１９９８年度談話会・特別講演 アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by I. Tuda and N. Kawazumi

Series #60. August, 1999

１９９８年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次

１９９８年度　談話会・特別講演一覧

1. ５月２７日（水）　砂　田　利　一　氏（東北大・理）　Asymptotics for the transition probability of a random walk on a generalized lattice graph
2. ６月１０日（水）＊濱　地　敏　弘　氏（九州大）　Associated actions and uniqueness of cocyles
3. ６月１１日（木）＊倉　西　正　武　氏（コロンビア大）　Construction of Tubular Nighborhood of CR structure (Progress Rport)
4. ６月１７日（水）＊小　野　　薫　氏（北大・理）　ラグランジュ部分多様体の幾何学
5. ６月２４日（水）＊濱　名　裕　治　氏（九州大）　ブラウン運動の intersection local time と極限定理について
6. ６月２９日（月）　Edward Norman Dancer　氏（シドニー大）　Peak Solutions of Nonlinear Elliptic Equations
7. ７月　３日（金）＊竹　崎　正　道　氏（ＵＣＬＡ）　Mathematical world from the point of view of an operator algebraist
8. ７月　３日（金）＊齋　藤　恭　司　氏（京都大・数理研）　組み紐とそれを実現する高次元多面体
9. ７月　６日（月）＊小　関　道　夫　氏（山形大）　符号理論における Mass Formula とその保型形式論への応用
10. ７月　６日（月）＊Hans Lindblad 氏（カリフォルニア大サンディエゴ校）　Minimal Regularity Solutions for Nonlinear Wave Equations
11. ７月　８日（水）　Ola Bratteli 氏（オスロ大）　Harmonic Analysis of Quadrature Mirror Filters
12. ７月１５日（水）＊田　口　雄一郎　氏（北大・理）　Drinfeld 加群のことなど
13. ７月２７日（月）＊Joachim Escher 氏（カッセル大）　Elliptic and Parabolic Problems with Moving Boundaries
14. ７月３１日（金）＊根　来　　彬　氏（静岡大・工）　Singular Lévy をもつ pure jump Markov process への擬微分作用素論からの approach とその問題点
15. ８月１２日（水）＊G. Weiss 氏（東京工業大）　The free boundary of a thermal wave in a strongly absorbing medium
16. ８月１２日（水）＊Reiner Schätzle 氏（フライブルグ大）　Γ-limit for the extended Fisher-Kolmogorov equation
17. ９月　１日（火）　石　　鐘　慈　氏（中国科学院計算センター）　The High Efficiency of Nonconforming Finite Element Method
18. ９月　１日（火）　黄　　艾　香　氏（西安交通大学理学院）　Spectral Nonlinear Galerkin Method for the Viscous Flow between Concentric Rotating Spheres
19. ９月　９日（水）＊Charles M. Elliott 氏（サセックス大）　Phase Transformation, Phase Field Equations and Curvature Dependent Interface Motion
20. ９月１０日（木）　俣　野　　博　氏（東大・数理）　Motion of interfaces in spatially inhomogeneous media
21. ９月１７日（木）＊G. Michler 氏（エッセン大）　A uniform construction method for all sporadic simple groups
22. １０月　８日（木）＊平　山　博　史　氏（旭川医科大学・医）　生体膜機能とモデリング
23. １０月１２日（月）　Dexing Kong 氏（復旦大）　Life span of one-dimensional nonlinear hyperbolic waves

24. １０月１４日（水）　石　井　志保子　氏（東工大）　The distribution of the values of-K^2 for surface singularities

25. １０月１６日（金）　Henri Berestycki 氏（パリ第６大）　Some nonlinear elliptic equation arising in the modelling of flame propagation

26. １０月２０日（火）　Bernard Leclerc 氏（京大・数理研）　Littlewood-Richardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials

27. １０月２０日（火）＊中　島　俊　樹　氏（上智大）　Crystal base of arbitrary rank 2 cases and Chebyshev polynomials

28. １１月１６日（月）＊梶　谷　邦　彦　氏（筑波大）　Schrödinger 方程式の analytically smoothing effect について

29. １１月１７日（火）＊志　賀　浩　二　氏（桐陰横浜大）　対数の歴史—ヨーロッパ数学の誕生

30. １１月１８日（水）＊小　薗　英　雄　氏（名古屋大）　Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations

31. １１月１８日（水）＊Pavel Stovicek　氏（チェコ工科大）　Perturbation of an eigenvalue from a dense point spectum

32. １１月２４日（火）　Hong Oh Kim 氏（KAIST）　Equivalence of function-theoretic conditions characterizing compact composition operators on H^2

33. １１月２６日（木）＊和久井　道　久　氏（大阪大）　８次元半単純ホップ代数の普遍Ｒ行列と３次元多様体の不変量

34. １２月　２日（水）＊高　橋　陽一郎　氏（京都大）　Szegö の定理と"フェルミオン"過程

35. １２月　２日（水）＊Anatol Kirillov　氏（北大・理）　On some quadratic algebras

36. １２月　３日（木）　内　藤　聡 氏（筑波大）　有限 ROOT 系の THETA 級数に関連したある組み合わせ論的等式について（AFFINE LIE 環の表現を背景として）

37. 　１月２８日（木）　Michel Duflo　氏（ENS and Univ.Paris 7）　Transverse Poisson structure to coadjoint orbits

38. 　１月２８日（木）＊熊　原　啓　作　氏（放送大）　On uncertainty principle for some Lie groups

39. 　２月　３日（水）　志　賀　啓　成　氏（東工大）　複素数双曲多様体での正則写像について

40. 　２月　３日（水）　盛　田　健　彦　氏（東工大）　Rauzy inductions and Teichmuller closed geodesics

41. 　３月　５日（金）＊Pavel Exner 氏（チェコ科学アカデミー）　Bound states of the Pauli operator with anomalous magnetic moment

特別講演のお知らせ

濱地　敏弘先生 (九州大学数理学研究科) による特別講演が６月１０日に行われますのでお知らせ致します。

Associated actions and uniqueness of cocyles

濱地　敏弘(九大· 数理)

測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ に作用する可逆で可測な、しかし保測的でない非特異(エルゴード) 変換 T の軌道同型分類は、作用素環の分野のハイパー有限な III 型因子環の分類に相当しており、完全分類が完成している(Krieger の定理)。分類は、エルゴード的 flow の同型クラスがすべてであることが知られている。これには、Radon-Nikodym(R-N) コサイクル $\log \frac{dmT^n}{dm}(x)$ が中心的に使われ、実際、不変量としての flow(ass.flow) は、歪積変換

$$(x,u) \in X \times \mathbf{R} \to (Tx, u + \log \frac{dmT}{dm}(x)) \in X \times \mathbf{R}$$

による直積空間 $X \times \mathbf{R}$ の既約成分全体の空間に、flow$(x,u) \in X \times \mathbf{R} \to (x, u+t) \in X \times \mathbf{R}$ を流して得られる準同型 flow がそれである。

さて、発想を変えて T が保測的な場合(II 型と言う) を考えてみる。この場合は R-N コサイクルは何の意味も持たないが、その変わりに実数値可測関数 $f(x)$ を取ってみる。それが再帰的な場合は、上のようにして、歪積変換

$$(x,u) \in X \times \mathbf{R} \to (Tx, u + f(x)) \in X \times \mathbf{R}$$

を取ると、ass.flow が得られたのと同様にして flow が得られる。ここでは、こうして得られる flow の同型が、関数 f、及び、変換 T をどのように規定するかを明らかにしたい。これは、いわば Krieger の定理の II 型版である。

以上

世話人: 山ノ内　毅彦

倉西正武

Pdes associated to the CR embedding theorem

Complex plane $\mathbb{C}$ の中の ~~[illegible]~~ simply connected な domains の Moduli-space は Riemann の mapping theorem により discrete であるが. $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ の場合には無限次元になって居ることがポアンカレ以来知られて居る。それで簡単のため domain D が smooth な boundary である場合を考え、その tangent vector space が $\mathbb{C}^n$ の complex structure とどのような関係を持って居るかをしらべることにする。云いかえれば D の boundary M の上には，D の holomorphic functions の M の上へ ~~圏~~ restrict した函数をとくちょうづける pde が与へられて居ると云ふことになる。これを D から induce された M の上の Cauchy-Riemann equation とよぶ。Complex structure との analogy をたどって、M の上の abstract な pde で上の Cauchy-Riemann equation と同じような形をして居るものを考へ これを CR structure とよぶことにする。このように考へると、complex structure の場合と同じ

ように、一般なCR structure は ambiant complex structure

から上にのべたようにして construct 出来るかと云う embedding

theorem が最初の問題として出てくる。これは一般には大変

むずかしい問題なので、CR structure が complex の意味

で convex な $\mathbb{C}^n$ の hyperplane の場合と同じような性質

を持って居る場合（strongly pseudo convex の場合）を考へる。

この場合の embedding theorem については大きく分類して2つの方法

がしられて居るが、pde の幾何を使い新しい方法について

過去数年考へて来たことについて最近のけっかについてお話

したい。

ラグランジュ部分多様体の幾何学

小野　薫

シンプレクティック幾何学において、ラグランジュ部分多様体は要となる対象のひとつである。講演では、まず、ラグランジュ部分多様体がどのような形で現れるかを、次の例を用いて紹介した。

1.　シンプレクティック多様体のシンプレクティック微分同相写像のグラフ。
2.　多様体上の閉1次微分形式（特に完全形式）を余接束の切断と見たもの。
3.　Euclid 空間や標準的計量をもつ球面上の向きつけられた測地線の空間には自然に、単位余接束のシンプレクティック簡約によりシンプレクティック構造が入る。その中で、一点を通る測地線全体のなす部分多様体。（より一般に、考えているRiemann 多様体の部分多様体に対して、それに直交する測地線全体。）

次にこれらの例で、ラグランジュ部分多様体の変形ともとのラグランジュ部分多様体の交点の様子をみると、単に、部分多様体としての変形を考える場合と異なることを見た。特に、完全形式の定める余接束の切断の場合、零切断との交点は、原始関数の臨界点となるので、Morse 理論、Lysternik-Schnirelman category を用いて、交点の下からの評価を得るが、これは余接束の Euler 類からの評価よりも強い。

こうした事を背景に、ラグランジュ部分多様体とその Hamilton 変形の交差についての　Arnold 予想について現時点で知られていることをいくつか紹介した。（Hamilton 微分同相写像の不動点の個数についての場合、余接束とその零切断の場合、Floer の仕事、Hamilton 変形の "エネルギー" が小さい場合の Chekanov の仕事等）更に、一般の場合に、Floer homology を用いる議論では、chain complex を作る段階で、正則円盤が bubbling が、"実余次元"で起こること(他の Floer homology の場合、例えば周期的 Hamilton 系の場合には、bubbling は"複素余次元１"の現象である）により、従来の境界準同型の定義では２回合成しても０にならないことがあることを説明した。この原因である、正則円盤の bubbling を考察することにより、Floer homology が定義されるための障害理論を、深谷、Kontsevich、Oh、太田の諸氏と共同で作っている事を紹介した。時間の都合で、これが出来たときの応用にはふれることが出来なかった。

ブラウン運動の INTERSECTION LOCAL TIME と極限定理について

濱名　裕治（九州大学大学院数理学研究科）

ブラウン運動（の標本路）が自分自身と交差するか否かを問うことについてはそれなりに意味があるらしいのだが、どのように意味があるのかは不勉強のため答えることは差し控えることにして、次の一連の結果により２次元と３次元の場合以外では自己交差を論ずることは無意味となる。ただし１次元の場合は問題自体が自明となるのでここでは多次元の場合を考えている。

定理
　d 次元ブラウン運動の標本路は確率１で次のことが成立する。

（１） $d \geq 5$ のときは交わらない。(Kakutani 1944)
（２） $d = 4$ のときは交わらない。$d = 3$ のときは二重点が存在する。(Dvoretzky, Erdös & Kakutani 1950)
（３） $d = 2$ のときは任意多重度の多重点が存在する。(Dvoretzky, Erdös & Kakutani 1954)
（４） $d = 3$ のときは三重点は存在しない。(Dvoretzky, Erdös, Kakutani & Taylor 1957)

そこでブラウン運動が時刻１までに自分自身と交差する回数を考える。連続時間なので少しややこしいのだが、$\{B_t\}_{t\geq 0}$ をブラウン運動、δ_y を Dirac のデルタ関数、$T = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq s < t \leq 1\}$ として

$$\beta(y,T) = \iint_T \delta_y(B_t - B_s)\,dtds$$

とおいたとき、自己交差の回数を $\beta(0,T)$ で代用してもさほど間違いではないだろう。

ここでは $d = 2$ つまり２次元のときについて考えることにするのだが Le Gall [6] により確率１で $\beta(0,T) = +\infty$ となることが証明されていて、出だしで躓いた感が非常に強い。この時点で納得するあるいは諦めてしまうのも一つの考え方ではあるが、$\beta(0,T)$ の適当な意味付けを考えることもあながち悪い方向ではあるまい。実は $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を δ_0 の mollifier とすると、Varadhan [10] によって

$$\iint_T g_n(B_t - B_s)\,dtds - E\left[\iint_T g_n(B_t - B_s)\,dtds\right]$$

が a.s. かつ L^2 で収束することがわかる。この極限を $\gamma(0,T)$ と書くことにする。このとき次の定理が証明できる。

定理 (Le Gall [6])
　$T_\varepsilon = \{(s,t) \in T ; t - s > \varepsilon\}$ とおくと次が成立する。収束は L^2 の意味である。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \beta(0,T_\varepsilon) - E[\beta(0,T_\varepsilon)] = \gamma(0,T)$$

$$\lim_{y \downarrow 0} \beta(y,T) - E[\beta(y,T)] = \gamma(0,T)$$

実は Le Gall [6] により $\gamma(0,\cdot)$ は $(T,\mathfrak{B}(T))$ 上の測度として定義できることがわかり、これをブラウン運動の (renormalized) self-intersection local time とよぶ。これには次のような解釈がある。

定理 (Le Gall [7])
　２次元シンプル・ランダム・ウォークが時刻 n までに訪れた点の個数を R_n とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^2}{n}[R_n - ER_n] = -2\pi^2\gamma(0,T)$$

が法則の意味で成立する。

これをもっと精密化すると次の定理が得られる。

定理 (Hamana [4])
　２次元シンプル・ランダム・ウォークが時刻 n までにちょうど p 回だけ訪れた点の個数を $Q_n^{(p)}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^3}{n}[Q_n^{(p)} - EQ_n^{(p)}] = -4\pi^3\gamma(0,T)$$

が法則の意味で成立する。

上の定理は極限が p に依存していないことは非常に興味深い。

参考文献

[1] A. Dvoretzky and P. Erdös, *Some problems on random walk in space*, Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 353–367.

[2] L. Flatto, *The multiple range of two-dimensional recurrent walk*, Ann. Probab. **4** (1976), 229–248.

[3] D. Geman and J. Horowitz, *Occupation densities*, Ann. Probab. **8** (1980), 1–67.

[4] Y. Hamana The fluctuation result for the multiple point range of two dimensional recurrent random walks, Ann. Probab. **25** (1997), 598–639.

[5] N.C. Jain and W.E. Pruitt, *The range of random walk*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Berkeley, University of California Press, 1973, pp. 31–50.

[6] J.-F. Le Gall, *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan*, Séminaire de Probabilitiés XIX, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123, Springer-Verlag, 1985, pp. 314–331.

