



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ジュリア集合の計算可能性と計算複雑性
Author(s)	平塚, 倅太
Citation	Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, 1069, 1-47
Issue Date	2015-03-24
DOI	https://doi.org/10.14943/84213
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/69873
Type	departmental bulletin paper
File Information	re1069.pdf



ジュリア集合の計算可能性と 計算複雑性

Computability and Complexity of Julia Sets

平塚倖太 (北海道大学理学院数学専攻)

概要

非線形な力学系では, 単純な規則から複雑なフラクタル構造をもつ幾何学的対象物が生成される. それでは, それを目の前のコンピュータスクリーン上で見ることは可能であるか. これは一見単純そうな問題であるが, 奥深い事実が隠されていることを近年の研究は明らかにした.

本論文では実力学系, 複素力学系, 計算理論の基礎を紹介し, 複素力学系のジュリア集合の計算可能性と複雑性についての事実をまとめる [17].

1 実一次元力学系

力学系の基礎としてまず実一次元の例を考える. 例としてロジスティック写像を取り上げる. 参考文献としては数学的に議論を進めていく Devaney[13], 物理的視点から多くの例が紹介されている Yorke[1], より詳しい文献として De Melo&Van-Strien[11] などが挙げられる.

1.1 実力学系

実一次元写像 f に対して $f(x) = x$ となるような点 x を写像 f の不動点 (fixed point) という. また f を n 回合成した写像 f^n の不動点を写像 f の周期 n の周期点 (periodic point) という. 周期 1 の周期点が不動点である. さらにある周期 n の周期点 x に対して, 点の集合 $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ を周期軌道 (periodic orbit) またはサイクル (cycle) という. 一般に, 初期点 x に写像 f を反復し

て施していった点列 $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ を軌道 (orbit) と呼ぶ.

周期 n の周期点 x に対して $(f^n)'(x)$ の値をその乗数 (multiplier) という. 周期点は乗数によって次のように分類される.

定義 1 (双曲的, 中立的)

x を周期 n の周期点とする. $|(f^n)'(x)| \neq 1$ のとき, x は双曲的 (hyperbolic) であるという. また, $|(f^n)'(x)| = 1$ のとき, x は中立的 (indifferent) であるという.

双曲的な周期点はさらに 2 通りに分けられる.

定義 2 (吸引的, 反発的)

周期 n の周期点 x が $|(f^n)'(x)| < 1$ を満たすとき, x は吸引的 (attracting) な周期点, またはアトラクター (attractor) であるという. また, $|(f^n)'(x)| > 1$ を満たすとき, x は反発的 (repelling) な周期点, またはリペラー (repellor) であるという.

吸引的な周期点 p は次のような性質をもつ. 即ち, ある領域 $U \ni p$ が存在し, $x \in U$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ となる. このような領域 U は吸引領域 (basin) と呼ばれる. 反発的な周期点についても同様に考えればよい. 即ち, ある領域 $U \ni p$ が存在し, $x \in U, x \neq p$ ならば $f^k(x) \notin U$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する.

1.2 ロジスティック写像

パラメータ a を $a \in [0, 4]$ として写像の族 $f_a(x) = ax(1-x)$ を考える. この写像はロジスティック写像と呼ばれ多くのことが知られている. ロジスティック写像はパラメータ a の値によって多様な力学的振る舞いを示す.

例 3

$a = 2.3$ のとき, 吸引的な不動点が唯一つ存在する. これを確かめてみよう. 0.1 を初期点とし, 対角線 $y = x$ から f のグラフに垂線を引く. 次にその交点から対角線へ水平線を引くと, その交点の x 座標の値は $f(0.1)$ である. この手続きを繰り返すことで 0.1 を初期値とする軌道が得られる. この軌道は不動点 $0.5652 \dots$ に吸引されることが視覚的に見てとれる (図 1). 一方, 原点は反発的な不動点である.

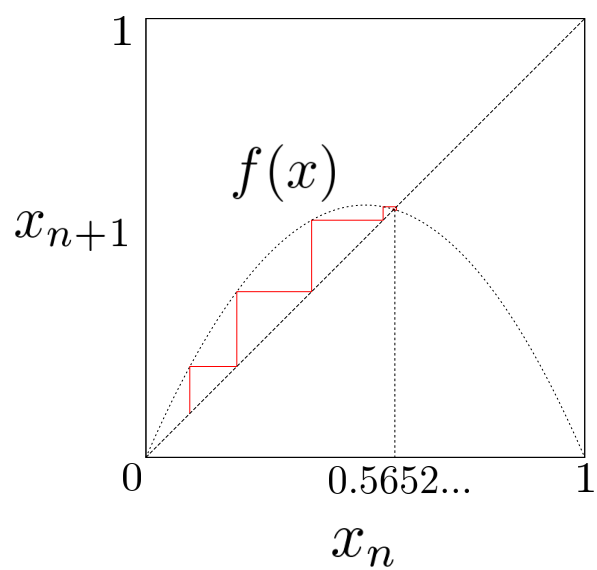


図 1: $f(x) = 2.3x(1-x)$ のグラフと 0.1 を初期点とする軌道. 最終的に不動点 $x = 0.5652\dots$ へ到達していることがわかる.

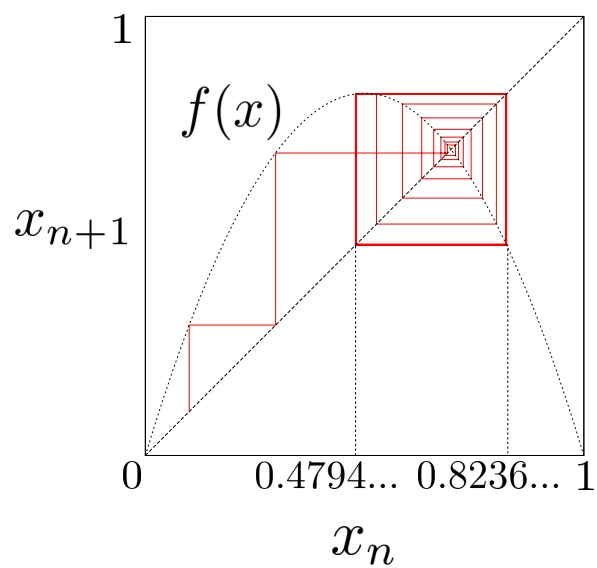


図 2: $f(x) = 3.3x(1-x)$ と 0.1 を初期点とする軌道. 最終的に周期 2 の周期軌道へ到達していることがわかる.

例 4

$a = 3.3$ のとき, 吸引力的な周期 2 の周期軌道が存在する. 数値計算をして図にしたものが図 2 である. 初期点を出発した軌道は不動点近くへ到達した後, $0.4794 \dots$ と $0.8236 \dots$ を往復する.

例 5

$a = 4.0$ のとき, もはや吸引力的な周期点は存在しない. 0.1 を初期点として写像を回反復すると, 軌道は区間 $(0, 1)$ の中を動き回る (図 3). さらに反復を続けると軌道は区間 $[0, 1]$ で稠密になる.

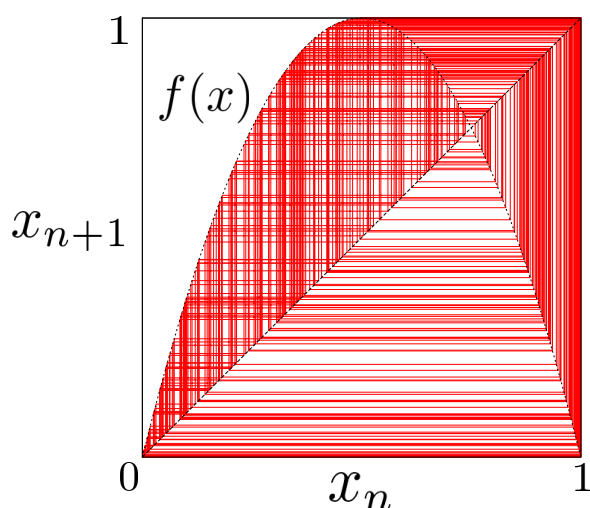


図 3: $f(x) = 4x(1-x)$ と 0.1 を初期点として 300 回反復した軌道. 非常に複雑な振る舞いを見せ, 軌道は区間 $[0, 1]$ で稠密になる.

3 つの例を見てきたが, パラメータ a を動かした場合に果たして軌道の振る舞いはどう変わっていくのかが疑問である. その問を解決するために分岐図を導入する. これは横軸にパラメータ a を, 縦軸に区間 $[0, 1]$ をとり, 各パラメータに対して軌道が最終的にどう振る舞うのかを描いた図である (図 4). はじめは吸引力的な不動点が存在するが, $a = 3$ で周期 2 の周期点に変わり, 後に周期 $4, 8, \dots$ と変化していく. このようにパラメータを変化させることで軌道の位相構造が変化することを分岐という.

分岐が進むにつれて写像は複雑な振る舞いを見せていくが, よく観察するとパラメータが $a = 3.828$ 付近で周期が 3 の領域が現れることに気づく. 拡大した図が図 5 に描かれている. この領域は特に 3 周期窓 (window) と呼ばれる.

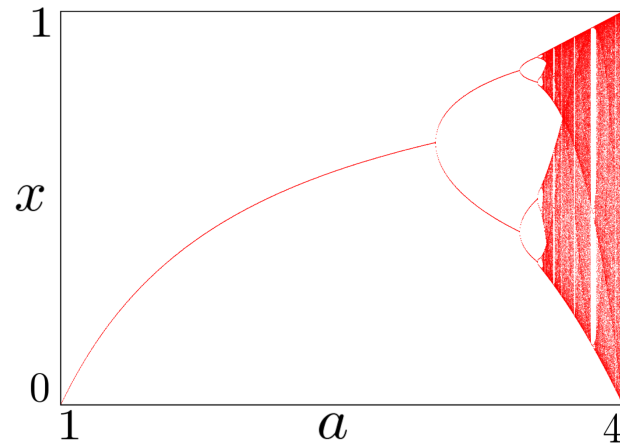


図 4: 二次写像 $f_a(x) = ax(1-x)$, $a \in [1, 4]$ の分岐図. ここでは写像を 1500 回反復し, 1000 回目以降の軌道をプロットしている. 不動点が周期 2 の周期点になり, さらに周期が 4 の周期点へと分岐し, やがて複雑な振る舞いを見せるようになる.

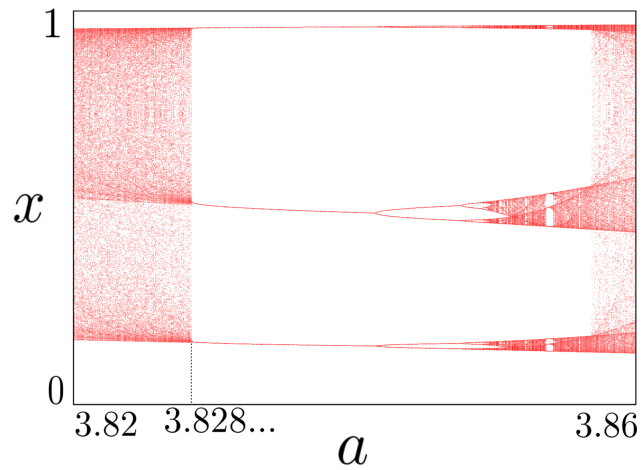


図 5: $a \in [3.82, 3.86]$ の分岐図. パラメータがおよそ 3.828 のところで 3 周期窓が現れる.

