_c < K_1$ がわかる．

と評価できる．$g_3(p)$ は

$$g_3(p) \coloneqq \sup_{k,l\in[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{\hat{U}(k,l)} \times \begin{cases} |\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)| & [\text{自己回避歩行}] \\ |\hat{\Delta}_k (\hat{G}_p(l) p \hat{D}(l))| & [\text{パーコレーション}] \end{cases}$$

とする．ここで，$\hat{U}(0,l) = 0$ であるため，$k = 0$ の近傍では上限を $|k| \to 0$ での上限として意味づける．つぎに，3 つの命題について述べ，それによって定理 1 を証明する．

命題 1 (連続性)**.** 関数の組 $\{ g_i(p) \}_{i=1}^3$ はそれぞれ $p \in [1, p_c)$ 上で連続である．

命題 2 (初期条件)**.** 自己回避歩行では $\mathbb{L}^{d\geq 6}$ において，パーコレーションでは $\mathbb{L}^{d\geq 8}$ において，$\forall i = 1,2,3$, $\exists K_i < \infty$ (モデル依存の定数) s.t. $g_i(1) < K_i$.

命題 3 (Bootstrapping argument)**.** 自己回避歩行では $\mathbb{L}^{d\geq 6}$ において，パーコレーションでは $\mathbb{L}^{d\geq 9}$ において，$\forall p \in (1, p_c)$, $\forall i = 1,2,3$, $\exists K_i < \infty$ s.t. $g_i(p) \leq K_i \implies g_i(p) < K_i$ が成り立つ．ただし，$\{ K_i \}_{i=1}^3$ は命題 2 と同じ定数である．

***定理 1* の証明.** まず，$g_2(p)$ に対してはその連続性と初期値が $g_2(1) < K_2$ であることから，$\forall p \in [1, p_c \wedge K_1)$, $g_2(p) < K_2$ が成り立つ[9]．なぜなら，もし $g_2(p) > K_2$ なる p があったとすれば，$g_2(p)$ が連続であったことに反するからである．同様に，$g_1(p)$ に対しても，$\forall p \in [1, p_c)$, $g_1(p) = p < K_1$ が成り立つ．これは $p_c < K_1$ を意味する．したがって，$\forall p \in [1, p_c)$, $g_2(p) < K_2$ である（図 3）．□

上の 3 つの命題の中でも，特に命題 2 と命題 3 の証明でレース展開を用いる．そこで，以下ではレース展開の主張と，それを如何に使って命題を証明するかの概略を示す．連続性の証明は文献 [3] に譲る．

[9] ここで，$a \wedge b = \min\{ a, b \}$.

4　レース展開

ランダム・ウォークの Green 関数 $S_p(x)$ に対しては再生方程式 $S_p(x) = \delta_{o,x} + (pD * S_p)(x)$ が成り立つことが知られている．自己回避歩行とパーコレーションの二点相関関数 $G_p(x)$ に対してもある条件下で同様に再生方程式が成り立つ．それを与えるものがレース展開である．

命題 4 (レース展開)**.** $p < p_{\mathrm{c}}$ と $N \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して，モデルに依存する $\mathbb{L}^d$ 上の関数 $\{\pi_p^{(n)}\}_{n=0}^N$ (自己回避歩行では $\pi_p^{(0)} \equiv 0$) が存在して以下を満たす．すなわち，$\Pi_p^{(N)}(x) := \sum_{n=0}^N (-1)^n \pi_p^{(n)}(x)$ とおいたとき，

$$I_p^{(N)}(x) := \delta_{o,x} + \begin{cases} 0 & [\text{自己回避歩行}] \\ \Pi_p^{(N)}(x) & [\text{パーコレーション}] \end{cases}$$

$$J_p^{(N)}(x) := pD(x) + \begin{cases} \Pi_p^{(N)}(x) & [\text{自己回避歩行}] \\ \left(\Pi_p^{(N)} * pD\right)(x) & [\text{パーコレーション}] \end{cases}$$

に対して

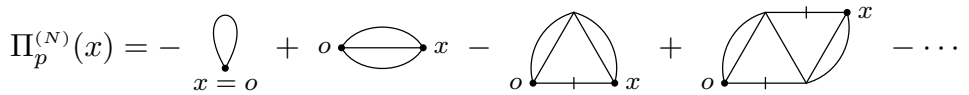
$$G_p(x) = I_p^{(N)}(x) + \left(J_p^{(N)} * G_p\right)(x) + (-1)^{N+1} R_p^{(N+1)}(x) \tag{4}$$

が成り立つ．ここで，剰余項 $R_p^{(N)}$ は

$$0 \le R_p^{(N)}(x) \le \left(\pi_p^{(N)} * G_p\right)(x) \tag{5}$$

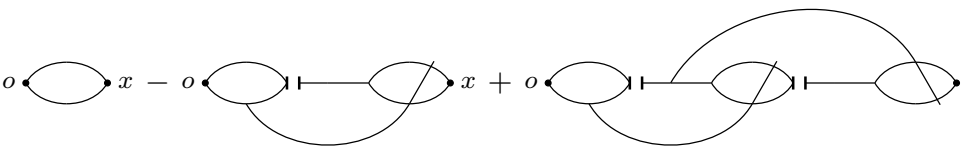
と評価できる．

この命題における $\Pi_p^{(N)}(x)$ はある種の図式（ダイアグラム）を用いて，自己回避歩行の場合

$\Pi_p^{(N)}(x) =$ 

$-\cdots$ (6)

