２０００年度談話会・特別講演 アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by Y. Giga and H. Yamashita

Series #67. June, 2001

２０００年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次

２０００年度　談話会・特別講演一覧

1. 5月　2日 (火) * 秋　田　利　之　氏 (北海道大)　Finite subgroups of mapping class groups of surfaces and characteristic classes of surface bundles
2. 5月　2日 (火) * 利根川　吉　廣　氏 (北海道大)　Constant mean curvature surfaces in the hyperbolic space
3. 5月17日 (水)　臼　井　三　平　氏 (大阪大)　Logarithmic Hodge structures and their moduli
   — Generalizations of theories of Mumford and Griffiths — (Joint work with Kazuya Kato)
4. 6月　6日 (火) * 梅　田　　亨　氏 (京都大)　典型群の普遍包絡環の中心元の関係について
5. 6月22日 (木) * 渕　野　　昌　氏 (北見工大)　カントルの絶対と連続体問題
6. 6月28日 (水)　鍬　田　政　人　氏 (Universite de Caen)　楕円曲線の quadratic twist と Kummer 曲面上の有理曲線
7. 7月　5日 (水) * 佐　野　隆　志　氏 (山形大)　On minimal dynamical systems
8. 7月12日 (水) * 西　浦　廉　政　氏 (北海道大)　パターン形成の最近の話題から
9. 7月12日 (水) * 向　井　　茂　氏 (名古屋大)　Verlinde 公式とベルヌーイ数の幾何
10. 7月17日 (月)　Steve Zucker 氏 (John Hopkins University)　Compactifications of $\Gamma\backslash D$
11. 7月13日 (木) * Robert Szoke 氏 (Eotvos University)　Complexification of Riemannian manifolds
12. 9月　6日 (水) * Jun-Muk Hwang 氏 (KIAS)　Cartan-Fubini type extension of holomorphic maps
13. 9月　8日 (金) * Miles Reid 氏 (University of Warwick)　McKay correspondence: Where do we go from here ?
14. 10月10日 (火) * 渕　野　　昌　氏 (北見工大)　非可測集合は存在するのか？
15. 10月16日 (月) * Piotr Rybka 氏 (Warsaw University)　An application of the center manifold theory to convergence theorems for PDE's
16. 10月25日 (水) * 秦泉寺　雅　夫　氏 (北海道大)　量子コホモロジーと微分方程式
17. 10月25日 (水) * 高　岡　秀　夫　氏 (北海道大)　On well-posedness of the KdV equation for rough data
18. 10月30日 (月) * Gunther Cornelissen 氏 (Max-Planck-Institut für Mathematik)　Arithmetic of Zeros of Eisenstein Series
19. 11月　9日 (木) * 濱　名　裕　治　氏 (九州大)　ランダム・ウォークの訪問点の個数に関する大偏差原理について
20. 11月20日 (月) * 竹　内　　泉　氏 (京都大)　λ方体の中の共形性とパラメトリシティー
21. 11月21日 (火)　岡　部　靖　憲　氏 (東京大)　離散時間のギルサーノフ分解とその金融工学への応用
22. 11月21日 (火) * 石　原　　哉　氏 (北陸先端科学技術大学院大)　Feasibly constructive analysis

23. １１月２２日（水）＊Alastair King 氏（University of Bath）　Almost Koszul Algebras

24. １１月２２日（水）＊Weiqiang Wang 氏（North Carolina State University）　The McKay correspondence: themes and variations

25. １１月２９日（水）　佐　藤　　坦　氏（九州大）　Sierpiński gasket as a Martin boundary

26. １１月３０日（木）＊竹　田　雅　好　氏（東北大）　Large deviation principle for additive functionals corresponding to Kato measures

27. １２月１２日（火）＊陳　　志　明　氏（中国科学院）　Adaptive Finite Element Methods for Nonlinear PDEs

28. １２月２０日（水）＊中　村　　郁　氏（北海道大）　平面３次曲線のはなし——Hesse から Mumford へ

29. １２月２０日（水）＊八　木　厚　志　氏（大阪大）　パターン形成現象の拡散方程式モデルによる解明に向けて

30. 　１月１１日（木）＊Bernhard Ganter 氏（Dresden University of Technology）　Formal methods for conceptual and contextual knowledge

31. 　１月２３日（火）＊嘉　田　　勝　氏（北見工大）　ブール代数上の無限ゲームと強制法理論

32. 　２月２０日（火）＊角　田　秀一郎　氏（奈良女子大）　「同じ」と「違う」：カオス編

33. 　２月２２日（木）＊中　村　　玄　氏（群馬大）　音響散乱の逆問題

34. 　３月１５日（木）＊落　合　　理　氏（東京大）　肥田理論、ガロア表現と岩澤理論

35. 　３月１６日（金）＊落　合　　理　氏（東京大）　加藤オイラー系と２変数 p-adic L-function

FINITE SUBGROUPS OF MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES AND CHARACTERISTIC CLASSES OF SURFACE BUNDLES

秋田 利之

Σ_g を種数 $g \geq 2$ の向きづけられた閉曲面, $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ を Σ_g の向きを保つ微分同相全体のなす群とする (位相は C^∞-位相). $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の連結成分のなす群 Γ_g を Σ_g の 写像類群 とよぶ.

写像類群のコホモロジーは位相幾何と代数幾何にまたがる重要な研究対象である. 実際 $B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ を $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ の分類空間 (すなわち向きづけられた Σ_g-束の分類空間) とすると, Earle-Eells [?] の結果により Γ_g の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\Gamma_g, 1)$ は $B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ とホモトピー同値であり, 従って両者のコホモロジーは一致する:

$$H^*(\Gamma_g, \mathbb{Z}) \cong H^*(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g, \mathbb{Z}).$$

従って Γ_g のコホモロジー類は, 向きづけられた Σ_g-束の (universal な) 特性類と考えられる. 一方で種数 g のコンパクト Riemann 面のモジュライ空間 M_g と Γ_g の有理係数コホモロジーは同型であることが知られている:

$$H^*(M_g, \mathbb{Q}) \cong H^*(\Gamma_g, \mathbb{Q}).$$

Γ_g のコホモロジー類の中で最も重要なものが, 森田茂之氏 [?] と Mumford [?] により独立に定義された 森田-Mumford 類 $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ であり, 位相幾何の観点からは次のように定義される. $\pi : E \to B$ を向きづけられた Σ_g-束 (Σ_g をファイバーとする向きづけられた滑らかなファイバー束), $T_{E/B}$ を π のファイバーに沿った接束とする. $T_{E/B}$ は E 上の向きづけられた実 2 次元ベクトル束である. π の (第 n) 森田-Mumford 類は

$$e_n(\pi) := \pi_!(e(T_{E/B})^{n+1}) \in H^{2n}(B, \mathbb{Z})$$

により定義される. ここで $e(T_{E/B}) \in H^2(B, \mathbb{Z})$ は $T_{E/B}$ の Euler 類,

$$\pi_! : H^*(E, \mathbb{Z}) \to H^{*-2}(B, \mathbb{Z})$$

は Gysin 準同型である. 上の構成の自然性により (universal な) 森田-Mumford 類 $e_n \in H^{2n}(\Gamma_g, \mathbb{Z})$ が定義される (Mumford はモジュライ空間 M_g の有理コホモロジー類として e_n に当たるものを導入した).

$\mathbb{Q}$-係数コホモロジーにおける森田-Mumford 類の性質は, 位相幾何と代数幾何の両面から活発に研究され, 多くのことが知られている (例えば [?] を参照). 一方で整係数コホモロジーにおける森田-Mumford 類の振る舞いは ($\mathbb{Q}$-係数の場合からわかることを除いて) あまり知られていないように思える.

離散群のコホモロジーを調べる一つの手段として, その有限部分群たちのコホモロジーを調べることが挙げられる (後者は前者の「一次近似」と考えることができる). 筆者は写像類群の有限部分群上での, 森田-Mumford 類の振る舞いを調べることにより, 興味深い結果をいくつか得ることができた (部分的には河澄響矢氏, あるいは河澄・植村毅両氏との共同研究による). 講演ではそれらの結果 (mod p 森田-Mumford 類の冪零性, 有限部分群の森田-Mumford 類と同変コボルディズムおよび G-符号数との関係) といくつかの予想を解説した.

北海道大学大学院理学研究科数学専攻

E-mail address: akita@math.sci.hokudai.ac.jp

Constant mean curvature surfaces in the hyperbolic space

利根川吉廣　（北大理学部）

この講義では定曲率双曲型空間内におけるプラトー型問題について関連することも含め述べる。これは双曲型空間の無限遠に閉じた曲面を与えた時、これを漸近的境界として持つような極小曲面が存在するか否か、また正則か、というものである。１９８０年頃、M. Anderson によって広いクラスの無限遠内曲面に対して極小曲面が存在することが示され、その後 R. Hardt, F.-H. Lin らにより無限遠近傍の極小曲面の正則性などが示された。無限遠近傍での正則性を調べるには境界で退化する非線形偏微分方程式を調べることになり、次元によってその性格が大きく異なる。特に３次元極小曲面が無限遠で正則である必要十分条件は無限遠で与えられた２次元曲面がいわゆる Willmore 曲面であることであることが知られている。一般に同様な必要十分条件が奇数次元極小曲面に対して存在し、一次元高い階の非線形偏微分方程式によってその条件は与えられている。偶数次元においては極小曲面は与えられた無限遠曲面と同等な正則性をおおまか持つことが示されている。同様な問題が定平均曲率曲面で、平均曲率が１より小さい場合に対しても考えられるが、正則性の状況などはまた異なるものとなる。以上のことを具体的な計算を交えて講義し、また共形幾何との係わり合いでこの無限遠近傍の正則性が問題となる点などについても触れる。

典型群の普遍包絡環の中心元の関係について

== 於 北海道大学理学部 特別講演 ==

== 2000.6.6 ==

梅田 亨 (京都大学)

タイトルにある典型群とは GL_n, O_n, Sp_n (一般線型群，直交群，シンプレクティック群) を指し，これらの Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n), U(\mathfrak{o}_n), U(\mathfrak{sp}_n)$ および，その中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n), ZU(\mathfrak{o}_n), ZU(\mathfrak{sp}_n)$，又はそれぞれの群による普遍包絡環の不変式環 $U(\mathfrak{gl}_n)^{GL_n}, U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}, U(\mathfrak{sp}_n)^{Sp_n}$ が考察の対象である．但しここで中心と不変式環の差が実際にあるのは $ZU(\mathfrak{o}_n)$ と $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ だけである．以下すべて複素数体上で考える．

一般論で言えば半単純な Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し，Harish-Chandra 同型

$$ZU(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{h})^W = S(\mathfrak{h})^W$$

がある．ここに $\mathfrak{h}$ は Cartan 部分環で W は Weyl 群を表わす．上の典型群では $\mathfrak{h}$ は対角行列にとることができ，Weyl 群は対称群 $\mathfrak{S}_n$ かそれと $\{\pm 1\}^n$ または $\{\pm 1\}^{n-1}$ の半直積になる．これらは鏡映群で不変式環 $S(\mathfrak{h})^W$ は対称式環やそれを少し modify したものになって，よく判る．例えば対称式環の場合，生成系として基本対称式，完全斉次対称式，冪和対称式などがとれるし，線型な基底として Schur 多項式が取れる．これらは表現論的な意味がある．

さて，Harish-Chandra 同型

$$ZU(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})^W$$

の右辺はよく判ったとしても，左辺の対応物の具体的表示などはそんなによく判っていない．つまり，

(1) $ZU(\mathfrak{g})$ の元の具体的構成の問題と

(2) その Harish-Chandra 同型による像の計算

という問題は別の困難さを有する．もちろん (1) の問題だけなら対称化によって作れないわけではないが，それに対応する (2) の計算は困難である．

ところが，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ の時は，例外的にいろいろなものが具体的に表示され，かつ明確な判り方をする．典型的なのは Capelli elements というもので非可換な成分を持つ行列の行列式 (column determinant) で表示される．これは対称式のレベルでは基本対称式に当たる．これは実質 110 年以上前に A. Capelli によって得られていた事実である．

対称式の別の生成系である完全斉次対称式に対応する中心元も permanent によって具体的に書ける (Nazarov)．これらの関係は対称式では，母函数に移って簡単な

関係式 (母函数レベルでは本質的に逆数) になる．Nazarov は Yangian を用いてこれらを定式化した．より具体的元別に書き下したものは Wronski 関係式と呼ばれるが，Yangian 以外に Koszul 複体の完全性と Euler-Poincaré 原理を使って書くこともできる．

冪和対称式に対応するものは，トレースを使って書けるが，これは Gelfand(1950) によって与えられたものである．その中心元の Harish-Chandra 同型による像は Perelomov-Popov(1966) によって計算された．冪和対称式を基本対称式の関係は Newton の公式をして知られているが，$\mathfrak{gl}_n$ 版でも対応物がある．これは Yangian 派 (Olshanski, Molev, Nazarov) が Liouville formula と呼んでいるものである．

以上の話は $\mathfrak{gl}_n$ の場合で，Yangian 派が先行する結果を出している場合もあるが，そのような道具ではなく，外積代数を用いて直接導ける (集中講義で一端を説明した)．対して，直交リー環の場合には Howe-Umeda(Math. Ann. 1991) の Appendix にある中心元が例えば Capelli element に当たるものであろうと推測されるが，事情は $\mathfrak{gl}_n$ の場合ほど易しくない．しかし，実際それが確かめられる (伊藤稔 J. Lie Theory 2000)．これはまた $\mathfrak{o}_n$ の場合，Pfaffian で与えられる中心元と行列式で与えられる中心元の関係式とも密接につながる．これについては Itoh-Umeda (Compositio *to appear*) で明らかにされた．

シンプレクティックの場合には，具体的な中心元の記述やそれを用いての dual pair に附随した Capelli Identity などにいたるほどは判っていない．ある程度は Molev-Nazarov(Math. Ann. 1999) で判っているが，まだまだやるべきことは残っていて，現在進行形の話である．

中心元の関係式という点では，これら Lie 環の生成元を並べた行列に関して Cayley-Hamilton の定理が成り立つという著しい性質がある．上で述べた Newton 公式その他と密接に関係する事実である．

ほかに Multiplicity-free action に関係した Capelli Identity もこの話題につながり，いろいろな open problem もある．

「カントルの絶対と連続体問題」

渕野　昌氏（北見工大）

２０００年6月２２日（木）１６：３０～１８：３０
於北大数学南校舎（理学部４号館５－５０８教室）

講演要旨

集合論の創始者カントルは，彼の超限の理論で，すでに得られた超限順序数から，それより大きな超限順序数を作ってゆく，というプロセスの究極を「絶対」（Das Absolute）と呼んだ．これは今日の集合論の言葉では，集合の全体のクラス V に対応するが，カントルはこれを天地創造とむすびつけて考えており，彼自身は超限の理論を，（キリスト教の）神の絶対性の証明のようなものである，とすら考えていたようである．

神学的な議論はさておき，現在では，強制法 (forcing) と呼ばれる数学的手法により，V の仮想的な拡張が考えられるようになっている．カントルの精神の継承という観点からは，“V は generic extensions に対してもある種の絶対性を保持している” ということを数学的に表明しているような集合論の公理は “正しい” 公理と見なしてよいように思えるが，実際，Proper Forcing Axiom, Martin's Maximum といった 80 年代後半に導入された一連の公理やそれらの variations に対し，このような意味での絶対性の言葉による特徴付けが可能であることが最近判明している．このことは，Proper Forcing Axiom から（したがって，これより強い Martin's Maximum からも）連続体の濃度が $\aleph_2$ であることが導かれ，したがって連続体問題が（否定的に）解決されることを考え合わせると，非常に興味深いものがある．

本講演では，上に述べたような絶対性の議論による集合論の公理系の拡張に関する最近の結果を survey し，これに関連した連続体の数学でのいくつかの結果について解説する．

ON MINIMAL DYNAMICAL SYSTEMS

TAKASHI SANO

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
YAMAGATA UNIVERSITY

ABSTRACT. Let X be a compact metric space with a minimal action of a countable discrete group. And let us consider the orbit equivalence relation and a "finite" subrelation with a continuous cocycle. We define the index ratio set for the pair of equivalence relations to describe its structure.