1.3 カオス

力学系におけるカオスの定義は未だ一つに定まっていない。歴史的には Li-Yorke によってカオスという概念が導入された [20]。ここでは L. R. Devaney のカオスの定義 [13] を採用して話を進めていく。Devaney のカオスの定義を説明する前に、位相推移性と初期値鋭敏性の定義をする。

定義 6 (位相推移的)

任意の開集合 $U, V \neq \emptyset$ と $U, V \subset J$ に対して、 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ となるような $k \geq 0$ が存在するとき、 $f : J \rightarrow J$ は位相推移的 (topologically transitive) であるという。

定義 7 (初期値鋭敏性)

ある $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in J$ と x の任意の近傍 N に対して、 $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ となるような $y \in N$ と $n \geq 0$ が存在するとき、 $f : J \rightarrow J$ は初期条件に対する鋭敏な依存性 (sensitive dependence on initial conditions)、または初期値鋭敏性をもつという。

Devaney のカオスの定義は次のように与えられる。

定義 8 (カオス (Devaney))

V を位相空間内のある不変部分集合とする。 $f : V \rightarrow V$ に対して次の 3 条件が成り立つとする：

1. f は初期値鋭敏性をもつ；
2. f は位相推移的である；
3. 周期点全体の集合は V において稠密である。

このとき、 f は V 上でカオス的 (chaotic) であるという。

一つ目の条件は予測不可能性を、二つ目の条件は力学系の不変集合を 2 つの不変部分集合に分けることができないという不可分性を表している。また三つ目の条件は、複雑な振る舞いの中にも秩序が見い出せるということを示している [13]。

ロジスティック写像の例では $a = 4$ の場合、 $f_4(x) = 4x(1-x)$ は区間 $[0, 1]$ 上でカオス的である。

2 複素力学系とジュリア集合

ここではジュリア集合を周期点の性質によって分類し、実力学系と複素力学系との関連性を具体例を交えて説明する。

2.1 複素力学系

複素平面のある領域 U の全ての点において可微分な複素数値関数 f は正則 (holomorphic) であるという. また正則関数で微分の値が U において非零, 即ち $z \in U$ に対して $f'(z) \neq 0$ となるものは等角 (conformal) であるという. 後の議論において必要となる複素解析の古典的結果を以下に述べる.

定理 9 (リーマンの写像定理 (Riemann mapping theorem))
 $W \subset \mathbb{C}$ を有界な単連結領域とし, $w \in W$ を任意の点とする. このとき,

$$\phi(w) = 0, \text{ かつ } \phi'(w) > 0$$

を満たす唯一の等角写像 $\phi : W \rightarrow \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する.

定理 10 (ケーベの 1/4 定理 (Koebe's one-quarter theorem))
 $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ を全単射な等角写像で $f(0) = 0$ と $f'(0) = 1$ を満たすとしよう. このとき,

$$f(\mathbb{U}) \supset B(0, 1/4)$$

となる. ただし $B(0, 1/4)$ は中心 0, 半径 $1/4$ の円盤である.

定理 11 (ケーベの歪曲定理 (Koebe's distortion theorem))
 $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ を全単射な等角写像とし, $r < 1$ を固定する. このとき任意の $z \in B(0, r)$ に対して,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \frac{|f'(z)|}{|f'(0)|} \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

定義 12 同程度連続 (equicontinuous)

$U \subset \mathbb{C}$ とし, 写像 $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ からなる写像の族 $\{f_n\}$ を考える. $\{f_n\}$ が U 上で同程度連続 (equicontinuous) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ と $x \in U$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x' \in B(x, \delta)$ に対して $|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon$ となることをいう. ただし, $B(x, \delta)$ は x の δ -近傍である.

2.2 ジュリア集合

複素力学系とは複素平面 $\mathbb{C}$ またはリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の (多項式または有理的) 力学系である. リーマン球面とは複素平面と無限遠点との和集合である. 即ち, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ である. R を写像とし, z_0 を周期 $n \in \mathbb{N}$ の周期点, 即ち, $R^n(z_0) = z_0$ としよう. この周期軌道に対して $\lambda = DR^n(z_0)$ とおき, λ をその周期点の乗数 (multiplier) と呼ぶ. ここで D は微分を表す. λ の値は連鎖律により z_0 の軌道上の全ての点で同じ値をとることに注意しよう. 周期点は λ の値によって次のように分類される.

1. $|\lambda| < 1$ ならば吸引的 (attracting). 特に, $|\lambda| = 0$ ならば超吸引的 (super attracting).
 2. $|\lambda| > 1$ ならば反発的 (repelling).
 3. $|\lambda| = 1$ のとき, 即ち $\theta \in \mathbb{R}$ として $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ と書けるならば中立的 (indifferent). θ は回転数 (rotation number) と呼ばれ, この場合 θ によって次の二つに分類することができる.
 - (a) $\theta \in \mathbb{Q}$ ならば有理的中立 (rationally indifferent).
 - (b) $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ならば無理的中立 (irrationally indifferent).
- より詳しくは Milnor[21] や Carleson&Gamelin[6] などを参照.
さてジュリア集合と充填ジュリア集合の定義を行おう.

定義 13 (ファトゥ集合とジュリア集合)

R をリーマン球面上の次数が $d \geq 2$ の有理関数とする. ファトゥ集合 (Fatou set) とは開近傍 $U(z)$ を持ちその上で写像の反復の族 $R^n|_{U(z)}$ が同程度連続となるような点の集合であり, $F(R)$ で表す. 集合 $J(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(R)$ はジュリア集合 (Julia set) と呼ばれる.

ジュリア集合は次のような性質をもつ.

1. $J(R)$ は R のもとで完全不変である.
2. 任意の $k > 0$ に対して, $J(R^k) = J(R)$.
3. R を次数が 2 以上の有理関数とする. このとき, $J(R) \neq \emptyset$.
4. もし $J(R)$ が内点を持つならば, $J(R) = \hat{\mathbb{C}}$.
5. $J(R)$ は R の反発的な周期点の集合の閉包である. 即ち,

$$J(R) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} \mid \text{周期 } n \text{ の反発的な周期点}\}}.$$

6. $z_0 \in J(R)$ とする. このとき,

$$J(R) = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{-k}(z_0)}.$$

7. R は $J(R)$ 上でカオス的である.

6 つ目の性質はコンピュータでジュリア集合を描くアルゴリズムを与える. 具体的にはジュリア集合上の任意の 1 点を取り, その点の二つの逆像をプロットし続けていけばジュリア集合が得られる. 詳しくは Appendix A を参照.

充填ジュリア集合は次のように定義される.

定義 14 (充填ジュリア集合)

P を次数が $d \geq 2$ の多項式とする. このとき, P の充填ジュリア集合 (filled Julia set) $K(P)$ は軌道が有界となるような点 $z \in \mathbb{C}$ の集合として定義される. 即ち,

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid \{P^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ が有界 } \}.$$

命題 15

ジュリア集合は充填ジュリア集合の境界, 即ち, $J(P) = \partial K(P)$ である.

さて, パラメータを $c \in \mathbb{C}$ とする次数 2 の多項式の族 $P_c(z) = z^2 + c$ とそのジュリア集合 $J_c = J(P_c)$ を考えよう. この族において最も単純なパラメータである $c = 0$ では, 原点と無限遠点が吸引的な点である. z_0 を単位開円盤 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の内部の点とし, その十分小さな近傍を U としよう. このとき $z \in U$ に対して $n \rightarrow \infty$ とすると $P^n(z) \rightarrow 0$ となる. 写像の反復の族が z_0 の十分小さい近傍で同程度連続となることをみるのは容易い. 同様の議論で $z_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{U}}$ の場合も, 反復の族は $P^n(z) \rightarrow \infty$ となり z_0 の近傍で同程度連続である. 一方, もし z_0 が単位円上にあるならば, z_0 のいかなる近傍においても反復の族は同程度連続にはなり得ない. このようにして単位円 $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| = 1\}$ は P_0 のジュリア集合であることがわかる. これは最も単純な例であるが, パラメータに依存して J_c は様々な幾何的形状をとる. それらの例を図 6 にあげた.

今まで見てきたようにジュリア集合と充填ジュリア集合は z -平面, 即ち系の相空間に存在する. 次に系のパラメータ空間である c -平面に着目し, マンデルブロ集合を定義する.

定義 16 (マンデルブロ集合)

$P_c(z) = z^2 + c$ とする. マンデルブロ集合 (Mandelbrot set) $\mathcal{M}$ は原点の軌道が有界であるようなパラメータ c の集合である. 即ち,

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ が有界 } \}.$$

マンデルブロ集合は大変複雑な幾何的構造を持っているが, 連結であることが知られている. しかし局所連結であるかどうかは知られていない. またその境界のハウスドルフ次元は 2 であることが示されている [27]. 驚くべきことに, マンデルブロ集合は原点の軌道の情報のみで定義されるパラメータ空間上の集合であるにも関わらず, ジュリア集合の幾何的構造を決定する. もし $c \in \mathcal{M}$ ならば J_c は連結であり, もし $c \notin \mathcal{M}$ ならば J_c は連結ではなく, カントール集合 (Cantor set) となる. 後者の場合, J_c 上の力学 $P_c : J_c \rightarrow J_c$ は 2 記号の片側シフト空間上のシフト写像と位相共役である.

2.3 ジュリア集合の分類

有理写像 $R(z)$ を考え, z_0 を周期 n の周期点としよう. 即ち, $z_0 = R^n(z_0)$ である. もし $|\lambda| < 1$ ならば, 周期軌道は吸引的であり,

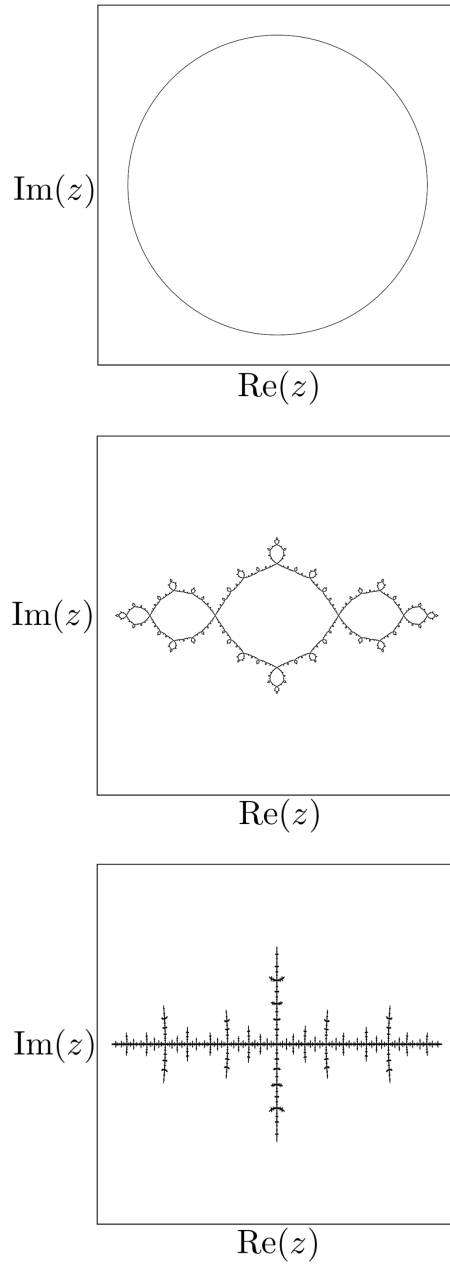


図 6: $P_c(z) = z^2 + c$ のジュリア集合 J_c . $c = 0$ (上), $c = -1$ (中央), $c = -1.543689$ (下). $c = 0$ のとき原点と無限遠点が吸引的な点となり, 原点と無限遠点のベイシンの境界である単位円がジュリア集合となる.

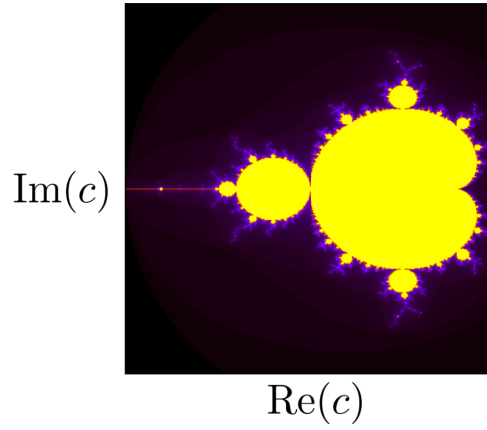


図 7: マンデルブロ集合 $\mathcal{M}$.

$|\lambda| > 1$ ならば反発的である. どちらの場合にも次のように写像は周期点の近くで局所線形化可能 (locally linearizable) である.

定義 17 (局所線形化方程式)

有理写像 R の局所線形化方程式とは次を満たす方程式である.

$$\phi(R^n(z)) = \lambda \cdot \phi(z), \quad (1)$$

ただし ϕ は z_0 の小さな近傍から原点回りの円盤への等角写像である.

有理写像 $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ はもし R の全ての臨界点の軌道が周期的であるか, または (超) 吸引的なサイクルに収束するときに双曲的 (hyperbolic) であるという.

命題 18 (Fatou-穴倉の不等式)

次数 d の多項式に対して, $\mathbb{C}$ における非反発的な周期軌道の個数 n は, $n \leq d - 1$ である.