と描かれ，パーコレーションの場合

$\Pi_p^{(N)}(x) =$ 

$-\cdots$ (7)

と描かれる．それぞれの図式の意味を大雑把にいうと，各線の一本々々は G_p を表している．交わっている点以外では互いに排除し合うという相互作用が働いており，相互作用は複雑な形の指示関数として表される．またラベルの付いていない頂点ではすべての点について足し合わせることを意味する．具体的には，例えば自己回避歩行の $\pi_p^{(2)}(x)$ は正確な表式で

$$\pi_p^{(2)}(x) = (1 - \delta_{o,x}) \sum_{\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)} \in \Omega(o,x)} \prod_{i=1}^{3} \left(p^{|\omega^{(i)}|} \prod_{j=1}^{|\omega^{(i)}|} D(\omega_j^{(i)} - \omega_{j-1}^{(i)}) \right) \times \prod_{i \ne j} \mathbb{1}_{\{\omega^{(i)} \cap \omega^{(j)} = \{o,x\}\}}$$

と書ける．これに含まれる指示関数を上からすべて 1 で評価すれば，$\pi_p^{(2)}(x) \le (1-\delta_{o,x})\, G_p(x)^3$ となるので，3 本の線からできていることがわかる．

さて，命題 2 と命題 3 は次の手順に従って証明できる．

1. 再生方程式 (4) の両辺に Fourier 変換を施す．その上で，交代級数 $\hat{\Pi}_p(k) \coloneqq \lim_{N\to\infty} \hat{\Pi}_p^{(N)}(k)$ が絶対収束すると仮定して，形式的に $\hat{G}_p(k)$ を評価する．
2. $\hat{G}_p(k)$ の評価を用いて $\{\, g_i(p) \,\}_{i=1}^3$ を評価する．その上界にはレース展開係数に対する Fourier 変換の 0 モード $\hat{\Pi}_p(0)$ および 0 モードと k モードとの差 $\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)$ が現れる．
3. $\hat{\Pi}_p(0)$ と $\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)$ を評価する．その際，自己回避歩行では劣加法性を，パーコレーションでは BK 不等式を用いて図式 (6), (7) を基本ダイアグラム（ループ，バブル，トライアングルなどと呼ばれる）に分解する．
4. 命題 2 では自明な不等式 $G_1(x) \le S_1(x)$ を，命題 3 では bootstrapping argument の仮定 $\hat{G}_p(k) \le K_2 \hat{S}_1(k)$ などを用いて，基本ダイアグラムをランダム・ウォークの量 (ε_1, ε_2, ε_3) で評価する．ここで，$g_2(p)$ と $g_3(p)$ はそれぞれ対応するランダム・ウォークの量との比で定義されていたことに注意されたい．
5. 表 1 の数値と $\{\, K_i \,\}_{i=1}^3$ に適当な数値（これは初期条件を満たすようにとる）を代入したものとを用いて，$\{\, g_i(p) \,\}_{i=1}^3$ の上界の具体的な数値を求める．そして，選んだ $\{\, K_i \,\}_{i=1}^3$ で実際に $\forall p \in [1, p_{\mathrm{c}}), \forall i = 1,2,3,\ g_i(p) < K_i$ が成り立つことを確かめる．
6. 最後に，選んだ $\{\, K_i \,\}_{i=1}^3$ に対して，手順 1 で仮定した収束性が成り立つことを確認する．

ここでは手順 1, 2 についてもう少し詳しく記す．

いま，$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\pi}_p^{(n)}(0)$ が十分小さくなるとして，

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\pi}_p^{(n)}(0) = 0, \qquad\qquad \hat{I}_p(k) \coloneqq \lim_{N\to\infty} \hat{I}_p^{(N)}(k) > 0$$

とみなす．この第 1 式によって，剰余項 (5) の Fourier 変換の 0 モードは

$$0 \le \hat{R}_p^{(N)}(0) = \sum_{x\in\mathbb{L}^d} R_p^{(N)}(x) \le \hat{\pi}_p^{(N)}(0)\chi_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

と収束する．$\hat{J}_p(k) \coloneqq \lim_{N\to\infty} \hat{J}_p^{(N)}(k)$ とおく．このとき，(4) の両辺の Fourier 変換をとって $k = 0$ を代入すると

$$\chi_p = \hat{G}_p(0) = \hat{I}_p(0) + \hat{J}_p(0)\chi_p = \hat{I}_p(0) \times \begin{cases} (1 - p - \hat{\Pi}_p(0))^{-1} & [\text{自己回避歩行}] \\ (1 - p - p\hat{\Pi}_p(0))^{-1} & [\text{パーコレーション}] \end{cases} \tag{8}$$

となる．3 番目の等号では等式を χ_p について解いた．最後の表式で p について解き，$\chi_p \ge 0$ と $\hat{I}_p(0) > 0$ を思い出せば，

$$g_1(p) \le \begin{cases} 1 - \hat{\Pi}_p(0) & [\text{自己回避歩行}] \\ (1 + \hat{\Pi}_p(0))^{-1} & [\text{パーコレーション}] \end{cases}$$

を得る．また，(8) の途中式から

$$\hat{G}_p(k) = \frac{\hat{I}_p(k)}{1-\hat{J}_p(k)} = \frac{\hat{I}_p(k)}{\hat{J}_p(0)-\hat{J}_p(k)+\hat{I}_p(0)/\chi_p} \le \frac{\hat{I}_p(k)}{\hat{J}_p(0)-\hat{J}_p(k)}$$

となる．2 番目の等号では $1 = \hat{J}_p(0) + \hat{I}_p(0)/\chi_p$ を用いた．この上界を $\hat{S}_1(k) = (1-\hat{D}(k))^{-1}$ で割ることによって，

$$g_2(p) \le \begin{cases} \sup\limits_{k\in[-\pi,\pi]^d} \left(1 + \dfrac{\hat{\Pi}_p(0)-\hat{\Pi}_p(k)}{1-\hat{D}(k)}\right)^{-1} & \text{[自己回避歩行]} \\ \sup\limits_{k\in[-\pi,\pi]^d} \left(1 + \dfrac{1}{\hat{I}_p(k)}\dfrac{\hat{\Pi}_p(0)-\hat{\Pi}_p(k)}{1-\hat{D}(k)}\right)^{-1} & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

を得る．また，$g_3(p)$ については [9, Lemma 5.7] を援用して評価する．

参考文献

[1] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Generalized approach to the non-backtracking lace expansion. *Probab. Theory Related Fields*, (2016).

[2] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$. *Electron. J. Probab.*, Vol. **22**, no. 43, (2017).

[3] S. Handa, Y. Kamijima and A. Sakai. A survey on the lace expansion for the nearest-neighbor models on the BCC lattice. Preprint (2017). arXiv:1712.05573.

[4] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **147**, pp. 101–136, (1992).

[5] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. **4**, pp. 235–327, (1992).

[6] 樋口保成『新版 パーコレーション』（遊星社，2011 年）

[7] G. Grimmett. *Percolation*. 2nd ed., Springer, (1999).

[8] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser, Boston, (1993).

[9] G. Slade. *The Lace Expansion and its Applications*. Springer, (2004). Lecture Note in Mathematics 1879.

索 引

■ア行

相川 勇輔, 39
相原 祐太, 333
浅原 啓輔, 275
荒武 永史, 423
石川 彩香, 407
石川 勲, 141
板倉 恭平, 13
稲垣 友介, 181
伊縫 寛治, 287
井上 翔太, 55
植田 優基, 413
植松 哲也, 121
榎園 誠, 23
大森 源城, 19
岡部 峻典, 163
岡本 健太郎, 147

■カ行

数川 大輔, 219
加藤 正輝, 105
加藤 義久, 131
上島 芳倫, 559
神田 智弘, 395
草野 元紀, 383
久野 恵理香, 231
元良 直輝, 79
鯉江 秀行, 157
小池 開, 349
高坂 太智, 61
小林 和志, 241
小林 俊介, 477
小山 剛史, 373
顧 玉杰, 439

■サ行

齋藤 耕太, 75
佐竹 翔平, 431
佐藤 純, 3
佐藤 直飛, 177
佐野 薫, 89
澤田 すみれ, 515
澤田 友佑, 279
須山 雄介, 49

■タ行

平良 晃一, 299
高橋 典寿, 201
竹井 優美子, 313
竹内 博志, 535
只野 之英, 325
田中 悠太, 467
田中 吉太郎, 447
玉岡 優一, 303
Cho Joseph, 215
陳 潔, 205
辻栄 周平, 509
寺本 圭佑, 171
照屋 靖志, 211
藤堂 真登, 443
冨永 隼人, 531
Tran Tan Nhat, 457

■ナ行

中井 拳吾, 403
中島 啓貴, 227
中村 憲史, 317
中村 謙太, 309
中屋敷 亮太, 27
長岡 高広, 257
野坂 康祐, 191

■ハ行

Hakim Denny Ivanal, 359
原 健太郎, 251
原 宇信, 363
朴 佳南, 367
福田 一貴, 267
藤田 直樹, 95
藤田 遼, 65
藤野 弘基, 339
船川 大樹, 487
古屋 貴士, 283

■マ行

松澤 陽平, 85
松原 祐貴, 115
松雪 敬寛, 187
宮永 潤, 551
村井 涼, 521

■ヤ行

山形 颯, 497
雪田 友成, 235
弓林 司, 543

■ラ行

Rodríguez Mulet Albert, 293

■ワ行

渡邉 天鵬, 387