| | |
|---|---|
| Title | 2003年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures 北海道大学理学部数学教室 |
| Author(s) | Shimada, I.; Tonegawa, Y. |
| Description | 特別講演 4/3(木) 16:00-17:00 北大理学部4号館508室 Gregory K, Sankaran(University of Bath), Abelian surfaces with odd bilevel structure 4/3(木) 16:30-17:30 北大理学部3号館508室 Charles Bu (Wellesley College), Inhomogeneous Boundary Value Problem for the nonlinear Schr¥''odinger Equations 4/16(水) 16:00-17:00 北大理学部4号館508室 Alastair King (University of Bath), G-constellations and deformations of the generic orbit 6/23(月) 14:45-15:45 北大理学部3号館508室 岡田　正己(都立大)，エネルギー保存偏微分方程式のウェイヴレット展開によるハミルトン力学系表示とその応用 7/25(金) 17:00-18:00 北大理学部4号館508室 本堂　毅（東北大学），携帯電話による間接被爆をめぐって 12/8(月) 14:45-16:15 北大理学部8号館302室 山田雅博氏（岐阜大学），Carleson type measures on parabolic Bergman spaces 12/12(金) 16:30-18:00 北大理学部4号館508室 森吉昭博（北大・工学研究科），空気中の浮遊有機物の排出源毎の寄与率の推定 12/15(月) 16:30-17:30 北大理学部3号館508室 Eric Bedford(Indiana University), Dynamics of Birational mappings of the plane 1/28(水) 15:00-16:00 北大理学部3号館508室 Filippo Bracci（ローマ第２大学），Dynamics of holomorphic self-maps of bounded domains 2/4(水) 16:30-17:30 北大理学部3号館512室 山崎洋平（大阪大学），「広義重積分体系の整備にルベーグ積分は必要か？また十分か？」 2/19(木) 15:00-16:00 北大理学部3号館508室 Jorg Schurmann（ミュンスター大学），""Milnor classes and vanishing cycles"" 3/11(木) 16:30-17:30 北大理学部3号館508室 KHANIN, Kostya (Newton 研究所／京都大），Burgers Turbulence and Random Lagrangian Dynamics 3/23(火) 15:00-16:00 北大理学部3号館508室 伊藤敏和（龍谷大学），On real transverse sections of holomorphic foliations 3/23(火) 16:30-17:30 北大理学部3号館508室 Xavier Gomez-Mont (CIMAT and RIMS), Formula for Computing Indices of Vector Fields on Singular Varieties 談話会 5/14(水) 16:00-17:00 北大理学部4号館508室 坂上　貴之（北大），極渦のある球面上の渦層の運動 7/2(水) 15:00-16:00 北大理学部4号館508室 小林　亮（北大・電子研），真性粘菌変形体の運動と形態形成のモデリングについて 7/2(水) 16:30-17:30 北大理学部4号館508室 森田　茂之（東京大），種々のモジュライ空間のコホモロジーについて--Riemann 面、 metric グラフ、二次形式-- 11/26(水) 15:00-16:00 北大理学部4号館508室 吉田知行（北大・理），群論の古典的問題のその後 11/26(水) 16:30-17:30 北大理学部4号館508室 名和範人（名古屋大），非線形 Schr¥""odinger 方程式の爆発解 |
| Citation | Hokkaido University technical report series in mathematics, 82, 1-50 |
| Issue Date | 2004-01-01 |
| DOI | https://doi.org/10.14943/629 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/687 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 2003danwakai001.pdf |

# ２００３年度談話会・特別講演
# アブストラクト集

## Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by I. Shimada and Y. Tonegawa

Series #82. June, 2004

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.

# HOKKAIDO UNIVERSITY
# TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#55 T. Ozawa and H.-F. Yamada (Eds.), 1997 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 83 pages. 1998.

#56 Y. Giga, 界面ダイナミクス-曲率の効果, 講義録, 48 pages. 1998.

#57 J. Inoue (Ed.), 第 7 回関数空間セミナー報告集, 138 pages. 1999.

#58 Y. Giga and R. Kobayashi (Eds.), Abstracts of Sapporo Symposium on Anisotropic Effects in a Crystal Growth Problem and its Mathematical Analysis (SAM), 51 pages. 1999.

#59 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of thee 24th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 61 pages. 1999.

#60 I. Tsuda and N. Kawazumi (Eds.), 1998 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 55 pages. 1999.

#61 T. Ozawa (Ed.), Proceedings of Sapporo Guest House Minisymposium on Nonlinear Wave Equations, 67 pages. 1999.

#62 S. Miyajima, T. Takeo and J. Inoue (Eds.), 第 8 回関数空間セミナー報告集, 96 pages. 2000.

#63 K. Ono and N. Honda (Eds.), 1999 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 43 pages. 2000.

#64 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 25th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 55 pages. 2000.

#65 H. Nakamura (Ed.), ガロア・タイヒミュラー群の LEGO 理論, 37 pages. 2000.

#66 J. Inoue et al (Eds.), 関数空間セミナー報告集 2000, 134 pages. 2001.

#67 Y. Giga and H. Yamashita (Eds.), 2000 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 61 pages. 2001.

#68 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 26th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2001.

#69 M. Matsumoto, 基本群へのガロア作用, 50 pages. 2001.

#70 T. Nakazi (Ed.), 第 10 回 関数空間セミナー報告集, 97 pages. 2002.

#71 Y. Giga (Ed.), Surface Evolution Equations - a level set method, 223 pages. 2002.

#72 T. Suwa and T. Yamanouchi (Eds.), 2001 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 44 pages. 2002.

#73 T. Jimbo, T. Nakazi and M. Hayashi (Eds.), 第 11 回 関数空間セミナー報告集, 135 pages. 2003.

#74 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo and G. Nakamura (Eds.), Partial Differential Equations, 51 pages. 2002.

#75 D. Matsushita (Ed.), Proceedings of the workship "Hodge Theory and Algebraic Geometry", 191 pages. 2003.

#76 M. Hayashi and G. Ishikawa (Eds.), 2002 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 34 pages. 2003.

#77 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura(Eds.), Proceedings of the 28th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2003.

#78 S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada (Eds.), The 12th MSJ-IRI "Singularity Theory and Its Applications" ABSTRACTS, 291 pages. 2003.

#79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 "Evolution Equations", 31 pages. 2003.

#80 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第１２回関数空間セミナー報告集, 122 pages. 2004.

#81 Y. Giga, S. Izumiya and K. Deguchi (Eds.), Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003, 48 pages. 2004.

# ２００３年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次


1. Gregory K, Sankaran 氏 (University of Bath)
Abelian surfaces with odd bilevel structure ........ 1

2. Charles Bu 氏 (Wellesley College)
Inhomogeneous Boundary Value Probrem for the Nonlinear Schrödinger Equation ........ 2

3. Alastair King 氏 (University of Bath)
*G*-constellations and deformations of the generic orbit ........ 3

4. 坂上　貴之　氏 (北海道大)
極渦のある球面上の渦層の運動 ........ 4

5. 岡田　正己　氏 (東京都立大)
エネルギー保存偏微分方程式のウェイヴレット展開によるハミルトン力学系表示とその応用 ... 5

6. 小林　亮　氏 (北海道大)
真性粘菌変形体の運動と形態形成のモデリングについて ........ 6

7. 森田　茂之　氏 (東京大)
種々のモジュライ空間のコホモロジーについて —Riemann 面、metric グラフ、二次形式 — ... 7

8. 本堂　毅　氏 (東北大)
携帯電話による間接被爆をめぐって ........ 14

9. 吉田　知行　氏 (北海道大)
群論の古典的問題のその後 ........ 15

10. 名和　範人　氏 (名古屋大)
非線形 SCHRÖDINGER 方程式の爆発解 ........ 21

11. 山田　雅博　氏 (岐阜大)
Carleson type measures on parabolic Bergman spaces ........ 39

12. Eric Bedford 氏 (Indiana University)
DYNAMICS OF BIRATIONAL MAPPINGS OF THE PLANE ........ 41

13. Filippo Bracci 氏 (Univ. di Roma " Tor Vergata ")
DYNAMICS OF HOLOMORPHIC SELF-MAPS OF BOUNDED DOMAINS IN $\mathbb{C}^n$ ........ 42

14. 山崎　洋平　氏 (大阪大)
広義重積分体系の整備にルベーグ積分は必要か？また十分か？
(FCSセミナー：微分積分学のスリムな再構成 … そして「完備性」の分離) ........ 43

15. Jörg Schürmann 氏 (Universität Münster)
MILNOR CLASSES AND VANISHING CYCLES ........ 47

16. Khanin Kostya 氏 (Newton Institute Cambrige／京都大)
Burgers Turbulence and Random Lagrangian Dynamics ........ 48

17. 伊藤　敏和　氏 (龍谷大)
On real transverse sections of holomorphic foliations ........ 49

18. Xavier Gómez-Mont 氏 (CIMAT and RIMS)
Formula for Computing Indices of Vector Fields on Singular Varieties ........ 50

# ２００３年度　談話会・特別講演一覧

1. ４月　３日（木）* Gregory K, Sankaran 氏（University of Bath）　Abelian surfaces with odd bilevel structure
2. ４月　３日（木）* Charles Bu 氏（Wellesley College）　Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equation
3. ４月１６日（水）* Alastair King 氏（University of Bath）　*G*-constellations and deformations of the generic orbit
4. ５月１４日（水）* 坂　上　貴　之　氏（北海道大）　極渦のある球面上の渦層の運動
5. ６月２３日（月）* 岡　田　正　己　氏（東京都立大）　エネルギー保存偏微分方程式のウェイヴレット展開によるハミルトン力学系表示とその応用
6. ７月　２日（水）* 小　林　　亮　氏（北海道大）　真性粘菌変形体の運動と形態形成のモデリングについて
7. ７月　２日（水）* 森　田　茂　之　氏（東京大）　種々のモジュライ空間のコホモロジーについて —Riemann 面、metric グラフ、二次形式 —
8. ７月２５日（金）* 本　堂　　毅　氏（東北大）　携帯電話による間接被爆をめぐって
9. １１月２６日（水）* 吉　田　知　行　氏（北海道大）　群論の古典的問題のその後
10. １１月２６日（水）* 名　和　範　人　氏（名古屋大）　非線形 SCHRÖDINGER 方程式の爆発解
11. １２月　８日（月）* 山　田　雅　博　氏（岐阜大）　Carleson type measures on parabolic Bergman spaces
12. １２月１２日（金）　森　吉　昭　博　氏（北海道大）　空気中の浮遊有機物の排出源毎の寄与率の推定
13. １２月１５日（月）* Eric Bedford 氏（Indiana University）　DYNAMICS OF BIRATIONAL MAPPINGS OF THE PLANE
14. １月２８日（水）* Filippo Bracci 氏 (Univ. di Roma “ Tor Vergata ” )　DYNAMICS OF HOLOMORPHIC SELF-MAPS OF BOUNDED DOMAINS IN $\mathbb{C}^n$
15. ２月　４日（水）* 山　崎　洋　平　氏（大阪大）　広義重積分体系の整備にルベーグ積分は必要か？また十分か？
(FCSセミナー：微分積分学のスリムな再構成 … そして「完備性」の分離)
16. ２月１９日（木）* Jörg Schürmann 氏（Universität Münster）　MILNOR CLASSES AND VANISHING CYCLES
17. ３月１１日（木）* Khanin Kostya 氏（Newton Institute Cambrige ／京都大）　Burgers Turbulence and Random Lagrangian Dynamics
18. ３月２３日（火）* 伊　藤　敏　和　氏（龍谷大）　On real transverse sections of holomorphic foliations
19. ３月２３日（火）* Xavier Gómez-Mont（CIMAT and RIMS）　Formula for Computing Indices of Vector Fields on Singular Varieties

# Abelian surfaces with odd bilevel structure

G.K. Sankaran

May 15, 2003

We study the moduli space of abelian surfaces with polarisation of type $(1, t)$ and a bilevel structure. These were introduced by Mukai (in a lecture given in Sapporo in 1999); he showed that for $1 < t \leq 5$ the moduli space is rational. In this lecture I describe some features of the geometry of the moduli space for arbitrary $t$ and then explain how to use these to show that if $t$ is odd then the moduli space is of general type for $t \geq 17$. I also indicate some special features of the case $t = 6$.
The moduli spaces concerned can be described as quotients of the Siegel upper half-plane by a certain arithmetic subgroup of the symplectic group. One needs an asymptotic estimate of the number of modulr forms of given weight for this group, a description of the cusps and knowedge of the branch locus, that is, of the torsion in the arithemtic group. Most of this can be obtained by modifying calculations already performed for other types of level structure.

# Inhomogeneous Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equation

Charles Bu
Department of Mathematics
Wellesley College
Wellesley, MA 02481, USA
cbu@wellesley.edu

April 17, 2003

**Abstract**

The following inhomogeneous boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation on $\Omega \subset I\!R^n$ is studied: $iu_t = \Delta u - g|u|^{p-1}u, \quad g > 0$ with initial and boundary conditions $u(x,0) = h(x)$ for $x \in \Omega$, $u(x,t) = Q(x,t)$ on $\partial\Omega$ where $h, Q$ are given smooth functions. Under suitable conditions, we prove the existence of a global solution in $H^1$.

**Key words**: nonlinear Schrödinger equation, inhomogeneous boundary value problem, weak solution, global existence

**Mathematics Subject Classification (2000):** 35K55, 35R35, 35K50

# $G$-constellations and deformations of the generic orbit

Alastair King (University of Bath, England)

**Abstract**

When a finite abelian group $G$ acts on $C^n$, resolutions of the quotient space $C^n/G$ can parametrise $G$-constellations, that is, $G$-regular finite length sheaves. Under a natural condition, one can completely classify the ways in which this can occur and effectively compute them using toric geometry.

