１９９７年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by T. Ozawa and H.-F. Yamada

Series #55. August, 1998

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

♯27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

♯28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

♯29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

♯30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.

♯31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.

♯32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.

♯33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.

♯34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.

♯35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第3回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.

♯36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.

♯37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.

♯38: M. Saito (Ed.), 1994年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.

♯39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.

♯40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.

♯41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第4回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.

♯42: R. Agemi (Ed.), 第２０回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.

♯43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves,Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.

♯44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves,Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.

♯45: G. Ishikawa (Ed.), 1995年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.

♯46: R. Agemi (Ed.), 第２１回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.

♯47: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 61 pages. 1996.

♯48: S. Miyajima, J. Inoue (Eds.), 第5回関数空間セミナー報告集, 90 pages. 1997.

♯49: T. Ozawa (Ed.), Proceedings of the 22nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 1997.

♯50: H.-F. Yamada (Ed.), 1996年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 99 pages. 1997.

♯51: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 121 pages. 1997.

♯52: J. Inoue (Ed.), 第6回関数空間セミナー報告集, 89 pages. 1998.

♯53: Y. Giga (Ed.), Proceedings of the 23rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 1998.

♯54: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 122 pages. 1998.

１９９７年度　談話会・特別講演アブストラクト　目次

１９９７年度　談話会・特別講演一覧

1. ４月１４日（月） B. Komrakov 氏（リー研究所） Symmetries and integrability (Differential geometry, differential equations)
2. ６月１１日（水）* Gerd Dethloff 氏（阪大・理） Plane curves with big fundamental group of the complements
3. ６月１８日（水）* 岩　崎　克　則　氏（九大・数理） 多面体調和関数の数理
4. ６月２４日（火） Nguyen Viet Dung 氏（ハノイ数学研究所） Braid monodromy of lines arrangements via labyrinth
5. ６月２５日（水）* 岡　本　和　夫　氏（東大・数理） パンルヴェ方程式の双一次型式
6. ６月２５日（水）* 津　田　一　郎　氏（北大・理） いたるところ微分不可能なアトラクターとその神経系への応用
7. ７月　２日（水） 脇　本　　　実　氏（九大・数理） Admissible 表現の Twisted 指標について —Kac-Todorov の orbifold 理論の admissible 表現への拡張—
8. ７月　４日（金） 佐　伯　貞　浩　氏（カンサス州立大） Kolmogorov's Rearrangement Problem
9. ７月　９日（水） 行　者　明　彦　氏（京大・総合人間） 概均質ベクトル空間について
10. ７月１４日（月）* Roberto Silvotti 氏（ニューヨーク州立大） Localization of cohomology with local coefficients
11. ７月１４日（月） Sergey Yuzvinsky 氏（オレゴン大） Complements of subspace arragements and their closures
12. ７月１４日（月）* Eliane Salem 氏（パリ第６大） Topological invariants for germs of holomorphic foliations
13. ７月１４日（月） Jean-Paul Brasselet 氏（リュミニ数学研究所） On geometry and topology of toric varieties
14. ７月１８日（金） 竹　崎　正　道　氏（カリフォルニア大） Characteristic square for a factor and cocycle conjugacy of group actions
15. ７月２３日（水）* Ping Xu 氏（ペンシルベニア国立大） Symplectic realizations of Poisson manifolds
16. ７月２５日（金）* Roberto F. Sekerka 氏（カーネギー・メロン大） Phase Field Modeling of Crystal Growth
17. ８月　６日（水）* George Szeto 氏（Bradley 大） On separable extensions and Galois extensions of rings
18. ８月　８日（金）* 有　澤　真理子　氏（ウィスコンシン大） Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式のエルゴード問題 —エルゴード的アトラクターについて—
19. ８月２５日（月）* Bernd Sturmfels 氏（U. C. Berkley, 京大・数理研） Generic Monomial Ideals
20. ８月２７日（水） Bernd Sturmfels 氏（U. C. Berkley, 京大・数理研） Generic Lattice Ideals
21. ９月１１日（木）* Tom Ilmanen 氏（ノースウェスタン大） Motion of surface by curvature
22. ９月１６日（火）* 桂　田　祐　史　氏（明治大） 代用電荷法の電荷配置
23. ９月１６日（火）* 谷　口　雅　治　氏（東京工大） Multiple existence and linear stability of equilibrium balls in a nonlinear free boundary problem
24. １０月　６日（月）* 中　村　健　一　氏（電気通信大） 反応拡散方程式と疑似進行波解
25. １０月　８日（水）* 鎌　田　聖　一　氏（大阪市立大） surface-link のブレイド表示について
26. １０月１５日（水）* 小　野　寛　晰　氏（北陸先端科学技術大学院大） 知識に基づく推論について

27. １０月２２日（水）＊加　藤　昌　英　氏（上智大）　Compact quotient manifolds of domains in a complex 3-dimensional projective space and the Lebesgue measure of limit sets
28. １０月２３日（木）＊Dloussky Georges 氏（CMI・Université d'Aix-Marseille）　Foliations on surfaces with global spherical shells and dynamical systems
29. １０月２７日（月）＊長　　宗　雄　氏（神奈川大）　semi-hyponormal 作用素のスペクトル論
30. １１月　５日（水）　Gunter Meyer 氏（ジョージア工科大）　Monotone method for diffusion with hysteresis
31. １１月　５日（水）＊Karim Bekka 氏（Univ. de Rennes）　Continuous vector fields and Isotopy theorems
32. １１月　７日（金）＊Dirce Mochida 氏（Universidade Federal de Saõ Carlos-SP）　Umbilic Points of Surfaces in $\mathbb{R}^4$
33. １１月１０日（月）＊Jan Janas 氏（アカデミー数学研究所）　Toeplitz Operators in the Foch Space
34. １１月１９日（水）＊輿　倉　昭　治　氏（鹿児島大・理）　Macpherson 類の Verdier 型 Riemann-Roch と Milnor 類
35. １１月１９日（水）　John Power 氏（エディンバラ大学基礎計算機科学研究所）　Premonoidal categories and notions of computation
36. １１月２５日（火）　砂　田　利　一　氏（東北大・理）　離散スペクトル幾何へのいざない
37. １１月２５日（火）＊諏　訪　立　雄　氏（北大・理）　特異多様体上のベクトル場の指数とその応用
38. １２月　２日（火）　Julio Rebelo 氏（Pontificia Univ. Catolica）　Ergodicity and Rigidity for Certain subgroups of Diff $^{\omega}(S^1)$
39. １２月　３日（水）＊Hi Jun Choe 氏（韓国先端科学技術大学）　Regularity of free boundary for semilinear parabolic equations
40. １２月　８日（月）＊八　牧　宏　美　氏（熊本大・理）　有限単純群分類定理をもっと活用しよう
41. １２月１０日（水）＊Louis Solomon 氏（ウィスコンシン大）　Representation of the rook monoid
42. 　１月１４日（水）　Michal Kwiecinski 氏（ヤギオエ大）　Topology of Pseudo vector bundles
43. 　１月１９日（月）＊利根川　吉　廣　氏（慶応大・理工）　Some remark on level set motion by anisotropic curvature
44. 　１月１９日（月）＊斎　藤　　毅　氏（東大・数理）　保型形式と p 進ホッジ理論
45. 　１月２０日（火）＊武　部　尚　志　氏（東大・数理）　楕円曲線上の WZW 模型について
46. 　１月２６日（月）＊Reimund Rautmann 氏（パダボーン大）　Approximate Lagrangean Coordinates in Navier-Stokes Problems
47. 　１月２９日（木）　倉　田　和　浩　氏（都立大・理）　Self-dual Cherm-Simon-Higgs 理論の topological and non-topological solutions について
48. 　１月２９日（木）＊赤　松　雅　之　氏（海上保安大学校）　ストロー公式の一般化とその応用
49. 　２月１２日（木）＊中　島　　啓　氏（京大・理）　３次元の McKay 対応とヒルベルト概型
50. 　２月１７日（火）＊森　脇　　淳　氏（京大・理）　安定曲線のモジュライ上の正因子のなす錘について
51. 　２月１８日（水）＊宮　崎　洋　一　氏（日大・歯）　双一次形式で定義される作用素の熱核の滑らかさ
52. 　２月１８日（水）＊飯　田　雅　人　氏（岩手大・人文社会）　A free boundary problem as a singular limit of a competition-diffusion system
53. 　２月１８日（水）　俣　野　　博　氏（東大・数理）　調和写像に対する熱方程式の解の爆発
54. 　２月１８日（水）＊柴　田　徹太郎　氏（広島大・総合科学）　Nonlinear elliptic eigenvalue problems with several parameters
55. 　２月１９日（木）＊松　井　泰　子　氏（都立大・理）　NP-completeness for calculating power indices of weighted majority games

56. 3月 4日（水）* Ruhan Zhao 氏（京大・理） Composition operators and Q_p spaces

57. 3月 5日（木）* Ruhan Zhao 氏（京大・理） Hankel operators between Bergman spaces

Plane curves with big fundamental groups of the complements

Gerd Dethloff, Osaka University

June 11, 1997

A group G is called big if it contains a (non-abelian) free subgroup. It is immediate from classical results that an algebraic (i.e. quasi-projective) curve is hyperbolic iff its fundamental group is big.

In several complex dimensions there are many possible definitions of hyperbolicity. The most well known are Kobayashi and Brody hyperbolicity. By an easy consequence of a theorem of Siu-Yeung on the hyperbolicity of the complement of a generic plane curve of high degree we see that Kobayashi hyperbolicity does not enforce any properties on the fundamental group of an algebraic surface.

This is better if one demands the much stronger property of C-hyperbolicity: A complex manifold is called C-hyperbolic if it allows an unbranched cover $Y \to M$ s.t. Y is Carathéodory hyperbolic, i.e. the points of Y are seperated by bounded holomorphic functions.

Theorem 1 (D-Zaidenberg): Let C be an irreducible immersed plane curve, and let C^* be its dual.

a) If genus$(C) \geq 1$, then $\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*$ is C-hyperbolic.

b) If genus$(C) = 0$ and C is generic with degree$(C) \geq 5$, then $\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*$ is (almost) C-hyperbolic.

Remark: Almost C-hyperbolicity means that in the definition above, the points of Y can be seperated by bounded holomorphic functions up to finitely many points. We do not know if in Theorem 1, b) C-hyperbolicity holds.

Theorem (Lin): Let X be an algebraic variety. If X is (almost) C-hyperbolic, then $\pi_1(X)$ is not almost nilpotent.