パターン形成の最近の話題から

西浦 廉政

北海道大学電子科学研究所
情報数理研究分野

パターン形成理論はその名が示すとおり、非線形・非平衡系に現れる様々な散逸構造(パターン)の形成過程やダイナミクスに関わる数学理論の総称である。ゆらぎから生じる非自明な構造の生成を説明する分岐理論、パルス解などの大振幅解に対しても有効な幾何学的特異摂動論およびこれらに関わる力学系理論、界面運動の記述に不可欠な粘性解理論などの非線形偏微分方程式論、時空間の自己相似的パターンの解析に有効なくりこみ群などのスケーリング理論の考え方、カオス的振舞に対する統計的手法、パーコレーションの解析に有効な確率論的手法、そして複雑な時空パターンを再現する上で不可欠な様々な数値解析の方法などが関わってきた。これらは各々独自の発展をしてきたわけであるが、散逸構造の解明という課題が恰好の材料を与え、理論の発展に酵素的役割を果たしてきたのも事実である。その意味ではパターン形成に現れる様々な現象が直接、数学理論の形成に寄与したわけではむろんなく、発展する「場」を与えたというべきであろう。この実験と理論のつながりは重要である。実際、反応と拡散のみによりゆらぎから空間非一様なパターンが生成されるというシナリオは５０年代に既に Alan Turing により理論的に示されたが、実験的に非平衡化学反応系において確認されるには９０年代はじめまで待たなくてはならなかった。それは表面張力や対流などの流体力学的効果を排除するのが難しかったことによる。この実験的成功が起爆剤となり、それまで予想だにしなかった自己複製解をはじめとする多くの動的なパターンが実験室、そして計算機シミュレーションによって発見され、反応拡散系の新たなページが開かれた。それらの多くはこれまでの手法では理解が困難なものも多いが、同時にそれは新たな理論の発展の萌芽にもつながると期待されるものである。本談話会ではその一端を紹介したいと思う。

問題意識をはっきりさせるために、パターン形成理論のこれまでの発展を次のような切口で整理して見よう。以下では定常解、周期解あるいはカオス解などのある特定の解のクラスを「Object」とよぶことにする。

1. Object の発見物語
2. Object 間の弱い相互作用
3. Object 間の強い相互作用

むろんこれらの３段階は独立ではなく、螺旋的に発展してきたわけである。実際第２、第３段階は第１段階を踏まえてはじめて考察可能となる。第１段階は定常解、周期解、進行

波解、カオス解等の数値的発見、厳密な構成そしてそれらの安定性、分岐解析へとつながる様々な Object の発見物語とその諸性質の解析である。これは Turing の拡散不安定化 (Diffusion-driven Instability) のアイデアが提唱されて以来、綿々と続いている基本段階である。近年の一つの流れは第1段階で構成した Object が複数存在するときそれらの間の相互作用ダイナミクスを考えようというものである。相互作用をしているときの解の状態が Object のコピーを重ね合わせたもので良く近似されるならばそれは「弱い」相互作用とよぶことにする（第2段階）。Object が自分の identity を失わずに、尾 (tail) を通してのみ相互作用している状態といえる。フロントが複数存在するときの超微速運動、局在パルスや渦解が十分離れているときの運動はその典型例である。第3段階の「強い」相互作用はそれにより パターンの identity が失われてしまうものをいう。FitzHugh-Nagumo 方程式の進行パルス解の対消滅 (annihilation) は古くから知られている例である。近年実験室、あるいは計算機で発見された多くの解もこのカテゴリーに属する。例えば図1の**自己複製パターン** (self-replicating pattern) はその典型例である。これは一つの定常パルス解から出発して次々と自分と同じコピーを作り出すプロセスであり、最後には領域全体を埋め尽くす。ここで問題にしたいのは漸近挙動ではなく、そこにいたる分裂のダイナミクスである。すなわち途中の**遷移ダイナミクス**に興味がある。しかしこのような強い相互作用は解の大変形を伴うために、その記述は難しく、第1、2段階で開発された方法も有効ではない。それでは何をてがかりにすればよいのであろうか？ ヒントは図1をよく見れば、有限時間ではあるが1山パルス、2山パルス型定常解に近い形を軌道は通過していることにある。従ってそれらの定常解はアトラクターではないがなんらかの役割を果たしている考えられる。つまり**軌道の無限次元空間における動く道筋と定常解の関わり方**を明らかにする必要がある。これがここでの主題となる。

さて以上に述べた2種類の相互作用は現実のダイナミクスにおいては共存する。実際、図1における自己複製過程においても、分裂と分裂の間では互いに「反発」する弱い相互作用が支配的となっている。そして一定以上離れた後、はじめて分裂し始める。時間スケールで見るならば、一般に弱い相互作用はゆっくりとした「slow」タイムスケールであり、強い相互作用はすばやい「fast」スケールとなる。このスケールの違いを利用して弱い相互作用に対しては、なんらかの摂動的手法が有効であり、ダイナミクスを支配する不変多様体を構成することも一般に可能となる。他方強い相互作用の場合には現在のところ理論的に知られていることはほんのわずかである。さらに弱い相互作用と強い相互作用はどのように関連しているかについては全く未開拓と言ってよい。ここで最初に我々が考えたい問題は次である。

問題 1

自己複製パターンを駆動している数理的機構はなにか？

既に述べたように問題を困難にしているのは、これが解の大変形を伴う遷移ダイナミクスに関わってくるからである。アトラクターそのものではなく、そこに至る途中経過が重要となり、摂動的アプローチとは異なり、その軌道の良い第1近似を構成することは問題全体を解くこととほぼ同等になってしまう。そのように振舞わせているガイド役はなん

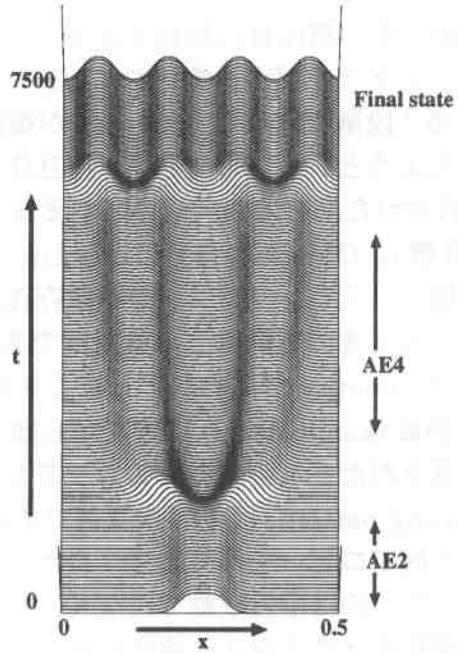

図 1: Gray-Scott モデルにおける 1 次元自己複製パターン ($F = 0.04, k = 0.06075, L = 0.5, N = 500$). ここで L は区間長、N は分点数。図では v のみの時空間変化を描いている.

だろうか？ここで無限次元空間における大域分岐解析が重要な役割を果たすこととなる。これには数値分岐解追跡ソフトウエアー AUTO が不可欠である。AUTO による解析が有用となるのは不安定解とそれに付随する不安定多様体の挙動について多くの情報を与えてくれ、それが無限次元空間における軌道の道筋と定常解の関わり方を明らかにしてくれるのである（AUTO は元々常微分方程式用に作られたものであり、そのまま偏微分方程式に適用してもうまく動かない。たとえ動いてもスパゲッティ状の複雑な網目が得られるだけで、情報を的確に取り出すには技術的な問題をいくつか克服する必要があることを注意しておく)。

さて図 1 では最終的には安定な定常解に落ち着いたが、もしこの受け皿の解が消滅するようなことがおこれば軌道はどのように振舞うであろうか？ 実際パラメータをそのように調節することは可能であり、図 2 はそのときの様子である。自己複製して、空間周期的なパターンが生成されるがそれらは永続せず、しだいに消滅し、ほとんど一様な状態にもどり、そこから幾つかのプロセスを経てまた自己複製パターンが生まれるということを繰り返す。それは時間周期的ではなく、いわゆる**時空カオス** (spatio-temporal chaos) とよばれるものとなる。時空カオスの理解には通常、統計的手法、例えば有限の相関時間および相関距離をもつ、あるいは Lyapunov 指数やスペクトル解析がよく用いられる。それらは重要な情報を与えてくれるが、パターン形成という空間構造に着目する立場からはやや不満足である。それは基本的にある有限次元空間に射影して、(有限次元) 力学系理論での成果を適用するという方法である以上、空間構造の情報をそのまま保持することは難しい。考えるべき問題は次のように述べられる。

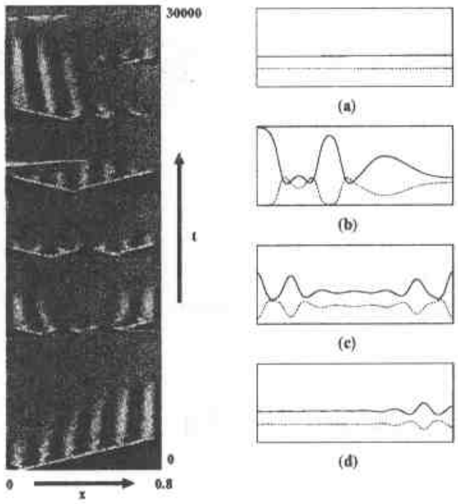

図 2: Gray-Scott モデルにおける時空カオス ($D_u = 2 \times 10^{-5}, D_v = 10^{-5}, F = 0.035, k = 0.05632$ および $L = 0.8$). 右のスナップショットは解がほぼ定数状態 P から出発し、次にいくつかの部分区間で $(u, v) = (1, 0)$ に落ち、そこから自己複製波が進み、定常パターンがしばらく現れ、そしてそれが自己崩壊して、再び P に戻る一つのサイクルを示している。

問題 2

いつ時空カオスがおこり (onset)、いつそれが消滅する (terminate) かの判定法を与えよ。また軌道はどのような空間パターンを経巡るかを決定せよ。

上に述べた無限次元空間での大域分岐解析によるアプローチはこの問題に対しても有効であり、かつ空間パターンの情報を与えてくれる。最後になったが、ここで述べる内容は上山大信との共同研究に基づく。

Verlinde公式とベルヌーイ数の幾何

向井　茂

一般の位置にある $(n+3)$点 $p_1, \dots, p_{n+3} \in \mathbb{C}^n$ と整数 $a \geq 0$ に対して、全次数が $a(n+1)$以下で各点 $p_1, \dots, p_{n+3}$ における m階の微係数が全ての $0 \leq m < a(n-1)$ に対して消える n変数多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ 全体のなすベクトル空間を $V_{n,a}$ とおく。このとき

$$\dim V_{n,a} = \frac{(-1)^{a(n+1)}}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\cos^{n+1} \frac{2\pi i}{k}} \qquad (k=2a+1)$$

が成立する。特に a の多項式として

$$\dim V_{n,a} = E_n \frac{(2a+1)^n}{n!} + (\text{低次項})$$

である。ここで、E_n は母関数

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}$$

より定まる自然数で、ベルヌーイ数の親類である。

Complexification of Riemannian manifolds

Robert Szoke
Eotvos University, Budapest, Hungary.

Abstract:
In a similar way as the real line sits in the complex plane, every real manifold admits a complexification. But the result is not unique. To obtain a canonical complexification one puts a Riemannian metricon the original manifold. The result of this unique complexification is called the adapted (to the metric) complex structure. In the talk we discussed some properties of this complex structure, its relation to the algebraic geometric (so called) good complexifications and also with its help we showed how to construct hyperkahler metrics on the tangent bundle of compact hermitian symmetric spaces.

CARTAN-FUBINI TYPE EXTENSION OF HOLOMORPHIC MAPS

JUN-MUK HWANG (KIAS, KOREA)

In the early twentieth century, Cartan and Fubini studied the equivalence problem of local hypersurfaces in complex projective spaces. The conjecture, which they proved only in low dimensions, was that if a local biholomorphism between the hypersurfaces preserves the second fundamental form and the Fubini cubic form, the biholomorphism can be extended to a projective motion of the ambient projective space. This conjecture was completely proved by Jensen and Musso in 1994, by using the method of moving frames developed by Cartan.

In another direction, T. Ochiai proved, in his thesis, that if a local biholomorphism between two connected open subsets of an irreducible Hermitian symmetric space of rank greater than 1 preserves the natural G-structure of the Hermitian symmetric space, it can be extended to a global automorphism of the Hermitian symmetric space. This result was generalized to compact homogeneous spaces of complex simple Lie groups by K. Yamaguchi. The proofs of Ochiai and Yamaguchi were done by showing the vanishing of certain Lie algebra cohomology groups.

In a recent joint work with Ngaiming Mok, we have discovered an extension theorem for biholomorphic maps defined on connected open subsets of a large class of Fano manifolds of second Betti number 1, which can be regarded as a common generalization of (weak versions of) the results of Cartan-Fubini-Jensen-Musso and Ochiai-Yamaguchi. The method we employ is the deformation theory of rational curves and the proof is different from the early works. Our result gives new information even for hypersurfaces and homogeneous spaces. We will discuss the main ideas of this work together with an application to the rigidity of generically finite morphisms over Fano manifolds.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

McKay correspondence: Where do we go from here?

by Miles Reid (Math. Research centre, University of Warwick)

Abstract of talk:

Let M be a quasiprojective algebraic manifold with K_M = 0
and G a finite automorphism group of M acting trivially
on the canonical class K_M; for example, a subgroup G in SL(n,C)
acting on C^n in the obvious way. We aim to study the quotient
variety X = M/G and its resolutions Y -> X (especially
under the assumption that Y has K_Y = 0) in terms
of G-equivariant geometry of M. As described in my Bourbaki
talk [M. Reid, La correspondance de McKay, Seminaire Bourbaki,
52eme annee, novembre 1999, no. 867, to appear in Asterisque
2000, preprint math/9911165, 20 pp.] we know 4 or 5
quite different methods of doing this at present,
taken from string theory, algebraic geometry, motives,
moduli, derived categories, etc.

For G in SL(n,C) with n = 2 or 3, we obtain several
methods of cobbling together a basis of the homology
of Y consisting of algebraic cycles in one-to-one correspondence
with the conjugacy classes or the irreducible representations of G.

The talk will describe some elements of this theory,
with a particular interest in looking forward
to possible future developments.

非可測集合は存在するのか？

渕野　昌氏（北見工大）

2000年１０月１０日（火）16:30-17:30
理学部４号館（４－５０８・第３講義室）

要旨

Giuseppe Vitali の1905 年（明治38年）の結果により，すべての実数の集 合に対して定義された translation invariant な測度は存在しない．特 に，ルベーグ可測でない集合が存在する．Vitali の証明を吟味すると，以 下のような自然な問題が浮びあがってくる：

(1) Vitali の証明では，「実数の全体が整列できる」，という選択公理か らの帰結が本質的に用いられている．このことを仮定しなかった場合にも 非可測集合の存在は言えるのか？

(2) Vitali の証明での非可測集合は実数の全体の整列可能性の仮定から構 成的に得られているが，非可測性を得るためには，実際にはどのくらい複 雑な実数の集合を考えなくてはならないのか？ 特に，解析学での自然な構 成法のみから非可測集合が作られてしまうことはあるのか？

(3) Vitali の結果での translation invariance を条件から除いたときには，すべての実数の集合に対して測度を定義することは可能か？

現在では，上の三つの問のすべてに対し，ほぼ完全な答が得られていると 言える．本講演では，現在までに知られている諸結果を概観し，関連した 問題について論じる．

参考文献

［１］ 新井仁之，解析学の展望，数学のたのしみ，No.19 (2000), 53--67.