# 極渦のある球面上の渦層の運動

坂上　貴之　(北海道大学)

**Abstract**

We consider the motion of a vortex sheet on the surface of a unit sphere in the presence of point vortices fixed at the north and south poles. Analytic and numerical research revealed that a vortex sheet in two-dimensional space has the following three properties. First, the vortex sheet is linearly unstable due to Kelvin-Helmholtz instability. Second, the curvature of the vortex sheet diverges in finite time. Last, the vortex sheet evolves into a rolling-up doubly branched spiral, when the equation of motion is regularized by the vortex method. The purpose of this article is to investigate how the curvature of the sphere and the presence of the pole vortices affect these three properties mathematically and numerically. We show that some low spectra of disturbance become linearly stable due to the pole vortices and thus the singularity formation tends to be delayed. On the other hand, however, the vortex sheet, which is regularized by the vortex method, acquires complex structure of many rolling-up spirals.

# エネルギー保存偏微分方程式の ウェイヴレット展開による ハミルトン力学系表示とその応用

岡田　正己　(東京都立大学)

**Abstract**

1970年代にガードナーは周期 KdV 方程式がフーリエ級数展開を用いるとハミルトン力学系に帰着されることを示した。これの非周期の場合については、きちんとしたことは示されていなかった。我々はウェイヴレット展開を用いることによって、もっと一般に、エネルギー汎関数から変分によって導出される偏微分方程式について、ハミルトン力学系に帰着されうることを示し、数値解の精密かつ長時間安定な計算に応用できることに言及したい。

# 真性粘菌変形体の運動と形態形成のモデリングについて

小林　亮　(北大・電子研)

**Abstract**

真性粘菌の変形体は多核単細胞の巨大アメーバ様の生物で、環境に応じて体制を変化させたり移動したりすることで、うまく生を営んでいる。一見したところ単なる原形質の塊のように見える変形体が、どのようにして一つの生命体として整合的に振る舞えるのかを考えることは、非常におもしろい問題である。生物を物質と情報が交錯する場として捉えた場合、この生物は良いモデル系（原始的であるが故に、手が届く？）となりうるだろう。セミナーでは結合振動子系をベースとしたモデルを紹介したい。

# 種々のモジュライ空間のコホモロジーについて
# ーRiemann 面，metric グラフ，二次形式ー

森田　茂之

## 1．目標：モジュライ空間のトポロジーの研究

つぎの二つの概念には密接な関係がある．

＊モジュライ空間
Riemann 面，アーベル多様体，Riemann 面上のベクトル束，等

＊分類空間
$\mathrm{BGL}(n,\mathbb{C})$，　$\mathrm{BDiff}\,M$，等

Gauss 曲面論（1827）で用いられた Gauss 写像のターゲットとしての２次元単位球面（＝３次元空間内の“方向”のモジュライ空間）が分類空間の一つの起源．その一般化である Grassmann 多様体のコホモロジー代数の各元は，多様体の大局的な曲がり具合を記述する特性類の役割を果たす．

例　$G_k(\mathbb{C}^n) = \{V^k \subset \mathbb{C}^n$ (線形部分空間)$\}$（Grassmann 多様体），
$\xi$ : tautological bundle,　$\xi^\perp$ : orthogonal complement
とするとき，

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1(\xi),\cdots,c_k(\xi)]/\text{relations}$$

ここで $c_i$ は Chern 類であり，関係式（relations）は等式 $c(\xi)c(\xi^\perp)=1$ により完全に記述される．

目標：モジュライ空間，あるいは分類空間のコホモロジー代数の決定．これが困難な場合には，その *tautological part* の

$$\text{tautological generators/tautological relations}$$

の形での具体的な記述を与える．

## 2．Riemann 面のモジュライ空間と曲面バンドル

まず

Riemann 計量＝接空間上の正定値二次形式

から，$n$ 次元多様体上の一点における Riemann 計量全体を $Q$ と書けば

$$Q = \{\text{ 正定値 } n \text{ 次対称行列 }\} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

となる．したがって，$M$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 多様体とするとき，その上の Riemann 計量全体 $\mathcal{R}(M)$ は

$$\mathcal{R}(M) = \Gamma(PM \times_{\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})} Q) \quad (PM \text{ は } M \text{ の主接バンドル})$$

と書くことができ，これは可縮な空間でその上に $M$ の微分同相群 $\mathrm{Diff}\,M$ が作用することになる．一般には，商空間 $\mathcal{R}(M)/\mathrm{Diff}\,M$ はあまり良い空間とはならないが，$M$ が 2 次元，すなわち曲面 $\Sigma$ の場合には例外的に構造の豊富な美しい空間となる．より詳しくは

$$\mathcal{R}_0(\Sigma) = \{\Sigma \text{ 上の定曲率計量 }\}$$

とすれば，$\mathcal{R}(\Sigma)$ から $\mathcal{R}_0(\Sigma)$ 上への $\mathrm{Diff}\,\Sigma$ 同変な strong deformation retaraction が存在することが分かる（等温座標および Uniformization theorem）．とくに $\Sigma = \Sigma_g$（種数 $g$ が 2 以上の向き付けられた閉曲面）の場合には，

$$\mathcal{T}_g = \mathcal{R}_0(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0\Sigma_g \quad (\mathrm{Diff}_0\Sigma_g \text{ は } \mathrm{Diff}_+\Sigma_g \text{ の単位元の連結成分})$$

は Teichmüller 空間と呼ばれ $\mathbb{R}^{6g-6}$ と同相となることが知られている．さらに

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_g &= \mathcal{R}_0(\Sigma)/\mathrm{Diff}_+\Sigma_g \\ &= \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g\end{aligned}$$

は種数 $g$ のコンパクト Riemann 面のモジュライ空間となる．ここで

$$\mathcal{M}_g = \mathrm{Diff}_+\Sigma_g/\mathrm{Diff}_0\Sigma_g$$

は $\Sigma_g$ の写像類群と呼ばれる重要な群である．

$\mathbf{M}_g$ の研究は，Riemann 自身（1857）に始まり，Teichmüller（1937），Ahlfors, Bers, Grothendieck, Mumford 等による深い研究の積み重ねがあ

る．トポロジーの観点からは，ほとんどホモトピー同値写像となる自然な写像

$$\mathrm{BDiff}_+\Sigma_g = K(\mathcal{M}_g, 1) \longrightarrow \mathbf{M}_g$$

の存在により，$\mathbf{M}_g$ と曲面バンドルの分類空間，さらには抽象群としての写像類群 $\mathcal{M}_g$ の間の極めて密接な関係が生まれる（$K(\mathcal{M}_g, 1)$ は $\mathcal{M}_g$ を基本群とする Eilenberg-MacLane 空間）．

目標：Riemann のモジュライ空間のコホモロジー代数 $H^*(\mathbf{M}_g)$ を理解する．とくに，その tautological part と呼ばれる部分代数 $\mathcal{R}(\mathbf{M}_g)$，すなわち Mumford-Morita-Miller 類

$$\kappa_i \in A^i(\mathbf{M}_g), \quad \text{位相的には} \quad e_i \in H^{2i}(\mathcal{M}_g : \mathbb{Z})$$

により生成される部分代狽フ構造を決定する．$\mathcal{R}(\mathbf{M}_g)$ については Faber による美しい予想がある．

ここでは，上記の目標へのトポロジーの立場からの戦略を簡単に記す．まず "Easy model" として，一つの Riemann 面の場合を考える．$\Sigma_g$ 上に一つ複素構造 $\mathcal{C}$ と基点を定めれば，Abel-Jacobi の写像

$$\Sigma_g^{\mathcal{C}} \longrightarrow Jac$$

が定義される．ここで $Jac$ は $\Sigma_g^{\mathcal{C}}$ の Jacobian であるが，これは位相的には $T^{2g}$ であり，それはまた $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ とするとき $K(H, 1)$ とも書ける．このとき

$$H^*(\Sigma_g) \cong H^*(Jac)/ < \Lambda^2 H/\mathbb{Z} >$$

と，$\Sigma_g$ のコホモロジー代数は Jacobian のそれの適当なイデアルによる商として記述される．さて上記の戦略とは，簡単にいえばこの記述の family への一般化を構成すること，ということになる．具体的には，図式

$$\begin{array}{llll}
 & & & \text{monodromy group} \\
\mathbf{C}_g & \xrightarrow[\text{Hain}]{\text{Morita}} & \text{Family of } H_3(Jac; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \Lambda^3 H \rtimes \mathrm{Sp} \\
\| & & \downarrow & \\
\mathbf{C}_g & \xrightarrow[\text{Morita}]{\text{Earle}} & \text{Family of Jacobians} & H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2g-2) \rtimes \mathrm{Sp} \\
\downarrow & & & \\
\mathbf{M}_g & & &
\end{array}$$

に示す Abel-Jacobi の写像の Riemann 面の族への種々の一般化と，シンプレクティック群の表現論を用いて，つぎの予想をたてる．

予想：

$$\mathcal{R}(\mathrm{M}_g) \cong \left(H^*(H^3(Jac)/H)/<[22]>\right)^{\mathrm{Sp}}$$

ここで $<[22]>$ は $H^*(H^3(Jac)/H)$ のあるイデアルである．

## 3．対象を広げる

写像類群は $H = H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ への自然な作用を通して，群の拡大

$$\mathcal{I}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$$

により記述される．ここで $\mathcal{I}_g$ は Torelli 群と呼ばれる写像類群の重要な部分群である．$F_n$ を階数 $n$ の自由群とし，$\mathrm{Out}F_n$ をその外部自己同型群とすれば，同様な群の拡大

$$\mathrm{Out}^h F_n \longrightarrow \mathrm{Out}F_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$$

が得られる．1986 年に Culler-Vogtmann は，基本群が $F_n$ となる metric グラフの全体のなす空間（Outer Space と呼ばれる）を構成し，それが可縮であり，$\mathrm{Out}F_n$ が固有不連続に作用することを証明した．この作用による商空間はグラフのモジュライ空間と呼ばれる．一方，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ は §2 に記した $n$ 次元多様体上の一点における Riemann 計量全体の空間 $Q$ に固有不連続に作用することが古典的に知られている．その商空間のコホモロジーは $\mathbb{Z}$ の代数的 K 理論と密接に関係し，重要な意味をもつ．Riemann 面のモジュライ空間や写像類群に比べて，これらの空間あるいは群のコホモロジーの研究は，(Borel による $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の安定コホモロジーの決定を除き）まだ始まったばかりである．しかし，系列

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathrm{Out}^h F_n) & \longleftarrow & H^*(\mathrm{Out}F_n) & \longleftarrow & H^*(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})) \\ \text{K.Igusa} & & \text{Morita} & & \text{Borel, Soulé,}\cdots \end{array}$$

において，K. Igusa による $\mathrm{Out}^h F_n$ に関する higher Franz-Reidemeister torsion の理論の建設，筆者による $\mathrm{Out}F_n$ のあるコホモロジー類の無限系列の定義，Gangl-Soulé-Vincent による $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の初めての非安定コホモロジー類の発見がなされており，それら三者の間の関係の解明を含めて近い将来に研究の大きな発展が期待される．

## 4．モジュライ空間のコホモロジーとリー代数のコホモロジー

Borelによる古典的な結果

定理（Borel 1974）

$$\begin{aligned}\lim_{g\to\infty} H^*(\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z});\mathbb{Q}) &\cong H^*(\mathfrak{sp}(\infty,\mathbb{R})/U(\infty))\\ &\cong \mathbb{Q}[c_1,c_3,\cdots]\\ \lim_{n\to\infty} H^*(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z});\mathbb{Q}) &\cong H^*(\mathfrak{sl}(\infty,\mathbb{R})/SO(\infty))\\ &\cong \Lambda(b_5,b_9,\cdots)\end{aligned}$$

により，arithmetic groupあるいはそれに随伴するモジュライ空間の安定コホモロジー代数は，リー代数のコホモロジーで記述することができる．写像類群の安定コホモロジー代数は，2002年に至ってMadsen-Weissにより

$$\lim_{g\to\infty} H^*(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[e_1.e_2,\cdots]$$

と決定された．

一方，Kontsevichは1993年に，Riemann面およびグラフのモジュライ空間の有理係数コホモ鴻W－代数と，ある種の無限次元リー代数のコホモロジーとの密接な関係を発見した．具体的には，三つの無限次元リー代数 $\mathfrak{c}_\infty,\mathfrak{a}_\infty,\mathfrak{l}_\infty$ を導入し，それらのコホモロジーをモジュライ空間のコホモロジーにより完全に記述したのである．そのうち二つの場合を簡略化して記すとつぎのようになる．

定理（Kontsevish 1993）

$$\begin{aligned}PH^k(\mathfrak{a}_\infty^+)_{2n}^{\mathrm{Sp}} &\cong \oplus_{2g-2+m=n} H_{2n-k}(\mathrm{M}_{g,m};\mathbb{Q})\\ PH^k(\mathfrak{l}_\infty^+)_{2n}^{\mathrm{Sp}} &\cong H_{2n-k}(\mathrm{Out}F_{n+1};\mathbb{Q})\end{aligned}$$

３番目のリー代数の有限版 $\mathfrak{l}_g$ は，写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ のリー代数とも呼べるもので，Kontsevishの上記の仕事以前にすでに筆者等の写像類群の研究において使われていたものである．以後，そこでの記法により $\mathfrak{l}_g$ の替わりに $\mathcal{H}$ と書くことにする．

定理（Morita 1990）全射準同型写像

$$\mathrm{Trace}:\mathcal{H}_{2k+1}\longrightarrow S^{2k+1}H$$

が存在して

$$\begin{gathered}\text{交換子イデアル}\ [\mathcal{H},\mathcal{H}]\ \text{上}\ \mathrm{Trace}\equiv 0\\ \mathbf{M}_g\ \text{からくる部分} \subset \mathrm{Ker\ Trace}\end{gathered}$$

系：リー代数としての全射準同型写像

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus \bigoplus_{k\geq 1} S^{2k+1} H$$