Fatou-穴倉の不等式により, 二次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ は複素平面の中に高々一つのみ非反発的なサイクルを持つ. また別の重要な事実として, 有理写像の吸引的もしくは放物的なサイクルのベシンは写像の臨界点を含まなければならないということが知られている. 以上より, 二次多項式で表される複素力学系を唯一の非反発的なサイクルの乗数 λ により分類することができる.

1. もし非反発的なサイクルが存在しないならば, 定義により写像は双曲的である. また $|\lambda| < 1$ のとき, そのようなサイクルは吸引的であり, 臨界点はこのサイクル上に存在するかサイクルに収束する. いずれの場合も対応するジュリア集合, パラメータは双曲的である.
2. $|\lambda| = 1$ のとき, 即ち $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) と書けるととき, 回転数 θ に応じて二つの場合に分けられる: 唯一の非反発的なサイクルは放物的であるか, または無理的中立である.
 - (a) もしそれが放物的, 即ち回転数が有理数であるならば, R^n は局所線形化可能ではない.
 - (b) もしそれが無理的中立, 即ち回転数が無理数ならば, サイクルは二つの可能性, ジーゲル点 (Siegel point) を持つ場合とクレーマー点 (Cremer point) を持つ場合に分類される. 前者の場合, R^n は局所線形化可能であるが, 後者の場合 R^n は局所線形化可能ではない.

ジーゲル点をもつ場合, 局所線形化方程式が成り立ち, 力学はサイクルの近傍で, 無理数回転となる.

定義 19 (ジーゲル円盤)

写像 R に対して, 周期点周りの力学が無理数回転となる近傍で最大のものはジーゲル円盤 (Siegel disk) と呼ばれる.

放物的なサイクルをもつ写像のジュリア集合を放物的ジュリア集合と呼ぶ. 後に, 上述の各ジュリア集合は実数計算の意味で別の複雑さのクラスに属するというところを見る.

以降, ジーゲル円盤をもつジュリア集合を生成する多項式として $P_\theta(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta}z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を考えることがしばしばある. P_θ は原点が不動点であり, その乗数は $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ である. この多項式は座標変換によって $P_c = z^2 + c$ と同一視できる. P_θ のジーゲル円盤を Δ_θ で表す.

実数 $\theta \in [0, 1)$ に対して,

$$\theta = [r_1, r_2, \dots, r_n, \dots] := \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{r_n + \dots}}}}, \quad (2)$$

によって任意に長い有限連分数展開を表す. この連分数展開を n 番目で打ち切った $p_n/q_n = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ は近似分数 (convergent) と

呼ばれる. このときブリュノ関数 (Brjuno function) $B(\theta)$ を

$$B(\theta) = \sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} \quad (3)$$

で定義する. ジーゲル円盤の発生と回転数 θ の間には次のような関係がある.

定理 20

R を解析的な写像とし, z_0 を周期 n の周期点としよう. もしこのサイクルの乗数が $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ と書けて, ブリュノ関数が

$$B(\theta) < \infty \quad (4)$$

を満たすならば, R は z_0 の回りで局所線形化可能であり, ジーゲル円盤をもつ.

この逆は写像が $P_\theta(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta}z$ の場合に示される.

定理 21

$\theta \in [0, 1)$ として, 二次多項式 P_θ が原点周りにジーゲル円盤をもつとする. このとき, $B(\theta) < \infty$ が成り立つ.

$B(\theta) < \infty$ を満たす無理数 θ をブリュノ数 (Brjuno number) と呼ぶ. 全てのディオファントス数はこの条件を満たす. 詳しくは Appendix B を参照のこと.

さて, 等角半径 [29] という概念でジーゲル円盤の大きさを特徴づけることができる.

定義 22 (等角半径)

$W \in \mathbb{C}$ を単連結領域で $w \in W$ を任意の点とする. $\phi_{(W,w)}(0) = w$ を満たし, $\phi'_{(W,w)}(0) > 0$ となる唯一の等角同型写像を考える. このとき, 考えている領域 (W, w) の等角半径 (conformal radius) は

$$r(W, w) = \phi'_{(W,w)}(0) \quad (5)$$

である.

唯一の写像 ϕ はリーマンの写像定理から存在が保証されていることに注意しよう. さて $P_\theta(z)$ が内部に 0 を含むジーゲル円盤 Δ_θ をもつとき, Δ_θ の等角半径は

$$r(\theta) = r(\Delta_\theta, 0) \quad (6)$$

で定義される. もし θ がジーゲル円盤を生み出さないならば, $r(\theta) = 0$ とする.

2.4 実一次元力学系と複素力学系

この章では今まで見てきた実一次元力学系と複素力学系との架け橋となる事実を紹介する. 実一次元写像 $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha$ ($\alpha \in [-2, 1/2]$) を考えよう. この写像の分岐図は, 写像 $f_\alpha(x)$ のそれをちょうど 180 度回転させたような形状をとる. この分岐図とマンデルブロ集合とを並べて描いたものが図 8 に与えられている. いずれも実軸が $[-2, 1]$ の範囲で描かれている. f_α の不動点が周期 2 の周期点へと変わる分岐点から破線が下に, マンデルブロ集合のくびれまで伸びている. 実はこのくびれの部分こそ, 写像 $f_c(z)$ の吸引的不動点が周期 2 の吸引的周期点へと変化する境界なのである. 同様に周期 2 から周期 4 への分岐点, さらに周期 3 の窓にも対応関係が成り立つ.

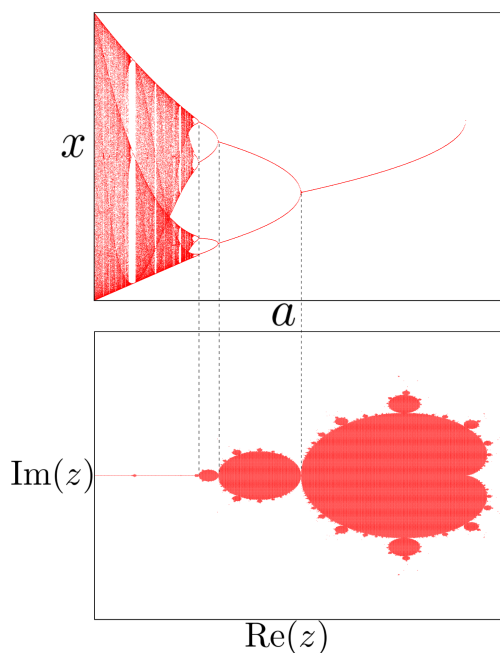


図 8: $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha$ ($\alpha \in [-2, 1/2]$) の分岐図とマンデルブロ集合. 中央の破線で示されている部分は吸引的な不動点が周期 2 の周期点に変わる分岐点である. このような対応は他の周期点や 3 周期窓に対しても成り立つ.

マンデルブロ集合が含むパラメータに対応するジュリア集合が図 9 に図示されている.

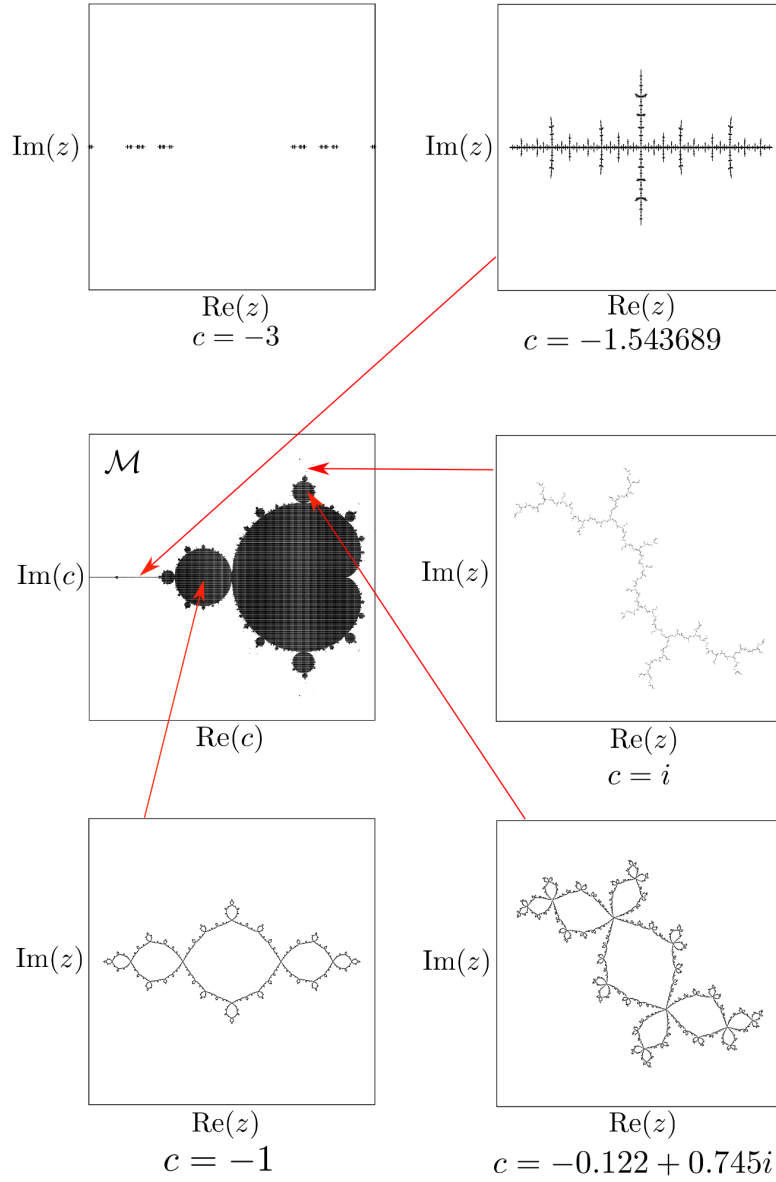


図 9: マンデルブロ集合とジュリア集合の対応. 各パラメータ c の値に対応するジュリア集合は内部をもつもの, デンドライト ($\mathbb{C}$ 内の領域を囲まない樹状構造), そしてカントール集合の 3 種類に分類される.

3 計算可能性と計算複雑性

カオスとフラクタルは計算可能性の視点からも研究されてきた [10][22][2][3]. これらの研究では単純な非線形方程式に由来する複雑性に焦点が当てられた. 例えばカオスアトラクタの予測不可能性やフラクタルベシンの最終状態鋭敏性が, 計算可能性と計算複雑性の見地から議論されている.

この章では実数と実関数の計算可能性及び計算複雑性の定義を行った後に Braverman と Yampolsky により導入された実集合の計算可能性理論の結果をまとめる [4].

3.1 計算可能性

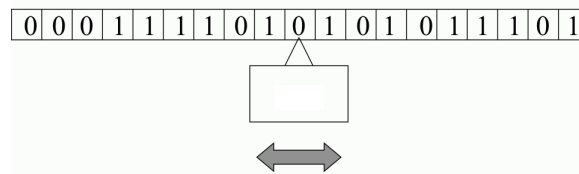


図 10: Turing 機械

Turing の計算可能性はチューリング機械 (Turing machine) というモデルにより定義される. チューリング機械とは有限内部状態と外部テープの記号を読み書きするヘッドで構成されるオートマトンである. テープの長さに制限はないが, アルファベットの数は有限である. 内部状態とヘッドで読み取った記号に依存して機械の行動を定める状態遷移表が与えられる. この状態遷移表により機械はテープ上の記号を読み書きすることができる. 記号の処理の後, 機械はテープ上を左もしくは右に移動し, その内部状態を変化させる. 機械は停止状態 (halting state) と呼ばれる特別な内部状態をもつ. 機械の内部状態が停止状態に到達すると停止し, テープ上の記号を出力する (図 10). チューリング機械はある入力に対して必ずしも停止するとは限らないことに注意しよう. このオートマトンにより, 次のように計算可能性が定義される.

定義 23 計算可能性

チューリング機械 M が存在して, M が x を入力として受け取り $M(x)$ で表される $f(x)$ の値を出力するならば, 関数 $f(x)$ は計算可能である.