［２］ A. Kanamori: The Higher Infinite, Springer--Verlag (1994),（A. カナモリ 著，渕野 昌 訳：巨大基数の集合論，シュプリンガー・フェアラーク東京(株) (1998), I -- VI, 1 -- 554.）

An application of the center manifold theory to convergence theorems for PPE's

Piotr Rybka
Warsaw University

We study the equation of viscoelasticity with capillarity. This equation arises in the study of van der Waals fluids and phase transition in solids.

For a variety of boundary conditions the set of equilibria is large i.e. its dimension is at least 1.

We show how we can use the theory of the center manifold to deduce that the ω-limit set is singleton. The approach based of a special scaling of equations and analysis of the energy functional near the center manifold.

量子コホモロジーと微分方程式

講演者: 秦泉寺 雅夫

この講演では、CP^{N-1} の k 次超曲面 M_N^k の量子コホモロジー環と微分方程式

$$\Big((\partial_x)^{N-1} - k\cdot e^x\cdot(k\partial_x+k-1)(k\partial_x+k-2)\cdots(k\partial_x+1)\Big)w(x)=0, \quad (1)$$

の関係について述べる。上の方程式は、$N=k$ の時には、カラビ-ヤウ超曲面の量子コホモロジー環をミラー予想を用いて決定する際に用いられる周期積分の満たす微分方程式であるが、一般の N,k に対する超曲面においては量子コホモロジー環の構造と上の微分方程式がどのように関係するかが、明解ではなかった。今回、上の微分方程式と量子コホモロジー環が、量子コホモロジー環に付随する ガウス-マニン系

$$\begin{aligned}
\partial_x\tilde{\psi}_\alpha(x) &= \tilde{\psi}_{\alpha+1}(x)+\sum_{d=1}^{\infty}\exp(dx)\cdot\tilde{L}^{N,k,d}_{N-2-\alpha}\cdot\tilde{\psi}_{\alpha+1+(k-N)d}(x),\\
0\le\alpha\le N-2, &\qquad (N-k\ge 1)\\
-1\le\alpha\le N-1, &\qquad (N-k=0)\\
\alpha\in\mathbf{Z}, &\qquad (N-k<0) \qquad (2)
\end{aligned}$$

を通じて等価と見なせることを指摘する。ここで有理数 $\tilde{L}^{N,k,d}_n$ は$N-k\ge 2$ の時には量子コホモロジー環の構造定数そのものであり、従って M_N^k 内の有理曲面の数え上げ問題に関する解答を与える。また $N-k\le 1$ の時も $\tilde{L}^{N,k,d}_n$ から量子コホモロジー環の構造定数を再現できる (厳密には $N-k\le -1$ の場合は予想の段階)。主結果は上のガウス-マニン系から $\tilde{\psi}_0(x)$ の満たすべき微分方程式を導いた時に、それが (1) に一致すると仮定することにより全ての $\tilde{L}^{N,k,d}_n$ が完全に決まってしまうということである。この結果は $\tilde{L}^{N,k,d}_n$ を別の方法で計算した場合の結果と一致する。したがって M_N^k 内の有理曲面の数え上げ問題に対して微分方程式 (1) を使って解答を与えるアルゴリズムを構成したことになる。

On well-posedness of the KdV equation for rough data

北海道大学 大学院理学研究科　　高岡 秀夫 (Hideo Takaoka)

非線形分散型波動方程式（線形分散関係式により求まる位相速度と群速度が異なる値を取る場合の方程式）の初期値問題の可解性、特に問題の適切性（微分方程式が与えられた時、初期値に対して解が存在し、一意に定まり、初期値の変化に対する安定性が成り立つ）について考える。ここでは関数解析的な解析による諸問題の検討を行う。

分散型の部類に属する方程式においては 放物型方程式に通有する様な平滑作用はなく、その事柄が問題の取り掛かりを難しくしている。しかし、正弦波に思い置く様に、波が十分に分散した状況下において解は激しく振動しているので その効果をうまく取り込めれば 平滑作用を担う効果が期待される。例えば、時間変数について何かしらの平均操作は有効な手段となる。事実、1970 年代 Strichartz による $L^p - L^q$ 評価式、いわゆる Strichartz 型評価式の整備によって 分散系方程式の一意可解性、更には適切性の研究は大きく進展した。また、近年の Bourgain による卓越した理論から見出せる様に、調和解析的手法を駆使して直接非線形問題を処理する試みが急速に実行されている。

今回は、様々な物理現象と関連して現れる KdV 方程式に限って上述事項を概説する。より詳しくは、KdV 方程式の初期値問題について、時間局所的な適切性が得られる最大の関数空間の設定問題を考える。

更に、先述にて議論された局所解に対して 大域解への接続問題を考える。通例、大域解は 局所解の存在証明と解の先験的評価式から得られる。この時、その評価式を与える術として 方程式から発見される保存則が有効に働く。しかし、保存則の有限性が失われる関数空間においては その流れによる先験評価式の構成法は適用出来ず、新たな議論が要求される。その方向に対する研究として Bourgain による方法論はあるが、如何に先行する局所解が長時間的かという問題の解決には至って否かった。この問題に対して、Colliander, Keel, Staffilani, Tao と私による共同研究から ある種の解決方法論を導くが可能である。ここでは その内容についても触れる。

Arithmetic of Zeros of Eisenstein Series

Gunther Cornelissen
(Max-Planck-Institut für Mathematik)

Abstract: Eisenstein series are the prototype of modular forms. In this talk, we will look at the zeros of the simplest such series for global function fields, focusing on the arithmetic properties of the divisor that these zeros cut out on the corresponding modular curve. They turn out to have properties that are very similar to those of classical orthogonal polynomials. Applications to supersingular reduction of Drinfeld modules will be mentioned.

ランダム・ウォークの訪問点の個数に関する大偏差原理について

濱名　裕治（九州大学大学院数理学研究院）

$\mathbb{Z}^d$ 上の（退化しない）ランダム・ウォークが時刻 $n-1$ までに訪れた点の個数（これを R_n と書く）については比較的古くから研究され，それぞれの次元に応じてさまざまな極限定理が証明されている．最も基本的なものは大数の法則であるが，これはシンプル・ランダム・ウォークのときに Dvorezky - Erdös によって示されさらに Kesten - Spitzer - Whitman によって一般の場合に拡張されている．次がその定理である．

定理（Kesten - Spitzer - Whitman）
　すべてのランダム・ウォークにたいして

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{n}=\gamma \quad \text{a.s.}$$

が成立する．ここで γ はランダム・ウォークが二度と出発点には戻らない確率である．

次元が3以上の場合は常に $\gamma>0$ であり，次元が1または2のときの γ は場合によっては（例えばシンプル・ランダム・ウォークのとき）0 であったりすることを注意しておく．この定理より特に R_n/n の確率分布は γ におけるデルタ測度に弱収束することがわかるが，ここで問題にするのはその収束の速さである．

一般に A を $\mathbb{R}$ 内のボレル集合としたときに

$$P\left(\frac{R_n}{n}\in A\right)$$

がどのような挙動をするかを考えたい．ある適当な性質を満たす関数 $I(x)$ が存在して

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P\left(\frac{R_n}{n}\in A\right)\leqq \inf_{x\in\bar{A}} I(x)$$
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P\left(\frac{R_n}{n}\in A\right)\geqq \inf_{x\in A^{\circ}} I(x)$$

が成立するとき大偏差原理が成り立つというが，一般にはまだ未解決である．

そこで $P(R_n\leqq xn)$ を考えてみる．実は劣加法性をもつ実数列の性質より $x\in[0,1]$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log P(R_n\leqq xn)$$

が存在することがわかる．この極限を $\zeta(x)$ と書くと，大数の法則より $x>\gamma$ のときは $\zeta(x)=0$ となる．問題は $x\leqq\gamma$ のときであるが，これは Donsker - Varadhan の結果を用いると，正規吸引域が安定分布であるとき，したがって特に平均が 0，分散が有限であるときは $\zeta(x)=0$ となることがわかる．つまりほとんどのランダム・ウォークについて $\zeta(x)=0$ と考えてよい．ここでの $P(R_n\leqq xn)$ の挙動については次の予想がある．

予想

すべての $x \in [0,1]$ にたいして次の極限が存在する．

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^{(d-2)/d}} \log P(R_n \leqq xn)$$

次に $P(R_n \geqq xn)$ を考える．このときの

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P(R_n \geqq xn)$$

の存在は自明でない．もちろん $x \notin [\gamma,1]$ のときはその存在は自明である．このことに関して次の定理が得られる．

定理（Hamana - Kesten）

すべての $x \in \mathbb{R}$ にたいして

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P(R_n \geqq xn)$$

が存在する．この極限値を $\psi(x)$ とかくと，ψ は次の性質を持つ．

$x \leqq \gamma$ のとき $\psi(x) = 0$

$\gamma < x \leqq 1$ のとき $0 < \psi(x) < \infty$

$x > 1$ のとき $\psi(x) = \infty$

ψ は $[0,1]$ 上連続で，$d \geqq 2$ ときは下に凸

ψ は $[\gamma,1]$ 上狭義単調増加

The Theory of Parametricity in Lambda Cube

Takeuti Izumi

Graduate School of Informatics, Kyoto Univ., 606-8501, JAPAN
takeuti@kuis.kyoto-u.ac.jp

Abstract. This paper defines the theories of parametricity for all system of lambda cube, and shows its consistency. These theories are defined by the axiom sets in the formal theories. These theories prove various important semantical properties in the formal systems. Especially, the theory for a system of lambda cube proves some kind of adjoint functor theorem internally.

1 Introduction

1.1 Basic Motivation

In the studies of informatics, it is important to construct new data types and find out the properties of such data types. For example, let T and T' be data types which is already known. Then we can construct a new data type $T \times T'$ which is the direct product of T and T'. We have functions *left*, *right* and *pair* which satisfy the following equations:

$\mathit{left}(\mathit{pair}\, xy) = x$, $\mathit{right}(\mathit{pair}\, xy) = y$ for any $x : T$ and $y : T'$,

$\mathit{pair}(\mathit{left}\, z)(\mathit{right}\, z) = z$ for any $z : T \times T'$.

As for another example, we can construct $\mathit{List}(T)$ which is a type of lists whose components are elements of T. We have the empty list $(\,)$ as the elements of $\mathit{List}(T)$, the functions $(-,-)$, which is so called sons-pair, and *listrec*. These element and functions satisfy the following equations:

$\mathit{listrec}(\,)\, fe = e, \quad \mathit{listrec}(x,l)\, fe = fx(\mathit{listrec}\, lfe)$

for any $x : T$, $l : \mathit{List}(T)$, $e : D$ and $f : T \to D \to D$, where D is another type. Moreover, we have list induction such that:

Suppose that if $P(l)$ then $P((x,l))$ for any $x : T$ and $l : \mathit{List}(T)$.

Then, if $P((\,))$ then $P(l)$ for each $l : \mathit{List}(T)$,

where $P(\,)$ is an arbitrary property over $\mathit{List}(T)$.

Polymorphic type theory is very powerful for describing new data types. One of the most famous polymorphic type theory is System F. Although we have only two type constructor $\to$ and Π in System F, we can encode the direct product $T \times T'$ as $\Pi X.(T \to T' \to X) \to X$ in System F. And also we can encode the functions *left*, *right* and *pair* as some terms in System F. Similarly, the type of the lists is encodes as $\Pi X.(T \to X \to X) \to X \to X$, and the elements and functions $(\,)$, $(-,-)$ and *listrec* are also encodable in System F. Under this encoding, we have the following equations up to beta-equivalence:

$\mathit{left}(\mathit{pair}\, xy) =_\beta x, \quad \mathit{right}(\mathit{pair}\, xy) =_\beta y$

$\mathit{listrec}(\,)\, fe =_\beta e, \quad \mathit{listrec}(x,l)\, fe =_\beta fx(\mathit{listrec}\, lfe)$

But, the term $pair(left\ z)(right\ z)$ is not beta-equivalent to z. Moreover, the statement of list induction is not described in System F, because System F is a system for construction and calculation of terms with type assignment. Thus, we cannot handle the equation $pair(left\ z)(right\ z) = z$ nor list induction with System F. We call such properties semantic properties.

Under such encoding, we have the problem that semantical properties are not derivable. In order to avoid this problem, we sometimes use models of data types which satisfy the semiantical properties, such as the equation $pair(left\ z)(right\ z) = z$ or list induction. Such models are often constructed in category theory or domain theory. But it is more useful to solve that problem only in type theory itself with a formal way.

Our aim is to make formal logical system over terms of a type theory, and to derive semiantical properties by the logical system. A successful example is the formal theory of parametricity over terms of System F, which is studied in some literatures [ACC, PA, T]. The theory of parametricity proves many semantical properties, such as the equation $pair(left\ z)(right\ z) = z$ or list induction. Therefore, we would like to extend the theory of parametricity into more strong or general type theory, that is, lambda cube.

1.2 Interpretation of Category Theory Into Type Theory

Although it is successful to describe and prove some semantical properties by the theory of parametricity over System F, there are much more useful notions and semantical properties which cannot be described in System F. Some of them are functors, natural transformations, and adjunction, which are provided by category theory.

In order to describe such notions which come from category theory in type theory, we have to describe the basic notions of category theory, such as objects, hom-sets and arrows, in type theory. By comparing the parametric models of System F in the literatures [Hasegawa1, Hasegawa2, BAC] with the formal theories of parametricity in the literatures [ACC, PA, T], we find out the interpretation of category theory into type theory as following:

Category theory		Type theory
Object	$\longrightarrow$	Type
Exponential object, Hom-set	$\longrightarrow$	Functional type
Arrow	$\longrightarrow$	Element of the type
Limit	$\longrightarrow$	Universal type

This interpretation is very attractive. Therefore, we preserve this interpretation in extending our theory.

According to the interpretation above, there exists a category which is interpreted as the collection of all types. Here, we write $*$ for the collection of all types, as is done by Barendregt [Barendregt], and we write $\mathbf{\Omega}$ for such category interpreted as $*$, as is done by Hasegawa [Hasegawa3]. Then, the functors of

$\mathbf{\Omega}$ into $\mathbf{\Omega}$ should be interpreted as a term of type $* \to *$. System F does not have the object of type $* \to *$, thus the functors are not internal objects in the formal theories of type theory in the literatures [ACC, PA, T]. On the other hand, the system $\lambda\omega$ in lambda cube has such objects of type $* \to *$, namely, $\lambda X : *. T \to X : * \to *$.

Our motivation is to extend the theory of parametricity to a formal logic which includes $\lambda\omega$, and prove some semantical properties on functors. For example, we will show the adjoint functor theorem for functors of $\mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}$, that is, if a functor of $\mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}$ preserves some kind of limits, then it has a left adjoint.

1.3 Lambda Cube

Lambda cube is studied by Barendregt [Barendregt]. It is a family of eight type assignment systems, which are $\lambda\!\!\to$, λP, $\lambda 2$, λP2, $\lambda\underline{\omega}$, λP$\underline{\omega}$, $\lambda\omega$ and λPω. The system $\lambda 2$ is equivalent to System F, and λPω is equivalent to the system of calculus of construction. We define the theory of parametricity for each system of lambda cube by using conformity relation.

The definitions for eight systems are uniform. That is only the reason that we define the theory of the parametricity for all of eight systems, nevertheless the theory of parametricity for $\lambda\!\!\to$, $\lambda\underline{\omega}$ or λP$\underline{\omega}$ is not so important.

We use λP2 as predicate logic for $\lambda\!\!\to$, λP, $\lambda 2$ and λP2, and we use λPω as predicate logic for $\lambda\underline{\omega}$, λP$\underline{\omega}$, $\lambda\omega$ and λPω.

The systems λP2 and λPω seem stronger than what is necessary as predicate logic over $\lambda 2$ and $\lambda\omega$, because terms and proofs are not separated in the systems. Actually, the predicate logic for System F in precedent works [PA, T] is a subsystem of λP2. Barendregt also provides other family of systems named logic cube, in which terms and proofs are separated. But they have more constants and rules than λP2 and λPω. We use λP2 and λPω because of the simplicity of rules. We can separate terms and proofs in the discussion of this paper easily, and it makes no problem.

