



Title	1999年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures 北海道大学理学部数学教室
Author(s)	Ono, K.; Honda, N.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 63, 1
Issue Date	2000-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/637
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/695
Type	departmental bulletin paper
File Information	1999da001.pdf



1999年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by K. Ono and N. Honda

Series #63. June, 2000

1999年度 談話会・特別講演アブストラクト 目次

1. 竹井 義次氏 (京都大)	特異摂動の微分方程式と完全WKB解析	1
2. 野海 正俊氏 (神戸大)	アフィン・リー環に付随する無限可積分系とパンルヴェ・ガルニエ系	3
3. 松本 圭司氏 (広島大)	On Periods for a family of the triple coverings of the complex projective line branching at 6 points	4
4. Péter Erdi氏 (ハンガリー科学アカデミー)	Hermeneutic Brain (解釈学的脳)	6
5. 桂 利行氏 (東京大)	Formal Brauer 群と K_3 , アーベル曲面のモジュライ空間	7
6. 杉田 洋氏 (九州大)	2つの整数が互いに素である確率について	8
7. 井ノ口 順一氏 (福岡大)	Painlevé Equations in Differential Geometry	10
8. 大野 克嗣氏 (イリノイ大)	くりこみ群と現象論	11
9. 藤田 安啓氏 (富山大)	エルゴード制御に現れるベルマン方程式に関する解の存在定理	12
10. 小俣 正朗氏 (金沢大)	離散的勾配流を用いた Ginzburg-Landau タイプの問題の数値解析について	14
11. Daniel Delbourgo氏 (ノッティンガム大、東京大)	p-adic L-functions	17
12. 加藤 和也氏 (東京大)	The conductor formula of Bloch	17
13. 松井 泰子氏 (東海大)	整数計画問題とグレブナー基底	18
14. 田島 慎一氏 (新潟大)	Ehrenpreis の基本原理と Grothendieck 双対性	20
15. Michael Reissig氏 (TU Bergakademie Freiberg)	L_p - L_q decay estimates for wave equations with time-dependent coefficients - the influence of the mass -	26
16. Hubert Kalf氏 (ミュンヘン大)	Strong unique continuation for Dirac systems	28
17. 小藺 英雄氏 (東北大)	Limiting case of the Sobolev inequality in the Besov space with application to the non-linear P.D.E.	29

18.	黒瀬 秀樹 氏 (福岡大)	
	量子群上の関数環に対する Quantum Double について	30
19.	Frank Raymond 氏 (ミシガン大)	
	Bieberbach Theorems for Solvable Lie Groups	31
20.	儀我 美一 氏 (北海道大)	
	Mathematical Analysis toward Crystal Growth Problems (結晶成長問題に対する数学解析)	34
21.	Yong-Geun Oh 氏 (ウイスコンシン大、KIAS、京都大)	
	Recent Progress in the Lagrangian intersection Floer theory	35
22.	Jean Taylor 氏 (ラットガース大)	
	Some recent results in the crystalline calculus of variations	36
23.	Maurizio Paolini 氏 (カソリック大)	
	Consistent approximation of crystalline evolution by interface diffusion and numerical simulations	38
24.	Jing Yu 氏 (Academia Sinica)	
	On Characteristic Polynomials of Frobenius Associated to Drinfeld Modules	39
25.	松本 圭司 氏 (北海道大)	
	合流超幾何関数の交点理論	40
26.	行木 孝夫 氏 (北海道大)	
	The future of mathematical communication:1999 の報告	43

1999年度 談話会・特別講演一覧

1. 6月16日(水)*竹井義次氏(京都大) 特異摂動の微分方程式と完全WKB解析
2. 6月16日(水)*野海正俊氏(神戸大) アフィン・リー環に付随する無限可積分系とバンルヴェ・ガルニエ系
3. 6月22日(火)*松本圭司氏(広島大) On Periods for a family of the triple coverings of the complex projective line branching at 6 points
4. 6月28日(月)*Péter Érdi氏(ハンガリー科学アカデミー) Hermeneutic Brain (解釈学的脳)
5. 6月30日(水)*桂利行氏(東京大) Formal Brauer 群と K_3 , アーベル曲面のモジュライ空間
6. 7月7日(水)*杉田洋氏(九州大) 2つの整数が互いに素である確率について
7. 7月9日(金)*井ノ口順一氏(福岡大) Painlevé Equations in Differential Geometry
8. 7月12日(月)*大野克嗣氏(イリノイ大) くりこみ群と現象論
9. 7月12日(月)*藤田安啓氏(富山大) エルゴード制御に現れるベルマン方程式に関する解の存在定理
10. 7月26日(月)*小俣正朗氏(金沢大) 離散的勾配流を用いた Ginzburg-Landau タイプの問題の数値解析について
11. 8月3日(火)*Daniel Delbourgo氏(ノッティンガム大、東京大) p-adic L-functions
12. 8月3日(火)*加藤和也氏(東京大) The conductor formula of Bloch
13. 8月3日(火)*松井泰子氏(東海大) 整数計画問題とグレブナー基底
14. 8月6日(金)*田島慎一氏(新潟大) Ehrenpreis の基本原理と Grothendieck 双対性
15. 9月14日(火)*Michael Reissig氏(TU Bergakademie Freiberg) L_p - L_q decay estimates for wave equations with time-dependent coefficients
- the influence of the mass -
16. 10月22日(金)*Hubert Kalf氏(ミュンヘン大) Strong unique continuation for Dirac systems
17. 10月25日(月)*小藺英雄氏(東北大) Limiting case of the Sobolev inequality in the Besov space with application to the non-linear P.D.E.
18. 10月27日(水)*黒瀬秀樹氏(福岡大) 量子群上の関数環に対する Quantum Double について
19. 11月8日(月)*Frank Raymond氏(ミシガン大) Bieberbach Theorems for Solvable Lie Groups
20. 11月24日(水)*儀我美一氏(北海道大) Mathematical Analysis toward Crystal Growth Problems (結晶成長問題に対する数学解析)
21. 11月24日(水)*Yong-Geun Oh氏(ウィスコンシン大、KIAS、京都大) Recent Progress in the Lagrangian intersection Floer theory
22. 12月8日(水)*Jean Taylor氏(ラットガース大) Some recent results in the crystalline calculus of variations

23. 1月19日(水) * Maurizio Paolini 氏 (カソリック大) Consistent approximation of crystalline evolution by interface diffusion and numerical simulations
24. 1月21日(金) * Jing Yu 氏 (Academia Sinica) On Characteristic Polynomials of Frobenius Associated to Drinfeld Modules
25. 2月7日(月) John Roberts 氏 (ローマ大) Multiplicative Unitaries and Duality
26. 2月9日(水) * 松本圭司 氏 (北海道大) 合流超幾何関数の交点理論
27. 2月9日(水) * 行木孝夫 氏 (北海道大) The future of mathematical communication:1999 の報告



特異摂動の微分方程式と完全 WKB 解析

京大数理研 竹井 義次

1次元 (定常) Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \right) \psi = 0$$

(\hbar は Planck 定数) のように、 $\hbar = 0$ と $\hbar \neq 0$ での様相が全く異なる摂動問題を一般に「特異摂動」と呼ぶ。その“特異性”の一つの帰結として、簡明な代数的手続きによって求まる方程式 (1) のいわゆる WKB 解

$$(2) \quad \psi = \exp \int^x S(x, \hbar) dx, \quad \text{但し } S(x, \hbar) = \sum_{j \geq -1} \hbar^j S_j(x)$$

は発散の困難を有する。この発散の困難のゆえに、従来 WKB 解は、量子力学における固有値問題を解く際に不思議と有用な近似解とのみ見なされ、数学的には余り注意を引くことはなかった。しかし、「WKB 解に Borel 総和法を適用する」という A. Voros の idea に始まる完全 WKB 解析の考え方が、こうした発散級数解の背後にも方程式 (1) の性質を反映した (代数) 解析的な構造が隠れていることを明らかにした。

例えば、 $Q(x) = x$ というポテンシャルを持った Airy の方程式の場合、WKB 解の Borel 変換 (形式的 Laplace 逆変換) 像は Gauss の超幾何函数を用いて具体的に表示される。この表示を利用することにより、Airy の方程式に対する WKB 解の Borel 和が、 $\{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} x^{3/2} = 0\}$ という $x = 0$ を出る 3本の直線上を除いては well-defined となる (即ち (1) の解析函数解を定める) こと、また、これらの直線をはさんで隣合う 2つの領域における WKB 解の Borel 和の間には「接続公式」と呼ばれる簡明な関係式が成立すること、が確かめられる。更に (1) という形の一般の方程式に対しても、 $Q(x)$ の零点を turning point、そして $\operatorname{Im} \int_a^x \sqrt{Q(y)} dy = 0$ (但し a は turning point) で定義される曲線を Stokes 曲線と呼ぶことにすれば、十分に一般的な仮定の下で、Stokes 曲線上を除いては WKB 解 (2) の Borel 和は well-defined となり、また各 Stokes 曲線を横切る時には Airy の方程式の場合と同様の接続公式が成立する。

WKB 解の Borel 和が持つこうした解析的な性質は、固有値問題の枠組を超えて、(1) の形をした方程式に対する解の (複素領域における) 大域的な接続問題を「具体的に解く」ことを可能にする。実際、turning point と Stokes 曲線の図を (コンピュータ等を用いて) 描くことにより、例えば 2階 Fuchs 型方程式のモノドロミー群を具体的に計算することができる。詳しくは、河合隆裕・竹井義次「特異摂動の代数解析学」(岩波講座 現代数学の展開、岩波書店、1998) を参照されたい。

この完全 WKB 解析の考え方は、1次元 Schrödinger 方程式のみならず、より広いクラスの特異摂動の方程式に対しても有効である。例えば、2階常微分方程式の中では最も非線型らしい非線型方程式である Painlevé 方程式についても、(適当に微小パラメータを導入して特異摂動の方程式の形にした上で) 1次元 Schrödinger 方程式の場合と同様の理論が構築できる。即ち、Schrödinger 方程式の WKB 解に相当する形式解が構成され、turning point と Stokes 曲線をしかるべく定義すれば、各 Stokes 曲線上では一般の Painlevé 方程式の形式解の間に I 型の Painlevé 方程式 $d^2y/dx^2 = 6y^2 + x$ の場合と同様の接続公式が成立する。Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析の理論的整備は未だ不十分であり今後の大きな課題であるが、少なくともこの理論を‘形式的に’ II 型の Painlevé 方程式 $d^2y/dx^2 = 2y^3 + xy$ に応用すれば、Ablowitz-Segur の接続公式「 $x \rightarrow +\infty$ で

$$(3) \quad y(x) \sim \alpha \text{Ai}(x) \sim \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

(α は $\alpha < 1$ を満たす定数) という漸近展開を持つ II 型の Painlevé 方程式の解を実軸に沿って解析接続すれば、 $x \rightarrow -\infty$ において

$$(4) \quad y(x) \sim d(-x)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} - \frac{3}{4}d^2 \log(-x) + \theta\right),$$

但し

$$(5) \quad \begin{cases} d^2 &= -\frac{1}{\pi} \log(1 - \alpha^2), \\ \theta &= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}d^2 \log 2 - \arg \Gamma\left(1 - \frac{id^2}{2}\right), \end{cases}$$