その単純さに関わらず、チューリング機械は様々な関数を計算することができる。構成的な物理モデルであるにも関わらず、チューリングの計算可能性は、より数学的に定義された計算の概念、例えば Alonzo Church [8] により導入された λ 定義可能性と一致する。この事実は “Church-Turing thesis” と呼ばれる。

定義により可算個の Turing 機械しか存在しない一方で、 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数は非可算個であるから、ほとんどの関数は計算不可能である。計算不可能な関数の典型的な例は、以下の停止問題である。

定義 24 停止問題 (halting problem)

問題『Turing 機械 M と入力 x が与えられたとき、 $M(x)$ は有限時間で停止するかどうか決定せよ』。

以下に停止問題が計算不可能であることの証明を与える。

証明

$H(M, x)$ を、 $M(x)$ が有限時間で停止するならば 1 を出力し、そうでなければ 0 を出力する関数とする。停止問題を計算するチューリング機械を M とし、文字列 x に対して M はもし $H(x, x) = 0$ ならば停止し、 $H(x, x) = 1$ ならば停止しないと仮定しよう。さて、 $M(M)$ を考えよう。もし $M(M)$ が停止したとすると、 M の定義から $H(M, M) = 0$ である。しかし、 H の定義から、 $H(M, M) = 0$ となるのは $M(M)$ が停止しないときである。これは矛盾である。 $M(M)$ が停止しないと仮定しても同様に矛盾が導かれる。よって停止問題を計算するチューリング機械は存在しないので、停止問題は計算可能ではない。□

チューリング機械の中に、万能チューリング機械 (universal Turing machine) と呼ばれる、他の全てのチューリング機械を模倣することができる特別なチューリング機械が存在する。チューリング機械 M と入力 x がどちらもテープ上に記述されており、それを入力として受け取る万能チューリング機械を U としよう。そのとき、 U は $U(M, x) = M(x)$ を出力する。 U を使うことによって停止問題は次の形式で記述することができる。

定義 25 (停止問題)

問題『万能チューリング機械 U と入力 w が与えられたとき、 $U(w)$ は有限時間で停止するかどうかを決定せよ。ただし、 w は M と x のエンコードである』。

3.2 計算可能な実数

計算可能な実数の定義もまた Turing によって与えられた [28]。

定義 26 (計算可能な実数)

実数 α は, もし計算可能な関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ が存在して, 全ての自然数 n に対して

$$|\alpha - f(n)| < 2^{-n} \quad (7)$$

であるならば, 計算可能であるという.

簡潔に言うと, ある実数は, もしそれが計算可能な有理数の列の極限で与えられるならば計算可能である. 全ての代数的実数は計算可能である. 一方で, 計算可能な超越の実数も存在する. 計算可能な実数は高々可算個であり, ほとんどの実数は計算不可能であることが知られている.

例 27 (計算可能な実数)

$e, \pi, \sqrt{2}$ などは計算可能である. なぜなら, 級数展開が存在するからである. 例えば π の場合,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots \quad (8)$$

計算可能な数の集合を $\mathbb{R}_C$ で表す. 後の議論で有用な実数の計算可能性の定義を次に与える.

定義 28 (右計算可能な実数)

実数 α はもし計算可能な関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ が存在して列 $\{f(n)\}$ が

(i) $f(1) \geq f(2) \geq \dots f(n) \geq \dots$ と

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \alpha$

を満たすならば, 右計算可能 (right-computable) であるという.

左計算可能な実数もまた同様に, (i) の条件を下からの収束に置き換えて定義される. 計算可能な実数は右計算可能でありかつ左計算可能であり, この逆も成り立つ. 一方, 右計算可能であるが計算可能ではない実数が存在する. 右計算可能な実数は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_C$ において稠密な部分集合を成す.

計算不可能な実数の例としてはチャイティン数 (Chaitin number) Ω を次のように定義することができる.

定義 29 (チャイティン数)

M を Turing 機械, w を入力とすると, チャイティン数は

$$\Omega = \sum_{M(w) \text{ は停止する}} 2^{-(|M|+|w|)} \quad (9)$$

で与えられる. ただし, $|\cdot|$ はコードの長さを表す.

チャイティン数は全ての可能な入力記号列 w のもとでの全ての可能な機械 M の数に対する、停止するチューリング機械の数の比である。

Moore によって与えられた一般化シフト (generalized shift)[22] は非線形物理における計算理論の応用例である。万能チューリング機械を含む 2 次元の区分線形写像 U が存在する。有限の複雑さをもつ境界とエスケープホールをもった 3 次元古典ビリヤード系で、Poincaré 写像として U を含むものを構成できる。このとき、このビリヤード系のエスケープレート (escape rate) はチャイティン数と一致し、計算不可能となる。

3.3 計算可能な実関数

計算可能な関数の定義は M. Pour-El によって計算可能解析 (computable analysis) の文脈で与えられた [24]。

定義 30 (計算可能な実関数)

a_i と b_i を計算可能な実数として、 $I^q = \{a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq q\} \subseteq \mathbb{R}^q$ を計算可能な区間としよう。実関数 $f: I^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ は (i)(ii) を満たすとき計算可能であるという。

(i) f が列的に計算可能である。即ち、 f は全ての計算可能な点 $x_k \in I^q$ の列を計算可能な実数 $\{f(x_k)\}$ の列に写す。

(ii) f は実効的 (effectively) に一様に連続である。即ち、計算可能な関数 $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が存在して全ての $x, y \in I^q$ と全ての N に対して

$$|x - y| \leq \frac{1}{d(N)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-N} \quad (10)$$

$|\cdot|$ はユークリッドノルムを表す。

L^p -計算可能性は定義 27 で与えられた実関数の計算可能性の定義の自然な一般化であり、次のように定義される。

定義 31 (L^p -計算可能性)

関数 $f \in L^p[a, b]$ はもし、定義 27 の意味で計算可能な連続関数の列 $\{g_k\}$ が存在して L^p -ノルム $\|g_k - f\|_p$ が $k \rightarrow \infty$ のとき実効的に零に収束するならば L^p -計算可能である。

簡潔にいうと、実関数は計算可能な関数の級数展開によって近似された補間法が存在するならば、計算可能である。ほとんどの実関数は計算不可能であることが知られている。

例 32 (計算可能な関数)

初等関数, e^x , $\sin(x)$, $\log(x)$ は構成的な級数展開が存在するので計算可能である. 例えば,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \quad (11)$$

計算可能な境界条件をもった計算可能な実関数で表現される PDE の解は, 計算不可能になりうることが知られている. 例えば以下の線形熱方程式の解は計算可能とは限らない.

例 33 (計算不可能な解をもつ PDE)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \nabla^2 u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (f(x) \text{ は計算可能}), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

この例は, 関数空間における非有界な線形作用素は, 入力の実関数を計算不可能なものに変換することがあることを示している [24].

3.4 計算複雑性

チューリング機械に基づいた多項式時間計算可能性を考えることもできる. 文字列に対して, その文字列がある集合に属するかどうかを決定することを問題 (problem) と呼ぶ. また, 似た文脈で言語 (language) という言葉が使われることもあるが, これらは同義である. さて, ある問題が多項式時間内で解けるか, または指数的時間が必要となるかは実際の計算における大きな関心事であろう. ここでは問題に対する計算の複雑性の定義とその分類を紹介していく [18].

定義 34 (時間計算量)

入力 w を伴ったチューリング機械 M を $M(w)$ とする. $M(w)$ の計算時間 (running time) とは, $M(w)$ が停止するまでに要するステップ数である. また, チューリング機械 M の時間計算量 (time complexity) とは,

$$T_M(n) = \max_{|w|=n} \{M(w) \text{ の計算時間} \} \quad (13)$$

で与えられる関数 $T_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ である. ただし, $|w|$ は w の長さである.

時間複雑性は計算のステップ数に基づいて定義される。例えば空間複雑性という、計算に必要なメモリの大きさに基いた計算複雑性を定義することも可能である。

定義 35 (多項式時間計算可能性)

L を言語クラス, $w \in L$ を長さ n の単語, p を多項式とする。関数 $f : L \rightarrow \{0, 1\}$ は, 全ての n に対して $T_M(n) \leq p(n)$ であるような f を計算するチューリング機械 M が存在するとき, 多項式時間計算可能であるという。

計算複雑性理論において中心的役割を担う問題のクラスが $\mathcal{P}$ と $\mathcal{NP}$ である。まず決定性チューリング機械と非決定性チューリング機械を定義する。決定性チューリング機械とは, 状態遷移表により機械が次を取るべき行動がただ一つ定められているチューリング機械を指す。非決定性チューリング機械とは, 状態遷移表により機械が次を取るべき行動を複数定めることのできるチューリング機械を指す。

定義 36 (クラス $\mathcal{P}$, クラス $\mathcal{NP}$)

与えられた問題 L がクラス $\mathcal{P}$ に属するとは, L が決定性チューリング機械によって多項式時間内に解けることをいう。また, 問題 L がクラス $\mathcal{NP}$ に属するとは, L が非決定性チューリング機械によって多項式時間内に解けることをいう。

時間計算量の下界を証明することは, よく知られた “ $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ” 問題を含むため難しい [9]。そのような “手に負えない” 問題の典型例は SAT である。

定義 37 (SAT) 問題『ブール式が与えられたとき, それが充足可能かどうか判定せよ』。

SAT は NP-完全な問題であり, それは解を『多項式時間でチェックすることは可能』であるような言語クラスに属することを意味する (ただし, 求解は指数時間計算量をもつ可能性がある)。多くの研究者は $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ が成立すると考えている。

3.5 実集合の計算可能性

この節では, Braverman と Yampolsky による実集合の計算可能性を定義する [4]。まず, Ko が提案した計算可能な実数と実関数の枠組み [19] を紹介する。 $\mathbb{D}$ を

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{2^l}; k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \right\} \quad (14)$$

で与えられる2進数としよう. ここで, 1ステップで精度 n 桁の実数を近似するオラクルを定義する.

定義 38 (オラクル)

関数 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ は, 全ての $m \in \mathbb{N}$ に対して $|\phi(m) - x| < 2^{-m}$ を満たすならば, $x \in \mathbb{R}$ に対するオラクル (oracle) であるという.

オラクルは, 入力された実数 x を, たとえそれが計算不可能な実数であったとしても, 一瞬で有理数で近似しその値を返すことができる, 仮想的な外部装置である. よってオラクルはアルゴリズムとして記述することはできない. 実数 x に対するオラクル付きのチューリング機械を $M^{\phi(x)}$ で表す. $M^{\phi(x)}(n)$ と書くとき, n は x の近似の精度を表す. オラクルの概念は実関数 f の計算可能性を考える問題から入力値 x の計算可能性の問題を切り離すために有用である. 以降は特に断らない限り, このオラクル付きのチューリング機械 M^{ϕ} で議論を進める.

定義 39 (関数の計算可能性)

$S \subset \mathbb{R}$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ とする. このとき, オラクル付きのチューリング機械 $M^{\phi}(n)$ が存在して次が成り立つならば f は計算可能であるという. もし ϕ が $x \in S$ のオラクルであるならばそのとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $M^{\phi(x)}(n)$ が $q \in \mathbb{D}$ を返し, $|q - f(x)| < 2^{-n}$ となる.

定理 40

$S \subset \mathbb{R}$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ とし, f はオラクル付きのチューリング機械で計算可能としよう. このとき, f は S 上で連続である.

この枠組では計算可能な関数は連続でなければならないので,

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S) \\ 0 & (x \notin S) \end{cases}, \quad (15)$$

で与えられる $S \subset \mathbb{R}^k$ の特性関数は $S = \emptyset$ または $\mathbb{R}^k$ そのものでない限り S 上で計算可能ではない (図 11).

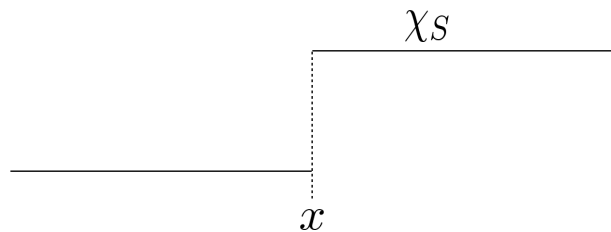


図 11: 点 x で不連続な特性関数.