[7] ———, *Propriétés d'intersection des marches aléatoires I*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 471–507.

[8] ———, *Sur la saucisse de Wiener les points multiple du mouvement brownien*, Ann. Probab. **14** (1986), 1219–1244.

[9] F. Spitzer, *Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion*, Z. Wahr. Verw. Geb. **3** (1964), 110-121.

[10] S.R.S. Varadhan, *Appendix to Euclidean quabtum field theory*, In Local Quantum Theory. R. Jost (ed), Academic Press.

作用素環専門家から観た解析の二,三の問題点について。

竹崎正道
(UCLA)

・解析の基礎を~~無~~反省に,選択公理を含んだ点集合論の上に置くことへの疑問:

Cantor から始まり Bourbaki によって極限にまで進められた感のある数学を集合論の上に築く立場は,無反省に全面肯定出来ない事を例によって説明した。例えば $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ として,$Tx \equiv x+\theta \mod \mathbb{Z}$ と無理数 θ によって決まる $\mathbb{T}$ の変換 T を考えよう。T の軌道の空間 $\mathbb{T}/T=\mathbb{R}/(\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z})$ は基礎論の対象とはなり得ても,解析の対象とはなり難い。しかし,変換 T は エルゴード論の初歩的な実例として,多くの研究の対象となり続けて来た。またその軌道構造も点集合 $\mathbb{T}/T$ の構造としてではなく,この30年間の研究で良く判って来ている。

・積分,測度論,確率論を σ-代数を備えた点集合論を土台として理論展開する事への疑問:

$X=\mathbb{R}$ として σ-代数 $\mathcal{B}$ を X の可附番部分集合とそれ等の補集合のなす集合族とする。そこで測度を

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & |A|=\aleph_0\,;\\ 1 & |A|\neq\aleph_0\,.\end{cases}$$

とおけば,$\{X,\mathcal{B},\mu\}$ は σ-有限どころか,有限測度空間である。ところが $L^p(X,\mathcal{B},\mu)$,$1\le p\le+\infty$,の次元はすべて 1 である。つまり,μ-可測な実数は測度 0 を除いて定数 実数しか存在しない。数学の導入者を悩ませ

る測度論, 積分論は, この様な例で彼等を恐怖へと駆り立てる. 立場を変えて, 変量 $x, y, \cdots$ とその期待値 $E(x), E(y), \cdots$ あるいは積分値 $I(x), I(y), \cdots$ から出発すれば, 上の様な例はおこらない。この立場から見れば, 各点 p は $x, y, \cdots$ の純点スペクトルとして認識される。この立場からは, 非可換解析, 作用素環は目の前である.

○ $L^p \cap L^q$ の不思議：物理では量には大体名前がついていて, 別な名前の量を加えたりしない. つまり $1\mathrm{cm} + 2\mathrm{sec}$ は量として意味を持たない。数学では何故か, 数値からは名前がとられて無名数になってしまう。ところで, 積分論では $L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ということが良く考えられる. いま座標変換を考えると

$$\left(\int |f(ax)|^p dx\right)^{1/p} = a^{-1/p}\left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

$$\left(\int |f(ax)|^q dx\right)^{1/q} = a^{-1/q}\left(\int |f(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

だから $x \longleftrightarrow ax$ の座標変換は L^p と L^q $(p \neq q)$ では異なった変換則を満たしている。つまり, L^p と L^q は別な名前の量の作る空間で, $L^p \cap L^q$ はおかしなものなのである。端的に言えば L^p は $f(d\mu)^{1/p}$ の作る空間で L^q は $g(d\mu)^{1/q}$ の作る空間と思えば判り易い. すると $f(d\mu)^{1/p} + g(d\mu)^{1/q}$ はおかしい思えて来る.

○ 作用素環に戻って, 作用素環では測度に対応するものを荷重 φ と書く. 上の例は $\varphi^{1/p}$ を考えようというのだが, ついでに φ^{it} も考えると, III型 von Neumann 環の構造が良く見えて来る。$\varphi \to e^{-t}\varphi$ と変換すると荷重の量子流が生まれる. これは Connes-Takesaki の荷重流を取り込んでいる.

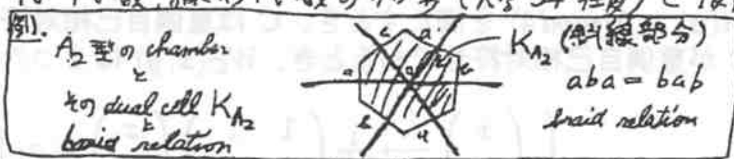
組み紐群 と それを実現する 高次元多面体

斎藤恭司

平面上の $n\ (\geq 1)$ 個の相異なる点の組の全体のなす配置空間の基本群が n次の組み紐群となることはよく知られており、数学の各方面で使われている。しかし その配置空間の高次のホモトピー群が消えるという事実は、非常に重要と思われるにもかかわらず、これまであまり使われてこなかった様に思える。注1参照

上記の配置空間のホモトピーの消滅定理の Deligne による証明 (1974) には、(対応する) Coxeter群 W の vector表現空間 $\mathbb{R}^\ell$ の鏡映面による chamber (部屋) への分割に対する ギャラリーを用いて組み紐群を再実現する事が鍵となる。別の言葉で言うと：($\mathbb{R}^\ell$ の) chamberへの分割に対し dual な cell (多面体) K_W の研究が鍵となる。(例参照) この多面体 K_W は組み紐群の data はもとより、高次のホモトピーの消滅の情報を含んでいる。

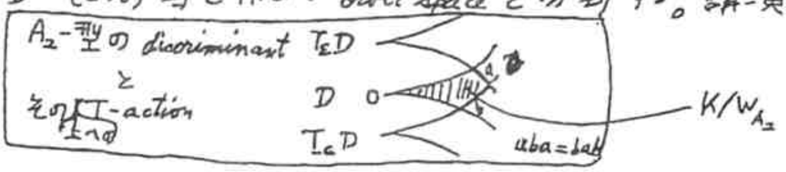
そこで、本講演の目的は、この多面体 K_W を全く別の立場 (注2) から構成しようというものである。(注3) 予備知識は代数、線形代数の初歩 (大学3年程度) を仮定するのみで (特別には) 何もいらない。



注1. 最近、柏原氏は表現論との関連で、2-ホモトピーの消滅を問題にしている。又、組み合せ群論の方で、最近 N-category を取り上げているが、まさしく、これは上記の N-ホモトピーの問題といえよう。

注2. 原始形式 (primitive form) による周期写像の理論に由来する。

注3. 鏡映群の orbit space (Chevalley によりそれは affine空間) の上に或る formal group の作用 T を定義する。この T により、discriminant 集合 D を平行移動させ $T_\delta D$, $T_{-\varepsilon} D$ $(\varepsilon > 0)$ 等を用いて orbit space を分割する。講演で詳しく述べる。



符号理論における Mass formula とその保型形式論への応用

山形大学理学部 小関 道夫

$\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ を 2 元体とし、$\mathbf{F}_2^n$ を $\mathbf{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 とする。$\mathbf{F}_2^n$ の k 次元部分ベクトル空間 C を 2 元線型 $[n, k]$ 符号 という。
$\mathbf{F}_2^n$ における内積は $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in F_2{}^n$ に対して $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ により定義される。また $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の intersection number $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ は $\mathbf{u} * \mathbf{v} = \#\,\{i \,|\, u_i = v_i = 1\}$ により定義される。
符号の元は符号語と呼ばれる。C の双対符号 $\mathbf{C}^\perp$ は

$$\mathbf{C}^\perp = \left\{\mathbf{z} \in \mathbf{F}_2^n \,|\, (\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0 \quad {}^\forall\mathbf{u} \in \mathbf{C}\right\}$$

により定義される。C は $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^\perp$ を満たすとき自己直交的、$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\perp$ を満たすとき自己双対的 であるという。
2 つの符号は一方の座標を適当に変更すると、それらの符号語が全体として一致するとき、同値であるという。特に、座標の置換で符号語全体をそれ自身に写すようなものは符号の自己同型と呼ばれる。符号 C の自己同型全体は合成写像を演算として、群をなす。この群を符号の自己同型群という。この群を Aut(C) で表わす。
$\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n), \mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbf{F}_2^n$ に対して $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \#\,\{i \,|\, u_i \neq v_i\}$ とすると、d は距離の性質を満たす。これをハミング距離という。$\mathbf{u}$ のハミング重み $wt(\mathbf{u}) = \#\,\{i \,|\, u_i \neq 0\}$ により定義される。
C を $[n, k]$ 符号とする。x, y を代数的に独立な変数とするとき、

$$W_{\mathbf{C}}(x, y) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} x^{n - wt(\mathbf{u})} y^{wt(\mathbf{u})}$$

をC の重み枚挙多項式という。$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\perp$ で C の各符号語 $\mathbf{u}$ の重みが $wt(\mathbf{u}) \equiv 0 \,(mod\, 4)$ を満たすとき、C は重偶自己相対符号であるという。
C が重偶自己相対符号であるとき、$W_{\mathbf{C}}(x, y)$ は 2 つの一次変換

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

で 不変な多項式になる。σ_1, σ_2 で生成される群 $G = <\sigma_1, \sigma_2>$ はいわゆる有限複素鏡映群の一つで位数 192 をもつ。

C : を2元符号とする。$\mathbf{v} \in \mathbf{F}_2^n, wt(\mathbf{v}) = m$ とするとき、index m の斉次型のJacobi多項式は

$$Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v}, x, y, u, v) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} x^{n-wt(\mathbf{u})-wt(\mathbf{v})+\mathbf{u}*\mathbf{v}} y^{wt(\mathbf{u})-\mathbf{u}*\mathbf{v}} u^{wt(\mathbf{u})-\mathbf{u}*\mathbf{v}} v^{\mathbf{u}*\mathbf{v}}$$

により定義される。標題の Mass formula とは 次の等式のことである。

$$\left(\sum_{\mathbf{C} \in \Omega} \sum_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{F}_2^n \\ wt(\mathbf{v})=m}} \frac{Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v}, x, y, u, v)}{|Aut(\mathbf{C})|} \right) / M(\Omega) = \frac{2^{\frac{n}{2}-2}}{2^{\frac{n}{2}-2}+1} \left[\sum_{\sigma \in G/G_0} \left\{ (x^{n-wt(\mathbf{v})} u^{wt(\mathbf{v})})^{\sigma} \right\}_1 \right]$$

ここで、Ω は長さが n の重偶自己双対符号で互いに同値でないものの集合で

$$M(\Omega) = \sum_{\mathbf{C} \in \Omega} \sum_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{F}_2^n \\ wt(\mathbf{v})=m}} \frac{1}{|Aut(\mathbf{C})|},$$

$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ とするとき、

$$\left\{ (x^{n-wt(\mathbf{v})} u^{wt(\mathbf{v})})^{\sigma} \right\}_1 = (ax+by)^{n-wt(\mathbf{v})} (au+bv)^{wt(\mathbf{v})}.$$

G_0 は $x^{n-wt(\mathbf{v})} u^{wt(\mathbf{v})}$ を固定する G の部分群。Mass formula の左辺は個々の符号に依存する多項式で、右辺は個々の符号には依存しないで、唯、群 G のみに依存する多項式である。

重み枚挙多項式に対しては、Mass formula は既に V. Pless and N.J.A. Sloane, On the classification and Enumeration of Self-Dual Codes, J. Comb. Th. Ser. A, **18** (1975) 313-335, で与えられている(彼等が与えた等式の右辺は個別の符号に強く依存した形になっていることを指摘しておく)。我々のformulation は非常に一般的で、基本的には符号に付随したほとんどの多項式(多重重み枚挙多項式、完全重み枚挙多項式、Lee 式重み枚挙多項式)に Mass formula を樹立することが、可能である。特に多重重み枚挙多項式に対しする Mass formula の両辺に適当に修正された Riemann theta functions を W. Duke, B. Runge 式に代入すると両辺は、ともに Siegel modular form になる。右辺は Siegel-Eisenstein series と一致すると予想できる。しかし、Siegel-Eisenstein series と事情が異なり収束の心配をする必要がなくなり、低い重みの Siegel modular form での強力な構成法になる。
また、Siegel の Mass formula の一部を切り取った情報をも提供することも期待できる。

Minimal regularity solutions of nonlinear wave equations

Hans Lindblad

Abstract.

Inspired by the need to understand the complex systems of non-linear wave equations which arise in physics, there has recently been much interest in proving existence and uniqueness for solutions of nonlinear wave equations with low regularity initial data.

We give counterexamples to local existence with low regularity data for the typical nonlinear wave equations. In the semi-linear case these are sharp, in the sense that with slightly more regularity one can prove local existence.

We also present join work with Georgiev and Sogge proving global existence for a certain class of semi-linear wave equation. This result was a conjecture of Strauss following an initial result of Fritz John. We develop weighted Strichartz estimates whose proof uses techniques from harmonic analysis taking into account the symmetries of the wave equation.

1991 Mathematics Subject Classification: 35L70
Keywords and Phrases: Non-linear wave equations, hyperbolic equations.

Introduction.

Recently there has been much interest in proving existence and uniqueness of solutions of nonlinear wave equations with low regularity initial data. One reason is that many equations from physics can be written as a system of nonlinear wave equations with a conserved energy norm. If one can prove local existence and uniqueness assuming only that the energy norm of initial data is bounded then global existence and uniqueness follow. Therefore it is interesting to find the minimal amount of regularity of the initial data needed to ensure local existence for the typical nonlinear wave equations.

We give counterexamples to local existence with low regularity data for the typical nonlinear wave equations. In the semi-linear case the counterexamples are sharp, in the sense that with slightly more regularity one can prove local existence. It is natural to look for existence in Sobolev spaces, since the Sobolev norms are more or less the only norms that are preserved for a linear wave equation. The counterexamples involve constructing a solution that develops a singularity along a characteristic for all positive times. In the quasi-linear case it also involves controlling the geometry of the characteristic set. The norm is initially bounded but becomes infinite for all positive times, contradicting the existence of a solution in the Sobolev space. The counterexamples are half a derivative more regular than what is predicted by a scaling argument. The scaling argument use the fact that the equations are invariant under a scaling to obtain a sequence of solutions for which initial data is bounded in an appropriate Sobolev norm. The counterexamples were not widely expected since for several nonlinear wave equations one does obtain local existence down to the regularity predicted by scaling.

On the other hand, the classical local existence theorems for nonlinear wave equations are not sharp in the semi-linear case. These results were proved using just the energy inequality and Sobolev's embedding theorem. Recently they were improved using space-time estimates for Fourier integral operators known as Strichartz' estimates, and generalizations of these. There are many recent results in this field, for example work by Klainerman-Machedon[14,15], Lindblad-Sogge[23], Grillakis[7] Ponce-Sideris[25] and Tataru. In particular, Klainerman-Machedon proved that for equations satisfying the 'null condition' [13], one can go down to the regularity predicted by the scaling argument mentioned above. In joint work with Sogge we prove local existence with minimal regularity for a simple class of model semi-linear wave equations. We should mention that there is a somewhat parallel development for KdV and nonlinear Schrödinger equations, for example in work by Bourgain and Kenig-Ponce-Vega.