The system λP with equality has a power enough to play the role of predicate logic for λP. But the rules of equality destroys our uniformity. Therefore, we use λP2 as predicate logic for λP, although λP2 is much stronger than what is necessary.

1.4 Related Works

The original meaning of parametricity was as a notion for models of polymorphic calculi, such as System F, which is second order lambda calculus studied by Girard [Girard]. More recently, many researchers have had interest in parametricity in formal logic. In this paper we also discusses parametricity in formal logic.

In the sense of Reynolds [Reynolds], parametricity is the property that if f is of universal type $\Pi X.F[X]$ then $fT(F[R])fU$ holds for all types T and U and for all relations R between the domains of T and of U. We regards the parametricity notion as extended into the notion for all types, just as Plotkin and Abadi [PA] do.

Abadi, Cardelli and Curien [ACC] propose System R, a formal system for parametricity. It is a logical system for binary relations between terms of System F. Because it deals only with binary predicates, its expressive power is rather weak.

Hasegawa [Hasegawa1, Hasegawa2, Hasegawa3] makes a categorical model for polymorphism. If it is parametric, then it is a categorical model for System R. By formalising his informal logic in [Hasegawa1, Hasegawa2], we can obtain a formal treatment of parametricity in formal second order predicate logic, Such formal treatment is equivalent to the treatment in [PA, T]. Hasegawa [Hasegawa1, Hasegawa2] does not show the existence of the relation-frame which is parametric for all the types of System F, although he shows the existence of the relation-frame which is parametric for some particular types, such as pair types, sum types, natural numbers, and so forth.

Bellucci, Abadi, and Curien [BAC] construct a model of System R from a partial equivalence relation model of System F. This is a model theoretic proof of the consistency of the theory of parametricity.

Plotkin and Abadi [PA] formalise parametricity based on a second order predicate logic. In their system, the basic logic is not specialised to the treatment of parametricity, and the axioms implement the parametricity. Takeuti [T] gives a syntactic proof of the consistency of their system.

As a formal logical systems for dealing with semantic properties, Pfenning and Paulin-Morling [PP] proposed calculus of construction, which is equivalent to $\lambda P\omega$. They showed that calculus of construction can describe many semiantic properties. The set of axioms which we will give in this paper proves such semiantic properties.

There are some works to formalise category theory in type theory. One of them is by Huet et al [HS]. They work is to formalise category theory in Coq. In their work, both objects and arrows in category theory are interpreted as ground level object, or terms, in type theory, and Hom-set is interpreted as a ternary relation of the arrow, the domain and the codomain. That is directed to another direction than our interpretation, and therefore we cannot apply theory of parametricity for their work.

1.5 Outline

Section 2 has the brief introduction of lambda cube and the definitions of our notations. Section 3 has the definitions of conformity relation and of the axioms of parametricity. Section 4 has our interpretation of category theory into lambda cube. Especially, the adjunction theorem is proved in Section 4. Section 5 has concluding discussion.

2 Lambda Cube

2.1 Lambda Cube as a Type Assignment System

Lambda Cube is a family of eight systems studied by Barendregt. We will give the definition of them. We use the term 'phrase' instead of 'term' or 'expression'. First of all we will define the notions of prephrases and prebases.

Definition 2.1.1 (Prephrase) A syntactic class of *prephrases* are defined by the following syntax:

$M ::= Var \mid \Box \mid * \mid \lambda Var : M.M \mid MM \mid \Pi Var : M.M$

where *Var* is a *variable*. There are of infinitely many variables. Parentheses are supplied to parse, as $(\lambda x{:}M.M')(M''M''')$. The symbols λ and Π bind variables. The notions of *free variables*, *α-equivalence*, *substitution of variables*, and *β-reduction* are defined in the ordinary manner. We identify α-equivalent prephrases. We write $FV(M)$ for the set of all the free variables of M. We write $M[M'/x]$ for the prephrase given by substitution of x with M' in M.

Definition 2.1.2 (Prebasis) A prebasis is a finite sequence of expressions $x : M$ in which x is a variable and M is a prephrase which satisfies the following conditions. A sequence $\Gamma \equiv x_1 : M_1,\ x_2 : M_2,\ \ldots,\ x_n : M_n$ is a prebasis iff for each i,

$x_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\} \cup \bigcup_{1 \leqq j \leqq i} FV(M_j)$

The set $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is called the domain of Γ, and written as $dom(\Gamma)$. The length n may be 0, thus, an empty sequence is also a prebasis. An expression $x : M$ is called a *clause* in a prebasis. A prebasis Γ is equivalent to another prebasis Γ' iff Γ is a permutation of Γ'. We write $\Gamma \simeq \Gamma'$ when Γ is equivalent of Γ'. Note that $\Gamma \simeq \Gamma'$ only if both Γ and Γ' are prebases.

Definition 2.1.3 (Subsequence) Let Γ and Γ' be two prebases. The relation $\Gamma \underline{\ll} \Gamma'$ holds iff there is a sequence $i_1, i_2, \ldots, i_n$ such that:

$1 \leqq i_1 < i2 < \cdots < i_n \leqq m$

$\Gamma \equiv\ x_{i_1} : M_{i_1},\ x_{i_2} : M_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_n} : M_{i_n}$

$\Gamma' \equiv\ x_1 : M_1,\ x_2 : M_2,\ \ldots,\ x_m : M_m$

We write $\Gamma \leq \Gamma'$ and say that Γ is a *subsequence* of Γ' when there is a prebasis Γ'' such that $\Gamma \underline{\ll} \Gamma''$ and $\Gamma'' \simeq \Gamma'$. It is easily seen that $\leq$ is a reflexive transitive relation, and if $\Gamma \leq \Gamma'$ and $\Gamma \geq \Gamma'$ then $\Gamma \simeq \Gamma'$.

Definition 2.1.4 (Marge) Let Γ, Γ' and Γ'' be three prebases. The basis Γ is a *merge* of Γ' and Γ'' iff $\Gamma \leq \Gamma'$, $\Gamma \leq \Gamma''$ and each clause $x : M$ in Γ appears either in Γ' or in Γ''.

Definition 2.1.5 (Lambda Cube) Let *Cube* be a set of symbols such that $Cube = \{\rightarrow, \mathrm{P}, 2, \mathrm{P2}, \underline{\omega}, \mathrm{P}\underline{\omega}, \omega, \mathrm{P}\omega\}$. A set $\lambda Cube$ consists of λS for all $S \in$

Cube. A map $|\cdot|$ is an injection of *Cube* into the power set of $\{*, \Box\}^2$, which is defined as below.

$$
\begin{array}{lcllll}
|\rightarrow| & = & \{ \langle *,* \rangle & & & \} \\
|\mathrm{P}| & = & \{ \langle *,* \rangle, & \langle *,\Box \rangle & & \} \\
|2| & = & \{ \langle *,* \rangle, & & \langle \Box,* \rangle & \} \\
|\mathrm{P2}| & = & \{ \langle *,* \rangle, & \langle *,\Box \rangle, & \langle \Box,* \rangle & \} \\
|\underline{\omega}| & = & \{ \langle *,* \rangle, & & & \langle \Box,\Box \rangle \} \\
|\mathrm{P}\underline{\omega}| & = & \{ \langle *,* \rangle, & \langle *,\Box \rangle, & & \langle \Box,\Box \rangle \} \\
|\omega| & = & \{ \langle *,* \rangle, & & \langle \Box,* \rangle, & \langle \Box,\Box \rangle \} \\
|\mathrm{P}\omega| & = & \{ \langle *,* \rangle, & \langle *,\Box \rangle, & \langle \Box,* \rangle, & \langle \Box,\Box \rangle \}
\end{array}
$$

Each $\lambda S \in \lambda Cube$ is a type assignment system The judgements have a form $\Gamma \vdash A : B$ where Γ is a prebasis, and A and B are prephases. The derivation rules for each λS is the followings.

Initial rule:

$$\frac{}{\vdash * : \Box}$$

Tautology:

$$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \quad (s \in \{*, \Box\})$$

Exchange:

$$\frac{\Gamma \vdash A : B}{\Gamma' \vdash A : B} \quad (\Gamma \simeq \Gamma')$$

Weakening:

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma' \vdash A' : B'}{\Gamma'' \vdash A' : B'}$$
(Γ'' is a merge of Γ and Γ')

Quantification:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : s \qquad \Gamma \vdash A : s'}{\Gamma \vdash \Pi x : A . B : s} \quad (\langle s', s \rangle \in |S|)$$

Abstraction:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash \Pi x : A . B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A . M : \Pi x : A . B}$$

Application:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi x : A . B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B[N/x]}$$

Beta-Conversion:

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B : s \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'}$$
($s \in \{*, \Box\}$, B is β-equivalent to B' by one-step β-conversion.)

Only the rule of quantification depends on S. All the other rules are common.

Lemma 2.1.6 *Strong normalisability, confluency and subject reduction property on β-reduction hold for each λS.*

Proof. Shown in the literature [Barendregt]. □

Definition 2.1.7 (Term, Type, Formula, Predicate, Kind, Phrase, Basis)
A prephrase A is a *kind* iff some λS derives $\Gamma \vdash A : \Box$.
A prephrase T is a *type* iff some λS derives $\Gamma \vdash T : *$.
A type is also called a *formula*.

A prephrase P is a *predicate* iff some λS derives $\Gamma \vdash P : A$ for some kind A.
A prephrase M is a *term* iff some λS derives $\Gamma \vdash M : T$ for some type T.
A prephrase is a *phrase* iff it is a term, a predicate, a kind, or $\Box$.
A prebasis Γ is a *basis* iff some λS derives $\Gamma \vdash A : B$.

Notation 2.1.8 A notation $A \to B$ is an abbreviation of $\Pi x : A. B$, where x is fresh. We write $\lambda x^T.e$ and $\Pi x^T.P$ for $\lambda x{:}T.e$ and $\Pi x{:}T.P$. We write $\lambda xy.e$ for $\lambda x^T.\lambda y^U.e$, and $\Pi xy.P$ for $\Pi x^T.\Pi y^U.P$, and so forth.

Notation 2.1.9 We write $e =_\lambda f$ for β-equality, because we sometimes use β as a meta-variable.

2.2 Lambda Cube as a Logical System

We regard λS's as logical systems as well as type assignment systems. Thus, we define the notions of axioms, theorems and so forth over the systems of λS's.

Definition 2.2.1 (Infinite Basis) Let $\Gamma = \{x_i : T_i\}_{i<\alpha}$ be an infinite set indexed by ordinal numbers less than an infinite ordinal number α, where for each $i < \alpha$, x_i is a variable and T_i is a phrase. The indexed set Γ is an *infinite λS-bases*, or an *infinite bases* of λS, iff for each $i < \alpha$,
– $x_i \notin \{ x_j \mid j < i\}$, and
– there is a finite sequence of ordinal numbers $i_1, i_2, ..., i_n$ such that $0 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n < i$ and λS derives $x_{i_1} : T_{i_1}$, ..., $x_{i_n} : T_{i_n} \vdash T_i : s$ where s is $*$ or $\Box$.
For a bases or infinite basis Γ and an infinite bases Γ, the relation of subsequence $\Gamma \leq \Gamma'$ is defined in the similar way to that for finite sequences.

Definition 2.2.2 (Derivation of Infinite Basis) For an infinite λS-basis Γ, we say that λS derives $\Gamma \vdash A : B$ when there is a basis Γ' such that $\Gamma' \leq \Gamma$ and λS derives $\Gamma' \vdash$.

Definition 2.2.3 (Axiom Set, Theorem) Let $A \equiv \{a_i : A_i\}_{i<n+n'}$ be an finite or infinite bases of λS such that λS derives $\vdash A_i : *$ for each i. Then, we sometimes regard A as an *axiom set*. If λS derives $\Gamma \vdash P : *$ and $\Gamma, A \vdash M : P$ for some phrase M, then we call P a *theorem* of A, and we say that A *proves* P in λS.

Notation 2.2.4 We use the following notations when we regard these types as formulae.

$$P \supset Q :\equiv P \to Q, \quad \forall x^T.P :\equiv \forall x : T.P :\equiv \Pi x : T.P,$$
$$P \wedge Q :\equiv \forall X^*.(P \supset Q \supset X) \supset X.$$
$$x = y :\equiv \forall X^{T \to T \to *}.\, Xx \supset Xx, \quad \mathcal{E}q_T :\equiv \lambda x^T y^T.\, x = y$$

Let P and Q be predicates of kind $A \equiv \Pi x_1^{T_1} ... x_n^{T_n}.*$, then

$$P \sqsubseteq Q :\equiv \forall x_1 ... x_n.\, P x_1 ... x_n \supset Q x_1 ... x_n,$$
$$P \cong Q :\equiv P \sqsubseteq Q \wedge Q \sqsubseteq P, \quad \cong_A :\equiv \lambda X^A Y^A.X \cong Y.$$

3 Axioms of Parametricity

3.1 Predicate Logic Over Terms of Each System

We define $\lambda\hat{S}$ for each λS. Each system $\lambda\hat{S}$ play the role of second order predicate logic over terms of λS. Second order universal quantifying appears in the definition of parametricity. Hence we discuss the formal theory of parametricity of the system λS on $\lambda\hat{S}$ regarded as the logical system. The formal definition is the follows.

Definition 3.1.1 A map $S \mapsto \hat{S}$ is a function of *Cube* into *Cube* such that $|\hat{S}| = |\mathrm{P2}| \cup |S|$. Thus, $\hat{S} = \mathrm{P2}$ for $S \in \{ \rightarrow, \mathrm{P}, 2, \mathrm{P2} \}$ and $\hat{S} = \mathrm{P}\omega$ for $S \in \{ \underline{\omega}, \mathrm{P}\underline{\omega}, \omega, \mathrm{P}\omega \}$

We will define the axioms of parametricity for terms of λS as formulae of $\lambda\hat{S}$. The conformity relation $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle^{\{\}}$ played the essential role in the theory of axiomatising parametricity for System F in the literature [T]. We would like to define this conformity relation for each system of λ-cube. As for System F, the relation $\langle\!\langle T \rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$ is defined by induction on T. There are only types appear as subexpressions of a type. Therefore it is sufficient to define $\langle\!\langle T \rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$ only for types T. But, in the systems of λ-cube except for $\lambda \rightarrow$ and $\lambda 2$, there are many objects of other levels appears as subexpressions of a type. Therefore we have to define $\langle\!\langle P \rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$ for P which may not be a type. In order to define that, we define a notation $(\!| P : \alpha |\!)^{\{\Theta\}}$ and call it the kind of conformity notation.

3.2 Kind of Conformity Relation

Definition 3.2.1 (Double Assignment) A *double assignment* is a set of expressions of the form $(e, f)/x$ which satisfies the followings:
- Each component $(e, f)/x \in \Theta$ consists of a variable x and two phrases e and f.
- For each variable x, there is at most one component $(e, f)/x \in \Theta$.

The component $(e, f)/x \in \Theta$ means that Θ assigns the pair of phrases (e, f) to the variable x.

Definition 3.2.2 (Domain of a Double Assignment) Let Θ be a double assignment such that $\Theta = \{(e_1, f_1)/x_1, (e_2, f_2)/x_2, ..., (e_n, f_n)/x_n\}$. Then $dom(\Theta)$ is the set of variable such that $dom(\Theta) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. It is called the *domain of the double assignment* Θ.

Definition 3.2.3 Let Θ be a double assignment such that $\Theta = \{(e_1, f_1)/x_1, (e_2, f_2)/x_2, ..., (e_n, f_n)/x_n\}$. Then Θ^l and Θ^r are the substitutions of the double assignment which are defined as $\Theta^l = \{e_1/x_1, e_2/x_2, ..., e_n/x_n\}$ and $\Theta^r = \{f_1/x_1, f_2/x_2, ..., f_n/x_n\}$.