不連続点の近似の仕方によって関数の値に差異が生じるため、 $\chi(x)$ は計算不可能な関数となる。

さて、次のような実集合の計算可能性の定義を与える。

定義 41 (実集合の計算可能性 (regular computability))
 集合 $K \subset \mathbb{R}^k$ はもし族

$$f_K(d, r) = \begin{cases} 1 & \text{if } B(d, r) \cap K \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } B(d, 2r) \cap K = \emptyset \\ 0 \text{ or } 1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (16)$$

からなる関数 $f_K(d, r)$ を計算するオラクル付きのチューリング機械 M が存在するならば計算可能である。ただし、 $B(d, r)$ は中心 $d \in \mathbb{D}$, 半径 $r \in \mathbb{D}$ の球である。

実集合 K の計算可能性の模式図が図 12 に与えられている。

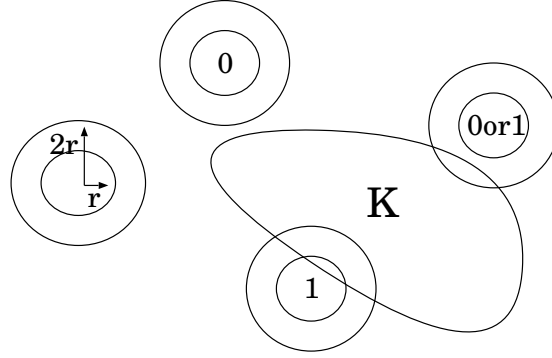


図 12: 実集合の計算可能性. 半径は $r = 2^{-n}$.

定義 42 (実集合の弱計算可能性 (weak computability))
 集合 $K \subset \mathbb{R}^k$ はもしオラクル付きのチューリング機械 $M^\phi(n)$ が存在して、 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$ が $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ を表すならば、 $M^\phi(n)$ の出力が

$$\begin{cases} 1 & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } B(x, 2^{-(n-1)}) \cap K = \emptyset \\ 0 \text{ or } 1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (17)$$

となるとき、弱計算可能であるという。

弱計算可能性の模式図が図 13 に与えられている。

$M^\phi(n)$ の値はピクセルの中心が K に含まれない限り 1 ではない。よって計算においてはこの定義の方が簡単であるといえる。もう一つの違いは、弱計算可能の場合ボールの中心点を実数で考えられる点である。これらの定義はお互いに異なるが、それらは計算可能性については同じ結果を生み出す。即ち、実集合 K が計算可能であれば弱計算可能であり、またその逆も成り立つ。

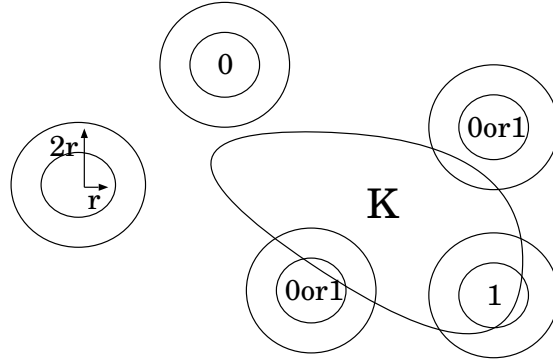


図 13: 実集合の弱計算可能性. 半径は $r = 2^{-n}$.

ジュリア集合の計算可能性を調べるために、実集合の計算可能性の定義を集合値関数 (set-valued function) に拡張する。これはコンピュータスクリーン上の丸いピクセルを使うことによる実集合 K の“描画可能性 (drawability)”の概念化になっている。

定義 43 (集合値関数の計算可能性)

$S \subset \mathbb{R}^k$ とし, $F : S \rightarrow K_2^*$ を S の点を $K_2^*(\mathbb{R}^2)$ のコンパクト部分集合の集合) へ写す写像とする。このとき、もし点 $x = (x_1, \dots, x_k) \in S$ を表すオラクル $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$ に対して族

$$f^\phi(d, r) = \begin{cases} 1 & \text{if } B(d, r) \cap F(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } B(d, 2r) \cap F(x) = \emptyset \\ 0 \text{ or } 1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (18)$$

からなる関数 $f^\phi : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D} \rightarrow \{0, 1\}$ を計算するオラクル付きのチューリング機械 $M^\phi(n)$ が存在するならば、 F は S 上で計算可能であるという。

例えば、パラメータ $c \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ をジュリア集合 $J_c \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ へ移す写像に上の定義が適用できる。

実集合の時間計算量も次のように定義できる。

定義 44 (集合値関数の時間計算量)

時間計算量 $T_{M^\phi}(n)$ は $r = 2^{-n}$, $d \in (\mathbb{Z}/2^{2n})$ として $f^\phi(d, r)$ を計算するのにかかる最も長い計算時間である.

実集合の計算複雑性について, 計算可能性の定義と弱計算可能性の定義はそれぞれ違う結果を与える.

本論文では描画可能性に基づいた計算可能性の定義 41 を用いてジュリア集合の計算可能性を議論していくが, その前に実集合の計算可能性 (定義 41) と等価な計算可能性の概念を紹介しよう.

定義 45 (ハウスドルフ距離)

コンパクトな二つの集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^k$ のハウスドルフ距離 (Hausdorff metric) は

$$d_H(X, Y) = \inf\{\epsilon > 0 | X \subset B(Y, \epsilon) \text{ かつ } Y \subset B(X, \epsilon)\} \quad (19)$$

で与えられる. ただし, $B(X, \epsilon)$ は X の ϵ -開近傍を表す.

ハウスドルフ距離の図式的説明が図 14 に与えられている. ハウスドルフ距離は二つの集合が図形としてどれだけ近いかを表す指標である.

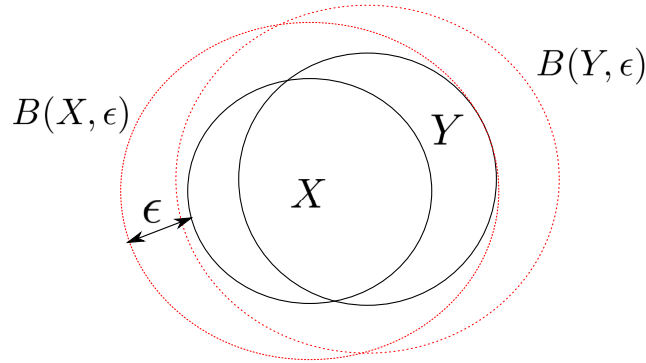


図 14: 集合 X と Y のハウスドルフ距離. この図の場合 X の近傍に合わせて ϵ の値が決められる.

中心と半径が $\mathbb{D}$ に属する数で表されるボールの有限個の集まりによって表現される集合の族を

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i=1}^m \overline{B(d_i, r_i)} \mid d_i \in \mathbb{D}^k, r_i \in \mathbb{D} \right\} \quad (20)$$

で表すこととしよう.

定義 46 (ハウスドルフ距離による実集合の計算可能性)

集合 $K \subset \mathbb{R}^k$ は, 入力 n に対して $d_H(K, \mathcal{A}_n) < 2^{-n}$ を満たす集合 $\mathcal{A}_n \in \mathcal{C}$ を出力するオラクル付きのチューリング機械が存在するとき, 計算可能であるという.

定義 41 の意味での計算可能性とこのハウスドルフ距離を用いた計算可能性は等価である.

4 ジュリア集合の計算可能性と複雑性

ここでは実集合の計算可能性の定義を用いて様々なジュリア集合の計算可能性と計算複雑性を分析する [4].

4.1 双曲ジュリア集合の計算可能性

定理 47 (双曲ジュリア集合の計算可能性)

$d \geq 2$ とする. 次数 d の全ての双曲的な有理写像 R のジュリア集合を計算するチューリング機械 M^ϕ が存在する. このジュリア集合は多項式時間計算可能である.

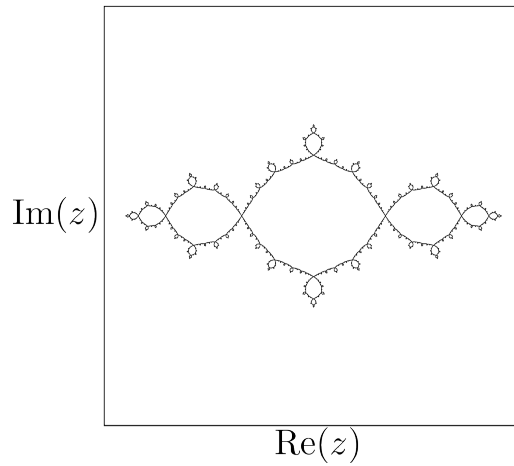


図 15: 双曲的ジュリア集合の例. 多項式は $P(z) = z^2 - 1$. 原点は周期 2 の周期点である.

証明の概略

臨界点の軌道と吸的な周期点を含まない集合 U をとる. U は $U \subsetneq$

$R(U)$ を満たし $J(R)$ を真に含むと仮定しよう. $R^{-m}(U)$ を近似したものを $U_m \in \mathcal{C}$ とし, U に含まれる周期が高々 m の周期点 (これらは U の構成から全て反発的である) を近似した集合を $L_m \in \mathcal{C}$ とおく. もし U_m が L_m の 2^{-n} -近傍に含まれるならば L_m はジュリア集合を近似したものと判定して, $J_n = L_m$ を出力する. そうでないなら m の値をインクリメントして同様の計算を行う.

ジュリア集合を近似する上のアルゴリズムを使って多項式時間でジュリア集合を計算するアルゴリズムは以下ようになる. U から臨界点の軌道までの距離の下界 $s > 0$ を計算できるので

$$d_H(L, J(R)) < s/8 \quad (21)$$

を満たす集合 $L \in \mathcal{C}$ が得られる. U をさらに逆写像で写し, $R^2(W) \subset U$ かつ点 $z \in W \cup R(W)$ に対して $d(z, L) < s/4$ となるような集合を W とおき, 点 $z \notin W$ に対して

$$d(z, J(R)) > l \quad (22)$$

となる数 $l > 0$ を計算しよう. さらに $B(W, \epsilon) \subset U$ となる $\epsilon \in \mathbb{D}$ も計算する.

ここで, 写像 R が双曲的ならば $J(R)$ の近傍で定義される滑らかな計量 μ と定数 $\lambda > 0$ が存在して全ての $z \in J(R)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|DR^n(z)\|_\mu > \lambda^n \quad (23)$$

が成り立つ. 今 $J(R)$ はコンパクトなので, 球面計量 (spherical metric) において n に依らない定数 $C > 0$ が存在して $z \in R(W)$ である限り

$$\|DR^n(z)\| > C\lambda^n \quad (24)$$

となる.

さて, 任意の点 $x \in \mathbb{D}$ から $J(R)$ までの距離を精度に関するパラメータを m として見積もろう. 以下は i に関するプログラムである. $i = 0$ から始める.

DO{

- (1). $p_i \approx R^i(x)$ と $d_i \approx DR^i(x)$ の値を計算する.
- (2). $p_i \in W$ と $p_i \in R(W)$ をチェックする.
 - もし $p_i \in W$ ならばステップ (4) へ.
 - もし $p_i \notin R(W)$ ならばステップ (3) へ.
 - それ以外の場合はどちらを選択してもよい.
- (3). 不等式

$$l/d_i > 2^{-m}$$

をチェックする. もしそうなら 0 を出力してループを抜ける.

(4). そうでなければ 1 を出力してループを抜ける.

(5). i の値をインクリメントする.

} WHILE($i \leq m/\log \lambda - \log C/\log \lambda + 1$)

(6). 1 を出力して終了する.

このプログラムの妥当性を示そう. もしプログラムがステップ (3) へ到達して終了したならば, これは $B(p_i, l) \cap J(R) = \emptyset$ を意味する. W の構成により臨界点はその逆像から除外されているので, $N_0 = R^{-i}(B(p_i, l))$ が定義できて $N_0 \cap J(R) = \emptyset$ が成り立つ (図 16). ケーベの $1/4$ 定理 (Koebe's one-quater theorem) を使うと

$$d(x, J(R)) \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{DR^i(x)} \geq 2^{-(m+3)} \quad (25)$$

と評価できる.

一方, プログラムがステップ (4) へ到達して終了した場合, 二つのボール $B = B(p_i, s/2)$ と $\hat{B} = B(p_i, 3s/4)$ を考えよう. $B \cap J(R) \neq \emptyset$ であり, 先程と同様に構成から臨界点を含まないなのでこのボールの R^{-i} による枝が定義される. その像を B' とおくと, $B' \cap J(R) \neq \emptyset$ である (図 17). また, $R^{-i}(\hat{B})$ も臨界点を含まないので, それを $\hat{B}'$ としよう.

$$M(r) = \frac{1+r}{(1+r)^3} \quad (26)$$

とおく. B と B' の半径の比は $2/3$ なのでケーベの歪曲定理 (Koebe's distortion theorem) を使うと

$$B' \subset B(x, h) \text{ ただし } h = \frac{s}{2DR^i(x)} \cdot M(2/3) \quad (27)$$

となり, 先程の評価と合わせると

$$d(x, J(R)) < K \cdot 2^{-(m+3)} \text{ ただし } K = \frac{8sM(2/3)}{l} \quad (28)$$

と評価できる.