From these two theorems it follows that under the assumptions of Theorem 1 the group $\pi_1(\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*)$ is not almost nilpotent. In fact, we have more:

<u>Theorem 2</u> (D-Orevkov-Zaidenberg): Let C be an irreducible immersed curve. Assume that C is not a line, a conic or a nodal cubic. Then $\pi_1(\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*)$ is big.

<u>Remark</u>: It is easy to see that for a line, a conic or a nodal cubic $\pi_1(\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*)$ is a finite group.

In fact we don't know any example of an algebraic almost C-hyperbolic manifold without big fundamental group. So we would like to ask:

<u>Question</u>: Let X be an algebraic manifold which is almost C-hyperbolic. Does it follow that $\pi_1(X)$ is big?

The proofs of Theorem 1 and Theorem 2 are very easy if genus$(C) \geq 2$. In this case Theorem 1 is actually due to Carlson-Green, and the bigness of $\pi_1(\mathbb{P}^{2*} \setminus C^*)$ is obtained, using a simple incidence relation, from the bigness of $\pi_1(C)$. For genus$(C)=1$, the proof of Theorem 1 is obtained by using Abel-Jacobi's theorem, and for genus$(C)=0$, we use, besides the Zariski embedding $\mathbb{P}^{2*} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, some results on the natural $PGL(2,\mathbb{C})$-action on $\mathbb{P}^n$ and the structure of its orbit closures due to Aluffi and Faber. In the case of genus$(C) \leq 1$ the proof of Theorem 2 is more complicated. It involves generic approximation in certain moduli spaces of curves, the "general duality picture" due to Zariski and Dolgachev-Libgober, Zariski-Lefschetz type theorems, an exact homotopy sequence due to Nori and the bigness of certain braid groups.

特別講演のお知らせ
岩崎克則氏（九大数理）
多面体調和関数の数理

６月１８日（水）４－５０９
I：１５：１５－１６：１５
II：１６：３０－１７：３０

球に関する平均値の性質を満たす連続関数とは調和関数のことである（Gauss の定理 1840)。では、球を多面体で置き換えると何が起こるだろうか？ 即ち、与えられた多面体に関して平均値の性質を満たす連続関数（多面体調和関数）全体はいかなる関数空間をなすか？ この素朴な疑問がこの講演のテーマである。この問題に関して、Friedman-Littman (1962) は「多面体調和関数全体のなす線型空間は有限次元か？」という問題を提出した。(古典的な調和関数全体は無限次元であることを思い出そう)。 この一見不思議な疑問は、最近になってようやく正しいことが判明した。即ち、どんな多面体に関しても、多面体調和関数全体は多項式のみからなる有限次元線型空間をなす。更に、多面体の対称性が十分高いと、その空間は調和多項式のみからなる有限次元線型空間となる。

考えている多面体が（任意次元の）正多面体の場合には、関数空間を具体的に決定することができる。例えば正 20 面体調和関数の空間は 120 次元である。では、フロリダのディズニーワールドにある、球に極めて近い多面体ドームの調和関数の次元は果たしていくつだろうか？

北海道大学大学院理学研究科数学教室談話会

パンルヴェ方程式の双一次型式

岡本　和夫　　東京大学大学院数理科学研究科

1997 年 6 月 25 日

私は長い間パンルヴェ方程式の研究を続けています。別にこれだけやっているわけではないのですが，どうしても離れられない関係のようです。事実，私に与えられる講演の機会には，パンルヴェ方程式の話をせよ，という注文が多いようです。そんなわけで，面白いと思い好きで選んだテーマですから，喜んで今回もこの主題で話を致します。

北海道大学では，1994 年に「パンルヴェ方程式とディンキン図形」という題で談話会をさせていただきました。また，今年の春の数学会の年会では「パンルヴェ方程式の数理」という企画特別講演を致しました。大学院生の皆さんや専門が異なる先生方にも聴いてほしいので，重複する部分もありますが，私の仕事を良くご存じの方々には我慢をして頂くようお願いします。といっても，今回の主題の「双一次型式」は最近の結果ですから，前回の談話会と同じ話をするわけではありません。年会の講演ではこの結果を紹介する時間がなかったので，今回は「双一次型式」にテーマを絞ってみたいと思っています。

パンルヴェ方程式というのは，Paul Painlevé により前世紀から今世紀にかけて発見された，6 つの種類の 2 階非線形常微分方程式です。これらの微分方程式は一般解として，パンルヴェ超越関数を定めますが，私は特殊関数論の立場から興味を持ち，それ自身の構造を調べたり，多変数への拡張を試みたりしています。パンルヴェ超越関数は，超幾何関数の一族と楕円関数をある意味で含むクラスの関数ですが，数理物理学で特殊関数として認識されたのは 1970 年代以降です。現在は特殊関数の 1 つとして認知されつつあります。最近の研究によれば，数学的にも面白い構造があって，解析学だけではなくいろいろな分野で現れています。私自身はパンルヴェ方程式の持つ代数的な構造を明らかにすることを目的に研究しています。

パンルヴェ方程式は，非斉次ハミルトン系として表される，という特性を持っています。つまり，$H(t;\, q,\, p)$ を t の有理関数を係数とする q と p の多項式として

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

という形で表されます。この事実を詳しく調べると，パンルヴェ方程式のいろいろな構造が自然に理解できますが，この話は前回の談話会の主題でした。

表題にある「双一次型式」というのはパンルヴェ方程式のもう一つの表現です。形式的には，ソリトン方程式の研究に現れる「広田型式」と同じものが現れますが，ソリトン方程式の「双一次型式」は解の表示であるのに対し，今回の主題の「双一次型式」は微分方程式の表示です。似たようなものですが，微妙な違いがあるように思います。この「双一次型式」からどんな構造が現れてくるのか，まだ十分な結果はありませんが，新しいことが出てくる予感はあります。具体的な式は講演の時にもう少し数学的なレジュメを用意し，OHP でお見せしますから，ここには書きません。

いたるところ微分不可能なアトラクターとその神経系への応用

津田一郎(北大理数学)

講演要旨

いたるところ微分不可能な関数は、Weierstrass や Takagi によってその典型例が与えられたこともあり、よく研究されている。また、いたるところ微分不可能な関数で表現された力学系のアトラクターの研究は Moser に始まる。この研究は構造安定性に関係している。

最近、Katsuura によって、縮小写像を使って、いたるところ微分不可能な関数が構成された。Katsuura 写像を少し変形することで、特異連続でいたるところ微分不可能な関数が構成できる。このような関数で表現されるアトラクターのハウスドルフ次元と位相次元の関係は、通常のカオスのアトラクター(ストレンジアトラクター)のそれとは異なっていることが分った。例として、Smale のソレノイドを4次元に拡張したもの(ハイパーソレノイド)を構成した。

また、特異連続でいたるところ微分不可能な関数で表現されるアトラクターが神経回路モデルで実現できるかどうかわかっていなかったが、脳神経系で自然であろうと思われるモデルを作りこのようなアトラクターを数値的に見つけた。実際にこのアトラクターが特異連続でいたるところ微分不可能かどうか数学的に厳密に確認することはできていないが、いくつかの理由からこの主張がもっともらしいと言うことができる。さらに、このアトラクターの数理的、情報論的性質の数値計算による結果を示す。

Lecture given at Hokkaido University:

Title: On the Poincaré polynomial of a complement of hyperplanes

by Roberto Silvotti (SUNY at Stony Brook)

In this lecture we present some recent results concerning the Poincaré polynomial $P(t)$ of the complement Y of hyperplanes in projective space. In particular, we study the geometric conditions on Y under which $P(t)$ factors into polynomials over $\mathbb{N}$. As pointed out by K. Saito about 20 years ago, this question should be related to the vanishing of the higher homotopy groups of Y. A motivation for our work is a theorem of H. Terao, stating that for the complement of a central and essential free arrangement of hyperplanes, $P(t)$ factors into linear polynomials.

Two are our main results. The first theorem we present gives a factorization criterion for $P(t)$ in terms of the splitting of the bundle of logarithmic 1-forms on a suitable compactification X of Y, birational to projective space. This criterion is then applied to the case of free arrangements, thus providing a new geometric proof of the theorem of Terao.

Topological invariants for germs of holomorphic foliations on $(\mathbb{C}^2, 0)$

by J.F. Mattei (Université de Toulouse), and
E. Salem (Université de Paris 6).

Let $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ be a holomorphic 1-form, defined on a neighbourhood $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^2$ of 0, and singular only at 0. It defines a singular holomorphic foliation $\mathcal{F}_\omega$ on $\mathcal{U}$.
We define a local topological invariant for $\mathcal{F}_\omega$ as an object associated to $\mathcal{F}_\omega$ which remains constant for each topologically trivial deformation of $\mathcal{F}_\omega$.
In this talk, I am going to give, under generic conditions on the 1-form ω a complete list of local topological invariants for $\mathcal{F}_\omega$.

We recall that after a finite number of blow-ups at points, we get a new foliation $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ defined on a neighbourhood of the exceptional divisor $\mathcal{D}$, and having only reduced singularities.

<u>Def</u>: A holomorphic 1-form is <u>quasi-hyperbolic</u> if
- $\mathcal{D}$ is invariant by $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$,
- the foliation $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ at each singular point is given by a 1-form $\tilde{\omega} = \lambda x\,dy + \mu y\,dx + (\text{higher order terms})$ with $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_{<0}$

For each component $D \cong \mathbb{CP}^1$ of the divisor $\mathcal{D}$, we define its holonomy group as the image of the holonomy representation $\pi_1(D - \mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.
We define a chain in $\mathcal{D}$ as a union of components having 2 singularities, between 2 components having more than 3 singularities

<u>Def</u>: A quasi-hyperbolic 1-form is <u>generic</u> if
Ⓐ All components with more than 3 singularities have non abelian holonomy,

(B) For any chain in $\mathcal{D}$, there is no holomorphic first integral[2] defined on a neighbourhood of the chain,
(C) There is a component with more than 3 singularities and non solvable holonomy.

<u>Thm 1</u>: Let ω be quasi-hyperbolic and satisfying condition (C). Then we produce a new local topological invariant for $\mathcal{F}_\omega$: its semi local type $SL(\omega)$.

The <u>semi-local type</u> $SL(\omega)$ of $\mathcal{F}_\omega$ is given by
- the dual tree of resolution,
- the analytical types of the foliation $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ at the singularities,
- the analytical types of the holonomy groups of the components of $\mathcal{D}$.

In particular we have the

<u>Corollary</u>: Let ω be quasi-hyperbolic and satisfying (C). Then the holonomy groups are local topological invariants for $\mathcal{F}_\omega$.