が成立する」(cf. Stud. Appl. Math., 57(1977), 13-44, Physica D, 3(1981), 165-184) を示すことができる。換言すれば、II 型の Painlevé 方程式の接続公式が I 型の Painlevé 方程式の接続公式の組み合わせとして得られるのである(組み合わせ方を規定するのが Stokes 曲線の幾何)。Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析の有効性を示す一つの大きな証左であるこの結果の詳細については、近刊予定の数理解析研究所講究録「代数解析と特殊関数」(研究代表者 本多 尚文(北大・理))に収められた拙文「Painlevé II 型方程式に対するある接続問題について」を参照されたい。

「アフィン・リー環に付随する無限可積分系とパンルヴェ・ガルニエ系」

パンルヴェ方程式は2階の非線形常微分方程式の一つのクラスであり、いくつもの著しい特徴をもっている。変換群としてアフィン・ワイル群が作用することもそのような特性の一つであり、一般のアフィン・ワイル群に対しても、それを変換群に持つ非線形方程式が存在することが期待される。この講演では、山田泰彦氏との共同研究に基づいて、アフィン・リー環に付随する無限可積分系からのある種の「還元」の手続きによって、アフィン・ワイル群対称性をもつ、広いクラスの非線形方程式が得られることを報告したい。

On periods for a family of the triple coverings of the complex projective line branching at 6 points

Keiji Matsumoto

June 22, 1999

Let $C(\lambda)$ be the triple covering of the complex projective line \mathbf{P}^1 branching at six points $\lambda_1, \dots, \lambda_6$:

$$C(\lambda) : w^3 = \prod_{i=1}^6 (z - \lambda_i).$$

The moduli space of the family of such curves of genus 4 can be regarded as the configuration space Λ of ordered six distinct points on \mathbf{P}^1 . Note that the symmetric group S_6 naturally acts on Λ . A projective embedding of the space Λ is known by the name of Segre cubic. We can realize the Segre cubic as an algebraic variety Y in \mathbf{P}^{14} defined as linear and cubic equations by an S_6 -equivariant manner. On the other hand, it is studied that Λ and Λ/S_6 are isomorphic to $\mathbf{B}^3/\Gamma(1-\omega)$ and \mathbf{B}^3/Γ , respectively, where $\mathbf{B}^3 = \{x \in \mathbf{P}^3 \mid {}^t \bar{x} H x < 0\}$, $H = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ and

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{g \in GL_4(\mathbf{Z}[\omega]) \mid {}^t \bar{g} H g = H\}, \\ \Gamma(1-\omega) &= \{g \in \Gamma \mid g \equiv I_4 \pmod{1-\omega}\}. \end{aligned}$$

The space \mathbf{B}^3 is naturally embedded in the Siegel upper half space \mathbf{S}^4 of degree 4 by considering the period matrix Ω of $C(\lambda)$.

In this talk, we show the inverse of the period map

$$\psi : \Lambda \rightarrow \mathbf{B}^3/\Gamma(1-\omega)$$

in terms of fifteen theta constants. More precisely, for the two isomorphisms ψ and $\iota : \Lambda \rightarrow Y \subset \mathbf{P}^{14}$, we present the isomorphism $\Theta : \mathbf{B}^3/\Gamma(1-\omega) \rightarrow Y$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{B}^3/\Gamma(1-\omega) \\
 \iota \downarrow & & \Theta \swarrow \\
 Y \subset \mathbf{P}^{14} & &
 \end{array} \tag{1}$$

The map Θ is given by the ratio of the cubes of the fifteen theta constants on \mathbf{S}^4 which are characterized by the invariant property under the action of $\Gamma(1-\omega)$. In particular, linear and cubic relations among the cubes of 15 theta constants coincide with the defining equations of $Y \in \mathbf{P}^{14}$. By considering the action of $\Gamma/\Gamma(1-\omega) \simeq S_6$ on the fifteen theta characteristics, we can label 15 theta constants as $(ij;kl;mn)$, where $\{i, j, k, l, m, n\} = \{1, \dots, 6\}$. Then it turns out that the diagram (1) is S_6 -equivariant.

The Brain as Hermeneutic Device

P. Erdi (Hungarian Academy of Science)

There seems to be convergence between the "device approach" and the "philosophical approach" to the brain. Systems exhibiting "high" structural complexity and "high" dynamic complexity (e.g. but not exclusively chaos) may be candidates for hermeneutic devices, since they are both object or subject of interpretation and interpreting agents. (It should be recalled, however, that even structurally simple systems may lead to complex dynamics (May, 1976). So, the occurrence of chaos is not a sufficient condition for being a hermeneutic device.

Based partially on Freeman's finding and concepts, Tsuda (1984, 1991) suggested that (i) a particular chaotic phenomenon, namely chaotic itinerancy, may be identified with what he calls a hermeneutic process; (ii) in opposition to the idea that "the brain is a computer, the mind is a programmer", "the brain can create even a programmer through the interpretation process expressed by chaotic itinerancy..."

The brain is a physical structure which is controlled and also controls, learns and teaches, processes and creates information, recognizes and generates patterns, organizes its environment and is organized by it.

Both natural science as "objective analyzer" and (post)modern art reiterate the old philosophical question: What is reality? The human brain is not only capable of perceiving what is called objective reality, but can also create new reality. It is a hermeneutic device.

Formal Brauer 群と K3, アーベル曲面のモジュライ空間

桂 利行 (東大数理)

X を正標数 p の代数的閉体 k 上の K3 曲面, Φ_X を X の形式的 Brauer 群, h を Φ_X の高さとする. よく知られているように $1 \leq h \leq 10$ または $h = \infty$ である. M を次数 $2d$ ($p \nmid 2d$) の偏極 K3 曲面のモジュライスタックとし, 自然数 h ($1 \leq h \leq 10$) に対し, $M^{(h)} = \{X \in M \mid \text{height } \Phi_X \geq h\}$ とおく. この講演では, Φ_X の高さ h の数値的な特徴付けを与え, それを用いて $M^{(h)}$ の構造を明らかにすることをめざす. また, M が既約であるという仮定のもとに, Chow 群での $M^{(h)}$ の類を決定する. アーベル曲面に対して同様の結果が得られることにもふれたい.

2 整数が互いに素である確率について

杉田 洋 (九州大学大学院数理学研究科)

次の興味深い密度定理は Dirichlet[1] により証明された。

定理.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \#\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid 1 \leq x, y \leq N, \gcd(x, y) = 1\} = \frac{6}{\pi^2}, \quad (1)$$

ここで $\gcd(x, y)$ は x と y の最大公約数, また $\#A$ は集合 A の元の個数を表す。

ここでは, この定理に次のような現代的な証明を与える: まず整数環 \mathbf{Z} のコンパクト化 $\widehat{\mathbf{Z}}$ を考える. $\widehat{\mathbf{Z}}$ は有限整アデール環と呼ばれるものである. $\widehat{\mathbf{Z}}$ には加法に関して不変な確率測度 (Haar measure) λ が存在する. $\widehat{\mathbf{Z}}$ の2つの元の組 (x, y) が「互いに素」であるとは, 任意の素数 p に対して $(x, y) \notin (p\widehat{\mathbf{Z}})^2$ となることと考える. このとき, 互いに素な (x, y) の全体を B とすれば, すなわち,

$$B := \bigcap_{p: \text{素数}} (\widehat{\mathbf{Z}}^2 - (p\widehat{\mathbf{Z}})^2),$$

とすれば

$$\lambda \otimes \lambda(B) = \frac{6}{\pi^2} \quad (2)$$

であることが示せる. これは Dirichlet の定理のアデール版である. 最後に, 自然数全体 \mathbf{N} が $\widehat{\mathbf{Z}}$ で一様分布すること, すなわち, 次の確率測度の弱収束

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_n \longrightarrow \lambda, \quad \text{as } N \rightarrow \infty,$$

を用いて (2) から (1) を導く.

この方法によって M.Kac の本 [2] の Chapter 4 にあるいくつかの密度定理を証明することができる.

参考文献

- [1] P.G.L.Dirichlet, Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie, *Abhandlungen Königlich Preuss. Acad. Wiss.*, (1849), 69–83.
- [2] M.Kac, *Statistical independence in probability, analysis and number theory*. J.Wiley, (1959).

- [3] J.-L. Maucilaire, Sur la théorie des suites presque-périodiques I, II,
Proc. Japan Acad., **61**, Ser. A (1985), 153-155, 190-192.

井ノ口順一 (福岡大学理学部応用数学科)

Painlevé Equations in Differential Geometry

要旨：変形 KdV 方程式の相似解が第 2 種 Painlevé 超越函数で与えられることは良く知られています。この事実に限らず Painlevé 方程式は可積分系の中で重要な位置を占めることは言うまでもありません。

平均曲率一定曲面は楕円型 Sinh-Gordon 方程式で記述されます。今回の放談会では平均曲率一定曲面を「可積分なまま」拡張することで自然に Painlevé 方程式が現れることを紹介いたします。今回の内容は藤岡敦氏(金沢大学)との共同研究に基づきます。

くりこみ、漸近解析、現象論 イリノイ大学物理・Beckman 研 大野克嗣

この世はカオスやノイズに満ちた複雑な世界であるということになっているが、それにしてはある程度の理解も可能なように見える。それは、「世界を理解した気分になること」が世の中のすべてをわかることを要求しないからである。現象を一般的な枠と「些末な局面」とに分けて前者を知るとわれわれの気分は落ち着く（それを知ると生きていける）ようである。このような世界の見方を現象論的見方という。ある一連の現象を一般的枠組みと個々の系の個性による部分とに腑分けすることが、現象論的認識の基本である。

あるパラメタ α の値の極限（巨視極限、大域極限など）でわれわれが関心を持っている量が発散するとしよう。これはその量が α に敏感によるということだ。もしも、 α に敏感に依る量を括り出すことができれば（これができることをくりこみ可能という）、残りは α によらなくなって極限さえ意味があるようになるだろう。たとえば、巨視極限では α はマイクロ・マクロのスケールの比であり、極限でこの分離ができれば、われわれは現象論の一般的枠組みを得ることができることになる。

この立場から、まず簡単な例を使ってくりこみを説明し、ついで、微分方程式系の大域的挙動が全く同じ考えで出来るらしいことをいくつかの例で示す。いわゆる逓減摂動論がくりこみとしてとらえられ、逓減の結果が自然にくりこみ群方程式として得られる。ほとんどあらゆる有名な方程式（Burgers, Boltzmann, Newell-Whitehead, Fokker-Planck, 界面方程式、など）がくりこみ群方程式として現れる。特異摂動論の核心は逓減摂動だから、逓減摂動の結果があらわな摂動の結果を使わずに実行できれば、いろいろと計算が簡略化されるはずである。実際にこれが可能である（「原くりこみ群方程式」の方法）。

最後に、時間があれば、モデル化と現象論の関係を相秩序化動力学を例にとつて概観し、さらに数値計算に関連した話題を取り上げる。

以上、入門的な部分は [1] に近い。セミナーの中心部分は [2]（これは 1994 年までのまとめである）の大幅な改良である。原くりこみ群方程式の方法については、名古屋大学の野崎一洋氏と論文仕上げ中。

[1] 大野克嗣「くりこみ、現象論、そして漸近解析」数理科学 35(4), 13 (1997); 「非線形性とくりこみ」日本物理学会誌 52, 5021 (1997).

[2] L. Y. Chen, N. D. Goldenfeld and Y. Oono, Phys. Rev. E 54, 376-394 (1996).

