北海道大学大学院理学研究科特別講演（平成９年１１月１９日（水）16:30-17:30）

講演タイトル：「MacPherson 類の Verdier 型 Riemann-Roch と Milnor 類」

與倉　昭治（鹿児島大学理学部）

概要：古典的な複素ベクトル束の Chern 類の理論とは、簡単に言えば、Gauss-Bonnet の公式を満たす、K-理論から cohomology-理論への唯一の自然変換のことであると言える。唯一性は勿論「Gauss-Bonnet の公式を満たす」ことから出てくる。複素解析多様体 X が特異点をもたなければ、X の接束 TX を経由して X の Chern 類 $c(X) := c(TX)$ が定義される。しかし、特異点を持つ場合は、接束が定義されないため、このままでは Chern 類が定義されない。特異点を許す多様体の Chern 類の存在は Deligne と Grothendieck によって予想され (1969)、MacPherson によって肯定的に解決された (Ann of Math.114, pp.423-432, 1974)。それは次の定理である。

MacPherson の定理:$\mathcal{F}$を constructible function の covariant functor とする。その時（条件）「Xが特異点を持たなければ $C_*(1_X) = c(TX) \cap [X]$」を満たす自然変換 $C_* : \mathcal{F} \to H_*(;\mathbf{Z})$ が唯一つ存在する。

関手 $\mathcal{F}$の共変性は、標語的に言えば写像の各ファイバーの Euler-Poincaré 標数をとることである。一方、関手 $\mathcal{F}$はより単純な反変関手性を持っている。すなわち、写像 $f : X \to Y$ に対して、準同型写像 $f^* : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ を $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ で定義すると、$\mathcal{F}$ は反変関手になる。即ち、普通の関数の反変性である。この反変関手としての $\mathcal{F}$に対して次の問題を考える。写像 $f : X \to Y$ に対して、次の図式を可換にするような準同型写像 $f^G : H_*(Y;\mathbf{Z}) \to H_*(X;\mathbf{Z})$ は存在するか？

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{C_*} & H_*(Y;\mathbf{Z}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^G} \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{C_*} & H_*(X;\mathbf{Z}) \end{array}$$

同様な問題は Baum-Fulton-MacPherson の Riemann-Roch 定理に対して次のような予想が彼らによってなされ(Publ.IHES.45, pp.101-145, 1975),Verdier により解決された(Astérisque 36-37, pp.189-228, 1976)。これは現在 Verdier-Riemann-Roch と呼ばれている。

If $f : X \to Y$ is a local complete intersection morphism with T_f being the virtual relative tangent bundle, then the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} K_0(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_*(Y)_{\mathbf{Q}} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle td(T_f)\cap f^*} \\ K_0(X) & \xrightarrow{\tau_X} & A_*(X)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

そこで、次の問題を考える。If $f : X \to Y$ is a local complete intersection morphism with T_f being the virtual relative tangent bundle, then does the following diagram commute ?:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{C_*} & H_*(Y;\mathbf{Z}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c(T_f)\cap f^*} \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{C_*} & H_*(X;\mathbf{Z}) \end{array}$$

f が smooth morphism の場合は答えは YES である。しかし、一般の場合は、答えは NO である。それは、特殊なケース、つまり、Yが一点からなるときを考えると分かる。その時は Xは非特異多様体内の complete intersection となり、上の問題は「Xの Chern-Schwartz-MacPherson 類と Fulton-Johnson の Chern 類は等しいか？」という２つの類の差の問題と同等である。しかし、特異点を持つ平面曲線の場合にすでに、２つの類は等しくないことが分かる。最近、孤立特異点のみを持つ非特異多様体内の complete intersection の場合は諏訪立雄氏（北大）により誤差が特異点のミルナー数の和であることが証明された（CRAS.Paris 324,pp.67-70, 1996)。また任意特異点を持つ超曲面の場合は Paolo Aluffi 氏 (Florida State Univ.) により誤差が特異点の$\mu-class$ を用いて特定された（Trans.Amer.Math.Soc. 掲載予定)。従って、上の問題は「ミルナー数」の概念を 'Riemann-Roch 問題' の立場から捉えようとするものであるといえる。実は、f^Gが存在するためには、fは極めて強い次の条件を満たさなければならない：「constructible function f_*1_Xが locally constant function、すなわち、fの各ファイバーの Euler-Pincaré 標数の関数が locally constant である」、実はもっと強く「fの各ファイバーの Chern-Schwartz-MacPherson 類達が locally homologous である」。このような条件を満たすものとして、Fulton-MacPherson の bivariant theory に出てくる Euler morphism がある。J.-P.Brasselet の定理 (Astérisque101-102, pp.7-32, 1981) により、fが Euler であれば、f^Gが存在する。さて、f が local complete intersection morphism であり且つ Euler morphism であれば、２つの標準的な準同型写像 $f^G, c(T_f) \cap f^* : H_*(Y;\mathbf{Z}) \to H_*(X;\mathbf{Z})$ が存在することになる。そこで問題はこの 2 つの準同型写像の差$\mu := f^G - c(T_f) \cap f^*$を$f$の何らかの量を用いて記述できないかということである。もっと具体的には、smooth morphism とのギャップをはかるような、fの Whitney stratification および各 strata の何らかの量を用いて記述できないか？Yが一点 p からなるときは

$$\mu([p]) = f^G([p]) - c(T_f) \cap f^*([p]) = C^{SM}(X) - C^{FJ}(X)$$

すなわち、Xの Chern-Schwartz-MacPherson 類と Fulton-Johnson の Chern 類の差である。この差を「Xの Milnor 類」と呼ぶことにする。従って、Yが一点からなるときは Milnor 類をXの Whitney stratification を用いて記述できるかどうかという問題になる。これについては、J.-P.Brasselet, D.Lehmann, J.Seade, 諏訪立雄等により解決されつつある。A.Parusinski と P.Pragacz は超曲面の場合一般化されたミルナー数、言い換えれば Milnor 類の０次の成分の次数（degree)、を Whitney stratification の各 strata の closure の Chern-Schwartz-MacPherson 類および各 strata のミルナー数を用いて表現していること（J.Alg.Geometry 4, pp.337-351, 1995) を最後に触れておく。（詳細は、“On a Verdier-type Riemann-Roch for Chern-Schwartz-MacPherson class, Topology and Its Applications (to appear)”を参照。）

特異多様体上のベクトル場の指数とその応用

諏訪 立雄
北大 理

1997年11月25日

可微分多様体の大域的不変量はベクトル場が存在する場合にはその特異点に局所化され、局所不変量の和と大域的不変量は互いに規定しあう．その最も有名な例としてベクトル場の指数に対する Poincaré-Hopf の定理が知られている．

Theorem(Poincaré-Hopf)
M を n 次元コンパクト可微分多様体、v を M 上の C^∞-ベクトル場で孤立特異点 $\{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ を持つとする．このとき、M の Euler-Poincaré 指標と、孤立特異点の Poincaré-Hopf 指数 $PH(v, p_i)$ との間に次が成立する：

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{r} PH(v, p_i).$$

つぎに、幾何的指数と特性類を結びつける最も古典的結果として、Gauss-Bonnet の定理がある．

Theorem(Gauss-Bonnet) M を n 次元コンパクト複素多様体、TM を M の接束とすると次が成立する：

$$\chi(M) = \int_M c_n(TM)$$

このような結果の類似を特異多様体上で議論しよう．その際、Poincaré-Hopf の指数は、位相幾何学的、微分幾何学的な側面から、それぞれ Schwartz 指数と、仮想指数に一般化され、それぞれの幾何学的量としての意味、両者の間の関係とを調べる事が重要な問題となる．以下 $n+k$ 次元複素多様体 M に埋め込まれた n 次元複素解析集合 V について考える．

先ず、Schwartz 指数に関して、V が孤立特異点のみを持つ場合に次が知られる：

Theorem(Seade-Suwa) $n+k$ 次元複素多様体 M に埋め込まれた n 次元コンパクト複素解析集合 V の特異集合 $Sing(V)$ は孤立点 $\{p_1, \cdots, p_r\}$ のみからなるとし、v は $V - Sing(V)$

で孤立特異点 $\{p_{r+1},\cdots,p_s\}$ を持つベクトル場とする．このとき、

$$\sum_{i=1}^{s} Sch(v,p_i) = \chi(V)$$

が成り立つ．

次に仮想指数について、次のような状況を考える．

"M 上の階数 k の正則ベクトル束 $N \to M$ と正則切断 s が存在して、$V = s^{-1}(0)$ となる."
この時 $(TM-N)|_V$ を V の仮想接束という．この状況で、仮想指数に関し次が示される：

Theorem(Lehmann-Soares-Suwa) 上の状況において、$\sqcup S_\alpha = Sing(V) \cap Sing(v)$ とおくと

$$\sum_{\alpha=1} Vir(v,S_\alpha) = \int_V c_n(TM-N)$$

が成り立つ．

最後に Schwartz 指数と仮想指数の関係について述べる．

先ず、V が非特異であるなら両者は Poincaré-Hopf 指数に一致する．

$$\chi(V) = \sum Sch = \sum PH = \sum Vir = \int_V c_n(V)$$

即ち、Gauss-Bonnet の定理を導く．V が孤立特異点 p を持つ場合、両者の差は Milnor 数 $\mu(V,p)$ によって与えられる．すなわち：

Theorem(Seade-Suwa) ベクトル場 v が点 p で孤立特異点をもつとすると、

$$Sch(v,p) - Vir(v,p) = (-1)^{n+1}\mu(V,p)$$

が成り立つ．

Theorem(I)(Seade-Suwa) V の特異点集合が孤立点 $\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$ のみからなるとき、

$$\chi(V) = \int_V c_n(TM-N_V) + \sum_i (-1)^{n+1}\mu(V,p_i)$$

が成り立つ．

以上に述べた議論は、V が一般余次元の特異集合を持つ場合にも適応可能である．その場合それぞれの指数はホモロジー類として一般化され、このとき定理 (I) の結果は Schwartz-MacPerson-Chern class $c_*(V)$ と Fulton-Johnson canonical class c^{FJ} の差が Milnor class によって記述される事として拡張される：

Theorem(II)(Brasselet-Lehmann-Seade-Suwa)

$$c_*(V) = c^{FJ}(V) + (-1)^{n+k}\sum_\alpha \mu(V,S_\alpha).$$

(伊澤 毅 記)

Regularity of free boundary for semilinear parabolic equations

Hi Jun Choe

We consider a semilinear parabolic equation

$$u_t - \Delta u = u^\gamma, \quad \gamma \in (0,1)$$

with initial data $u(x,0) = u_0(x) \geq 0$. This equation appears in the reaction diffusion problems, obstacle problems and etc. The interesting phenomena is that the solution has compact support if u_0 has compact support. Furthermore the solution has finite extinction property. Our main concern is to analyze the free boundary $\partial\{u > 0\}$. We will show the free boundary consists of horizontal points and nonhorizontal points. The flat nonhozizontal points will be regular and consequently we will prove a partial regularity theorem for the free boundary.