We can also prove

<u>Thm 2</u>: Let ω be quasi-hyperbolic generic. Then a complete list of local topological invariants for $\mathcal{F}_\omega$ is given by
- its semi-local type $SL(\omega)$
- an element of a finite dimensional space $\mathbb{C}^\tau$ where τ is the number of active chains (i.e. of chains such that at each singular point the 1-form $\tilde{\omega}$ defining $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ is analytically normalizable.)

SYMPLECTIC REALIZATIONS OF POISSON MANIFOLDS

PING XU

For a symplectic manifold M, an important construct is the *Poisson bracket*, which is defined on the space of all smooth functions and satisfies the following properties:

1. $\{f,g\}$ is bilinear with respect to f and g;
2. $\{f,g\} = -\{g,f\}$, (skew-symmetry);
3. $\{h,fg\} = \{h,f\}g + f\{h,g\}$, (the Leibniz rule of derivation);
4. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$, (the Jacobi identity).

The best known Poisson bracket is perhaps the one defined on the function space of $\mathbb{R}^{2n}$ by:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{1}$$

Poisson manifolds appear as a natural generalization of symplectic manifolds: a *Poisson manifold* is a smooth manifold with a Poisson bracket defined on its function space. The first three properties of a Poisson bracket imply that in local coordinates a Poisson bracket is of the form:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j},$$

where π_{ij} may be seen as the components of a globally defined antisymmetric contravariant 2-tensor π on the manifold, called a Poisson tensor or a Poisson bivector field. The Jacobi identity can then be interpreted as a nonlinear first order differential equation for π with a natural geometric meaning. The Poisson tensor π of a Poisson manifold P induces a bundle map $\pi^{\#} : T^*P \longrightarrow TP$ in an obvious way. The rank of the Poisson structure at a point $x \in P$ is defined as the rank of the bundle map at this point. If the rank equals the dimension of the manifold at each point, the Poisson structure reduces to a symplectic structure which is also called *non-degenerate*. In general, the image of the cotangent bundle under $\pi^{\#}$ defines a general distribution in the sense of Stefan and Sussmann, which is, however, completely integrable. Each maximal integral submanifold is symplectic and called a *symplectic leaf*. In other words, one can think of a Poisson manifold as a union of symplectic manifolds (usually of varied dimensions) fitting together in a smooth way, which is a result due to Kirillov [5].

The classical Poisson bracket (see Equation (1)) was first introduced by Poisson in the early nineteenth century as a tool for classical dynamics. Jacobi [2] realized the importance of these brackets and elucidated their algebraic properties, and Lie [6] began the study of their geometry. After a long dormancy, Poisson geometry has become an active field of research during the past 30 years or so, stimulated by connections with a number of areas, including harmonic analysis on Lie groups, infinite dimensional Lie algebras, mechanics of particles and continua, singularity theory, and completely integrable systems, to mention just a few examples.

In general a Poisson manifold is singular in the sense that its rank may vary accroding to points. A useful method to "desingularize" a Poisson structure is to use the so called symplectic realization, which can be traced back to Lie who used the name "function group". In [6], Lie defined a "function group" as a collection of functions of the canonical variables $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ which is a subalgebra under the canonical Poisson bracket and generated by a finite number of independent functions $\phi_1, \cdots, \phi_r$. In modern language, this means that $\mathbb{R}^r$ has a Poisson structure induced from the canonical symplectic structure $\mathbb{R}^{2n}$ in the sense that $\Phi = (\phi_1, \cdots, \phi_r) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^r$ is a Poisson map. Generally, a symplectic realization of a Poisson manifold P, as defined by Weinstein, is a Poisson map from a symplectic manifold X to P which is a surjective submersion. Lie proved that such a realization always exists locally for any Poisson manifold of constant rank. The local existence theorem of symplectic realizations for general Poisson manifolds was proved by Weinstein in 1983 [9]. The proof was highly nontrivial and used the local structure theorem for Poisson manifolds. Subsequently, in 1987, Karasev [3] and Weinstein [10] proved independently the existence of a global symplectic realization for any Poisson manifold. In fact, they found that by a suitable choice, such a realization admits **automatically** a local groupoid structure which is compatible with the symplectic structure in a certain sense. The global form of this notion is what is now called a symplectic groupoid. Symplectic groupoids have their own origin in quantization theory [4]. However, it has been quite mysterious why the groupoid structure and symplectic structure enter into the picture of a Poisson manifold in such a compatible and striking manner.

On the other hand, Poisson groups have been intensively studied as a classical limit of quantum groups. The theory of Poisson groups established a precise relation between Poisson structures on the groups and their infinitesimal invariants, Lie bialgebras. In order to understand symplectic groupoids using the techniques of Poisson group theory and to unify both theories in a general framework, Weinstein in 1988 introduced the notion of Poisson groupoid. Lie bialgebroids were introduced and studied by Mackenzie and myself [7] in 1994 as the infinitesimal invariants of Poisson groupoids: given a Poisson groupoid G, the Lie algebroid of the underlying Lie groupoid, together with the Lie algebroid structure on the dual A^*G, form a Lie bialgebroid. Lie bialgebroids are found to be connected with various subjects in Poisson geometry ranging from Poisson-Nijenhuis structures to Dirac structures; However, it has remained an unsettled problem for quite while whether an arbitrary Lie bialgebroid can be integrated to a Poisson groupoid.

In this talk, I will give an affirmative answer to this question. I will start with some background material on Poisson geometry including Poisson group theory. The main theorem is that a Lie bialgebroid structure on the Lie algebroid of a (suitably simply-connected) Lie groupoid can be integrated to give a Poisson groupoid structure on the underlying groupoid [8]. This result extends the well-known result that a Lie bialgebra (of finite dimension over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) is the Lie bialgebra of a Poisson group [1]. At the other extreme, it also shows that if a Poisson manifold P has a cotangent Lie algebroid which integrates to a Lie groupoid $G \rightrightarrows P$, then G has a symplectic groupoid structure integrating the Poisson structure of P. In particular, we obtain as a consequence a new proof of the existence of symplectic realizations for general Poisson manifolds.

Within this general framework, the geometric origin of the symplectic and groupoid structures on a symplectic groupoid becomes transparent. Given a Poisson manifold P, its cotangent bundle T^*P carries a Lie algebroid structure. The canonical Lie algebroid structure on its dual, that is, the tangent bundle TP, induces a Poisson structure on its groupoid (assuming the groupoid exists and is α-simply connected), which is symplectic in this case. The compatibility condition between these two Lie algebroid structures then assures the compatibility condition between the groupoid and symplectic structures which makes it into a symplectic groupoid.

References

[1] V. G. Drinfel'd. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equation. *Soviet. Math. Dokl.*, 27:68–71, 1983.

[2] Jacobi, C.G.J., *Vorlesungen über Dynamik*, gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842-1843 und nach einem von C.W. Borchardt ausgearbeiteten Hefte, herausgegeben von A. Clebsch, zweite revidirte ausgabe (1884), Chelsea, New York, 1969.

[3] M. V. Karasev. Analogues of the objects of Lie group theory for nonlinear Poisson brackets. *Math. USSR-Izv.*, 28:497–527, 1987.

[4] Karasev, M.V. and Maslov, V.P., *Nonlinear Poisson Brackets: Geometry and Quantization*, Translations of Mathematical Monographs, v. 119, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[5] A.A. Kirillov, Local Lie algebras, *Russian Math. Surveys* **31** (1976), 57–75.

[6] S. Lie. *Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel.* Teubner, Leipzig, 1890.

[7] K. C. H. Mackenzie and P. Xu, Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Duke Math. J.* **73, N.2** (1995), 415-452.

[8] Mackenzie, K.C.H. and Xu, P., Integration of Lie bialgebroids, preprint, 1997.

[9] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 523–557.

[10] A. Weinstein, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull AMS* **16** (1987), 101-104.

Phase Field Modeling of Crystal Growth

Robert F. Sekerka

Carnegie-Mellon University

Abstract

The physical and mathematical basis of the phase field model for solidification of a pure material will be presented in terms of an entropy functional that depends on an order parameter and a gradient entropy in that parameter. An alternative phase field model without an order parameter and a gradient entropy that depends on the squared gradient of the internal energy will then be formulated, and shown to be isomorphos with the Cahn-Hilliard equation. These models will be contrasted, and it will be conjectured that the latter model corresponds to local equilibrium at the crystal-melt interface. This conjecture will be explored by means of numerical solutions and matched asymptotic expansions for a few one-dimensional problems.

Notes on Galois Extensions with Inner Galois Groups

GEORGE SZETO

Mathematics Department, Bradley University, Peoria, Illinois 61625 U.S.A.

Let S be a ring with 1, G a finite inner automorphism group of S, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $g_i(s) = U_i s U_i^{-1}$ for some U_i and all s in S, and n is a unit in S, S^G the subring of the elements fixed under each g_i in G. We denote S^G by R, and the projective group ring of G over R with a factor set $f: G \times G \to$ the set of units in R by RG_f; that is, RG_f is a ring with an R-basis $\{U_i \,/\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ $rU_i = U_i r$ for all r in R and $U_i U_j = f(g_i, g_j) U_k$ where $g_i g_j = g_k$. THEOREM 1. The following statements are equivalent: (1) S is a G-Galois extension of R with Galois system $\{n^{-1}U_i, U_i^{-1}\}$. (2) $S = RG_f$. (3) $\{U_i\}$ are linearly independent over R. (4) $\{g_i \bullet R_i\}$ are linearly independent in Hom(S,S) over R, where $R_i(s) = sU_i$ for each i. When such an S is also an Azumaya algebra over its center C contained in R, the following statements are equivalent: THEOREM 2. (1) RG_f is an Azumaya C-algebra. (2) RG_f is an H-separable extension of R and R is a separable C-algebra. (3) S is a G-Galois extension of R with Galois system $\{n^{-1}U_i, U_i^{-1}\}$ and R is an Azumaya C-algebra.

Let S be a ring satisfying the hypotheses as given by Theorem 2, $\mathcal{B}$ the set of all separable subalgebras of S contained in R (or containing R), and $\mathcal{D}$ the set of separable C-subalgebras of S containing CG_f (or contained in CG_f). Then the map $h: \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ by $B \to B(CG_f)$ for any B in $\mathcal{B}$ is bijective with the inverse map $p: A \to A \cap R$ for any A in $\mathcal{D}$.