エルゴード制御に現れる ベルマン方程式に関する解の存在定理

藤田 安啓 (富山大・理)

February 14, 2000

この講演では、Bellman 方程式

$$(1) \quad \lambda = \frac{1}{2} \phi''(x) - |\phi'(x)| + f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

の解の存在および一意性について論じたい。ここで、 $f(\cdot)$ は与えられた関数で見つけるべき解は $(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R})$ である。この Bellman 方程式は、次のエルゴード制御問題に関連して出てくる： (w_t) を $w_0 = 0$ なる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ 上の 1 次元ブラウン運動として、 $u = (u_t)$ は発展的可測な制御過程で

$$(2) \quad |u_t| \leq 1, \quad t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

を満たすものとする。このとき、1 次元確率微分方程式

$$(3) \quad dx_t = u_t dt + dw_t, \quad x_0 = \xi$$

の解に対して定義されるコスト

$$(4) \quad J(u) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T f(x_t) dt \right]$$

を最小化したい。ここで $\xi \in \mathbb{R}$ は与えられた定数である。もし、Bellman 方程式 (1) が解けると、上のエルゴード制御問題の最小値は λ 、最適制御はマルコフ戦略 $-\text{sgn}(\phi'(x))$ によって決まる確率制御 (u_t^*) である。即ち、

$$(5) \quad dx_t^* = -\text{sgn}(\phi'(x_t^*)) dt + dw_t, \quad x_0 = \xi$$

の解に対して $u_t^* = -\text{sgn}(\phi'(x_t^*))$ となる ([3])。この意味において Bellman 方程式 (1) を解くことは重要である。

さて、Bellman 方程式 (1) は解が定数 λ と関数 ϕ からなり、解くのは易しくない。Bellman 方程式 (1) を解く手法としては、 $\alpha > 0$ に対して微分方程式

$$(6) \quad \alpha \phi_\alpha(x) = \frac{1}{2} \phi_\alpha''(x) - |\phi_\alpha'(x)| + f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

の解を考えて（この解は、確率論的に解けることが知られている）、 $\alpha \downarrow 0$ のときの極限 $\alpha\phi_\alpha(0) \rightarrow \lambda$ と $\phi_\alpha(x) - \phi_\alpha(0) \rightarrow \phi(x)$ を考えて、その対 (λ, ϕ) により Bellman 方程式 (1) の解を作る手法がよく知られている（[1], [2] etc.）。この手法は、多次元の場合も有効である。

この講演では、システムが 1 次元であることの特徴を生かして全く新しい解の構成法を紹介したい。まず、関数方程式

$$(7) \quad \eta(x) = \exp \left\{ 2 \int_0^x \operatorname{sgn}(G_\eta(t)) dt \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。ここで

$$G_\eta(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \eta(t) dt - K_\eta \int_{-\infty}^x \eta(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K_\eta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \eta(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) dt}$$

である。Schauder の不動点定理を使い、適当な関数空間で関数方程式 (7) の解 $\eta^*(x)$ の存在を示す。実は、 $\eta^*(x)$ は、最適制御を与えるマルコフ戦略 $-\operatorname{sgn}(\phi'(x))$ に対する (5) の解の不変測度になっている。というよりも、関数方程式 (7) がそうなるように作られている。ここまでくると、Bellman 方程式 (1) の解 (λ, ϕ) は、

$$(8) \quad \lambda = K_{\eta^*}, \quad \phi(x) = -2 \int_0^x \frac{G_{\eta^*}(t)}{\eta^*(t)} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

で与えられることを示すことができる。この構成法は、最適制御を与えるマルコフ戦略に対する不変測度を見ながらのものであると同時に、 f に関する仮定も弱めることができるなどの利点を持っている。

最後に、儀我教授の貴重なアドバイスにより、 f に関する仮定をさらに弱めることができたことを付記しておく。

References

- [1] A. Bensoussan and J. Frehse. *On Bellman equations of ergodic control in \mathbb{R}^n* , J. Reine angewandte Math. **429**, pp 125–160 (1992).
- [2] M. K. Ghosh, A. Arapostathis and S. I. Marcus. *Ergodic control of switching diffusions*, SIAM J. Control Optim. **35**, pp 1952–1988 (1997).
- [3] Y. Fujita and H. Morimoto. *Ergodic control of stochastic differential systems with controller constraints*, Stochastics and Stochastics Reports **58**, pp 245–257 (1996).

NUMERICAL CALCULATIONS FOR THE EIKONAL
EQUATION VIA THE DISCRETE MORSE
SEMIFLOW WITH GINZBURG-LANDAU ENERGY

小俣 正朗

HIROSHI IWASAKI & KEN-ICHI KAWAGOE & SEIRO OMATA

Department of Computational Science, Faculty of Science
Kanazawa University, Kanazawa, 920-1192 Japan

1. Introduction

We treated numerical calculations for the eikonal equation: $|\nabla\Phi| = 1$ in $\Omega \in \mathbb{R}^n$ with $\Phi = 0$ on $\partial\Omega$ by use of the Ginzburg-Landau type energy functional which is predicted to get the good solution as a Γ limit of it ($\epsilon \rightarrow 0$) (See [AG1-2]). The problem is to find a minimizer of

$$J_\epsilon(\Phi) := \int_{\Omega} (\epsilon(\nabla \cdot \nabla\Phi)^2 + \frac{1}{\epsilon}(|\nabla\Phi|^2 - 1)^2) dx, \quad (1.1)$$

in the admissible function space $W^{2,2}(\Omega)$ with the boundary data $\Phi = 0$ with $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0$ or $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = -1$. In order to use our recent research for the numerical method on second order PDE's, we reform the mathematical problems (put $u := \nabla\Phi$) in the following minimizing problem: Find a minimizer of the functional

$$I_\epsilon(u) := \int_{\Omega} \left(\epsilon(\operatorname{div} u)^2 + \frac{1}{\epsilon}(|u|^2 - 1)^2 \right) dx, \quad (1.2)$$

in $\mathcal{K}_\nu := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^4(\Omega); \operatorname{curl} u = 0, \langle u, \nu \rangle = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ or $\mathcal{K}_\tau := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^4(\Omega); \operatorname{curl} u = 0, \langle u, \tau \rangle = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ where ν is the outer normal of Ω and τ is a unit tangential vector. Our aim is to establish a existence for both elliptic and parabolic equations and treat also the property of (local) minimizers of above functional numerically.

We mainly used the discrete Morse semiflow which can be determined on general elliptic functional. Let h be a positive number which tends to zero, later. Consider the following energy functionals:

$$J_m(u) = \int_{\Omega} \frac{|u - u_{m-1}|^2}{h} dx + I(u), \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

determine a sequence $\{u_m\}$ as a minimizer of J_m in \mathcal{K} (admissible space) inductively from given initial data u_0 . Since minimizers $\{u_m\}$ depend on a positive constant h , we should write $\{u_m^h\}$ and also $J_m = J_m^h$. However we use the notation $\{u_m\}$ and J_m unless any confusions occur. This approach was introduced by N.Kikuchi(see [K]). (See also [O].)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

2. Results

We constructed heat solutions and time limit solutions.

DEFINITION 2.1. We define functions \bar{u}^h and u^h on $\Omega \times (0, \infty)$ by

$$\begin{aligned}\bar{u}^h(x, t) &= u_m^h(x), \\ u^h(x, t) &= \frac{t - (m-1)h}{h} u_m^h(x) + \frac{mh - t}{h} u_{m-1}^h(x),\end{aligned}$$

for $(x, t) \in \Omega \times ((m-1)h, mh]$.

THEOREM 2.2. The limit function u belongs to $\overset{\circ}{V}_2((0, T) \times \Omega)$ and satisfies

$$\int_{\Omega} u_0 \eta(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\Omega} (D_t u \eta + \epsilon \operatorname{div} u \operatorname{div} \eta + \frac{2}{\epsilon} (|u|^2 - 1) u \eta) dx dt \quad (2.1)$$

for all $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}((0, T) \times \Omega)$ with $\eta(x, T) = 0$ with $\operatorname{curl} \eta = 0$.

We also investigate an asymptotic behavior of the discrete Morse semiflow $\{u_m\}$ as $m \rightarrow \infty$. For numerical calculation, property mentioned here plays an important role.

THEOREM 2.3. For any subsequence $\{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$, there exists a subsequence $\{u_{m_{j\nu}}\} \subset \{u_{m_j}\}$ and a function u_{∞} on Ω such that

$$u_{m_{j\nu}} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{weakly in } W^{1,2}(\Omega), \quad (2.2)$$

$$u_{m_{j\nu}} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{strongly in } L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

$$u_{m_{j\nu}} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{weakly in } L^p(\Omega), \quad \forall p > 1, \quad (2.4)$$

as $\nu \rightarrow \infty$. Moreover, we have

$$|u_{\infty}| \leq 1 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad (2.5)$$

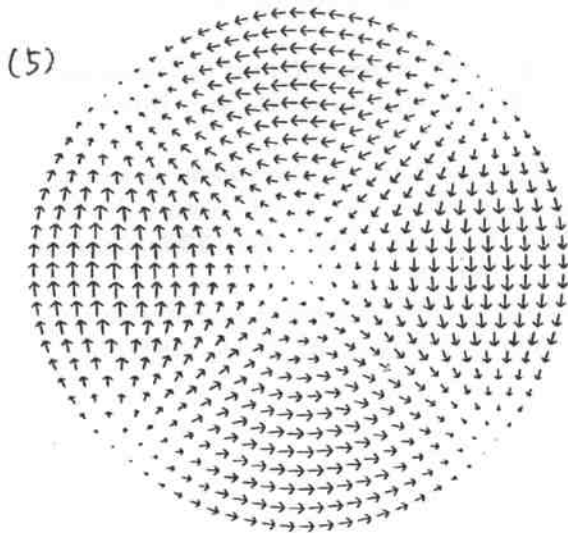
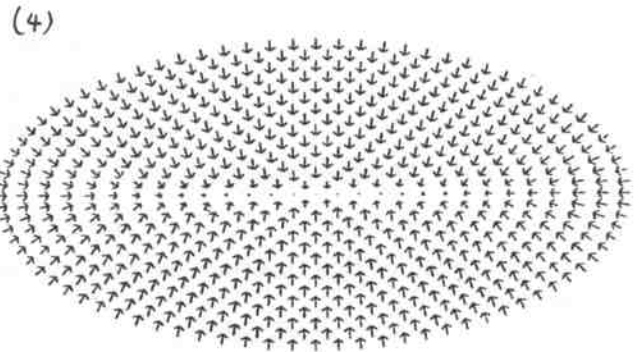
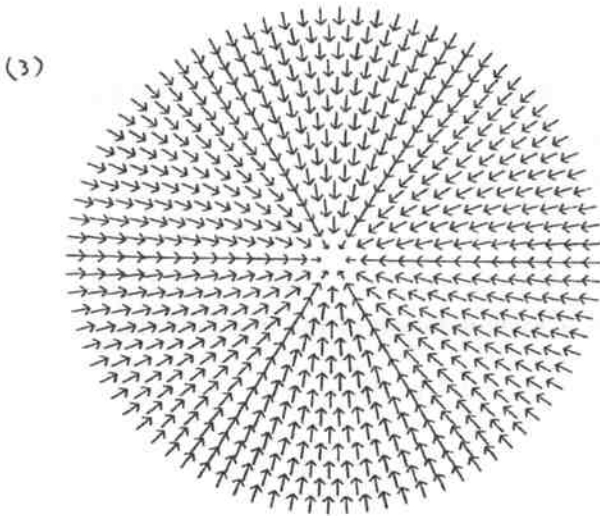
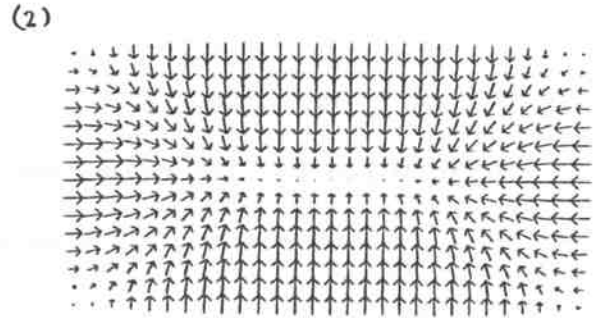
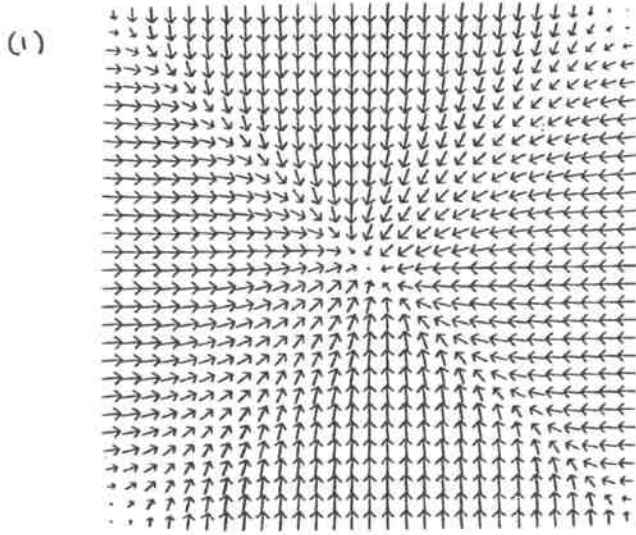
By virtue of this theorem, we can say that u_{∞} is a weak solution of the free boundary problem