1

有限単純群分類定理をもっと活用しよう！

熊本大学理学部　　八牧 宏美

有限単純群の分類定理が証明されてから１５年余りが過ぎ去った。分類定理とは「有限単純群は素数位数の巡回群、５次以上の交代群、Lie 型の単純群、２６個の散在群につきる」と云うものである。分類定理を応用して多くの興味ある結果が得られている。「有限単純群の外部自己同型群は可解である」と云う Schreier 予想が個々の単純群を調べることによって解決し、これを用いて Wielandt, Nagao, O'Nan によって６重可移群は自明なもの、即ち、対称群と交代群に限ることが示され６重可移群の分類が完成した。Curtis, Kantor, Seitz 等によって単純群および単純群の拡大である２重可移群は分類された。その他の場合は Hering 等によって単純群の分類に帰着され２重可移群の分類も完成した。Kantor は奇数次の原始置換群を分類し、Kantor, Schacher は可移置換群は位数が素数巾の半正則元を含むことから、ある種の相対 Brauer 群が無限群になることを証明した。Hiramine は有限アフィン平面で点上共線変換群が原始的に作用するものを分類した。Zelmanov は Schreier 予想の解決を用いて Hall-Higman の定理を法として制限 Burnside 問題を解決し Fields 賞を得た。この事実は分類定理を使うことが世界で公に認められたとことを示している。これらと年代は前後するが Aschbacher, Guralnick は有限群は２個の共役な可解部分群で生成されることを示し、Kleidman は連正規部分群に関する Kegel-Wielandt 予想を解決した。Pyber は自然数 n と n の素因数に対する Sylow 群の型を与えたとき位数 n の有限群の個数の評価式を得た。Finkelstein, Kleitman, Leighton は素数位数の群を除けば全ての有限群にはその位数の平方根以上の位数の部分群が存在することを証明した。Gross は奇素数の集合を π とするとき群が E_π を満たすならば C_π を満たすこと、即ち、P. Hall 予想を解決した。Feit, Seitz は指標が有理数値をとる単純群を調べ多くの興味ある結果を得た。例えば位数の等しい全ての元が共役となる群を分類した。さらに単純群の外部自己同型はある共役類を必ず動かすことを証明した。Stroth は同型な部分群が全て共役となる群を分類した。Babai は対称群、交代群から選んだ２元が全体を生成する確率を与えた。Chigira は各 Sylow 群の個数と素数 $p(\neq 3)$ が互いに素であることが p べき零である必要十分条件であることを示した。この系として p べき零性についての Huppert 予想が得られる。Dalla Volta, Lucchini は「殆ど単純な群」は高々３元で生成されることを、Malle, Saxl, Wiegel は非可解単純群は位数２の元と強実な元の２元で生成され、$U_3(3)$ を除けば３個の位数２の元で生成されることを証明した。Kantor, Guralnick は非可解単純群は２個の奇数位数の部分群で生成されることを証明した。Arad, Ward は Hall $2'$-群、Hall $3'$-群の存在が可解群となる必要十分条件であることを示した。Lubotzky, Pyber, Shalev は与えられた指数をもつ部分群の個数の評価式や生成元の個数の評価式を得た。Mann, Shalev は与えられた指数をもつ極大部分群の個数の評価式を与えた。このように分類定理は無限群の研究

者にも広く使われていることを強調したい。

有限群の位数を割る素数の集合を頂点集合、相異なる2頂点pとrは位数prの元が存在するときに結ぶことによって出来るグラフを有限群の素数グラフと云う。有限群の素数グラフはGruenbergとRoggenkampによる有限群の整数表現のコホモロジーの問題から生じた。とくに素数グラフが非連結であることと、オグメンテーションイデアルが群の作用で不変な右加群の直和に分解すること、が同値であることがGruenberg, Roggenkamp, Williamsによって示されている。素数グラフは有限単純群の分類定理と併用することによって有限群の構造の解明に威力を発揮することが最近知られてきた。Gruenberg, Kegelは非連結な素数グラフをもつ群の分類を試み、このような群はFrobenius群に非常に近い群か有限単純群に非常に近い群となることを示した。続いてWilliams, Iiyori, Yamaki, Kondrate'vは素数グラフの連結成分の個数の分類、即ち有限群の素数グラフの連結成分の個数は6個以下となることを証明した。これはGruenberg-Kegel予想を解決したことになる。実際Jankoの単純群J_4の素数グラフは6個の連結成分を持つ。この結果はZemlin, Rust, Iiyori, Yamakiによる群上の方程式の解の個数に関するFrobenius予想の証明に有効に使われている。ここではLie型単純群の極大トーラスが重要な働きをしている。Iiyori, Yamakiは素数グラフの2頂点間の距離の評価を得た。単純群や可解群では2頂点間の距離は有限ならば3以下となる。またIiyoriはある条件を満たすシャープな通常指標の存在・非存在の、Chigira, Iiyoriはある条件を満たすシャープなBrauer指標の存在・非存在の、素数グラフによる判定法を発見した。Brandl, Shiは巡回部分群の位数が連続する群を、Chigiraは可換部分群の位数が連続する群を、各々分類した。Deng, Shiは群の位数を割る素数の個数はその群の元の位数で合成数となるものの個数に2を加えたものを超えないことを示し、さらに等号が成立するときその群は単純群となることを証明した。ごく最近、Chigira, Iiyori, Yamakiは頂点2からの距離が2以上となる頂点に対応するSylow群は可換群となることを示した。換言すれば「偶数位数の群では非可換なSylow群は常に位数2の元と可換になる自明でない元を含む」と云うことになる。Gruenberg, Roggenkampが素数グラフを考えるより10年程前に日本のHattoriは群の自明でない元の集合を頂点集合、相異なる2頂点は可換なときに結ぶことによって出来るグラフを考え、グラフが非連結となる群の分類などいくつかの問題を提起した。Iiyoriはこのグラフが連結であることと素数グラフが連結であることが同値あることを証明している。

1997年9月6日に鈴木通夫氏から戴いた電子メールの最後の一節に'Nowaday, the most deep theorems must be the consequences of the classification'と書かれてある。実際、最近の主要な雑誌の群論関係のほとんどの論文は分類定理を使用していると云っても過言ではない。有限単純群の性質を明らかにし有限単純群の分類定理を応用して有限群、無限群の未知の現象を発見することが群論の発展に大きく貢献すると確信しています。

追記：　本文の前半は12月16日の室蘭工業大学での談話会、後半は12月8日の北海道大学での特別講演の内容にほぼ一致します。しかし前半、後半ともに有限単純群の分類定理を応用した内容ですから併合することによる違和感はないと思います。

Representations of the Rook Monoid
Sapporo - December 1997

Louis Solomon (University of Wisconsin)

$\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$
S_n = group of all permutations σ of $\mathbf{n}$
domain$(\sigma) = \mathbf{n}$ range$(\sigma) = \mathbf{n}$
product: $i(\sigma\tau) = (i\sigma)\tau$
Represent σ by $n \times n$ permutation matrix $[\sigma]$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma]$$

R = set of all injective maps σ such that
domain$(\sigma) \subseteq \mathbf{n}$ range$(\sigma) \subseteq \mathbf{n}$
product: $i(\sigma\tau) = (i\sigma)\tau$
domain$(\sigma\tau) = \{i \in \text{domain}(\sigma) \mid i\sigma \in \text{domain}(\tau)\}$
$R \supseteq S_n$ is semigroup with identity (monoid)
Represent $\sigma \in R$ by $n \times n$ matrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ \\ 3 \mapsto 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma]$$

$\mathcal{R} = \{[\sigma] \mid \sigma \in R\}$ entries in $\{0, 1\}$ at most one 1 in each row and column
$\mathcal{R} \leftrightarrow$ placements of non-attacking rooks (as in chess game)
$\mathcal{R}$ = monoid (rook monoid) $\simeq R$ by $\sigma \mapsto [\sigma]$

Define rank$(\sigma) = |\text{domain}(\sigma)|$ = rank of matrix $[\sigma]$
$R^k = \{\sigma \in R \mid \text{rank}(\sigma) = k\}$
$R^k \supseteq S_k$ = permutations of $\{1, \dots, k\}$
$|R^k| = \binom{n}{k}^2 k!$
(place k rooks on $n \times n$ chessboard; choose rows $\binom{n}{k}$ ways and columns $\binom{n}{k}$ ways)
$|R| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!$

F field char$(F) = 0$
Representation of R is homomorphism $\vartheta : R \to \mathbf{M}_d(F)$ d some positive integer $\vartheta(1) = 1$

Examples of irreducible representations:

Ex. $\vartheta(\sigma) = 1 \in F$ trivial representation

Ex. $\vartheta(\sigma) = [\sigma]$

Main points: "no proofs" ; say a little about each point if time permits

(1) Munn's representation theory and character formula
(2) Character multiplicities
(3) Representation on the polynomial ring $F[x_1, \ldots, x_n]$
(4) Representation on tensors; analogue of Schur duality for S_n and $\mathbf{GL}(V)$
(5) q-generalization; generators and relations

1. Munn's representation theory and character formula

W.D.Munn, Matrix representations of semigroups, Proc. Camb. Phil. Soc. 53 (1957) 5-12

W.D.Munn, The characters of the symmetric inverse semigroup, same volume pages 13-18.

$A = \oplus_{\sigma \in R} F\sigma$ monoid algebra

Agree representation of R is same as representation of A

Munn proved A semisimple (not obvious)

Munn constructed all irreducible rep's of A in terms of irreducible rep's of S_k, $0 \le k \le n$

Only one new idea in 1997: construct certain central idempotents of A

Define $I^{(k)} = \sum_{\mathrm{rk}(\sigma) \le k} F\sigma$ two sided ideal of A

Ascending chain $F \simeq I^{(0)} \subset \cdots \subset I^{(k-1)} \subset I^{(k)} \subset \cdots \subset I^{(n)} = A$

If we know A semisimple $\exists$ unique central idempotent η_k such that $I^{(k)} = I^{(k-1)} \oplus A\eta_k$

Problem to find η_k

For $K \subseteq \mathbf{n}$ define $\varepsilon_K \in R$ by $\varepsilon_K =$ identity map of K

$[\varepsilon_K] = \sum_{i \in K} E_{ii}$ (E_{ij} matrix units)

Define $\eta_K = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|K-J|} \varepsilon_J \in A$ ("inclusion-exclusion")

Show $\eta_K \in A$ idempotent and $\eta_J \eta_K = \delta_{JK} \eta_K$ Define $\eta_k = \sum_{|K|=k} \eta_K$

Proposition η_k is central idempotent and $I^{(k)} = I^{(k-1)} \oplus A\eta_k$. Thus $A = \oplus_{k=0}^n A\eta_k$

Proposition (Munn) $A\eta_k \simeq \mathbf{M}_{\binom{n}{k}}(FS_k)$ by an explicit map ψ_k

[Definition of ψ_k : For each $K \subseteq \mathbf{n}$ choose $\mu_K \in R : \{1, \ldots, k\} \to K$. Let $\mu_K^- \in R : K \to \{1, \ldots, k\}$ be the "inverse" of μ_K. The elements $\sigma\eta_k$ with $\sigma \in R^k$ are an F-basis for $A\eta_k$. Let E_{IJ} be matrix units indexed by k-subsets of $\mathbf{n}$. If $\sigma \in R^k$ has domain I and range J, then $\mu_I \sigma \mu_J^- \in S_k \subseteq FS_k$. Define $\psi_k(\sigma\eta_k) = \mu_I \sigma \mu_J^- E_{IJ} \in \mathbf{M}_{\binom{n}{k}}(FS_k)$.]

Thus $A \to A\eta_k \to \mathbf{M}_{\binom{n}{k}}(FS_k)$

Lift representation ρ of S_k to representation ρ^* of A : apply ρ to matrix entries

$\mathcal{P}_k$ = set of partitions of k
$\mathcal{P}_k$ indexes irreducible representations of S_k (up to equivalence) $\lambda \leftrightarrow \rho^\lambda$
$\mathcal{Q} = \cup_{k=0}^n \mathcal{P}_k$

Theorem (Munn) $\{\rho^{\lambda *} \mid \lambda \in \mathcal{Q}\}$ is a full set of inequivalent irreducible rep's of A.