が存在する．とくに $\mathcal{H}$ はリー代数として有限生成ではない．

予想：上の準同型写像はリー代数 $\mathcal{H}$ のアーベル化を与える．

この予想の当否とは無関係に，準同型写像

$$\begin{aligned}&H^*(\Lambda^3 H \oplus \bigoplus_{k\geq 1} S^{2k+1} H)^{\mathrm{Sp}}\\ \cong&\mathbb{Q}[\text{valency が}\ \{3,3,5,7,\cdots\}\ \text{となる連結グラフ}]\\ &\longrightarrow H^*(\mathcal{H})^{\mathrm{Sp}}\end{aligned}$$

が得られる．

上記準同型の "moduli part" はこれまでの研究，とくに河澄響矢氏との共同研究により完全に解明することができた．しかし，これは全体から見ればまだごく一部であり，残りの部分の解明はこれからの重要な課題である．まずは，Trace の一つ一つを用いた一番単純な元

$$H^2(S^{2k+1}H)^{\mathrm{Sp}} \cong \mathbb{Q} \ni 1 \longmapsto t_{2k+1} \in PH^2(\mathcal{H})^{\mathrm{Sp}}$$

の非自明性の証明と幾何学的な意味の解明を目指している．§3 で述べた $\mathrm{Out}\,F_n$ のコホモロジー類の無限系列の定義は，これらの元に Kontsevich の定理を適用して

$$H_{4k}(\mathrm{Out}\,F_{2k+2};\mathbb{Q})$$

の元として得られたものである．

予想：

$$H^2(\mathcal{H})^{\mathrm{Sp}} \cong \mathbb{Q} < e_1, t_3, t_5, \cdots > .$$

ここで，$e_1$ は Riemann モジュライ空間の第一特性類に対応するものであるが，$t_3, t_5, \cdots$ は，上記 $\mathrm{Out}\,F_n$ の特性類としての役割に加えて，算術

的写像類群に現れる（伊原康隆，織田孝幸，中村博昭，松本真，各氏等の仕事参照）絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の "影"（Soulé 元）に密接に関係することが強く予想される．さらに極く最近（2003 年秋），これらの元の第 3 の役割，すなわちホモロジー 3 球面のホモロジー同境群 $\Theta^3(\mathbb{Z})$ から $\mathbb{Z}$ への無限個の独立な準同型写像の構成に使える可能性があることが分かってきた．

## 5．将来の課題

ここでは，つぎの二つをあげることにする．

（1）コホモロジー代数 $H^*(\overline{\mathrm{M}}_{g,n})$ 上展開されるモジュライ空間の intersection theory は，1990 年の Witten の有名な仕事およびそれに引き続いた Kontsevich の定理に始まり，それを大きく一般化した Gromov-Witten 理論に至るまで，多くの研究者の努力により目覚ましい発展を遂げてきた．これらは，モジュライ空間のいわば一次特性類（すなわち Mumford-Morita-Miller 類）に関する理論である．Madsen-Weiss の結果により，モジュライ空間 $\mathrm{M}_g$ は，安定域においては Grassmann 多様体と定量的には似た性質をもっている．しかし，非安定域および定性的には，はるかに緻密な構造をもっていると考えられる．特性類の観点からいえば，二次更には高次の特性類が定義され，それらはモジュライ空間の深い幾何学的構造を反映するものと思われる．一連の二次特性類は写像類群のある部分群 $\mathcal{K}_g$ のコホモロジー類として筆者によりすでに定義は与えられており，また，河澄，Hain の両氏もそれぞれの立場からの研究を始めている．これらの "高次の幾何学" の具体的な研究は，将来に向けての大きな課題である．

（2）Grothendieck, Ihara, Deligne, Drinfeld の仕事，およびそれらに続く Oda, Nakamura, Matsumoto, Hain-Matsumoto 等の仕事により，数論と（数論的に拡大された）写像類群との深い関連が次第に明らかにされつつある．ここでは，トポロジーの立場から二つの問題を提起したい．一つは Galois images を Traces の言葉で具体的に記述することであり，もう一つはリー代数 $\mathcal{H}$ の $\mathbb{Z}$ 上の構造を解析することにより，各素数に応じたより詳細な構造の解明を行うことである．

# 携帯電話による間接被爆をめぐって

本堂　毅　(東北大学理学部物理学科)

**Abstract**

日に日に増える携帯電話の利用者。気が付くと、例えば電車一両内の総出力は、衛星放送（CS放送）１局分をも超えうる状況になっています。タバコは、周囲の人たちに間接喫煙をもたらします。これと同様に、携帯電話も周囲の人たちに間接被爆を及ぼします。この被爆レベルを、初等レベルの物理学を用いて計算してみました。この結果、これまで工学の専門家たちが想定してきたレベルを遥かに上回る被爆が生じうることが分かりました。自然科学の基本が、工学の専門家たちに、正しく理解されていなかった結果でした。この結果のもつ意味を、被爆による医用電子機器（補聴器やペースメーカーなど）への被害や、生体への影響などの関連で説明し、基礎科学の社会的重要性を考えたいと思います。

**References**

T. hondou, J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 71 (2002) p.432.
BBC News* http://news.bbc.co.uk/2/hi/health/1961484.stm (2002)
本堂　毅、科学（岩波書店） Vol.72 (2002) p.767.
本堂　毅、日本物理学会誌 Vol. 58 No.6 (2003) p.430.

# 群論の古典的問題のその後

吉田知行 (Tomoyuki YOSHIDA)

November 26, 2003

$\boxed{\text{「群論の古典的問題」＝「群論」＋「数え上げの組合せ論」}}$

これが我々の考える問題で，どちらかというと群論寄りの理論である．

この問題の歴史は古く，群論の創世記から考えられていた．シローの定理 (1872) やフロベニウスの定理 (1893, 1902) が有名である．談話会では，いくつかの最近の知見を加えながら全体を概観し今後の研究の方向と課題を述べた．

## 1 Hom 予想はどうなったか

以下 $A, G$ を有限群，$p$ を素数とする．古典的問題でもっとも興味深いのが Hom 予想である (Asai-Y 1993).

**Hom 予想:** $|\mathrm{Hom}(A,G)| \equiv 0 \pmod{\gcd}(|A/[A,A]|, |G|)$.

ここで $[A,A]$ は交換子群，$\mathrm{Hom}(A,G)$ は $A$ から $G$ への群準同型写像の集合を表す．

Hom 予想は，群における方程式の解の個数に関する合同式とも解釈できる．知られた結果がいくつかある．

(Frobenius 1893) $\sharp\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \pmod{\gcd}(n, |G|)$.
上の予想で $A$ が位数 $n$ の巡回群の場合がこの古い定理である．

(Y 1993) $A$ がアーベル群なら成り立つ．

(Asai-Y 1993) $A/[A,A]$ の元の位数が素数の平方で割り切れない場合は成り立つ．

**コサイクル予想:** $A$ が $G$ に作用しているとき，半直積 $G \rtimes A$ における補群の個数についても Hom 予想と同じ合同式が成り立つ.

作用が自明な場合は Hom 予想である．アーベル $p$-群 $A$ についてのコサイクル予想が正しければ，一般の $A$ についての Hom 予想も正しいことが分かっている．$A$ が巡回群の場合は，1930 年代の P.Hall により正しい.

有限群に関する多くの問題は有限単純群の場合に帰着される．有限単純群の分類は終わっているので，個々の単純群で問題の正否を確かめる，という大方針にしたがって多くの問題が解決してきた．ところが，意外なことに，これらの予想は $A, G$ が $p$-群の場合に帰着される．$p$-群に関する問題は，数学的帰納法に乗ることが多いのだが，上の予想についてはこれがうまく行かない．竹ヶ原，浅井，庭崎などによる精力的な研究で，どちらの予想も，重要な $p$-群のクラスで成り立っている.

これらの予想へのアプローチの仕方として，群論的方法，指標理論的方法，(非可換) ホモロジー代数，Burnside 環 (有限 $G$-集合のカテゴリーの Grothendieck 環) を使う方法，母関数 (指数関数型恒等式，円分恒等式，ゼータ関数の transition 公式) を使う方法などがある．それでも予想解決の道筋は見えてこない．たとえば Frobenius の定理 ($A$ が巡回群) のエレガントな証明として，指標理論を使った Brauer による証明が知られている．$A$ がアーベル群の場合に同じことはできない．多変数の指標 $\chi(g_1, \cdots, g_n)$ ($g_1, \cdots, g_n$ は互いに可換) のようなものが必要になるが，そのような多変数の指標の使える理論はない．そもそも $A$ がアーベル群の場合の Hom 予想の証明でさえ多重帰納法を使い，一部に一般 Burnside 環の理論を使った長いものである．$A$ が巡回群の場合，アーベル群の場合，一般のベキ零群の場合と，ギャップが大きくなっている.

(Mednykh 1978, Mulase-Yu 2002) $S$ をコンパクトリーマン面，$\pi_1(S)$ をその基本群，$\chi(S)$ をオイラー標数とする．このとき

$$\sum_{\lambda}(\lambda(1))^{\chi(S)} = |G|^{\chi(S)-1} \cdot |\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)|.$$

ここで $\lambda$ は $G$ の既約 (複素) 指標を動く.

この定理に関連した結果として，有限群 $G$ における $x^{-1}y^{-1}xy = t$ の解の個数は $|C_G(t)|$ で割り切れる (Oda-Y 未刊).

(Dijkgraaf–Witten 不変量 1990) 向きの付いた 3-次元閉多様体 $M$ と $[\alpha] \in$

$H^3(G, U(1))$ に対し，

$$Z^{G,\alpha}(M) := \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma:\pi_1(M)\to G} \langle \gamma^*(\alpha), [M] \rangle$$

ここで $\gamma^*\alpha$ は $H^4(M, \boldsymbol{Z}) \longrightarrow H^4(B_G, \boldsymbol{Z}) = H^3(G, U(1))$ による $\alpha$ の像，$[M]$ は基本類．特に

$$Z^{G,1}(M) = \frac{1}{|G|} |\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)|$$

**Hom 予想**：$|G|Z^{G,1}(M) \equiv 0 \bmod \gcd(|H_1(M)/|G|H_1(M)|, |G|)$.

## 2　対称群における $x^p = 1$ の解の個数

**問題**. 対称群 $S_n$ における $x^p = 1$ ($p$ は素数) の解の個数 $a_n^{(p)}$ は $p$ で何回割り切れるか．

数列 $\{a_n^{(p)}\}_{n=0,1,2,\dots}$ は次の漸化式と母関数 (Jacobstahl 1949 他) を持つ:

$$a_{n+1}^{(p)} = a_n^{(p)} + n(n-1)\cdots(n-p+2)a_{n-p+1}^{(p)},$$
$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 1.$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(p)}}{n!} t^n = \exp\left(t + \frac{t^p}{p}\right).$$

これによって，$a_n^{(p)}$ はいくらでも計算できる．

Dwork(1981), Dress-Y(未刊): $\mathrm{ord}_p(a_n^{(p)}) \geq \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right] =: \gamma_p(n)$.

この結果があるので，当初の予想は，$\mathrm{ord}_p(a_n^{(p)}) - \gamma_p(n)$ は有界というものであった．

実際，$p = 2$ の場合，割り切れる回数は次で与えられる:

$$\mathrm{ord}_2(a_n^{(2)}) = \begin{cases} \gamma(n) & n \not\equiv 3 \pmod 4 \\ \gamma(n) + 1 & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \approx \frac{n}{4}$$

とくに $\mathrm{ord}_2(a_n^{(2)}) - \gamma_2(n) \leq 1$ である．しかし $p = 3$ はとんでもない難物だった．計算機で数億まで計算したものの規則性が見つからない．結局

この場合，$\mathrm{ord}_p(a_n^{(p)}) - \gamma_p(n)$ は有界でない．石原-落合-竹ヶ原 (2003)，独立に K.Conrad(2002) は次のような奇妙な結果を報告している．

$$\exists\alpha = 2 + 27 + 3^{70}v; \mathrm{ord}(a_{9k+6}) = 2k + 4 + \mathrm{ord}_3(k - \alpha),$$

そのほか K.Conrad は Artin-Hasse の指数関数

$$\exp\left(\sum_{i\geq 0} x^{p^i}/p^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

(Artin-Hasse 係数 $a_n$ は，$S_n$ における位数 $p$-ベキの元の個数) の $p$-進解析的性質についていくつかの予想を出している．

3 以外の素数では $p = 3, 7, 11, 19, 23, 29$ で例外 (非有界性) が起こる ($p < 30$ で)．例外でない素数が結構あるのも不思議である．結局のところ，一般の $p$ の場合，この問題は初等整数論の典型的な解けない問題である．$a_p^{(p)} = (p-1)! + 1$ でこれが $p$ で割り切れることはよく知られている．しかしいつ $p^2$ で割り切れるかは分かっていないし，将来分かるとも思えない．$p < 5 \times 10^8$ の範囲では $p = 5, 13, 563$ の 3 個だけが知られている．

# 3 部分群束の幾何的性質はどうなったか

有限群の部分群束については，Schmidt の subgroup lattice に関する本 (1994) がある．その中に，有限単純群の部分群束が可補，すなわち有限単純群 $G$ とその任意の部分群 $H$ に対し，ある部分群 $K$ があって，$H \cap K = 1$, $\langle H, K\rangle = G$ であろうという予想がある．この予想はごく最近肯定的に解決された．

単純群 $G$ の部分群束のメビウス関数 $\mu(H, K)$ については，$\mu(1, G) \equiv 0 \pmod{|G|}$ が知られている．これはバーンサイド環のベキ等元公式からしたがう．束のメビウス関数の一般論から，$\mu(1, G) \neq 0$ なら，部分群束は可補である．しかし，有限単純群についての $\mu(1, G)$ の値の計算はあまりされていない．メビウス関数は，順序複体のオイラー標数と同等の概念である．部分群束にはもとの群が作用しており，したがって同変オイラー標数のような概念がある．これについての合同式もあるかもしれない．