Whereas the techniques of harmonic analysis were essential in improving the local existence results, the Strichartz estimates are not the best possible global estimates since they do not catch the right decay as time tends to infinity if the initial data has compact support. The classical method introduced by Klainerman [12] to prove global existence for small initial data is to use the energy method with the vector fields coming from the invariances of the equation. However, this method requires quite a lot of regularity of initial data and also the energy method alone does not give optimal estimates for the solution since it is an estimate for derivatives. We will present joint work with Georgiev and Sogge giving better global estimates using techniques from harmonic analysis taking into account the invariances or symmetries of the wave equation. We obtain estimates with mixed norms in the angular and spherical variables, with Sogge, and weighted Strichartz' estimates with Georgiev and Sogge. Using these new estimates we prove that a certain class of semi-linear wave equations have global existence in all space dimensions. This was a conjecture by Strauss, following an initial result by John.

1. Counterexamples to local existence. In this section we study quasi-linear wave equations and ask how regular the initial data must be to ensure that a local solution exists. We present counterexamples to local existence for typical model equations. Greater detail of the construction can be found in Lindblad [19-22]. In the semi-linear case the counter examples are sharp in the sense that for initial data with slightly more regularity a local solution exists. This was shown recently in Klainerman-Machedon [14-15], Ponce-Sideris[25] and Lindblad-Sogge[23] using space time estimates know as Strichartz' estimates and refinements of these. However for quasi-linear equations it is still unknown what the optimal result is; there is a gap between the counterexamples we present and a recent improvement on the classical existence result by Tataru[41] and Bahouri-Chemin[2].

Consider the Cauchy problem for a quasi linear wave equation:

$$
\begin{aligned}
&\Box u = G(u, u', u''), \quad (t,x) \in S_T = [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\
&u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

where G is a smooth function which vanishes to second order at the origin and is linear in the third variable u''. (Here $\Box = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$.) Let $\dot{H}^\gamma$ denote the homogeneous Sobolev space with norm $\|f\|_{\dot{H}^\gamma} = \|\,|D_x|^\gamma f\|_{L^2}$ where $|D_x| = \sqrt{-\Delta_x}$ and set

$$
\|u(t,\cdot)\|_\gamma^2 = \int \left(\big| |D_x|^{\gamma-1} u_t(t,x) \big|^2 + \big| |D_x|^\gamma u(t,x) \big|^2 \right) dx. \tag{1.2}
$$

We want to find the smallest possible γ such that

$$
(f,g) \in \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^n), \tag{1.3}
$$

$$
\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subset \{x; |x| \le 2\} \tag{1.4}
$$

implies that we have a local distributional solution of (1.1) for some $T > 0$, satisfying

$$
(u, \partial_t u) \in C_b\big([0,T]; \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^n)\big). \tag{1.5}
$$

To avoid certain peculiarities concerning nonuniqueness we also require that u is a *proper solution*:

Definition 1.1. We say that u is a *proper solution* of (1.1) if it is a distributional solution and if in addition u is the weak limit of a sequence of smooth solutions u_ε to (1.1) with data $(\phi_\varepsilon * f, \phi_\varepsilon * g)$, where $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x/\varepsilon)\varepsilon^{-n}$ for some function ϕ satisfying $\phi \in C_0^\infty$, $\int \phi\, dx = 1$.

Even if one has smooth data and hence a smooth solution there might still be another distributional solution which satisfies initial data in the space given by the norm (1.2). In fact, $u(t,x) = 2H(t-|x|)/t$ satisfies $\Box u = u^3$ in the sense of distribution theory. If $\gamma < 1/2$ then $\|u(t,\cdot)\|_\gamma \to 0$ when $t \to 0$ by homogeneity. Since $u(t,x) = 0$ is another solution with the same data it follows that we have non-uniqueness in the class (1.5) if $\gamma < 1/2$. Definition 1.1 picks out the smooth solution if there is one.

Our main theorem is the following:

Theorem 1.2. *Consider the problem in 3 space dimensions, $n = 3$, with*

$$
\begin{aligned}
&\Box u = (D^l u) D^{k-l} u, \quad D = (\partial_{x_1} - \partial_t), \\
&u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x),
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

where $0 \le l \le k \le 2$, $l = 0,1$. Let $\gamma = k$. Then there are data (f,g) satisfying (1.3)-(1.4), with $\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}$ arbitrarily small, such that (1.6) does not have any proper solution satisfying (1.5) in $S_T = [0,T) \times \mathbb{R}^3$ for any $T > 0$.

Remark 1.3. It follows from the proof of the theorem above that the problem is ill-posed if $\gamma = k$. In fact there exists a sequence of data $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in C_0^\infty(\{x; |x| \le 1\})$

with $\|f_\varepsilon\|_{\dot H^\gamma}+\|g_\varepsilon\|_{\dot H^{\gamma-1}}\to 0$ such that if T_ε is the largest number such that (1.6) has a solution $u_\varepsilon\in C^\infty([0,T_\varepsilon)\times\mathbb{R}^3)$, we have that either $T_\varepsilon\to 0$ or else there are numbers $t_\varepsilon\to 0$ with $0<t_\varepsilon<T_\varepsilon$ such that $\|u_\varepsilon(t_\varepsilon,\cdot)\|_\gamma\to\infty$. It also follows from the proof of the Theorem that either there is no distributional solution satisfying (1.5) with $\gamma=k$ or else we have non-uniqueness of solutions in (1.5).

Remark 1.4. By a simple scaling argument one gets a counterexample to well-posedness, but it has lower regularity than our counterexamples:

$$\gamma<k+\frac{n-4}{2}. \tag{1.7}$$

Indeed, if u is a solution of (1.6) which blows up when $t=T$ then $u_\varepsilon(t,x)=\varepsilon^{k-2}u(t/\varepsilon,x/\varepsilon)$ is a solution of the same equation with lifespan $T_\varepsilon=\varepsilon T$ and $\|u_\varepsilon(0,\cdot)\|_\gamma=\varepsilon^{k+(n-3)/2-\gamma}\|u(0,\cdot)\|_\gamma\to 0$ if γ satisfies (1.7). By contrast, our counterexamples are designed to concentrate in one direction, close to a characteristic. It appears that our construction has a natural generalization to any number of space dimensions n, with the initial data lying in $\dot H^\gamma$,

$$\gamma<k+\frac{n-3}{4}. \tag{1.8}$$

Remark 1.5. In Klainerman-Machedon[14,15] it was proved that for semi-linear wave equations satisfying the "null condition" one can in fact get local existence for data having the regularity (1.7) predicted by the scaling argument.

Now, there is a unique way to write (1.6) in the form

$$\sum_{j,k=0}^{3} g^{jk}(u)\partial_{x_j}\partial_{x_k}u=F(u,Du) \tag{1.9}$$

where $x_0=t$ and $g^{ij}(u)$ are symmetric. In the semi-linear case $g^{ij}=m^{ij}$, where m^{ij} is given by (1.10). We now define the notion of a *domain of dependence.*

Definition 1.6. Assume that $\Omega\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3$ is an open set equipped with a Lorentzian metric $g_{jk}\in C(\Omega)$ such that inverse g^{jk} satisfies

$$\sum_{j,k=0}^{3}|g^{jk}-m^{jk}|\le 1/2,\quad\text{where}\quad \begin{cases} m^{00}=1,\ m^{jj}=-1,\ j>0\\ m^{jk}=0,\quad\text{if}\quad j\ne k\end{cases}. \tag{1.10}$$

Then Ω is said to be a *domain of dependence for the metric g_{ij}* if for every compact subset $K\subset\Omega$ there exists a function smooth $\phi(x)$ such that the open set $\mathcal{H}=\{(t,x);\ t<\phi(x)\}$ satisfies

$$\overline{\mathcal{H}}\subset\Omega,\qquad K\subset\mathcal{H} \tag{1.11}$$

and

$$\sum_{j,k=0}^{3} g^{jk}(t,x)N_j(x)N_k(x)>0,\quad\text{if}\quad t=\phi(x),\quad N(x)=\big(1,-\nabla_x\phi(x)\big). \tag{1.12}$$

Since a solution u to (1.6) gives rise to a unique metric g_{ij} we say that Ω is a *domain of dependence for the solution u* if it is a domain of dependence for g_{ij}.

Lemma 1.7. *There is an open set $\Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ and a solution $u \in C^\infty(\Omega)$ of (1.6) such that Ω is a domain of dependence and writing*

$$\Omega_t = \{x; (t,x) \in \Omega\}, \tag{1.13}$$

we have

$$\int_{\Omega_t} \left((\partial_{x_1} - \partial_t)^k u(t,x)\right)^2 dx = \infty, \quad t > 0, \quad \text{and} \tag{1.14}$$

$$\sum_{|I|=k} \int_{\Omega_t} \left(\partial^I_{t,x_1} u(t,x)\right)^2 dx < \infty, \quad \text{when} \quad t = 0. \tag{1.15}$$

Furthermore in the quasi linear case, $k - l = 2$, the norms $\|D^l u\|_{L^\infty(\Omega)}$ can be chosen to be arbitrarily small.

Proof of Theorem 1.2. From Lemmas 1.7 we get a solution u in a domain of dependence Ω which has initial data $f_0(x) = u(0,x) \in H^k(\Omega_0)$ and $g_0(x) = u_t(0,x) \in H^{k-1}(\Omega_0)$. We can extend f_0 and g_0 to $f \in H^k(\mathbb{R}^3)$ and $g \in H^{k-1}(\mathbb{R}^3)$, see Stein[35]. If u is a proper solution of (1.6) in $S_T = [0,T] \times \mathbb{R}^3$ then by Definition 1.1, u is the distributional limit of a sequence of smooth solutions u_ε with data $(\phi_\varepsilon * f, \phi_\varepsilon * g)$. Hence the theorem follows from Lemma 1.7 and Lemma 1.8 below.

Lemma 1.8. *Suppose $u \in C^\infty(\Omega)$ is a solution to (1.6) where Ω is a domain of dependence. In the quasi linear case, $k - l = 2$, assume also that $\|D^l u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \delta$. Suppose also that $u_\varepsilon \in C^\infty(S_T)$, where $S_T = [0,T) \times \mathbb{R}^3$, and u_ε are solutions of (1.6) with data $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ where $f_\varepsilon \to f$ and $g_\varepsilon \to g$ in $C^\infty(K_0)$ for all compact subsets of K_0 of $\Omega_0 = \{x; (0,x) \in \Omega\}$. Then $u_\varepsilon \to u$ in $\Omega \cap S_T$.*

The proof of Lemma 1.8 is standard. Note however, that it is essential that Ω is a domain of dependence for Lemma 1.8 to be true; one needs exactly the condition (1.12) in order to be able to use the energy method.

Let us now briefly describe how to construct of the solution u and the domain of dependence Ω in Lemma 1.7. First we find a solution $u_1(t, x_1)$ for the corresponding equation in one space dimension, (1.16), which develops a certain singularity along a non timelike curve $x_1 = \mu(t)$, with $\mu(0) = 0$. Then $u(t,x) = u_1(t,x_1)$ is also a solution of (1.6) in the set $\{(t,x); x_1 > \mu(t)\}$. Although this is a domain of dependence, the singularity is too strong for the integral in (1.15) to be finite when $t = 0$. Therefore we will construct a smaller domain of dependence, Ω, satisfying (1.20), such that the curve $x_1 = \mu(t)$, $x_2 = x_3 = 0$, still lies on $\partial\Omega$. Because we have blow-up for the nonlinear equations, the singularity that develops for positive $t > 0$ is stronger than the singularity of initial data, and this makes the integral (1.14) infinite for $t > 0$, although it was finite at $t = 0$.

One can find rather explicit solution formulas for the one dimensional equations;

$$(\partial_{x_1} - \partial_t)(\partial_t + \partial_{x_1}) u_1(t,x_1) + (\partial_{x_1} - \partial_t)^l u_1(t,x_1)(\partial_{x_1} - \partial_t)^{k-l} u_1(t,x_1) = 0. \tag{1.16}$$

By choosing particular initial data

$$\begin{aligned}
&u_1(0,x_1) = \chi''(x_1), && \partial_t u_1(0,x_1) = 0, && \text{if } k = 0, l = 0,\\
&u_1(0,x_1) = -\chi'(x), && \partial_t u_1(0,x_1) = \chi''(x_1) + \chi'(x_1)^2, && \text{if } k = 1, l = 0,\\
&u_1(0,x_1) = 0, && \partial_t u_1(0,x_1) = -\chi^{(3-k)}(x_1), && \text{if } k \ge 2,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

where

$$\chi(x_1) = \int_0^{x_1} -\varepsilon|\log|s/4||^\alpha\, ds, \quad 0 < \alpha < 1/2, \varepsilon > 0 \tag{1.18}$$

we get a solution

$$u_1 \in C^\infty(\Omega^1), \quad \text{where} \quad \Omega^1 = \{(t, x_1); \mu(t) < x_1 < 2 - t\} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \tag{1.19}$$

for some function $\mu(t)$ with $\mu(0) = 0$, such that Ω^1 is a domain of dependence and such that $u_1(t, x_1)$ has a singularity along $x_1 = \mu(t)$. One sees this from the solution formulas which can be found in Lindblad[21,22]. Essentially what is happening is that the initial data (1.17)-(1.18) has a singularity when $x_1 = 0$. For the linear equation, $u_{tt} - u_{x_1x_1} = 0$, the singularity would just have propagated along a characteristic, however the nonlinearity causes the solution to increase and this strengthens the singularity for $t > 0$. (This is the same phenomena that causes blow-up for smooth initial data.)

Define $\Omega \Subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ to be the largest domain of dependence for the metric obtained from the solution $u(t, x) = u_1(t, x_1)$ (see (1.21)), such that

$$\Omega \subset \Omega^1 \times \mathbb{R}^2, \quad \Omega_0 = \{x; (0, x) \in \Omega\} = B_0 = \{x; |x - (1, 0, 0)| < 1\}. \tag{1.20}$$

(It follows from Definition 1.6 that the union and intersection of a finite number of domains of dependence is a domain of dependence so indeed a maximal domain exists.) It follows that $u(t, x) = u_1(t, x_1)$ is a solution of (1.6) in Ω satisfying (1.17) in Ω_0. The initial data (1.17)-(1.18) was chosen so that (1.15) just is finite when $t = 0$. In the semi-linear case the metric g^{jk} is just m^{jk} so Ω^1 is a domain of dependence if and only if $\mu'(t) \geq 1$ and it follows that $\Omega = \Omega^1 \times \mathbb{R}^2 \cap \Lambda$, where $\Lambda = \{(t, x); |x - (1, 0, 0)| + t < 1\}$. In thequasi-linearr case this is more complicated and one must study the bicharacteristics for the operator

$$\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 - V(t + x_1, x_1 - t)(\partial_{x_1} - \partial_t)^2, \text{ with } V(t + x_1, x_1 - t) = (\partial_{x_1} - \partial_t)^l u_1(t, x_1). \tag{1.21}$$

Let Ω_t be as in (1.13) and

$$S_t(x_1) = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t\}, \quad a_t(x_1) = \int_{S_t(x_1)} dx_2\, dx_3. \tag{1.22}$$

With this notation the integral in (1.14) becomes

$$\int_{\mu(t)}^{2-t} a_t(x_1)\big((\partial_{x_1} - \partial_t)^k u_1(t, x_1)\big)^2\, dx_1. \tag{1.23}$$

The proof that this integral is infinite consists of estimating the two factors in the integrand from below, close to $x_1 = \mu(t)$. In the semi-linear case $S_t(x_1) = \{(x_2, x_3); (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 < (1 - t)^2\}$ so then $a_t(x_1) = \pi(2 - t - x_1)(x_1 - t)$. However, in the quasi-linear case, estimating $a_t(x_1)$ from below requires a detailed analysis of the characteristic set $\partial\Omega$, see Lindblad[22].