Theorem (Munn's character formula) For $\lambda \in \mathcal{Q}$ let χ^λ be character of ρ^λ. Let ζ^λ be character of $\rho^{\lambda *}$. If $\sigma \in R$ then $\zeta^\lambda(\sigma) = \sum_K \chi(\mu_K \sigma \mu_K^-)$, sum over all $K \subseteq \mathbf{n}$ with $|K| = |\lambda|$, $K \subseteq \text{domain}(\sigma)$ and $K\sigma = K$.

Let X_k be character table of S_k rows and columns indexed by $\mathcal{P}_k$
(α, λ) entry of X_k is $\chi_\alpha^\lambda = \chi^\lambda(\sigma)$ if $\sigma \in S_k$ has cycle structure α
Munn defined character table M for R rows and columns indexed by $\mathcal{Q}$
Need equivalence relation on R to replace conjugacy in S_k

See table for $n = 4$ in Munn's paper
M is block upper triangular if rows and columns are suitably numbered

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathsf{X}_n & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{X}_1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathsf{X}_0 \end{bmatrix}$$

2. Character multiplicities

Define invertible matrices $\mathsf{Y}, \mathsf{A}, \mathsf{B}$ with rows and columns indexed by $\mathcal{Q}$.
$\mathsf{Y} = \text{diag}[\mathsf{X}_n, \ldots, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_0]$
$\mathsf{M} = \mathsf{AY} \qquad \mathsf{M} = \mathsf{YB}$
Thus Y (which is known) and either A or B determine M

Proposition Let $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}$. Then $\mathsf{A}_{\alpha\beta} = \binom{\alpha}{\beta}$ where $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i \geq 1} \binom{a_i}{b_i}$ if α has a_i parts equal to i and β has b_i parts equal to i

To describe B use Ferrers diagrams

Partition $\lambda \rightsquigarrow$ Ferrers diagram Ex. $\lambda = (4,2,1) \rightsquigarrow \begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & \\ \times & & & \end{array}$ $\mu = (2,1) \rightsquigarrow \begin{array}{ll} \times & \times \\ \times & \end{array}$

If $\lambda \supseteq \mu$ define "skew Ferrers diagram" $\lambda - \mu$ Ex. λ, μ as above $\lambda - \mu = \begin{array}{llll} \emptyset & \emptyset & \times & \times \\ \emptyset & \times & & \\ \times & & & \end{array}$

Say $\lambda - \mu$ a horizontal strip if no column contains two x's as in above Ex.

Proposition $\mathsf{B}_{\lambda\mu} = 1$ if $\lambda \supseteq \mu$ and $\lambda - \mu$ is a horizontal strip and $\mathsf{B}_{\lambda\mu} = 0$ otherwise.

Decomposition of characters:
Let ψ be character of a representation of R
Write $\psi = \sum_{\lambda\in\mathcal{Q}} c_\lambda \zeta^\lambda$

Problem Compute multiplicity c_λ. (For S_n use orthogonality relations)

Theorem (multiplicity formula): $c_\lambda = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mu\in\mathcal{P}_k} \mathsf{B}_{\lambda\mu}^{-1} \langle \psi_{|S_k}, \chi^\mu\rangle_{S_k}$ where $\langle\ ,\ \rangle$ is usual inner product of characters of S_k.

The multiplicity formula may be applied to compute multiplicities in representation of R on $F[x] = F[x_1,\ldots,x_n]$ Then results of computation suggest a stronger theorem: we may explicitly decompose the R-module $F[x]$.

3. The Representation of R on $F[x] = F[x_1,\ldots,x_n]$

Define $x_i\sigma = x_{i\sigma}$ if $i \in \text{domain}(\sigma)$, $\quad x_i\sigma = 0$ otherwise
Extend action to $F[x]$ so that σ acts as algebra endomorphism

Problem Decompose $F[x]$ into simple R-modules.

Write $F[x] = \oplus_{\lambda\in\mathcal{Q}} J^\lambda$ where J^λ = isotypic component of type λ. By definition $J^\lambda = \sum_{N\subseteq F[x],\ N\simeq N^\lambda} N$ where N^λ is simple R-module with character ζ^λ.

Example $\lambda = (n)$. Then $N^\lambda = F$ with action $1\sigma = 1$ for $\sigma \in S_n$ and $1\sigma = 0$ for $\sigma \in R - S_n$. Let Λ be algebra of S_n-invariant polynomials = symmetric polynomials. Then $J^\lambda = x_1\cdots x_n\Lambda$

Construct R-submodules of $F[x]$ from S_k-submodules of $F[x_1,\ldots,x_k]$ as follows. For $K \subseteq \mathbf{n}$ with $|K| = k$ choose $\mu_K \in R : \{1,\ldots,k\} \to K$. Define $x_K \in F[x]$ by $x_K = \prod_{k\in K} x_k$. If M is S_k-submodule of $F[x_1,\ldots,x_k]$ define $M^\star = \sum_{|K|=k} x_K(M\mu_K) \subseteq F[x]$. Then $M^\star$ is R-module. Note that in passage from M to $M^\star$, degree is raised by k and dimension is multiplied by $\binom{n}{k}$.

Theorem Suppose $\lambda \in \mathcal{Q}$. Let M^λ be a simple S_k-module with character χ^λ. Then $J^\lambda = \sum_{M\simeq M^\lambda} M^\star$. [Proof uses Munn's character formula to show $\supseteq$ and dimension count in homogeneous components to show = via $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}t^k/(1-t)^k = 1/(1-t)^n$.]

4. The Representation of R on Tensors; the Analogue of Schur Duality

V = vector space over F $\quad \dim V \geq n$
$G = \mathbf{GL}(V)$ = general linear group
$V^{\otimes n}$ is G-module via $g(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = gv_1\otimes\cdots\otimes gv_n$

$V^{\otimes n}$ is (left) S_n-module via "place permutations" $\quad w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{1w} \otimes \cdots \otimes v_{nw}$
$\rho : FS_n \to \mathbf{GL}(V^{\otimes n})$ $\quad$ the corresponding representation

Theorem (Schur) ρ is faithful and $\rho(FS_n) = \mathrm{Hom}_G(V^{\otimes n}, V^{\otimes n})$.

Question Is there an analogous theorem for R? We cannot define $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{1\sigma} \otimes \cdots \otimes v_{n\sigma}$ for $\sigma \in R$ because $i\sigma$ may not be defined. Use F as a small "trash basket" for undefined $i\sigma$ as follows.

Let $U = F \oplus V$
U is G-module via $g(c + v) = c + gv$
So $U^{\otimes n}$ is G-module in natural way

Define R-module structure: Write $\sigma = \varepsilon_K w$ where $K = \mathrm{domain}(\sigma)$ and $w \in S_n$ (not unique). If $u \in U = F \oplus V$ let $u^0 =$ projection on F and let $u^1 = u$. Define $\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_{1w}^{\delta(1,K)} \otimes \cdots \otimes u_{nw}^{\delta(n,K)}$ where $\delta(i, K) = 1$ if $i \in K$ and $\delta(i, K) = 0$ if $i \notin K$. This gives a well defined R-module structure which centralizes action of G. Let $\rho : FR \to \mathrm{Hom}_G(U^{\otimes n}, U^{\otimes n})$ be corresponding representation.

Examples Let $n = 3$ and suppose σ has domain $I(\sigma) = \{1, 2\}$ with $1\sigma = 2$ and $2\sigma = 3$. Then $\sigma = \varepsilon_{\{1,2\}} w$ where w is the permutation $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ so $\sigma(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = u_2 \otimes u_3 \otimes u_1^0$. For all n, if $\sigma = w \in S_n$ then $K = \mathbf{n}$ so $\delta(k, K) = 1$ for all $k \in \mathbf{n}$ and $w(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_{1w} \otimes \cdots \otimes u_{nw}$ as in classical case.

Theorem ρ is faithful and $\rho(FR) = \mathrm{Hom}_G(U^{\otimes n}, U^{\otimes n})$.

5. q-generalization; generators and relations

Recall Iwahori's definition of what is now called the Iwahori Hecke algebra $\mathcal{H}$
$G = \mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_q)$
$G \supset B =$ upper triangular matrices
$W =$ group of permutation matrices $\simeq S_n$
$S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ simple transpositions, $s_i = (i, i+1)$
For $w \in W$ define $l(w) =$ length of w as word in generators S
Bruhat decomposition: $G = \cup_{w \in W} BwB$
For $w \in W$ define $T_w \in FG$ by $T_w = |B|^{-1} \sum_{g \in BwB} g$
$\mathcal{H} = \oplus_{w \in W} FT_w$ is an F-algebra with identity
Iwahori found the multiplication table and a presentation

Theorem (Iwahori) $\mathcal{H}$ is generated by the T_s for $s \in S$. Multiplication is determined by

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{if } l(sw) = l(w) + 1 \\ qT_{sw} + (q-1)T_w & \text{if } l(sw) = l(w) - 1. \end{cases}$$

Theorem (Iwahori) Let $T_i = T_{s_i}$ Then $\mathcal{H}$ has presentation

$$\begin{array}{ll} T_i^2 = q + (q-1)T_i & \text{if } 1 \le i \le n-1 \\ T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} & \text{if } 1 \le i \le n-2 \\ T_iT_j = T_jT_i & \text{if } |i-j| \ge 2\,. \end{array}$$

There are analogous theorems with group W replaced by monoid $\mathcal{R} \supset W$ and group G replaced by monoid $M = \mathbf{M}_n(\mathbf{F}_q) \supset G$. To state them:

Define $\nu \in R$ by domain$(\nu) = \{1, \ldots, n-1\}$ and $k\nu = k+1$.
Rook matrix $[\nu]$ is a Jordan block; note rank$(\nu^{n-k}) = k$.
Analogue of Bruhat decomposition: $M = \bigcup_{\sigma \in R} B\sigma B$.
Analogue of length: if rank$(\sigma) = k$ then

$$l(\sigma) = \min\,\{l(w) + l(w') \mid w, w' \in W \;\text{ and }\; \sigma = w\nu^{n-k}w'\}$$

If rank$(\sigma) = k$, define $T_\sigma = (q-1)^{-k}q^{-\binom{k}{2}} \sum_{\tau \in B\sigma B} \tau \in FM$
$\mathcal{G} = \oplus_{\sigma \in \mathcal{R}} FT_\sigma$ an F-algebra with identity

Theorem $\mathcal{G}$ is generated by the T_s for $s \in S$ and T_ν. Multiplication is determined by

$$T_sT_\sigma = \begin{cases} qT_\sigma & \text{if } l(s\sigma) = l(\sigma) \\ T_{s\sigma} & \text{if } l(s\sigma) = l(\sigma)+1 \\ qT_{s\sigma} + (q-1)T_\sigma & \text{if } l(s\sigma) = l(\sigma)-1 \end{cases}$$
$$T_\nu T_\sigma = q^{l(\sigma)-l(\nu\sigma)}T_{\nu\sigma}$$

Theorem Let $T_i = T_{s_i}$ and $N = T_\nu$ Then $\mathcal{G}$ has presentation given by the Iwahori relations together with

$$\begin{array}{ll} N^{i+1}T_i = qN^{i+1} & 1 \le i \le n-1 \\ T_iN^{n-i+1} = qN^{n-i+1} & 1 \le i \le n-1 \\ T_iN = NT_{i+1} & 1 \le i \le n-2 \\ NT_1T_2 \cdots T_{n-1}N = q^{n-1}N & \end{array}$$

To understand the source of these relations look at "$q = 1$" which gives a presentation for $\mathcal{R}$. The last formula says, for example, that $[\nu s_1 \cdots s_{n-1}]$ is idempotent.