(K.S.Brown 1972 のホモロジー論的シローの定理) $p$-部分群 $(\neq 1)$ の順序集合の順序複体のオイラー標数について

$$\chi(\boldsymbol{\mathcal{S}}_p(G)) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$$

もベキ等元公式から得られる．

ある種のゼータ関数の特殊値とオイラー標数の間の関係がしれれているが，同様の状況が群論の古典的問題に関しても現れる．その見地からすると，Brown のホモロジー論的シローの定理は，$|\mathrm{Hom}(C_p{}^m, G)|$ に関する合同式と同等である．一見シローの定理のようだが，実はフロベニウスの定理の拡張であった．Brown の定理からシローの定理そのものを導けるかどうかは分からない．

同様の問題は線形群でも考えられる．たとえば $\mathrm{Hom}(G, GL(n, \boldsymbol{C}))$ の幾何的不変量に興味がある．有限群の場合にあった合同式も，代数群の場合は，合同ゼータ関数の性質にある程度反映している様である．

# 4　群なし群論を目指して

有限単純群分類の完成 (1983 頃) の後の有限群論の研究は，いくつかの方向に向かった．分類定理の群論や数論などへの応用，組合せ論 (グラフ理論，符号理論)，モンスター群と頂点作用素代数，表現論，量子群，単純群分類の簡易化などである．そのひとつに「群なし群論」といわれる分野がある．たとえば有限群の表現論は群環の表現論である．これを一般化すれば Hecke 環の表現論になる．Hecke 環に類する環は代数や組合せ論でたくさんある．それなら Hecke 環もどきがあれば有限群の表現論もどき「群なし群表現論」もできるだろう．たとえば，距離正則グラフの表現論ができている．

同じことを群論の古典的問題についても考えてみる．古典的問題にからんだ多くの結果が群なしでも成り立つ．

・指数関数型恒等式:$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ を小さな局所有限カテゴリーで直和分解の一意性が成り立つとする．$\boldsymbol{C} := \mathrm{Con}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ を連結な対象のなすカテゴリーとする．

$$\sum_{X \in \boldsymbol{\mathcal{E}}}{}' \frac{1}{|\mathrm{Aut}(X)|} t^X = \exp\left( \sum_{I \in \boldsymbol{C}}{}' \frac{1}{|\mathrm{Aut}(I)|} t^I \right)$$

これは Jacobstahl や Wohlfahrt の公式のカテゴリー版であり，この種の

指数関数型恒等式の多くを含んでいる．カテゴリー論的見地からは，指数関数型恒等式は直和分解の一意性と同値である．

・群の準同型定理 $G/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ から次のようにして群を取ることができる．一意的全射単射分解のできる有限カテゴリー $\mathcal{C}$ (ただし $X \cong Y \Rightarrow X = Y$ を満たす) に対し，行列

$$H := (|\mathrm{Hom}(X,Y)|), L := (|\mathrm{Quot}(X,Y)|),$$
$$D := (|\mathrm{Aut}(X)|\delta_{XY}), U := (|\mathrm{Sub}(X,Y)|)$$

と置けば，$H = LDU$ (行列の LDU-分解!!) である．これを使って，有限群の場合の円分恒等式，ゼータ関数の接続公式などが一般の全単分解カテゴリーにまで一般化できる．

さらに風呂敷を広げるなら，離散数学全体のカテゴリー論からの再構築にまで視野に入ってくる．有限群 $G$ の代わりに $G$-集合のカテゴリーの言葉で，有限群の古典的問題や表現論を書いてやる．それを一般のトポスに拡張する．特別なトポス，たとえばオートマトンに関連したトポスや寝付き森のカテゴリーに得られた一般論を適用すれば，それらのカテゴリーにおける (ホモロジー論的) シローの定理や指数関数型関数等式，ゼータ関数もどきの接続公式などが一挙に出てくる．

このような研究のためには，線形代数 (有限群の表現論) の基礎からカテゴリー化する必要がある．若い人の参画を期待しています．

# 参　考　文　献


T. Asai, Y. Takegahara, $|\mathrm{Hom}(A,G)|$, IV, J. Algebra 246 (2001) 543–563.

T. Asai, T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A,G)|$, II, J. Algebra 160 (1993) 273–285.

N.Chigira, Y.Takegahara,T. Yoshida, On the number of homomorphisms from a finite group to a general linear group, J. Algebra 232 (2000), 236–254.

M.Costantini, G.Zacher, The finite simple groups have complemented subgroup lattices, Pacific J.Math. 213(2004), 245–251.

R.Schmidt, "Subgroup lattices of groups", de Gruyter (1994).

T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A,G)|$, J. Algebra 156 (1993) 125–156.

T. Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra 80 (1983), 90–105.

T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 509–574.

# 非線形 SCHRÖDINGER 方程式の爆発解

名和範人　(HAYATO NAWA)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ABSTRACT. 擬共型変換で不変であるような非線形Schrödinger方程式の爆発解の爆発時刻付近の漸近挙動について話したい．擬共型不変性とは$SL_2(\mathbb{R})$ の(形式的)表現をその解空間の上に作れる事と理解することができる．この群の作用がある時，数学的に興味深い現象が起こる事は解析以外でも知られた事実であると思うが，このような不変性がある (時空 $1+d$ 次元の) 非線形Schrödinger方程式の爆発解は際立った特徴を持っている事が分かってきた：解の爆発現象は，解析的にはコンパクト性の破綻とよばれる現象の一つであると見なすと，この“大きな” 群の作用が背後にあるカラクリであり，幾何学でいう bubble と類似の現象でもある．また，爆発解は，Brown 運動の ubiquitous のひとつの証でもあるような振る舞いをしていることも，だんだんと分かって来た．

補足：物理的には，この方程式は時空 $1+2$ 次元のとき非線形媒質中のレーザービームの自己集束を記述する数学的モデルである．この場合，時間軸はビームが伝播する空間の第三軸を表し，解の絶対値の自乗がビームの強度をあらわしている．また非線形Schrödinger方程式は光ファイバー中のレーザービームの伝播を記述するモデルとしても現れ，現在でも非線形光学の名の下に活発に研究されていて，コンピュータを用いた数値実験も盛んに行われている．

## INTRODUCTION

次のような非線形相互作用を持った Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \text{(NLS)} \quad 2i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \text{(IV)} \quad \psi(0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

ここで，$p \in (1, 2^*-1)$ とし( $d \geqq 3$ に対し $2^* = \frac{2d}{d-2}$, $d = 1,2$ のとき$2^* = \infty$) である．このとき $\psi \in C([0,T_m); H^1(\mathbb{R}^d))$ なる一意 (時間局所) 解が存在することは周知の事実であり，次の「粒子数」とエネルギー（ハミルトニアン）の保存則が成立する (Ginibre-Velo '79, Kato '87)：

$$\begin{aligned} &\|\psi(t)\|^2 = \|\psi(0)\|^2; \\ &\mathcal{H}_{p+1}(\psi(t)) \equiv \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{p+1}\|\psi(t)\|_{p+1}^{p+1} = \mathcal{H}_{p+1}(\psi_0). \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

我々は特に「擬共型」不変な場合 $(p=1+\frac{4}{d})$ に興味がある：

$$\text{(NSC)} \qquad 2i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\triangle\psi+|\psi|^{4/d}\psi=0.$$

この場合のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}(\psi(t))\equiv\|\nabla\psi(t)\|^2-\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}$$

と書くことにする．次のように，指数 $p=1+\frac{4}{d}$ を境にして，方程式の記述する「世界」は劇的に変化する $(p=1+\frac{4}{d}$ を臨界指数 critical power と呼ぼう)：

(1) Case 1: $p<1+\frac{4}{d}$ の場合
常に $T_m=\infty$ (時間大域解) である：エネルギーの保存則に次の Gagliardo-Nirenberg 不等式を用いると，$\|\nabla\psi(t)\|$ の a priori 評価を得ることができる．

$$\|f\|_{p+1}^{p+1}\leqq C\|f\|^{p+1-\frac{d}{2}(p-1)}\|\nabla f\|^{\frac{d}{2}(p-1)}.$$

(2) Case 2: $p\geqq 1+\frac{4}{d}$ の場合
爆発解に接続する初期値のクラスが存在する (すべての解が爆発する訳ではなく，漸近的に自由な解や定在波解など大域解も存在し，解の世界は多様である)．ここで爆発解とは，

$$T_m<\infty,\quad \lim_{t\to T_m}\|\nabla\psi(t)\|=\infty$$

となる解を指す．

爆発解の存在は，重み付きの空間では，次の Virial 等式から示せる (Zakharov '72, Glassey 77, M. Tsutsumi '78).

$$\begin{aligned}\||\mathbf{x}|\psi(t)\|^2=&\||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2+2t\Im\langle\psi(0),\mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle+t^2\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0))\\&-\frac{N}{p+1}\left(p+1-\left(2+\frac{4}{d}\right)\right)\int_0^t(t-\tau)\|\psi(\tau)\|_{p+1}^{p+1}d\tau.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0))<0$ の時，解が時間大域的に存在するとすれば，有限時間で右辺がゼロとなり矛盾する．$p=1+\frac{4}{d}$ のとき，Virial 等式は次のような簡単な形になることに注意：

$$\||\mathbf{x}|\psi(t)\|^2=\||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2+2t\Im\langle\psi(0),\mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle+t^2\mathcal{H}(\psi(0))$$

この事実は，$p=1+\frac{4}{d}$ の場合に方程式の持つ対称性 (擬共型不変性) によるものと言える．

**A physical model and our goal.**

擬共型不変性について説明する前に，方程式の物理的背景と我々の目標について述べておこう．我々の方程式 (NSC) は，$d=2$ のとき，非線形媒質中のレーザービームの自己集束を記述する一つのモデル方程式である (Akhmanov et al '66, Zakharov '72)： $t$ 軸は空間の第 3 軸でビームの伝播方向を表し，$|\psi(x_1,x_2,a)|^2dx_1dx_2$ は平面 $t=0$ に垂直に入射する単色光 (レーザービーム) の $t=a$ 平面内のビームの強度分布を与えていると考えてよい．

ビームが自己集束するとは，数学的には，$A_j>0$，$a_j\in\mathbb{R}^2$ があって，

$$|\psi(x_1,x_2,t)|^2dx_1dx_2\rightharpoonup\sum_{j=1}^{L}A_j\delta_{a^j}(dx_1dx_2)+\mu(dx_1dx_2)\quad\text{as}\quad t\to t_0$$

が成立するとしてよいであろう (光には不確定性があるとは言え，このように考えて良いような近似を行って導出される方程式である)．ここで，収束は測度の弱収束の意味である．

我々の目標は，爆発解がレーザービームの自己集束を記述していること，即ち，上記の収束が $T_m=t_0$ で成り立つことを証明することである．積分量が発散しているという「大域的」な情報から，上記のような「局所的」な性質を数学的に導こうと言うことだが，結論を先に言ってしまえば，これは，幾何学等でバブル型の定理と呼ばれるものと一種と考えられる；解析的には「コンパクト性の破綻」の様子を「追跡」することになる．

**Pseudo-conformal invariance.**

さて，擬共型不変性である．まず相互作用項を持たない，自由なSchrödinger 方程式を考えよう：

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\triangle\psi=0.$$

擬共型不変性とは$SL_2(\mathbb{R})$ の (形式的な unitary) 表現をこの解空間の上に作れる事と理解することができる (例えば Niederer '72)．この群の作用がある時，数学的に興味深い現象が起こる事は，解析以外でも知られた事実であると思われる．線形な相互作用

$$\pm\frac{1}{|x|^2}\psi$$

においてさえ，この群作用の不思議さを見て取れる (自己共役性の問題)．擬共型不変性を崩すことのない相互作用項 を導入することは，共型場理論からの類推からも意味があるようにも思われるし，実際に，応用上興味深いモデルでこのタイプが現れる (上記のレーザービームの例等)．

擬共型不変性について，もう少し詳しく見ておこう($SL_2(\mathbb{R})$ の (形式的な unitary) 表現を実際に作ってみる)．ここでは $\mathbb{R}^d$ の元をボールド体で表す；

$$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d.$$

次の群はSchrödinger 群と呼ばれている：

$$G=(\mathrm{SO}(d)\otimes\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))\triangleright\mathcal{W}_d.$$

ここで $\otimes$ は直積，$\rhd$ は半直積を表す；$\mathcal{W}_d$ は Weyl 群と呼ばれるもので，加法群として

$$\mathcal{W}_d \cong \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

である．$g \in G$ を $g = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ と表す．ここで，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(d); \quad \det \mathcal{R} = 1, \quad {}^t\mathcal{R}\mathcal{R} = Id, \\
&\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}); \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\
&(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

である．群の演算は次のように定義されている：$g_j = (\mathcal{R}_j, \mathcal{A}_j, \mathbf{a}_j, \mathbf{v}_j) \in G, \quad (j = 1, 2)$, に対して，

$$g_2 g_1 = (\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1, \mathbf{a}_2 + \mathcal{R}_2(-\beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{a}_1), \mathbf{v}_2 + \mathcal{R}_2(\delta\mathbf{v}_1 - \gamma\mathbf{a}_1),)$$

ここで

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

さて，この群のSchrödinger 方程式の解の空間の上への表現は次のようになる：$V$ を自由 Schrödinger 方程式の「すべての」解の全体のなす線形空間とする．「射影的」準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$を，$g = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ に対して

$$\begin{aligned}
&[\rho(g)\psi](\mathbf{x}, t) \\
&= (-\gamma t + \alpha)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{i}{2}\Theta(\mathbf{x}, t)\right) \psi\left(\frac{\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{a})}{-\gamma t + \alpha}, \frac{\delta t - \beta}{-\gamma t + \alpha}\right),
\end{aligned}$$

と定める．ここで，$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, とした．また，

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = -\gamma \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{a}|^2}{-\gamma t + \alpha} + 2\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 t\right)$$