2. Global Existence

We will present sharp global existence theorems in all dimensions for small-amplitude wave equations with power-type nonlinearities. For a given "power" $p > 1$, we shall consider nonlinear terms F_p satisfying

$$\left| (\partial/\partial u)^j F_p(u) \right| \le C_j |u|^{p-j},\ j = 0, 2. \tag{2.1}$$

The model case, of course, is $F_p(u) = |u|^p$. If $\mathbb{R}^{1+n}_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, and if $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ are fixed, we shall consider Cauchy problems of the form

$$\begin{cases} \Box u = F_p(u), & (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}_+ \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), & \partial_t u(0,x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \tag{2.2}$$

where $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta_x$. Our goal is to find, for a given n, the range of powers for which one always has a global weak solution of (2.2) if $\varepsilon > 0$ is small enough.

In 1979, John [10] showed that for $n = 3$, (2.2) has global solutions if $p > 1+\sqrt{2}$ and $\varepsilon > 0$ is small. He also showed that when $p < 1 + \sqrt{2}$ and $F_p(u) = |u|^p$ there is blow-up for most small initial data. It was shown sometime later by Schaeffer [27] that there is blowup also for $p = 1 + \sqrt{2}$. After Johns work, Strauss made the insightful conjecture in [37] that when $n \ge 2$, global solutions of (2.2) should always exist if ε is small and p is greater than a critical power p_c that satisfy

$$(n-1)p_c^2 - (n+1)p_c - 2 = 0,\ \ p_c > 2. \tag{2.3}$$

This conjecture was shortly verified when $n = 2$ by Glassey [6]. John's blowup results were then extended by Sideris [29], showing that for all n there can be blowup for arbitrarily small data if $p < p_c$. In the other direction, Zhou [42] showed that when $n = 4$, in which case $p_c = 2$, there is always global existence for small data if $p > p_c$. This result was extended to dimensions $n \le 8$ in Lindblad and Sogge [24]. Here it was also shown that, under the assumption of spherical symmetry, for arbitrary $n \ge 3$ global solutions of (2.2) exist if $p > p_c$ and ε is small enough. For odd spatial dimensions, the last result was obtained independently by Kubo [16]. The conjecture was finally proved in all dimensions by Georgiev-Lindblad-Sogge[5]. Here we will present that argument.

We shall prove Strauss conjecture using certain "weighted Strichartz estimates" for the solution of the linear inhomogeneous wave equation

$$\begin{cases} \Box w(t,x) = F(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}_+ \\ 0 = w(0,\cdot) = \partial_t w(0,\cdot). \end{cases} \tag{2.6}$$

This idea was initiated by Georgiev [4]. We remark that we only have to consider powers smaller than the conformal power $p_{\text{conf}} = (n+3)/(n-1)$ since it was already known that there is global existence for larger powers. See, e.g., [23].

Let us, however, first recall the inequality for (2.6), that John [10] used;

$$\|t(t-|x|)^{p-2} w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_+)} \le C_p \|t^p (t-|x|)^{p(p-2)} F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_+)},$$
$$\text{if } F(t,x) = 0,\ t - |x| \le 1, \text{ and } 1 + \sqrt{2} < p \le 3.$$

Unfortunately, no such pointwise estimate can hold in higher dimensions due to the fact that fundamental solutions for $\Box$ are no longer measures when $n \ge 4$. Despite this, it turns out that certain estimates involving simpler weights which are invariant under Lorentz rotations (when $R = 0$);

Theorem 2.1. *Suppose that $n \geq 2$ and that w solves the linear inhomogeneous wave equation* (2.6) *where $F(t,x) = 0$ if $|x| \geq t + R - 1$, $R \geq 0$. Then*

$$\|((t+R)^2 - |x|^2)^{\gamma_1} w\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+n}_+)} \leq C_{q,\gamma} \|((t+R)^2 - |x|^2)^{\gamma_2} F\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^{1+n}_+)}, \tag{2.7}$$

provided that $2 \leq q \leq 2(n+1)/(n-1)$ and

$$\gamma_1 < n(1/2 - 1/q) - 1/2, \quad \text{and } \gamma_2 > 1/q. \tag{2.8}$$

One should see (2.7) as a weighted version of Strichartz [38,39] estimate;

$$\|w\|_{L^{2(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}^{1+n}_+)} \leq C\|F\|_{L^{2(n+1)/(n+3)}(\mathbb{R}^{1+n}_+)}. \tag{2.9}$$

If one interpolates between this inequality and (2.7), one finds that the latter holds for a larger range of weights (see also our remarks for the radial case below). However, for the sake of simplicity, we have only stated the ones that we will use.

Let us now give the simple argument showing how our inequalities imply the proof of Strauss conjecture. Let $u_{-1} \equiv 0$, and for $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ let u_m be defined recursively by requiring

$$\begin{cases} \Box u_m = F_p(u_{m-1}) \\ u_m(0,x) = \varepsilon f(x), \ \partial_t u_m(0,x) = \varepsilon g(x), \end{cases}$$

where $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vanishing outside the ball of radius $R-1$ centered at the origin are fixed. Then if $p_c < p \leq (n+3)/(n-1)$, fix γ satisfying

$$1/p(p+1) < \gamma < ((n-1)p - (n+1))/2(p+1)$$

and set

$$A_m = \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^{1+n}_+)} \tag{2.10}$$

Because of the support assumptions on the data, domain of dependence considerations imply that u_m, and hence $F_p(u_m)$, must vanish if $|x| > t + R - 1$. It is also standard that the solution u_0 of the free wave equation $\Box u_0 = 0$ with the above data satisfies $u_0 = O(\varepsilon(1+t)^{-(n-1)/2}(1 + |t - |x||)^{-(n-1)/2})$. Using this one finds that $A_0 = C_0\varepsilon$. Since we are assuming that

$$\gamma < n(1/2 - 1/q) - 1/2, \text{ and } p\gamma > 1/q, \ q = p+1,$$

if we apply (2.7) to the equation $\Box(u_m - u_0) = F_p(u_{m-1})$ we therefore obtain

$$\begin{aligned} &\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}} \\ &\leq \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_0\|_{L^{p+1}} + C_1 \|((t+R)^2 - |x|^2)^{p\gamma} |u_{m-1}|^p\|_{L^{(p+1)/p}} \\ &= \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_0\|_{L^{p+1}} + C_1 \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_{m-1}\|^p_{L^{p+1}}, \end{aligned}$$

i.e. $A_m \leq A_0 + C_1 A_{m-1}^p$. From this we can inductively deduce that $A_m \leq 2A_0$, for all m, if $A_0 = C_0\varepsilon$ is so small that $C_1(2A_0)^p \leq A_0$. Similarly, we can get bounds for differences showing that $\{u_m\}$ is a Cauchy sequence in the space associated with the norm (2.10), so the limit exists and satisfies (2.2).

The proof of Theorem 2.1 uses a decomposition into regions, where the weights $(t^2 - |x|^2)$ are essentially constant, together with the invariance of the norms and the equation under Lorentz transformations. In each case we get the desired estimate by using analytic interpolation, Stein[34], between an $L^1 \to L^\infty$ and an $L^2 \to L^2$ estimate with weights, for the Fourier integral operators associated with the wave equation. See [5] for the complete proof and further references. In [5] we also prove a stronger scale invariant weighted Strichartz estimate under the assumption of radial symmetry. This assumption was later removed by Tataru[40]

Theorem 2.2. *Let n be odd and assume that F is spherically symmetric and supported in the forward light cone $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : |x| \leq t\}$. Then if w solves (2.6) and if $2 < q \leq 2(n+1)/(n-1)$*

$$\|(t^2 - |x|^2)^{-\alpha} w\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+n}_+)} \leq C_\gamma \|(t^2 - |x|^2)^{\beta} F\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^{1+n}_+)}, \tag{2.11}$$
$$\textit{if } \beta < 1/q, \quad \alpha + \beta + \gamma = 2/q, \quad \textit{where} \quad \gamma = (n-1)(1/2 - 1/q).$$

REFERENCES

2. Bahouri-Chemin, oral communication (1998).
3. D. Christodoulou and S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space-time*, Princeton University Press, 1993.
4. V. Georgiev, *Weighted estimate for the wave equation*, Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute, vol. 1, Hokkaido Univ., 1996, pp. 71–80.
3. V. Georgiev, H. Lindblad and C. Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semi-linear wave equations*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1291–1319.
4. R. Glassey, *Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two dimensions*, Math. Z. **178** (1981), 233–261.
7. M. Grillakis, *A priory estimates and regularity of nonlinear waves Proceedings of the international Congress of Mathematics, Vol 1,2 (Zürich, 1994)* (1995), Birkäuser, Bassel, 1187–1194.
8. L. Hörmander, *Fourier integrals I*, Acta Math. **127** (1971), 79–183.
9. ______, *Lectures on nonlinear hyperbolic differntial equations*, Springer Verlag, 1997.
10. F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235–265.
11. F. John and S. Klainerman, *Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 443-455.
12. S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321-332.
13. ______, *Long time behaviour of solutions to nonlinear wave equations Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vol 1,2 (Warsaw, 1983)* (1984), PWN, Warsaw, 1209-1215.
14. S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null-forms and the local existence theorem*, Comm. Pure and Appl. Math. (1993), 1221-1268.
15. ______, *Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J. **81** (1996), 99-133.
16. H. Kubo, *On the critical decay and power for semi-linear wave equations in odd space dimensions*, preprint.

17. H. Lindblad, *Blow up for solutions of $\Box u = |u|^p$ with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), 757–821.
18. ———, *Global solutions for nonlinear wave equations with small initial data*, Comm. Pure Appl. (1992).
19. ———, *A sharp counterexample to local existence of low regularity solutions to nonlinear wave equations*, Duke Math. J. **72** (1993), 503–539.
20. ———, *Counterexamples to local existence for nonlinear wave equations. Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1994)*, École Polytech., Palaiseau (1994), Exp. No. X.
21. ———, *Counterexamples to local existence for semi-linear wave equations*, Amer. J. Math. **118** (1996), 1–16.
22. ———, *Counterexamples to local existence for quasi-lineart wave equations*, preprint (1998).
23. H. Lindblad and C. D. Sogge, *On existence and scattering with minimal regularity for semi-linear wave equations*, J. Funct. Anal. **130** (1995), 357–426.
24. ———, *Long-time existence for small amplitude semi-linear wave equations*, Amer. J. Math. **118** (1996), 1047–1135.
25. G. Ponce and T. Sideris, *Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), 169–177.
26. J. Rauch, *Explosion for some Semilinear Wave Equations*, Jour. of Diff. Eq. **74 (1)** (1988), 29-33.
27. J. Schaeffer, *The equation $\Box u = |u|^p$ for the critical value of p*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **101** (1985), 31–44.
28. I. Segal, *Space-time decay for solutions of wave equations*, Adv. Math. **22** (1976), 305–311.
29. T. Sideriš, *Nonexistence of global solutions to semi-linear wave equations in high dimensions*, Comm. Partial Diff. Equations **12** (1987), 378–406.
30. J. Shatah and A. Shadi Tahvildar-Zadeh, *On the Cauchy Problem for Equivariant Wave Maps*, CPAM **47** (1994), 719-754.
31. Sogge, *On local existence for nonlinear wave equations satisfying variable coefficient null conditions*, Comm. Partial Diff. Equations **18** (1993), 1795–1823.
32. ———, *Lectures on nonlinear wave equations*, International Press, Cambridge,, 1995.
33. C. D. Sogge and E. M. Stein, *Averages of functions over hypersurfaces: Smoothness of generalized Radon transforms*, J. Analyse Math. **54** (1990), 165–188.
34. E. M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 482–492.
35. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
36. W. Strauss, *Nonlinear scattering theory*, Scattering theory in mathematical physics, Reidel, Dordrect, 1979, pp. 53–79.
37. ———, *Nonlinear scattering at low energy*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.
38. R. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications*, J. Funct. Analysis **5** (1970), 218–235.
39. ———, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.
40. Tataru, *Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semi-linear wave equation*, preprint (1997).
41. ———, *oral communication* (1998).
42. Y. Zhou, *Cauchy problem for semi-linear wave equations with small data in four space dimensions*, J. Diff. Equations **8** (1995), 135–14444.

Hans Lindblad
UCSD Department of Mathematics
9500 Gilman Drive
La Jolla, CA 92093-0112
USA
lindblad@math.ucsd.edu

7月15日

Drinfeld 加群のことなど

田口雄一郎（北大理）

Drinfeld 加群は 1974年ごろ Drinfeld によって定義されたもので、元来は elliptic module と呼ばれました。それは一口で言ふと「楕円曲線の函数体類似」であります（ここで函数体とは有限体上の一変数代数函数体のことです）。Drinfeld 自身はこれを函数体の場合の Langlands 予想を攻略するために導入し、従ってそこでは Drinfeld 加群の moduli 空間やその cohomology 群が重要だったわけですが、私自身はどちらかといふと Drinfeld module そのものの arithmetic に関はって来ました。この講演ではまず「楕円曲線の函数体類似」といふことの意味を説明し、次いでこれまでに知られてゐるいくつかの結果を紹介しました。

1. 類似

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}_q(t) =: F$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_q[t] =: A$
代数体	F の有限次拡大

$\boxed{X}$ $\downarrow$ ——— $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ $\boxed{X}$ $\downarrow$ ——— $\operatorname{Spec}A$

$\mathbb{G}_m$, E Drinfeld A-加群

$\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(\mathbb{G}_m)$

$\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(E)$ $A \xrightarrow{\phi} \mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$

$\mathbb{R}$ $F_\infty := \mathbb{F}_q((1/t))$

$\mathbb{C}$ $C := \hat{\bar{F}}_\infty$

$E \leftrightarrow$ lattice $\subset \mathbb{C}$ $\phi \leftrightarrow$ lattice $\subset C$

2. 結果(のサンプル)

① Tate予想. Drinfeld加群 ϕ があるとそれに伴って Tate加群と呼ばれる Galois表現が作れるのだが、これは(ϕ の定義体が F の有限次拡大ぐらいならば)もとの ϕ のことを「十分よく憶えてゐる」.

② L-函数. やはり Tate加群を使って、ϕ の L-函数が定義できる。これは Hasse-Weil zeta の函数体類似である。これが適当な意味で meromorphic であることが証明できる。

Elliptic and parabolic problems with moving boundaries

Joachim Escher, University of Kassel

In a lecture series of three sessions we discuss the following topics:

a) Nonlinear evolution equation of parabolic type
Many concrete moving boundary problems lead to abstract evolution equations of the form

$$u'(t) + \Phi(u(t)) = 0, \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

in some Banach space E_0 with some nonlinear operator $\Phi : V \subset E_0 \to E_0$ and a given initial data $u_0 \in E_0$. If problem (1) is of parabolic type in the sense that we can associate to (1) an appropriate linearized problem involving the generator of an analytic semigroup on E_0, then a satisfactory solution theory for (1) is available. We briefly discuss in the quasi-linear case the results of H. Amann and in the fully nonlinear case the results of S. Angenent and G. Da Prato, P. Grisvard.

b) Flow through porous media
The flow of a quasi-incompressible Newtonian fluid through a porous medium is governed by an elliptic (in case of a rigid porous medium) and by a parabolic (in case of deformable porous medium) equation for the corresponding velocity potential, complemented with two conditions on the free boundary. It is shown that these problems can be formulated and solved as a fully nonlinear evolution equations of type (1).

c) Geometric evolution problems driven by mean curvature
Here we consider evolution equations for a family of hypersurfaces $\Gamma = \{\Gamma(t);\ t \geq 0\}$ governed by the evolution law

$$V = F(H),\ \Gamma(0) = \Gamma_0, \tag{2}$$

where V denotes the normal velocity of Γ and $H(t)$ stands for the mean curvature of Γ. Moreover F is a given function and Γ_0 a given initial data. We show that in the case

$$F(H) = \begin{cases} \overline{H} - H & \text{(averaged mean curvature flow)} \\ \Delta_\Gamma(1-\Delta_\Gamma)^{-1}H & \text{(intermediate law)} \\ \Delta_\Gamma H & \text{(surface diffusion flow)} \end{cases}$$

problem (2) is a quasi-linear evolution equation of type (1). Moreover, in the above cases the area of the hypersurface is shrinking during the evolution, while the volume of the inclosed domain is preserved.