* * *

The diagram

$$\begin{array}{ccc} M & \rightsquigarrow & \mathcal{R} \\ \cup & & \cup \\ G & \rightsquigarrow & W \end{array}$$

is part of a general theory of reductive monoids due to M.Putcha and L.Renner (1980-). The group of units of a reductive monoid is a reductive algebraic group. For a survey article see LS, An Introduction to Reductive Monoids, pps 295-352, in Semigroups, Formal Languages and Groups, ed. J. Fountain, NATO ASI Series C, Vol. 466, Kluwer, 1995.

Some remark on the level set flow by anisotropic curvature

Yoshihiro Tonegawa

Department of Mathematics, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Yokohama 223, Japan
tonegawa@math.keio.ac.jp

Abstract

In this talk, we are concerned with evolution problems of hypersurfaces $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ in $\mathbf{R}^n$ governed by the equation

$$V = -M(\nu)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial p_i}(\nu)\right) + \beta\right)$$

on Γ_t, where ν is the unit normal vector field of Γ_t, V is the normal velocity of Γ_t and the function $\gamma = \gamma(p_1, \cdots, p_n)$ is positively homogeneous degree one and represents the anisotropic surface energy density. The function $M : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}$ is positive and the function β may depend on the time variable. The gradient of γ, $\xi(\nu) = \frac{\partial \gamma}{\partial p}(\nu)$, is often called the Cahn-Hoffman vector in the material science literature, and its divergence corresponds to the anisotropic mean curvature vector (times -1) with respect to the given γ.

In late 80's, Chen, Giga and Goto constructed a global in time unique generalized solution by a level set approach. The regularity of the unique solution is not known, even for smooth anisotropic curvature energies. In this talk, we discuss in what way each, or at least almost all, level sets satisfy the given flow equation, and also discuss various geometric problems associated with the anisotropic curvature.

1

保型形式と p 進 Hodge 理論

斉藤　毅（東京大学）

Wiles は、次の定理を示すことによって、Fermat 予想を証明した。

定理. *(Wiles)* 有理数体上の半安定な楕円曲線のＬ関数は保型形式のＬ関数である。

この際大きな役割を果たしたのが、保型形式に伴う ℓ進表現である。というのはＬ関数を直接比べるのではなく, それぞれから生じる ℓ進表現を比べることによって, 証明がなされているのである. 保型形式 $f(\tau)=\sum_n a_n \exp 2\pi in\tau$ に伴う ℓ進表現とは, $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ進表現で各素数 p での Frobenius の跡が a_pとひとしいもののことである. 楕円曲線から定まる ℓ進表現とは, その ℓ巾等分点の逆極限として得られるものである.

上の定理は「$GL_n(\mathbb{Q})$ の保型形式と絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の n 次元 ℓ進表現との対応」という Langlands 対応の特別な場合と考えることができて、その意味で類体論の２次元版とみなすことができる。この大域的な対応が局所的な対応と次のように両立するというのが、Wiles の証明の中の技術的に重要な点の１つだった。

両立性というのは次のようなことである. $GL_2(\mathbb{Q})$ の保型形式 fが生成する adele 群 $GL_2(\mathbb{A})$ の保型表現π_fを考える。adele 群 $GL_2(\mathbb{A})$ は各局所成分 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の制限直積だから表現π_fは $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現$\pi_{f,p}$の tensor 積に分解する。局所 Langlands 対応により$\pi_{f,p}$にたいし、$\mathbb{Q}_p$の Weil-Deligne 群 $W'_{\mathbb{Q}_p}$ の２次元表現$\sigma(\pi_{f,p})$ が定まる。

一方、fにともなう $G_{\mathbb{Q}}$の ℓ進表現$\rho_{f,\ell}$ の素数 p での分解群 $D_p=Gal(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ への制限 を考える。素数ℓと p が相異なるとすると、惰性群への制限が準巾単となることから $\mathbb{Q}_p$の Weil-Deligne 群 $W'_{\mathbb{Q}_p}$ の２次元表現$'\rho_{f,\ell}$ が定まる。このとき

定理. *(Deligne-Langlands-Carayol)* $\ell\neq p$ なら

$$\sigma(\pi_{f,p})\simeq {}'\rho_{f,\ell}.$$

がなりたつというのが、ℓと p が異なる場合の, 大域的な対応と局所的な対応の両立性である。

最近著しく発展している p 進 Hodge 理論を用いると、この定理を $\ell=p$ の場合にも定式化し証明することができる というのが、今回の談話会で話した主結果である。

$\ell=p$ の場合には惰性群の作用が非常に大きく, 準巾単ではないので $\ell\neq p$ の場合のように Weil-Deligne 群の表現を定義するのが容易でない. ここで p 進 Hodge 理論によれば, Fontaine に従って巨大な環 B_{st}を用いることにより, Weil-Deligne 群の表現を $D=D_{pst}(V)=\bigcup_{J\subset I}(B_{st}\otimes V)^J$ として定義することができる. そして兵頭-加藤-辻による C_{st}-予想, Mokrane の重さスペクトル系列などの p 進 Hodge 理論の主要な結果と, Lefschetz 跡公式, 保型形式にともなう ℓ進表現の久賀-佐藤多様体を使った Deligne による幾何的な 構成などの数論幾何の基本的事実を使って, 上の $\ell\neq p$ の場合に帰着することにより 主結果が証明される.

また一般の総実代数体の場合にも, 志村曲線とその関手性, moduli 解釈などを使った同様の議論により, 保型形式に関するある条件の下で同様の結果を証明することができる.

楕円曲線上の WZW 模型について

武部 尚志
東京大学大学院数理科学研究科

共形場理論の一種である WZW 模型は、代数幾何的には普通次のように定式化される。まず、compact Riemann 面 (または滑らかな代数曲線) X, その上の点 $Q_1,\ldots,Q_n$ と半単純 Lie 群 (または複素代数群) G を決め、X の上の G 主束の family $\mathcal{M}$ を固定する。G の表現 $V_1,\ldots,V_N$, 各主束 $P\in\mathcal{M}$, 及び level と言われる parameter k に対して conformal block の空間 $\mathrm{CB}(X,P,k;Q_1,\ldots,Q_N;V_1,\ldots,V_N)$ と呼ばれる線形空間が定まり、$\mathcal{M}$ 上にこれを fibre とする線形空間の層が出来る。良い条件の下では、これは有限階の vector 束になり、flat connection が入る。

種数 $g=0$ の場合には、k が G の $-$(dual Coxeter number) に等しくない時この接続が有名な Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (KZ 方程式) となる。また、$k=-$(dual Coxeter number) の時には (rational) Gaudin 模型と呼ばれる統計力学の可解格子模型を記述する事が知られている。この模型は XXX spin chain 模型のある種の漸近極限として定義される。

種数 $g=1$ の場合には、上の設定では、KZ 方程式の代わりに Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式 (KZB 方程式) と呼ばれる楕円関数を係数とする微分方程式系が現われ、また、rational Gaudin 模型の代わりに Gaudin-Calogero 模型と呼ばれる N 体問題の系が出て来る事が知られている。

一方、Etingof は KZ 方程式の中に現われる有理型 r 行列を楕円型 r 行列に取り換えた微分方程式系を考え、それの解をある種の vertex operator の trace として与えた。また、rational Gaudin 模型が XXX spin chain から出発したのと同様に、XYZ spin chain から出発すると、楕円型 r 行列で記述される可解な格子模型 (XYZ Gaudin 模型) が得られる。これらは上に述べた KZB 方程式や Gaudin-Calogero 模型に非常に良く似ていて、これらも WZW 模型としての解釈を持つのではないかと期待される。

この講演では、東北大の黒木玄氏との共同研究に基づいて、実際そのような解釈が出来る事を述べる。その為には上で述べた WZW 模型の定義を一般化しなくてはならない。まず、G 主束は、X 上の trivial group scheme $G\times X$ の torsor と言い替える事ができる事に注意する。そこで、$G\times X$ の代わりに X 上のある group scheme $\tilde{G}$ を固定する。Trivial group scheme の場合の構成をまねて、$\tilde{G}$-torsor P と、Q_i 上の $\tilde{G}$ の fibre の表現 V_i から conformal block の空間や、それのなす層の上の D-module 構造が定義される。

$\tilde{G}$ として $G=SL_N(\mathbf{C})$ を fibre とし、楕円曲線の cycle に沿って G の自己同型で捻ったものを取ってくれば、Etingof の楕円型 KZ 方程式を上の WZW 模型から定義される flat connection と解釈でき、また、XYZ Gaudin 模型をある種の表現に付随する conformal block を使って記述する事ができる。

Approximate Lagrangean Coordinates in

Navier-Stokes Problems

R. Rautmann

Universität Paderborn

We will consider a local smooth solution of the Navier-Stokes initial-boundary value problem in Lagrangean coordinates. In a 2-grid approach, approximations to these coordinates lead to a convection-diffusion splitting scheme, the H^2-convergence of which has been proved in a joint paper with K. Masuda [1994]. Now using the regularizing property of the Stokes resolvent, we show that are our splitting scheme is convergent even in $H^{2,r}$ for any $r \in [2, \infty)$. In addition. explicit convergence rates have been established.

ストロー公式の一般化とその応用

海上保安大学校　赤松雅之　　1998 年 1 月 29 日

1. ストロー公式の一般化と基本解の表現

ストロー公式は弾性体, 圧電体, 圧磁体の基本解の表現, 表面波の問題, 転移の問題に適用できる. ここでは基本解の表現について述べる. 弾性体, 圧電体, 圧磁体の構成方程式はそれぞれを含む形で書ける. これより準静的な近似のもとで平衡方程式は $\mathbb{R}^3$ 上の n 次正方行列値 2 階の楕円型偏微分作用素 $E(\partial) = -E_{il}\partial^2/\partial x_i \partial x_l$ により記述できる. ただし $E_{il} = (E_{ijkl} \mid j,k = 1,\ldots,n)$,
$E_{ijkl} = C_{ijkl}$ $(j,k = 1,2,3)$, e_{ijl} $(j = 1,2,3, k = 4)$, e_{kli} $(j = 4, k = 1,2,3)$, $-\varepsilon_{il}$ $(j = k = 4)$, b_{ijl} $(j = 1,2,3, k = 5)$, b_{kli} $(j = 5, k = 1,2,3)$, $-t_{il}$ $(j = 4, k = 5)$, $-t_{li}$ $(j = 5, k = 4)$, $-\mu_{il}$ $(j = k = 5)$ で, C_{ijkl}, e_{ijl}, ε_{il}, b_{ijl}, t_{il}, μ_{il}はそれぞれ弾性, 圧電, 誘電, 圧磁, 磁電気, 透磁テンソルの成分で, 各テンソルは定数で正値性と対称性をもつ. 弾性体は $n = 3$, 圧電体は $n = 4$, 圧磁体は $n = 5$ である. $E(\partial)$ の基本解 $G(x)$ は

$$G(x) = (8\pi^2|x|)^{-1} \int_0^{2\pi} (-\sin\psi v + \cos\psi w, -\sin\psi v + \cos\psi w)^{-1}\, d\psi \tag{1}$$

と表せる (Sygne 1957, Gel'fand & Shilov 1964). ただし a, $b \in \mathbb{C}^3$に対し $(a,b) = (a_i E_{ijkl} b_l \mid j,k = 1,\ldots,n)$. これを次のストローの固有値問題と結び付ける. すなわち $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ に対して v, $w \in S^2$, $v \times w = |x|^{-1}x$ と取り, $2n$ 次正方行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} -(w,w)^{-1}(w,v) & (w,w)^{-1} \\ -(v,v) + (v,w)(w,w)^{-1}(w,v) & -(v,w)(w,w)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とすると固有値は全て虚数で複素共役対で現れるのでこれらを $p_{\alpha+n} = \overline{p_\alpha}$, $\Im(p_\alpha) > 0$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$ とし, ξ_αを各 p_αに対する一般固有ベクトルとすると次が成り立つ.