Definition 3.2.4 (Double Assignment for a Declaration) Let Γ and Γ' be declarations. Let Θ be a double assignment. Then the double assignment Θ is a *double assignment for* Γ *under* Γ' iff Θ satisfies the followings:

– $dom(\Theta) \subset dom(\Gamma)$.
– For each $x : T \in \Gamma$, either $x \in dom(\Theta)$ or $\Gamma' \vdash x : T$.
– For each component $(e, f)/x \in \Theta$, if $\Gamma \vdash x : T$, then $\Gamma' \vdash e : T\Theta^l$ and $\Gamma' \vdash f : T\Theta^r$.
If Θ is a double assignment for Γ under Γ', then we write $\Gamma' \vdash \Gamma \rhd \Theta$.

Definition 3.2.5 (Kind of Conformity Relation) Let P be a predicate of a kind α under some Γ. Let Θ be a double assignment. Then the *kind of conformity relation* of $P : \alpha$ is defined as below:

$(\!|P : *|\!)^{\{\Theta\}} :\equiv P\Theta^l \to P\Theta^r \to *$

$(\!|P : \Pi x^T.\alpha|\!)^{\{\Theta\}} :\equiv \Pi {x_1}^{T\Theta^l} {x_2}^{T\Theta^r}.(\!|Px : \alpha|\!)^{\{\Theta,(x_1,x_2)/x\}}$
for some type T under Γ.

$(\!|P : \Pi X^\beta.\alpha|\!)^{\{\Theta\}} :\equiv$
$\Pi {X_1}^{\beta\Theta^l} {X_2}^{\beta\Theta^r}.\Pi Y : (\!|X : \beta|\!)^{\{\Theta,(X_1,X_2)/X\}}.(\!|PX : \alpha|\!)^{\{\Theta,(X_1,X_2)/X\}}$
for some kind β under Γ.

Lemma 3.2.6 *Let Γ and Γ' be declarations. Let Θ be a double assignment such that $\Gamma \vdash \Gamma \rhd \Theta$. Let α be a kind and P be a predicate such that $\Gamma \vdash P : \alpha$.*
Then, it is derivable that $\Gamma' \vdash (\!|P : \alpha|\!)^{\{\Theta\}} : *$.

Proof. Induction on α. □

Proposition 3.2.7 *If $\alpha =_\lambda \beta$, then $(\!|P : \alpha|\!)^{\{\Theta\}} =_\lambda (\!|P : \beta|\!)^{\{\Theta\}}$.*

Proof. Easy. □

3.3 Conformity Relation

Definition 3.3.1 (Multiple Assignment) A *multiple assignment* is a set of expressions of the form $(e, f)/x$ or of the form $(e, f, g)/x$ which satisfies the followings:
– Each component is either of the form $(e, f)/x$ which consists of a variable x and two phrases e and f, or of the form $(e, f, g)/x$ which consists of a variable x and three phrases e, f and g.
– For each variable x, there is at most one component $(e, f)/x$ or $(e, f, g)/x \in \Theta$.
The component $(e, f)/x \in \Theta$, or $(e, f, g)/x \in \Theta$, means that Θ assigns the pair of phrases (e, f), or (e, f, g) respectively, to the variable x.

Definition 3.3.2 For a multiple assignment Θ, the double assignment Θ^{lr} is defined as $(e, f)/x \in \Theta^{lr}$ iff $(e, f)/x \in \Theta$, or $(e, f, g)/x \in \Theta$ for some phrase g.

In other words, for a multiple assignment Θ, the double assignment Θ^{lr} is made by omitting the third phrase in each component of Θ with three phrases.

Definition 3.3.3 Let Θ be a multiple assignment. Then the substitutions Θ^l and Θ^r are defined as $\Theta^l = (\Theta^{lr})^l$ and $\Theta^l = (\Theta^{lr})^r$.

Definition 3.3.4 (Multiple Assignment for a Declaration).

Let Γ and Γ' be declarations. Let Θ be a multiple assignment. Then the Multiple assignment Θ is a *multiple assignment for Γ under Γ'* iff Θ satisfies the followings:

- $dom(\Theta) \subset dom(\Gamma)$.
- For each $x : T \in \Gamma$, either $x \in dom(\Theta)$ or $\Gamma' \vdash x : T$.
- For each component $(e, f)/x \in \Theta$, if $\Gamma \vdash x : T$, then the following is derivable:

$$\Gamma' \vdash T\Theta^l : *, \qquad \Gamma' \vdash T\Theta^r : *,$$
$$\Gamma' \vdash e : T\Theta^l, \qquad \Gamma' \vdash f : T\Theta^r.$$

- For each component $(e, f, g)/x \in \Theta$, if $\Gamma \vdash x : T$, then the following is derivable:

$$\Gamma' \vdash T\Theta^l : \Box, \qquad \Gamma' \vdash T\Theta^r : \Box,$$
$$\Gamma' \vdash e : T\Theta^l, \qquad \Gamma' \vdash f : T\Theta^r,$$

and $\Gamma' \vdash g : (\!|x : T|\!)^{\{\Theta\}}$.

If Θ is a double assignment for Γ under Γ', then we write $\Gamma' \vdash \Gamma \rhd \Theta$.

Definition 3.3.5 (Conformity Relation) Let P be a predicate under some Γ. Let Θ be a multiple assignment. Then the *kind of conformity relation* of P is defined as below:

- For a variable X^A,

$$\langle\!\langle X\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv\ \cong_A \quad \text{where } X \notin dom(\Theta)$$
$$\langle\!\langle X\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv Q \quad \text{where } (P_1, P_2, Q)/X \in dom(\Theta)$$

- For a type T and a term e under Γ,

$$\langle\!\langle \Pi x : T.P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv \lambda y^{(\Pi x:T.P)\Theta^l} z^{(\Pi x:T.P)\Theta^l}.$$
$$\forall {x_1}^{T\Theta^l} {x_2}^{T\Theta^r}.\langle\!\langle T\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} x_1 x_2 \supset \langle\!\langle T\rangle\!\rangle^{\{\Theta,(x_1,x_2)/x\}}(yx_1)(zx_2)$$
$$\langle\!\langle \lambda x : T.P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv \lambda {x_1}^{T\Theta^l} {x_2}^{T\Theta^r}.\langle\!\langle Px\rangle\!\rangle^{\{\Theta,(x_1,x_2)/x\}}$$
$$\langle\!\langle Pe\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv \langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}(e\Theta^l)(e\Theta^r)$$

- For a kind α and a predicate Q under Γ,

$$\langle\!\langle \Pi X : \alpha.P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv$$
$$\forall {X_1}^{\alpha\Theta^l} {X_2}^{\alpha\Theta^r}.\forall Y : (\!|X : \alpha|\!)^{\{\Theta^{lr},(X_1,X_2)/X\}}.\langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta,(X_1,X_2,Y)/X\}}$$
$$\langle\!\langle \lambda X : \alpha.P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv$$
$$\lambda {X_1}^{\alpha\Theta^l} {X_2}^{\alpha\Theta^r}.\lambda Y : (\!|X : \alpha|\!)^{\{\Theta^{lr},(X_1,X_2)/X\}}.\langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta,(X_1,X_2,Y)/X\}}$$
$$\langle\!\langle PQ\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} :\equiv \langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}(Q\Theta^l)(Q\Theta^r)\langle\!\langle Q\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$$

Lemma 3.3.6 *Let Γ and Γ' be declarations of λS. Let Θ be a multiple assignment such that λS derives $\Gamma \vdash \Gamma \rhd \Theta$. Let α be a kind and P be a predicate such that λS derives $\Gamma \vdash P : \alpha$.*

Then $\lambda\hat{S}$ derives $\Gamma' \vdash \langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} : (\!|P : \alpha|\!)^{\{\Theta^{lr}\}}$.

Proof. Induction on P. □

Notation 3.3.7 If the multiple assignment is empty, then $(\!|P : \alpha|\!) :\equiv (\!|P : \alpha|\!)^{\{\}}$ and $\langle\!\langle P\rangle\!\rangle :\equiv \langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\}}$. Suppose that $\Gamma \vdash T : *$, $\Gamma \vdash e : T$ and $\Gamma \vdash f : T$. Then $\langle\!\langle T\rangle\!\rangle ef$ is a formula under Γ. We read this formula $\langle\!\langle T\rangle\!\rangle ef$ as e is *conforming* to f, or e and f is conforming to each other.

Proposition 3.3.8 *If $P =_\lambda Q$, then $\langle\!\langle P\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}} =_\lambda \langle\!\langle Q\rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$.*

Proof. Easy. □

Remark 3.3.9 If P is a $\lambda 2$-type, and all the phrases in Θ are $\lambda 2$-phrases, then the conformity relation $\langle\!\langle P \rangle\!\rangle^{\{\Theta\}}$ is equivalent to that in the theory of axiomatising parametricity for System F. Thus, this definition of conformity is an extension of that in the theory of axiomatising parametricity for System F.

Definition 1. (Axiom of Parametricity) Let T be a type under basis Γ in λS. Then, *the axiom of parametricity for* T is defined as: $\mathbf{Par}(T) :\equiv \mathcal{E}q_T \cong \langle\!\langle T \rangle\!\rangle$. *The set of axioms of parametricity for* λS is defined as:

$\mathbf{Par}_{\lambda S} :\equiv \{\forall \Gamma.\mathbf{Par}(T) |\ \lambda S \text{ derives } \Gamma \vdash T : * \}$.

3.4 Consistency

Theorem 3.4.1 (Consistency) $\mathbf{Par}_{\lambda S}$ *does not prove* $\forall X^{*}.\forall x^X y^X.x = y$. *which means corruption of calculation.*

Proof. The proof is done by using the relativisation which is similar to that in [T]. The relativisation reduces the consistency of $\mathbf{Par}_{\lambda S}$ to normalisability of $\lambda\hat{S}$ which is shown in Lemma 2.1.6. □

Remark 3.4.2 The formula $\forall X^{*}.\forall x^X y^X.x = y$ means corruption of calculation.

4 Category Theory

We will show an application of the theory of parametricity to a category theory in formal system. First we will interpret category theory into $\lambda P\omega$. Then we show an internal theorem, which is adjunction functor theorem.

4.1 Basic Notations

Definition 4.1.1 (Category, Object) A kind is regarded as a *category*. A predicate P of kind A is regarded as an *object* of the category A.

Notation 4.1.2 Let M be a type or a predicate, and Γ be a prebasis such that $\Gamma \equiv x_1 : T_1, ..., x_n : T_n$. Then,

$\Pi\Gamma.P \equiv \forall\Gamma.P :\equiv \Pi x_1^{T_1}...x_n^{T_n}.\ P,$
$\lambda\Gamma.M :\equiv \lambda x_1^{T_1}...x_n^{T_n}.\ M,$
$M\Gamma :\equiv M x_1 ... x_n.$

Definition 4.1.3 (Hom-set, Arrow, Identity, Composition) Let Γ be a prebasis and C be a category such that $C \equiv \Pi\Gamma.*$. Let A and B be objects of the category C. Then the type

$A \dot{\to} B :\equiv \Pi\Gamma.\ A\Gamma \to B\Gamma\ (\equiv A \sqsubseteq B)$

is regarded as the *hom-set* $Hom_C(A, B)$, and a term f of type $A \dot{\to} B$ is an *arrow* of $Hom_C(A, B)$. For an object A of a category C, the arrow

$\mathbf{id}_A :\equiv \lambda\Gamma.\lambda x^{A\Gamma}.\ x$

is regarded as the *identity arrow* of P. For arrows $f : A \dot{\to} A'$ and $g : A' \dot{\to} A''$, the arrow

$$g \circ_C f :\equiv \lambda\Gamma.\lambda x^{A\Gamma}.g\Gamma(f\Gamma x)$$

is regarded as the *composition* of f and g. We sometimes omit the type index and write only $\circ$ for $\circ_C$.

Proposition 4.1.4 *For arrows $f : A_1 \dot{\to} A_2$, $g : A_2 \dot{\to} A_3$, and $h : A_3 \dot{\to} A_4$, we have $\mathbf{id}_{A_2} \circ f =_\lambda f \circ \mathbf{id}_{A_1}$, and $h \circ (g \circ f) =_\lambda (h \circ g) \circ f$.*

Notation 4.1.5 $e \circ (f, g) :\equiv \lambda xy.e(fx)(gy)$. This notation is similar to $f \circ g \equiv \lambda x.f(gx)$.

Definition 4.1.6 (Functor) Let C, D be categories. Let F_{type} be a predicate of kind $C \to D$, F_{pred} be a predicate of kind $(\!|F_{type} : C \to D|\!)$, and F_{func} be a term of type $\Pi XY : C.(X \dot{\to} Y) \to F_{type}X \dot{\to} F_{type}Y$. Then, the internal formula that

the triple $(F_{type}, F_{pred}, F_{func})$ is a *functor* of C into D

denotes the conjunctions of the following formulae:

– Identity Expansion: $\forall X : C.\ F_{pred}XX\mathcal{E}q_X \cong \mathcal{E}q_{F_{type}X}$

– Functoriality:

$$\forall XX'YY' : C.\ \forall x : X \dot{\to} X'.\forall y : Y \dot{\to} Y'.$$
$$\forall \phi : (\!|X : C|\!)^{\{(X,X')/X\}}.\ \forall \psi : (\!|Y : C|\!)^{\{(Y,Y')/Y\}}.$$
$$\phi \sqsubseteq \psi \circ (x, y) \supset F_{pred}XY\phi \sqsubseteq F_{pred}X'Y'(\psi \circ (F_{func}XX'x, F_{func}YY'y))$$

Notation 4.1.7 Let F be a triple $(F_{type}, F_{pred}, F_{func})$ which is a functor of C into D. Then, we write simply as follows:

$F(A) :\equiv F_{type}A$ for an object $A : C$,

$F(\Phi) :\equiv F_{pred}AB\Phi$ for a predicate $\Phi : (\!|X : C|\!)^{\{(A,B)/X\}}$

$F(f) :\equiv F_{type}ABf$ for an arrow $f : A \dot{\to} B$

Then identity expansion and functoriality is written as follows:

– Identity Expansion: $\forall X.\ F(\mathcal{E}q_X) \cong \mathcal{E}q_{F(X)}$

– Functoriality: $\forall XX'YY'xy\phi\psi.\ \phi \sqsubseteq \psi \circ (x, y) \supset F(\phi) \sqsubseteq F(\psi) \circ (F(x), F(y))$

Proposition 4.1.8 *Let F be a functor of C into D. Let A, A' and A'' be objects of C. Let f and g be arrows such that $f : A \dot{\to} A'$ and $g : A' \dot{\to} A''$. Then, the system $\lambda\omega$ or $\lambda P\omega$ proves that*

$$F(\mathbf{id}_A) = \mathbf{id}_{F(A)} \quad \text{and} \quad F(g \circ_C f) = F(g) \circ_D F(f),$$

We can describe the notion of adjunction in $\lambda P\omega$, that is, we can describe a formula of $\lambda P\omega$ which states that a functor F of a category C into a category D is a left adjoint of a functor G of a category D into a category C.

4.2 Adjunction

Notation 4.2.1 Let $C \equiv \Pi\Gamma.*$ be a category. and A be an object of C. Then,

$\Pi' x : T.A :\equiv \lambda\Gamma.\Pi x^T.A\Gamma$

$T \dot{\to} A :\equiv \Pi' x^T.A$ where X is fresh.

Note that both $\Pi' x^T.A$ and $T \dot{\to} A$ are also objects of C.

Remark 4.2.2 Let F be a functor of C into C'. Then $\Pi' X^C.F(X)$ plays the role of limit.