Singular Lèvy measure を持つ pure jump typ の Markov process への擬微分作用素論からの approach とその問題点[1]

静岡大学工学部システム工学科　　根来彬

今回、議論したいことは

$$L(x, D_x) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^R \{f(x + r\theta_j(x)) - f(x) - \nabla f(x) \cdot r\theta_j(x)\} \times \frac{n_j(x, r\theta_j(x))}{r^{1+\alpha}} dr \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{S}$$

ただし、

$$\theta_j \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^d) \text{ with } |\theta_j(x)| = 1, \text{ and } \theta(x) \in \mathbf{R}^d \quad \text{for} \forall\, x \in \mathbf{R}^d \quad j = 1, 2 \cdots d$$
$$\{\ \theta_1(x),\ \theta_2(x), \cdots,\ \theta_d(x)\} : \text{ independent, } n_j \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \text{ with } 0 \le n_j \le \exists \mathrm{C}$$
$$\text{and } n_j(x, y) = 0 \text{ for} \forall (x, y) \in \mathbf{R}^d \times \{|y| > \mathrm{R}\} \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$$

と表現される non local な線形作用素を生成作用素に持つ Markov process の存在性と、結果的に、この Markov process は遷移密度関数を持つことである。一般に、線形作用素が与えられたとき、それを生成作用素とする Markov process の存在性を示す方法の一つとして、 その作用素に対する martingale 問題の一意解を求める方法がある。解の存在性についてはかなり緩い条件で存在することがD. W. Stroock によって示されている。上に述べた作用素 L も存在するための十分条件を満たしている。一意性を示すために、我々は、作用素 L に対する発展方程式の初期値問題

$$* \quad \begin{cases} (\partial_t - L)u(t, x) = 0 & \text{for } t \in (0,\ T) \\ u(0, x) = \phi(x) & \text{for } \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d) \end{cases}$$

を解くという方法を採った。もし $*$ の解 $u(t, x)$ が存在するならば、この解 $u(t, x)$ と x から出発する L に対する martingale 問題の解 $\mathbf{P}_x$ とは $u(t, x) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}_x}[\phi(X_t)]$ なる関係が常に得られ、一意性が得られる。そこで、$\mathbf{P}_x$ の密度関数の存在を示すためにために、我々は

$$** \quad \begin{cases} (\partial_t - L)u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \delta(x - y) \end{cases}$$

なる初期値問題を、L が $p(x, \xi) = \sum_{j=1}^{d} p_j(x, \xi)$　但し、

$$p_j(x, \xi) = \int_0^R (e^{ir\theta(x)\cdot\xi} - 1 - ir\theta(x) \cdot \xi) \frac{n_j(x, r\theta(x))}{r^{1+\alpha}} dr$$

を表象に持つ擬微分作用素であることに着目し、擬微分作用素論を用いて、この発展方程式の初期値問題の解の存在を示す。この方程式は、行列 ($\theta_1(x)\ \theta_2(x)\ \cdots\ \theta_d(x)$)　の全ての固有値$\lambda_j(x)$ が正数 c で下からおさえられるものと仮定すると、$**$ は放物型の発展方程

[1]静岡大学工学部菊地光嗣との共同研究

式の初期値問題ととらえることが出来る。しかし、この表象 $p(x,\xi)$ は、通常 $S^{\alpha}_{0,1}$ と呼ばれているクラスに に所属し、(但し $S^m_{\rho,\delta}=\{p:|\partial^{\gamma}_{\xi}\partial^{\beta}_{x}p(x,\xi)|<C_{\gamma,\beta}<\xi>^{m-\rho|\gamma|+\delta|\beta|}$) 一般の 擬微分作用素論で仮定されている $(0\le\delta\le\rho\le1,\ \ 0<\delta<1)$ が満たされていない。そこで、我々は cut off function として$\Phi_j(x,\xi)=\varphi(|\theta(x)\cdot\xi|/<\xi>^{\sigma})$ を考えた。但し、σ は 1 に十分近いが 1 より小さい正数とし、φ は

$$\varphi\in C^{\infty}_0(\mathbf{R}^d),\quad 0\le\varphi(x)\le1,\quad \varphi(t)=1\quad(1/2\le t)\quad \text{and}\quad =0\quad(t\le1/3)$$

とする。そして、

$$p(x,\xi)=\Phi(x,\xi)p(x,\xi)+(1-\Phi(x,\xi))p(x,\xi)=p_0(x,\xi)+R(x,\xi)$$

と表すと、p_0 は $S^{\alpha}_{\sigma,1-\sigma}$ となり、R は $W^{\sigma\alpha+\epsilon,\infty}$ から L^{∞} への有界作用素となる。p_0 は上で述べた通常の仮定を満たしている表象であるから、この p_0 を ** の p と置き換えると、擬微分作用素の意味での基本解 $E_0(X,D_x)$ が存在することが C. Iwasaki によって示されている。この基本解を用いると、** の解 を求めることは

$$e(t,x,y)=E_0(t,X,D_x)\delta-\int_0^t E_0(t-\tau,X,D_x)R(x,D_x)e(\tau,x,y)d\tau$$

となる Volterra 型の積分方程式を満たす $e(t,x,y)$ を求めることへ転化することができる。この方程式の解の存在性は, R が $W^{\sigma\alpha+\epsilon,\infty}$ から L^{∞} への有界作用素であることと、$E_0(t,x,\xi)$ の性質と評価式および $p\in S^{-\lambda}_{\rho,\delta}$ $(0\le\delta\le\rho\le1,\ 0\le\delta<1,\ \lambda>0)$ は L^{∞} から L^{∞} への有界作用素であることを用いることによって示すことが出来る。

The Free Boundary of a Thermal Wave in a Strongly Absorbing Medium

G. S. Weiss

Tokyo Institute of Technology, O-okayama 2-12-1,

Meguro-ku, Tokyo-to, 152 Japan

In dimension $n \geq 2$ we obtain regularity of the free boundary $\partial\{u > 0\}$ of non-negative solutions of the heat equation with strong absorption

$$\partial_t u - \Delta u = -\frac{1+\gamma}{2}\, u^\gamma \,, \; \gamma \in (0,1)\,. \tag{1}$$

Our approach is motivated by methods in Liapunov's stability theory and by results concerning the Plateau problem.

Equation (1) has been used in L. K. Martinson [?] and in Ph. Rosenau, S. Kamin [?] to describe the transport of thermal energy in plasma. Alternatively it has been derived as the asymptotic limit of a system proposed by C. Bandle and I. Stakgold in [?] as a simple model for a reaction diffusion process.

This article contains a regularity result for $\partial\{u > 0\}$ in higher dimensions: suppose that u is a solution of the Cauchy problem and that the initial data u^0 satisfy $0 \leq u^0 \in C_0^{2,\sigma}(\mathbf{R}^n)$ and $(u^0)^{-\gamma}\Delta u^0 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$: then $\partial\{u > 0\}$ can be decomposed into a regular part $R = \{(t,x) \in ((0,\infty) \times \mathbf{R}^n) \cap \partial\{u > 0\}$: at least one blow-up limit of u at (t,x) is a half-plane solution $\}$ such that $\partial\{u > 0\}$ is locally in an open neighborhood of R a $\mathbf{C}^{\frac{1}{2},1+\mu}$-surface, and a singular part Σ which is ignored by spatial integration by parts in $\{u > 0\}$, i.e.

$$\int_{\{u(t)>0\}} \partial_i \zeta = \int_{\partial_{\text{red}}\{u(t)>0\}} \zeta\, \nu_i\, \mathcal{H}^{n-1} = \int_{R\cap\{s=t\}} \zeta\, \nu_i\, \mathcal{H}^{n-1}$$

for a.e. $t \in (0,\infty)$ and every $\zeta \in C_0^{0,1}(\mathbf{R}^n)$; here the reduced boundary $\partial_{\text{red}}\{u(t) > 0\}$ is the set of free boundary points at which the outer normal of H. Federer [?, 4.5.5] exists. Let us remark that while Σ is in the just mentioned sense a set of less relevance, it is in general not a set of small measure: the steady-state solution $(\frac{1-\gamma}{2}|x_1|)^{\frac{2}{1-\gamma}}$ satisfies $R = \emptyset$, $\Sigma = \partial\{u > 0\}$ and $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) > 0$. Even worse, when perturbing the stationary equation to $\Delta u = g\, u^\gamma$ where g is a strictly positive C^∞-function, we expect (in analogy to the counter-example by D. Schaeffer in [?, 2.9] for the case $\gamma = 0$) the appearance of free boundaries such that the *relative boundary* of R is a set of positive $n-1$-dimensional Hausdorff measure.

The method: we prove an "epiperimetric inequality" for the class of *half-plane solutions* $H = \{x \mapsto (\frac{1-\gamma}{2}\max(x\cdot\nu, 0))^{\frac{2}{1-\gamma}} : \nu \in \partial B_1(0)\}$ and the *boundary-adjusted energy*

$$M(v) = \int_{B_1(0)} (|\nabla v|^2 + \max(v,0)^{1+\gamma}) - \frac{2}{1-\gamma}\int_{\partial B_1(0)} v^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \;:$$

if c is any non-negative homogeneous function of degree $\frac{2}{1-\gamma}$ which is close enough to the some $h \in H$, then there exists a function v with the same boundary values on $\partial B_1(0)$ but with a lower energy value

$$M(v) \leq (1-\kappa)M(c) + \kappa M(h) . \tag{2}$$

In hommage to the inequality derived by E. R. Reifenberg for the perimeter, we call (2) by abuse of name "epiperimetric inequality." Our proof however owes nothing to the proof of the epiperimetric inequality in E. R. Reifenberg [?] or that in J. E. Taylor [?] as it works *completely* by indirect methods.

The boundary-adjusted energy plays here the role of the Liapunov function, i.e. its scaled version satisfies a monotonicity formula: defining

$$\Phi_{(t_0,x_0)}(r) = r^{-n-\frac{2(1+\gamma)}{1-\gamma}} \int_{B_r(x_0)} \left(|\nabla u(t_0,\cdot)|^2 + \max(u(t_0,\cdot),0)^{1+\gamma}\right)$$

$$- \frac{2}{1-\gamma} r^{-n+1-\frac{1}{1-\gamma}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(t_0,\cdot)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} ,$$

the function $r \mapsto \bar{C}r^\beta + \Phi_{(t_0,x_0)}(r)$ is non-decreasing for any $(t_0,x_0) \in \partial\{u > 0\}$ at which $|\partial_t(u^{1-\gamma})|$ is Hölder-continuous .

The epiperimetric inequality (2) leads now to the differential inequality

$$\max(\Phi_{(t_0,x_0)}(r) - \Phi_{(t_0,x_0)}(0+), C_2 r^\beta)' \geq \Lambda \frac{1}{r} \max(\Phi_{(t_0,x_0)}(r) - \Phi_{(t_0,x_0)}(0+), C_2 r^\beta)$$

which in turn implies Hölder-continuity of $r \mapsto \Phi_{(t_0,x_0)}(r)$ and a convergence estimate for $\frac{u(t_0,x_0+r\cdot)}{r^{\frac{2}{1-\gamma}}}$ to the *unique blow-up limit* u_0 .

This reminds very much of the use of Liapunov functions in the theory of linearized stability and of *Liapunov's direct approach* (compare e.g. to Theorem 18.7 and Remark 18.9 in H. Amann [?]). The convergence result itself on the other hand is reminiscent of a result by J. K. Hale and P. Massatt for differentiable gradient systems, by which one obtains single-point ω-limit sets in the case that the multiplicity of the eigenvalue 0 at critical points is 1 ([?, Theorem 4.3]). Let us however point out that our method also works for the obstacle problem where the second variation of the energy vanishes in more than one direction and that *our energy M is not of class C^2*, so a linearization regardless of the direction is not possible. This also means that we cannot apply the center manifold theorem and test the local center manifold for coincidence with the invariant manifold H in order to obtain our result.

Finally we derive mainly by topological methods the relative openness and $C^{\frac{1}{2},1+\mu}$-regularity of the set R.

$\Gamma-$Limit for the Extended Fisher-Kolmogorov equation

Danielle Hilhorst
Analyse Numérique et EDP,
Université de Paris-Sud (Bât 425),
F-91405 Orsay Cedex, France, email: Danielle.Hilhorst@math.u-psud.fr

Lambert A. Peletier
Mathematical Institute, Leiden University,
NL-2300 RA Leiden, The Netherlands, email: peletier@wi.leidenuniv.nl

Reiner Schätzle [1]
Mathematisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Eckerstraße 1,
D-79104 Freiburg, Germany, email: schaetz@mathematik.uni-freiburg.de

Abstract: We consider the Extended Fisher-Kolmogorov equation

$$\partial_t u + \varepsilon^2 \gamma \Delta^2 u - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} F'(u) = 0 \tag{1}$$

where $F(t) := \frac{1}{4}(t^2 - 1)^2$ is a double-well potential and $\gamma > 0$. For $\gamma = 0$ this is the ordinary Allen-Cahn equation. The equation for the stationary waves is the ordinary differential equation

$$\gamma U'''' - U'' + F'(U) = 0 \tag{2}$$

with appropriate boundary conditions. In this paper, we present estimates on the second derivatives of solutions of (2) which enable to prove that bumps of these solutions have to have a minimal size, hence cannot accumulate.
As main result, we prove that the area functional is the $\Gamma-$Limit of

$$\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma(u) := \int\limits_\Omega \frac{\varepsilon^3\, \gamma}{2} |\Delta u|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u)$$

which is a Ljapunov functional of (1).

Keywords: fourth order equation, Gamma convergence, kinks.

AMS Subject Classification: 35 J 20, 49 J 45, 35 K 22, 35 G 30.

[1]The work of R. Schätzle was supported by the ESF.

References

[1] Bates, P., Ren, X., (1997) Heteroclinic orbits for a higher order phase transition problem, European Journal of Applied Mathematics, **Vol. 8**, pp. 000-000.

[2] Kalies, W.D., van der Vorst, R.C.A.M., (1996) Multitransition Homoclinic and Heteroclinic Solutions of the Extended Fisher-Kolmogorov Equation, preprint.

[3] Kalies, W.D., van der Vorst, R.C.A.M., Wanner, T., (1997) Slow Motion in Higher-Order Systems and Γ-Convergence in One Space Dimension, preprint.

[4] Mizel, V.J., Peletier, L.A., Troy, W.C., (1997) Periodic phases in second order materials, Mathematical Institute University of Leiden, W97-13 June.

[5] Modica, L., (1987) The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **98**, pp. 123-142.

[6] Peletier, L.A., Troy, W.C., (1995) Spatial patterns described by the extended Fisher-Kolmogorov (EFK) equation: kinks, Differential and Integral equations, **8**, No. 6, pp. 1279-1304.