最後にプログラムのステップ (6) まで到達したときを考えると, これは $x \in R^{-(i-1)}(W)$ のケースであり,

$$d(R^{-(i-1)}, J(R)) < C^{-1} \lambda^{-m/\log \lambda + \log C/\log \lambda} = 2^{-m} \quad (29)$$

が成り立つ.

このプログラムの計算時間は

$$T_M(m) \leq O(m^2 \log m \log \log m) \quad (30)$$

であり, これは m の多項式オーダーである. あとは各ピクセルのサイズを $1/K$ にすることで定義通りに描画することができる. $\square$

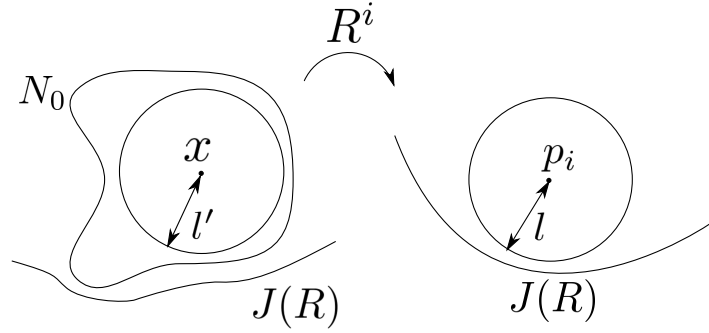


図 16: プログラムがステップ (3) に到達して終了したときの模式図.

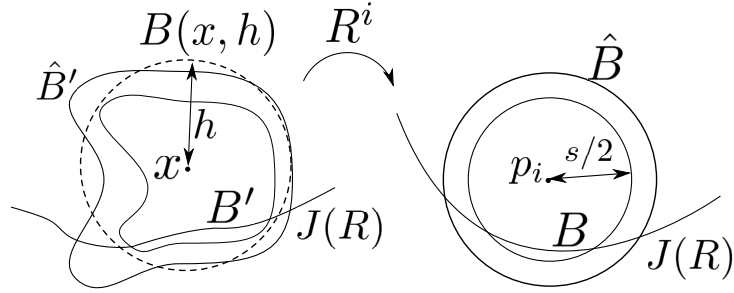


図 17: プログラムがステップ (4) に到達して終了したときの模式図.

双曲性は $DR^i(x)$ の値の上限と下限を得るために活かされる. これによりケーベの定理を使って点 x から $J(R)$ までの距離を見積もることができる. このアルゴリズムは `distance estimator`[21] として知られている. 詳細は Appendix A を参照のこと.

$d = 2$ のとき, 定理 5.1 と, 双曲的なパラメータはマンデルブロ集合 $\mathcal{M}$ において稠密であるという双曲性予想から, $\mathcal{M}$ は計算可能であるということが導かれる [14][16].

4.2 放物ジュリア集合の計算可能性

定理 48 (放物ジュリア集合の計算可能性)

$d \geq 2$ とする. 全ての臨界軌道が吸引的または放物的な軌道に収束する, 次数 d の全ての有理写像 R のジュリア集合を計算するチューリング機械 M^ϕ が存在する. このジュリア集合は多項式時間計算可能である.

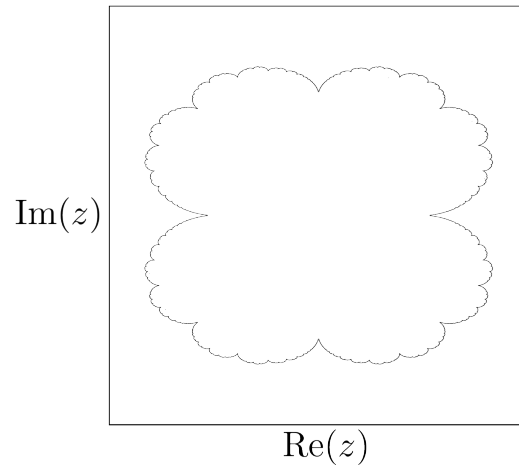


図 18: 放物的なジュリア集合の例. 多項式は $P(z) = z^2 + z$. 放物的な不動点は原点であり, それはジュリア集合上に存在している.

放物的な周期点 z_0 をもつ写像の場合, z_0 の近くでは点の運動は中立に近いので距離評価のアルゴリズムをそのまま適用すると長い計算時間が必要となる.

この問題を解決するために, 写像に繰り込み (renormalization) の手法を用いる. 繰り込みにより, 写像の反復計算を大幅に短縮することができ, 実際, それは多項式時間計算可能であることが示される.

証明

[4] の pp52 を参照. $\square$

4.3 充填ジュリア集合の計算可能性

定理 49 (充填ジュリア集合の計算可能性)

全ての多項式 P の充填ジュリア集合を計算するチューリング機械が存在する. 充填ジュリア集合は多項式時間内計算可能である.

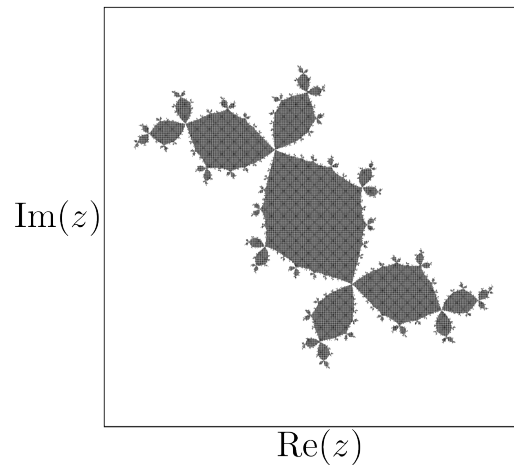


図 19: $P(z) = z^2 - 0.122 + 0.745i$ の充填ジュリア集合. このジュリア集合は “Douady’ の兎” と呼ばれる.

証明

[4] の pp66 を参照. $\square$

4.4 ジーゲル円盤をもつジュリア集合の計算可能性

この節ではジーゲル円盤をもつジュリア集合の計算可能性を議論する。まずは計算可能な場合を紹介しよう。

定理 50 (ジーゲル円盤をもつ計算可能なジュリア集合)

多項式 $P_\theta(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のジュリア集合は, もし $\theta \in \mathcal{D}(2)$ ならばチューリング機械 M^ϕ で計算可能である。ただし, $\mathcal{D}(2)$ は次数 2 のディオファントス数である (Appendix B 参照)。

クラス $\mathcal{D}(2)$ は有理数で近似しにくい無理数のクラスである。この性質をもつパラメータから生成されるジーゲル円盤をもつジュリア集合は計算可能である。

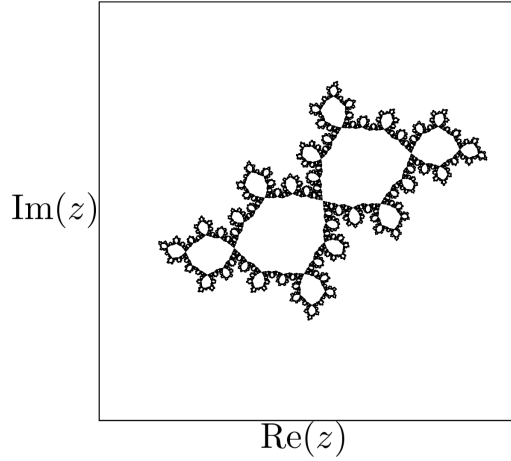


図 20: ジーゲル円盤を持ったジュリア集合の例。計算可能なものが上に描かれている。多項式は $P(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta}z$ で, $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (逆黄金比)。

定理 51 (計算不可能なジュリア集合)

ジュリア集合 J_θ が計算不可能となるような計算可能なパラメータ θ が存在する。

計算不可能なジュリア集合はジーゲル円盤を持たなければならず, かつそれは

$$\phi(R^n(z)) = \lambda \cdot \phi(z) \text{ (線形化可能)} \quad (31)$$

$$\lambda = e^{2\pi i\theta} (\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \theta \in (\cup_{k \geq 2} \mathcal{D}(k))^c \cap \mathcal{B}) \quad (32)$$

を満たす.

この結果は次の補題に基づいている.

補題 52

ジュリア集合 J_θ が計算可能なとき, かつそのときに限り等角半径 $r(\theta)$ は計算可能である.

補題 53

$r \in (0, r_{sup})$ としよう. ただし r_{sup} は全てのジーゲル円盤が取り得る等角半径の上界である. r が右計算可能なとき, かつそのときに限り, $r = r(\theta)$ はジュリア集合のジーゲル円盤の等角半径である.

⇐ 方向の証明の概略

与えられた右計算可能な数 $r = r(\theta)$ と r に収束する列 $\{r_n\}$ に対して, 次を満たす列 $\{\theta_n\}$ を構成しなければならない.

- (i) $\{\theta_n\}$ は θ に効率的に収束する, 即ち, $|\theta_n - \theta| < 2^{-n}$;
 - (ii) 列 $\{r(\theta_n)\}$ の振る舞いは列 $\{r_n\}$ と似ている, 即ち, $r(\theta_n) \approx r_n$;
 - (iii) $r(\theta) = r(\lim \theta_n) = \lim r(\theta_n) = \lim r_n = r$.
- 全ての n に対して, θ_n は

$$\theta_n = [I_n, 1, 1, \dots], \quad (33)$$

のような連分数展開の形式を持つと仮定しよう. ただし, I_n は先頭部分を表す. $r(\theta_{n-1}) \approx r_{n-1}$ を満たす $\theta_{n-1} = [I_{n-1}, 1, 1, \dots]$ を得たとき, 構成の次のステップは次の方法で行われる. 先頭部分 I_{n-1} が k 個の要素を持つとしよう. θ_{n-1} の連分数展開の位置 $m > k$ を選んで,

$$\theta_{n-1}^N = [I_{n-1}, 1, 1, \dots, 1, \underbrace{N}_{m\text{-th}}, 1, \dots] \quad (34)$$

と表そう. 番号 m は全ての N に対して

$$|\theta_{n-1}^N - \theta_{n-1}| < 2^{-n} \quad (35)$$

となるように選ばれる. N の値によって θ_{n-1}^N の性質は劇的に変わる. 例えば $N = 1$ のとき, $\theta_{n-1}^N = \theta_{n-1}$ で $r(\theta_{n-1}^N) = r(\theta_{n-1})$ となる. 一方, N が ∞ へ向かうとき, θ_{n-1}^N は有理数になって等角半径は消える. 徐々に N の値を増やしていくことで, $r(\theta_{n-1}^N)$ の値は徐々に減少していく. この方法を使うことで, $r(\theta_{n-1}^{N^*}) \approx r_n$ を満たす N^* の値を見つけることができる. このとき, $\theta_{n-1}^{N^*} = \theta_n$ とおく. $\square$

⇒ 方向の証明の概略

H_n を, P_θ の周期が n 以下の反発的な周期点の集合としよう. 任意の l に対して $B(H_{n_l}, 2^{-(l+1)})$ が連結となるような n_l が存在する. さて, ジュリア集合 J_θ は原点と無限遠点を分離するので, l が十分大

きければ $B(H_{n_l}, 2^{-(l+1)})$ についても同様のことが言える. よって, 狭義単調増加列 $\{n_l\}$ を計算することができ,

$$B(H_{n_l}, 2^{-(l+1)}) \subset U_l \subset B(H_{n_l}, 2^{-l}) \quad (36)$$

を満たし, $\mathbb{C} \setminus \overline{U_l}$ が原点を含む単連結領域をもつような集合 $U_l \in \mathcal{C}$ が得られる. そのような単連結領域を W_l としよう.

さて, 等角半径を計算するアルゴリズムを用いることで, $t_l = r(W_l, 0)$ の値を計算することができる. l の値を大きくしていけば W_l はジークル円盤 Δ_θ に近づくので, $t_l \rightarrow r(\theta)$ となることがわかる. 従って, $r(\theta)$ は右計算可能である. $\square$

さて, 補題 5.6 と 5.7 を用いて定理 5.5 を証明しよう.

定理 5.5 の証明

計算可能な数ではない, 右計算可能な数 $r^* \in (0, r_{sup})$ が存在することを思い出そう. 補題 53 により, ある計算可能な数 θ_* に対して $r^* = r(\theta_*)$ となる. 補題 52 によりジュリア集合 J_{θ_*} は θ_* にアクセスするオラクル付きチューリング機械によって計算不可能である. $\square$

計算不可能なジュリア集合の近似をコンピュータスクリーン上で見ることはできない.