$$\begin{cases} \epsilon \nabla(\operatorname{div} u_{\infty}) + \frac{1}{\epsilon} (1 - |u_{\infty}|^2) u_{\infty} &= 0 \quad \text{in } \Omega. \\ \text{B.C.} \end{cases}$$

References

- [AV1] P. Aviles - Y. Giga, "The distance function and defect energy", Proc. R. Soc. Edinb. A **126** (1996), 923-938.
- [AV2] P. Aviles - Y. Giga, "On lower semicontinuity of a defect energy obtained by a singular limit of the Ginzburg-Landau type energy for gradient fields", Proc. R. Soc. Edinb. A **129** (1999), 1-17.
- [K] N. Kikuchi, "An approach to the construction of Morse flows for variational functionals", in "Nematics - Mathematical and Physical Aspects", ed: J. -M. Coron, J. -M. Ghidaglia, F. Hélein, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. **332**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht - Boston - London (1991), 195-198.
- [O] S. Omata - T. Okamura - K. Nakane, "Numerical analysis for the discrete Morse semiflow related to the Ginzburg Landau functional", Nonlinear Analysis, **37**, No.5, (1999) 589-602.

APPENDIX: NUMERICAL RESULTS ($t \rightarrow \infty$)



境界条件

(1) ~ (4) $\langle u, \tau \rangle = 0$

(5) $\langle u, \nu \rangle = 0$

p -adic L -functions

Daniel Delbourgo (Univ. Nottingham)

Abstract: Perrin-Riou conjectures the existence of a total p -adic L -function attached to the symmetric square of a modular elliptic curve. We prove the existence of (most) of this function, and then try and calculate the leading term. Creeping into our formula is an “ L -invariant” which can be described via the exponential maps of Bloch-Kato.

The conductor formula of Bloch

加藤 和也 (東大数理)

Abstract: Spencer Bloch formulated a conjecture concerning the relation between the following two things (1)(2). Let X be a variety over a local field. (1) How the ramification of the Galois action on the étale cohomology of X is big. (2) How the reduction of X is bad. He proved his conjecture in the case X is a curve. Takeshi Saito and I proved his conjecture for X with arbitrary dimension under a certain mild assumption on X . I will talk about this.

整数計画問題とグレブナー基底

松井 泰子

東海大学理学部情報数理学科
<http://www.ss.u-tokai.ac.jp/~yasuko/>

1999年8月3日

整数計画問題とは、与えられた $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $\min\{c^T x \mid Ax = b\}$ を満たす、 $x \in \mathbb{Z}^n$ を求める問題である。整数計画問題を解くためのアルゴリズムは、分枝限定法、切除平面法、発見的解法等多数知られている。また、整数計画問題の一部は、多項式の問題に変換することによって、グレブナー基底を用いて最適解を求めることが可能である。

ここでは、グレブナー基底を用いて解ける整数計画問題を考える。まず多項式の問題に変換するために、制約式 $Ax = b$ の i 行に対し、変数 z_i を導入して、

$$z_i^{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n} = z_i^{b_i}$$

と書くことにする。すると、制約式は、

$$z_1^{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n} \dots z_m^{a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n} = z_1^{b_1} \dots z_m^{b_m}$$

という式で書き表せる。次に以下のような多項式写像を考える。

$$k[w_1, \dots, w_n] \xrightarrow{\varphi} k[z_1, \dots, z_m]$$

$$w_j \mapsto z_1^{a_{1j}} z_2^{a_{2j}} \dots z_m^{a_{mj}}$$

で、かつ任意の多項式 $g \in k[w_1, \dots, w_n]$ に対し、

$$\varphi(g(w_1, \dots, w_n)) = g(\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n))$$

とする。定義より、 φ は準同型写像となるので、制約式は、

$$\varphi(w_1^{x_1} \dots w_n^{x_n}) = z_1^{b_1} \dots z_m^{b_m}$$

となる。また、多項式環 $k[z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n]$ のイデアル

$$I = \langle z_1^{a_{11}} \cdots z_m^{a_{m1}} - w_1, \dots, z_1^{a_{1n}} \cdots z_m^{a_{mn}} - w_n \rangle$$

を考える。ここでグレブナー基底を求めると、 $z_1^{b_1} \cdots z_m^{b_m}$ のグレブナー基底による簡約化が $z_1^{b_1} \cdots z_m^{b_m}$ の φ による逆像を与え、与えられた整数計画問題の制約式を満たす整数解が求まる。ただし、グレブナー基底を求めるときに、目的関数 $c^T x$ を考慮した以下の性質を満たす項順序を用いる必要がある。この項順序を与えられた整数計画問題に対する *adapted order* とよぶ。

定義 1 *adapted order*

1. $\forall i, j, z_i \succ w_j$.
2. $x = (x_1, \dots, x_n)^T, x^0 = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ に対し、 $\varphi(w_1^{x_1} \cdots w_n^{x_n}) = \varphi(w_1^{x'_1} \cdots w_n^{x'_n})$ で、 $c^T x > c^T x^0$ ならば、 $w_1^{x_1} \cdots w_n^{x_n} \succ w_1^{x'_1} \cdots w_n^{x'_n}$.
3. $z_1 \succ \cdots \succ w_n$.

整数計画問題は、*adapted order* を用いて得たグレブナー基底で簡約化を行えば、解を求めることが出来る。

Theorem(Conti and Traverso) *adapted order* を用いて求めたグレブナー基底を G とする。このとき、 $z_1^{b_1} \cdots z_m^{b_m} \xrightarrow{G} h \in k[w_1, \dots, w_n]$ であるならば、 h の指数部は最適解である。

Open problem 与えられた整数計画問題の最適解が一意でない場合、グレブナー基底を用いて、すべての最適解を列挙できるか。

参考文献

- [1] W. W. Adams and P. Lounstunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, (1994), AMS Graduate Studies in Mathematics, 3.
- [2] D. A. Cox, and B. Sturmfels eds., *Applications of Computational Algebraic Geometry*, (1997), AMS Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 53.
- [3] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, (1986), Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, John Wiley & Sons.
- [4] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, (1995), AMS University Lecture series, 8.

Ehrenpreis の基本原理と Grothendieck 双対性

田島 慎一 新潟大学工学部情報工学科

キーワード: 指数多項式, 代数的局所コホモロジー, 多変数留数, Fourier-Borel 変換, Grothendieck duality, Hermite-Jacobi 多変数補間積分 (多変数 Bezoutian), ホロノミック D-加群

関数 $u(z)$ に対する定数係数の極大過剰決定系

$$M : P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0$$

を考えると, 極大過剰決定系であることから解は指数多項式となり, 同次解のなす集合は有限次元のベクトル空間となる. その意味では定数係数の極大過剰決定系の解析は容易である. しかし, 「具体的に解を表現したり構成したりすること」を既存の関数解析学の理論の枠組のなかで行うことは困難である. そこでここでは, 極大過剰決定系の場合のみに対してであるが, 従来とは異なる観点から定数係数偏微分方程式系を取り扱うことを提唱する.

1 指数多項式と代数的局所コホモロジー

偏微分作用素 $P_j(D)$ に対しその total symbol を $p_j(\zeta)$ とおく (偏微分作用素 $P_j(D)$ において偏微分記号 $\frac{\partial}{\partial z_k}$ を ζ_k に置き換えて得られる多項式). さらに

$$V = \{\zeta \in \mathbb{C}_\zeta^n \mid p_1(\zeta) = p_2(\zeta) = \cdots = p_s(\zeta) = 0\}$$

と定める. 偏微分方程式系 M は極大過剰決定系なので, V は有限個の点からなる.

この集合 V に台を持つような代数的局所コホモロジー群 $H_{[V]}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\zeta^n})$ を考える. ここで $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\zeta^n}$ は正則関数のなす層である. 各要素 $\psi \in H_{[V]}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\zeta^n})$ に対し, その Fourier-Borel 変換 $FB(\psi)$ を

$$FB(\psi)(z) = \text{Res}_V(\psi(\zeta)e^{\langle \zeta, z \rangle} d\zeta)_\zeta = \sum_{A \in V} \text{Res}_A(\psi(\zeta)e^{\langle \zeta, z \rangle} d\zeta)_\zeta$$

で定める. ただし $\langle \zeta, z \rangle = \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \cdots + \zeta_n z_n$ であり $\text{Res}_A(\cdot)$ は点 $A \in V$ における Grothendieck 留数である. Fourier-Borel transform $FB(\psi)$ は指数多項式となる. いま, 偏微分作用素 $P(D) \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ の total symbol を $p(\zeta)$ とおくと

$$P(D)FB(\psi)(z) = \text{Res}_V(\psi(\zeta)p(\zeta)e^{\langle \zeta, z \rangle} d\zeta) = FB(p\psi)(z)$$

が成り立つ. このことに注目して, 線形空間 Σ をつぎのように定義する.

Definition $\Sigma = \{\psi \in H_{[V]}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\zeta^n}) \mid p_1(\zeta)\psi = p_2(\zeta)\psi = \cdots = p_s(\zeta)\psi = 0\}$.

次の定理が成り立つ.

Theorem 定数係数の極大過剰決定系 $P_1(D)u = P_2(D)u = \cdots = P_s(D)u = 0$ に対しその同次解のなす空間を $S = \{u(z) \mid P_1(D)u(z) = \cdots = P_s(D)u(z) = 0\}$ とおく. さらに $\Sigma = \{\psi \in H_{[V]}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\zeta^n}) \mid p_1(\zeta)\psi = p_2(\zeta)\psi = \cdots = p_s(\zeta)\psi = 0\}$ とおく. この時 Fourier-Borel transformation FB はベクトル空間 Σ とベクトル空間 S の間の同型を与える.