定理 1 基本解 $G(x)$ は

$$G(x) = (4\pi|x|)^{-1}\Im(LA^{-1})^{-1} \tag{3}$$

ただし $L = (l_1,\ldots,l_n)$, $A = (a_1,\ldots,a_n)$, $\xi_\alpha = \begin{pmatrix} a_\alpha \\ l_\alpha \end{pmatrix}$となる.

これは次のストロー公式の一般化により得られる. すなわち (2) で v を $m(\psi) = \cos\psi v + \sin\psi w$, w を $n(\psi) = -\sin\psi v + \cos\psi w$ で置き換えたものを $N(\psi)$ とすると $N(0) = N$ で, さらに $S := (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} N(\psi) d\psi$ とすると次が成り立つ.

定理 2 $N(0)$ の固有値 p に対する一般固有ベクトルをξとすると, ξは S の, $\Im(p) > 0$ のとき固有値$+i$, $\Im(p) < 0$ のとき固有値$-i$ に対する固有ベクトルになる.

注意 これは固有ベクトルのときの Barnett& Lothe(1975), Jordan 鎖の高さが高々2 のときの Lothe& Barnett(1976), 高々3 のときの中村 (1991) の結果の Jordan 鎖の高さに制限が無い一般化になる.

定理 1 の証明 $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_1^T \end{pmatrix}$と書けて, 式 (1) より $G(x) = (4\pi|x|)^{-1}S_2$が成り立つ. さらに定理 2 より $S_1 a_\alpha + S_2 l_\alpha = i\, a_\alpha$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$ で $LA^{-1} = iS_2^{-1} - S_2^{-1}S_1$となる. 特に $S_2^{-1} = \Im(LA^{-1})$ で, これより式 (3) を得る.

2. 計算例

Hexagonal(622) クラスの圧電体 ($C_{1111} = C_{2222} =: C_{11}$, $C_{3333} =: C_{33}$, $C_{1122} =: C_{12}$, $C_{1133} = C_{2233} =: C_{13}$, $C_{2323} = C_{1313} =: C_{44}$, $C_{1212} = 2^{-1}(C_{1111} - C_{1122})$, $e_{231} = -e_{132}$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, ε_{33}以外の成分は $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klil}$, $e_{ijl} = e_{jil}$, $\varepsilon_{il} = \varepsilon_{li}$によるものを除いてゼロとなって C_{44}, $C_{11} - C_{12}$, C_{33}, $(C_{11} + C_{12})C_{33} - 2C_{13}^2$, ε_{11}, ε_{33}は正となる) の基本解の表現を得た.

[1] M. Akamatsu and K. Tanuma, Green's function of anisotropic piezoelectricity, Proc. R. Soc. Lond. **A**, **453**, 473–487 (1997)

McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension 3　　京大理 中島 啓

G を $SL_n(\mathbb{C})$ の有限部分群とし、商特異点 $\mathbb{C}^n/G$ を考える。次の問題を考える。

問1. $\mathbb{C}^n/G$ の特異点解消 $\pi : X \to \mathbb{C}^n/G$ で 標準束 K_X が自明になるものが存在するか？
（このような特異点解消を crepant resolution という）

問2. 上の特異点解消が存在したとして、G の表現論と X の幾何を関連づけよ

$n=2$ のときに知られている次の事実を高次元に拡張せよ という問題といえる

★ $n=2$ のとき ★

問1に対する答：極小な特異点解消が crepant であることはよく知られている。

問2に対する答：以下のように単純リー環を通じて対応している。

事実

X の2次元のホモロジー群 $H_2(X, \mathbb{Z})$ は 例外集合 $\pi^{-1}(0)$ の既約成分 C_k たちを基底にもち、その交点行列は ADE型の Cartan 行列の -1 倍である。

事実 (McKay)

$\{\rho_k\}$ を G の既約表現たちとし、Q を $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ の定める2次元表現とする。（但し、ρ_0 は自明表現とする。）このとき

$$Q \otimes \rho_l = \bigoplus_k a_{kl} \rho_k$$

によって a_{kl} を定めると $(2\delta_{kl} - a_{kl})$ は ADE型の拡大Cartan行列である。

この2つの事実を合わせると次の対応があることになる
（但し、対応の consential な説明はなかった）

$G\subset SL_2(\mathbb{C})$	非自明な既約表現	$\otimes Q$の分解
単純Lie環	simple root	Cartan行列
$\pi: X\to \mathbb{C}^2/G$	例外集合の既約成分	交叉形式

$n\geqq 3$を考えよう。

$n=3$のとき 問1はYesであることが知られている（Roan, Ito, ...）

しかし，$n=2$と違って uniqueでない。いくつかのcrepant resol.があることもある

$n\geqq 4$のときは，一般にはNoであることが知られている。

Nakamuraは次のようなcanonicalなresolutionの候補を与えた

$$X := \left\{ I\subset \mathbb{C}[x,y,z] \;\middle|\; \begin{array}{l} I\text{はGの作用で不変} \\ \mathbb{C}[x,y,z]/I \text{は Gの正規表現} \end{array} \right\} \text{とおく。}$$

Th. (Nakamura)

$n=3$, G: abelianのとき 上のXは$\mathbb{C}^3/G$のcrepant resolution

予想．一般の$G\subset SL_3(\mathbb{C})$で同じことが成立つ？

この状況のときに，問2に対する答を次の様に与えることができた

各既約表現ρ_kに対し，X上のvector bundle $\mathcal{R}_k$を

$$(\mathcal{R}_k)_I = \mathrm{Hom}_G\left(\rho_k, \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I}\right) \quad \text{となるように定める。}$$

さらに，$\dfrac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I} \xrightarrow[\binom{x}{y}{z}]{} Q\otimes\dfrac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I} \xrightarrow[\wedge\binom{x}{y}{z}]{} \wedge^2 Q\otimes\dfrac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I} \xrightarrow[\wedge\binom{x}{y}{z}]{} \dfrac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I}$

がinduceするX上のvector bundleのcomplexを考え，それをGの表現に従って分解する：

$$\mathcal{R}_k \to \oplus a^{(1)}_{kl}\mathcal{R}_l \to \oplus a^{(2)}_{kl}\mathcal{R}_l \to \mathcal{R}_k \qquad \left(\text{但し } \wedge^i Q\otimes\rho_k = \oplus a^{(i)}_{kl}\rho_l\right)$$

のtranspose（v.b.をdualにし，homを転置にしたもの）を$\mathcal{S}_k$とかく。

Th. (Ito-N)（Nakamuraのthmと同じ仮定のもとで）

$\mathcal{R}_k$は$K(X)$ = Xの上のalg. vector bundleのGrothendieck群

$\mathcal{S}_k$は$K^c(X)$ = Xの上のalg. vector bundleのcpxで$\pi^{-1}(0)$の外でexactなもののGrothendieck群

のそれぞれの基底で，自然なpairing $K(X)\otimes K^c(X)\to\mathbb{Z}$に関して双対基底である。また，このとき$K^c(X)$の交叉形式が$a^{(i)}_{kl}$を用いて書き表される。

安定曲線のモジュライ空間上の正因子のなす錐について

京都大学大学院理学研究科数学教室
森脇 淳

g を 2 以上の整数とし，M_g で種数が g の非特異曲線のモジュライ空間を，$\overline{M}_g$ で算術種数が g の安定曲線のモジュライ空間を表すことにする．$\overline{M}_g$ 上にはまず次のようにして定まる Hodge class と呼ばれる $\mathbb{Q}$-直線束 λ，つまり $\lambda \in \mathrm{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}}$ が存在する．$\overline{M}_g$ の適当な被覆 Y をとれば，普遍安定曲線 $f : X \to Y$ が存在し，そこで，$\det(f_*\omega_{X/Y})$ を考えると，これは，$\mathrm{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}}$ の元と見なせる．さらに，$\overline{M}_g$ 上にはコンパクト化の境界からくる $\mathbb{Q}$-直線束が存在する．つまり，$\overline{M}_g \setminus M_g$ は，余次元が 1 の代数的集合で，

$$\overline{M}_g \setminus M_g = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_{[g/2]}$$

と既約分解され，Δ_0 の一般元は node を一つ持つ既約な算術種数が g の安定曲線に対応しており，Δ_i $(i > 0)$ の一般元は，種数が i の非特異曲線と種数が $g-i$ の非特異曲線を一点で交わらせてできる算術種数が g の安定曲線に対応している．Δ_i の $\mathrm{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}}$ での class を δ_i で表すことにする．ここで，基本的な事実は，$\mathrm{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}}$ は，$\lambda, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{[g/2]}$ で生成されており，$g \geq 3$ なら，$\lambda, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{[g/2]}$ は一次独立であるということである．

以上の準備のもとで，Mumford によって出された基本的問題は，有理数 $a, b_0, \ldots, b_{[g/2]}$ に対して，いつ $\mathbb{Q}$-因子

$$a\lambda - b_0\delta_0 - b_1\delta_1 - \cdots - b_{[g/2]}\delta_{[g/2]}$$

が何らかの意味での豊富性を持つかという問いである．これに対して，次の結果を得た。

定理 $\quad Nef_{M_g}(\overline{M}_g) = \{D \in \mathrm{Pic}(\overline{M}_g)_{\mathbb{Q}} \mid D$ は M_g の各点で nef である $\}$ とおくとき，

$$Nef_{M_g}(\overline{M}_g) = \left\{ x\lambda + \sum_{i=0}^{[g/2]} y_i\delta_i \;\middle|\; \begin{array}{l} x \geq 0, \quad gx + (8g+4)y_0 \geq 0, \\ i(g-i)x + (2g+1)y_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq [g/2]) \end{array} \right\}$$

である．

さて次にこの定理の数論上の応用であるが，これは，効果的なボゴモロフ予想についてである．K を代数体または関数体とする．C を K 上の種数が g の非特異射影曲線とする．さらに J を C のヤコビ多様体とする．また，$J(\overline{K})$ 上の Neron-Tate height pairing で定まるノルムを $\|\ \|_{NT}$ で表す．さて，$j(x) = (2g-2)x - \Omega^1_C$ で定義される自然な射像 $j : C(\overline{K}) \to J(\overline{K})$ を考える．ここで，$\overline{K}$ は K の代数的閉包である．この時，効果的なボゴモロフ予想とは，計算可能な正の数 r_0 が存在して，任意の $P \in J(\overline{K})$ に対して，集合

$$\{x \in C(\overline{K}) \mid \|j(x) - P\|_{NT} \leq r_0\}$$

が有限になるという主張である．上記の結果を用いて，K が関数体の場合，特異ファイバーのある種の条件下で r_0 を求めることができる．

正確に述べるために，半安定曲線の node の型を定義する必要がある．Z を半安定曲線とし，P を Z の node とする．$\iota : Z_P \to Z$ を P での部分正規化とする．もし Z_P が連結なら，P を 0 型という．もし Z_P が非連結で，$Z_P = Z_1 \cup Z_2$ を二つの連結成分し，i を Z_1 と Z_2 の算術種数の最小値とした時，P を i 型の node と言う．