REFERENCES

1. R. Alfaro and G. Szeto, Skew Group Rings Which are Azumaya , Comm. in Algebra, 23(6): 2255-2261(1995).

2. R. Alfaro and G. Szeto, On Galois Extensions of an Azumaya Algebra, Comm. in Algebra, 25(6), 1873-1882(1997).

3. F.R. DeMeyer and E. Ingraham, Separable Algebras over Commutative Rings, Vol. 181, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

4. F.R. DeMeyer, Some Notes on the General Galois Theory, Osaka J. Math. 2:117-127(1965).

5. X.D. Deng and G. Szeto, On a Class of Free Galois Extensions, Portugaliae Math., 51: 103-108(1994).

6. S. Ikehata, Note on Azumaya Algebras and H-Separable Extensions, Okayama J. Math., 23(1981), 17-18.

7. X.L. Jiang, A Galois Theorem for Projective Group Rings, Chinese Math. Ann., 17A(6): 737-744(1996).

8. K. Sugano, On a Special Type of Galois Extensions, Hokkaido Math. J. 9: 123-128(1980).

ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式のエルゴード問題

ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を用い 制御決定力学系、制御拡散系のエルゴード性を定義し、系がエルゴード的になる必要条件および十分条件を与える。必要条件は、エルゴード的アトラクターと呼ばれる部分集合が相空間の中に存在することであり、系のすべての軌道はこの部分集合の任意の近傍に(長時間平均で)常に存在していなければいけない。上記の性質は換言すると制御可能性(コントローラビリティー)であり、十分条件は逆に制御可能性の評価で与えられる。

ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式に対してエルゴード問題が考えられたひとつの端緒は、二階(一様)楕円型偏微分方程式の均質化極限を求める問題であると考えられる。すなわち系が幾つかのスケール(例えば普通のスケール、速いスケール、より速いスケール等)を持つとき、あるひとつの固定されたスケールで系を観るためには、他のスケールは何らかの方法で均質化又は平均化されることが必要である。この平均化(averaging)の仕方をエルゴード問題は与える。

以上

Wisconsin大学Madison校

有澤真理子

» GENERIC MONOMIAL IDEALS «

Bernd Sturmfels
(University of California, Berkeley
and RIMS, Kyoto)

Abstract: We study the problem of finding the minimal free resolution of a monomial ideal, and the related combinatorial problem of computing its Hilbert series. The difficulty of this problem is reflected in the fact that homology of arbitrary simplicial complexes can be encoded, via the Stanley-Reisner correspondence, into the Betti numbers.

In this talk we describe an explicit solution for generic monomial ideals, where no variable appears to the same degree in two minimal generators. Joint work with Dave Bayer and Irena Peeva.

T. Ilmanen. "A Strong Maximum Principle for Singular Minimal Hypersurfaces"

If M is a stable minimal hypersurface of multiplicity one, then all the tangent cones of M have multiplicity one. The proof is a modification of a corresponding proof of L. Simon for area-minimizing hypersurfaces.

Corollary: if V_1, V_2 are stationary integral n-varifolds in $\mathbf{R}^{n+1}$ such that $\mathcal{H}^{n-2}(\operatorname{spt} V_1 \cap \operatorname{spt} V_2) = 0$, then actually $\operatorname{spt} V_1 \cap \operatorname{spt} V_2 = \emptyset$. Furthermore, if the supports are disjoint but approach closely in one place, and are each connected, then they approach closely everywhere (in the sense of Hausdorff distance). These results are proven by interposing stable minimal hypersurfaces.

代用電荷法の電荷配置

桂田 祐史

平成9年9月16日

平面内の実解析的な Jordan 閉曲線 Γ の内部領域 Ω における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$u = f \quad \text{on } \Gamma \tag{2}$$

の近似解を代用電荷法 (charge simulation method) で求めることを考える。すなわち、Ω の外部に電荷点と呼ばれる点 $\{y_j\}_{j=1}^N$ を取り、

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^N Q_j \Gamma(x - y_j), \quad \Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$$

の形の関数の中から近似解を選ぶ。未定係数 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ は、collocation method で決定する。すなわち、境界 Γ 上に標本点と呼ばれる点 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を取り、それらの点において近似解 $u^{(N)}$ の値が厳密解 u の値 $(= f(x_i))$ と等しくなるようにする:

$$u^{(N)}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, N). \tag{3}$$

これは collocation equation と呼ばれ、N 個の未知数 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ に関する連立 1 次方程式である。

以上の説明では、電荷点と標本点を具体的にどう選ぶかについて、何も述べてはいない。高精度の近似解を得ることを保証するために、それらの点をどのように配置するべきかが、代用電荷法における根本的な問題である。筆者は、明確な配置アルゴリズムを提唱し、その正当性を数学的に保証することを研究目標としている。

Ω が円盤領域 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| < 1\}$ である場合には、電荷点と標本点を、同心円周上に一様に分布させる配置

$$x_i = \omega^{i-1}, \quad y_j = R\omega^{j-1} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N)$$

が有効であることが証明されている (桂田 - 岡本 [1])。ただし、

$$R > 1, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\right)$$

であり、$\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{C}$ を同一視した記述をしている。例えば境界データ f が実解析的な場合には、誤差の指数関数的減少

$$\|u - u^{(N)}\| \le C\tau^N$$

が成り立つ (τ は $0 < \tau < 1$ を満たす定数であり、$\|\cdot\|$ は適当なノルムである)。

さて、Ω を実解析的な Jordan 閉曲線の内部領域で、Ψ が次の仮定を満足する写像とする。

仮定 C

(i) Ψ は円環領域 $\{x \in \mathbf{C}; 1/\kappa < |x| < \kappa\}$ を Γ の開近傍に双正則に写像する (κ は $\kappa > 1$ なる定数)。

(ii) Ψ は単位円周を Γ に写す。

このとき $1 < R < \kappa$ なる R を取って、

$$x_i = \Psi(\omega^{i-1}), \quad y_j = \Psi(R\omega^{j-1}) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N) \tag{4}$$

で電荷点、標本点を定めると、以下の結果が得られる。

定理 (桂田 - 岡本 [2]) 仮定 C を満たす Ψ を用いて、(4) で電荷点、標本点を決定する代用電荷法においては、十分大きな N に対して collocation equation (3) の係数行列は正則である。さらに境界データ f の滑らかさに応じた誤差評価が得られる。特に f が実解析的な場合には、誤差の指数関数的減少が成り立つ。

(定理の正確な記述については、桂田 - 岡本 [2] を参照して頂きたい。証明の骨子は、適当な関数空間を導入して定式化し、円盤領域の場合からの compact な摂動を加えた問題とみなすことによる。)

注意 仮定 C を満たす Ψ はたくさんある。例えば、$\psi: S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ を Γ の解析的なパラメーターづけとして、

$$\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n e^{\sqrt{-1}n\theta}$$

をその Fourier 級数展開とするとき、

$$\Psi(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n z^n$$

は仮定 C を満足する。実際の数値計算では、Fourier 係数 $\{\alpha_n\}$ や Ψ の関数値の計算に FFT (高速 Fourier 変換) が利用可能であり、極めて効率的な計算ができる。■

参考文献

[1] M.Katsurada and H.Okamoto: A mathematical study of the charge simulation method I, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. IA **35**, 507–518 (1988).

[2] M.Katsurada and H.Okamoto: The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, Computers Math.Applic., **31**, 123–137 (1996).

[3] M.Katsurada: Charge simulation method using exterior mapping functions, Japan J.Indus.Appl.Math., **11**, 47–61 (1994).

1997年9月16日　北海道大学理学部数学教室談話会での講演要旨

"Multiple existence and linear stablity of equilibrium balls in a nonlinear free boundary problem"
(球状境界面の多重存在と安定性)

谷口雅治
東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻

ある種の化学反応や生態系モデルにおいては，系が二相にわかれ，その間に境界面(phase boundary, interface)が現れることがある。この現象を記述するためには境界面 Γ のみたす発展方程式とある空間大域的関数 v のみたす放物型方程式が連立した問題(以下，界面方程式とよぶ)を考える必要がある。近年この界面方程式がもとの反応拡散モデルの界面をよく記述しているか，またこの界面方程式は適切(well-posed)であるかについて様々な結果が報告されている。界面方程式の解構造を調べる手段の一つはこの方程式の定常解を調べることであるが，定常解については空間１次元の場合をのぞき，よく知られていなかった。ここでは球対称な定常解についてしらべる。球対称な定常解が複数個存在していることを示し，それらの構成法について論じた上で，それら一つ一つの安定性を線形化固有値問題で調べる。定常球を構成する際に得られる情報が，その安定性にどのように関連しているのかをしらべ，定常球の分類を考える。また固有値全体の分布が各々のタイプごとにどうなっているかについて報告する。

Travelling waves for a diffusion equation with periodic inhomogeneity

中村 健一

電気通信大学情報工学科

1 はじめに

自然界においては, 生物種の侵入・伝播や神経細胞内の興奮の伝達など, 拡散によって伝わる "波" が数多く観測されている. そして, これらの現象を記述するさまざまな数理モデルが提出され, 研究が行われている. その多くは, "環境は場所によらず一定である" という仮定のもとで導き出されている. 実際の現象においては, 環境が近似的に一様であると考えてよいケースも多く, そういう枠組で定式化されたモデルが, 実験による定量的データと照らし合わせることにより極めて信頼性の高い数理モデルとして評価されている.

だが, 環境の空間的変動が大きくなると, 一様環境モデルはもはや適切な近似とは見なしがたく, その枠組ではとらえきれないようなさまざまな現象が観察されるであろうと想像される. また, 環境を人為的に変化させることによって拡散による波の伝播を制御するという問題は, 工学的・生物学的にも極めて興味深い.

本講演では, 空間的に周期的な非一様性をもつ環境下で, 拡散による波がどのように伝播するかという問題を取り扱う. とくに, 非一様性の強さと拡散による波の伝播速度 (平均速度) との関係を考察し, どのようにしたら波の伝播を制御できるかという問いに対する解答を与える.

具体的には, 次のような空間 1 次元の拡散方程式を考える.

$$u_t = \frac{1}{a(x)}\big(a(x)u_x\big)_x + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u;\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1}$$

ただし, ε は十分小さな正のパラメータであり, 非線形項 $\dfrac{1}{\varepsilon^2}f(u;\varepsilon)$ は各 $0 < \varepsilon \ll 1$

に対し $u \equiv 0$ および $u \equiv 1$ を安定平衡解にもつ双安定型であり, $u \equiv 1$ という状態が $u \equiv 0$ という状態よりも安定であるとする (具体的な仮定は後述). また, $a(x)$ は正値周期関数で, その最小周期を $L > 0$ とする.