4.5 ジュリア集合と充填ジュリア集合の計算可能性

ジーゲル円盤をもつジュリア集合は、他のジュリア集合と比べて計算理論的に複雑な構造をもち、ときに計算不可能になる。一方、充填ジュリア集合は、それがジーゲル円盤を含んでいても常に計算可能である。この事実の直感的な解釈を与えよう。

一般に、ジュリア集合にはその中心である周期点へ向かう多数のフィヨルド (切れ込み) が存在する。双曲的なジュリア集合に対して、フィヨルドは中心へは到達しない。放物的なジュリア集合に対してはフィヨルドはいつも中心へ到達する。一方、ジーゲル円盤を持ったジュリア集合ではフィヨルドは中心まで到達しないが、その深さはパラメータに依存して変化し、ときに中心の非常に近くまで到達する。これがジーゲル円盤を持つ場合における点の所属問題を困難なものにしている (図 21)。

もし充填ジュリア集合を考えるならば、それを描くのにフィヨルドは無視することができる。なぜなら、フィヨルドの有無はハウスドルフ距離に基づく幾何構造の近似になんら影響を与えないからである。しかし、その境界であるジュリア集合に対しては、フィヨルドの部分がハウスドルフ距離に大きく影響を与えるので、それらは無視することはできない。これが計算不可能なジュリア集合がジーゲル円盤をもったジュリア集合のクラスに属する理由である (図 22)。

ここではジュリア集合のトイモデルを与えて、その所属問題の計算不可能性を証明する。

たくさんのフィヨルドをもった単位円盤を考えよう。 θ 方向の幅 w をもった閉じたくさびを $W(\theta, w)$ で表す。このくさびは単位円盤を $1/2$ の深さで貫いている。ブール値をとる関数 $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ は述語と呼ばれることを思い出そう。この述語は入力 (x, y) を取り、 x をチューリング機械とその入力のエンコードである (M, w) として見る。もし x が (M, w) の妥当なエンコードで M が入力 w でちょうど y ステップで停止するならば、 $A(x, y) = 1$ とする。このとき A は $M(w)$ が y ステップで停止するかどうかを判定する述語となり、計算可能である。しかし、次の問題

$$B(x) = \exists y A(x, y) \quad (37)$$

は停止問題と同値であり、 B は計算可能ではない。

さて、計算可能な述語 $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ で述語 $B(x) = \exists y A(x, y)$ が計算不可能になるものを考えよう。

$$S_A = \mathbb{U} \setminus \bigcup_{A(x,y)=1} W\left(\frac{2\pi}{x}, \frac{1}{10x^2y}\right) \quad (38)$$

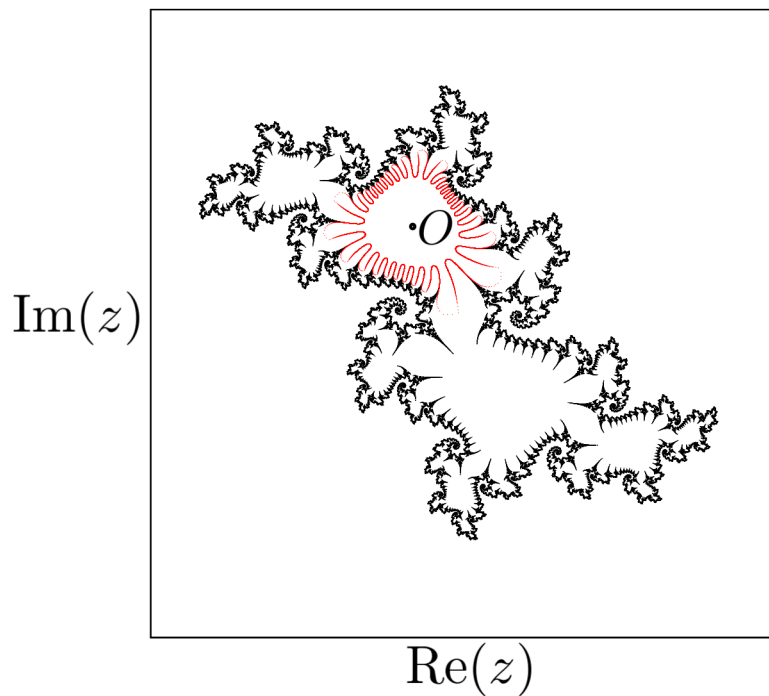


図 21: ジーゲル円盤をもつジュリア集合の例. パラメータは $\theta = 0.756097\dots$. ジーゲル円盤が赤で示されている. 多くのフィヨルドが存在しており複雑な構造を形成している.

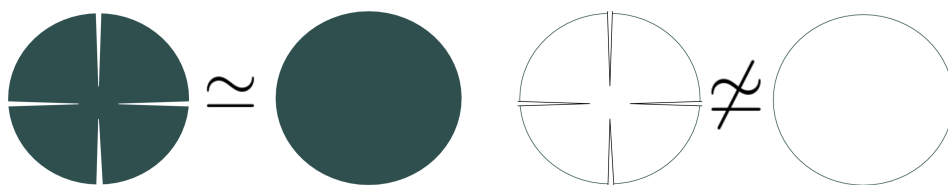


図 22: 充填ジュリア集合とジュリア集合とその近似の模式図. 真の絵 (左) とコンピュータスクリーン上で近似された絵 (右). ハウスドルフ距離に関して, 充填ジュリア集合ではフィヨルドの部分を無視できるがジュリア集合の場合は無視することができない.

とすると、次の 2 つの命題が成立する.

命題 54

∂S_A は計算不可能である.

証明

点 $p_x = (\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{x}, \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{x})$ をとろう. ただし, p_x は x 方向で任意の幅をもったくさび $W(x, \cdot)$ の頂点に位置している. p_x まわりの ∂S_A の部分を考えよう. もし $B(x) = 1$, 即ち, $\exists y A(x, y) = 1$ ならば, $p_x \in \partial S_A$ である. そうでないなら, ボール $B(p_x, \frac{1}{10x^2})$ と ∂S_A は交わりを持たない. それゆえ, もし ∂S_A が計算可能だとすると $B(x)$ は計算可能になる. これは矛盾である. $\square$

命題 55

S_A は計算可能である.

証明.

精度 2^{-n} で S_A を計算しよう. この条件下で, 幅が $\frac{1}{m} = 2^{-(n+1)}$ より小さいくさびは無視することができる. それゆえ, コンピュータスクリーン上で S_A の像を描くとき, $x^2 y \leq m$ となる x と y の値に対して $A(x, y)$ を評価しさえすればよい. そのような組は有限個しか存在しない. よって, S_A は計算可能である. $\square$

5 結論

Braverman と Yampolsky は実集合の計算可能性を “描画可能性” として概念化し, ジュリア集合の計算可能性を分析した. 以下が結果の概略である.

1. 双曲的な有理写像のジュリア集合は多項式時間計算可能である.
2. 放物的な周期点を持つ有理写像のジュリア集合は多項式時間計算可能である.
3. 多項式写像の充填ジュリア集合は多項式時間計算可能である.
4. ジーゲル円盤を持つ有理写像のジュリア集合の中には計算不可能なジュリア集合が存在する. 計算不可能なジュリア集合を生成するパラメータはブリュノ数であってディオファントス数ではない計算可能な無理数で与えられる.

今後の課題として以下が挙げられる.

1. Cheraghi のくりこみ群を用いた結果 [7] に基づき, ジーゲル円盤を含むジュリア集合の多項式時間計算可能性を Braverman-Yampolsky の枠組で考える.
2. ジュリア集合に対して得られた結果を実力学系の不変集合に適用しその計算可能性や計算複雑性を調べる.

付録

ジュリア集合をコンピュータで描画させるために使われるプログラムは大きく 2 種類に分類することができる. 以下に Inverse Iteration Method(IIM) と Distance Estimator Method(DEM) の概略をまとめる (A.1, A.2). また, ジーゲル円盤と無理数との関係性には A.3 を参照.

A.1 Inverse Iteration Method (IIM)

ジュリア集合は $z_0 \in J(R)$ とするとき

$$J(R) = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{-k}(z_0)}$$

となることを思い出そう. この性質を用いてジュリア集合上の任意の点を選びそれを逆像で写していくアルゴリズムは Inverse Iteration Method (IIM) と呼ばれている [23][15][12]. IIM は最も素朴なアルゴリズムであるが, 1 回の反復で二つの分岐が現れるため n 回反復後には 2^n 個の点をプロットすることになる. その中には有限精度で重複する点が含まれているかもしれない. さらにジュリア集合によっては全体像を描き切るまでに長い計算時間 (または大きなメモリサイズ) を要することがある. これは適切な枝を選ばなければ到達できないような“稀な”点が存在するためである.

この欠点を補ったのが Modified Inverse Iteration Method (MIIM) である [23][15][12]. $P_c(z) = z^2 + c$ の逆像を $w_1 = \sqrt{z - c}$, $w_2 = -\sqrt{z - c}$ とおこう. ランダムな初期点を逆写像で反復した後, 過渡的な点を除外して, それを $A_0 = \{z_0\}$ とする. 逆写像は吸引的なので, この反復により, ランダムな初期点はジュリア集合上の点に収束する. 次に, 集合 $A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0)$ を計算する. 集合 A_2 を得るには, A_1 に属していて A_0 には属していない点のみを w_1 と w_2 で写すこととする. 即ち,

$$A_2 = w_1(A_1 \setminus A_0) \cup w_2(A_1 \setminus A_0)$$

とすればよい. 以下帰納的に,

$$A_{n+1} = w_1(A_n \setminus A_{n-1}) \cup w_2(A_n \setminus A_{n-1})$$

を計算していく. 最後に

$$\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \right) \cup (A_n \setminus A_{n-1})$$

をプロットすればよい.

このように, 重複する点を除外して逆像をとっていく手続きを実装した C 言語プログラムの例を下に挙げる.

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include <complex.h>
#include <math.h>

int main(){
    int i;
    int number = 500000;
    double _Complex c, x, z, dz, z0, z1, z2;
    double _Complex w[number];
    double theta;
    double eps = 0.0005;

    srand((unsigned)time(NULL));

    scanf("%lf",&theta);
    double _Complex lambda = cexp(2*M_PI*I*theta);

    long double a = -2.0 + 4.0 *
                    (rand()+1.0)/(RAND_MAX+2.0);
    long double b = -2.0 + 4.0 *
                    (rand()+1.0)/(RAND_MAX+2.0);

    x = a + b*I;

    z = - lambda/2;
    w[0] = z;

    int count = 0;
    int k = 0;
    do{
        z = w[k];
        dz = csqrt(lambda*lambda + 4.0*z);
        if(rand()%2==0){
            z1 = (-lambda + dz)/2.0;
            z2 = (-lambda - dz)/2.0;
        }else{
            z1 = (-lambda - dz)/2.0;
            z2 = (-lambda + dz)/2.0;
        }
    }

    step1:
    for(i=0;i<=count;i++){
        if(cabs(z1 - w[i]) < eps){
```

```

        goto step2;
    }
}
count += 1;
w[count] = z1;

step2:
for(i=0;i<=count;i++){
    if(cabs(z2 - w[i]) < eps){
        goto step3;
    }
}
count += 1;
w[count] = z2;

step3:
k += 1;
if(k == count){
    goto step4;
}
}while(count < number);

step4:
for(i=1000;i<count;i++){
    if(cabs(w[i]) > 3.5){
        break;
    }
    printf("%f %f\n", creal(w[i]), cimag(w[i]));
}
}

```

A.2 Distance Estimator Method (DEM)

Distance Estimators Method (DEM) は Fisher[23] や Milnor[21] らにより提案された。これは、無限遠点の吸引ベイシン上の任意の点からジュリア集合までの距離を見積もって充填ジュリア集合の ϵ -近傍を描く方法である。DEM では特に内点を持たない充填ジュリア集合を精度よく描くことができる。このアルゴリズムは、Böttcher の定理を用いているため本来は連結なジュリア集合の描画にしか適用できないのだが、非連結なジュリア集合を描画できるようにアルゴリズムを拡張することもできる [30]。

DEM で写像 P_θ のジュリア集合を描画する C 言語のプログラム例を以下に挙げる。この例では初期点を $[-2, 2] \times [-2, 2]$ の範囲の格子点から 10000^2 個選び写像の反復を最大 5000 回行うようにしている。