定数係数の偏微分作用素全体のなす環において、偏微分作用素 $P_1(D), P_2(D), \dots, P_s(D)$ の生成するイデアルを $I_D \subset \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ とおく。また、多項式環において、total symbols $p_1(\zeta), p_2(\zeta), \dots, p_s(\zeta)$ の生成するイデアルを $I_P \subset \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$ とおく。イデアル I_D, I_P に対しそれぞれの剰余空間を $M_D = \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]/I_D, M_P = \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]/I_P$ とおく。Grothendieck 留数を用いて写像

$$R: \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$$

を $R(f, \psi) = \text{Res}_V(f(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta)$ により定めると $f \in I_P$ に対して $R(f, \psi) = 0$ が成り立つ。従って、写像 R は剰余空間 M_P と Σ の間に自然な pairing $M_P \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ を誘導する。多変数留数理論から誘導されたこの pairing は非退化なので、ベクトル空間 Σ はベクトル空間 M_P の双対空間とみなすことが出来る（より正確には、 Σ の要素の定める超関数のなす集合が M_P の双対ベクトル空間となる）。

Corollary $\dim S = \dim \Sigma = \dim M_P$

2 Cauchy 問題と Residual duality

定数係数の偏微分作用素 $B_1(D), B_2(D), \dots, B_t(D) \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ が与えられたとする。本題に入るまえに、「つぎの形の Cauchy 問題 CP はいつ well-posed となるか」という問題を考え、その判定方法を与えておく。

$$CP \begin{cases} P_1(D)u(z) = P_2(D)u(z) = \dots = P_s(D)u(z) = 0, \\ B_j(D)u(z)|_{z=0} = w_j, \quad w_j \in \mathbb{C} \text{ for } j = 1, 2, \dots, t. \end{cases}$$

ここで、Cauchy problem CP が well-posed とは、任意に $w_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, \dots, t$) が与えられた時 Cauchy 問題 CP の解が一意的に存在することとする。偏微分作用素 $B_j(D)$ の剰余類 $B_j(D) + I_D$ を $[B_j] \in M_D$ で表すことにする。また、偏微分作用素 $B_j(D)$ の total symbol を $b_j(\zeta)$ とおき、その剰余類 $b_j(\zeta) + I_P$ を $[b_j] \in M_P$ で表すことにする。

Lemma 次の条件は同値である。

- (i) Cauchy 問題 CP は well-posed である。
- (ii) $\{[B_1], [B_2], \dots, [B_t]\}$ はベクトル空間 M_D の基底である。
- (iii) $\{[b_1], [b_2], \dots, [b_t]\}$ はベクトル空間 M_P の基底である。

準備が済んだので、本題にはいる。定数係数の偏微分作用素 $B_1(D), B_2(D), \dots, B_\mu(D) \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}]$ が与えられたとする。ただし $\mu = \dim M_D$ で、 $\{[B_1], [B_2], \dots, [B_\mu]\}$ はベクトル空間 M_D の基底となるものとする。次のふたつの問題 F_D と F_P を考える。

$$F_D \begin{cases} P_1(D)u_k(z) = P_2(D)u_k(z) = \dots = P_s(D)u_k(z) = 0, \\ B_j(D)u_k(z)|_{z=0} = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq \mu, \end{cases}$$

$$F_P \begin{cases} p_1(\zeta)\psi_k(\zeta) = p_2(\zeta)\psi_k(\zeta) = \dots = p_s(\zeta)\psi_k(\zeta) = 0, \\ \text{Res}_V(b_j(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta) = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq \mu \end{cases}$$

次の定理が成り立つ.

Theorem 問題 F_P の解 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\mu \in \Sigma$ に対し $u_k = FB(\psi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, \mu$) とおく. この時 u_1, u_2, \dots, u_μ は問題 F_D の解となる.

Remark (Remainder formula と residual duality) 多項式 f のイデアル I_P による剰余類 $f + I_P$ を $[f]$ で表すことにすると, $[b_1], [b_2], \dots, [b_\mu]$ がベクトル空間 M_P の基底であることから, この剰余類 $[f]$ は次の形に一意的に表現することが出来る.

$$[f] = c_1[b_1] + c_2[b_2] + \dots + c_\mu[b_\mu], \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

この一次結合の係数は, 問題 F_P の解 $\psi_1(\zeta), \psi_2(\zeta), \dots, \psi_\mu(\zeta)$ を用いると次のように表せる.

$$c_k = R(f, \psi_k) = \text{Res}_V(f(\zeta)\psi_k(\zeta)).$$

3 Grothendieck duality と D-modules

独立変数と偏微分方程式の個数が同じであるような定数係数極大過剰決定系にたいする Cauchy 問題を扱う. 多項式の regular sequence $p_1(\zeta), p_2(\zeta), \dots, p_n(\zeta)$ に対し, その共通零点集合 $V = \{\zeta \in \mathbb{C}_\zeta^n \mid p_j(\zeta) = 0, j = 1, 2, \dots, n\}$ に台を持つ次のような代数的局所コホモロジー類 σ を考える.

$$\sigma = \left[\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} \right] \in H_{[V]}^n(\mathcal{O}).$$

零点集合 V は相異なる ℓ 個の点から成るとする. $V = \{A_1, A_2, \dots, A_\ell\}$. 代数的局所コホモロジー群の直和分解 $\mathcal{H}_{[V]}^n(\mathcal{O}) = \mathcal{H}_{[A_1]}^n(\mathcal{O}) \oplus \mathcal{H}_{[A_2]}^n(\mathcal{O}) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{[A_\ell]}^n(\mathcal{O})$ に応じたコホモロジー類 σ の分解を $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\ell$ とおく.

Lemma $\Sigma_i = \{\psi \in \mathcal{H}_{[A_i]}^n(\mathcal{O}) \mid p_1(\zeta)\psi = p_2(\zeta)\psi = \dots = p_n(\zeta)\psi = 0\}$ とおき, 点 A_i の重複度を μ_i であらわす. このとき次が成り立つ.

- (i) $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \dots \oplus \Sigma_\ell$,
- (ii) $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_i|_{A_i} = \mu_i$.
- (iii) $\Sigma_i = \mathcal{O}\sigma_i$

Lemma 多項式 p_1, p_2, \dots, p_n の Jacobi 行列式を $J_p = \left| \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\zeta_1, \dots, \zeta_n)} \right|$ とおく. このとき各点 $A_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n})$ において次の等式が成立する.

$$J_p \sigma_i = \mu_i \left[\frac{1}{(\zeta_1 - \alpha_{i,1})(\zeta_2 - \alpha_{i,2}) \cdots (\zeta_n - \alpha_{i,n})} \right]$$

正則関数を係数に持つ \mathbb{C}_ζ^n 上の線形偏微分作用素全体のなす環の層を \mathcal{D} とおく.

Theorem コホモロジー類 σ の annihilating ideal を $\mathcal{J} = \{Q \in \mathcal{D} \mid Q\sigma = 0\}$ とおく. このとき各点 A_i において $\{\psi \in \mathcal{H}_{[A_i]}^n(\mathcal{O}) \mid Q\psi = 0, Q \in \mathcal{J}\} = \mathbb{C}\sigma_i$ が成立する.

Example ふたつの多項式 $p_1(\xi, \eta) = \xi^3, p_2(\xi, \eta) = \eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi \in \mathbb{C}[\xi, \eta]$ の生成するイデアルを $I_P = \langle p_1, p_2 \rangle$ とおき, その剰余空間を $M_P = \mathbb{C}[\xi, \eta]/I_P$ とする. 多項式 p_1, p_2 の共通零点は原点のみからなり $\dim_{\mathbb{C}} M_P = 6$ である. この $\{p_1, p_2\}$ はイデアル I_P の Gröbner 基底であるのでベクトル空間 M_P は, $b_1 = 1, b_2 = \xi, b_3 = \xi^2, b_4 = \eta, b_5 = \xi\eta, b_6 = \xi^2\eta$ とおくと, $\text{span}\{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ と同一視できる. ベクトル空間 $\Sigma = \{\psi \in H_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}) \mid p_1(\xi, \eta)\psi = p_2(\xi, \eta)\psi = 0\}$ は \mathcal{O} 上

$$\sigma = \left[\frac{1}{\xi^3(\eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi)} \right] \in H_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O})$$

で生成され $\Sigma = \text{span}\{\sigma, \xi\sigma, \xi^2\sigma, \eta\sigma, \xi\eta\sigma, \xi^2\eta\sigma\}$ が成り立つ.

コホモロジー類 σ の annihilating ideal を $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ とおくと, このイデアル \mathcal{J} は $Q_1 = \xi^3, Q_2 = \eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi$ と次の一階の偏微分作用素で生成されることが分かる.

$$F = 6\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + (2\xi\eta + 3\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} + 4\xi + 24.$$

条件 $J_p\sigma = 6\left[\frac{1}{\xi\eta}\right]$ に注意して偏微分方程式系 $Q_1\sigma = Q_2\sigma = F\sigma = 0$ を解けば

$$\sigma = \left[\frac{\eta^4 - 2\xi^2\eta^2 - 3\xi\eta^2 + 9\xi^2}{\xi^3\eta^6} \right] = \left[\frac{9}{\xi\eta^6} \right] - \left[\frac{3}{\xi^2\eta^4} \right] - \left[\frac{2}{\xi\eta^4} \right] + \left[\frac{1}{\xi^3\eta^2} \right]$$

を得る. 多項式 $\varphi(\xi, \eta)$ に対して, Grothendieck 留数 $\text{Res}_{(0,0)}(\varphi\sigma)$ を計算すると

$$\text{Res}_{(0,0)}(\varphi\sigma) = \frac{3}{40} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial y^5}(0,0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3}(0,0) - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}(0,0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$$

となる. また, コホモロジー類 σ の Fourier-Borel 変換は

$$FB(\sigma)(x, y) = \frac{3}{40}y^5 - \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y$$

となるが, この関数は次の方程式を満たす.

$$P_1(D)u = P_2(D)u = \left(-6 \frac{\partial}{\partial x} x - 3 \frac{\partial}{\partial y} y + 24 - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} y + 4 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

さて, Grothendieck duality を計算する為に Hermite-Jacobi 補間積分 (multivariate Bezoutian) を利用する. まず, 多項式 p_1, p_2 の Hefer 分解

$$\begin{aligned} p_1(\xi, \eta) - p_1(\xi', \eta') &= (\xi^2 + \xi'\xi + \xi'^2)(\xi - \xi'), \\ p_2(\xi, \eta) - p_2(\xi', \eta') &= (2\xi + 2\xi' + 2)(\xi - \xi') + (\eta + \eta')(\eta - \eta') \end{aligned}$$

より行列式の計算をして

$$h(\xi, \eta, \xi', \eta') = \xi'^2\eta' + \xi'\eta'\xi + \eta'\xi^2 + \xi'^2\eta + \xi'\xi\eta + \xi^2\eta$$

とおく. 次の積分変換

$$K\varphi(\xi, \eta) = \text{Res}_V \left(\left[\frac{h(\xi, \eta, \xi', \eta')}{p_1(\xi', \eta')p_2(\xi', \eta')} \right] \varphi(\xi', \eta') d\xi' \wedge d\eta' \right)$$

は任意の $\varphi \in C[\xi, \eta]$ に対して $[K\varphi] = [\varphi]$ in M_P を満たすことが知られている. 従って再生核の理論を用いて Grothendieck duality $M_P \times \Sigma \rightarrow C$ が計算出来る. いまの場合 $\psi_1 = \xi^2\eta\sigma, \psi_2 = \xi\eta\sigma, \psi_3 = \eta\sigma, \psi_4 = \xi^2\sigma, \psi_5 = \xi\sigma, \psi_6 = \sigma$ とおけば $\text{Res}_V(b_j(\xi, \eta)\psi_k(\xi, \eta)d\xi \wedge d\eta) = \delta_{j,k}$, ($1 \leq j, k \leq 6$) が成り立つ.