である．このとき，$g_1, g_2 \in G$, に対して

$$[\rho(g_2)\rho(g_1)\psi](\mathbf{x}, t) = [\rho(g_2 g_1)\psi](\mathbf{x}, t) \exp\left(\frac{i}{2}\varpi(g_2, g_1)\right)$$

となり，右辺の最後の $\varpi(g_2, g_1)$ は，

$$\begin{aligned}
&\varpi(g_2, g_1) \\
&= -2\mathcal{R}_2(\delta_2\mathbf{v}_1 - \gamma_2\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2 + \delta\beta|\mathbf{v}_1|^2 - 2\beta_2\gamma_2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2\gamma_2|\mathbf{a}_1|^2,
\end{aligned}$$

と定義され，これを指数の肩に乗せた $\exp(i\varpi(g_2, g_1))$ なる不定性を残して「準同型」が定まる．そして，もちろんのこと $\psi$ が線形 Schrödinger 方程式の解，即ち，$\mathfrak{L}\psi \equiv (2i\partial_t + \triangle)\psi = 0$ を満たせば，

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\rho(g_1)\psi](\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{L}[\rho(g_2)\psi](\mathbf{x}, t) \\ &= \mathfrak{L}[\rho(g_2)\rho(g_1)\psi](\mathbf{x}, t) = \mathfrak{L}[\rho(g_2 g_1)\psi](\mathbf{x}, t) = 0\end{aligned}$$

が成立する．もし，Weyl 群の部分を考えなければ，$\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(V)$ は準同型であることに注意しよう．

上記の時空の変換 $\rho(g)$ $(g \in G)$は次のように分解できる．
(i) Space translations:

$$[\mathcal{G}_1(\mathbf{a})\psi](\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d;$$

(ii) Galilei transformations:

$$[\mathcal{G}_2(\mathbf{v})\psi](\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t)\mathrm{e}^{i\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 t\right)}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d;$$

(iii) Space rotations:

$$[\mathcal{G}_3(\mathcal{R})\psi](\mathbf{x}, t) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{R} \in \mathrm{SO}(d);$$

(iv) Time translations: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$[\mathcal{G}_4(b)\psi](\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t - b), \quad b \in \mathbb{R};$$

(v) dilations: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$[\mathcal{G}_5(\lambda)\psi](\mathbf{x}, t) = \mathrm{e}^{\frac{d}{2}\lambda}\psi(\mathrm{e}^{\lambda}\mathbf{x}, \mathrm{e}^{2\lambda}t), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

(vi) pseudo-comformal transformations: $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$[\mathcal{G}_6(\omega)\psi](\mathbf{x}, t) = (1 - \omega t)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{i\omega|\mathbf{x}|^2}{2(1 - \omega t)}\right\} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{1 - \omega t}, \frac{t}{1 - \omega t}\right), \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

擬共型不変な非線形 Schrödinder 方程式 (NSC) は

$$\mathfrak{L}[\rho(g)\psi] + |[\rho(g)\psi]|^{4/d}[\rho(g)\psi] = 0$$

となるが，一般の場合は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に関する対称性は成立しない．そして，擬共型不変性は（爆発）解の性質に強く受け継がれている．爆発解でなくとも，保存則との間には次のような「親和性」がある：(NSC) の解 $\psi(t)$ に対して，

$$\|[\mathcal{G}_5(\lambda)\psi](t)\| = \|\psi(t)\| = \|\psi(0)\|,$$
$$\mathcal{H}([\mathcal{G}_5(\lambda)\psi](t)) = \mathrm{e}^{2\lambda}\mathcal{H}(\psi(t)) = \mathrm{e}^{2\lambda}\mathcal{H}(\psi(0))$$

が成立する．

以上が，(NSC) がなぜ擬共型不変と呼ばれるかの「解説」であるが，行きがけの駄賃で，方程式の対称性と保存則についても見ておこう．場の解析力学の立場からは，方程式の対称性ではなく，対応する Lagrangian の対称性が保存則と関係しているとするのが正確な訳だが，我々の場合，「方程式の対称性」とするも良し，と言えるのは以下に見る通りである．

ここでは方程式の擬共型不変性にはこだわらない．方程式に厳密な対称性がなくても，$G$ のLie 環の（微分作用素による）表現を考えることは有用である．表現の基底は，形式的には

$$\mathfrak{g}_j = -i\frac{\delta}{\delta s}\mathcal{G}_j(s)\bigg|_{s=Id}$$

と計算できて，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_1 = i\nabla; \quad (\mathfrak{g}_1)_l = i\partial_l,\\
&\mathfrak{g}_2 = \mathbf{x} + it\nabla; \quad (\mathfrak{g}_2)_l = x_l + it\partial_l,\\
&\mathfrak{g}_3 = \frac{1}{i}\mathbf{x}\times\nabla; \quad (\mathfrak{g}_3)_{lm} = \frac{1}{i}(x_l\partial_m - x_m\partial_l),\\
&\mathfrak{g}_4 = i\partial_t,\\
&\mathfrak{g}_5 = -i\left(2t\partial_t + \mathbf{x}\cdot\nabla + \frac{d}{2}\right),\\
&\mathfrak{g}_6 = -i\left(t^2\partial_t + t\mathbf{x}\cdot\nabla + \frac{d}{2}t\right) - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2.
\end{aligned}$$

以後の計算で，次の交換関係は重要である．

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_j] = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)\\
&[\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_5] = -2i\mathfrak{L}, \quad [\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_6] = -2it\mathfrak{L},
\end{aligned}$$

ここで $[A, B] = AB - BA$．良く知られた保存則（積分恒等式）は，量子力学からの類推（Ehrenfest's の法則）：

$$2i\frac{d}{dt}\langle\psi, \mathfrak{g}_j\psi\rangle = -\langle\psi, \mathfrak{g}_j(|\psi|^{p-1}\psi)\rangle + \langle|\psi|^{p-1}\psi, \mathfrak{g}_j\psi\rangle + \langle\psi, [\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_j]\psi\rangle.$$

から導きだせる．$\psi$ は (NLS) の解である．また，この等式は

$$\mathfrak{g} = a(\mathbf{x},t)\partial_t + b(\mathbf{x},t)\cdot\nabla + c(\mathbf{x},t)$$

なる一般の一階の偏微分作用素に対して成り立つ．上記の $\mathfrak{g}_j$ $(j=1,2,\cdots,6)$ を用いれば，次の保存則を得ることができる．

(1) The momentum:

$$P_l(\psi(t)) \equiv \Im\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi(\mathbf{x},t)}\partial_l\psi(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = P_l(\psi_0), \quad l=1,2,\cdots,d;$$

(2) The center of mass motion :

$$\langle \mathbf{x}, |\psi(t)|^2\rangle = \langle \mathbf{x}, |\psi(0)|^2\rangle + 2t\Im\langle\psi(0),\nabla\psi(0)\rangle;$$

(3) The angular momentum:

$$\langle\psi(t), \mathbf{x}\times\nabla\psi(t)\rangle = \langle\psi(0),\mathbf{x}\times\nabla\psi(0)\rangle;$$

(4) The energy:

$$\mathcal{H}_{p+1}(\psi(t)) \equiv \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{p+1}\|\psi(t)\|_{p+1}^{p+1} = \mathcal{H}_{p+1}(\psi_0);$$

(5) The dilation identity:

$$\begin{aligned}\Im\langle\psi(t),\mathbf{x}\cdot\nabla\psi(t)\rangle &= \Im\langle\psi(0),\mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle + t\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0)) \\ &\quad - \frac{N}{2(p+1)}\left(p+1-\left(2+\frac{4}{d}\right)\right)\int_0^t \|\psi(\tau)\|_{p+1}^{p+1}d\tau;\end{aligned}$$

(6) The pseudo-comformal identity:

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{x}+it\nabla)\psi(t)\|^2 &= \||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2 + t^2\frac{2}{p+1}\|\psi(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ &\quad + \frac{N}{p+1}\left(p+1-\left(2+\frac{4}{d}\right)\right)\int_0^t \tau\|\psi(\tau)\|_{p+1}^{p+1}d\tau.\end{aligned}$$

ここで (6) の証明には次の等式が重要である．

$$\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_2\psi = -2\mathfrak{g}_6\psi - t^2\mathfrak{L}\psi = -2\mathfrak{g}_6\psi + t^2|\psi|^{p-1}\psi.$$

また，(5) と (6) から，先に出て来た Virial 等式を得ることができる：

$$\||\mathbf{x}|\psi(t)\|^2 = \||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2 + 2t\Im\langle\psi(0), \mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle + t^2\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0)) \\ - \frac{N}{p+1}\left(p+1-\left(2+\frac{4}{d}\right)\right)\int_0^t (t-\tau)\|\psi(\tau)\|_{p+1}^{p+1} d\tau.$$

上の議論では $L^2$-ノルムの保存則が落ちているが，それには，次のU(1) ゲージの変換を $G$ に付け加えておけばよい．

(0) Gauge transformations:

$$[\mathcal{G}_0(\theta)\psi](\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{i\theta}\psi(\mathbf{x},t), \quad \theta \in S^1,$$

よって，最初の Schrödinger 群を

$$\widetilde{G} = G \otimes U(1).$$

としておけばよいことになる．

## Blowup solutions at criticality

擬共型不変な場合，即ち $p = 1 + \frac{4}{d}$の時，次のような変換を用いて爆発する特解を作れる (Weinstein '86, N '86)：伸長変換 (dilation) と擬共型変換 (psedo-conformal transformation) を合成した

$$\begin{aligned}&[\mathcal{G}_6(1/T)\mathcal{G}_5(-\ln T)\psi](\mathbf{x},t)\\ &\quad = (T-t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{i|\mathbf{x}|^2}{2(T-t)}\right\}\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{T-t}, \frac{t}{T(T-t)}\right),\\ &\quad T>0;\end{aligned}$$

を，定在波解 $Q(x)e^{i\frac{t}{\tau}}$ ($Q$ は $\Delta Q - Q + |Q|^{\frac{4}{d}}Q = 0$ の解) に作用させることにより

$$\widetilde{Q}(x,t) = (T-t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{i|\mathbf{x}|^2}{2(T-t)}\right\}Q\left(\frac{\mathbf{x}}{T-t}\right)\exp\left(\frac{it}{2T(T-t)}\right)$$

を得る．この解は

$$\lim_{t\to T}\|\nabla\widetilde{Q}(t)\| = \infty,$$
$$\lim_{t\to T}|\widetilde{Q}(x,t)|^2 dx = \|Q\|^2\delta_0(dx)$$

を満たし，我々の目標が正しそうであることを示唆してくれるが，実は，デルタ関数的な特異点が現れるという性質を除くと，それほど「一般的 (generic)」なものではない．

では，一般的な爆発解はどのようなものであるのかを Theorem 1 (とそれ以降の議論) として提示する前に，少しだけ定在波解について触れておこう．$p=1+\frac{4}{d}$の時，定在波解のうちの基底解 (ground state) は

$$\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\left\{\|\nabla f\|^2+\|f\|^2-\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}\;\middle|\;\mathcal{H}(f)=0\right\}$$

で特徴付けられるが，以下の変分問題と同等なものとなる．

$$\mathcal{N}_1:=\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\left\{\|f\|^2\;\middle|\;\mathcal{H}(f)\leqq 0\right\},$$

$$\mathcal{N}_2:=\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\frac{\|f\|^{\frac{4}{d}}\|\nabla f\|^2}{\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}}.$$

二つの変分値は無関係なものではなく，

$$\mathcal{N}_2=\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\mathcal{N}_1^{\frac{2}{d}}$$

なる関係があり，特に $\mathcal{N}_2$ は補間不等式の最良定数を与える：

$$\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}\leqq\frac{1}{\mathcal{N}_2}\|f\|^{\frac{4}{d}}\|\nabla f\|^2.$$

実際に下限を実現するのが基底解 $Q_g$で，それは次の問題の球対称な正値解である (Weinstein '83, N '94)：

$$\mathcal{H}(Q_g)=0,$$
$$\mathcal{N}_2=\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|Q_g\|^{\frac{4}{d}},$$
$$\Delta Q_g-Q_g+|Q_g|^{\frac{4}{d}}Q_g=0.$$

以上の情報は，以下の Thoerem 1 の記述および証明にとって重要である．実際，N'94 においては，変分問題 $\mathcal{N}_1$ を解く方法が Theorem 1 の証明の雛形となった．

いよいよ，一般的な爆発解がどのような振る舞いをするのかを見ることにしよう．そのために，今日では「くりこみ群的手法」と呼ばれるようになった方法を導入する．$\psi$ を (NSC) の爆発解とし，時間列 $\{t_n\}$，スケールパラメーター$\{\lambda_n\}$ を

$$t_n\uparrow T_m,\quad \sup_{t\in[0,t_n)}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}=\|\psi(t_n)\|_{2+\frac{4}{d}},$$

$$\lambda_n=\frac{1}{\|\psi(t_n)\|_{2+\frac{4}{d}}^{1+\frac{2}{d}}}.$$

と定めて，これらを用いて爆発解を scale down して作られる関数列：

$$\psi_n(x,t) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda_n^{\frac{d}{2}} \overline{\psi(\lambda_n x, t_n - \lambda_n^2 t)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

の振る舞いを考察する (ここで，$\psi$ の上のバーは複素共役を表す)．爆発解の爆発時間近傍での振る舞いは，関数列 $\{\psi_n(x,t)\}$ の $n \to \infty$ での振る舞いとして符号化 (encode) されたことになる．擬共型不変性より，$\psi_n$ は，時刻 $t_n$ で「くりこまれた」$\lambda_n^{\frac{d}{2}}\overline{\psi(\lambda_n x, t_n)}$ を初期値とする (NSC) の解であるることに注意しよう．また，ここで $t_n = T_m$ と採ることはできない．それ故に，厳密には「くりこみ群」とは言えず，時間推進と伸長の「半直積」は「非線形な対応」となっている．