[7] van Saarloos, W., (1988) Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection, Physical Review A, **37**, pp. 211-229.

[8] van Saarloos, W., (1989) Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence , Physical Review A, **39**, pp. 6367-6390.

Phase transformation, phase field equations and

curvature dependent interface motion:

–models, analysis and computation, part I and part II

C. M. Elliott
School of Mathematical Sciences
University of Sussex, Brighton BN1 9QM
United Kingdom

The subjects of these lectures were (I) Phase transformations and curvature dependent interface motion and (II) Vortex density mean field models for type II superconductors.

In (I) we discussed the existence and stability of forced curvature flow for graphs in the plane, phase field equations including double obstacle potentials and degenerate mobility functions for the Cahn-Hilliard equations and sharp interface limit including motion by mean curvatures and surface diffusion which is motion by the surface Laplacian.

In (II) we discussed an averaged model for the motion of vortices in Type II superconductors on the macroscopic scale. These lead to a first order system (or degenerate parabolic) for a vorticity density coupled to an elliptic system for the magnetic field. Existence and uniqueness results were presented for two dimensional reduction in the cases of a long cylindrical domain in either a parallel or transverse applied magnetic field. The resulting systems are a scaler elliptic equation coupled to either a conservation law or a Hamilton-Jacobi equation.

Sapporo, 17.09.1998

ABSTRACT

A UNIFORM CONSTRUCTION METHOD FOR ALL FINITE SPORADIC SIMPLE GROUPS

GERHARD O. MICHLER
INSTITUTE FOR EXPERIMENTAL MATHEMATICS
UNIVERSITY OF ESSEN, GERMANY

In their recent book "The classification of the finite simple groups, No. 1", p. 45 Gorenstein, Lyons and Solomon write: "The most serious problem (of the revision project) concerns the sporadic groups, whose development of their properties form a very elaborate chapter of simple group theory, spread across a large number of journal articles. Moreover, some of the results are unpublished." Furthermore, the 26 sporadic simple groups have been constructed so far by many different adhoc construction methods.

Recently H. Gollan [3] has given a new computer construction of Lyons' simple group Ly which is independent of Sims' unpublished work. In [4] the speaker has generalized Gollan's methods in such a way that any sporadic simple group G characterized by the centralizer $H = C_G(u)$ of some involution u can be constructed by the same procedure, provided sufficiently large computers are available.

This approach to the revision project of the sporadic simple groups is mathematically very easy. It requires the performance of many calculations with dense matrices over small finite fields or large permutations. However, these computations are easily described and will be documented professionally.

Construction Method

Let u be an involution of the finite group H which is assumed to be isomorphic to the centralizer $C_G(u_1)$ of an involution u_1 of some finite simple group G. Let $F = GF(q)$ be a finite field of odd characteristic $p > 0$. Let

$$\varphi : H \to GL_n(q)$$

be a faithful semi-simple n-dimensional representation of H over F such that the eigenspace V_1 of u belonging to the eigenvalue 1 is a proper FH-submodule of $V = F^n$.

Suppose that it has been proved that there is an isomorphism

$$\tilde{H} := \varphi(H) \cong C_G(u_1).$$

Then there exists a simple subgroup $\tilde{G}$ of $GL_n(q)$ with involution $\tilde{u} = \varphi(u)$ and centralizer $C_{\tilde{G}}(\tilde{u}) = \tilde{H}$ which is isomorphic to G, if all the conditions of the following steps can be verified:

(1) Construct a subgroup $\tilde{M}$ in $GL_n(q)$ such that $\tilde{D} = \tilde{M} \cap \tilde{H}$ is a proper subgroup of $\tilde{H}$ for which the restriction $V_{|\tilde{D}}$ is a semi-simple $F\tilde{D}$-module.

Then find a matrix

$$t \in C_{GL_n(q)}(\tilde{H}) \setminus C_{GL_n(q)}(\tilde{D})/C_{GL_n(q)}(\tilde{M})$$

such that V is a simple $F\tilde{G}$-module for the subgroup $\tilde{G} = \langle \tilde{H}, t^{-1}\tilde{M}t \rangle$ of $GL_n(q)$.

(2) Check that $\tilde{H} \leq C_{\tilde{G}}(\tilde{u})$.

(3) Applying the Cooperman-Finkelstein-York-Tselman algorithm [1] and H. Gollan's [3] double coset trick to the $F\tilde{G}$-module V and its restriction $V_{|\tilde{H}}$ one obtains a permutation representation

$$\pi : \tilde{G} \to S_m \text{ with stabilizer } \overline{\tilde{H}}.$$

Check that $\overline{\tilde{H}} = \tilde{H}$. If so, then $|\tilde{G}| = |\tilde{H}|m$.

(4) Compute the number $f = |\mathrm{Fix}(\tilde{u})|$ of fixed points of the permutation $\pi(\tilde{u})$. Determine a complete set of representatives $\tilde{z}_1 = \tilde{u}, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r$ of all involutions $\tilde{z}$ of $\tilde{H}$ with trace $tr(\tilde{z}) = tr(\tilde{u})$ such that for each $i = 1, 2, \ldots, r$ the following conditions hold:

(a) $|\mathrm{Fix}(\tilde{z}_i)| = f$.

(b) There is a coset $\tilde{H}\tilde{x}_i \in \mathrm{Fix}(\tilde{z}_i)$ with $(\tilde{u})^{\tilde{x}_i} = \tilde{z}_i$. Then check that

$$f = 1 + |\tilde{z}_2^{\tilde{H}}| + \cdots + |\tilde{z}_r^{\tilde{H}}|.$$

If so, then $C_{\tilde{G}}(\tilde{u}) = \tilde{H}$.

(5) Show that $\tilde{G}$ is a simple group.

In order to show that this approach of the revision project of the sporadic simple groups is promising we outline in the lecture the recent existence proof of the large Janko group J_4 given by Cooperman, Lempken, Weller and the speaker [2].

References

[1] G. D. Cooperman, L. Finkelstein, M. Tselman, B. York, *Constructing permutation representations for large matrix groups*, J. Symbolic Computation **24** (1997), 471-488.

[2] G. D. Cooperman, W. Lempken, G. O. Michler, M. Weller, *A new existence proof of Janko's simple group J_4*, Preprint, IEM Essen (1997).

[3] H. W. Gollan, *A new existence proof for Ly, the sporadic group of R. Lyons*, Preprint IEM Essen (1995).

[4] G. O. Michler, *High performance computations in group representation theory*, Preprint IEM Essen (1998).

A Method to Evaluate Economical Carrier-Mediated Transport Across the Biological Membrane by the Optimal Control Principle.

Hirohumi, Hirayama.,

Department of Public Health Asahikawa Medical College.
4-5 Nishi Kagura Asahikawa city 078 Japan.
TELL. 0166-65-2111. EX 2411.
Fax. 0166-65-7168.

All the correspondence to : Hirohumi, HIRAYAMA

Departent of Public Health Asahikawa Medical College.
4-5 Nishi Kagura Asahikawa city 078 Japan.
TELL. 0166-65-2111. EX 2411.
Fax. 0166-65-7168.

ABSTRACT

We propose an optimal control strategy for carrier mediated transport across biological membranes in an attempt to evaluate the functions quantitatively and to create an artificial membrane. The transport system was described by the substrate, unloaded and loaded forms of the carrier where the binding sites were facing to the outside and inside of the membrane with the corresponding control inputs. The temporal behavior of the transport was expressed by a linear four-states model employing the conservation law. We assigned the state variables for the concentrations of the loaded and unloaded carriers on both sides of the unit membrane area. Two control inputs were set on each individual state variable so as to describe the producing and converting processes. The cost function to evaluate the performance of the transport involved the temporal static concentration changes in the loaded and unloaded carriers and the control inputs for driving the system. Minimizing this cost function resulted in a smooth and non wasteful transport with the least energy consumption. The relative magnitude of minimizing these quantities was characterized by the weighting coefficients and we defined that the optimal transport state is achieved when this cost function has been minimized. We utilized reported experimental data of Na/glucose cotransport for the initial condition and rate constants. Since transport by the carrier is a recycling process, we set a rigorous terminal condition as the target state for the optimally controlled transport. The optimized system equations and co-state equations were solved numerically as a multiple points boundary value problem.

The influences of a given weighting coefficient were observed not only on the time course of its proper variable but extended to those of other variables. The changes in the time course could be explained by the compensatory action of the optimized control input so as to prevent excessive increase or decrease of the materials. Finally we showed the successful simulation of experimental data by the present method. The present method is available for evaluating the function of biological transport and for creating an artificial membrane.

key words ; Biological Membrane, Carrier, Substrate, Optimal Control, Performance Function.

Crystal base of arbitrary rank 2 cases and Chebyshev polynomials

中島 俊樹　　上智大学理工学部数学科

I は finite index set とし、$(a_{i,j})_{i,j\in I}$ は symmetrizable GCM、$\mathfrak{g}$ はそれに付随して決まる Kac-Moody Lie algebra、$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ は simple roots, $\{h_i\}_{i\in I}$ は coroots とし、$a_{i,j} = \langle h_i, \alpha_j\rangle$ を満たすものとする。P は weight lattice P^* は dual weight lattice とする。量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は $e_i,\ f_i (i\in I),\ q^h (h\in P^*)$ で生成される $\mathbf{Q}(q)$-algebra とする。ここで、次のような 3 種類の crystal (base) を考える：

(i) $\lambda\in P$ に対して、$R_\lambda := \{r_\lambda\}$ は次で定義される 1 次元の crystal とする：

$$wt(r_\lambda) = \lambda,\ \varepsilon_i(r_\lambda) = -\langle h_i, \lambda\rangle,\ \varphi_i(r_\lambda) = 0,\ \tilde{e}_i(r_\lambda) = \tilde{f}_i(r_\lambda) = 0.$$

(ii) $U_q^-(\mathfrak{g})$ の crystal base $(L(\infty), B(\infty))$。

(iii) dominant integral weight λ に対して既約 highest weight module $V(\lambda)$ の crystal base $(L(\lambda), B(\lambda))$。

次の条件を満たす index の 無限列 $\iota = \cdots, i_k, i_{k-1}, \cdots, i_2, i_1$ を fix する。

$$i_k \neq i_{k+1} \text{ and } \sharp\{k | i_k = i\} = \infty \text{ for any } i\in I.$$

次の crystal の strict embedding が存在する：

$$\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow \mathbf{Z}^\infty := \{(\cdots, a_k, \cdots, a_2, a_1) | a_k\in\mathbf{Z} \text{ and } a_k = 0 \text{ for } k\gg 0\},$$

$B(\lambda)$ の highest weight vector を u_λ と書く。次のような crystal の strict embedding が存在する。

$$\Phi_\lambda : B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty)\otimes R_\lambda.$$

以上の 2 つの crystal の embedding Φ_λ と Ψ_ι を合成して次を得る：

$$\Psi_\iota^{(\lambda)} := (\Psi_\iota\otimes \mathrm{id})\circ\Phi_\lambda : B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty)\otimes R_\lambda \hookrightarrow \mathbf{Z}^\infty\otimes R_\lambda =: \mathbf{Z}^\infty[\lambda].$$

そこで、この embedding による $B(\lambda)$ の exact な image を以下のようにして記述してみる。$\mathbf{Q}^\infty$ を次のような infinite dimensional vector space とする：

$$\mathbf{Q}^\infty := \{\vec{x} = (\cdots, x_k, \cdots, x_2, x_1) | x_j\in\mathbf{Q} \text{ and } x_l = 0 \text{ for } l\gg 0\}.$$

すると、$\mathbf{Z}^\infty[\lambda]$ は $\mathbf{Q}^\infty$ の lattice point 全体と同一視される。ここで上のような無限列 $\iota = (i_k)_{k\geq 1}$ を fix しておく。$k\geq 1$ に対して $k^{(+)}$ を $l > k$ で $i_l = i_k$ とな

る最小のもの、$k^{(-)}$ を $l<k$ で $i_l=i_k$ となる最大のものか、存在しないときは 0 とする。無限列 $\iota=(i_k)$ に対して次のような $\mathbf{Q}^\infty$ 上の linear form を考える：

$$
\begin{aligned}
\beta_k^{(+)}(\vec{x}) &:= x_k+\sum_{k<j<k^{(+)}}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_{k^{(+)}},\\
\beta_k^{(-)}(\vec{x}) &:= \begin{cases} x_k+\sum_{k^{(-)}<j<k}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_{k^{(-)}} & \text{if } k>0,\\ -\langle h_{i_k},\lambda\rangle+\sum_{1\le j<k}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_k & \text{if } k=0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで次のような piecewise linenar operator を定義する：$k\geq 1$ と linear form $\varphi(\vec{x})=c+\sum_j\varphi_jx_j$ $(c,\varphi_j\in\mathbf{Q})$ に対して

$$
S_k\varphi(\vec{x}):=\begin{cases}\varphi(\vec{x})-\varphi_k\beta_k^{(+)}(\vec{x}) & \text{if } \varphi_i>0,\\ \varphi(\vec{x})-\varphi_k\beta_k^{(-)}(\vec{x}) & \text{if } \varphi_i\le 0\end{cases}
$$

とする。$j\in I$ に対して、$k_j\in\mathbf{Z}_{\geq 1}$ を $i_k=j$ を満たす最小の番号 k とする。ここで、$i\in I$ に対して $\lambda^{(i)}(\vec{x}):=-\beta_{k_i}^{(-)}(\vec{x})$ とおく。

無限列 $\iota=(i_k)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Xi_\iota[\lambda] &:= \{S_{j_l}\cdots S_{j_1}x_{j_0}\,|\,l\ge 0, j_k\ge 1\}\cup\{S_{j_l}\cdots S_{j_1}\lambda^{(i)}(\vec{x})\,|\,l\ge 0, j_k\ge 1, i\in I\}\\
\Sigma_\iota[\lambda] &:= \{x\in\mathbf{Z}^\infty[\lambda]\subset\mathbf{Q}^\infty\,|\,\varphi(x)\ge 0 \text{ for any } \varphi\in\Xi_\iota[\lambda]\}
\end{aligned}
$$

とおく。embedding $\Psi_\iota^{(\lambda)}$ の exact な image $\Psi_\iota^{(\lambda)}(B(\lambda))$ が次のように記述される：

Theorem 1. $\Sigma_\iota[\lambda]\ni\vec{0}=(\cdots,0,0)$ ならば、$\Psi_\iota^{(\lambda)}(B(\lambda))=\Sigma_\iota[\lambda]$ である。

ここで $\Sigma_\iota[\lambda]$ を ι に付随した $B(\lambda)$ の *polyhedral realization* と呼ぶ。

この定理を任意の rank 2 の Kac-Moody algebra に対して適用してみる。まず、$I=\{1,2\}$, $\iota=(\cdots,2,1,2,1)$ とおく。Cartan data は

$$
\langle h_1,\alpha_1\rangle=\langle h_2,\alpha_2\rangle=2,\ \langle h_1,\alpha_2\rangle=-c_1,\ \langle h_2,\alpha_1\rangle=-c_2.
$$