さて，X を非特異射影曲面，Y を非特異射影曲線，$f : X \to Y$ を Y 上の種数 g の半安定曲線とする．$\bar{f} : \bar{X} \to Y$ を $f : X \to Y$ の安定化モデルとする．ここで，$\bar{f} : \bar{X} \to Y$ の特異ファイバー上のすべての 0 型の node は既約成分の特異点であると仮定する．この時，$f : X \to Y$ の生成ファイバーに対する r_0 は，

$$\sqrt{\frac{(g-1)^2}{g(2g+1)}\left(\frac{g-1}{3}\delta_0(X/Y) + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y)\right)}$$

で与えられる．ここで，$\delta_i(X/Y)$ は，$f : X \to Y$ の特異ファイバー上の i 型の node の個数である．

宮崎 洋一 (日大 歯)

ヲヲ一二次形式で定義される
作用素の熱核の滑らかさ；

$$B[u,v] = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \, \overline{D^\alpha v} \, dx$$

仮定 1° $\displaystyle\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq \delta |\xi|^{2m}$

$(\xi \in \mathbb{R}^n)$

2° $a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha|=|\beta|=m)$

有界，一様連続．

3° $a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha|+|\beta|<2m) \in L^\infty$

A，Bから定まる $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素

e^{-tA} の核 $U(t,x,y)$

$$e^{-tA} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(t,x,y) f(y) \, dy .$$

$$A = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\beta (a_{\alpha\beta} D^\alpha).$$

目的　$U(t, x, y)$　(x, y) に関する

滑らかさ，$|U(t, x, y)| \leq ?$

（主定理）

$$U(t, x, y) \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y) \quad (\forall t > 0)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta U(t, x, y)| \leq C_1 e^{C_2 t} t^{-\frac{n+|\alpha|+|\beta|}{2m}} \times \exp\left(-C_3 \left(\frac{|x-y|^{2m}}{t}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right)$$

$$|\alpha| \leq m-1, \ |\beta| \leq m-1.$$

従来の結果と比較

- 係数 C^∞　well-known

P.D.O（擬微分作用素）

$$e^{-tA} f \subset \mathcal{D}(A^l) \subset H^{2ml} \subset B^{2ml - \frac{n}{2}}$$

$$l \in \mathbb{N}.$$

飯田雅人（岩手大）

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

$$u_t = d_1 \Delta u + (a_1 - b_1 u - c_1 v) u$$

$$v_t = d_2 \Delta u + (a_2 - b_2 v - c_2 u) v$$

0-Neumann B.C.

$$(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$$

u, v 互いに競合関係にある
2種の個体数密度.

問題. c_1, c_2 が十分大の漸近状況は？
（競争が激しいとき）

背景

$$u_t = d_1 \Delta u - k u v$$

$$v_t = d_2 \Delta v - k u v$$

$k \to \infty$ のときの挙動.
L.C. Evans. 1980
$k \to \infty$. $u = u^k, v = v^k$.

$\boxed{\Omega \text{ 単純なるどうか？}}$

$$U + \cancel{\ } V \longrightarrow UV.$$

$$\lim_{k\to\infty} u_k v_k = 0.$$

$$u_k \to u_*, \quad v_k \to v_*$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} = d_1 \Delta u_* \quad \text{in } \Omega_u(t)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = d_2 \Delta v_* \quad \text{in } \Omega_v(t)$$

$$d_1 \frac{\partial u_*}{\partial \nu} + d_2 \frac{\partial v_*}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma(t).$$

$$u_* = v_* = 0$$

Cannon-Hill. （弱解の存在）.
一意性.

Hilhorst, Mimura, Peletier. (preprint)

$$\frac{c_1}{c_2} = \text{一定} \qquad c_1, c_2 \to \infty \qquad \begin{array}{l} c_1 = bk \\ c_2 = ck \end{array}$$

$$u \to u_*, \quad v \to v_* \quad L^2(\Omega \times (0,T)).$$

$$u_t^* = d_1 \Delta u^* + (a_1 - b_1 u^*) u^* \quad \Omega_u(t)$$

$$v_t^* = d_2 \Delta v^* + (a_2 - b_2 v^*) v^* \quad \Omega_v(t).$$

$$b d_1 \frac{\partial u^*}{\partial \nu} + c d_2 \frac{\partial v^*}{\partial \nu} = 0. \quad u^* = v^* = 0 \text{ in } \Gamma(t)$$

Th (I. Mimura, Tanagida) 一様収束. | この2つ OK

$(u_0^*, v_0^*) \in C^2(\bar{\Omega}, [0,1]) \; C^2(\bar{\Omega}, [0,1])$ $\quad u_0^* v_0^* = 0 \quad$ in Ω $\quad$ (2)の古典解とする

$$\sup |u(x,0) - u_0^*(x)| \leq \varepsilon$$

$$\sup |v(x,0) - v_0^*(x)| \leq \varepsilon$$

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \sup |u_\varepsilon(x,t) - u^*(x,t)| < \varepsilon|\log \varepsilon|$$

$$(\Rightarrow) \int_{\Omega\times(0,T)} \sup |v_\varepsilon(x,t) - v^*(x,t)| < \varepsilon|\log \varepsilon|.$$

柴田　徹太郎（広大）

§1 Introduction

$$(1)\ \begin{cases} -\Delta u + \lambda g(u) = \mu f(u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ parameters

g, f 非線型項.

例. $\begin{cases} f(u) = |u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u. \quad 1 < q < \frac{N+2}{N-2} \\ g(u) = u \end{cases}$

問題　(1) が解をもつような集合.

$$L_1 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2 \;\middle|\; \exists u_{\lambda,\mu} \in H_0^1(\Omega) \text{ sol of (1)} \right\}$$

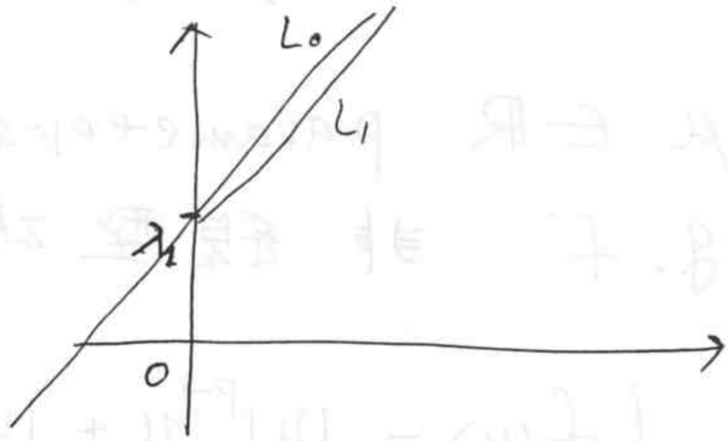
$$L_0 = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \quad \text{〃} \quad \right\}$$

(1) の方程式 ⇒ 由来. 非線型シュレディンガー方程式.

具体例. 1°. $f(u)=g(u)=u$.

$$L_0=\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \mid \mu=\lambda+\lambda_1\}.$$

λ_1 : $-\Delta|_D$ の第1固有値..



具体例 2° $f(u)=|u|^{p-1}u$. $1<p<\frac{N+2}{N-2}$

$g(u)=u$

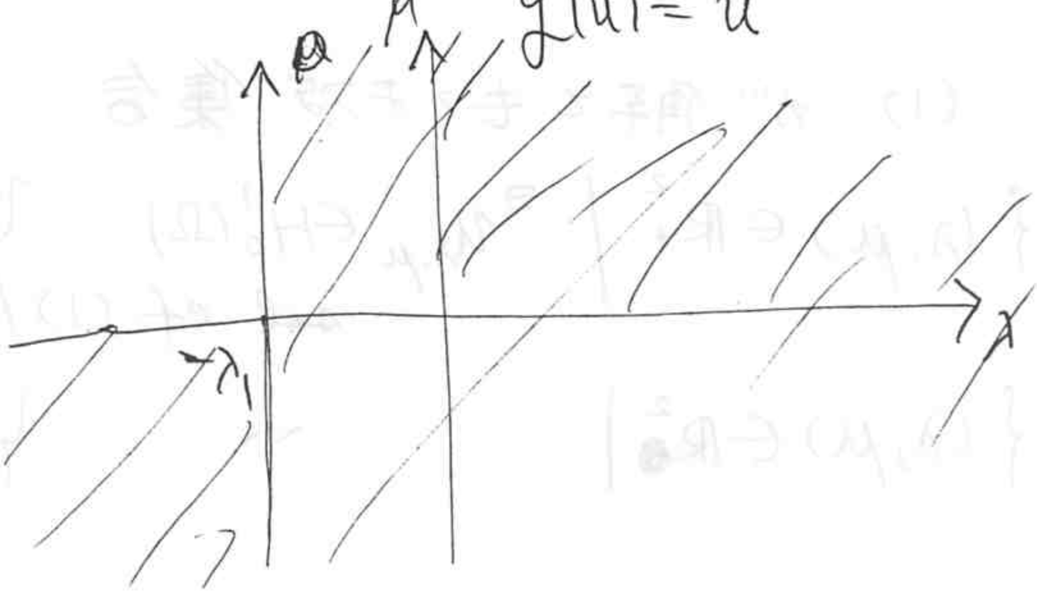


Fig 2.

$(\because)$. $\mu > 0$ $u = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{p-1}} v$

$$(2) \begin{cases} -\Delta v = |v|^{p-1} v - \lambda v \text{ in } \Omega \\ v > 0 \text{ in } \Omega \\ v = 0 \end{cases}$$

が解をもつ範囲. $\lambda > -\lambda_1$.

$(\because)$ $0 < e(x)$: $-\Delta|_D$ の 第1固有関数.

$$\lambda \int_\Omega v e \, dx = \int_\Omega (\Delta v + v^p) e \, dx$$

$$\geqq \int_\Omega \Delta v \cdot e \, dx = \int_\Omega v \Delta e \, dx$$

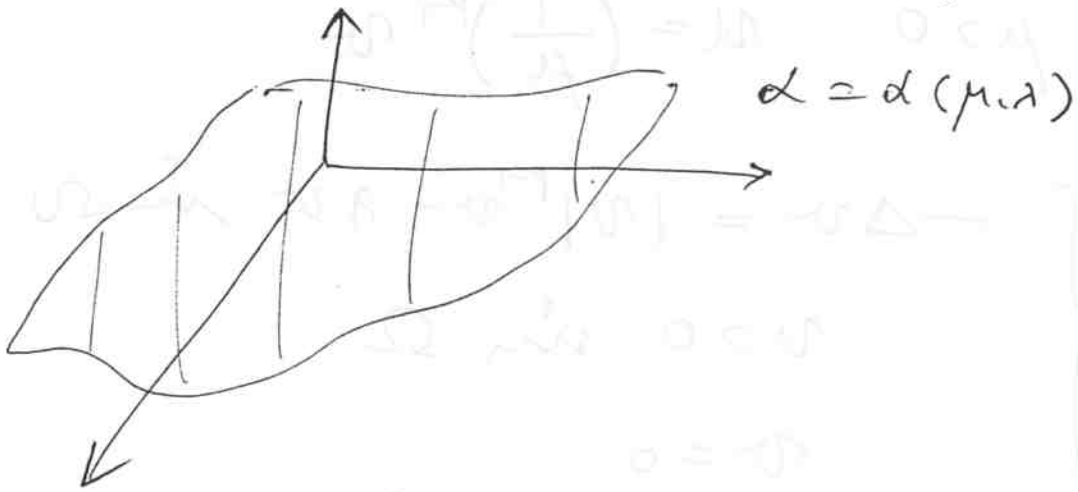
$$= -\lambda_1 \int_\Omega v e \, dx.$$

$$\lambda > -\lambda_1$$

Mountain Pass Lemma Th.