Definition 4.2.3 (Preserving Limits) When we say that a functor F of C into C' preserves limits, we mean a formula which states the following condition internally:

The following two arrows are isomorphisms and natural with respect to A and T where T is a type.

$$j_{T,A} :\equiv \lambda z^{F(\Pi' x.Ax)} x^T.F(\lambda y.yx)z : F(\Pi' x^T.Ax) \dot{\to} \Pi' x^T.F(Ax)$$
$$j'_A :\equiv \lambda z^{F(\Pi' X.AX)} X^C.F(\lambda y.yX)z : F(\Pi' X^{C'}.AX) \dot{\to} \Pi' X^{C'}.F(AX).$$

Definition 4.2.4 For a functor $F = (F_{type}, F_{pred}, F_{func})$ of C into C', the triple $F^{\dashv} = (F^{\dashv}_{type}, F^{\dashv}_{pred}, F^{\dashv}_{func})$ defined as follows:

$$F^{\dashv}_{type} :\equiv \lambda X^{C'}.\ \Pi' Y^C.(X \dot{\to} F(Y)) \dot{\to} Y$$
$$F^{\dashv}_{pred} :\equiv \langle\!\langle \lambda X^{C'}.\ \Pi' Y^C.(X \dot{\to} ZY) \dot{\to} Y \rangle\!\rangle^{\{(C \to C', C \to C', F_{pred})/Z\}}$$
$$F^{\dashv}_{func} :\equiv \lambda X^C X'^C.\lambda x^{X \dot{\to} Y}.\lambda \Gamma.\lambda y^{F(X)\Gamma}.y \lambda \Gamma' \lambda z^{X\Gamma' \to F(Y)\Gamma'}.z \circ x$$

where $C = \Pi\Gamma.*$ and $C' = \Pi\Gamma'.*$.

Proposition 4.2.5 $\mathbf{Par}_{\lambda\omega}$ *proves that for each functor F of C into C', the triple $F^{\dashv}$ is a functor of C' to C.*

Theorem 4.2.6 (Adjoint Functor Theorem) *The axioms* $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$ *proves the formula which states the following assertion.*

If a functor F preserves limits, then $F^{\dashv}$ is a left adjoint of F.

Remark 4.2.7 If F preserves limits, then $F^{\dashv}X$ is isomorphic to $\Pi Y.F(X \to Y) \to Y$, which is close to $\neg F(\neg X)$ logically, as is mentioned in the introduction of literature [Hasegawa3].

4.3 Examples

Example 4.3.1 (Exponentiation and Product) Let A be a type. Let $(A \to -)$ be a functor of $*$ into $*$ which maps an object B to $A \to B$. The formal definition is as follows:

$$(A \to -)_{type} :\equiv \lambda X^*.A \to X$$
$$(A \to -)_{pred} :\equiv \langle\!\langle (A \to -)_{type} \rangle\!\rangle$$
$$(A \to -)_{func} :\equiv \lambda X^* Y^* x^{X \to Y} y^{A \to X}.x \circ y$$

Then, this functor $(A \to -)$ preserves limits under $\mathbf{Par}_{\lambda\omega}$. Therefore, the left adjoint $(A \to -)^{\dashv}$ is the functor which maps an object B to $\Pi X : *.(B \to A \to X) \to X$, which is isomorphic to $A \times B \equiv \Pi X : *.(A \to B \to X) \to X$. Thus, the axiom set $\mathbf{Par}_{\lambda\omega}$ proves that the functor $(A \times -)$ is a left adjoint of $(A \to -)$.

Example 4.3.2 (Existential Quantifier) Let T be a type. Let K be a functor of $*$ into $T \to *$ which maps an object P to $\lambda x^T.P$. Then, this functor K preserves limits under $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$. Therefore, the left adjoint $K^{\dashv}$ is the functor which maps an object $P^{T\to *}$ to $\Pi X^* : (P \dot{\to} \lambda x^T.X) \to X$, which is identical to $\forall X^*.(\forall x^T.Px \supset X) \supset X$. This is the standard encoding of $\exists x^T.Px$. Thus, the axiom set $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$ proves that the existential quantifier is a left adjoint of K.

Example 4.3.3 (Universal Quantifier) Let T be a type. Let $\forall$ be a functor of $T \to *$ into $*$ which maps an object P to $\Pi x^T.Px \equiv \forall x^T.Px$. Then, this functor $\forall$ preserves limits under $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$. Therefore, the left adjoint $\forall^{\dashv}$ is the functor which maps an object P to $\Pi X^{T\to *} : (P \to \Pi x^T.Xx) \dot{\to} X$. We can prove that this $\forall^{\dashv}P$ is isomorphic to KP under $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$. Thus, the axiom set $\mathbf{Par}_{\lambda P\omega}$ proves that the universal quantifier is a right adjoint of K.

5 Conclusion

5.1 Main result

The extend the theory of parametricity in lambda cube, that is, we defined the theory of parametricity for each of eight system in lambda cube. The definitions of them are uniform, and the theory of parametricity for $\lambda 2$ is equivalent to that in the precedent works [PA, T]. This fact certificate our extension.

In some systems in lambda cube, We can deal with several notions which come from category theory. Especially, the system $\lambda\omega$ can deal with functors and adjunction. The theory of parametricity for $\lambda\omega$ proves the adjoint theorem. This is our main result. The theory of parametricity for $\lambda\omega$ is a theory in the system $\lambda P\omega$, which is equivalent to the system of calculus of construction. Therefore, we paraphrase our main result as the following: We formalised the notions of functors and adjunction in calculus of construction, and proved the adjoint theorem by the theory of parametricity.

5.2 Future work

We have many other properties which we did not discuss in this paper. Poll and Zwanenburg proposed to put a useful property *ParQuot* as an axiom in his paper [PZ]. The formula *ParQuot* states that for each type X and for each equivalence relation R over X, there is a type Q which denotes the quotient domain obtained by the domain X divided by R. Hasegawa Masahito has the conjecture that $\mathbf{Par}\mathrm{P}\omega$ proves the axiom *ParQuot*.

As for category theory, our theory can give the interpretation of only the restricted categories. The class of such categories is called *Uni* by Hasegawa Ryu [Hasegawa3]. It seems attractive to extend the class of categories which can be interpreted. The systems of λ-Cube has only four levels of objects, which are of terms, of types, of kinds, and of $\Box$. In order to extend the class of categories, we need to extend our type theory with more levels of objects.

Acknowledgement

I am greatful to Sato Masahiko for his total support. I am very debt to Hasegawa Ryu and Hasegawa Masahito for their comments and encouragements.

References

[ACC] Abadí, M., Cardelli, L., & Curien, P.-L.: Formal parametric polymorphism, *Theoretical Computer Science*, **121**, pp9–58, (1993).

[Barendregt] Barendregt, H.: Lambda Calculi with Types, *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol. 2, pages 117–309, Oxford Univ. Press, 1992, edited by S. Abramsky et al.

[BAC] Bellucci, R., Abadí, M., & Curien, P.-L., A Model for Formal Parametric Polymorphism: A PER Interpretation for system R, *Typed Lambda Calculi and Applications, 1995,* Lecture Notes in Computer Science, 902, pages 32–46 (1995).

[Girard] Girard J.-Y. et al. *Proofs and Types,* Cambridge Univ. Press, 1989.

[Hasegawa1] Hasegawa, R.: Parametricity of extensionally collapsed term models of polymorphism and their categorical properties, *Proceedings of Theoretical Aspects of Computer Science,* Lecture Notes In Computer Science 526, pages 495–512, Springer-Verlag, 1991, edited by T. Ito et al.

[Hasegawa2] Hasegawa, R.: Categorical data types in parametric polymorphism. *Mathematical Structures in Computer Science,* 4:71–109, 1994.

[Hasegawa3] Hasegawa, R.: Relational limits in general polymorphism. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences,* Vol. 30 (1994), 535–576.

[HS] Huet, G. & Saïbi, A.: Constructive Category Theory, CLICS-TYPES BRA meeting, Jan. 1995, Final version published in: *Proof, Language and Interaction. Essays in Honour of Robin Milner,* Ed. Gordon Plotkin, Colin Stirling and Mads Tofte. MIT Press, 2000.

[PA] G. Plotkin, G., & Abadí, M.: A Logic for parametric polymorphism, *Typed Lambda Calculi and Applications, 1993,* edited by M. Bezem et al., Lecture Notes in Computer Science, 664, pages 361–375, Springer Verlag, 1993.

[PP] Pfenning, F. & Paulin-Mohring, C.: Inductively defined types in the calculus of constructions. *Mathematical foundations of programming semantics* (New Orleans, LA, 1989), 209–228, Lecture Notes in Comput. Sci., 442, Springer, Berlin, 1990.

[PZ] Pool, Erik & Zwanenburg, Jan: A Logic for Abstract Data Types as Existential Types. *Typed Lambda Calculus, 1999,* edited by GIrard, J.-Y., Lecture Notes in Computer Science, 1581, pages 310–324, Springer Verlag, 1999.

[Reynolds] Reynolds, J. C.: Types, abstraction and parametric polymorphism, R. E. A. Mason, editor, *Information Processing 83,* pages 513–523, Elsevier Science Publishers B. V., 1983.

[T] Takeuti, I.: An Axiomatic System of Parametricity, *Typed Lambda Calculi and Applications, 1997,* Lecture Notes in Computer Science, 1210, pages 354–372 (1997). & *Fundamenta Informatica,* **33**, pp397–432, (1998).

This article was processed using the LaTeX macro package with LLNCS style

Feasibly constructive analysis

Hajime Ishihara
School of Information Science
Japan Advanced Institute of Science and Technology
Tatsunokuchi, Ishikawa 923-1292, Japan.

In the constructive theory of real numbers developed, for example in [4, Chapter 5], we assume that a universe $\mathcal{U}$ of functions on natural numbers satisfies certain closure conditions; a very weak axiom of choice QF-AC$_{00}$:

$$\forall \vec{m} \exists n A(\vec{m}, n) \implies \exists \alpha \in \mathcal{U} \forall \vec{m} A(\vec{m}, \alpha(\vec{m})) \quad (A \text{ quantifier-free})$$

expressing the fact that $\mathcal{U}$ is closed under *recursive in* is assumed in [4, Chapter 5].

On the other hand, various classes of functions on natural numbers have been defined as function algebras [1]; a *function algebra* is the smallest class of functions containing certain initial functions and closed under certain operations (especially composition and recursion scheme). For example, A. Cobham [2] characterized the polynomial time computable functions as the smallest class closed under *bounded recursion on notation*; see [3] for other characterizations of the polytime functions.

We give some elementary results and problems on the constructive theory of real numbers and analysis with a universe $\mathcal{U}$ which contains zero-function $0(m) = 0$, projection $P^n_k(m_1, \dots, m_n) = m_k$, the binary successor functions $s_0(m) = 2 \cdot m$, $s_1(m) = 2 \cdot m + 1$, the length in binary function $|m| = \lceil \log_2(m+1) \rceil$, addition $+$, cut-off subtraction $\dot{-}$ ($m \dot{-} n = m - n$ if $m \geq n$ 0 otherwise) and $pad(m, n) = 2^{|n|} \cdot m$, and closed under composition: if $g_1, \dots, g_k, h \in \mathcal{U}$, then there is an $f \in \mathcal{U}$ such that

$$f(\vec{m}) = h(g_1(\vec{m}), \dots, g_k(\vec{m})).$$

Furthermore we assume that a universe $\mathcal{U}$ contains a pairing function $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and its inverses π_1, π_2 such that

$$\pi_1(\langle m, n \rangle) = m, \quad \pi_2(\langle m, n \rangle) = n;$$

for then $\langle m, n \rangle$ codes the integer $m - n$, $\langle m, n \rangle = \langle m', n' \rangle$ if $m + n' = m' + n$,

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle + \langle m', n' \rangle &:= \langle m + m', n + n' \rangle, \\ -\langle m, n \rangle &:= \langle n, m \rangle, \\ |\langle m, n \rangle| &:= (m \dot{-} n) + (n \dot{-} m), \\ pad_{\mathbb{Z}}(\langle m, n \rangle, l) &:= \langle (pad(m, l), pad(n, l)) \end{aligned}$$

etcetc; and then $\langle i, m\rangle$ codes the dyadic rationals $i/2^{|m|}$ where i is an integer, $\langle i, m\rangle = \langle j, n\rangle$ if $pad_{\mathbb{Z}}(i, n) = pad_{\mathbb{Z}}(j, m)$,

$$\begin{aligned}
\langle i, m\rangle + \langle j, n\rangle &:= \langle pad_{\mathbb{Z}}(i, n) + pad_{\mathbb{Z}}(j, m), pad(m, n)\rangle, \\
-\langle i, m\rangle &:= \langle -i, m\rangle, \\
|\langle i, m\rangle| &:= \langle |i|, m\rangle
\end{aligned}$$

etcetc.

A real number is coded as a sequence $\{p_n\}_n$ of dyadic rationals such that

$$\forall mn \left(|p_m - p_n| < 2^{-|m|} + 2^{-|n|}\right).$$

For real numbers $x := \{p_n\}_n$ and $y := \{q_n\}_n$,

$$\begin{aligned}
x < y &:= \exists n \left(q_n - p_n > 2^{-|n|+2}\right), \\
x = y &:= \neg(x < y \vee y < x), \\
x + y &:= \{p_{s_1(n)} + q_{s_1(n)}\}, \\
-x &:= \{-p_n\}, \\
|x| &:= \{|p_n|\}.
\end{aligned}$$

Definition 1. A *sequence of real numbers* $\{x_m\}_m$ is a double sequence $\{\{p_n^m\}_n\}_m$ of dyadic rationals such that $\{p_n^m\}_n \in \mathbb{R}$ for each m. A sequence $\{x_n\}_n$ of reals is said to *converge* to x with *modulus* $\beta \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ if

$$\forall kn(|x - x_{\beta k+n}| < 2^{-|k|}).$$

Then x is said to be the *limit* of $\{x_n\}_n$. A sequence $\{x_n\}_n$ of reals is said to be a *Cauchy sequence* with *modulus* $\alpha \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ if

$$\forall kmn(|x_{\alpha k+m} - x_{\alpha k+n}| < 2^{-|k|}).$$

With the above definitions, we can show that the set of real numbers is complete by virtue of the closure under composition of our universe $\mathcal{U}$.

Theorem 2. *Each Cauchy sequence of reals converges to a limit.*

Furthermore, if we assume that our universe $\mathcal{U}$ is closed under *full concatenation recursion on notation* (FCRN) which is used in [3] to characterize the polytime functions: if $g, h_0, h_1 \in \mathcal{U}$ with $h_0(m, \vec{n}, l), h_1(m, \vec{n}, l) \leq 1$, then there is an $f \in \mathcal{U}$ such that

$$\begin{aligned}
f(0, \vec{n}) &= g(\vec{n}), \\
f(s_i(m), \vec{n}) &= s_{h_i(m,\vec{n},f(m,\vec{n}))}(f(m, \vec{n})) \quad (\text{if } i \neq 0 \text{ or } m \neq 0),
\end{aligned}$$

we can prove the following form of constructive versions of intermediate value theorem.

Theorem 3. *Let $f \in [0,1] \to \mathbb{R}$ be continuous with $f(0) \leq 0 \leq f(1)$. Then*

$$\forall k \exists x \in [0,1] \left(|f(x)| < 2^{-|k|}\right).$$

References

[1] P. Clote, *Computational models and functional algebras*, in E.R. Griffor ed., Handbook of Computability Theory, North-Holland, 1999.

[2] A. Cobham, *The intrinsic computational difficulty of functions*, in Y. Bar-Hillel ed., Logic, Methodology and Philosophy of Science II, North-Holland, 1965, 24-30.

[3] H. Ishihara, *Function algebraic characterizations of the polytime functions*, Computational Complexity 8 (1999), 509-516.

[4] A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, Vol. 1, North-Holland, 1988.

A. King 所属 University of Bath, U.K.

タイトル:"Almost Koszul Algebras"

Abstract:
We show how a certain computation with adjacency matrices of graphs may be interpreted in terms of the homological algebra of preprojective algebras.
More precisely for all but the Dynkin graphs the corresponding preprojective algebra B is a Koszul algebra of global dimension 2 and the dual algebra A may be described explicitly.
Koszul duality implies, amongst other things, that A is the Yoneda Ext algebra for B and vice versa.
When the graph is Dynkin the algebras A and B are `almost' Koszul dual to each other, in a sense which may be made precise, and the Yoneda Ext algebra for B is a twisted polynomial ring in one variable over A, and vice versa.