$a(x)$ が恒等的に定数の場合, (1) は次のような空間的に一様な方程式となる.

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u;\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{2}$$

このとき, 各 ε に対し実数 $c_0(\varepsilon)$ が一意に定まって,

$$u(x,t) = \psi^{\varepsilon}(x - c_0(\varepsilon)t)$$

という形で表される解が存在することが知られている [1]. このように, 波形を変えずに一定速度で進む解を**進行波解**と呼ぶ. 方程式 (2) の空間一様性により, 逆向きに同じ速さで進む解も存在する.

$a(x)$ が定数でないときには, もはや一定波形・一定速度で進行する波は存在し得ない. さまざまな数値実験の結果から, $b(x) := a'(x)/a(x)$ がある程度小さい場合には, 時間周期的な速度で進行する波が存在し, $b(x)$ がある程度大きくなると, 進行する波は存在しなくなり, 代わりに平衡解が出現することが示唆されていた.

定義. 方程式 (1) の解 $u(x,t)$ が**疑似進行波解**であるとは, u は定数でなく, さらに, ある 0 でない実数 T が存在して,

$$u(x, t+T) = u(x-L, t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

が成り立つことをいう. また, $c = L/T$ を 疑似進行波解 u の平均速度という. 明らかに, 進行波解は疑似進行波解である.

疑似進行波解は, $c > 0$ のとき右へ進行し, $c < 0$ のとき左へ進行する.

以下では, 非線形項 f は, 次の仮定をみたすものとする.

(F1) $f(u;\varepsilon)$ は 各 $0 \le \varepsilon \ll 1$ に対して, ちょうど 3 個の零点 $0, \zeta(\varepsilon), 1$ をもち, それらは, $0 < \zeta(\varepsilon) < 1$ をみたす;

(F2) 任意の $0 \le \varepsilon \ll 1$ に対し, $f(u;\varepsilon) > 0$ for $u \in (-\infty, 0) \cup (\zeta(\varepsilon), 1)$, $f(u;\varepsilon) < 0$ for $u \in (0, \zeta(\varepsilon)) \cup (1, +\infty)$;

(F3) 任意の $0 \le \varepsilon \ll 1$ に対し, $f_u(0;\varepsilon) < 0$, $f_u(\zeta(\varepsilon);\varepsilon) > 0$, $f_u(1;\varepsilon) < 0$;

(F4) $\displaystyle\int_0^1 f(u;0)du = 0, \int_0^1 f_\varepsilon(u;0)du > 0.$

典型的な例として, $f(u;\varepsilon) = u(1-u)(u-(1/2-\varepsilon))$ があげられる. 仮定 (F1)-(F4) の下で, 方程式 (2) の進行波解の速度 $c_0(\varepsilon)$ は, 正の極限値 $\lim_{\varepsilon\to 0} c_0(\varepsilon) = c_0 > 0$ をもつ.

2 主結果

方程式 (1) の疑似進行波の存在および非存在に関して次の結果を得た. ただし, $b(x) := a'(x)/a(x)$ は恒等的に 0 でないとする.

定理 A.

(i) $\max_{x\in\mathbb{R}} b(x) < c_0$ が成り立つとする. このとき, ある正の定数 ε_1 が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ならば, 方程式 (1) の疑似進行波解で右に進行するものが存在する.

(ii) $\min_{x\in\mathbb{R}} b(x) > -c_0$ が成り立つとする. このとき, ある正の定数 ε_2 が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ならば, 方程式 (1) の疑似進行波解で左に進行するものが存在する.

定理 B.

定理 A によって得られた (1) の疑似進行波に対し, その平均速度 c について $|c| < c_0(\varepsilon)$ が成立する.

定理 C.

(i) $\max_{x\in\mathbb{R}} b(x) > c_0$ が成り立つとする. このとき, ある正の定数 ε_3 が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ ならば, 方程式 (1) の疑似進行波解で右に進行するものは存在しない. さらに, 各$\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ に対して, 方程式 (1) の安定平衡解 v^ε で

$$\lim_{x\to-\infty} v^\varepsilon(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} v^\varepsilon(x) = 0$$

をみたすものが存在する.

(ii) $\min_{x\in\mathbb{R}} b(x) < -c_0$ が成り立つとする. このとき, ある正の定数 ε_4 が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_4$ ならば, 方程式 (1) の疑似進行波解で左に進行するものは存在しな

い. さらに, 各$\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$ に対して, 方程式 (1) の安定平衡解 $\tilde{v}^\varepsilon$ で

$$\lim_{x \to -\infty} \tilde{v}^\varepsilon(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \tilde{v}^\varepsilon(x) = 1$$

をみたすものが存在する.

定理 B により, 周期的な非一様性を加えたときの疑似進行波の進む速さは, 空間的に一様な媒体中を進む進行波の速さよりも遅いことがわかる. つまり, 空間周期的な非一様性を加えることで波の伝播の平均速度は遅くなる.

また, 定理 A および 定理 C を組み合わせることにより,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} b(x) < -c_0 < \max_{x \in \mathbb{R}} b(x) < c_0 \tag{3}$$

をみたすような $b(x)$ に対しては, 右に進む疑似進行波は存在するが, 左へ進む疑似進行波は存在しないことが示される. したがって, そのような非一様性を加えることで, 特定の方向には波が伝播するが逆方向には伝播しないような環境 (波の一方向伝播) を作り出すことができる.

方程式 (1) は, 適当な変数変換により周期的な拡散係数をもつ反応拡散方程式

$$u_t = (d(x)u_x)_x + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0. \tag{4}$$

に変形される. したがって, 方程式 (4) に対しても類似の結果が成り立つ.

参考文献

[1] P. C. Fife and J. B. McLeod, *The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.

SURFACE-LINK のブレイド表示について

鎌田　聖一

大阪市立大学理学部

J. W. Alexander と A. A. Markov の定理は結び目理論とブレイド理論とを橋渡しする重要な役割を果たします．Alexander の定理は「どのような結び目・絡み目もブレイドの閉包の形に変形できる」ことを主張し，Markov の定理は「そのようなブレイドはある基本変形の差を除けば唯一定まる」というものです．従いまして，結び目を研究するにはブレイドの Markov の基本変形による同値類（Markov 変形同値類）を調べれば良いことになります．この方針で，たとえば，結び目・絡み目群の特徴つけが可能になりましたし，最も大きな成果としては，V. F. R. Jones が結び目・絡み目の新しい多項式不変量を発見しました．（Jones 多項式の発見は結び目理論のビッグバンとも言われます．）

同様なことを２次元について考えます．２次元（および高次元）のブレイドはさまざまな方法で定義され研究されています．２次元の結び目理論にうまくマッチするものは O. Viro による２次元ブレイドの概念です．（実はそれ以前に同様の概念が L. Rudolph により研究されています．彼は２次元の結び目よりも普通の次元の結び目との関連を研究していましたが．）

定理1 (Viro). 任意の *surface-link* は２次元ブレイドの閉包の形に変形できる．

定理2 (K). 任意の *surface-link* は単純２次元ブレイドの閉包の形に変形できる．

単純２次元ブレイドにブレイドイソトピーで変形できない非単純２次元ブレイドの存在が分かっています[4].

1

定理２の応用としては surface-link （２次元結び目・絡み目）群の特徴つけがあります．結び目・絡み目群の特徴つけは，３次元以上の高次元については M. Kervaire により代数的に完全に分かっていました．また１次元のときもさきほど述べたように Alexander と E. Artin の定理により分かっています．２次元の場合だけが取り残されていた訳ですが，定理２の単純２次元ブレイド表示を用いて特徴つけに成功しました．

定理3 (K). ２つの（単純）２次元ブレイドの閉包が同値な *surface-link* を表すための必要十分条件はある基本変形（ブレイドイソトピー・共役変形・安定化変形およびその逆変形）を度外視すると同じブレイドであることである．

系4. どのような非単純２次元ブレイドもうまく共役変形・安定化変形を施すと，単純２次元ブレイドにブレイドイソトピーで変形できる．

定理１（定理２）と定理３が Alexander と Markov の定理に相当する２次元結び目理論と２次元ブレイド理論をつなぐ結果です．これを用いて surface-link の不変量を構成することは今後の課題です．

References

[1] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. **48** (1947), 101–126.

[2] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.

[3] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 103-111.

[4] S. Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **120** (1996), 237–245.

[5] S. Kamada, *Surfaces in 4-space: A view of normal forms and braidings*, Lectures at Knots 96 (ed. S. Suzuki), World Scientific Publishing Co., 1997, pp. 39–71.

[6] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for cosed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 1-37.

[7] L. Rudolph, *Special positions for surfaces bounded by closed braids*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 93-133.

知識に基く推論について

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 小野寛晰

知識に基く推論 (reasoning about knowledge) は以前から哲学者を中心に議論されてきた論理学の一つの話題である。最近では、人工知能論や分散システムなどの情報科学の研究者やゲーム理論や経済学の研究者による研究がおこなわれるようになってきた。講演では、まず知識に基く推論の研究の目標と意義についてふれ、つぎにその理論的な裏づけとなっている様相論理および Kripke による意味論を概説し、最後にいくつかの応用例と今後の研究の方向について述べた。

我々が日常におこなっている推論、推測および判断は、それが対象としているものごと一般についての知識とそのものごとの現在の状況に関する知識などに基いておこなわれていると考えられる。したがって、日常的な推論の論理的な側面についての理解を深めていくためには、「知識」とはなんであるか、「知っている」または「信じている」ことと事実であることの間にはどのような関係があるのか、さらには自分があることを単に「知っている」ことと「「知っている」ことを自分が認識している」ことは論理的にどのような違いがあるかなどを、明らかにしていく必要がある。

そこで「ϕ であることを (たとえば、私が) 知っている」ことを $K\phi$ という論理式として表し、K という論理演算のもつ論理的性質を調べてみる。通常の論理体系に論理演算 K に関する妥当な公理と規則をつけ加えることにより得られる体系は「知識の論理」とよばれる。この知識の論理は形式体系としてはアリストテレスにより研究が始められた様相論理の体系のうちの特別なものになっている。様相論理については今世紀になってから数理論理学の立場からすでに盛んに研究がおこなわれており、したがって知識の論理の形式体系としての性質はこれらの成果を利用することができる。とくに様相論理の意味論である Kripke の意味論 (または、可能世界意味論ともよばれる) を知識の論理の理解のために用いることが可能になる。