コホモロジー類 ψ_k の Fourier-Borel 変換 $u_k = FB(\psi_k)$ は偏微分方程式系

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, y) = 0$$

の解空間の基底となり, さらに初期条件 $B_j(D)u_k|_{(x,y)=(0,0)} = \delta_{j,k}$ も満たす.

一般の場合も, D-加群の理論と Hermite-Jacobi の多変数補間積分公式 (多変数の Bezoutian) を用いることにより Grothendieck duality を具体的に計算することが出来る. この双対基底を用いれば, 対応する偏微分方程式系の Cauchy 問題の解を具体的に構成することが可能となる.

参考文献

- [1] E. Becker, J.P. Cardinal, M.-F. Roy and Z. Szafraniec, *Multivariate Bezoutians, Kronecker symbol and Eisenbut-Levine formula*, Progress in Math. **143** (1996), 79–104.
- [2] C.A. Berenstein and B.A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse Math. **38** (1980), 188–254.
- [3] A.M. Dickenstein and C. Serrra, *Duality methods for the membership problem*, Progress in Math. **94** (1991), 89–103.
- [4] L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley-Interscience 1970.
- [5] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience 1978.
- [6] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differential equations, II*. Inventiones mathematicae **49** (1978), 121–135.
- [7] H.M. Möller. *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms*, Lect. Notes in Comp. Sci. **673** (1993), 43–56.
- [8] B. Mourrain, *Isolated points, duality and residues*, J. of Pure and Applied Algebra **117 & 118** (1997), 469–493.

- [9] G. Scheja and U. Storch, *Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten*, J. Reine Angew. Math. **278** (1975), 174–190.
- [10] G. Sorani, *Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. **39** (1965), 161–166.
- [11] S. Tajima, *Grothendieck residue calculus and holonomic D -modules*, Proc. of the Fifth International Conference on Complex Analysis, Beijing 1997 , 301–304.
- [12] S. Tajima, *Multivariate Hermite-Jacobi interpolation formulas and holonomic D -modules* (in Japanese), RIMS. Kôkyûroku, Kyoto, to appear.
- [13] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional residue calculus and holonomic D -modules*, RIMS. Kôkyûroku, Kyoto **1033** (1998), 59–70.
- [14] A.K. Tsikh, *Multidimensional Residues and their Applications*, Translations of Math. Monographs **103**, AMS 1988.

**$L_p - L_q$ decay estimates for wave equations
with time-dependent coefficients - the influence of the mass**

(joint lecture with K. Yagdjian (Tsukuba))

Michael Reissig, Faculty of Mathematics and
Computer Science, TU Bergakademie Freiberg,
09596 Freiberg, Germany
e-mail: reissig@math.tu-freiberg.de

To prove global existence results for the solutions of the Cauchy problem with small data for nonlinear wave equations, equations of elasticity, of thermoelasticity, Maxwell equations and so on, $L_p - L_q$ decay estimates for the solutions $u = u(t, x)$ of the linear wave equation play an essential role. These are the following estimates due to Strichartz, where we choose the Cauchy data $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$:

$$\|\partial_t u(t, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla_x u(t, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|u_1\|_{W_p^M(\mathbb{R}^n)},$$

where $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, C and M are non-negative constants depending on p and n .

In the lecture we are interested to study on the one hand the influence of the time variable in the coefficients and on the other hand the influence of the mass term. For this reason let us restrict ourselves to the model equation

$$u_{tt} - \lambda^2(t)b^2(t)(\Delta u - m^2 u) = 0,$$

where m^2 is a constant. The time-dependent coefficient consists of an increasing smooth function $\lambda = \lambda(t)$ and an oscillating smooth function $b = b(t)$, which is 1-periodic, non-constant and positive. We will show

- *in the case of vanishing mass term:*
if the oscillating part dominates, then the energy estimate from Gronwall's inequality is near to an optimal one, there exist solutions with an exploding energy;
- *in the case of an arbitrary mass term $m^2 \lambda^2(t)b^2(t)$:*
if the increasing part dominates, then Strichartz type inequalities hold.

The most interesting case is that one if both influences compete each to another, have the same priority, respectively. In this case the main problem is to get a representation of solutions by the aid of Fourier multipliers and to study their behaviour.

Let us give at the end of this summary some results. We prescribe C_0^∞ -Cauchy data $u(t_0, x) = u_0(x)$, $u_t(t_0, x) = u_1(x)$ on $t = t_0$, $t_0 \geq 0$.

1) *vanishing mass*:

- $u_{tt} - (1+t)^{2l}b^2(t) \Delta u = 0$, $l \geq 0$,
no decay estimates;
- $u_{tt} - \exp(2t^\alpha)b^2(t) \Delta u = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
no decay estimates if $\alpha < 1/2$, decay estimates if $\alpha > 1/2$ or $\alpha = 1/2$ and
spatial dimension n is large enough.

2) *non-vanishing mass*:

- $u_{tt} - (1+t)^{2l}b^2(t)(\Delta u - m^2u) = 0$, $l \geq 0$,
no decay estimates if $l = 0$,
decay estimates if $l > 1$ or $l = 1$ and spatial dimension n is large enough;
- $u_{tt} - \exp(2t^\alpha)b^2(t)(\Delta u - m^2u) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
no decay estimates if $\alpha \leq 0$, decay estimates if $\alpha > 0$.

Strong Unique Continuation for Dirac Systems

HUBERT KALF

Let Ω be a connected open set in \mathbb{R}^n with $0 \in \Omega$. In 1956 Heyn [4] showed that any function $u \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ which satisfies

$$|(\Delta u)(x)| \leq \frac{C}{|x|^2} |u(x)| \quad (x \in \Omega)$$

for some $C > 0$ has the strong unique continuation property, i.e., u is identically zero in Ω if it has a zero of infinite order at the origin. In 1997 Grammatico established the same for solutions of the more general inequality

$$|\Delta u| \leq \frac{C_1}{r^2} |u| + \frac{C_2}{r} |\nabla u| \quad (1)$$

where $C_1 > 0$ and $0 < C_2 < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. In 1994 Alinhac and Baouendi [1] proved for $n = 2$ that for every $C_2 > 1$ there exists a nontrivial solution of (1) with $C_1 = 0$ which has a zero of infinite order at the origin.

Let $N := 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ and suppose that the components of $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ are anti-commuting Hermitian $N \times N$ matrices whose square is the N -dimensional unit matrix. The following theorem is a very special case of a recent result by De Carli and Ōkaji [2].

Theorem 1. Any function u in the Sobolev space $W^{1,2}(\Omega)^N$ which satisfies

$$|\alpha \cdot \nabla u| \leq \frac{C}{r} |u|$$

for some $C < \frac{1}{2}$ has the strong unique continuation property.

This theorem is a consequence of the following Carleman estimate.

Theorem 2 (De Carli-Ōkaji). There exists a sequence (m_j) of positive numbers with $m_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$) such that

$$\| r^{-(m_j+1)} \varphi \| \leq 2 \| r^{-m_j} \alpha \cdot \nabla \varphi \| \quad (\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^N, j \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

($\| \cdot \|$ is the norm of $L^2(\mathbb{R}^n)^N$).

In the talk it will be shown that at the basis of (2) there lies an identity that is also useful in establishing the essential self-adjointness of Dirac operators. This is joint work with O.Yamada [5].

References

- [1] S.Alinhac, M.S.Baouendi: Comm. Partial Differential Equations 9, 1727-1733, 1994
- [2] L.De Carli, T.Ōkaji: To appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.
- [3] C.Grammatico: Comm. Partial Differential Equations 22, 1475-1491, 1997
- [4] E.Heyn: Math. Nachr. 15, 250-257, 1956
- [5] H.Kalf, O.Yamada: To appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

Limiting case of the Sobolev inequality in the Besov space with application to the nonlinear P.D.E.

小藪 英雄
東北大学大学院理学研究科

Abstract

In \mathbf{R}^n , it is well-known that $W^{n/p,p}$, $1 < p < \infty$ can be continuously embedded not into L^∞ but into BMO . To bound the L^∞ -norm of functions, we need the Sobolev space $W^{s,p}$ for $s > n/p$, and there holds the *linear* estimate $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{W^{s,p}}$. Brezis-Gallouet-Wainger-Ozawa showed the following L^∞ -estimate whose growth order in $W^{s,p}$ for $s > n/p$ is *logarithmic*:

$$(1) \quad \|f\|_\infty \leq C \left\{ 1 + (\log(e + \|f\|_{W^{s,p}}))^{1-1/r} \right\} \quad s > n/p, 1 < r < \infty$$

for all $f \in W^{n/r,r} \cap W^{s,p}$ with $\|f\|_{W^{n/r,r}} \leq 1$. Such an estimate was applied to establish a global solution of the nonlinear Schrödinger equation. A Similar logarithmic type of the Sobolev inequality for the gradient of solenoidal vector fields was obtained by Beale-Kato-Majda-Ponce:

$$(2) \quad \|\nabla u\|_\infty \leq C \{ \|\operatorname{rot} u\|_p + \|\operatorname{rot} u\|_{L^\infty} \log(e + \|u\|_{W^{s+1,p}}) \}$$

for all $u \in W^{s+1,p}$, $s > n/p$ with $\operatorname{div} u = 0$. It should be noted that there holds $\|\nabla u\|_{BMO} \leq C\|\operatorname{rot} u\|_{BMO}$, but the corresponding estimate in L^∞ is a failure. The purpose of this talk is to give a systematic view of these two estimates in the Besov space $B_{p,q}^s$.

Theorem 1 For $1 < p < \infty$, $s > n/p$, $1 \leq q \leq \infty$, there is a constant $C = C(n, p, s, q)$ such that the estimate

$$(3) \quad \|f\|_\infty \leq C \left\{ 1 + \|f\|_{\dot{B}_{\infty,r}^0} \left(\log(e + \|f\|_{B_{p,q}^s}) \right)^{\frac{r-1}{r}} \right\}$$

holds for all $f \in B_{p,q}^s \cap \dot{B}_{\infty,r}^0$ with $1 \leq r \leq \infty$, where $\dot{B}_{\infty,r}^0$ denotes the homogeneous Besov space.

Theorem 1 covers both (1) and (2). As an application of Theorem 1, let us consider the Euler equations:

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } x \in \mathbf{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = a. \end{cases}$$

The following result may be regarded as generalization of extension criterion for the local smooth solutions of (E) given by Beale-Kato-Majda and Kato-Ponce.

Theorem 2 Let $1 < p < \infty$, $s > n/p + 1$. Suppose that u is the solution of (E) in the class

$$(4) \quad u \in C([0, T]; W^{s,p}) \cap C^1([0, T]; W^{s-2,p}).$$

If

$$\int_0^T \|\operatorname{rot} u(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} dt < \infty$$

holds, then u can be continued to the solution in the class (4) on the interval $[0, T')$ for some $T' > T$.