```

#include <stdio.h>
#include <complex.h>
#include <math.h>

double set_distance(double, double, double);

int main(){
    int i, j;
    double z0x, z0y;
    double distance;
    double theta;
    _Complex double lambda;
    scanf("%lf", &theta);
    int inumber = 10000;
    int jnumber = 10000;
    for(i=0; i<inumber; i++){
        for(j=0; j<jnumber; j++){
            z0x = -2.0 + 4.0/inumber*i;
            z0y = -2.0 + 4.0/jnumber*j;
            distance = set_distance(z0x, z0y, theta);
            if(distance > -1.0e-4 && distance < 1.0e-4){
                printf("%f %f %. 20f\n",
                    z0x, z0y, distance);
            }
        }
    }
}

double set_distance
(double z0x, double z0y, double theta){
    _Complex double z = z0x + z0y * I;
    _Complex double dz = 1;
    _Complex double z_new, dz_new;
    _Complex double lambda = cexp(2*M_PI*I*theta);
    int cnt = 1;
    int max_iterations = 5000;
    double limit_radius = 5.0;

    do{
        z_new = z*z + z*lambda;
        dz_new = (2*z+lambda)*dz;
        z = z_new;
        dz = dz_new;
        if(cabs(z) > limit_radius){
            break;
        }
    }
}

```

```

    cnt = cnt + 1;
}while(cnt < max_iterations);
return cabs(z) * log(cabs(z)) / cabs(dz);
}

```

A.3 ジーゲル円盤と無理数

ジーゲル円盤の幾何学的構造は回転数 θ の性質によって変化する。ここでは連分数展開を使って無理数の性質を数論的に解析していく。より詳しい無理数の数論的性質は [5][25]。連分数展開については [26] などを参照。

実数 $\theta \in [0, 1)$ に対して, $[r_1, r_2, \dots, r_n, \dots]$ によって任意に長い有限の連分数展開を表す:

$$\theta = [r_1, r_2, \dots, r_n, \dots] := \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{r_n + \dots}}}}$$

ただし $r_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ である。もし $\theta \notin \mathbb{Q}$ ならば, 表現は唯一に定まることに注意しよう。無理数 θ に対して, n 番目までの近似分数 (convergent) $p_n/q_n = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ は, 連分数展開を n 番目で打ち切ったものであり分母が q_n を超えない数の中で最もよく θ を近似した有理数である。

定義 56

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は全ての有理数 p/q に対してある ϵ と k が存在して

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{\epsilon}{q^k}$$

となるとき, 次数 $\leq k$ のディオファントス数であるという。次数 $\leq k$ のディオファントス数の集合は $\mathcal{D}(k)$ で表す。

ディオファントス数は連分数展開を使って特徴づけることが可能である。 q_n を無理数 θ の n 番目の近似分数の分母とすると, ある $c > 0$ が存在して

$$q_{n+1} < cq_n^{k-1}$$

ならば $\theta \in \mathcal{D}(k)$ である。ディオファントス数の次数は無理数の有理数による近似のしにくさを表現している。 k の値が小さいほど有理数で近似しにくくなる。この意味で, 次数の小さいディオファントス数は “十分無理的な” 無理数であると言える。

命題 57

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が次数 k の整数係数代数方程式の解であるとしよう。このとき,

$$\theta \in \mathcal{D}(k)$$

特に, $\theta \in \mathcal{D}(2)$ となるのは列 $\{r_n\}$ が有界であるときであり, かつそのときだけに限る。クラス $\mathcal{D}(2)$ は有界型 (bounded type) と呼ばれる。ディオファントス数ではない無理数はリュウビル数 (Liouville number) と呼ばれる。ディオファントス数でも特に重要なクラス $\mathcal{D}(2+)$ は

$$\mathcal{D}(2+) := \bigcap_{k>2} \mathcal{D}(k).$$

と定義される。クラス $\mathcal{D}(2+)$ は $[0, 1)$ において全測度をもつ。

定理 58

R を周期 n の周期点 z_0 をもつ正則関数とする。サイクルの乗数 λ が

$$\lambda = e^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathcal{D}(2+),$$

を満たすとき, R はジーゲル円盤をもつ。

$\mathcal{D}(2+)$ は $[0, 1)$ において全測度をもつので, 上の定理よりほとんどの無理数 θ はジーゲル円盤を生み出す。

別の無理数のクラスとして, 次に定義するブリュノ数がある。

定義 59 (ブリュノ数)

無理数 θ とその近似分数 p_n/q_n に対して, $B(\theta) = \sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n}$ とおく。もし $B(\theta) < \infty$ であるならば, 無理数 θ はブリュノ数 (Brjuno number) であるという。ブリュノ数の集合は $\mathcal{B}$ で表される。 $\theta \in \mathcal{B}$ もジーゲル円盤を生成する。

定理 60

R を周期 n の周期点 z_0 をもつ正則関数とする。サイクルの乗数 λ が

$$\lambda = e^{2\pi i \theta}, \lambda \in \mathcal{B}$$

を満たすならば, R はジーゲル円盤をもつ。さらに, z_0 はジーゲル円盤の中心である。

定理 61

$P_\theta(z) = z^2 + e^{2\pi i \theta} z$ は原点まわりにジーゲル円盤をもつとする。このとき, $\theta \in \mathcal{B}$ である。

$\cup D(k) \subset \mathcal{B}$ を確かめるのは容易い. $\mathcal{D}(2+)$ は区間 $[0, 1)$ において全測度をもつので, $(\cup D(k))^c \cap \mathcal{B}$ に実数はほとんど存在しない. 計算不可能なジュリア集合を生み出すパラメータ θ はこの実数のクラス $(\cup D(k))^c \cap \mathcal{B}$ に属する.

これらの無理数のクラスのベン図を図 23 に与える.

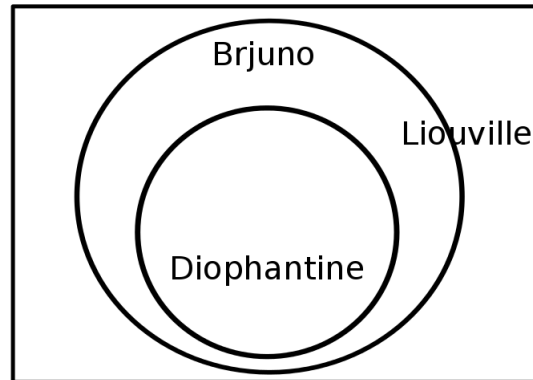


図 23: 無理数のクラス. ディオファントス数を除く無理数はリュウビル数と呼ばれる.

謝辞

主査の佐藤譲准教授 (北海道大学), 副査の荒井迅准教授 (北海道大学) と行木孝夫准教授 (北海道大学) および北海道大学電子科学研究所複雑系数理研究分野の皆様にご感謝します。筆者は佐藤譲准教授, 荒井迅准教授, 行木孝夫准教授, 横山知郎准教授 (京都教育大学) とジュリア集合の計算可能性に関するセミナーを行い, 貴重な意見を頂きました。また, 北海道大学 International Training Program の援助を受けて, 2013 年 9 月 9 日に NOLTA において発表を行いました。2014 年 1 月 14 日から 1 月 17 日まで京都大学数理科学研究所において, 荒井迅准教授主宰による研究集会「力学系と計算」に参加し, Mark Braverman 氏の講義を受けました。さらに, 北大若手研究者海外派遣支援事業の援助を受けて, 2014 年 11 月 7 日に Imperial College London の力学系セミナーにおいて発表を行いました。Imperial College London 滞在中に Dr. Davoud Cheraghi (Imperial College London) に様々なアドバイスを頂きました。ここに感謝します。

参考文献

- [1] Kathleen T Alligood, Tim D Sauer, and James A Yorke. *Chaos*. Springer, 1996. 邦訳: K.T. アリグッド, T.D. サウアー, J.A. ヨーク 著 (津田一郎 監訳, 星野高志, 松本和宏, 黒田拓, 阿部巨仁 訳), 『カオス - 力学系入門第 1 巻, 第 2 巻, 第 3 巻』, シュプリンガー・ジャパン, 2006 年, 2007 年.
- [2] Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub, and Steve Smale. *Complexity and real computation*, 1998.
- [3] Mark Braverman and Stephen Cook. Computing over the reals: Foundations for scientific computing. *Notices of the AMS*, Vol. 53, No. 3, pp. 318–329, 2006.
- [4] Mark Braverman and Michael Yampolsky. *Computability of Julia Sets*, Vol. 23. Springer, 2009.
- [5] Yann Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*, Vol. 160. Cambridge University Press Cambridge, 2004.
- [6] Lennart Carleson and Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*, Vol. 69. Springer, 1993.
- [7] Davoud Cheraghi. Typical orbits of quadratic polynomials with a neutral fixed point: Brjuno type. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 322, No. 3, pp. 999–1035, 2013.

- [8] Alonzo Church. A formulation of the simple theory of types. *The journal of symbolic logic*, Vol. 5, No. 02, pp. 56–68, 1940.
- [9] Stephen Cook. The P versus NP problem. *The millennium prize problems*, p. 86, 2006.
- [10] James P Crutchfield and Karl Young. Inferring statistical complexity. *Physical Review Letters*, Vol. 63, No. 2, p. 105, 1989.
- [11] Welington De Melo and Sebastian Van Strien. *One-dimensional dynamics*, Vol. 25. Springer, 1993.
- [12] Bünyamin Demir, Yunus Özdemir, and Mustafa Saltan. The graph of fractal dimensions of julia sets. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 70, No. 3, pp. 401–409, 2011.
- [13] Robert L Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1989. 邦訳: Robert L. Devaney 著 (後藤憲一 訳, 国府寛司, 石井豊, 新居俊作, 木坂正史 新訂版訳), 『新訂版 カオス力学系入門 第2版』, 共立出版, 2003年.
- [14] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. Itération des polynômes quadratiques complexes. *CR Acad. Sci. Paris*, Vol. 294, pp. 123–126, 1982.
- [15] V Drakopoulos. Comparing rendering methods for julia sets. 2002.
- [16] Peter Hertling. Is the mandelbrot set computable? *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 51, No. 1, pp. 5–18, 2005.
- [17] Kota Hiratsuka, Yuzuru Sato, and Zin Arai. Computability and complexity of Julia sets: a review. *Nonlinear Theory and Its Applications*, Vol. 5, No. 4, pp. 410–423, 2014.
- [18] John E Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley, second edition, 2001. 邦訳: J. ホップクロフト, R. モトワニ, J. ウルマン (野崎昭弘, 高橋正子, 町田元, 山崎秀記 共訳), 『オートマトン 言語理論計算論 I, II[第2版]』, サイエンス社, 2003年.
- [19] Ker-I Ko. *Complexity theory of real functions*. Birkhauser Boston Inc., 1991.
- [20] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. *American mathematical monthly*, pp. 985–992, 1975.
- [21] John Willard Milnor. *Dynamics in one complex variable*, Vol. 160. Princeton University Press, 2006.

- [22] Cristopher Moore. Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems. *Nonlinearity*, Vol. 4, No. 2, p. 199, 1991.
- [23] Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe, Michael Fielding Barnsley, Yuval Fisher, and Michael McGuire. *The science of fractal images*. Springer New York etc., 1988.
- [24] Marian Boykan Pour-El and J Ian Richards. *Computability in analysis and physics*. Springer, 1989.
- [25] Paulo Ribenboim. *My numbers, my friends: popular lectures on number theory*. Springer, 2000. 邦訳: Paulo Ribenboim 著, 吾郷孝視 訳, 『我が数、我が友よ - 数論への招待 - 』, 共立出版, 2003 年.
- [26] Andrew M Rockett and Peter Szűsz. *Continued fractions*, Vol. 2. World Scientific, 1992.
- [27] Mitsuhiro Shishikura. The hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Annals of Mathematics*, pp. 225–267, 1998.
- [28] Alan Mathison Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *J. of Math*, Vol. 58, pp. 345–363, 1936.
- [29] 稲生啓行, 上野康平, 川平友規. 滑らかな境界をもつ Siegel 円板. <http://www.cajpn.org/refs/smoothSD.pdf>.
- [30] 吉田怜史, 藤村雅代, 後藤泰宏. Böttcher 関数の構成による Julia 集合の可視化. 数理解析研究所講究録, Vol. 1759, pp. 85–98, 2011.