ところで日常的な推論をおこなう場合、自分の知識だけでなく他人の知識とも関わりを持っているような状況も多い。さらに、他人が持つ知識を私がどれだけ知っているかとか、逆に私が持つ知識を他人がどれだけ知っているかということなども問題になる。それと同時に自分と他人の間にどのような共通知識があるかにより、当然推論できることが違ってくる。現実に、ネットワークを介するコミュニケーションや、株の売買などに現われる経済行為にここに述べたような問題が密接に関わってくる。これらの問題の分析に知識の論理を有効に用いることができるのである。

このように知識の論理の研究は、知識に基く推論の演繹的な側面についての基本的な理解をあたえてくれるが、それとともに「知識」のダイナミックな側面、すなわち、知識の獲得のプロセス、とくに 新たな事実がわかったときにこれまで持っていた (誤った) 知識を捨て、知識の総体を変更していくというプロセス、にも目を向ける必要がある。この問題に対してはＡＧＭ理論とよばれる試みがある。この理論は 非単調推論、とくに累積的推論 (cumulative reasoning) とも密接に関係しており、日常的な推論の持つ一つの側面を理解するための理論として興味深い。

もちろん、以上に述べたようなことは「知識」に関する問題のごく一部分でしかない。しかし、数理論理学からのこのようなアプローチが、「知識」に対する我々の理解を深めるために貢献しうると考えている。

Compact quotient manifolds of domains in a compact complex 3-dimensional projective space and the Lebesgue measure of limit sets

上智大学理工学部 加藤昌英

1 Klein 群

ここでは、主に複素3次元の場合について述べます。複素1次元の場合については、良い理論が既に L.V. Ahlfors を初め、多くの数学者によって構成され発展されています。我々は本当はこれの真似をしたいのですが。。。

1次元複素射影空間 $\mathbf{P}^1$ に作用する1次元射影変換群 $PGL(2,\mathbf{C})$ の有限生成な部分群 Γ を考えます。もし、$\mathbf{P}^1$ にある点 x とその近傍 U とがあって、任意の $g \in \Gamma \setminus \{1\}$ に対し $g(U) \cap U = \emptyset$ であるとき、x は固有不連続であるといいます。固有不連続な点を持つ1次元射影変換群の有限生成な部分群を Klein 群と呼びます。1次元の場合は、固有不連続な点全体からなる領域は、$PGL(2,\mathbf{C})$ の部分群が与えられれば一意に決まるものです。この領域の $\mathbf{P}^1$ での補集合を極限集合 (limit set) といいます。$n=2$ 次元以上の場合には、n 次元射影空間に働く n 次元射影変換群の有限生成な部分群に対して同様に考えると、固有不連続というのは局所的な性質ではありません。ですから以後、部分群 Γ を定めても、『Γ の固有不連続な点の全体』というのは一般には意味を持たず、Γ によって一意には決まらないことがわかります。そこでΓ の働く固有不連続な領域 Ω を (可能なら) 指定して組とし、(Γ,Ω) 等と記すことにします。

2 (Γ,Ω) の例

まず複素1次元について述べましょう。この場合は Ahlfors による次の定理が印象的です。

アルフォールスの定理. Γ は任意の *Klein* 群、Ω はその固有不連続な領域とします。このとき、Ω の Γ による商空間 Ω/Γ は、有限個のコンパクトリーマン面の *disjoint* な和集合に、有限個の穴を開けた空間と正則同型。

極限集合に関しては Ahlfors による次の予想があります。

アルフォールスの予想. *Klein*群の 極限集合は $\mathbf{P}^1$ 全体でなければ *Lebesgue measure* は *zero* であろう。

一方、この予想をサポートするような『実例』の構成方法として、二つの予想の成立するKlein群から新しいKlein群を構成するKlein結合定理（Combination Theorem）の方法が良く知られています。これは固有不連続な点の全体がどのような領域になるのかを、群の構成をずっと追いかけて決定します。図形的な原理は『連結和』です。だいぶ古い結果ですが極限集合の測度を評価することがMaskitによっておこなわれています([M])。これの真似を３次元で行うことが出来ます。それがこの講演の内容なのですが、まとめると次のようになります。

定理. Γ_j は $PGL(4,\mathbf{C})$ の有限生成な部分群であって、射影空間 $\mathbf{P}^3$ の単連結な領域に Ω_j に固定点なしに固有不連続に作用し、Ω_j/Γ_j は連結かつコンパクトとする。ただし $j=1,2$ であって、共通部分があってもよい。更にΩ_j は共に１次元射影直線を含むと仮定する。このとき、第３の群$\Gamma_3 \subset PGL(4,\mathbf{C})$ と 第３の単連結な領域$\Omega_3 \subset \mathbf{P}^3$ とがあって、$\Gamma_3 \simeq \Gamma_1 \times \Gamma_2$ であり、Γ_3 は Ω_3 上に固定点なく固有不連続に作用している。更にもし、$\mathbf{P}^3 \setminus \Omega_j$ *j=1,2* の *Lebesgue measure* がともに *zero* ならば $\mathbf{P}^3 \setminus \Omega_3$ の *Lebesgue measure* も *zero* になる。

証明は、Maskitのものと良く似ていますが、鍵は『連結和』が３次元でも定義出来るところです（一般に『連結和』は奇数次元で定義出来ますが、測度の計算がどうなるかが分かりません）。文献 [K3] に正確な定義と詳しい証明があります. [K2] は、種々の例、周辺の事情について参考になると思います。

参考文献

[K2] Kato, Ma., Factorization of compact complex 3-folds which admit certain projective structures, Tohoku Math. J. 41 (1989), 359-397.

[K3] Kato, Ma., Compact quotient manifolds of domains in a complex 3-dimensional projective space and the Lebesgue measure of limit sets, Tokyo J. Math. 19(1996), 99-119.

[M] Maskit, B., On Klein's combination theorem III, Ann. Math. Studies 66 (1971) 297-316.

Foliations on surfaces with GSS

Georges DLOUSSKY

October 30, 1997

It is well known that primary Hopf surfaces admit global vector fields. Hopf surfaces appear as a special case of the class of minimal compact complex surfaces containing *global spherical shells* (shortly denoted by *GSS*) : They admit an open embedding of a neighbourhood of the sphere S^3 in $\mathbf{C}^2$ with connected complement and were introduced by Ma.Kato([KA]). The case $b_2(S) \geq 1$ has been investigated by several authors ([KA] , [D1], [D2], [KH1], [N1]). Although the construction is, like for Hopf surfaces, quite simple, the description of the geometric properties is deeply related to the study of normal forms for singular germs of mappings $F = \Pi\sigma : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ which factorize through a finite number of blowing-ups.

In [DK] the situation of generic and Inoue surfaces S has been investigated: They all admit a unique global singular foliation. It is induced by a global vector field (in fact by a holomorphic $\mathbf{C}^\star$-action) if and only if S is a Inoue surface. The crucial point is the construction of normal forms for the associated germs $F = \Pi\sigma$. These germs are exactly those for which the trace $tr(S) = tr\, DF(0)$ of the tangent mapping satisfies $0 < |tr(S)| < 1$. Assuming the existence of a GSS we recover the classification of semi-super attractive germs which is implicitely given in [E].

This lecture (see [DO]) is devoted to the more complicated situation of surfaces with $tr(S) = 0$, i.e. to the case of germs $F = \Pi\sigma$ where the sequence of blowing-ups is not generic. For example, in the sequence of quadratic transformations there may be intersection points of components of the exceptional divisor which are blown up. Our main result is the following

Theorem: *Let S is a minimal compact complex surface with a GSS. Then there is always a global singular holomorphic foliation on S. Furthermore we have:*

1) If $b_2(S) \geq 1$, then S admits at most two foliations. There are two foliations if and only if S is a Inoue-Hirzebruch surface.

2) There are surfaces S with $tr(S) = 0$ admitting a global holomorphic **C***-action. In this case S is never Inoue-Hirzebruch.*

We remark that this result contributes to the problem of classifying surfaces with non-trivial global holomorphic vector fields. (see also [CHK], [GH], [Hau] and references in these papers)

In [HO] J.Hubbard and W.Oberste-Vorth study the dynamical system associated to a Henon automorphism H of $\mathbf{C}^2$. The attraction bassin U_+ of H may be completed with an infinite family of rational curves to a manifold M. The quotient of M by the infinite cyclic group generated by H is a compact surface S with GSS, $b_2(S) = 3$ and $tr(S) = 0$. This article may be considered as a generalization of [HO], since we obtain similar results for every second Betti number $b_2 > 0$ and every germ $F = \Pi\sigma$.

The talk is organized as follows:

1) Basic notions on singular foliations.

2) Basic facts about surfaces containing GSS.

3) Foliations on surfaces with GSS: Using the Brunella formulas for singular foliations we derive a linear system with coefficients in $\mathbf{Z}$ fullfilled by the numerical tangent divisor ie the positive divisor D_θ associated to a global section $\theta \in H^0(S, \Theta \otimes \mathcal{O}(-D_\theta) \otimes L), L \in Pic^0(S)$ of the sheaf of vector fields twisted by a flat line bundle. Hence we obtain numerical obstructions for the existence of sections $H^0(S, \Theta \otimes \mathcal{O}(-D_\theta) \otimes L)$ and $H^0(S, -K \otimes \mathcal{O}(-D_{-K}) \otimes L)$. The relation $D^{\mathbf{Q}}_{-K} = D^{\mathbf{Q}}_\theta + D$, where D is the sum of all rational curves shows that $D^{\mathbf{Q}}_{-K}$ is a divisor if and only if $D^{\mathbf{Q}}_\theta$ is a divisor. If there is no numerical obstruction, an explicit parametrization of the flat line bundles $Pic^0(S)$ by $\mathbf{C}^*$ allows to find a unique complex number κ such that $H^0(S, K^{-1} \otimes L^\kappa) \neq 0$. Considering logarithmic deformations $\mathcal{S} \to U$, we obtain a holomorphic function κ on U.

The heart of the proof is a precise description of the quadratic transformations associated to singular and regular sequences of self-intersections. It allows us to define an invariant $k(S) \in \mathbf{N}$ having the following property: For curves C such that $\hat{O}_C \in \hat{S}_C$ is not the intersection of two rational curves, there is a holomorphic function f_C in a neighbourhood of $\hat{O}_C$ which satisfies the functional equation

$$f_C(F_C) = f_C^{k(S)}.$$

This function yields readily:

- a global singular foliation $\mathcal{F}$ on S,
- a twisted closed logarithmic 1-form $\omega \in H^0(S, \Omega(Log\, D) \otimes L^{k(S)})$,

- a plurisubharmonic function $\tilde{G}_C$ (called Green function) on the universal covering space $\tilde{S}$ of S, which is pluriharmonic outside the rational curves

- a first step towards the classification of (super attractive) singular germs of mappings $F = \Pi\sigma : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ with two zero eigenvalues .