講演タイトル：量子群上の関数環に対する Quantum Double について

日時：1999年10月27日 16:30-17:30

福岡大学理学部 黒瀬秀樹

講演要旨

Drinfeld, Jimbo により創始された量子群の理論においては、まず quantum enveloping algebras が構成された。それらは quasitriangular Hopf algebras であり、universal R-matrices は理論のなかで中心的な役割を果たす。Quantum double は quasitriangular Hopf algebras, ひいては universal R を構成する手段として重要である。しかし、real structure すなわち, *-structure はそれほど議論されていないし、Drinfeld-Jimbo の quasitriangular quantum enveloping algebras は自然な *-structure をもたないよう思われる。

一方、Drinfeld, Jimbo 等とほぼ同時期に、Woronowicz により提案された量子群は“量子群”上の関数からなるもので、最初から C*-代数、Hopf*-代数により記述されており、real structure は本質的である。また、Faddeev 等による Hopf 代数の構成法 (FRT formalism) においてもこれは強く意識されている。量子群上の関数環には、quasitriangularity, universal R の双対にそれぞれ相当する coquasitriangularity (CQT), universal r-form なる概念が考えられ、real structure をこめた議論をすることが可能である。

real または unitary CQT Hopf*-algebra \mathcal{A} に対して、quantum enveloping algebra に相当する Hopf *-algebra $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}'$ が定義できる (FRT-formalism の一般化)。我々の \mathcal{U} は Drinfeld-Jimbo のものと違い、一般に quasitriangular ではないが *-structure とはなじみがよい。例えば、Quantum double として構成できる Hopf*-algebras $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}, \mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ に対して、次の結果がある。

定理. (K-Nakagami) real or unitary CQT Hopf*-algebra \mathcal{A} に対して、

$$\exists \text{ unital *-algebra homomorphism } f: \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}.$$

$$\exists \text{ unital *-algebra homomorphism } g: \mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$$

さらに \mathcal{A} が factorizable であるとき、またそのときに限り、上の f, g はいずれも injective となる。

Hopf *-algebras $f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}), g(\mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}})$ の余積は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}^{\text{op}}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ の余積をそれぞれ twist してできる Hopf *-algebra であり、Reshetikhin/Semenov の議論の一般化になっている。

以上のような、CQT Hopf *-algebras, それらに関する Hopf *-algebras としての Quantum double に様々な応用が期待できる。

BIEBERBACH THEOREMS FOR SOLVABLE LIE GROUPS

FRANK RAYMOND
(UNIV OF MICHIGAN)

This research is dedicated to the memory of professor Katsuo Kawakubo. The research presented is joint with K. Dekimpe and K. B. Lee.

Let G be a Lie group and let $\text{Aut}(G)$ be the group of continuous automorphisms of G . The group $\text{Aff}(G)$ is the semi-direct product $\text{Aff}(G) = G \rtimes \text{Aut}(G)$ with multiplication $(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (a \cdot \alpha(b), \alpha\beta)$. It has a Lie group structure and acts on G by $(a, \alpha) \cdot x = a \cdot \alpha(x)$ for all $x \in G$. With the linear connection on G defined by the left invariant vector fields, it is known that $\text{Aff}(G)$ is the group of connection-preserving diffeomorphisms of G .

For $G = \mathbb{R}^n$, the following three theorems have been proven by Bieberbach.

Theorem 1. *Let $\pi \subset \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ be a lattice. Then $\Gamma = \pi \cap \mathbb{R}^n$ is a lattice of \mathbb{R}^n , and Γ has finite index in π .*

Theorem 2. *Let $\pi, \pi' \subset \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ be lattices. Then every isomorphism $\pi \rightarrow \pi'$ is a conjugation by an element of $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n, \mathbb{R})$.*

Theorem 3. *Under each torus $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$, there are only finitely many flat manifolds which are covered by the torus.*

These three Bieberbach theorems have been generalized to the situation where G is a simply connected, nilpotent Lie group by Auslander, Lee-Raymond, Kamishima-Lee-Raymond, ~~and Lee-Raymond~~. Completely solvable Lie groups, which contain the class of nilpotent Lie groups, enjoy many of the properties of nilpotent Lie groups including an analogue of Malcev rigidity. Theorem 2 and 3 have been extended to simply connected completely solvable Lie groups by K. B. Lee. [Furthermore, the uniqueness and rigidity theorems for Seifert constructions holds for simply connected, completely solvable Lie groups. This latter fact also yields an immediate extension of Theorem 2 to completely solvable groups.] Therefore it is reasonable to expect that Theorem 1 may hold for G completely solvable.

Unfortunately, the extension of Theorem 1 to G simply connected and completely solvable does not hold in general. We shall give a counter-example, and then characterize those simply connected solvable Lie groups of exponential type (i.e., G for which $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow G$ is surjective) for which the analogue of Theorem 1 is valid. The completely solvable Lie groups are of exponential type.

Let G be a simply connected, connected and solvable Lie group with nilradical N . We say that G has the Strong Lattice Property whenever Γ is a lattice in $G \rtimes T$, where T is a torus in $\text{Aut } G$, then there exists a lattice $\tilde{\Gamma}$ in G such that $\Gamma \cap N = \tilde{\Gamma} \cap N$.

Theorem 1'. Let G be a connected, simply connected, solvable Lie Group ~~is~~ of exponential type. Let Γ be a lattice in $G \rtimes C$, where C is a compact subgroup of $\text{Aut } G$. Then $\Gamma \cap G$ is of finite index in Γ and $\Gamma \cap G$ is a lattice in G , if and only if, G has the strong lattice property.

To check whether a solvable Lie group has the strong lattice property is not always so easy. So we also have found several different sufficient (but not necessary) conditions which guarantee that G has the strong lattice property and which are reasonable to check.

We say that a connected, simply connected, ^{solvable} Lie group G has the strong lattice property if whenever Γ is a lattice in $G \times C$ where C is a compact subgroup

Mathematical Analysis Toward Crystal Growth Problems (結晶成長問題の数学解析)

Yoshikazu Giga
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060-0810, Japan
(儀我 美一・北大理)

Various surface evolution equations are proposed to model motion of phase boundaries in crystal growth problems, image processing and material sciences. Among them curvature flow equations are considered as good models to describe growth of crystals when interface effects dominates others provided that anisotropy of curvatures and of growth law are taking into account in the equations.

In low temperature the equilibrium shape of crystal may have a flat surface called a facet, so that the interfacial energy has a corner. In this situation the curvature flow equation has a nonlocal effect so the conventional PDE approach does not work. Mi-Ho Giga and the author successfully extended the notion of viscosity solutions so that it handles the case even when the curvature effect is nonlocal. In particular we are able to extend the level set method when the interfacial energy has corners for evolving curves in the plane. Since the problem has nonlocal nature in the top order terms, unfortunately it seems to be difficult to extend the theory for surface evolutions directly. As an application our theory yields the convergence of crystalline algorithm (proposed by J. Taylor and S. Angenent–M. E. Gurtin) for a wide class of curvature flow equation with anisotropy. Such results were previously known only for special shape of curves or just for curve shorting equations. Also our theory guarantees that the crystalline flow is obtained as a limit of smoother problems.

Abstract: In this talk, I will first give a brief introduction to the history of ~~Fiber~~ and background of the Floer homology theory of Lagrangian intersections, and then report recent ~~joint~~ progress made ~~jointly~~ jointly with ~~Fukaya~~ Fukaya, Kontsevich, Ohta and Ono on the obstruction theory of ~~Lagrangian~~ ~~Fiber~~ intersection Floer theory and its applications to the topology of Lagrangian embeddings and to the homological mirror symmetry proposal by Kontsevich.

Oh G
Collapsing

SOME RECENT RESULTS IN THE CRYSTALLINE CALCULUS OF VARIATIONS

Jean E. Taylor

Mathematics Department, Rutgers University

Crystalline problems involve a surface free energy function $\gamma : S^{d-1} \rightarrow R^+$ (S^{d-1} denoting unit vectors in R^d and R^+ the positive real numbers) for which the Wulff shape

$$W_\gamma := \{x \in R^d : x \cdot n = \gamma(n) \quad \forall \quad n \in S^{d-1}\},$$

is a polyhedron. The surface energy of a rectifiable $(d-1)$ dimensional oriented surface S is

$$\gamma(S) = \int_{x \in S} \gamma(n_S(x)) d\mathcal{H}^{d-1}x,$$

where $n_S(x)$ is the normal direction of S at x and \mathcal{H}^{d-1} is Hausdorff $d-1$ dimensional measure. All of the questions that one considers for the area functional (which is the case where $\gamma(n) = 1$ for all unit vectors n) can be considered for crystalline surface free energies, and they are interesting for both mathematical and physical reasons. Methods from the geometric calculus of variations are useful for studying a number of such questions.

A variety of results were earlier obtained concerning equilibrium shapes, including a catalog of embedded minimizing crystalline cones [T1] and an a priori bound on the number of facets in a minimizing surface with a given boundary, under certain hypotheses [T2]. Although many questions remain open for such surfaces, attention for the last ten years has focused on motion problems such as motion by crystalline weighted mean curvature κ_γ , where the normal velocity v at x is $M(n_S(x))(-\kappa_\gamma(x))$ for a given mobility function $M : S^{d-1} \rightarrow R^+$, and crystalline surface diffusion, where $v = D\nabla\kappa_\gamma$ for some D . Since crystalline functions γ are not differentiable at the normal directions of W_γ , one needs a nonlocal definition of κ_γ .

The paper [ATW] introduced a definition of motion by weighted mean curvature for any surface free energy function γ , as a limit of approximating motions; the approximating motions are obtained by solving variational problems. [ATW] proved that a limit exists and that it is the same as the motion given by solving the appropriate partial differential equation when that PDE is classically defined and has smooth solutions. A later paper [AT] proved that for crystalline curves in the plane (polygonal curves with normal directions those of W_γ and having the property that adjacent segments have adjacent normals in W_γ), the motion of [ATW] agreed with that obtained by defining a non-local crystalline curvature and then using it to set up and solve a system of ordinary differential equations [T3, AG].

Recent results include a determination of the appropriate “stepping” of plane segments under motion by crystalline weighted mean curvature of a surface S in R^3 [Y], and an extension of the method of [ATW] to determine the motion of triple junctions for crystalline curves in R^2 with normal velocity $v = M(\omega + \kappa_\gamma)$, where ω is a possible driving force due to differences in bulk energy (assumed constant on each interface between two regions of the same type) [T5]. If the surface free energy functions γ are identically zero, this latter motion is that based on characteristics first described by F. C. Frank and further explored in [T4]. If the surface free energy functions are positive and crystalline, then the motion is that of [T3]. Finally, if the surface free energy functions are written as $\gamma = \epsilon\gamma_0$, then the limiting motion as $\epsilon \downarrow 0$ is in general different from the motion for $\epsilon = 0$; the limiting motion is presumably that explored recently by Reitich and Soner [RS]. Here it emerges naturally and computably from the variational description.

References

- [AT] Frederick Almgren and Jean E. Taylor, Flat flow is motion by crystalline curvature for curves with crystalline energies, *J. Differential Geometry* **42** (1995), 1-22.
- [ATW] Fred Almgren, Jean Taylor and Lihe Wang, Curvature Driven Flows: A Variational Approach, *SIAM Journal of Control and Optimization* **31** (1993), 386-437.
- [AG] S. Angenent and M. Gurtin, *Multiphase thermomechanics with interfacial structure. 2. Evolution of an isothermal interface.* *Arch. Rat. Mech. Anal* **108** (1989) 323-391.
- [RS] Fernando Reitich and H. Mete Soner, Three-phase boundary motions under constant velocities. I. The vanishing surface tension limit, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **126** (1996), no. 4, 837-865.
- [T1] Jean E. Taylor, Complete catalog of minimizing embedded crystalline cones, *Proc. Symposia Math.* **44** (1986), 379-403.
- [T2] Jean E. Taylor, On the Global Structure of Crystalline Surfaces, *Discrete and Computational Geometry* **6** (1991), 225-262.
- [T3] Jean E. Taylor, Motion of curves by crystalline curvature, including triple junctions and boundary points, *Differential Geometry, Proceedings of Symposia in Pure Math.* **51** (part 1) (1993), 417-438.
- [T4] Jean E. Taylor, The motion of multiple-phase junctions under prescribed phase-boundary velocities, *J. Diff. Eq.* **119** (1995), 109-136.
- [T5] Jean E. Taylor, A Variational Approach to Crystalline Triple Junction Motion, *J. Statistical Physics* **95** (1999), 1221-1244.
- [Y] Jason Yunger, Ph.D. thesis, Rutgers University, 1998.