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

W. wang 所属 North Carolina State University, USA

タイトル:The McKay correspondence: themes and variations

Abstract:
The classical McKay correspondence is a bijection between finite subgroups of SL_2(C) and affine Dynkin diagrams of ADE types. In this talk we will explain and compare two constructions, using Hilbert schemes and wreath products respectively, of vertex representations of affine Lie algebras starting from finite subgroups of SL_2(C).

Large deviation principle for additive functionals corresponding to Kato measures

竹田雅好（東北大学理学研究科数学専攻）

11/30/2000

Let (B_t, P_x^W) be the d-dimensional Brownian motion on R^d. In [R], he proved the large deviation principle for additive functionals of Brownian motion of form

$$\frac{1}{t}\int_0^t V(B_s)ds, \qquad V \in \mathcal{B}_b(R^d). \tag{1}$$

as $t \to \infty$. Here $\mathcal{B}_b(R^d)$ is the set of bounded Borel functions on R^d. Our objective of this talk is to extend this result to a certain class of additive functionals associated with positive Radon measures. More precisely, let $\mathbf{D}$ be the classical Dirichlet form:

$$\mathbf{D}(u,v) = \int_{R^d} \nabla u \cdot \nabla v dx \ \text{ for } u, v \in H^1(R^d),$$

where $H^1(R^d)$ is the Sobolev space of order 1. Let $g_\alpha(x,y)$ be the α-resolvent density of the Brownian motion:

$$g_\alpha(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dt$$

and $G_\alpha \mu$ the α-potential of a positive measure μ:

$$G_\alpha\mu(x) = \int_{R^d} g_\alpha(x,y)d\mu(y).$$

A positive Radon measure μ is said to be in the *Kato class* ($\mu \in \mathcal{K}_d$ in notation) if

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|G_\alpha \mu\|_\infty = 0.$$

For a measure μ, let $\mu_R(\cdot) = \mu(B(R)\cap\cdot)$ and $\mu_{R^c}(\cdot) = \mu(B(R)^c \cap \cdot)$ ($B(R) = \{|x| < R\}$). We say that a measure μ is *locally in the Kato class* ($\mu \in \mathcal{K}_{d,loc}$ in notation), if $\mu_R \in \mathcal{K}_d$ for any $R > 0$.

For $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{K}_{d,loc} - \mathcal{K}_d$, let

$$C(\theta) = -\inf\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) - \theta\int_{R^d}\tilde{u}^2 d\mu : u \in H^1(R^d),\ \int_{R^d} u^2 dx = 1\}.$$

Here $\tilde{u}$ is a quasi-continuous version of $u \in H^1(R^d)$. From now on, every function u in $H^1(R^d)$ is considered to be quasi-continuous already. Let $I(\lambda)$ be the Legendre transformation of $C(\theta)$:

$$I(\lambda) = \sup_{\theta \in R^1} \{\lambda\theta - C(\theta)\}, \quad \lambda \in R^1.$$

For $\mu \in \mathcal{K}_{d,loc}$, there exists a unique (up to equivalence) positive continuous additive functional A_t^μ which is in *Revuz correspondence* with μ (cf. [ABM]): for any γ-excessive function h ($\gamma \geq 0$) and positive Borel function f

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{R^d} E_x^W \left(\int_0^t f(B_s) dA_s^\mu \right) h(x) dx = \int_{R^d} f(x) h(x) d\mu.$$

If μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, say $\mu(dx) = V(x)dx$, then A_t^μ is identical with $\int_0^t V(B_s)ds$. For $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{K}_{d,loc} - \mathcal{K}_d$, let $A_t^\mu = A_t^{\mu^+} - A_t^{\mu^-}$. We then have

Theorem 0.1 (i) *Let $\mu \in \mathcal{K}_{d,loc} - \mathcal{K}_d$. Then for any open set $G \subset R^1$,*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log P_x^W \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in G \right) \geq - \inf_{\lambda \in G} I(\lambda).$$

(ii) *Let $\mu \in \mathcal{K}_d - \mathcal{K}_d$. For any closed set $K \subset R^1$,*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log P_x^W \left(\frac{A_t^\mu}{t} \in K \right) \leq - \inf_{\lambda \in K} I(\lambda).$$

We introduce a subclass $\mathcal{K}_d^\infty$ by

$$\mathcal{K}_d^\infty = \left\{ \mu \in \mathcal{K}_d : \lim_{R \to \infty} \|G_1 \mu_{R^c}\|_\infty = 0 \right\}.$$

Then we have

Theorem 0.2 *For $\mu \in \mathcal{K}_d^\infty$, $C(\theta)$ is differentiable at $\theta = 0$. Moreover, if $d = 1$ or 2, $C(\theta)$ is differetiable on R^1.*

Corollary 0.1 *For $\mu \in K_d^\infty$, A_t^μ / t tends to 0 exponentially: for any $\epsilon > 0$*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log P_x^W \left(\frac{A_t^\mu}{t} \geq \epsilon \right) < 0.$$

As a result,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{A_t^\mu}{t} = 0, \quad P_x^W\text{-}a.e.$$

References

[ABM] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, in "Random Partial Differential Equations" ed. U. Hornung et al., Birkhäuser (1991).

[R] Remillard, B.: Large deviations estimates for occupation time integrals of Brownian motion. In Stochastic Models, A Volume in Honour of Donald A. Dawson, L. Gorostiza and G. Ivanoff Eds., Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, 26, 375-398 (2000).

Adaptive Finite Element Methods for Nonlinear PDEs

Zhiming CHEN

Institute of computational Mathematics
Chinese Academy of Sciences
Beijing 100080, P.O.Box 2719, China

Abstract. The adaptive finite element method based on a posteriori error estimates has attracted ever increasing interests among mathematical and engineering communities. This method provides a systematic way to resolve the singularities of practical problems but still keep the total computatioal costs in minimum via locally refining and coarsening the underlying finite element meshes. This property is particularly important when solving nonlinear problems since it is often for nonlinear PDEs the singularities are coming from the nonlinear nature of the problems which are a priori unknown, rather from the rough coefficients of equations or from the geometry of the underlying domains as in the case of linear elliptic and parabolic equations. In this talk I will first introduce the basic ideas of the method and demonstrate its effectiveness through a linear elliptic equation with strongly discontinuous coefficients. Then I will report our recent efforts in solving the time-dependent Ginzburg-Landau model in superconductivity (joint work with S. Dai). Numerical results will be reported.

談話会（12月20日 15:00-16:00）
平面3次曲線のはなし—HesseからMumfordへ

北海道大学　　中村　郁

要旨

やや古典的な問題、アーベル多様体のModuli空間のコンパクト化の問題を考える。

一般にModuli空間をコンパクト化するには安定な対象をすべて足せばよい。これはMumfordの幾何学的不変式論(GIT)のなかで確立された考え方である。しかしそれならばいかにして安定な対象をすべてみつけるか?

この場合自然な方法は3通りある，

(1) Stability (Mumford GIT)

(2) テータ関数によるEmbeddingの極限，

(3) MumfordのOne-parameter family

結論から述べると、これらは本質的に同値な概念であり、同一のよいコンパクトな退化したアーベル多様体を与え，アーベル多様体のModuli空間 $A_{g,N}$ の同じコンパクト化 $SQ_{g,N}$ を与える。$SQ_{g,N}$ はステイブル曲線のModuli空間が非特異な曲線のModuli空間のコンパクト化であるのと同様な意味で、 $A_{g,N}$ の自然な幾何学的なコンパクト化である。ただし N は3以上の整数である。

$g=1, N=3$ という最小の場合は平面3次曲線の話しになる。平面3次曲線 C がGIT-Stableであるための必要十分条件は，C がHesseの3次曲線

$$x_0^3+x_1^3+x_2^3-\mu x_0x_1x_2=0 \quad (\mu \in \mathbf{P}^1)$$

のひとつと同型となることである。一方、Hesseの3次曲線はHeisenberg群という位数27の有限群で不変な3次曲線として特徴づけられる。$\mu=\infty$ のときHesse 3次曲線は3本の直線の輪となり、 $\mu=\infty$ の付近では，Hesse 3次曲線の族は，MumfordのOne-parameter familyの特別なものと同一視できる。一見異なるこれらの主張は全て同値である。Hesse cubicに関するこの事実は高次元に一般化できる。そしてそれが(1)(2)(3)の同値性にほかならない。

この問題で高次元を考察すると、Delaunay/Voronoi分割という多面体分割が現れるが, 3次元の場合それは、閃亜鉛や硫黄などの鉱物の結晶であることがわかる。

平成12年12月20日

談話会アブストラクト

パターン形成現象の拡散方程式モデルによる解明に向けて

大阪大学大学院工学研究科
八木厚志

大腸菌を始めとする走化性を有する菌類は、顕著な集合パターンを形成することが実験により調べられています、参照 [1]。このような現象の理論的解明に向けて、拡散方程式モデルによるパターン形成の研究が盛んになりつつあります。本講演では、幾つかのモデル方程式を紹介するとともに、これらの拡散方程式を解析するための数学理論、および数値計算についてお話し致します。

走化性を記述する方程式としては、1970年 Keller-Segel [2] により導入された拡散方程式系

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \nabla\cdot\{u\nabla B(\rho)\}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d\Delta\rho - g\rho + fu, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \end{cases}
$$

がよく知られています。ここで、u, ρ はそれぞれ菌の密度分布と誘因化学物質の濃度分布を表しており、$\nabla\cdot\{u\nabla B(\rho)\}$ は u が化学物質の濃度勾配が高い方へ誘引されることを、fu は一定の割合で化学物質が菌自身により分泌されることを表しています。$B(\rho)$ は感応性関数と呼ばれ、$b\rho,\ b\rho^2,\ b\log\rho,\ \frac{b\rho}{1+\rho}$（$b$ は正定数）などのような単調増加関数です。

三村・辻川 [3] は、菌の増殖効果もパターン形成の重要な要素の一つである場合のモデルとして、増殖項つきの走化性方程式

$$
\text{(CG)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \nabla\cdot\{u\nabla B(\rho)\} + \mu u(1-\frac{u}{K})(\frac{u}{K}-\lambda), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = d\Delta\rho - g\rho + fu, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \end{cases}
$$

を提案しました、ただし K は領域 Ω の容量を表す定数、λ は $0<\lambda<1$ である

ような定数です。(KS) と (CG) は、相互作用と反応を含む拡散方程式系です。

このような方程式の解析に関して、我々の研究グループを中心として得られた結果の一部を紹介いたします。[4,5] によれば、1 次元 Keller-Segel 方程式と 2 次元三村・辻川方程式には無限次元力学系の一般論が適用でき、指数アトラクターが存在することが分かります。指数アトラクターとは、Eden, Foias, Nicolaenko, Temam 等により主に Navier-Stokes 方程式に対して導入されたアトラクター概念の一つですが、有限なフラクタル次元を有するコンパクト、正不変集合であり、すべての解を指数的に引き付ける性質を有します。このような意味において、(KS) あるいは (CG) の力学系は有限次元に帰着できることになります。[6,7] によれば、陰的 Runge-Kutta 法と有限要素法を基にしたスキームにより、(KS) と(CG) は全離散化可能で、そのスキームは安定であり、近似解は一定のオーダーで真の解に収束するということが分かります。

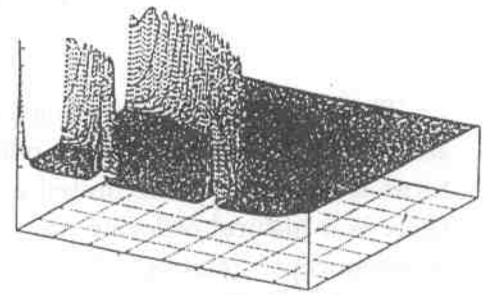

図1. 同心円パターン

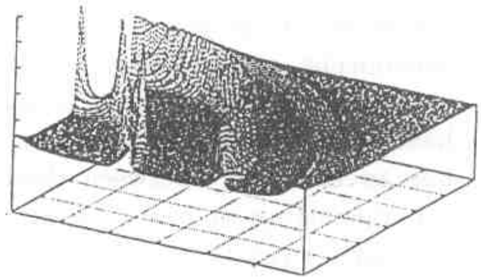

図2. 斑点パターン

これらのスキーム、あるいはもっと計算実施が容易な差分法を基にしたスキームによる数値実験によって、2 次元三村・辻川方程式には適当な係数の組合せにより同心円パターン、斑点パターン、樹状パターンの3つのパターンが観察されることが明らかになっています。

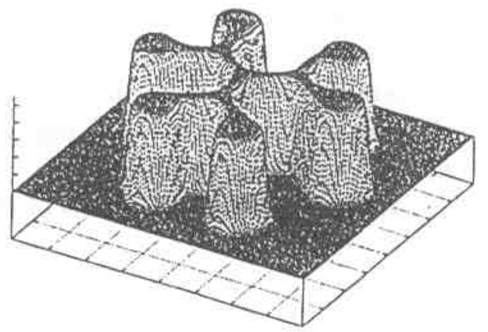

図3. 樹状パターン

参考文献

[1] Woodward, Tyson, Myerscough, Murray, Budrene and Berg, Biophysical J. 68(1995), 2181-2189.

[2] Keller and Segel, J. Theor. Biol. 26(1970), 399-415.

[3] Mimura and Tsujikawa, Physica A 230(1996), 499-543.

[4] Osaki and Yagi, Funkcial. Ekvac., to apper.

[5] Osaki, Tsujikawa, Yagi and Mimura, Preprint.

[6] Nakaguchi and Yagi, Proc. WCNA2000, to appear.

[7] Nakaguchi and Yagi, Preprint.

Formal methods for conceptual and contextual knowledge

Bernhard Ganter

There is an elementary mathematical framework to describe conceptual structures: From any binary relation between two sets one can derive patterns that may be interpreted as the "concepts" of the relation. Moreover, there is a natural ordering on these concepts that reflects the "subconcept–superconcept" relation. The set of all formal concepts of a given relation, endowed with this order, is a complete lattice (in the sense of mathematical Lattice Theory, i.e., a structure with joins and meets). It is called the "concept lattice" of the relation. The lattice operations correspond to the formation of the least common superconcept and of the greatest common subconcept, respectively.

Binary relations occur in many situations. A typical case is that we have a set of "objects", a set of "attributes", and the relation of "an object has an attribute" between these two sets. To each instance of this very general setting we can associate an algebraic structure: the concept lattice. The lattice can be used in many ways to analyze the given data, moreover, lattices have easily readable diagrams that can be used to visualize the data.

Unlike the concepts of human perception, the formal concepts always are formed with respect to a fixed data set. They are "contextual".

Over the last twenty years, this approach has been developed to a versatile and powerful method of conceptual knowledge processing, with a broad theoretical foundation and many applications, ranging from Software Engineering to Social Sciences.

We give some impressions of the method and discuss recent developments.

ブール代数上の無限ゲームと強制法理論

嘉田 勝 (北見工業大学)

2001年1月23日

1 強制法とブール値モデル

強制法 (forcing) は1963年に Cohen が連続体仮説の独立性証明のために開発した手法で, 現代集合論に不可欠のものである.

集合論の公理系としては, Zermelo-Fraenkel の公理系 (ZF) が事実上の標準となっているが, 公理的集合論の目的は, 端的にいえば, ZF 公理系の証明能力の限界を調べることである. ZF の証明能力に限界がある (決定不可能な命題が存在する) ことは Gödel の不完全性定理によって示されているが, 具体的な命題が ZF 上無矛盾であることを示すためには, その命題が実際に成り立つような ZF 公理系のモデルを構成しなければならない. 強制法は, それを行うための強力な手段である.

通常, 強制法は, 強制概念と呼ばれる擬順序集合を用いて ZF 公理系のモデルを拡大する手法として理解されるが, 実は, 擬順序集合として特に完備ブール代数を用い, 集合論の**ブール値モデル**(Boolean-valued model) を構成することと本質的に同じであることが知られている. したがって, 強制法による拡大モデルの性質は, 「基底モデルの性質」と「ブール代数のもつ代数的性質」によって決定される. 強制法理論の目的は, ブール代数のもつ代数的性質が拡大モデルの性質に及ぼす影響を調べることである.