It is possible to describe the leaves of the foliation in the complement of the rational curves. They are isomorphic to $\mathbf{C}$ and dense in the level sets of the Green function. Here a solenoid phenomenon similar to that in [HO] occurs.

4) Existence of global vector fields: A twisted vector field $\theta \in H^0(S, \Theta \otimes \mathcal{O}(-D_\theta) \otimes L^{\lambda(S)})$ is a vector field if and only if the flat line $L^{\lambda(S)}$ is trivial. Given a surface S, we embed S in a logarithmic family $\mathcal{S} \to \mathbf{C}^\star$ such that there is a non-constant holomorphic function $\lambda : \mathbf{C}^\star \to \mathbf{C}^\star$ with $\lambda(u) = \lambda(S_u)$. This function being surjective, the flat line bundle is trivial over the (non-empty) hypersurface $\{\lambda = 1\}$. Consequently, for surfaces over this hypersurface there are global holomorphic vector fields.

1 References

[B] BRUNELLA M.: *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes.* Annales de l'ENS (A paraître 1997).

[CHK] CARRELL J., HOWARD A., KOSNIOWSKI C.: *Holomorphic vector fields on complex surfaces.* Math. Ann. 204 (1973), 73-81.

[D1] DLOUSSKY G.: *Structure des surfaces de Kato.* Mémoire de la S.M.F 112.n°14 (1984).

[D2] DLOUSSKY G.: *Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch.* Math. Ann. 280, 663-682 (1988).

[DK] DLOUSSKY G., KOHLER F.: *Classification of singular germs of mappings and deformations of compact surfaces of the VII_0 class.* Prépublication du LATP-UMR-CNRS 6632 (1996), Marseille.

[DO] DLOUSSKY G., OELJEKLAUS K. Foliations and vector fields on compact surfaces of class VII_0. Preprint 1997.

[E] ENOKI I. Surfaces of class VII_0 with curves. Tohoku Math J. 33 (1981).

[GH] GELLHAUS C., HEINZNER P.: *Komplexe Flaechen mit holomorphen Vektorfeldern.* Abh. Math. Sem. Hamburg 60 (1990), 37-46.

[GSV] GOMEZ-MONT X., SEADE J., VERJOWSKY A.: *The index of a* *holomorphic flow with an isolated singularity.* Math.Ann. 291 (1991), 737-751.

[Hau] HAUSEN J.: *Zur Klassifikation glatter kompakter* $\mathbf{C}^*$*-Flaechen.* Math. Ann. 301 (1995), 763-769.

[HO] HUBBARD J.H., OBERSTE-VORTH R.W.: *Hénon mappings in the complex domain I.* Pub. Math. IHES 79 (1994), 5-46.

[KA] KATO Ma.: *Compact complex manifolds containing "global spherical shells".* Proc. of the Int. Symp. Alg. Geometry, Kyoto 1977.

[KH1] KOHLER F.: *Feuilletages holomorphes singuliers sur les surfaces contenant une coquille sphérique globale.* Ann. Inst. Fourier 145 (1995), 161-182. Erratum Ann. Inst. Fourier 146 (1996).

[KH2] KOHLER F.: *Feuilletages holomorphes singuliers sur les surfaces contenant une coquille sphérique globale.* Medina 1995. Estado actual y persectivas en singularidades de ecuaciones diferenciales y foliaciones holomorfas. p.143-159. J.Mozo (editor), (1997).

[N1] NAKAMURA I.: *On surfaces of class* VII_0 *with curves.* Invent. Math. 78, 393-443 (1984).

[SU] SUWA T.: *Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves.* Proc.AMS. 123 (1995), No.10, 2989-2997.

semi-hyponormal 作用素のスペクトル論

長 宗雄 (神奈川大学)

Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space and $B(\mathcal{H})$ be the set of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$. $T \in B(\mathcal{H})$ is p-hyponormal if $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$. Let $T = U|T|$ be the polar decomposition of T. p-hyponormal operator T satisfies $N(T-z) \subset N((T-z)^*)$ and $\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T)$. If $p = 1$, then T is called hyponormal. If $p = \frac{1}{2}$, then T is called semi-hyponormal. We assume that U is unitary. There are three methods growing up p.

(1) $S_1 = U|T|^p$ is hyponormal operator.
(2) $S_2 = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ is $(p+\frac{1}{2})$-hyponormal (Aluthge transformation).
(3) $S_3 = L^{-1}(U) + i|T|^{2p}$ is hyponormal ($L^{-1}(U) = i(U+1)(U-1)^{-1}$: inverse Cayley transformation).

(1) is applied, for example, the extension of Putnam's inequality. That is

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leq \frac{p}{\pi}\int_{\sigma(T)} r^{2p-1}drd\theta.$$

(2) This case holds that $\sigma(S_2) = \sigma(T)$. There are many applications.
(3) is applied, for example, the proof of the following: The eigenspaces of $|T|$ are reduce U.

If T is semi-hyponormal, then for $re^{i\theta} \neq 0$ it holds that

$$(T - re^{i\theta})^*(T - re^{i\theta}) = (|T| - r)^2 + r(U - e^{i\theta})|T|(U - e^{i\theta})^* + r(|T| - |T^*|).$$

And the following theorem is important for the study of spectral properties of p-hyponormal operators.

Theorem 1. Let $\mathcal{R}$ be a set of $\mathbf{C}$, $T(t)$ be an operator-valued function of $t \in [0,1]$ which is continuous in the norm topology, $\tau_t(t \in [0,1])$ be a family of bijective map from $\mathcal{R}$ onto $\tau_t(\mathcal{R})$ and for any fixed $z \in \mathcal{R}$, $\tau_t(z)$ be a continuous function of $t \in [0,1]$ such that τ_0 is the identity function. Suppose

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathcal{R}) = \tau_t(\sigma_a(T(0)) \cap \mathcal{R})$$

for all $t \in [0,1]$. Then, for all $t \in [0,1]$,

$$\sigma(T(t)) \cap \tau_t(\mathcal{R}) = \tau_t(\sigma(T(0)) \cap \mathcal{R}).$$

Theorem 2. Let $T = H + iK$ be hyponormal with $K \geq 0$ and $\tau(T) = (H+i)(H-i)^{-1}K$. Also let $\tau(x+iy) = (x+i)(x-i)^{-1}y$ $(y \geq 0)$. Then $\tau(T)$ is semi-hyponormal and it holds that

$$\sigma(\tau(T)) = \tau(\sigma(T)).$$

Next we define the generalized polar symbols of T. Let $T = U|T|$ be semi-hyponormal with unitary U. We let $\mathcal{S}_U^{\pm}(|T|) = \text{s - }\lim_{n\to\pm\infty} U^{-n}|T|U^n$. For $0 \leq k \leq 1$, we denote $T_k = U\{k\mathcal{S}_U^{+}(|T|) + (1-k)\mathcal{S}_U^{-}(|T|)\}$. Then we have

Theorem 3. Let $T = U|T|$ be semi-hyponormal with unitary U. Then

$$\sigma(T) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma(T_k).$$

Next, let $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ be a commuting n-tuple of unitary operators and $A \geq 0$. We define operators $\mathbf{Q}_j : B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ as $\mathbf{Q}_j(T) = T - U_jTU_j^*$ $(j = 1, ..., n)$.

[Def.] $(\mathbf{U}, A)$: p-hyponormal tuple $\iff$ $\mathbf{Q}_{j_1} \cdots \mathbf{Q}_{j_m} A^{2p} \geq 0$ for all $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$.

For p-hyponormal tuple $(\mathbf{U}, A)$, we let $\mathcal{S}_j^{\pm}(T) = \text{s - }\lim_{n\to\pm\infty} U_j^{-n}TU_j^n$, and we denote, for $0 \leq k \leq 1$,

$$(k\mathcal{S}_j^{+} + (1-k)\mathcal{S}_j^{-})_pA = \{k\mathcal{S}_j^{+}(A^{2p}) + (1-k)\mathcal{S}_j^{-}(A^{2p})\}^{\frac{1}{2p}}.$$

and we denote, for $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n) \in [0,1]^n$, $A_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^{n}(k_j\mathcal{S}_j^{+} + (1-k_j)\mathcal{S}_j^{-})_pA$.

The Xia spectrum $\sigma_X(\mathbf{U}, A)$ of p-hyponormal tuple $(\mathbf{U}, A)$ is defined by

$$\sigma_X(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k}\in[0,1]^n} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}}).$$

Then, by D. Xia, B. P. Duggal, M. Chō and T. Huruya, we have

Theorem 4. Let $(T_1, ..., T_n)$ be a doubly commuting n-tuple of p-hyponormal operators. Let $T_j = U_j|T_j|$ be the polar decomposition. We assume that every U_j is unitary. Let $A = |T_1| \cdots |T_n|$. Then $(\mathbf{U}, A)$ is p-hyponormal tuple and

$$\| \prod_{j=1}^{n}((T_j^*T_j)^p - (T_jT_j^*)^p) \| \leq \frac{2p}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U},A)} r^{2p-1} d\theta_1 \cdots d\theta_n dr.$$

CONTINUOUS VECTOR FIELDS AND THOM'S ISOTOPY THEOREMS

K.BEKKA

R.Thom introduces the notion of vector fields controlled by tubular neighbourhoods and proves that this vector fields are integrable.After he extends the Ehresmann's isotopy theorem to singular spaces more precisely to the so called Thom-Mather stratified sets.In this talk we proves a "stronger" version of the 1^{st} isotopytheorem.This version is obtained by integrating continuous controlled vector fields. At first we prove that a necessary and sufficient condition on the stratification to obtain such vector field is that stratification is C-regular i.e. the control functions satisfies the Thom condition (a_f).The proof of integrability of such vector field is more direct since it is co! ntrolled and continuous.Finally we construct such vector field by lifting a smooth vector field over a mapping submersive on the strata.The homeomorphism obtained by this method is not only smooth on the strata, but also have the following property:the image of a C-regular substratified set by this homeomorphism is C-regular. Now, what about the second Thom's isotopy theorem?Unfortunately the lifting of a continuous controlled vector field by a Thom map is not in general continuous.a simple example is given by:

example Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by $f(x,t) = (x^2(x^2+t^2), t)$we obtain a Thom stratification of f by stratifying $\mathbb{R}^2$ in thesourceand the target by $t-$axis and it's complement.Let $v = (0,1)$ be the constant vector fields in the target(it is controlled by $\tilde{\rho}(X,T) = |X|^2$), then it's unique lift $\xi$is defined by $\xi = (\frac{-tx}{2x^2+t^2}, 1)$ on$\mathbb{R}^2 - \{t-axis\}$ and $\xi = (0,1)$! on the $t-axis$;is not continuous on the diagonal $\Delta = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | x = t\}$. This is due to the fact that $\tilde{\rho} \circ f$ is not a Thom function i.e. the result of composition of Thom maps is not in general a Thom map.