Consistent approximation of crystalline evolution by
interface diffusion and numerical simulations

Maurizio Paolini
Catholic University, Brescia, Italy

January 19, 2000

We present a brief review of mean curvature flow, starting with the simple two dimensional, isotropic model and generalizing it to arrive at the definition of the three-dimensional crystalline evolution and some of the corresponding properties.

Anisotropy is introduced by endowing the ambient space with a so called Finsler metric $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ which we chose homogeneous in space. The dual norm $\varphi^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ is well suited to be used as a surface energy density. Also the Wulff shape W_φ and the Frank diagram F_φ are introduced, together with the duality mapping $T^0 : F_\varphi \rightarrow W_\varphi$. We are then in a position to construct the “Cahn–Hoffman” vector field n_φ whose divergence gives rise to the “relative” curvature K_φ .

Problems arise when the underlying anisotropy degenerates to crystalline, in that n_φ is no longer uniquely defined and becomes itself an unknown in the evolution law. Many features of the problem are now different: parabolicity of mean curvature flow now degenerates to a mixed parabolic/hyperbolic character with clear resemblance to the Stefan problem, also we have new nonlocal effects. One important issue is now the determination of the velocity field on an “admissible” face of the evolving surface $\partial E(t)$ (face breaking). We propose the “diffused interface” approximation given by the Allen-Cahn reaction-diffusion equation with anisotropy as a means to obtain numerical simulations which are consistent with the “face breaking” phenomenon.

In the crystalline case the Allen-Cahn equation formally reads as $\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \operatorname{div} T^0(\nabla u) + \psi(u) = 0$, where $\psi(u) = \frac{1}{2} \Psi'(u)$ and $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a positive “double well” potential vanishing at ± 1 . Solutions of such equation typically show thin transition layers of thickness $\mathcal{O}(\varepsilon)$ which represent the evolving front. Discretization can be readily accomplished by using finite elements for the space variable and a difference scheme in time. The resulting algorithm has been implemented in 3D over a tetrahedral mesh based on a cubic grid.

Finally we present some pictures resulting from three different numerical simulations. For all examples the anisotropy is described by the same Wulff shape: a regular hexagonal prism with all sides placed at distance 1 from the origin. In the first example the initial surface is the boundary ∂W_φ of the Wulff shape itself, for which we know the exact solution. The second simulation computes the evolution starting from a unit sphere; “mushy” regions of two different kinds are produced as theoretically expected. Finally we show the results starting from a shape (admissible and convex) for which “bending” of faces is theoretically predicted; indeed the computed evolution appears to agree quite well with such prediction. The presented pictures are available on the web at the address “<http://www.dmf.bs.unicatt.it/~paolini/research/fbp99/>”.

On Characteristic Polynomials of Frobenius Associated to Drinfeld Modules

Jing Yu
(Academia Sinica)

Let K be a function field over finite field \mathbf{F}_q and let \mathbf{A} be the ring consisting of elements of K regular away from a fixed place ∞ . Let ϕ be a Drinfeld \mathbf{A} -module defined over an \mathbf{A} -field L . In case L is a finite \mathbf{A} -field, we study the characteristic polynomial $P_\phi(X)$ of the geometric Frobenius. A formula for the sign of the constant term of $P_\phi(X)$ in terms of “leading coefficient” of ϕ is given. General formula to determine signs of other coefficients of $P_\phi(X)$ is also derived. In case that L is a global \mathbf{A} -field of generic characteristic, we apply these formulae to compute the Dirichlet density of places where the Frobenius traces have the maximal possible degree permitted by the “Riemann Hypothesis”.

Intersection theory for confluent hypergeometric functions

Keiji Matsumoto

The main objective of this talk is to provide a systematic method of deriving new quadratic relations for confluent hypergeometric functions, especially, in several variables. Classical examples of the quadratic relations are the inversion formula for the gamma function

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

and Lommel's formula for Bessel functions

$$J_a(z)J_{-a+1}(z) + J_{a-1}(z)J_{-a}(z) = \frac{2\sin(\pi a)}{\pi z}.$$

The essence of our method is to regard these quadratic relations as analogs of Riemann's period relations, which are quadratic relations for periods on a compact Riemann surface. Periods are integrals of holomorphic 1-forms (1-cocycles) over closed paths (1-cycles) on the Riemann surface. The naturality of the pairings of the cohomology and homology groups of the Riemann surface yields period relations. The coefficients of the period relation can be understood as intersection numbers of the cycles and the cocycles.

We regard integral representations of confluent hypergeometric functions as pairings of cocycles of certain cohomology group and cycles of certain homology group. We will introduce the intersection pairing between the cohomology group and its dual, which naturally induces the intersection pairing between the

homology group and its dual. The naturality of the pairings yields quadratic relations for confluent hypergeometric functions, as in the case of Riemann's period relations.

Let us explain what the cohomology and homology groups are and where the difficulty lies. Let ω be a rational 1-form on the complex projective line \mathbf{P} with the polar set $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ such that the residue at any simple pole is not an integer. Let \mathcal{L}_ω and $\mathcal{L}_{-\omega}$ be the locally constant sheaves over $X = \mathbf{P} \setminus x$ of analytic functions $u(t)$ and $u^{-1}(t)$ satisfying $\nabla_{-\omega}u(t) = 0$ and $\nabla_\omega u^{-1}(t) = 0$, respectively, where $\nabla_\omega = d + \omega \wedge$ and $\nabla_{-\omega} = d - \omega \wedge$. Note that such $u(t)$ is expressed as $c \exp(\int^t \omega)$ ($c \in \mathbf{C}$). We consider the twisted cohomology groups $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_{\pm\omega}) = \Omega^1(x)/\nabla_{\pm\omega}(\Omega^0(x))$, where $\Omega^k(x)$ denotes the vector space of rational k -forms admitting poles in x , and the twisted homology groups $H_1(X, \mathcal{L}_{\pm\omega})$. When the 1-form ω admits only simple poles, the intersection pairing for $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_{\pm\omega})$ and that for the twisted homology groups $H_1(X, \mathcal{L}_{\pm\omega})$ are studied. Following de Rham's original work Kita and Yoshida gave evaluation formulas for intersection numbers of homology. Subsequently, evaluation formulas for intersection numbers for cohomology were established and some quadratic relations for Lauricella's F_D 's were given. It is fundamental in these results that $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ is isomorphic to

$$H^1(E_c^\bullet(x), \nabla_\omega) = \frac{\ker(\nabla_\omega : E_c^1(x) \rightarrow E_c^2(x))}{\nabla_\omega E_c^0(x)},$$

where $E_c^k(x)$ denotes the space of smooth k -forms on X with compact support, and that both of $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_{-\omega})$ and $H_1(X, \mathcal{L}_\omega)$ can be regarded as the dual space of $H^1(E_c^\bullet(x), \nabla_\omega)$. For a rational 1-form ω with higher order poles, the groups $H^1(E_c^\bullet(x), \nabla_\omega)$ and $H_1(X, \mathcal{L}_\omega)$ are well-defined, but $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ is not isomorphic to $H^1(E_c^\bullet(x), \nabla_\omega)$ in general and $H_1(X, \mathcal{L}_\omega)$ is too small to form a fundamental system of solutions for a confluent hypergeometric system of differential equations. In order to generalize results in above we need to find suitable cohomology and homology groups to express confluent hypergeometric functions.

To this end, we modify the isomorphic theorem for an integrable connection

by replacing the asymptotic parts by C^∞ object. The key role is played by the isomorphism

$$\iota_\omega : H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega) \rightarrow H^1(S^\bullet(x), \nabla_\omega),$$

where $S^\bullet(x)$ is the complex of the space of rapidly decreasing k -forms on X . This isomorphism induces the intersection pairing between $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ and $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_{-\omega})$ by

$$\int_X \iota_\omega(\varphi^+) \wedge \varphi^-.$$

In order to evaluate intersection numbers, we give an explicit form for the image $\varphi \in \Omega^1(x)$ under the isomorphism ι_ω .

We introduce a homology group $H_1(C_\bullet^\omega(X), \partial_\omega)$ so that the pairings between an element φ of $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ and a base of $H_1(C_\bullet^\omega(X), \partial_\omega)$ form a fundamental system of solutions for a confluent hypergeometric system of differential equations. We show the perfectness of the pairing between $H^1(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ and $H_1(C_\bullet^\omega(X), \partial_\omega)$. This together with the perfect pairing between $H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_{\pm\omega})$ induce the perfect pairing between $H_1(C_\bullet^\omega(X), \partial_\omega)$ and $H_1(C_\bullet^{-\omega}(X), \partial_{-\omega})$. We present a formula to evaluate intersection numbers between $H_1(C_\bullet^\omega(X), \partial_\omega)$ and $H_1(C_\bullet^{-\omega}(X), \partial_{-\omega})$ by comparison theorems given by Malgrange.

At the end of this talk, we give a non-trivial example. The function $\Phi_2(\mathbf{b}, c; \mathbf{z})$ is defined by the power series converging in \mathbf{C}^r :

$$\Phi_2(b_1, \dots, b_r, c; z_1, \dots, z_r) = \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^{\infty} \frac{(b_1; k_1) \cdots (b_r; k_r)}{(c; k_1 + \cdots + k_r) k_1! \cdots k_r!} z_1^{k_1} \cdots z_r^{k_r},$$

where $(b_i; k_i) = b_i \cdot (b_i + 1) \cdots (b_i + 2) \cdots (b_i + k_i - 1)$. This function is one of the confluent hypergeometric functions derived from Lauricella's hypergeometric function $F_D(a, b_1, \dots, b_r, c; z_1, \dots, z_r)$. We have

$$\begin{aligned} & \Phi_2(\mathbf{b}, c; \mathbf{z}) \Phi_2(-\mathbf{b}, -c + 1; -\mathbf{z}) - 1 \\ &= \frac{-1}{c(c-1)} \left(\sum_{\mu=1}^r b_\mu z_\mu \Phi_2(\mathbf{b} + \mathbf{e}_\mu, c + 1; \mathbf{z}) \Phi_2(-\mathbf{b} + \mathbf{e}_\mu, -c + 2; -\mathbf{z}) \right), \end{aligned}$$

where \mathbf{e}_μ is the μ -th unit vector.

行木

World Wide Webを中心とするコンピュータネットワークの上に
数学を表現する手段を考えたい。その手がかりとして、
MSRIにおいて1999年12月に開かれたシンポジウム“The future of
mathematical communication:1999”から次の3点を取り上げる。

- 1.分散型インフォメーションサーバ MathNet
 - 2.数式表現のマークアップ言語 MathML
 - 3.インターネット上へのセミナー放送とそのアーカイブ
- これらに関し、日本における実装の現状も取り上げる。

(注)

2000/1/31 現在、以下のURIにて詳しい内容を得られます。
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nami/MathNet/report/>