で与える。ただし、$c_1=c_2=0$ か c_1, c_2 ともに非負整数である。ここで、$X=c_1c_2-2$ とおき、整数列 $a_l=a_l(c_1,c_2)$ $(l\geq 0)$ を $a_0=0$, $a_1=1$ と $k\geq 1$ に対して

$$
a_{2k}=c_1P_{k-1}(X),\ a_{2k+1}=P_k(X)+P_{k-1}(X), \tag{1}
$$

で定義する。この *Chebyshev polynomial* $P_k(X)$ は次の generating function で与える：

$$
\sum_{k\geq 0}P_k(X)z^k=\frac{1}{(1-Xz+z^2)}. \tag{2}
$$

さらに $a'_l(c_1,c_2):=a_l(c_2,c_1)$ と定義する。始めの幾つかの Chebyshev polynomials と a_l の具体形は次のようになる：

$$
P_0(X)=1,\ P_1(X)=X,\ P_2(X)=X^2-1,\ P_3(X)=X^3-2X,
$$

$$a_2 = c_1,\, a_3 = c_1c_2 - 1,\, a_4 = c_1(c_1c_2 - 2),$$
$$a_5 = (c_1c_2 - 1)(c_1c_2 - 2) - 1,\, a_6 = c_1(c_1c_2 - 1)(c_1c_2 - 3),$$
$$a_7 = c_1c_2(c_1c_2 - 2)(c_1c_2 - 3) - 1.$$

さて、ここで $l_{\max} = l_{\max}(c_1, c_2)$ を $a_{l+1} < 0$ なる最小の l とする。(ただし、すべての $l \geq 0$ で $a_l \geq 0$ のときは $l_{\max} = +\infty$ とする。)。すると、$c_1c_2 = 0$ (resp. $1, 2, 3$) のとき $l_{\max} = 2$ (resp. $3, 4, 6$) であることがわかる。さらに $c_1c_2 \leq 3$ ならば $a_{l_{\max}} = 0$、そして $1 \leq l < l_{\max}$ で $a_l > 0$ となる。一方、$c_1c_2 \geq 4$ つまり $X \geq 2$ のとき $P_k(X) > 0$ $(k \geq 0)$ であることがわかるので $a_l > 0$ $(l \geq 1)$ となり、この場合は $l_{\max} = +\infty$ を得る。

Theorem 2. *rank 2 のとき、 dominant integral weight* $\lambda = m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$ $(m_1, m_2 \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ *に対して* $\Psi_\iota^{(\lambda)}$ *の image は次で与えられる:*

$$\mathrm{Im}\,(\Psi_\iota^{(\lambda)}) = \left\{ (\cdots, x_2, x_1) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{\infty} : \begin{array}{l} x_k = 0 \text{ for } k > l_{\max},\ m_1 \geq x_1, \\ a_l x_l - a_{l-1} x_{l+1} \geq 0, \\ m_2 + a'_{l+1} x_l - a'_l x_{l+1} \geq 0, \\ \text{for } 1 \leq l < l_{\max} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

ここで $l_{\max} < +\infty$ の場合 $\mathrm{Im}\,(\Psi_\iota)$ は finite rank の lattice に含まれていて, これは丁度、 Lie algebras $\mathfrak{g} = A_1 \times A_1$, A_2, B_2 or C_2, G_2 の場合に対応している。結局 $l_{\max} = 2$ (resp. $3, 4, 6$) のときは $l_{\max}$ は positive root の数と一致しているのである。

Schrödinger 方程式の 実解析的平滑効果 について。

筑波大学 数学系 梶谷邦彦

次のような初期値問題を考える。

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = i\, a(x,D)u + b(t,x,D)u, \quad |t|<T,\ x\in \mathbb{R}^n$$

(2) $$u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

ここで 線型作用素 $a(x,D)$, $b(t,x,D)$ について 次の仮定をする。 まず symbol class を定義する。

$\boxed{\text{定義}}$; $a(x,\xi)\in \gamma^{d,1} S(m,g)$ ($d\geq 1$ である).

$$\Longleftrightarrow \quad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_a \rho_a^{-|\alpha|-|\beta|} |\alpha|!\, |\beta|!^d \times m(x,\xi)\langle x\rangle^{-|\beta|}\langle \xi\rangle^{-|\alpha|}$$

for $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $x,\xi\in\mathbb{R}^n$

ここで $m(x,\xi)$ は weight 関数, たとえば $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ などである。 $g = \langle x\rangle^{-2}dx^2 + \langle\xi\rangle^{-2}d\xi^2$ である。

$\boxed{\text{仮定}}$ 主部 a についての仮定;

(a-1) $a(x,\xi)\in\gamma^{d,1}S(\langle\xi\rangle^2, g)$, $(d\geq 1)$,
$a(x,\xi)$ は 実数値関数である。

(a-2) $\exists\, e(x,\xi)\in\gamma^{d,1}S(\langle\xi\rangle, g)$ s.t.
$e(x,\xi)\geq c_0\langle\xi\rangle$, $(c_0>0)$

ポアッソン $\{a, e\} = 0$.

(a-3) $\exists\, \theta(x,\xi) \in \gamma^{d,1} S(\langle x\rangle, g)$ s.t.
$\theta(x,\xi)$ は実数値,
$\{\theta, a\} \geq c_0 \langle\xi\rangle$.

低階 b についての仮定;

(b-1) $b(t,x,\xi) \in C^0([-T,T];\ \gamma^{d,1} S(\langle\xi\rangle, g))$

(b-2) $\exists\, \kappa \in (0,1]$ s.t

$$\sup_{\xi} \frac{|\mathrm{Re}\ b(t,x,\xi)|}{\langle\xi\rangle} = o(\langle x\rangle^{\kappa-1}),\ (|x| \to \infty)$$

$a(x,\xi) \in \gamma^{d,1} S(m,g)$ に対して作用素 $a(x,D)$ を次で定義する.

$$a(x,D)u(x) = \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi/(2\pi)^n$$

for $u \in \mathcal{S}$.

初期値問題 (1)-(2) について次の定理を得た。上記 (a-1), (a-2), (a-3), (b-1), (b-2)を仮定する。

$\boxed{\text{定理}}$; 初期値 $u_0 \in L^2(R^n)$ が次をみたすとする.

$$\exists\,\delta \geq 0, \exists\,\sigma \geq 0 \text{ s.t.} \int e^{ix\xi + \varepsilon_0 \langle x\rangle^{\sigma} \langle\xi\rangle^{\delta}} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi \in L^2(R^n_x),\ (\varepsilon_0 > 0)$$

このとき,
$\sigma + \delta = \kappa$, $\kappa d \leq 1$ ならば (1)-(2) の解 $u(t,x)$ が存在して, 次の評価をもつ。($C > 0$, $\rho > 0$)

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u(t,x)\right| \leq C(\rho|t|)^{-|\alpha|} |\alpha|!^{\frac{1}{\kappa}} e^{\varepsilon_1 \langle x\rangle^{\kappa}}$$

for $\alpha \in N^n$, $x \in R^n$,

対数の歴史

---ヨーロッパ数学の成立---

志賀　浩二（桐蔭横浜大）

ヨーロッパ数学はギリシャ数学を直接継承することにより出来上がったものではない。実際、ヨーロッパ数学の特質は、無限概念、実数概念を容認した上で、解析学という巨大な体系を成立させたところに見ることができる。だがその源流をどこに探っていってよいのか。偶然の機会から対数の歴史を調べているうちに、私はいつしかこの源流へと向けて、流れを遡って行くような気持ちになっていた。

対数は、１６１４年と１６１９年に出版されたネピアの小さな２冊の本によって生まれたものである。対数は、自然数の乗法を、加法に還元することにより、演算を簡易化したいという意図から考えられたが、そこには当初から、互いに性格の反する２つの問いかけが存在していた。一つは対数とは何かを究めることであり、他の一つは、対数表をいかにして計算し作製するかということであった。当初は、実数概念どころか、小数概念さえもないに等しい状況であり、また指数概念も指数記号もなかったということは想起しておく必要がある。当時の学問にとって理論面と応用面という２つの間を結ぶ結び目のもっとも深い場所に対数が位置していたのである。ネピア自身、対数概念の発表と同時に、７桁の対数表を完成し発表している。この対数表（実際はこの少しあとブリッグスにより発表された常用対数表）は、知識層の間に爆発的な勢いで普及していった。

自然数の演算の乗法から加法への変換という目的に対し、対数は本来近似概念としての働きであり、より正確な演算結果を求めるためには、より精密な対数表が必要であり、それはしだいに果てしない数の列の彼方にあるものを覗かせることになった。対数概念を支えるものは、実数であり、また無限である。当時、対数がもたらしたもっとも困難な状況は、対数を眞に理解するためには、無限概念を理解し、数学の中で把えることが先決であるという事実によっていたのである。ということは、１７世紀後半になっても、対数はなお深い霧の中にあったということである。算術（アルゴリスム）と無限概念のはざまにあった対数が完全に理解されるには結局１７４０年代のオイラーの『無限解析入門』まで待たなければならなかった。

今回の特別講演では、時間の関係もあり、このような事柄は後半になってはじめて触れるということになってしまった。話の主要なテーマは、むしろ対数概念の発見に至る過程の中で見られる、中世から近世へかけてのヨーロッパの文化と文明の大きなうねりにあった。ヨーロッパ中世の眼覚めは、十字軍遠征によって惹き起こされた地中海貿易からはじまったが、商業活動の必要性から、アラビアの１０進法と筆算がヨーロッパにもたらされ、同時にヨーロッパに「計算術」が導入されることになった。１５世紀からはじまった大航海時代には、帆船は未知の大海へと乗り出していったが、航路の安全のための位置確認には、星の観測による天文航法だけが唯一の頼りであった。そのため１６世紀から天文学の研究が、急速にヨーロッパ社会の中心におかれるようになり、天文学者は観測値から星の動きを定めるため、１５桁を越すような大きな数値をもって現われる三角関数の値を用い、複雑な球面三角法の計算に日夜心血を注いでいたのである。この筆算の想像を絶する労力は、演算の簡易化への強い願望を生むようになり、それがネピアを動かすことになった。ネピアの対数は、この時代のヨーロッパ精神の高揚の中から誕生したのである。数学を育てる深い土壌は、社会そのものの中にあるという考えは、１８世紀まで受け継がれたヨーロッパ数学の伝統であり、それはさらに１９世紀になっても、フーリエをはじめとする数理物理学の研究の中にも伝わっていくのである。

Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations

小薗 英雄　　(東北大・理)

We investigate blow-up phenomena of strong solutions to the Navier-Stokes equations:

$$\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } x \in \boldsymbol{R}^n,\ t > 0, \\ u\,|_{t=0} = a. \end{cases}$$

Let $a \in H^s_\sigma$ for $s > n/2 - 1$. For the strong solution of (N-S), we introduce the class $CL_s(0,T)$ defined by

$$u \in C([0,T); H^s_\sigma) \cap C^1((0,T); H^s_\sigma) \cap C((0,T); H^{s+2}_\sigma).$$

Theorem 1 *Let $s > n/2 - 1$ and let $a \in H^s_\sigma$. Suppose that u is a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(0,T)$. If*

$$\text{(0.1)} \qquad \int_{\varepsilon_0}^T \|u(t)\|^2_{BMO} dt < \infty \quad \textit{for some } 0 < \varepsilon_0 < T,$$

then u can be continued to the strong solution in the class $CL_s(0,T')$ for some $T' > T$.

Corollary 1 *Let u be a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(0,T)$ for $s > n/2 - 1$. Suppose that T is maximal, i.e., u cannot be continued in the class $CL_s(0,T')$ for any $T' > T$. Then*

$$\text{(0.2)} \qquad \int_\varepsilon^T \|u(t)\|^2_{BMO} dt = \infty \quad \textit{for all } 0 < \varepsilon < T.$$

In particular, we have

$$\text{(0.3)} \qquad \limsup_{t \uparrow T} \|u(t)\|_{BMO} = \infty.$$

We next consider a criterion on uniqueness and regularity of weak solutions to (N-S). By the weak solution we mean u in $L^\infty(0,T; L^2_\sigma) \cap L^2(0,T; H^1_\sigma)$ which satisfies (N-S) in the sense of distributions on $\boldsymbol{R}^n \times (0,T)$.

Theorem 2 *(1) (uniqueness) Let $a \in L^2_\sigma$ and let u, v be two weak solutions of (N-S) on $(0,T)$. Suppose that*

$$\text{(0.4)} \qquad u \in L^2(0,T; BMO)$$

and that v satisfies the energy inequality

$$\text{(0.5)} \qquad \|v(t)\|^2_2 + 2\int_0^t \|\nabla v\|^2_2 d\tau \le \|a\|^2_2, \quad 0 < t < T.$$

Then we have $u \equiv v$ on $[0,T]$.

(2) (regularity) Let $a \in L^2_\sigma$ and let u be a weak solution with the additional property (0.4). Then for every $0 < \varepsilon < T$, u is actually a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(\varepsilon, T)$ for $s > n/2-1$.

Remark. Theorem 2 may be regarded as an extension of Serrin's criterion on uniqueness and regularity of weak solutions u in the class $u \in L^\kappa(0,T;L^r)$ for $2/\kappa + n/r = 1$ with $n < r \leq \infty$.

We shall next investigate continuation of the strong solution in terms of the vorticity $\omega = \text{rot}\, u \equiv (\partial_j u^k - \partial_k u^j)_{1\le j,k\le n}$ and the deformation tensor Def $u \equiv (\partial_j u^k + \partial_k u^j)_{1\le j,k\le n}$.

Theorem 3 *Let $s > n/2-1$. Suppose that u is a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(0,T)$. If either*

$$\int_{\varepsilon_0}^T \|\omega(t)\|_{BMO} dt < \infty \quad \textit{or} \quad \int_{\varepsilon_0}^T \|\text{Def}\, u(t)\|_{BMO} dt < \infty \tag{0.6}$$

holds for some $0 < \varepsilon_0 < T$, then u can be continued to the strong solution in the class $CL_s(0,T')$ for some $T' > T$.

Corollary 2 *Suppose that u is a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(0,T)$ for $s > n/2-1$. Assume that T is maximal in the same sense as in Corollary 1. Then both*

$$\int_{\varepsilon}^T \|\omega(t)\|_{BMO} dt = \infty \quad \textit{and} \quad \int_{\varepsilon}^T \|\text{Def}\, u(t)\|_{BMO} dt = \infty \tag{0.7}$$

hold for all $0 < \varepsilon < T$. In particular, we have

$$\limsup_{t \uparrow T} \|\omega(t)\|_{BMO} = \infty \quad \textit{and} \quad \limsup_{t \uparrow T} \|\text{Def}\, u(t)\|_{BMO} = \infty. \tag{0.8}$$

Remark. Beale-Kato-Majda and Ponce considered the Euler equations in $\boldsymbol{R}^3$ and the same type of continuation principle as in Theorem 2 under the stronger assumption that $\int_0^T \|\omega(t)\|_\infty dt < \infty$ and $\int_0^T \|\text{Def}\, u(t)\|_\infty dt < \infty$, respectively.

Finally we are concerned with the regularity criterion on weak solutions by mean of rot u and Def u.

Theorem 4 *Let $a \in L^2_\sigma$. Suppose that u is a weak solution of (N-S) on $(0,T)$. If either*

$$\omega \in L^1(0,T;BMO) \quad \textit{or} \quad \text{Def}\, u \in L^1(0,T;BMO) \tag{0.9}$$

holds, then for every $0 < \varepsilon < T$, u is actually a strong solution of (N-S) in the class $CL_s(\varepsilon,T)$ for $s > n/2-1$.