問題. Fig2をさらに解析すると
どうなるか?

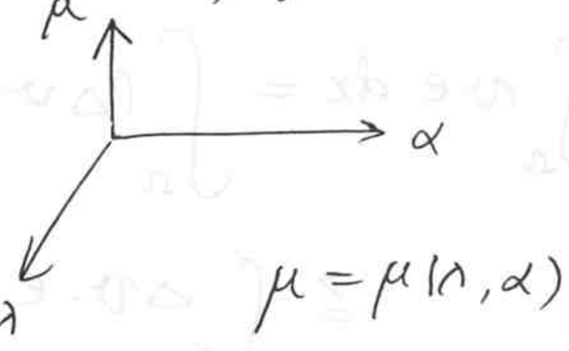
◎ Parameter α を1つ増やす.



$\alpha=\alpha(\mu,\lambda)$ の性質.

f, g の何かを反映.

ここで.



(方法.) 変分法 …… 条件付き極値問題

§2. 仮定 & 結果.

(A1). f, g : locally Lipshitz

$f(-u)=-f(u)$.

$g(-u)=-g(u)$

(A2). $1 \leq \exists q \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ s.t.

$$\frac{g(u)}{u} \longrightarrow K_0,\ \frac{f(u)}{u^p} \to K_1$$

○ $\frac{g(u)}{u} \to J_0 > 0$ $\frac{f(u)}{u^q} \longrightarrow J_1 > 0.$ as $u \downarrow 0$.

記号. $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$$

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(u(x))\,dx$$

$$\Psi(u) = \int_\Omega G(u(x))\,dx.$$

$$\Lambda_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \Psi(u) \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

$\lambda > 0$: given. と思う. $\alpha, \beta > 0$. parameter.

(M1). $r_1(\lambda, \alpha) = \sup_{u \in N_{\lambda,\alpha}} \Phi(u)$.

$$N_{\lambda,\alpha} = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \Lambda_\lambda(u) = \alpha \}.$$

$$\Longrightarrow \ (\lambda, \mu(\lambda, \alpha), u_{\lambda,\alpha}) \in \mathbb{R}_+^2 \times N_{\lambda,\alpha}.$$

(M2). $\gamma_2(\lambda, \beta) = \inf_{u \in M_\beta} I_\lambda(u).$

$$M_\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Phi(u) = \beta\}.$$

$$\Longrightarrow \ \exists(\lambda, \mu_2(\lambda, \beta), u_{\lambda,\beta}) \in \mathbb{R}_+^2 \times M_\beta.$$

問題. $\mu_1(\lambda, \alpha)$. と $\mu_2(\lambda, \beta)$

はどのように異なるか.

Th 1. $\{(\lambda, \alpha)\} \subset \mathbb{R}_+^2$ が.

(B.1). $\lambda \to \infty$.

(B.2) $\alpha^2 \lambda^{N-2} \to \infty$. $(\Leftrightarrow \|u_{\lambda,\alpha}\|_\infty < (\alpha^2\lambda$

$$\Longrightarrow \ \mu_1(\lambda, \alpha) = C_2\left(\alpha^{\frac{1-p}{2}} \lambda^{\frac{N+2-p(N-2)}{4}}\right)(1 + o(1$$

C_2 は $\begin{cases} -\Delta w = w^p - w \text{ in } \mathbb{R}^N \\ w \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$

の値解 w の L^{p+1} ノルムより 定まる.

Th2: (B.1) $\lambda \to \infty$

(B.3) $\alpha^2 \lambda^{N-2} \longrightarrow 0$.

$\Rightarrow$ ☆ の p を q にかえる. ☆☆ で.

$p \leftrightarrow q$ OK.

Th3.

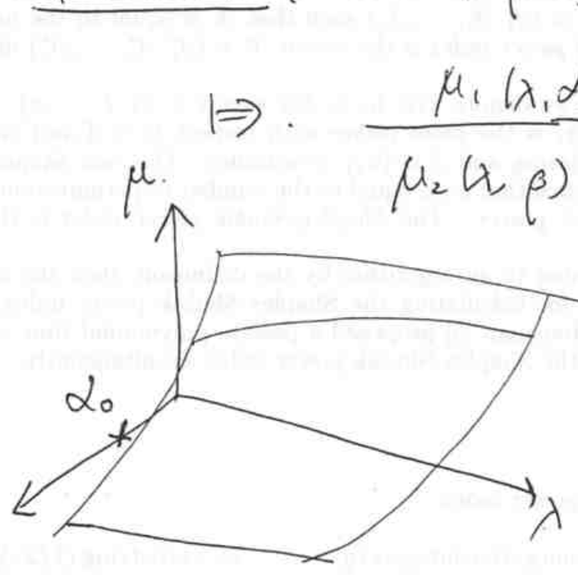
(B.1) $\lambda \to \infty$

(B.4) $\lambda^N \beta^2 \to \infty$

$$\Rightarrow \mu_2(\lambda, \beta) = C_3 \left(\beta^{-\frac{p-1}{p+1}} \lambda^{\frac{N+2-p(N-2)}{2(p+1)}} \right)(1+o(1))$$

Remark. α β fix

$$\Rightarrow \frac{\mu_1(\lambda, \alpha)}{\mu_2(\lambda, \beta)} \longrightarrow \infty$$



(Ni−Wei との手法 使う)

$\mathcal{NP}$-completeness for Calculating Power Indices of Weighted Majority Games

Yasuko Matsui *

February 19, 1998

Abstract

Weighted voting is frequently used when there is sufficient reason to create or maintain districts which have nontrivial variations in populations. To analyze weighted voting, there is a weighted majority game in the game theory. Banzhaf [1] introduced an index, which is called the Banzhaf power index, for measuring an individual's voting power. Another value concept for measuring voting power was introduced by Shapley and Shubik [8], which is called the Shapley-Shubik power index. The Shapley-Shubik power index is a special application of a more general value concept introduced by Shapley in [7].

In this talk, we prove that both problems for calculating the Banzhaf power index and the Shapley-Shubik power index for weighted majority games are $\mathcal{NP}$-complete.

1 Preliminaries

In this section, we give some definitions and notations. There are n players denoted by $\{1,\ldots,n\}$. The *weighted majority game* is a sequence of nonnegative integers $G = (q; w_1, w_2, \ldots, w_n)$ satisfying the condition that $w_i \geq 0$ and $(1/2)\sum_{i=1}^n w_i < q \leq \sum_{i=1}^n w_i$, where each w_i denotes the voting weight of player i and the integer q denotes the quota for the game.

A *coalition* is a subset of players. A coalition S is called a *winning coalition* (respectively a *losing coalition*) when $\sum_{i\in S} w_i \geq q$ (respectively $\sum_{i\in S} w_i < q$).

For any coalition S of players, we say that player i is a *swing* with respect to S if and only if $(S, S\triangle\{i\})$ is a pair of a losing coalition and a winning coalition ($S_1 \triangle S_2$ denotes the symmetric difference of S_1 and S_2). The *raw Banzhaf power index* denotes the vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ such that β_i is equal to the number of coalitions for which player i is a swing. The *Banzhaf power index* is the vector $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)$ defined by $\beta_i^* = \beta_i / \sum_{i=1}^n \beta_i$.

Given a permutation π defined on $\{1, 2, \ldots, n\}$, we denote $\pi(i)$ by π_i for each $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. For any permutation π on $\{1, 2, \ldots, n\}$, we say that player π_j is the *pivot player* with respect to π if and only if the coalition $S = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{j-1}\}$ satisfies that S is losing and $S \cup \{\pi_j\}$ is winning. The *raw Shapley-Shubik power index* denotes the vector $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ such that φ_i is equal to the number of permutations defined on the set of players for which player i is the pivot player. The *Shapley-Shubik power index* is the vector $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*)$ defined by $\varphi_i^* = \varphi_i / n!$.

If we calculate the Banzhaf power index conforming to an algorithm by the definition, then the algorithm requires $O(2^n n)$time. Similarly, a naive algorithm for calculating the Shapley-Shubik power index requires $O(n!n)$time. In 1982, Lucas, Maceli, Hillicard and Housman [5] proposed a pseudo polynomial time algorithm which calculates both the Banzhaf power index and the Shapley-Shubik power index simultaneously.

2 Banzhaf power index

We discuss the problem for calculating the Banzhaf power index.

<u>BZ1</u>

INSTANCE: A positive integer n and a sequence of nonnegative integers $(q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfying $(1/2)\sum_{i=1}^n w_i < q \leq \sum_{i=1}^n w_i$ and $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$.

QUESTION: Does the raw Banzhaf power index $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ of the weighted majority game $G = (q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfy $\beta_n > 0$?

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo 192-03, Japan. yasuko@math.metro-u.ac.jp

We prove $\mathcal{NP}$-completeness of **BZ1** by presenting a polynomial time reduction from the knapsack problem (**KP**), which is a well-known $\mathcal{NP}$-complete problem [3, 4].
KP
INSTANCE: A positive integer k and a sequence of positive integers $(a_1, \ldots, a_k)$ satisfying that $(1/2)\sum_{i=1}^{k} a_i$ is an integer.
QUESTION: Is there a subset $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ such that $\sum_{i \in S} a_i = (1/2)\sum_{i=1}^{k} a_i$?

Theorem 1 **BZ1** *is $\mathcal{NP}$-complete.*

Corollary 1 *Calculating the Banzhaf power index is $\mathcal{NP}$-hard.*

BZ2
INSTANCE: A positive integer n and a sequence of nonnegative integers $(q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfying $(1/2)\sum_{i=1}^{n} w_i < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$ and $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$.
QUESTION: Does the raw Banzhaf power index $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ of the weighted majority game $G = (q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfy $\beta_1 > \beta_2$?

Theorem 2 **BZ2** *is $\mathcal{NP}$-complete.*

3 Shapley-Shubik power index

We consider the following problem.
SS1
INSTANCE: A positive integer n and a sequence of nonnegative integers $(q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfying $(1/2)\sum_{i=1}^{n} w_i < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$ and $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$.
QUESTION: Does the raw Shapley-Shubik power index $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ of the weighted majority game $G = (q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfy $\varphi_n > 0$?

We prove $\mathcal{NP}$-completeness of **SS1** by presenting a polynomial time reduction from problem **KP** described in the previous section.

Theorem 3 **SS1** *is $\mathcal{NP}$-complete.*

Corollary 2 *Calculating the Shapley-Shubik power index is $\mathcal{NP}$-hard.*

SS2
INSTANCE: A positive integer n and a sequence of nonnegative integers $(q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfying $(1/2)\sum_{i=1}^{n} w_i < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$ and $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$.
QUESTION: Does the raw Shapley-Shubik power index $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ of the weighted majority game $G = (q; w_1, \ldots, w_n)$ satisfy $\varphi_1 > \varphi_2$?