半線形の熱方程式の場合のように爆発のオーダーが分かっている場合には，上記の $\lambda_n$ の素性がハッキリとしている訳だから，$t_n = T_m$ と見た，伸長変換群による繰り込み操作だけでよく，その不動点である自己相似解が，爆発解の生成する特異点の特徴付けに重要な役割を果たす (Giga-Kohn '89)．しかし我々の場合はそうではない．だが，「悪いこと」ばかりではなく，我々の場合では，特異点の近傍だけではなく爆発解の全体像に関する情報もある程度得られる．

関数列 $\psi_n(x,t)$ の関数空間 $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ (for any $T > 0$) 内での振る舞い (コンパクト性の破綻の様子) を追跡することにより，次の定理を得る (N '94, '99 [3])：

**Theorem 1.** *We have:*

$$\psi_n(x,t) \sim \sum_{j=1}^{L} \psi^j(x - \gamma_n^j, t) + \varphi_n(x,t), \quad n \to \infty$$

*in the strong topology of* $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ *(for any* $T > 0$*). Here,*
(i) $\psi^j(x,t)$*'s are solutions of* (NSC) *in* $C_b(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^d))$ *with* $\mathcal{H}(\psi^j) = 0$*;*
(ii) $\varphi_n(x,t)$ *solves:*

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \triangle \varphi_n = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi_n(x,0) = \psi_n(x,0) - \sum_{j=1}^{L} \psi^j(x - \gamma_n^j, 0), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

*that is,* $\varphi_n(x,t)$*'s are solutions of the free Schrödinger equation; and*
(iii) *the sequences* $\{\gamma_n^1\}$, $\{\gamma_n^2\}$, $\cdots$, $\{\gamma_n^L\}$ *are in* $\mathbb{R}^d$ *such that*
$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n^j - \gamma_n^k| = \infty$ *(*$j \neq k$*).*
*In the original world of* $\psi$*, we have*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in [t_n - \lambda_n^2 T, t_n]} \left\| \overline{\psi(\cdot,t)} - \sum_{j=1}^{L} \psi_n^j(\cdot,t) - \widetilde{\varphi}_n(\cdot,t) \right\| = 0$$

*with*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^2 \sup_{t \in [t_n - \lambda_n^2 T, t_n]} \|\widetilde{\varphi}_n(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}} = 0,$$

*where*

$$\psi_n^j(x,t) = \frac{1}{\lambda_n^{d/2}}\psi^j\left(\frac{x-\gamma_n^j\lambda_n}{\lambda_n}, \frac{t_n - t}{\lambda_n^2}\right),$$
$$\widetilde{\varphi}_n(x,t) = \frac{1}{\lambda_n^{d/2}}\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda_n}, \frac{t_n - t}{\lambda_n^2}\right).$$

この定理の証明を若干改良すれば，もし，測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ が緊密 (tight) であれば，$s_n := t_n - \lambda_n^2 T$. なる列にそって（必要なら部分列を取る），

$$|\psi(x,s_n)|^2dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L}\|\psi^j(0)\|^2\delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

なる収束が測度の弱収束の意味で成り立つことを示せる．ここで，測度 $\mu$ は $|\widetilde{\varphi}_n(x,t)|^2dx$ の極限として得られるものである．

ここで大事な点は，関数列 $\{\psi_n\}$ のコンパクト性が崩れて行く過程で，$\psi^j$ 達が有限個しか出てこないことである．証明の中で鍵となっているのは，$L=\infty$ と仮定すると出て来る，

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\mathcal{H}(\psi^j) \leqq 0$$

なる不等式であるが，これからすべての $j$ について $\mathcal{H}(\psi^j)=0$ を証明することが肝要で，そのために，以下の Theorem 2 (これ自身，爆発解の存在定理として重要である) を用いている (N '93, 99 [3])：

**Theorem 2.**
$$\mathcal{H}(\psi_0) < 0 \Rightarrow \sup_{t\in[0,T_m)}\|\nabla\psi(t)\| = \infty.$$
*If* $T_m = \infty$, *we have that, for any* $R>0$,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\psi(x,t)|^2dx = \infty.$$

この定理から，極限として得られる $\psi^j$ 達は，すべてゼロ以上のエネルギーを持つ ($\mathcal{H}(\psi^j)\geqq 0$) ことが分かるから，$\mathcal{H}(\psi^j)=0$ である．そして，変分値 $\mathcal{N}_1$ の特徴付けより $\|\psi^j(0)\|^2 \geqq \mathcal{N}_1$ が分かり，$L<\infty$ が結論される．また次の等式も成立する：$\|\psi_0\|^2 = \sum_{j=1}^{L}\|\psi^j(0)\|^2 + \mu(\mathbb{R}^d)$.
初期値 $\psi_0$ が球対称である時は，$L=1$ で $a^1=0$ となる (原点は常に「爆発点」である) ことを付け加えておこう．また，爆発する特解とは違い，一般に測度 $\mu$ に相当する部分は消えることはないことも分かっている (N'99 [3]).

Theorem 1 の内容を標語的に言えば，考えている「系の特徴的な解(ゼロエネルギーの時間大域解)」が，作用している「ノンコンパクトな群（伸長変換と平行移動）の軌道」に乗って「(関数空間の）無限の彼方」へと逃げていくのである．これを爆発解の振る舞いに則して言えば，爆発時刻付近での解の漸近展開第一項は，(NSC) それ自身の“零エネルギー”を持つ（有界な）“時間大域解”（定在波解がこれらの性質を持っている）を相似変換して得られる“有限個の特異点”の重ね合わせで記述され，また漸近展開第二項目以降は，まだ“干渉性”を持った自由Schrödinger方程式の解を用いて表現されると言うことになる：この事より解の絶対値の自乗は爆発時刻において Dirac 測度的特異点を持つことを示すことができて，先のモデルで言うと，ビームが有限個の焦げつきを作ったことになる；漸近展開第二項目以降はコンピュータを用いた数値実験等によれば，“肩”と呼ばれる“非特異”な部分を作ることになる．

ここで，以上のような解析の不満な点 (問題点) を挙げておこう．

問題点

(1) 離散的くりこみ群を連続的なものにかえた解析が可能か？特異点の個数や生成される場所が点列の選び方によることを否定できない．
(2) ゼロエネルギーを持つ時間大域解の集合は「豊か」であろうか，それとも「痩せた」ものであろうか？
(3) 爆発解から定義される Radon 測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ は，いつでも緊密 (tight) であろうか？
(4) くりこみ群 (的) な方法は，ある情報を捨て去ることによって，考えている系の特徴的なものを我々の前に明らかにしてくれている．この場合，失った情報は解 $\psi$ の位相 $\frac{\psi}{|\psi|}$ に関するものである．$\psi$ を場と見れば，運動量に関する情報を失っている．

実は，これらの問題 (の一部は) は爆発のオーダーと密接に結びついている．それを次の次ぎの節で見よう．

## TIGHTNESS OF $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$

爆発のオーダーの問題へ行く前に，Therorem 2 の証明の要の部分と，測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ の緊密性 (tightness) について簡単に触れたい．Theorem 2 の証明にも，以下の緊密性に関する結果 Theorem 3 (N '99 [3]) を用いている．

**Therorem 3.** *Suppose that $p=1+\frac{4}{d}$. Suppose one of the following two conditions holds:*
(i) $d=1$ *and* $\mathcal{H}(\psi_0)<0$,
(ii) $d\geqq 2$, $\mathcal{H}(\psi_0)<0$ *and* $\psi_0$ *being radially symmetric. Then we have* $T_m<\infty$, *that is, the corresponding solution* $\psi$ *of* (NSC) - (IV) *blows up in finite time* $T_m$. *Furthermore the family of Radon measures* $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ *defined by the solution* $\psi$ *is tight.*

簡単のため (中心的なアイデアのみに要点を絞るため)，高次元の球対称解の場合のみを考え

る．重み $|x|$ を「削って」Virial 等式の局所化されたものを考えるため以下のものを用意する．

$$w(\xi) = \begin{cases} \xi, & 0 \leqq \xi < 1, \\ \xi - (\xi - 1)^3, & 1 \leqq \xi < 1 + \left(\frac{1}{q}\right)^{1/3}, \\ \text{smooth}, \quad (w' \leqq 0) & 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \leqq \xi < 2, \\ 0, & 2 \leqq \xi. \end{cases}$$

今 $r \equiv |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}$ for $x = (x_1, \cdots, x_N)$ とし，パラメーター $R > 0$ に対して

$$\vec{w}_R(x) = \frac{x}{r} w_R(r) = \frac{x}{r} R w(\frac{r}{R}),$$
$$W_R(x) = 2 \int_0^r w_R(s) ds.$$

とおく．局所化されたVirial 等式とは以下のようなものである：

**Lemma 1.** *We have: for* $t \in [0, T_m)$,

$$\begin{aligned} &\langle W_R, |\psi(t)|^2 \rangle \\ &= \langle W_R, |\psi_0|^2 \rangle + 2\Im t \langle \psi_0, \vec{w}_R \cdot \nabla \psi_0 \rangle - 2 \int_0^t ds \int_0^s d\tau \mathcal{H}\big(\psi(\tau)\big) \\ &\quad - 2 \int_0^t ds \int_0^s d\tau \mathcal{H}^R\big(\psi(\tau)\big) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s d\tau \left\langle \triangle(\nabla \cdot \vec{w}_R), |\psi(\tau)|^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

*Here the functional* $\mathcal{H}^R$ *is defined by:*

$$\mathcal{H}^R(f) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} m_1(r) |\nabla f(x)|^2 - m_2(r) |f(x)|^{2+\frac{4}{d}} dx,$$

*where*

$$m_1(r) \equiv 1 - {w_R}'(r)$$
$$m_2(r) \equiv \frac{2}{2 + \frac{4}{d}} \left( d - {w_R}'(r) - \frac{d-1}{r} w_R(r) \right).$$

緊密性 (tightness) の証明には，上記の一般化された Virial 等式内の不定符号を持った項 $\mathcal{H}^R$ を評価する必要があり，そのために次の変分問題が中心的な役割を果たす：

$$\mathcal{N}_R \equiv \inf_{\substack{f \in \mathcal{X} \\ f \neq 0}} \left\{ \int_{|x|>R} |f(x)|^2 dx \;\middle|\; \mathcal{H}^R(f) \leqq -\frac{1}{4}\varepsilon_0, \, \|f\| \leqq \|\psi_0\| \right\},$$

ここで $\mathcal{X} \equiv H^1_r(\mathbb{R}^d)$ は $H^1(\mathbb{R}^d)$ の球対称な関数全体をあらわす．これは，先の $\mathcal{N}_1$ に関する変分問題の局所化されたものであって，次の評価をを得る：

**Lemma 2.** *For sufficiently large $R > 0$, we can find $\mathcal{N}_* > 0$ independent of $R > 0$:*

$$\mathcal{N}_R \geqq \mathcal{N}_*.$$

この補題 Lemma 2 と Lemma 1 を合わせて，Radon 測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0 \leqq t < T_m}$ の緊密性 (tightness) が証明される．緊密性が証明されれば，再び，Lemma 1の局所化されたVirial 等式を用いて，重み付きの空間での証明のようにすればよい．本質的な部分は，$\mathcal{N}_R$ に関するLemma 2 のように無限遠方での $L^2$ mass を制御することである．重み付きの空間では，その空間の性質として無限遠方での振る舞いが制限されているので，爆発解の存在証明は容易となっていたのである．

一般の場合に，このように無限遠方での解の挙動を制御することは容易なことではないようである．ところが爆発のオーダーが分かってしまうと，突然に「世界」は「平和」なものとなる．時間の「端」は空間のそれと「双対的」なのかもしれない．それを次に見よう．

## LogLog law and Nelson diffusions

爆発解のオーダーを決定することは，数値解析や漸近解析ではずいぶんと以前から積極的に行われて来た (Sulem-Sulem '99[7] を参照)．擬共型不変な場合に対する，その結果 (予想) は

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}$$

であり，loglog law と呼ばれている．数学的には，下からの評価が以前より知られていて (Y.Tsutsumi '89, Cazenave-Weissler '90),

$$\|\nabla\psi(t)\| \gtrsim \frac{1}{\sqrt{T_m - t}}.$$

である．まだ予想との間には少しギャップがあった．ところが，先に紹介した定在波解から「擬共型変換」で作られた，爆発する特解の爆発オーダーは

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \frac{1}{T_m - t}.$$

となっていて悩ましい．爆発のオーダーという観点から見た場合も特解は一般的ではないようだ．

最近になって，基底定在波解の近くの爆発解に対して

$$\|\nabla\psi(t)\| \lesssim \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}$$

なる評価がなされた(Perelman 2001 [6], Merle-Raphael 2002 [2]). 予想にかなり近付いたが，両者とも定在波解での線形化作用素のスペクトルに関してある仮定をおいている．また，「大きな」解に対してはまったくの未解決であり，log log型が現れるカラクリが明らかにされたとは言えない．因に，$p > 1 + \frac{4}{d}$ 場合は，数学的には全く未解決であるが，予想は

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{1}{(T_m - t)^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{d}{2}}}}$$

である．しかしながら下からの評価は数学的として厳密に得られていて (Y.Tsutsumi '89, Cazenave-Weissler '90)：

$$\|\nabla\psi(t)\| \gtrsim \sqrt{\frac{1}{(T_m - t)^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{d}{2}}}},$$

上からの評価が欲しいところだ．面白いのは，この爆発オーダーは半線形の熱方程式の場合と同じであって，「代数的」な指数しか現れていない．なぜ，$p = 1 + \frac{4}{d}$ のときだけ，重対数補正が必要になるのかは考えるべき課題であるように思われる．

実は，擬共型不変な場合 (即ち (NSC) の爆発解に対して) は，loglog law が正しいとすると，Theorem 1 の結果において(極限形状を考える際)，特異点の配置やその個数は時間列の取り方に依存せずに一意的に決まってしまう．このような意味でも爆発オーダーの決定は数学的に重要な問題であると言える．証明は，関数解析的にもできるが，確率過程 (Nelson diffusion と呼ばれる [5]) を用いる方法を紹介しよう (N 2001 [4])： Carlen '83, '85 [1] に従えば，道の空間 $\Gamma \equiv C([0, T_m); \mathbb{R}^d)$ 上に

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2}$$

なる確率測度 $P$ を作ることができる．ここに $X_t$ は

$$X_t(\gamma) := \gamma(t), \quad \gamma \in \Gamma$$

なる「確率変数」である．このような測度 $P$ は次の伊藤型確率微分方程式

$$dX_t = b(X_t, t)dt + dB_t$$

の弱解として得られる．ここで，$B_t$ は標準 Brown 運動であり，移流項 $b$ は，Shrödinger 方程式の解 $\psi$ から

$$u(x,t) \equiv \begin{cases} \Re \dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0, \end{cases}$$

$$v(x,t) \equiv \begin{cases} \Im \dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0, \end{cases}$$

と定めた，osmotic velocity $u$ と current velocity $v$ を用いて

$$b(x,t) \equiv u(x,t) + v(x,t)$$

と定義されるものである．

もう少し正確な形で，Carlen の結果を書いていこう (Carlen の証明は，相互作用がポテンシャルで与えられるような線形Schrödinger 方程式の解に対するものだが，非線形の場合も同様である)．

**Theorem (Carlen '83).** *Let $u$, $v$, $b$ and $\rho$ be defined through the solution $\psi$ of* (NSC) - (IV) *as above. We associate $\Gamma \equiv C([0,T_m);\mathbb{R}^d)$ with its Borel $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$. Let $(\Gamma,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t)$ be evaluation stochastic process $X_t(\gamma) \equiv \gamma(t)$ for $\gamma \in \Gamma$ with natural filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqq t)$. Then there exists a Borel "probability" measure $P$ on $\Gamma$ such that:*

(i) *$(\Gamma,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,P)$ is a Markov process;*

(ii) *the image of $P$ under $X_t$ has density $\rho(x,t)$, that is,*

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2};$$

(iii) *The following process $B_t$ is a $(\Gamma,\mathcal{F}_t,P)$-Brownian motion:*

$$B_t \equiv X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau,\tau)d\tau.$$

この定理で得られる拡散過程を Nelson diffusion と呼んでいるが，この性質を調べることによって，loglog law より弱い仮定 $\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty$ のもと，Theorem 1 が改良されることになる．証明の流れを模式的に書けば次にようになる：

$$\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty,$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{t\uparrow T_m} X_t \quad \text{a.s.},$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{t\uparrow T_m} P[X_t \in dx] \equiv \lim_{t\uparrow T_m} \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2},$$

$$\Downarrow$$

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad t \uparrow T_m.$$

最後に夢を語って終わりにしたい．この確率過程をを用いる方法は，くりこみ群的な方法によって壊れてしまった，解の持つ運動量に関する情報を補完してくれるものである可能性がある．また，条件 $\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty$ は，ちょうど良い具合に，爆発する特解を除外してくれるている．そこで，この積分量が有限であるとの過程をおけば，loglog law が得られるのではないかと言う気にもなってくる：統計力学的な言葉を拝借すれば，爆発オーダーには普遍性があるということになる．

今，原点が「爆発点」になっていたとしよう．このとき

$$\Gamma_0(R) := \bigcup_{\eta>0} \bigcap_{\eta<t<T_m} \left[ |\gamma(t)| \geqq R \int_t^{T_m} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau \right] \bigcap [\, |\gamma(t)| \to 0 \,\mathrm{as}\, t \to T_m]$$

なる道の集合が

$$P\left(\Gamma_0(R)\right) > 0$$

を満足したとすると (極限形状に関する，もう少し詳しい情報があれば証明できそうである)，この事実を用いて，発見的な方法ではあるが，

$$\|\nabla\psi(t)\| \lesssim \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}.$$

を「証明」できる．実は重対数補正が必要になる原因はどこに潜んでいたかというと，Nelson diffusion を定めている確率微分方程式

$$B_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau, \tau) d\tau.$$

の Brown 運動の中にであって，そのBrown 運動の道に関する有名な重対数法則が，本来は「裏」の世界にあって隠れてしまっていて見えないはずなのに，確率測度 $P$ の分布が

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad t \uparrow T_m,$$

と，爆発時刻 $T_m$ において Dirac 測度を生成することにより,「表」の世界に現れ出て来たものだと言えそう (なの) である．

**Acknowledgments.** 談話会で話す機会を与えて下さった，数学教室のスタッフの皆さんに感謝致します．北海道大学を訪れたのは，実に１２年ぶりのことでした．

本文中，文献の引用は簡便な形ですませました．参考文献として以下のものを挙げておきます．それらの文献表をたどれば，本文中の文献等に簡単に到達できると思います．どうか，お許し頂きますよう．

## References


1. Carlen, E., *Existence and sample path properties of the diffusions in Nelson's stochastic Mechanics* Springer Lecture Notes in Mathematics 1158 (Albeverio, S. et al, eds.), Stochastic processes in Mathematics and Physics, vol.345, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1985, pp. 25–51.
2. Merle, F. and Raphael, P., *Sharp upper bound on the blow-up rate for the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, Geom. Func. Anal. **13** (2003), 591–642.
3. Nawa, H., *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Commun. Pure and Apllied Math. **52** (1999), 193–270.
4. Nawa, H., *Nelson diffusions and blow-up phenomena in solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Nonlinear Dynamics and Renormalization Group (I. M. Sigal and C. Sulem, eds.), CRM Proceedings and lecture note; vol.27, American Mathematical Society, 2001, pp. 117–134.
5. Nelson, E., *Quantum fluctuations*, Princeton Unuversity Press, Privceton, 1984.
6. Perelman, G., *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D*, Ann. Henri Poincare **2** (2001), 605–673.
7. Sulem, C. and Sulem, P.-L., *Nonlinear Schrödinger equation* Applied Mathematical Sciences 139, Springer, New York, 1999.



現所属：大阪大学大学院基礎工学研究科 数理教室
*E-mail address*: nawa@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

# Carleson type measures on parabolic Bergman spaces

2003/12/8 (in Hokkaido University)
Masahiro YAMADA
(Gifu University)

Let $\mathbb{R}^{n+1}_+$ $(n \geq 1)$ be the upper half space of the $(n+1)$-dimentional Euclidean space, that is, $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t); x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$. Let $C(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ be a class of all continuous functions on $\mathbb{R}^{n+1}_+$ and $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ be a class of all infinitely differentiable functions on $\mathbb{R}^{n+1}_+$ with compact support. For $0 < \alpha \leq 1$, we consider a parabolic operator

$$L^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha.$$

For $0 < \alpha < 1$, $(-\Delta)^\alpha$ is the convolution operator defined by

$$((-\Delta)^\alpha \varphi)(x,t) = -C_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} (\varphi(y,t) - \varphi(x,t))|y-x|^{-n-2\alpha} dy \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+),$$

where $C_{n,\alpha} = -4^\alpha \pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha) > 0$. For $0 < \alpha \leq 1$, a operator $\tilde{L}^{(\alpha)}$ is defined by

$$(\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi)(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) + ((-\Delta)^\alpha \varphi)(x,t) \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+),$$

and $\tilde{L}^{(\alpha)}$ is called the adjoint operator of the parabolic operator $L^{(\alpha)}$. For $0 < \alpha \leq 1$, a function $u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ is said to be $L^{(\alpha)}$-harmonic if $L^{(\alpha)}u = 0$ in the sense of distributions, that is, $\int |u \cdot \tilde{L}^{(\alpha)}\varphi| dV < \infty$ and $\int u \cdot \tilde{L}^{(\alpha)}\varphi\, dV = 0$ for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, where $dV$ denotes the Lebesgue volume measure (In fact, a $L^{(\alpha)}$-harmonic function is infinitely differentiable, see [5]). When $\alpha = 1$, $L^{(1)}$ is called the heat operator. For $1 \leq p < \infty$ and $0 < \alpha \leq 1$, we denote by $b^p_\alpha$ the set of all $L^{(\alpha)}$-harmonic functions on $\mathbb{R}^{n+1}_+$ which belong to $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, dV)$. The spaces $b^p_\alpha$ are called parabolic Bergman spaces. The parabolic Bergman spaces are defined by Nishio, Shimomura, and Suzuki [5] (The definition is more general), and several interesting results are given. It was shown that each point evaluation is a bounded linear functional on all parabolic Bergman spaces, and parabolic Bergman spaces are Banach spaces with respect to $L^p$-norm. Moreover, when $\alpha = 1/2$, a function $u$ belongs to $b^p_{1/2}$ if and only if $u$ is harmonic on $\mathbb{R}^{n+1}_+$ and belongs to $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, dV)$, and thus $b^p_{1/2}$ are equal to the harmonic Bergman spaces on the upper half space.

Let $\mu$ be a $\sigma$-finite positive Borel measure on $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ ($n$ factors). For a multi-index $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial_x^\gamma$ denotes the differential monomial $\partial^{|\gamma|}/\partial_{x_1}^{\gamma_1} \dots \partial_{x_n}^{\gamma_n}$ and let $\partial_t = \partial/\partial_t$. We consider conditions for $\mu$ in order that there exists a constant $C > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\partial_x^\gamma \partial_t^\ell u|^p \, d\mu \leq C \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} t^\lambda |\partial_t^m u|^p \, dV$$

for all $u \in b^p_\alpha$, where $\ell, m \in \mathbb{N}_0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$. Let $D$ be the open unit disk in the complex plane and $H^p$ be the classical Hardy spaces on $D$. Carleson [1] proved that a finite positive

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 32A36; Secondary 26D10; 35K05.
Key words and phrases. Bergman space, Carleson measure, heat equation, parabolic equation of fractional order.

Borel measure $\mu$ on $D$ satisfies $\int_D |f|^p d\mu \leq C \parallel f \parallel_{H^p}^p$ for all $f \in H^p$ if and only if there exists a constant $K > 0$ with $\mu(S(I)) \leq K|I|$ for any interval $I \subset \partial D$, where $S(I)$ is the corresponding Carleson square over $I$. Let $L_a^p$ be the usual Bergman spaces on $D$. Hastings [2] proved that a finite positive Borel measure $\mu$ on $D$ satisfies $\int_D |f|^p d\mu \leq C \parallel f \parallel_{L_a^p}^p$ for all $f \in L_a^p$ if and only if there exists a constant $K > 0$ with $\mu(S(I)) \leq K|I|^2$ for any interval $I \subset \partial D$. In [3], Luecking gives a necessary and sufficient condition for a positive measure $\mu$ satisfying a inequality $\int_D |f^{(\ell)}|^p d\mu \leq C \parallel f \parallel_{L_a^p}^p$ for the Bergman functions. Luecking [4] also gives a necessary and sufficient condition for a $\sigma$-finite positive measure $\mu$ satisfying a inequality $\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\partial_x^\gamma \partial_t^\ell u|^p \, d\mu \leq C \parallel f \parallel_{H^p}^p$ for the harmonic Hardy functions on the upper half space. We consider conditions for $\mu$ satisfying such inequalities for parabolic Bergman functions on the upper half space.

For $(y, s) = (y_1, \ldots, y_n, s) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, let

$$Q^{(\alpha)}(y, s) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,;\, |x_j - y_j| < 2^{-1} s^{1/2\alpha} \; (1 \leq j \leq n), \; s \leq t \leq 2s\}.$$

We call them parabolic rectangles of order $\alpha$ with center $(y, s)$. Clearly, $V(Q^{(\alpha)}(y, s)) = s^{\frac{n}{2\alpha}+1}$.

**Main Theorem.** *Let $1 \leq p < \infty$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ be a multi-index, and $\ell, m \in \mathbb{N}_0$. Suppose that $\lambda > -1$ and $1 + \lambda + (\frac{|\gamma|}{2\alpha} + \ell - m)p > 0$. Then, there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\partial_x^\gamma \partial_t^\ell u|^p \, d\mu \leq C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} t^\lambda |\partial_t^m u|^p \, dV$$

*for all $u \in b_\alpha^p$ if and only if there exists a constant $K > 0$ such that*

$$\mu(Q^{(\alpha)}(y, s)) \leq K s^{\frac{n}{2\alpha}+1+\lambda+(\frac{|\gamma|}{2\alpha}+\ell-m)p}$$

*for all $(y, s) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.*

## References


*[1] L.Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math.* **76***(1962),547–559.*

*[2] W.Hastings, A Carleson measure theorem for Bergman spaces, Proc. Amer. Soc.* **52***(1975), 237–241.*

*[3] D.Luecking, Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives, Amer. J. Math.* **107***(1985), 85–111.*

*[4] D.Luecking, Embedding derivatives of Hardy spaces into Lebesgue spaces, Proc. London Math. Soc.* **63***(1991), 595–619.*

*[5] M.Nishio, K Shimomura and N. Suzuki, $\alpha$-Parabolic Bergman spaces, preprint.*

*[6] D.Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, Ill. J. Math.* **24***(1980), 113–139.*

*[7] M.Yamada, Carleson inequalities in classes of derivatives of harmonic Bergman functions with $0 < p \leq 1$, Hiroshima Math. J.* **29***(1999), 161-174.*

# DYNAMICS OF BIRATIONAL MAPPINGS OF THE PLANE

Eric Bedford

December 15, 2003

In this lecture we consider a birational mapping $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. We are interested in studying the dynamics of $f$, which means that we want to understand the behavior of the iterates $f^n = f \circ \cdots \circ f$ as $n \to \infty$. First we will summarize the general approach that was developed by Diller and Favre. This approach starts by finding a compactification $X$ of $\mathbb{C}^2$ on which the induced mapping $f^*$ on the cohomology group $H^{1,1}(X)$ is well behaved. Then they obtain an invariant, closed (1,1)-current $\mu^+$ which is closely related to the behavior of $(f^*)^n$ as $n \to +\infty$. There is also a current $\mu^-$ that reflects the behavior as $n \to -\infty$.

Here we consider the possibility of producing an invariant measure by taking the wedge product $\mu := \mu^+ \wedge \mu^-$. We note that invariant measures reveal rather different properties of $f$ than those revealed by invariant currents.

Finally, we show how this approach may be applied to some specific families of birational maps on $\mathbb{C}^2$. In fact, it will be shown that complex methods can be used to understand certain real mappings $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Indiana University
*E-mail address*: bedford@indiana.edu

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# DYNAMICS OF HOLOMORPHIC SELF-MAPS OF BOUNDED DOMAINS IN $\mathbb{C}^n$

FILIPPO BRACCI

January 28, 2004

In this talk I will illustrate the state of art about dynamics of holomorphic mappings from a bounded domain to itself, in several complex variables. After giving motivations, such as searching for fixed points, behavior of iterates, composition operators and commuting mappings, I will explain in detail the one-dimensional situation, namely the case the domain is the unit disc of the complex space. I will explain the old results by Wolff, Julia and Carathéodory using a new metric approch by means of the Poincaré metric, which will be suitable for higher dimensional generalizations via the Kobayashi metric. In particular I will describe "linearization" properties showing how to solve the Schröder equation (and other functional equations) in one and several variables.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
*E-mail address*: fbracci@mat.uniroma2.it

特別講演　「広義重積分体系の整備にルベーグ積分は必要か？また十分か？」

大阪大学大学院理学研究科　山崎洋平

前日のＦＣＳセミナーで述べた内容の一環として講演した。

大学初年度の微積分の授業において、広義積分は厄介な対象であり、学生が素朴に計算すると「それは正確ではない」と言われる。それで正確を目指してみると「任意の有界閉集合をいつかは呑み込む」という字句通りには判定できない条件に呆然とする。あげくの果てに熱血先生から「広義積分は中途半端な存在であって、これはルベーグ積分の世界にまで拡張することによって初めてその体系的な扱いが可能になる」と聞かされる。「体系的な扱い」の核心部分は端的に言えばルベーグの優収束定理を意味するらしい。

ルベーグの優収束定理は多くのユーザーが引き合いに出し、その議論の幾ばくかが条件をクリアーしていない。それ故に数学者は「いい加減な議論をする者がいて困る」と言う。さて始末の悪いことに、この「いい加減な議論」の多くは正しい結論を導いているのである。ルベーグ積分は「十分」なのだろうか？

ルベーグ積分の世界では「可算集合」は negligible でなければならず、区間は negligible であってはならない。それ故に区間の非可算性を保証する「集合論」はしっかりマスターしなければならない。ところで集合論は逆理にまみれて生まれ、論争の中を生き抜いてきた代物である。学習者は微妙な議論に耐えねばならず、かといって深入りは歓迎されない。ルベーグ積分は本当に「必要」なのだろうか？

かかる疑問点を愚直に受け止めるため講演者は Jordan 外測度の意味での広義積分に関するルベーグ及びフビニの定理を新しい視点から正当化することにした。

まず自然数の逆数と０からなる集合をΞと表す。次に前段としていくつかの定義を導入するため$\mathrm{R}^m$，$\mathrm{R}^n$それぞれの有界部分集合Ｘ，Ｙ，さらにＸ×Ｙの部分集合Ｓとその上の非負値関数ｆを固定する。いわゆる「関数列」はＳがΞ×Ｙになるケースと考えられ、以下の話が適用される。

ここで関数の定義域を積分方向に沿って切った断面が連続的に変化することを表現するため下記の定義をおく。まず$X' = \Xi \times X$の点$(\xi, \mathbf{x})$ごとに次の集合を考える：

$S_\xi(\mathbf{x})$＝｛$\mathbf{x}$から距離$\xi$以下のＸ-座標値をもつＳの点のＹ-座標｝．

このとき、$S_0(\mathbf{x})$はＳの$\mathbf{x}$ - 断面といい$S(\mathbf{x})$と略記する。Ｓは次の性質をみたす$X'$上の一様連続関数$\sigma(\xi, \mathbf{x})$をもつときＹに沿って**断層化可能**であるという：

$$\mu(S_\xi(\mathbf{x})) \leqq \sigma(\xi, \mathbf{x})$$
$$\mu(S_0(\mathbf{x})) = \sigma(0, \mathbf{x}).$$

もしΞ×Sの何らかの部分集合で下記の性質をみたすものS'に対して、0でないΞの元$\eta$ごとにfがS'($\eta$)において一様連続であるとき、fはY-広義一様連続であるという：

S'およびΞ×S－S'はYに沿って断層化可能であり、
S'(0)＝Sである。

以下前段と同様のX，Y，S，fを改めて固定し、さらにΞ×X上の関数Fが与えられていて$\eta>0$に対してはS'の($\eta$，**x**)断面におけるfの積分を表しているものとする。

ルベーグ型定理　FがΞ×X上一様連続であれば定義域全体でS'の（$\eta$，**x**）断面におけるfの広義積分値を表す。

註　旧来の観点に立ちS'が$\eta$に関して減少的となる設定を考えてみよう。このとき、コンパクト集合Y上で広義積分と極限の交換が保証される設定では広義積分値は（$\eta$，**x**）に関して一様連続になる（Dini の定理）。その意味でこの定理には旧来の観点で必然性のない条件は含まれていない。

フビニ型定理　FがΞ×X上X-広義一様連続であるとする。このとき次の等式が成立する：

$$\int_X F(0,\ \mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_S f(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\,d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

FCS セミナー　「微分積分学のスリムな再構成・・・そして「完備性」の分離」

大阪大学大学院理学研究科　山崎洋平

微分積分学は「背に腹は代えられない」応用上の理由によって木に竹を接ぐように成長して来ている。そのため偏微分可能・全微分可能・$C^1$級の如く病的な例によってのみ区別される概念がひしめき合っており、またn変数の一般論に$n=1$を代入したものは1変数のものとは差異がある。加えてあらゆる命題の基本には「実数の完備性」が入り込んでいて「本格的に理解したいならそれを了解しなければならない」ことになっている。

講演者はこのことに疑問をもち、微分積分学の再構成を断行することにした。そして日本数学会2000年秋期総合分科会において次の講演を行った：

有理数体上で正値「導関数」をもつ関数の増加性

また、「理系への数学」2001年2月号から2002年1月号まで「微分積分学（再）入門」を連載した。

その内容の詳細は別の機会に譲ることにして、ここでは広義積分の切断論について述べる。まず一つのアルキメデス全順序体Rが与えられているとする（これをここでは「実数体」と呼ぶ）。今ここで下部集合$C(-)$と上部集合$C(+)$の対（$C(-)$，$C(+)$）が次の性質をみたすときRの前切断という：

$$x \in C(-) \Rightarrow [y \in C(+) \Rightarrow x \leqq y]$$
$$y \in C(+) \Rightarrow [x \in C(-) \Rightarrow x \leqq y].$$

さらに次の性質をみたすとき本稿ではRの切断という：

$$x \in C(-) \Leftrightarrow [y \in C(+) \Rightarrow x \leqq y]$$
$$y \in C(+) \Leftrightarrow [x \in C(-) \Rightarrow x \leqq y].$$

参考　ここでいう切断の一例として（$\{x \mid x \leqq 0\}$，$\{y \mid y \geqq 0\}$）を挙げてみよう。この例に対応するものを旧来の書物にある Dedekind の切断で探すと（$(-\infty, 0]$，$(0, +\infty)$）と（$(-\infty, 0)$，$[0, +\infty)$）の2通りである。

一般にRの部分集合Sに対してRの部分集合$S^{\pm}$を次のように定める：

$$S^{-} = \{x \in R \mid y \in S \Rightarrow x \leqq y\}$$
$$S^{+} = \{y \in R \mid x \in S \Rightarrow x \leqq y\}.$$

定理　Rの部分集合Sに対してSは$S^{+-}$，$S^{-+}$の部分集合であり、$S^{+-+} = S^{+}$，$S^{-+-} = S^{-}$である。

例1　実数aに対して$C(\pm) = \{a\}^{\pm}$と定めると（$C(-)$，$C(+)$）は切断である。

例２　正値単調減少数列 $\{a_n\}$ に対して $A=\{a_n \mid n：自然数\}$ とする。ここで $C(-)=A^-$，$C(+)=A^{-+}$ と定めると（$C(-)$，$C(+)$）は本稿の意味で切断である。

前切断（$C(-)$，$C(+)$）は正数 $\varepsilon$ ごとに $C(\pm)$ の元 $c^{\pm}$ で $c^+-c^-\leqq\varepsilon$ をみたすものをもつとき**実効的**であるという。以下広義積分を切断として論じよう。上に述べたように切断というだけでは必ずしも下部集合と上部集合の境目を実効的に見せるわけではない。

$n$ を自然数とし $f^+$，$f^-$ を $R^n$ の有界部分集合 $S$ 上の非負値関数とする。さて実数 $a$，$b$ が次の性質をみたすとき、それぞれ $\int f^+-f^-ds\geqq a$，$\int f^+-f^-ds\leqq b$ と表す：

$$\forall a'<a\ \exists\rho^+>0\ \forall\rho^->0\ \exists F^-\ \forall F^+\quad |F^+|-|F^-|\geqq a'$$
$$\forall b'>b\ \exists\rho^->0\ \forall\rho^+>0\ \exists F^+\ \forall F^-\quad |F^+|-|F^-|\leqq b'$$

ここに $F^{\pm}$ は複号にしたがってそれぞれ $f^{\pm}$ のグラフの $\rho^{\pm}$ 部分の矩形による有限被覆とし、$|F^{\pm}|$ をその広さとする。

広義積分の前切断定理　$S$ 上の非負値関数 $f^{\pm}$ に対して次の $C(\pm)$ は前切断をなす：

$$C(-)=\{a\in R \mid \int f^+-f^-ds\geqq a\}$$
$$C(+)=\{b\in R \mid \int f^+-f^-ds\leqq b\}.$$

証明　与えられた $a$，$b$ に対して次の条件を満たす実数 $a'$，$b'$ を考えよう：

$$a'<a,\ b'>b \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

このとき $\rho^+$ を $\int\geqq a$ の，$\rho^-$ を $\int\leqq b$ の定義にしたがってとり、それぞれをもう一方の定義式に代入する。同様にして $F^+$，$F^-$ をとることにより $a'\leqq b'$ を得る。これが（＊）をみたすすべての $a'$，$b'$ に対して成立するので $a\leqq b$ である。

こうやって得られる前切断が（$f^+$，0），（$f^-$，0）のいずれに対しても実効的であるときは（$f^+$，$f^-$）に対しても実効的な切断をなす。以下ではさらに $S$ の広さが実効的であるとしよう。$S$ 上の広義０次連続関数 $f$ が広義０次連続関数の差 $f^+-f^-$ と表され、（$f^+$，$f^-$）によって得られる前切断が実効的な切断をなしているときには、得られる切断は広義積分の加法性により表し方に依存しない。この値が $f$ の $S$ 上の広義積分である。一般的に $f^{\pm}$ が０次連続であれば上記の前切断は実効的な切断をなす。また広義０次連続関数 $f$，$g$ が $f\geqq g\geqq 0$ をみたし、（$f$，0）に対する前切断が実効的な切断をなすときは（$g$，0）に対する前切断も実効的な切断をなす。

# MILNOR CLASSES AND VANISHING CYCLES

Jörg Schürmann

February 19, 2004

The classical Milnor number of an isolated hypersurface singularity has been generalized in recent years to the Milnor class of a local complete intersection $X$ in a complex manifold. They are the difference of two kinds of Chern classes for the singular space $X$, i.e. Fulton and Schwartz-MacPherson Chern classes. After recalling the history of this subject, we explain our algebraic geometric approach to the Milnor classes in terms of generalized vanishing cycles. Here we use the famous deformation to the normal cone. Our result gives a far reaching generalization of Parusinski-Pragacz's formula for the hypersurface case. Moreover, it can easily be localized at the singular locus of $X$, as in the related work of Brasselet-Lehmann-Seade-Suwa.

Universität Münster
*E-mail address*: jschuerm@math.uni-muenster.de

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

# Burgers Turbulence and Random Lagrangian Dynamics

Khanin Kostya
(Newton Institute Cambridge, U.K.)

**Abstract**

Statistical properties of solutions of the random forced Burgers equation (Burgers turbulence) have recently been a subject of intensive studies. We shall discuss a new approach to the analysis of the stationary measures for solutions which is based on the variational principle and the theory of hyperbolic dynamical systems. We shall also discuss a connection between the global structure of singularities (shocks) and the topology of the space-time manifold.

# On real transverse sections of holomorphic foliations

伊藤　敏和　（龍谷大学）

**Abstract**

Let $\omega$ be a holomorphic integrable one form on $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, and $M$ a closed smooth manifold of dimension $2n-1$. We have a fundamental question :

Question: Is there a smooth embedding $\varphi$ of $M$ into $\mathbb{C}^n$ which is transverse to the foliation $\mathcal{F}(\omega)$ defined by $\omega = 0$ in $\mathbb{C}^n$ ?

In this lecture, we give a partial answer to this question

# Formula for Computing Indices of Vector Fields on Singular Vareties

Xavier Gómez-Mont
(CIMAT and RIMS)

**Abstract**

An isolated singular point of a complex analytic variety may be thought as a space that has some 'hidden' topology in the singular point. One way to figure out how much topology is hidden in the singularity is to exploit the relationship between indices of vector fields and Euler characteristics of manifolds, as expressed for example in Poincare-Hopf's Theorem (The sum of the indices of a vector fields with an isolated singularity is equal to the Euler characteristic in compact orientable manifolds). The Poincare-Hopf index in singular spaces is known as the GSV-index.

In the complex and real analytic category the Poincare-Hopf index is computed using local algebra (ie, the ring of germs of holomorphic functions, its ideals and modules). We give extensions of these local methods to the GSV-index, for hypersurfaces and complete intersections.

The basic tools come from Homological Algebra, and include Koszul complexes, the mapping cone construction and the Buchsbaum-Eisenbud complex.