Perturbation of an eigen-value from a dense point spectrum

P. Duclos, P. Šťovíček and M. Vittot

November 20, 1998

Abstract. We consider a perturbed Floquet Hamiltonian $-i\partial_t + H + \beta V(\omega t)$ in the Hilbert space $L^2([0,T], \mathcal{H}, dt)$. Here H is a self-adjoint operator in $\mathcal{H}$ with a discrete spectrum obeying a growing gap condition, $V(t)$ is a symmetric bounded operator in $\mathcal{H}$ depending on t 2π-periodically, $\omega = 2\pi/T$ is a frequency and β is a coupling constant. The spectrum $\mathrm{Spec}(-i\partial_t + H)$ of the unperturbed part is pure point and dense in $\mathbf{R}$ for almost every ω. This fact excludes application of the regular perturbation theory. Nevertheless we show, for almost all ω and provided $V(t)$ is sufficiently smooth, that the perturbation theory still makes sense, however, with two modifications. First, the coupling constant is restricted to a set I which need not be an interval but 0 is still a point of density of I. Second, the Rayleigh-Schrödinger series are asymptotic to the perturbed eigen-value and the perturbed eigen-vector.

1998.11.26

8次元半単純Hopf代数の普遍R行列と3次元多様体の不変量

阪大・理　和久井道久

普遍R行列の概念はDrinfel'dによって与えられた。Drinfel'dとJimboは「量子群」と呼ばれる無限次元の非可換非余可換ホップ代数を定義したが、Drinfel'dは、さらに、量子群には準三角Hopf代数の構造が「入る」ことを見い出し、具体的に普遍R行列を構成して見せた。それ以来、多くの研究者によって準三角Hopf代数の理論や例が研究され、他の分野にその理論が応用されている。

Reshetikhin と Turaev, Lawrence, 大槻氏, Kauffman と Radford と Hennings 等により、準三角Hopf代数を用いた3次元多様体の不変量の構成方法が与えられている。これらの不変量は、準三角Hopf代数が、δが1の巾根の場合の量子群、巡回群の群Hopf代数、有限群の群Hopf代数の量子二重化の場合によく調べられている。しかし、これ以外についてはあまり調べられていないし、準三角Hopf代数の例もあまり知られていない。そこで、既知の準三角Hopf代数以外のHopf代数に新しい普遍R行列を発見して、その中に、3次元多様体の不変量として役立つものを捜そう。今回の講演では、その第1歩として、8次元半単純Hopf代数の普遍R行列を具体的に決定する。

<u>定理</u>(増岡)　複素数体$\mathbb{C}$上の8次元半単純Hopf代数は次のいずれかに同型である。

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2,\ D_8,\ Q_8 \text{ の群環} \\ \mathbb{C}[D_8]^*,\ \mathbb{C}[Q_8]^* \quad \text{(双対Hopf代数)} \\ \text{非可換、非余可換なもの } H \quad \text{(数理科学特集「群論の再生」竹内先生の記事参照)} \end{cases}$$

ここで、

$$D_{2m} = \langle s, t \mid s^m=1,\ t^2=1,\ t^{-1}st=s^{-1} \rangle \quad (m \geq 3) \quad \text{二面体群}$$

$$Q_{4n} = \langle s, t \mid s^{2n}=1,\ t^2=s^n,\ t^{-1}st=s^{-1} \rangle \quad (n \geq 2) \quad \text{一般四元数群}$$

<u>定理1</u>　Gを有限群とする。

(1) Gが非可換ならば、$\mathbb{C}[G]^*$には普遍R行列は存在しない。

(2) Gに最大可換正規部分群Nが存在するならば、$\mathbb{C}[G]$の普遍R行列は$\mathbb{C}[N]$の普遍R行列である。

<u>系2</u>　非可換有限単純群の群環の普遍R行列は、$R=1\otimes 1$のみである。

<u>系3</u>　Rが$\mathbb{C}[D_{2m}]$ $(m\neq 4)$または$\mathbb{C}[Q_{4n}]$ $(n\neq 2)$の普遍R行列であるための必要十分条件は、Rが$\mathbb{C}[\langle s\rangle]$の普遍$R$行列であることである。

<u>補題4</u>　$\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n=\langle x,y \mid x^m=1,\ y^n=1,\ xy=yx\rangle$

ζ, ξをそれぞれ1の原始m乗根、n乗根とする。$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n]$の普遍$R$行列は、次で与えられる。

$$R_{pqrs}=\frac{1}{mn}\sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,m-1\\ k,l=0,1,\cdots,n-1}}\zeta^{-ij}\xi^{-kl}x^iy^k\otimes x^{pj+rl}y^{qj+sl}$$

但し、$p\in X(m,m)$, $q\in X(n,m)$, $r\in X(m,n)$, $s\in X(n,n)$,

$$X(m,n):=\{d\in\{0,1,\cdots,m-1\} \mid dn\equiv 0 \pmod m\}$$

<u>定理5</u>

(1) Rが$\mathbb{C}[D_8]$の普遍R行列であるための必要十分条件は、Rが$\mathbb{C}[\langle s\rangle]$の普遍$R$行列であるか、$R_{0,1,1,0}$であるか$R_{0111}$となることである。但し、$(x,y)=(t,s^2),(ts,s^2)$

(2) Rが$\mathbb{C}[Q_8]$の普遍R行列であるための必要十分条件は、Rが$\langle s\rangle$または$\langle t\rangle$または$\langle ts\rangle$の群環の普遍R行列となることである。

(3) (鈴木智支)　RがHの普遍R行列であるための必要十分条件は、RがR_{pqq+1p} $(p,q=0,1)$であるか、次の形に書けることである。

$$R=\frac{1}{16}\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l=0,1}(-1)^{\alpha k+\beta i}\zeta^{\alpha\beta}\{1+(-1)^{\alpha\beta+i+j}\zeta^{2\alpha}+(-1)^{k+l}\zeta^{-2\beta}-(-1)^{\alpha\beta+i+j+k+l}\zeta^{2\alpha-2\beta}\}z^\alpha x^iy^j\otimes z^\beta x^ky^l$$

但し、$\zeta^4=-1$

Szegöの定理と"フェルミオン"過程

京都大学数理解析研究所　高橋陽一郎

Toeplitz行列 $T_n=(c(j-k))_{j,k=0}^{n-1}$に対する極限定理

$$\lim (\det T_n)^{1/n} = \exp \int_0^1 \log f(t)\, dt \quad (f(t)=\Sigma c(k)\exp 2\pi ikt>0)$$

はSzegö(1920)に始まり、その精密化、一般化は、1950年代に統計力学でIsing模型の研究に応用されるなど、裾野は広く、興味深く美しい定理である。まず、その2、3の簡単な証明から話を始めたい（「実関数とFourier解析1」（岩波書店）参照）。

一方、1950年代、量子統計物理学に始まる乱雑行列(random matrix)の理論は、近年では重力場や素粒子の理論との関係で研究が進んでいる。そこでは、N次正方行列の固有値あるいは固有値の間隔の漸近挙動が主要問題であるが、主として、相関関数のことばで取り扱われ、直交多項式の特性を自在に操る"手品師"たちの技の見せ所であった（Mehtaの本参照）。これを素朴に、確率論の枠組みで捉えると、次のような確率場μのクラスが得られる（白井一高橋）：

$$\int \mu(d\xi)\exp-\langle\xi,f\rangle = \det(I-K_f) \quad (f\geq 0,\ \text{compact support})$$

ここで、$\xi=\Sigma\delta(x_i)$は空間R上の無限粒子配置、$\langle\xi,f\rangle=\Sigma f(x_i)$, fは試験関数で、KはR上の正定値対称積分作用素で、然るべき条件を満たすもの、そして、

$$K_f=(1-e^{-f})^{1/2}K(1-e^{-f})^{1/2}.$$

なお、このクラスの特殊な場合は、1970年代に既にfermion processという名のもとに研究されており、Olshanskyたちは無限対称群の表現論に最近利用している。

さて、最も簡単な $R=Z^1$で、KがToeplitz行列の場合を考えると、確率場μは$\{0,1\}^Z$上のrepulsiveなGibbs場となり、これに関する大偏差原理が上記のSzegöの定理となる。さらに、エントロピーを与える展開式も得られる。その証明のほとんどは、あまり見かけない行列の諸性質による。

ON SOME QUADRATIC ALGEBRAS

ANATOL N. KIRILLOV

Department of Mathematics, Hokkaido University
Sapporo 060–0810, Japan
and
Steklov Mathematical Institute,
Fontanka 27, St.Petersburg, 191011, Russia

ABSTRACT

A quadratic algerba is an associative algebra with generators $g_1, \ldots, g_n$ subject to a collection of quadratic relations $\{R_\alpha = 0\}_{\alpha \in I}$, where for all $\alpha \in I$

$$R_\alpha := R_\alpha(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij}^\alpha g_i g_j, \quad \text{where} \quad c_{ij}^\alpha \in \mathbf{C}.$$

The class of quadratic algebras includes, for example,

- algebra of functions on quantum group;
- algebra of functions on noncommutative affine space.

These algebras play fundamental role in Mathematical Physics, Representation Theory of Quantum Groups and Combinatorics.

In my talk I am going to introduce and study some quadratic algebras which are naturally appeared in the Low Dimensional Topology and Schubert Calculus. The Jucys–Murphy elements in the braid algebra and in the pure braid group, as well as the Dunkl elements in the extended affine braid group will be constructed. Relationships between the Dunkl elements, Dunkl operators and Jucus–Murphy elements will be described. A new combinatorial construction for the cohomology ring and the quantum cohomology ring of the flag manifold will be given.

On Uncertainty Principle for Some Lie Groups

Keisaku KUMAHARA

The uncertainty principle in harmonic analysis means that a function and its Fourier transform cannot be concentrated simultaneously unless it is identially zero. One of such theorem is the famous **Heisenberg-Pauli-Weyl inequality**. Another one is the following Hardy theorem(Hardy[1933]). We define the Fourir transform

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

of a function f on $\mathbb{R}^n$.

Hardy Theorem *For positive numbers a, b, we put $E(a,b)$ the vector space of functions which satisfies inequalities*

$$|f(x)| \leqq C\exp\{-ax^2\}, \qquad |\hat{f}(\xi)| \leqq C\exp\{-b\xi^2\}$$

for some $C > 0$. Then we have

1. $ab < \frac{1}{4} \Rightarrow \dim E(a,b) = \infty$
2. $ab = \frac{1}{4} \Rightarrow E(a,b) = \mathbb{C}\exp\{-ax^2\}$
3. $ab > \frac{1}{4} \Rightarrow E(a,b) = \{0\}$.

A. Sitaram, M. Sundari and S. Thangavelu generalized this theorem to the case of $\mathbb{R}^n$, Heisenberg group and the motion group of the plane. A. Sitaram snd M. Sundari showed the Hardy theorem for noncompact semisimple Lie groups with only one conjugacy class of Cartan subgroups, $SL(2,\mathbb{R})$ and Riemannian symmetric space of noncompact type. And also M.Sundari proved the Hardy theorem for the Euclidean motion group of $\mathbb{R}^n$. M. Eguchi, S. Koizumi and K. Kumahara proved a Hardy theorem for the Cartan motion group.

On the other hand, M. Cowling and J. F. Price proved the following L^p version of the Hardy theorem.

Theorem *Suppose that $1 \leqq p, q \leqq \infty$ and one of them is finite. If a measurable function f on $\mathbb{R}$ satisfies*

$$\| e^{ax^2} f \|_p < \infty \quad \textit{and} \quad \| e^{b\xi^2} \hat{f} \|_q < \infty$$

for some positive number a and b such that $ab \geqq \frac{1}{4}$, then $f = 0$ almost everywhere.

The main object of this talk is to state the Cowling-Price theorem for the motion group proved in a joint work with Masaaki Eguchi and Shin Koizumi. As a corollary of our theorem, we can get the theorem for $\mathbb{R}^n$.

Let $G = K \ltimes V$ be the motion group. We normalize measures suitably. Let π_ξ be the unitary representation of G induced from a unitary character ξ of V. We define the Fourier transform $\hat{f}$ of measurable function f on G by

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(g)\pi_\xi(g)dg.$$

$\hat{f}$ is a $B(L^2(K))$-valued function on the dual space of V, where $B(L^2(K))$ is the Banach space of all bounded linear operators on $L^2(K)$.

Theorem 1. *Let $1 \leqq p, q \leqq \infty$. Let f be a measurable function on G such that*

$$\| e^{a\sigma(g)^2} f(g) \|_p \leqq C, \qquad \| e^{b|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \|_q \leqq C$$

for some $C > 0, a > 0$ and $b > 0$. If $ab > 1/4$, then $f = 0$ (a.e.). Moreover, if $q < \infty$ and $ab \geqq 1/4$, then $f = 0$ (a.e.).

If we put $p = q = \infty$, then we have following Hardy theorem.

Corollary 1. *Let f be a measurable function on G such that*

$$|f(g)| \leqq Ce^{-a\sigma(g)^2}(a.e.), \qquad \| \hat{f}(\xi) \|_\infty \leqq Ce^{-b|\xi|^2}(a.e.)$$

for some $C, a > 0$ and $b > 0$. If $ab > 1/4$, then $f = 0(a.e.)$.

Let p, q, a, b and f be as in Theorem 1. In case $p < \infty, q = \infty$ and $ab = 1/4$ Theorem 5 does not yield $f = 0$ (a.e.). But we can prove the following proposition.

Proposition 1. *Let $1 \leqq p < \infty$ and f be a measurable function on G such that*

$$\| e^{a\sigma(g)^2} f(g) \|_{L^p(g)} \leqq C, \qquad \| \hat{f} \|_\infty \leqq Ce^{-b|\xi|^2},$$

for some $C > 0, a > 0$ and $b > 0$. If $\hat{f}$ is of trace class and $ab = 1/4$, then $f = 0$ (a.e).

If K is the unit group, then G is the n dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Thus we have the following generalization of the Cowling-Price theorem.

Corollary 2. *Suppose that $1 \leqq p, q \leqq \infty$ and one of them is finite. Let f be a measurable on $\mathbb{R}^n$ such that*

$$\| e^{a|x|^2} f(x) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqq C, \qquad \| e^{b|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqq C$$

for some $C > 0, a > 0$ and $b > 0$. If $ab \geqq 1/4$, then $f = 0(a.e.)$.

And I will mention some results on semisimple Lie groups.

Bound states of the Pauli operator with an anomalous magnetic moment

Pavel Exner

Nuclear Physics Institute, Academy of Sciences, 25068 Řež near Prague, and Doppler Institute, Czech Technical University, Břehová 7, 11519 Prague, Czech Republic

This talk is a review of a recent work performed in collaboration with F. Bentosela, R.M. Cavalcanti, and V.A. Zagrebnov — see a forthcoming paper in *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) and references therein.

We consider an electron with an anomalous magnetic moment $g > 2$ confined to a plane and interacting with a nonzero magnetic field B. We show that if B is of compact support and the magnetic flux in the natural units is $F \geq 0$, the corresponding Pauli operator, $H_P^{(-)}(A)$ with spin "down" and A being a vector potential corresponding to B, has at least $1+[F]$ bound states, without making any assumptions about the field profile. Furthermore, in the zero-flux case there is a pair of bound states with opposite spin orientations.

For a rotationally symmetric field with a tail, $B(r) = \mathcal{O}(r^{-2-\delta})$ as $r \to \infty$, we discuss limits of strong and weak coupling. We show that each partial-wave operator $H_\ell^{(-)}(A)$ has a bound state if the field is strong enough. On the other hand, in the weak-coupling case with zero flux we prove the existence of bound states for $H_0^{(\pm)}(A)$ using the Birman-Schwinger technique. Finally, we show that under mild regularity assumptions the last named existence result can be proved for non-symmetric fields with tails as well.