Now if we take instead of $\tilde{\rho}$, the following control function: $\rho'(X,T) = \sqrt{T^4 + 4|X|} - T^2$ where (X,T) are the coordinates in the target.Then $\rho' \circ f(x,t) = 2x^2$ is a Thom function.It follows that every continuous vector field controlled by ρ'can be lifted to a continuous vector field controlled by $\rho(x,t) = x^2$

Date: 5 November 1997.

We obtain the following result for Thom maps :Every continuous controlled vector field in the target admits a continuous lift if and only if the composition of the Thom map with any control function in the target is a Thom map.This bring us to the following question:Is it always possible to obtain such lift after a suitable choice of the control functions in the target or refining the stratification of the map?

Université de Rennes I, Campus Beaulieu 35042 Rennes (FRANCE)
E-mail address: bekka@univ-rennes1.fr

Umbilic Points of Surfaces in $\mathbb{R}^4$

E. A. Feldman [1] showed that the number of umbilic points of a generic compact surface M in $\mathbb{R}^3$ is always greater or equal than $2|\chi(M)|$ ($\chi(M)$: Euler number). Now, since the inverse of the stereographic projection from $\mathbb{R}^3$ to S^3 takes the umbilic points of M to the inflection points (in the sense of Little [2]) of its image in $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, it follows that the number, N, of inflection points of a generic compact orientable surface contained in S^3 satisfies the inequality $N \geq 2|\chi(M)|$.

It is then natural to ask whether this result holds for any generic convex (in the sense that it is contained in the boundary of its convex hull) compact surface of $\mathbb{R}^4$. We show that this is true for the more general class of generic locally convex compact surfaces in $\mathbb{R}^4$. This is done by using the geometrical information on the surface provided by the study of the generic singularities of the height functions on M [3], together with the analysis of the asymptotic direction fields, whose singularities are, precisely, the inflection points of M.

For the more general case, including the non locally convex compact surfaces, we must take into account certain generically isolated points that we call <u>parabolic cusps</u> of M.

We prove that if N represents the sum of the numbers of (imaginary type) inflection points and of parabolic cusps of a surface M with no inflection points of real type, then $N \geq 2|\chi(\overline{M_h})|$, where M_h is the hyperbolic part of M.

(R.A. Garcia, DKH Mochida, MC Romero-Fuster - MAS. Ruas)

References:

[1] E.A. Feldman, On parabolic and umbilic points of immersed surfaces, Transac. Am. Math. Soc. 127 (1967), 1-28

[2] J.A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean space. Annali Mat. Pura et Appl. (ser. 4A) 83 (1969), 261-336.

[3] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster, and M.A. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. Geometriae Dedicata 54, (1995), 323-332.

Unbounded Toeplitz Operators in the Fock Space.

JAN JANAS

In recent years theory of bouded Toeplitz operators in the Fock space was B studied intensively, [3] [4] [5] . Unbounded Toeplitz operators in B were introduced by Bargmann in his well known paper [1] but only for very special symbols.
A general class of symbols was considered by Berezin in [2]. Below we shall give a short review of (mostly ours) results on unbounded Toeplitz operators in B.

Let $L^p(\mu)(p \geq 1)$ be the Banach space of L^p integrable functions in $\mathbf{C}^n$ with respect to the Gaussian measure $d\mu(z) = \pi^{-n}\exp(-|z|^2)dV$, here dV is the Lebesgue measure in $\mathbf{C}^n$. Let P be the orthogonal projection from $L^2(\mu)$ to the Bargmann-Segal space B of all entire functions which belong to $L^2(\mu)$. B is the Hilbert space with the orthonormal basis $f_k(z) = z^k/k^!$, $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathrm{N}^n$. Given a measurable function φ on $\mathbf{C}^n$ one defines the Toeplitz operator T_φ in B by

$$T_\varphi f = P(\varphi \cdot f).$$

The domain $D(T_\varphi)$ of T_φ is defined as the intersection $B \cap D(M_\varphi)$, where M_φ is the multiplication operator : $f \to \varphi \cdot f$.
In what follows we concenrate on the following questions. How to find the adjoint operator T_φ^*, when Toeplitz operators are closed, essentially selfadjoint and when their resolvent is compact.

1 COMPUTING T_φ^*.

In order to describe the adjoint of T_φ we need the next definition. We define the operator Π_φ in B by

$$\Pi_\varphi f(z) = \int \varphi(a) f(a) \exp(z, a) d\mu(a),$$

where $(z,a) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{a}_k$. Then we put

$$D(\Pi_\varphi) = \{f \in B, \int \varphi(a) f(a) \exp(z,a) d\mu(a) \in B\}$$

It turns out that for entire symbols φ one can prove, that $T_\varphi = \Pi_\varphi$ see [6]. The problem of computing T_φ^* for entire φ has already been studied by Newman and Shapiro in [9].
The following result gives a sufficient conditions on entire φ which allow to compute T_φ^*, see [7].

THEOREM **1.1** *Let E be the linear span of $\{e_a(z) := \exp(z,a), a \in \mathbf{C}^n\}$. Assume φ is an entire function satisfying the following conditions : $E \subset D(T_\varphi)$*

$$(*) \qquad D(T_\varphi) \subset D(T_{\varphi^{(s)}}), s \in \mathbf{N}^n$$

$$(**) \qquad \Sigma_s |\varphi^{(s)}(w)| \|\varphi^{(s)}(\cdot + w)\| \frac{1}{s!} < +\infty,$$

where $\varphi^{(s)} = D^s \varphi$ is the derivative of order s.
Then $T_\varphi^* = \Pi_{\overline{\varphi}}$.

REMARK **1.2** The conditions (*) and (**) are not necessary for the equality $T_\varphi^* = \Pi_{\overline{\varphi}}$, see [7]. For φ not necessary entire only a partial result is known [7]

THEOREM **1.3** *If φ satisfies the condition*

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq C \exp(|z-w|^2/4),$$

then $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

In particular for such φ, $T_{\overline{\varphi}}$ must be closed.

2 WHEN T_φ IS CLOSED ? .

This question turns out be delicate. Even very simple symbols φ defined T_φ is not closed in general ($e.g.\, \varphi(z_1, z_2) = \overline{z}_1 \overline{z}_2$). Here is a condition which guarantees closedness of T_φ, see [8].

THEOREM **2.1** *If φ is a complex Borel function on $\mathbf{C}^n$ and D is a core for T_φ , then the following conditions are equivalent,*
(i) T_φ *is closed*
(ii) *there exist $c > 0$ such that*

$$\|\varphi f\|^2 \leq c(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2),\ f \in D.$$

For particular symbols φ one can prove more [8, Th.2.2]
Let φ be a complex Borel function in $\mathbf{C}^n$ s.t.

$$\varphi(z) = \varphi(|z_1|, \cdots, |z_n|).$$

Then T_φ is closed iff there exists $c > 0$ s.t.

$$\|\varphi f_k\|^2 \leq c(1 + |(\varphi f_k, f_k)|^2),$$

$k = 0, 1, \cdots$.

3 SELFADJOINTNESS.

The problem of selfadjointness of T_φ for general symbol φ is rather hopeless. We only have the following special results :

THEOREM **3.1** *Let φ be a real volued Borel function in $\mathbf{C}^n$. Then T_φ is selfadjoint (essentially selfadjoint) provided*
i) n= 1 and $\varphi(z) = |p(z)|^2$, where $p(\cdot)$ is a polynomial
ii) there are positive numbers $t_1, \cdots, t_n$ such that

$$\varphi(e^{it_1\Theta} z_1, \cdots, e^{it_n\Theta} z_n) = \varphi(z_1, \cdots, z_n)$$

for almost all $z \in |BC^n$ (w.r. t[V]). Moreover, we have

$$T_\varphi^* = \overline{T}_\varphi = \Pi_\varphi.$$

One can prove another criteria for selfadjointness of T_φ but we don't formulate them here, see [8].

4 WHEN THE RESOLVENT $R(\lambda, \overline{T}_\varphi)$ OF $\overline{T}_\varphi$ IS COMPACT ?

The above question has not been studied in depth. The following sufficient conditions for positive answer has been found, see [6].

THEOREM 4.1 *The resolvent $R(\lambda, \overline{T}_\varphi)$ is compact provided that*

(i) $$\varphi \text{ is real valued and } \lim_{|z|\to\infty} |\varphi(z)| = +\infty,$$

or

(ii) $$\int Re\varphi(z)|f(z)|^2 d\mu(z) \geq c\|gradf\|^2, \; c > 0$$

where $\|gradf\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|D_k f\|^2$

REFERENCES

[1] Bargmann V., On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Comm. Pure and Appl. Math. 14 187-214 (1961)

[2] Berezin F.A., Covariant and contravariant symbols of operators, Math. USSR Izv. 6 1117-1151, (1972).

[3] Berger C.A., Coburn L.A., Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space, Trans. Am. Math. Soc. 301, 813-829 (1987)

[4] Berger C.A., Coburn L.A., Heat flow and Berezin-Toeplitz quantization, Am. J. Math. 116, 563-590 (1994)

[5] Coburn L.A., Xia Jingbo, Toeplitz Algebras and Rieffel Deformations, Comm. Math. Phys. 168, 23-38 (1995).

[6] Janas J., Unbounded Toeplitz operators in the bargmann-Segal space, Studia Math. 99 87-99, (1991).

[7] Janas J., Unbounded Toeplitz operators in the Segal-Bargmann space III, Mat. Scand. (to appear).

[8] Janas J., Stochel J., Unbounded Toeplitz Operators in the Segal-Bargmann Space II, J. Funct. Anal. 126 No 2, 418-447 (1994).

[9] Newman D.J., H.S.Shapiro,Fischer spaces of entire functions, AMS Proc.Symp.Pure Math.Vol.XI ,"Entire functions and related parts of analysis" J.Korewar, Ed.Providence,360-369 (1968).

Institute of Mathematics PAN
31-027 Cracow
ul. Św. Tomasza 30
E-mail : najanas@cyf-kr.edu.pl