ところで, ブール代数の性質については, **無限ゲーム**の概念を用いた研究が1980年代から行われている. この手法を強制法理論に応用する試みも当然なされていて, 多くの有用な結果が得られている. 本稿では, それらの結果のうち, 1998年ごろに筆者が得たものを紹介する.

2 ブール代数上の無限ゲーム

最初に, ブール代数上の無限ゲームの最も簡単な例として, "cut-and-choose" と呼ばれるゲームを次のように定義する.

$\mathbb{B}$ を完備ブール代数とする. ゲーム $\mathsf{G}_{\mathrm{c\&c}}(\mathbb{B})$ は, 2人のプレイヤー $\textsc{One}$, $\textsc{Two}$ によって以下のように行われる. ゲームの初めに, $\textsc{One}$ は $\mathbb{B}$ の $\mathbf{0}$ でない元 p を任意に選んで固定する. その後, $\textsc{One}$ は第 n 手目として $p_0^n \vee p_1^n = p$ となるような $\mathbb{B}$ の元 p_0^n, p_1^n を提示し, $\textsc{Two}$ はそれらのうち一方を選んでその番号 (0 または 1) を a_n とする. これをすべての $n < \omega$ にわたって繰り返す. その結果, $\textsc{Two}$ の選んだ元全体が $\mathbf{0}$ でない下限をもつ, すなわち $\bigwedge_{n<\omega} p_{a_n}^n > \mathbf{0}$ ならば $\textsc{Two}$ の勝ち, そうでなければ $\textsc{One}$ の勝ちとする.

このゲームは, 次のような形で, ブール代数 $\mathbb{B}$ の性質を特徴づけるものになっている.

基数 λ, κ に対し, ブール代数 $\mathbb{B}$ が(λ, κ)**-分配的**((λ, κ)-distributive) であるとは,

$$\bigwedge_{\alpha<\lambda} \bigvee_{\beta<\kappa} p_{\alpha\beta} = \bigvee_{f:\lambda\to\kappa} \bigwedge_{\alpha<\lambda} p_{\alpha,f(\alpha)}$$

で表される (λ, κ)-分配律[1]が $\mathbb{B}$ において満たされるときにいう.

次の定理は, $(\omega, 2)$-分配性がゲーム $\mathsf{G}_{c\&c}(\mathbb{B})$ によって特徴づけられることを示している.

定理 2.1. ([2, Theorem 1]) ブール代数 $\mathbb{B}$ が $(\omega, 2)$-分配的であることは, ゲーム $\mathsf{G}_{c\&c}(\mathbb{B})$ においてプレイヤー ONE が必勝戦略を持たないことと同値である.

3 実数を付加する強制法と無限ゲーム

Cohen が連続体仮説の独立性を証明するために用いた強制法は, 「基底モデルに存在しない新たな実数を付加する」 ものであった. 実数を付加する強制法には, Cohen が用いたもののほかに多くの種類があるが, 強制モデルにおける実数の集合の性質は, 用いる強制法の種類によって異なる. この節では, 強制モデルにおける実数の集合の性質とブール代数上の無限ゲームの関係について, いくつかの結果を紹介する.

はじめに, 次のような一般的な問題を設定する.

問題 3.1. ブール代数 $\mathbb{B}$ による強制モデル $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ において, 基底モデル $\mathbf{V}$ における実数全体の集合 $\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ は, どのぐらい「大きい」か?

ここで, 「大きい」の意味としては, たとえば「ルベーグ外測度が正」「第二類集合 (Baire のカテゴリの意味で)」などが考えられる. [2]

実数を付加する強制法に関して, $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ において $\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ が「大きく」保たれるということは, ある意味で「よい性質」と考えられている. これらの性質がブール代数上の無限ゲームによって特徴づけられるというのが, ここで紹介する結果のいわんとするところである.

まず, ゲーム $\mathsf{G}_{\omega,1}(\mathbb{B})$ を考える. これは, $\mathsf{G}_{c\&c}(\mathbb{B})$ で ONE が p を「2 つの元 p_0^n, p_1^n に分割する」ところを「可算個の元 $\{p_j^n : j<\omega\}$ に分割する」と改めたもので, TWO が勝つための条件は $\mathsf{G}_{c\&c}(\mathbb{B})$ と同様である. このゲームについては, 次の結果が知られている.

定理 3.2. ([2, Theorem 2]) ブール代数 $\mathbb{B}$ について, 以下は同値である.

1. $\mathbb{B}$ は (ω, ω)-分配的である.
2. ゲーム $\mathsf{G}_{\omega,1}(\mathbb{B})$ におけるONE の必勝戦略は存在しない.
3. $\mathbb{B}$ による強制モデル $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ において, $\mathbb{R}=\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ である.

すなわち, ゲーム $\mathsf{G}_{\omega,1}(\mathbb{B})$ によって特徴づけられる強制法理論的性質は「新しい実数を一切付加しない」ということになる. これは確かに (最も強い意味で) $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ が「大きく保たれる」ことを意味するが, 積極的に実数を付加する強制法を考えるうえではあまり意味がない.

---

[1] この式が分配律の無限への一般化であることは, 容易に理解できよう.

[2] たとえば, Cohen 実数を付加する強制法では, $\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ は第二類かつルベーグ測度零になるが, random 実数を付加する強制法では, 逆に $\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ は第一類かつルベーグ外測度正になる.

「新しい実数を付加しつつ, 古い実数の全体が大きく保たれる」ことを意味する強制法理論的性質として多く用いられるのが, 次に示すSacks Propertyである.

ω から ω の有限集合全体への写像 S で, すべての $n<\omega$ について $|S(n)| \leq n+1$ であるようなものを, **スラローム**とよぶ.

定義 3.3. ブール代数 $\mathbb{B}$ がSacks Propertyをもつとは, 任意の $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ の関数 $f:\omega\to\omega$ に対し, $\mathbf{V}$ に属するスラローム S で, すべての $n<\omega$ について $f(n)\in S(n)$ となるものが存在するときにいう.

Sacks Propertyは, 「$\mathbf{V}$ で定義可能なルベーグ測度零のボレル集合の全体が, $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ においてルベーグ測度零の集合からなるイデアルの生成集合となる」という命題と同値であることが知られている. これは, かなり強い形で「$\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ が大きく保たれる」ことを意味するものである. [3]

Sacks Propertyは, 次に示すゲーム $\mathsf{G}_{\omega,\mathrm{id}}(\mathbb{B})$ によって特徴づけられる. ONE は $\mathsf{G}_{\omega,1}$ と同様に, 第 n 手として p を可算個の元 $\{p^n_j : j<\omega\}$ に分割するが, それに対して TWO は, 第 n 手目には n 個の元を選ぶ, すなわち, $|a_n|=n$ なる ω の部分集合 a_n を指定するものとする. TWO が勝つための必要十分条件は, $\bigwedge_{n<\omega}\bigvee_{j\in a_n} p^n_j > \mathbf{0}$ である.

定理 3.4. ([3, Theorem 4.1]) ブール代数 $\mathbb{B}$ がSacks Propertyをもつことは, ゲーム $\mathsf{G}_{\omega,\mathrm{id}}(\mathbb{B})$ においてプレイヤー ONE が必勝戦略を持たないことと同値である.

Sacks Propertyを弱めた概念としてしばしば用いられるものに, ω^ω-boundingness と Laver Propertyがある. [4]

定義 3.5. ブール代数 $\mathbb{B}$ が ω^ω-bounding であるとは, 任意の $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ の関数 $f:\omega\to\omega$ に対し, $\mathbf{V}$ に属する関数 $g:\omega\to\omega$ で, すべての $n<\omega$ について $f(n)<g(n)$ となるものが存在するときにいう.

定義 3.6. ブール代数 $\mathbb{B}$ がLaver Propertyをもつとは, 任意の $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ の関数 $f:\omega\to\omega$ に対し, もし, $\mathbf{V}$ に属する関数 $g:\omega\to\omega$ で, すべての $n<\omega$ について $f(n)<g(n)$ となるものが存在するならば, $\mathbf{V}$ に属するスラローム S で, すべての $n<\omega$ について $f(n)\in S(n)$ となるものが存在するときにいう.

これらの概念についても, それぞれの特徴づけとなるゲームが存在する. $\mathsf{G}_{\omega,\mathrm{fin}}(\mathbb{B})$ と $\mathsf{G}_{\mathrm{fin},\mathrm{id}}(\mathbb{B})$ は, $\mathsf{G}_{\omega,\mathrm{id}}(\mathbb{B})$ と同様だが, それぞれ, 第 n 手目に「ONE は p を可算個に分割, TWO は有限個を選ぶ」「ONE は p を有限個に分割, TWO は n 個を選ぶ」という手順で進行するものとする.

また, ω^ω-boundingness については, 次に示すブール代数の弱分配性との関連も知られている. 基数 λ,κ に対し, ブール代数 $\mathbb{B}$ が (λ,κ)-**弱分配的**(weakly (λ,κ)-distributive) であるとは,

$$\bigwedge_{\alpha<\lambda}\bigvee_{\beta<\kappa} p_{\alpha\beta} = \bigvee_{f:\lambda\to[\kappa]^{\mathrm{fin}}}\bigwedge_{\alpha<\lambda}\bigvee_{j\in f(\alpha)} p_{\alpha,j}$$

[3]たとえば, $\mathbb{B}$ がSacks Propertyをもてば, $\mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ において $\mathbb{R}\cap\mathbf{V}$ はルベーグ外測度正かつ第二類である.

[4]いずれの性質も「$\mathbf{V}$ で定義可能な第一類ボレル集合全体で $\mathbb{R}$ を被覆できる」ことを導く. 特に, Laver Propertyはそれに加えて「$\mathbf{V}$ で定義可能なルベーグ測度零のボレル集合全体で $\mathbb{R}$ を被覆できる」ことをも導く. また, 定義から明らかに, $\mathbb{B}$ がSacks Propertyをもつことは, $\mathbb{B}$ が ω^ω-bounding でかつ Laver Property をもつことと同値である.

で表される (λ,κ)-弱分配律が $\mathbb{B}$ において満たされるときにいう. ($[\kappa]^{\mathrm{fin}}$ は κ の有限部分集合全体からなる集合を表す.)

定理 3.7. ([5, Corollary 1.3],[3, Theorem 4.2]) ブール代数 $\mathbb{B}$ について, 以下は同値である.

1. $\mathbb{B}$ は (ω,ω)-弱分配的である.
2. ゲーム $\mathsf{G}_{\omega,\mathrm{fin}}(\mathbb{B})$ における ONE の必勝戦略は存在しない.
3. $\mathbb{B}$ は ω^ω-bounding である.

定理 3.8. ([3, Theorem 4.3]) ブール代数 $\mathbb{B}$ が Laver Property をもつことは, ゲーム $\mathsf{G}_{\mathrm{fin,id}}(\mathbb{B})$ においてプレイヤー ONE が必勝戦略を持たないことと同値である.

4 問題

最後に, 本稿の結果に関連する問題を紹介する.

問題 4.1. 本稿で紹介したゲームは, 一般には決定的でない, すなわち, どちらのプレイヤーにも必勝戦略が存在しないことがありうる. したがって, TWO が必勝戦略を持つことは, ONE が必勝戦略を持たないことより強い性質である. それでは, 各々のゲームについて「TWO が必勝戦略を持つ」という命題は, どのような強制法理論的な性質に対応するか?

問題 4.2. 本稿では長さ ω の無限ゲームのみを扱ったが, 一般の順序数の長さをもつ超限ゲーム (transfinite games) と強制法理論との関係は? (これについては, 最近 [1, 4] などの試みが行われている.)

参考文献

[1] T. Ishiu. Games of transfinite length on Boolean algebra, 1997. preprint.

[2] T. Jech. More game theoretic properties of Boolean algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, Vol. 26, pp. 11–29, 1984.

[3] M. Kada. More on Cichoń's diagram and infinite games, 1998. to appear in J. Symbolic Logic.

[4] M. Kada. Weak distributivity and a transfinite game, 2000. preprint.

[5] A. Kamburelis. On the weak distributivity game. *Ann. Pure Appl. Logic*, Vol. 66, pp. 19–26, 1994.

嘉田 勝

北見工業大学情報システム工学科

E-mail `kada@math.cs.kitami-it.ac.jp`

WWW `http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kada/`

「同じ」と「違う」: カオス編

角田　秀一郎

カオスを題材として「同じ」と「違う」を議論する. 通常,「決定論的だが初期条件敏感性と軌道不安定性をもつ」がカオスの特徴とされ, これらは数学的にも記述される. しかし, カオスを見たときの感覚はその記述のなかにはない. なぜなら, 数字としてはゼロではないがグラフではゼロとしか思えないという微妙な差異がカオスを発生させるからである. これを数式処理ソフト「マセマティカ」を使って例示する. たとえば, 0.1 と有理数 10 分の 1 では内部処理の違いが引き起こす出力までの時間差がある.「同じ」はずのものが実は時間差があって「違う」ものだったにもかかわらず, なお「同じ」出力をもってしまう.

これはカオスと同じ構造をもつ現象である. これを数学の内部に取り入れることを考える. いわば, 数学自体を分岐させるようなことである. 通常, 数学は, 0.1 と 10 分の 1 は完全に同じものであるプラトニックな数学世界と 0.1 と 10 分の 1 が別物である現実世界から構成されている. 普通は 0.1=1/10 という式は少なくともある種の意味をもつと考えている. 実はそうではなく, 0.1=1/10 は数学の外部に属するのである. そこに注目することで, 数学の至る所に「0.1=は 1/10 である」,「0.1=は 1/10 ではない」という形の分岐を構成できる. もちろんその分岐が現象として現れることは稀である. というよりは, この数学の分岐が現象したのがカオスという見方ができる.

まとめのかわりに, 相対論を比喩にとる. カオスと金星の近日点移動が対応し, すべての現象に光速度有限を導入したこととすべての数学に分岐の可能性を導入したことが対応する. 相対論が近日点移動を消すわけではないのと同様, 数学の分岐によってカオスが消えるわけではない. また, 光速度有限がどの現象に有意味となるか明確ではないのと同じで, いつ数学の分岐が起こるかわからない. しかし, 相対論が物理学において, そうであったように, この分岐が数学の様相を変えることを期待する.

特別講演
音響散乱の逆問題

中村　玄、群馬大学工学部

音波が障害物にあたると散乱する。これが障害物による音響散乱であり、最初に障害物にあたる音波を入射波、散乱した音波を散乱波と呼ぶ。いま、障害物の形状やその物理的性質が分からないとき、いろいろな方向から波面が平面な音波（平面波）を入射させ、その散乱波の遠方におけるプロファイル（遠方場のパターン）より障害物の形状やその物理的性質を決定する問題、即ち障害物による音響散乱の逆問題を考える。但し、障害物の境界は十分滑らかでその物理的性質をあらわす境界条件はディリクレ境界条件、ノイマン境界条件、ロバン境界条件の何れかとし、入射波の周波数は一定、入射波の入射方向は全方向、散乱波の遠方場のパターンの観測方向は全方向とする。この講演では、特に障害物の境界条件がロバン境界条件の場合といろいろな境界条件を持った障害物が有限個ある場合について、音響散乱の逆問題を論じる予定である。

1. 肥田理論、ガロア表現と岩澤理論

落合 理

肥田氏によって定義されたΛ-adic modular form について復習するとともに、それに付随するガロア表現のmodular ordinary deformation の構成などについて説明する。また、その場合の２変数のセルマー群の定義、岩澤主予想の設定を紹介する。

2. 加藤オイラー系と2変数 p-adic L-function

落合 理

２変数の ordinary Galois deformation に対するコールマン写像を与え、さらにそのコールマン写像による加藤氏のオイラー系の像として２変数の p-adic L-function が得られることを説明したい。