Theorem 4 **SS2** *is $\mathcal{NP}$-complete.*

References

[1] J.F.Banzhaf III, *Weighted Voting Doesn't Work*, Rutgers Law Review, 19 (1965), pp.317-343.

[2] S.Brams, *Power indices in politics*, in S.J.Brams, W.F.Lucas and P.D.Straffin eds., *Political and related models*, Springer-Verlag, 1983, pp.256-321.

[3] M.R.Garay and D.S.Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of $\mathcal{NP}$-completeness*, W.H.Freeman and Company, 1979.

[4] R.M.Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in R.E.Miller and J.W.Thatcher eds., Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 1972, pp.85-103.

[5] W.F.Lucas, J.C.Maceli, M.Hillicard and D.Housman, *Reapportionment by weighted voting*, Technical report no.533, School of operations research and industrial engineering, Cornell University, 1982.

[6] W.F.Lucas, *Measuring power in weighted voting systems*, in S.J.Brams, W.F.Lucas and P.D.Straffin eds., *Political and related models*, Springer-Verlag, 1983, pp.183-238.

[7] L.S.Shapley, *A value for n-person games*, in *Contributions to the Theory of Games, Vol.II*, in H.W.Kuhn and A.W.Tucker eds., Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton University Press, 1953, pp.307-317.

[8] L.S.Shapley and M.Shubik, *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, *American Political Science Review*, 48 (1954), pp.787-792.

COMPOSITION OPERATORS AND THE Q_p SPACES

RUHAN ZHAO

Talk at Hokkaido University, March 4, 1998

This talk is based on a joint work with Wayne Smith.

Let $H(D)$ be the space of all analytic functions on the unit disk D. Let $\varphi : D \to D$ be analytic. The *composition operator* C_φ is defined by $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ for $f \in H(D)$.

For $a \in D$, let $g(z,a) = \log(1/|\sigma_a(z)|)$ be Green's function for D with pole at a. where $\sigma_a(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$. Let $dA(z) = dxdy/\pi$ be Lebesgue area measure normalized so that $A(D) = 1$.

We collect the definitions of the spaces Q_p, $Q_{p,0}$ $(0 < p < \infty)$, the weighted Dirichlet space $\mathcal{D}_p$ $(-1 < p < \infty)$, the Bloch space $\mathcal{B}$ and the little Bloch space $\mathcal{B}_0$:

$$Q_p = \{f \in H(D): \ \|f\|_{Q_p}^2 = \sup_{a \in D} \int_D |f'(z)|^2 g^p(z,a)\, dA(z) < \infty\};$$

$$Q_{p,0} = \{f \in H(D): \ \lim_{|a| \to 1} \int_D |f'(z)|^2 g^p(z,a)\, dA(z) = 0\}.$$

$$\mathcal{D}_p = \{f \in H(D): \ \|f\|_{\mathcal{D}_p}^2 = \int_D |f'(z)|^2 (\log(1/|z|))^p dA(z) < \infty\};$$

$$\mathcal{B} = \{f \in H(D): \ \|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in D} (1-|z|^2)|f'(z)| < \infty\};$$

$$\mathcal{B}_0 = \{f \in H(D): \ \lim_{|a| \to 1} (1-|z|^2)|f'(z)| \to 0\}.$$

It is known that $Q_p = \mathcal{B}$, for $p > 1$ (R. Aulaskari and P. Lappan, 1994), $Q_1 = BMOA$ and $Q_{p_1} \subsetneq Q_{p_2}$ for $0 < p_1 < p_2 \leq 1$ (R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao 1995). Moreover, an analytic function $f \in Q_p$ if and only if $\{f \circ \sigma_a : a \in D\}$ is a bounded set in D_p. Thus the Q_p spaces can be viewed as Möbius invariant versions of the wighted Dirichlet spaces $\mathcal{D}_p$.

Our work involves hyperbolic versions of the spaces Q_p and $\mathcal{D}_p$. Let φ be an analytic self-map of D and define, for $p > 0$ and $a \in D$,

$$\Phi_{\varphi,p}(a) = \int_D \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} g^p(z,a)\, dA(z).$$

We now define the hyperbolic Q_p and $\mathcal{D}_p$ classes as follows:

(i) $\varphi \in Q_p^h$ if and only if $\sup_{a \in D} \Phi_{\varphi,p}(a) < \infty$;

(ii) $\varphi \in Q_{p,0}^h$ if and only if $\lim_{|a| \to 1} \Phi_{\varphi,p}(a) = 0$;

(iii) $\varphi \in \mathcal{D}_p^h$ if and only if $\Phi_{\varphi,p}(0) < \infty$.

We now state our main results:

Theorem 1. *For each p, $0 < p < \infty$, the following statements are equivalent:*

(a) $\varphi \in \mathcal{D}_p^h$;
(b) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}_p$ *is compact;*
(c) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}_p$ *is bounded;*

Since the Q_p spaces can be viewed as Möbius invariant versions of the spaces $\mathcal{D}_p$, it is reasonable to expect that Möbius invariant versions of the criteria for $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{D}_p$ to be bounded from Theorem 1 will characterize when $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_p$ is bounded. This turns out to be correct.

Theorem 2. *Let $0 < p < \infty$ and let φ be an analytic self-map of D. The following statements are equivalent:*

(a) $\varphi \in Q_p^h$;
(b) $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_p$ *is bounded;*

Theorem 3. *Let $0 < p < \infty$ and let φ be an analytic self-map of D. The following statements are equivalent:*

(a) $\varphi \in Q_{p,0}^h$;
(b) $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_{p,0}$ *is compact;*
(c) $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_{p,0}$ *is bounded;*

It is also natural to consider composition operators restricted to $\mathcal{B}_0$ and ask when they map boundedly or compactly into $\mathcal{D}_p$, Q_p or $Q_{p,0}$. It is easy to see that $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ is bounded if and only if $\varphi \in B_0$. The theorem below can be viewed as a generalization of this observation to $0 < p \leq 1$. We have not found a characterization of compactness of the operators in parts (b) and (c) of this theorem.

Theorem 4. *Let φ be an analytic self-map of D and suppose that $0 < p < \infty$. Then*

(a) $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{D}_p$ *is bounded if and only if* $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{D}_p$ *is compact if and only if* $\varphi \in \mathcal{D}_p^h$;
(b) $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to Q_p$ *is bounded if and only if* $\varphi \in Q_p^h$;
(c) $C_\varphi : \mathcal{B}_0 \to Q_{p,0}$ *is bounded if and only if* $\varphi \in Q_p^h \cap Q_{p,0}$.

To close this talk, we pose some open questions:

Question 1. What is the function theoretic characterization of when $C_\varphi : Q_{p_1} \to Q_{p_2}$ is bounded or compact?

It is easy to see that $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ and $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ are always bounded. However, for $0 < p < 1$, $C_\varphi : Q_p \to Q_p$ is not always bounded.

Question 2. What is the characterization for the compactness of $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_p$ when $p \leq 1$?

Question 3. Is it true that $Q_{p_1}^h \subsetneq Q_{p_2}^h$ when $0 < p_1 < p_2 \leq 1$?

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

HANKEL OPERATORS BETWEEN BERGMAN SPACES

RUHAN ZHAO

Talk at Hokkaido University, March 5, 1998

Let $D = \{z : |z| < 1\}$ denote the unit disk in the complex plane $\mathbb{C}$. Let $A(D)$ be the set of all analytic functions in D. For $1 \leq p < \infty$, let $L^p(D)$ denote the Banach space of Lebesgue measurable functions f on D with

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(z)|^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

where $dA(z)$ is the normalized area measure on D. The Bergman space $L^p_a = L^p(D) \cap A(D)$. Let $H^\infty = \{f \in A(D) \ \|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)|\}$.

Let P denote the orthogonal projection from $L^2(D)$ onto L^2_a. Given a function $f \in L^1(D)$, and $g \in H^\infty$, the (little) Hankel operator is defined by

$$h_f g = P(f\bar{g}).$$

Thus h_f is a conjugate linear operator and densely defined on the Bergman space L^p_a for $1 \leq p < \infty$.

Recall that, for $0 < \alpha < \infty$, the α-Bloch space B^α contains analytic functions f satisfying

$$\|f\|_{B^\alpha} = |f(0)| + \sup_{z \in D} |f'(z)|(1 - |z|^2)^\alpha < \infty,$$

and the little α-Bloch space B^α_0 contains analytic functions f satisfying

$$\lim_{|z| \to 1} |f'(z)|(1 - |z|^2)^\alpha = 0.$$

Note that, for $\alpha = 1$, we get the well-known Bloch space B and the little Bloch space B_0 from the above definitions.

The following result is well-known:

Theorem A. *Let f be analytic on D.*

(i) *The Hankel operator h_f is bounded on L^2_a if and only if $f \in B$;*

(ii) *The Hankel operator h_f is compact on L^2_a if and only if $f \in B_0$.*

In this talk, we give a complete description for the bounded and compact Hankel operators from $L_a^{p_1}$ to $L_a^{p_2}$ when p_1 and p_2 are greater than 1. The results are naturally splited into two cases. For the case $p_1 < p_2$, the characterizations involve α-Bloch spaces and little α-Bloch spaces, which are generalizations of the Bloch space B and the little Bloch space B_0. For the case $p_1 > p_2$, the boundedness and compactness of Hankel operators from $L_a^{p_1}$ to $L_a^{p_2}$ are characterized by another Bergman space.

Our main results are as follows. The first result is for the case $p_1 \le p_2$, which is a natural generalization of Theorem A.

Theorem 1. *Let $1 < p_1 \le p_2 < \infty$ satisfy $1 + 2/p_2 - 2/p_1 > 0$, and let $f \in A(D)$. Then we have*

(i) *$h_f : L_a^{p_1} \to L_a^{p_2}$ is bounded if and only if $f \in B^{1+2/p_2-2/p_1}$;*
(ii) *$h_f : L_a^{p_1} \to L_a^{p_2}$ is compact if and only if $f \in B_0^{1+2/p_2-2/p_1}$.*

The second result is for the case $p_1 > p_2$, which looks, at the first glance, quite different from Theorem 1.

Theorem 2. *Let $1 < p_2 < p_1 < \infty$, let $p = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}$, and let $f \in A(D)$. Then the following statements are equivalent:*

(i) *$h_f : L_a^{p_1} \to L_a^{p_2}$ is bounded;*
(ii) *$h_f : L_a^{p_1} \to L_a^{p_2}$ is compact;*
(iii) *$f \in L_a^p$.*

In above theorems, we have excluded the end point L_a^1. This is because in this case, the problem becomes more subtle. For the case $1 = p_1 < p_2 < \infty$, (i) of Theorem 1 is still true. But we should replace compactness by the so-called *-compactness in (ii) of Theorem 1.

For the case $p_1 = p_2 = 1$, boundedness and *-compactness of the big Hankel operator have been characterized by K. R. M. Attele and M. Nowak, which involve Bloch type functions with logarithmic terms in their definitions. We will give similar criteria for the little Hankel operator from L_a^1 to L_a^1.

Maybe the most intriguing case is $1 = p_2 < p_1 < \infty$. We are only able to give a sufficient condition for boundedness and compactness of h_f from L_a^p to L_a^1 when $p > 1$.

Note that, in Theorem 1, we have an additional condition $1 + 2/p_2 - 2/p_1 > 0$. What happens for the case $1 + 2/p_2 - 2/p_1 \le 0$? We will show that, in this case, the Henkel operator h_f is bounded or compact from $L_a^{p_1}$ to $L_a^{p_2}$ if and only if the derivative of f is in some α-Bloch space or little α-Bloch space.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan