



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	磁場のソレノイダル条件が大型ヘリカル装置の電磁流体力学解析に与える影響
Author(s)	高堂, 渉
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第13211号
Issue Date	2018-03-22
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k13211
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/69995
Type	doctoral thesis
File Information	Takado_Wataru.pdf



磁場のソレノイダル条件が
大型ヘリカル装置の電磁流体力学解析に与える影響

高堂 渉

博士(工学)

北海道大学大学院工学院

量子理工学専攻

平成29年度(2017)

目次

第 1 章 序論	1
1.1 近年の核融合研究	1
1.2 電磁流体力学解析の必要性和磁場のソレノイダル条件の扱い	2
1.3 大型ヘリカル装置における電磁流体力学解析	6
1.4 本研究の目的	11
1.5 本論文の構成	12
参考文献	15
第 2 章 解析手法	18
2.1 はじめに	18
2.2 線形 MIPS コードの概要とベクトルポテンシャルの導入	18
2.2.1 支配方程式（線形 MHD 方程式系）	20
2.2.2 ベクトルポテンシャルの導入	27
2.2.3 境界条件	28
2.2.4 ベクトルポテンシャル導入時の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ の保証	30
2.2.5 ベクトルポテンシャル非導入時の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$	33
2.2.6 スムージング	34
2.3 平衡計算と HINT コードの概要	38
2.4 Boozer 座標系	39
2.5 モード解析	41
参考文献	45
第 3 章 ベクトルポテンシャルを導入した MHD 解析	47
3.1 はじめに	47

3.2	初期平衡分布, および計算条件	47
3.3	計算結果	51
3.3.1	$\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさの評価	51
3.3.2	運動エネルギーの時間発展, 成長率	54
3.3.3	モード構造	57
3.4	考察	60
3.5	まとめ	60
	参考文献	62
第 4 章	$\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の大きさに対する MHD 解析結果の依存性	63
4.1	はじめに	63
4.2	人工的な誤差項の導入	63
4.3	初期平衡分布, 初期条件, および計算条件	64
4.4	計算結果	65
4.4.1	$\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさの評価	65
4.4.2	運動エネルギーの時間発展, 成長率	69
4.4.3	モード構造	71
4.5	誤差の許容限界の見積もり	75
4.6	特定のモードに着目した計算に対する影響	75
4.6.1	初期摂動の与え方	75
4.6.2	解析結果	77
4.7	$\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の与え方の妥当性	78
4.8	まとめ	79
	参考文献	81
第 5 章	結論	82
	補遺	84
A	MHD 方程式系の導出	84
A.1	Boltzmann 方程式と Maxwell 方程式系	84

A.2	2 流体方程式系	88
A.3	1 流体方程式系	90
A.4	MHD 方程式系	96
B	運動方程式, および Faraday の式の記述方法とエネルギー保存則	98
B.1	運動方程式, Faraday の式がともに非保存形の場合	98
B.2	運動方程式が非保存形, Faraday の式が保存形の場合	100
B.3	運動方程式が保存形, Faraday の式が非保存形の場合	101
B.4	運動方程式, Faraday の式がともに保存形の場合	103
B.5	$\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合に磁場方向の力が引き起こされる理由	103
C	Boozer 座標系の基底ベクトルの導出	104
C.1	Boozer 座標系の定義	104
C.2	Boozer 座標系における Jacobian と基底ベクトルの導出	111
	参考文献	113

第1章 序論

1.1 近年の核融合研究

核融合エネルギーは新エネルギー源の一つとして注目されており，核融合炉の実現に向けた研究が世界的に行われている．2025 年の運転開始を目指してフランスで建設が進められている国際熱核融合実験炉 (ITER) はその代表的なものであり，日本を含む多くの国々の協力のもとでプロジェクトが進められている [1]．一方，日本国内では日本独自のアイディアに基づく核融合実験装置である大型ヘリカル装置 (LHD) などを用いた研究も行われている [2]．LHD は ITER などに比べ定常運転に適した構造を持ち，多くの異なる特徴を持つ．LHD における研究は，得られた知見を最終的な核融合発電実証炉へ活かすことを目標として行われている．

核融合反応を起こすためには，超高温かつ高密度のプラズマを一定時間閉じ込めておく必要があり，この閉じ込め方式は慣性閉じ込め（爆縮）方式と磁場閉じ込め方式に分けられる．慣性閉じ込め方式では，超高強度，超短パルスのレーザー光やイオンビームによって燃料ペレットを全方位から加熱することで，ペレットの外殻部分の膨張により中心部を圧縮させ，核融合反応を起こす [3,4]．磁場閉じ込め方式では，コイル電流やプラズマ電流によって適切な磁場配位を形成することで，燃料プラズマの圧力を磁気圧で支えることによってプラズマを長時間安定に保持しながら加熱し，核融合反応を起こす [3]．磁場核融合の磁場構造には，直線状の磁場配位を持つ開放型と，ドーナツ状の閉じた磁場配位を持つトーラス型がある．さらに，トーラス型装置には，プラズマ中に電流を流して磁場にねじれを与える内部導体型と，コイルのみで磁場にねじれを与える外部導体型に分けられ，それぞれ軸対称であるトカマク型と，非軸対称であるヘリカル型が代表的である．トカマク型の代表例は，前述した ITER や EU の JET [5]，日本の JT-60 [6] などが挙げられる．トカマク型は構造が比較的単純なため，大型化も比較的容易であるという長所を持ち，研究は非常に進んでいる．しかし，プラズマ電流に起因する不安定性を多く持つという欠点や，変圧器の原理における 2 次電流としてプラズマ電流を流すため，

長時間の閉じ込め磁場の形成が難しいという欠点を持つ。一方、ヘリカル型の代表例は前述した日本の LHD やドイツの Wendelstein 7-X (W7-X) [7] などが挙げられる。ヘリカル型は構造の複雑さから研究が遅れていたが、設計、建設技術の進歩に伴い、近年研究が進んでいる。ヘリカル型は、プラズマ電流に起因する不安定性を持たない、長時間の閉じ込め磁場形成が容易であるという長所を持つが、装置の大きさに対してプラズマの体積をあまり大きくできないという欠点を持つ [8]。

1.2 電磁流体力学解析の必要性和磁場のソレノイダル条件の扱い

燃料粒子を相互に衝突させ合体（融合）させるには、原子核相互間の Coulomb 反発力に抗して結合させるだけの高い運動エネルギーが必要になる。そこで、核融合炉の実現のためには、燃料粒子を超高温のガス（完全電離プラズマ）状態とし、これを何らかの方法で限られた空間内に必要な長時間保持することにより、燃料粒子間の単位時間あたりの衝突頻度を高め、十分に大きな核融合出力が得られるような環境を整える必要がある [3]。磁場核融合ではこの環境を整えるため、燃料のプラズマにプラズマ圧力勾配と Lorentz 力が釣り合う電磁流体力学的（MHD）平衡が存在し、この MHD 平衡が、プラズマに与えられる力学的摂動、熱力学的摂動、電磁気学的摂動などに対して安定であるという条件（MHD 安定性に関する条件）を成立させるような適切な磁場分布が必要とされる。コイル電流などによって作られた磁場分布に対するプラズマの MHD 平衡や安定性は、MHD 方程式系を用いて解析（MHD 解析）可能である。MHD 方程式系の導出は補遺 A 節に記述した。

MHD 不安定性の解析手法のうち、ここでは MHD 方程式系から各物理量の時間発展を計算する手法について述べる。この手法は一般に、初期条件として MHD 平衡を満たす圧力分布、磁場分布を与え、これらのいずれかの物理量に摂動を加え、その摂動が時間の経過により成長するかを調べるものである。MHD 方程式系は主要な変数が質量密度、圧力、3 方向の速度、3 方向の磁場の 8 変数からなる非線形方程式系である。この方程式系をそのまま計算する場合、より正確な解析結果が得られる反面、高い計算コストが必要とされる。そのため、必要に応じて様々な仮定を設けた近似計算がしばしば行われる。例えば、トカマクにおいてよく用いられる Tokamak Simulation Code (TSC コード) [9] では、ポテンシャル、流れ関数、運動量密度（質量密度と速度の積）のトロイダル成分、質量密度、ポロイダル磁束、トロイダル磁場の 6 変数

をもつ簡約化 MHD 方程式系が用いられる。ポロイダル方向，トロイダル方向は図 1.1 で定義される方向であり，ポロイダル磁束は図 1.2 で与えられる領域を貫く磁束である。ここで，磁気面とは空間の任意の弧に交わるすべての磁力線が形成する 1 つの曲面で定義される面である [10]。一般に磁場核融合炉のトーラス型装置では，プラズマ内に入れ子状のトーラス形状の磁気面が存在するような磁場配位をつくっている。この入れ子状の磁気面は有理面と呼ばれる特殊な面を除き，1 本の磁力線によって面が形成されている。また磁気軸とは，入れ子状の磁気面の最も内側に存在する 1 本の磁力線のことである。また，LHD で用いられている NORM コード [11] では，ポロイダル磁束，流れ関数で表した渦度，圧力の 3 変数をもつ簡約化 MHD 方程式系が用いられる。これらの方程式系では，入れ子状の磁気面の存在に基づいて新たな変数を定義しているため，入れ子状の磁気面が存在する領域でのみ計算を行うことができる。しかし，ヘリカル型では最外殻磁気面の外側にもプラズマが存在する。最外殻磁気面の外側には規則性のない乱れた磁場が存在していることから，この領域はストキャスティック領域と呼ばれる。一般にストキャスティック領域の磁力線はダイバータと呼ばれる機器につながっている。ダイバータは磁力線に沿って入射する荷電粒子を不純物ガスとして排気ポートに導くことで，プラズマの純度を保つ粒子制御機能をもつ機器である [12]。したがって，ストキャスティック領域のプラズマは低密度である。ヘリカル型において実験で観測された最外殻磁気面近傍の不安定性を数値解析する場合，従来の磁気面が存在する領域でのみ計算可能なコードを用い，最外殻磁気面で固定端（物理量の時間変化無し）とする解析では十分な解析結果が得られないため，自由端（物理量の時間変化あり）とする解析などが行われてきた [13]。また，より厳密な解析結果を得るため，このストキャスティック領域を含む解析を行うことができる MINOS コード [14] や MIPS コード [15] が開発された。MINOS コードではヘリカル-トロイダル座標系において，MIPS コードでは円柱座標系においてそれぞれ仮定を設けない MHD 方程式系が計算されている。このようなコードを用いることで，最外殻磁気面近傍の不安定性がストキャスティック領域のプラズマへもたらす影響だけでなく，ストキャスティック領域で生じた摂動が最外殻磁気面内部のプラズマへもたらす影響の評価なども可能となる。

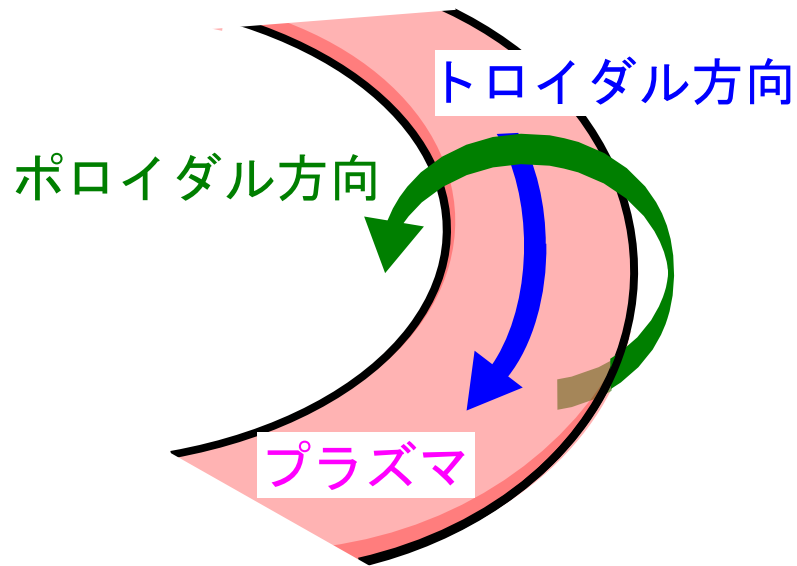


図 1.1: トロイダル方向とポロイダル方向の定義.

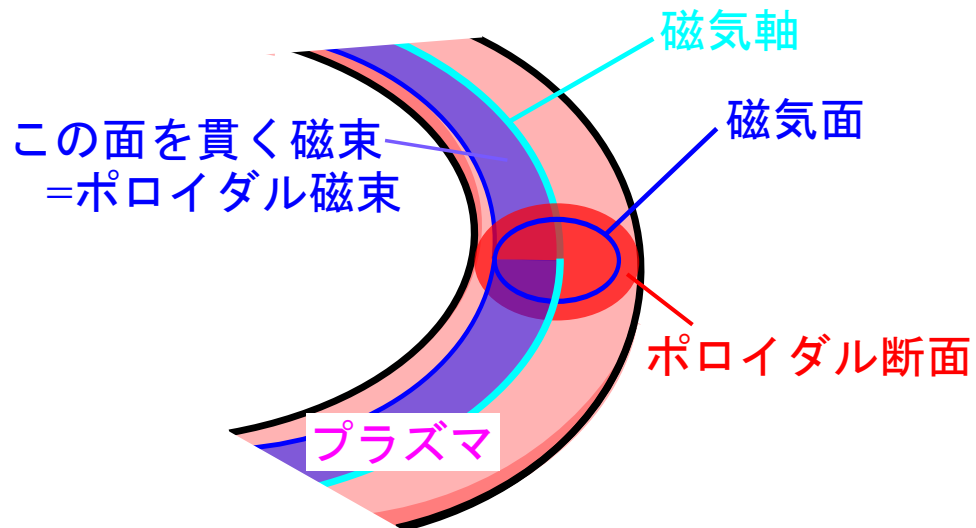


図 1.2: ポロイダル磁束の定義. プラズマ内には入れ子状のトーラス形状の磁気面が存在し, 各磁気面に対してポロイダル磁束が決定される.

核融合プラズマのMHD解析における、磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の扱いはコードにより異なっている。前述のTSCコード、およびNORMコードにおける簡約化MHD方程式系において、磁場 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B} = \nabla\phi_R \times \nabla\psi_R + g_R \nabla\phi_R \quad (1.1)$$

の形で与えられる [9,11]。 ϕ_R はトロイダル角、 ψ_R はポロイダル磁束、 g_R はトロイダル磁場である。NORMコードでは ψ_R のみを変数として扱われるため、式 (1.1) の第2項は時間発展の計算において変化しない。したがって、初期に $\nabla \cdot (g_R \nabla\phi_R) = 0$ が満たされていると仮定すると、第1項のみを考えればよく、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla\phi_R \times \nabla\psi_R) \\ &= \nabla\psi_R \cdot \nabla \times \nabla\phi_R - \nabla\phi_R \cdot \nabla \times \nabla\psi_R = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

となり、常に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満足する。一方、TSCコードでは ψ_R と g_R の両方が変数として扱われるため、第2項は0とはならず

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (g_R \nabla\phi_R) \quad (1.3)$$

となり、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は保証されない。また、MINOSコード、およびMIPSコードではFaradayの式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1.4)$$

の形で磁場が計算される。この場合、厳密に磁場の時間発展を計算できれば $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるが、数値計算上の不安定性の影響のため、やはり $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は保証されない。この詳細は2.2.5節において述べる。

$\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の影響は宇宙物理学の分野で既に議論されている。文献 [16] によれば、運動方程式とFaradayの式の両方を保存形、または非保存形で計算すると $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合にエネルギー保存則が満たされず、運動方程式とFaradayの式の一方を保存形、他方を非保存形で計算することで $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合でもエネルギー保存則が満たされる。ここで、保存形とは左辺を時間微分で表記した場合、右辺が発散のみとなる記述形式のことを指す。また保存形の運動方程式を用いた場合 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ に起因する磁場方向の力が引き起こされ、非保存形の運動方程式を用

いた場合には $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ に起因する磁場方向の力は引き起こされない。したがって、運動方程式を非保存形、Faraday の式を保存形で記述することで、 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合でもエネルギー保存則を満たしながら磁場方向の力を引き起こさない計算が可能だという主張がなされている。これらに関する詳細は補遺 B 節に記述した。この文献 [16] の主張は、Lorentz 力の磁場方向の成分は本来 0 となるべき値であるため、計算誤差として生じる磁場方向の力は厳密に 0 であるべきだという考えに基づいていると考えられる。一方で、この手法は $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ から生じる $\mathbf{B}$ の誤差そのものを 0 にする手法ではないため不十分であるとも指摘されている [17]。そこで、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証するいくつかの方法が考案された [18]。宇宙物理学では衝撃波を伴う現象が重要であり、このような現象を $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たしながら精度良く計算することを目的とした計算手法の開発が行われてきた。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いることで、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ の関係から $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たすという手法もその 1 つである。この手法は他の手法に比べ容易に導入することができるという利点がある。しかし、この手法は不連続な磁場を含む場合、不連続点周辺の精度が著しく低下するため [19]、宇宙物理学ではあまり有効でない手法とされてきた。このような経緯のもと、核融合プラズマの MHD 解析では、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の条件を無視した解析が行われてきた。そして、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を無視した計算でも実際の実験結果を再現するような計算結果が得られている。しかし一方で、 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の影響はほとんど議論されておらず、定量的な評価もされていない。

1.3 大型ヘリカル装置における電磁流体力学解析

大型ヘリカル装置 (LHD) は日本の岐阜県土岐市に存在する、2018 年現在世界最大級のヘリカル型の磁場閉じ込め式核融合実験装置である [2]。LHD では 2 本の螺旋状コイルと上下 3 対のポロイダル磁場コイルにより閉じ込め磁場を形成する。また、上下 10 対の Local Island Divertor (LID) コイルにより共鳴摂動磁場 (RMP) を形成し、閉じ込め性能の改善が図られている。ヘリカルコイルはポロイダル周期数 $\ell = 2$ 、トロイダル周期数 $M = 10$ を持つ、大半径 3.9 m、小半径 0.6 m の連続的なコイルである [20]。大半径、小半径は図 1.3 で定義される長さであり、大半径はトーラス中心からコイル中心（容器中心）や磁気軸までの距離、小半径はコイル中心（容器中心）や磁気軸からの距離を表す。それぞれのコイルは内側から H-I, H-M, H-O ブロックと呼ばれる 3 つの巻線ブロックで構成されており、それぞれに流す電流を変化させることで、実

質的なコイルの小半径を変化させることが可能となっている [21]. コイル電流の違いはコイルピッチパラメータ $\gamma_c \equiv (Ma_c)/(\ell R_c)$ の値で区別される [22]. a_c, R_c はそれぞれコイルの小半径, 大半径である. これらのコイルによって形成される閉じ込め磁場は, 例えば標準磁場配位の場合, $\gamma_c = 1.254$ に対して磁気軸の大半径 $R_{ax} = 3.75$ m の磁場を形成する. LHD の磁場配位は磁気軸が1つの水平面上に存在するという特徴がある. このような磁気軸を平面磁気軸と呼ぶ. LHD のような平面磁気軸を持つ装置では当初, 強い磁気シアと高い回転変換でプラズマを安定に閉じ込めることを目指して実験が進められた. 磁気シアはある磁気面上の磁場の向きと隣の磁気面上の磁場の向きがどれだけ異なるかを表す指標であり, 一般に磁気シアはプラズマの安定化に寄与する. また, 回転変換は磁力線がトロイダル方向に1周する間にポロイダル方向にどれだけ回転したかを表す指標であり, 回転変換が高いほど長波長の不安定性が生じにくくなり, また Pfirsch-Schlüter(PS) 電流が小さくなる. PS 電流とは平衡状態のプラズマ中において磁場方向に流れる電流のことであり, トロイダル・ドリフトによる荷電分離によって生じる電荷を磁力線に沿って短絡するために流れる [23]. その後, MHD 安定特性をさらに向上させるため, 適度なシアと適度な回転変換を持つ方式が考案され, 平衡ベータ限界値と安定ベータ限界値がほぼ一致するようになった. ベータ (比) とはプラズマ圧力を磁気圧で割った比であり, どれだけ高圧力のプラズマを閉じ込められたかの指標である. 一方, 前述の Wendelstein 7-X [7] などは磁気軸が1つの平面上に存在しない立体磁気軸を持つ. 立体磁気軸を持つ装置は低磁気シアと磁気井戸, および PS 電流の最小化による MHD 安定性と平衡特性の向上を目指した装置である. 磁気井戸とはプラズマ周辺部にいくほど磁気圧が強くなる磁場配位のことであり, 一般に安定性の高い磁場配位である. W7-X の前身である W7-AS では LHD と同様に 3% を超えるベータ値が達成されている. この装置は多数の分割されたモジュラーコイルによって閉じ込め磁場を形成しているため, 装置としての自由度が高く, 最適化が十分完了していない面もあり更なる研究が期待される [24].

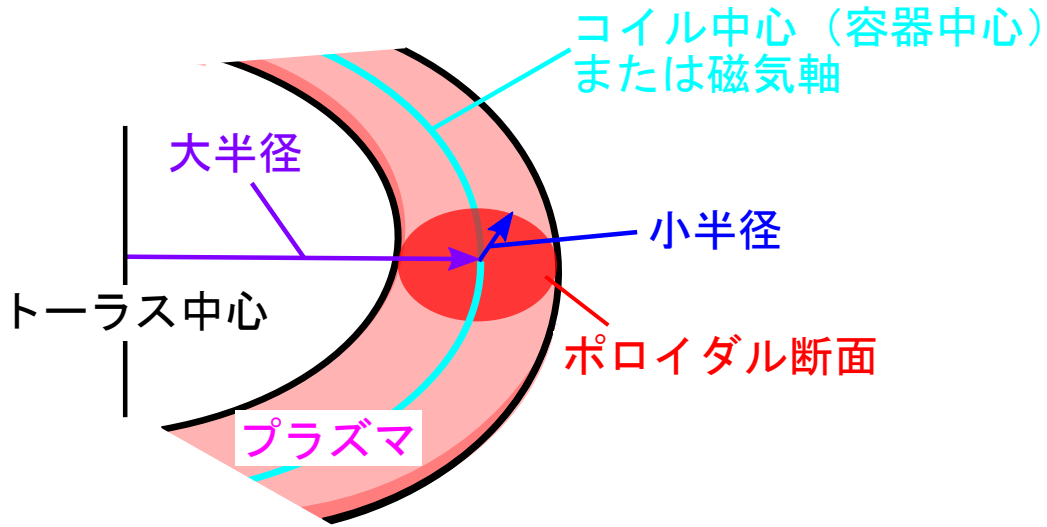


図 1.3: 大半径と小半径.

LHD のようなヘリカル型ではトカマク型と異なりプラズマに電流を積極的に流さないため、プラズマ電流の存在に起因する電流駆動型不安定性は主要な不安定性とならない。そのため、圧力勾配の存在に起因する圧力駆動型不安定性が主要な不安定性として生じる。電流密度 $\mathbf{J}$ 、磁場（磁束密度） $\mathbf{B}$ 、真空中の透磁率 μ_0 を用いて、Ampère の式 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$ から、Lorentz 力は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
 &= -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \\
 &= -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{b} \cdot \nabla B \\
 &= -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} + \frac{1}{\mu_0} B \nabla_{\parallel} B \\
 &= -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\mathbf{n}}{R_c} + \nabla_{\parallel} \frac{B^2}{2\mu_0} \\
 &= -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\mathbf{n}}{R_c}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{b}$ は磁場方向の単位ベクトル、 s は磁力線に沿う線素、 $\mathbf{n}$ は主法線ベクトル、

R_c は曲率半径であり, $\nabla_{\parallel}, \nabla_{\perp}$ はそれぞれ ∇ の磁場と平行方向, 垂直方向の成分を求める作用素である. また, 曲率半径に関する式

$$\frac{\partial b}{\partial s} = \frac{n}{R_c} \quad (1.6)$$

を用いている. 式 (1.5) における第 1 項は磁場の圧力の垂直方向の勾配 (磁気圧勾配), 第 2 項は曲率中心に向かって働く張力 (磁気張力) を表す [10]. すなわち, Lorentz 力は磁気圧勾配と磁気張力の和であることがわかる. 図 1.4 は交換型不安定性の原理を示した図である. ただし, この図において上下方向の磁場強度の変化は比較的小さいとし, さらに平衡状態の磁力線は直線であるとする. 図の (a) では平衡状態では磁気張力は存在せず, 磁気圧勾配とプラズマ圧力勾配が釣り合っている. (b) では磁場に平行な波数ベクトルをもつ摂動が生じた場合, 磁気張力が増大し, これが復原力として作用しプラズマを押し戻す. 一方, (c) では磁場に垂直な波数ベクトルをもつ摂動が生じた場合, 磁気張力は 0 のままである. したがって, 復原力が作用せず, 不安定性が成長する. このようにして成長する不安定性は交換型不安定性と呼ばれる. 同様に平衡状態の磁力線が直線でない場合も, 磁気張力があまり変化しない摂動であれば不安定性が成長する. 一方, 上下方向の磁場強度の変化が比較的大きい場合, (b) の場合でも不安定性が成長する場合があります, これはバルーニング不安定性と呼ばれる. 図 1.5 はバルーニング不安定性の原理を示した図である. (a) の上に行くほど磁場強度が強い場合, 磁気張力だけでなく磁気圧勾配も増大し, これが復原力として作用しプラズマを押し戻す. 一方, (b) の上に行くほど磁場強度が弱い場合, 磁気張力は増大するが磁気圧勾配が減少するため, 磁気張力の増大に比べて磁気圧勾配の減少が大きければ, 不安定が成長する. 磁場強度の勾配が (a) のような場合を良い曲率, (b) のような場合を悪い曲率と呼ぶ. 一般にトーラス状の磁場は中心に近いほど磁場強度が強いため, トーラス内側は (a) の良い曲率に相当し, トーラス外側は (b) の悪い曲率に相当する. したがって, バルーニング不安定性はトーラス外側で局所的に成長する不安定性である. バルーニング不安定性は大きな磁場強度の勾配が存在することで生じ, このような磁場配位は圧力の高いプラズマを閉じ込める場合に必要となる. したがって, バルーニング不安定性はベータの高いプラズマで生じやすい不安定性であり, LHD の場合体積平均ベータ $\langle \beta \rangle \simeq 3\%$ 程度で生じやすい. 一方, 交換型不安定性はベータの低いプラズマでも生じやすい不安定性であり, LHD の場合 $\langle \beta \rangle \simeq 1\%$ 程度で生じやすい [25]. LHD では主にこの 2 種類が

主要な不安定性として扱われる。

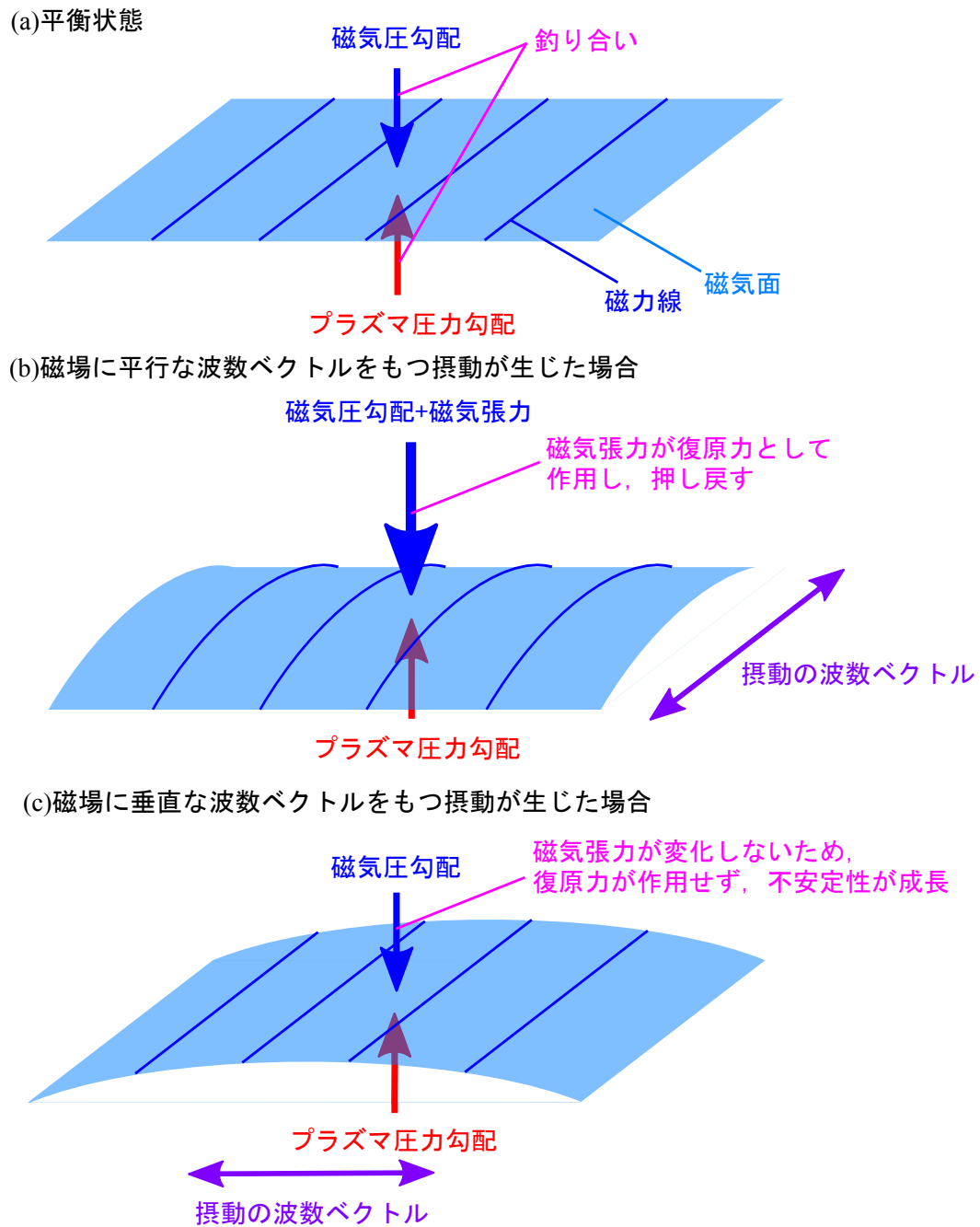


図 1.4: 交換型不安定性の原理. この図において上下方向の磁場強度の変化は比較的小さいとし, さらに平衡状態の磁力線は直線であるとする.

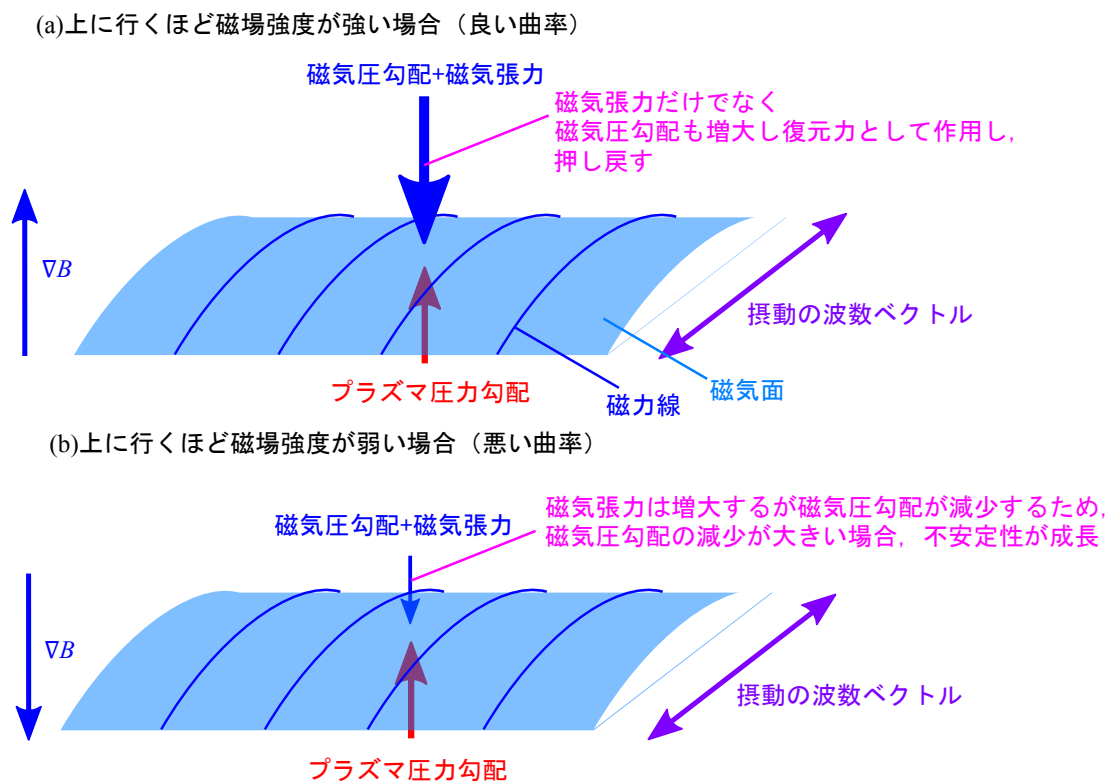


図 1.5: バルーニング不安定性の原理. 図 1.4 における (b) の磁場に平行な波数ベクトルをもつ摂動が生じた場合について、さらに上下方向の磁場強度の変化が比較的大きい場合.

また近年の LHD 実験で注目されている現象の 1 つに、高ベータプラズマにおける長波長の不安定性の成長に伴い、周辺磁場領域において温度分布の平坦化が生じた結果、プラズマ性能の劣化が引き起こされるという現象が報告されている [26]. この現象の定量的影響は十分に明らかにされていない. 一方, LHD における MHD 解析では一般に、短波長の不安定性が成長しやすいという性質がある. そこで、特定の長波長の不安定性に着目した解析を行うために、特定の単一波長を持つ初期摂動を与える手法が開発されている [27].

1.4 本研究の目的

1.2 節で述べたように、ベクトルポテンシャルを導入し磁場のソレノイダル条件を満たす手法は、磁場の不連続性を含む場合あまり有効でない. しかし、核融合プラズマの MHD 解析では

衝撃波を扱わない場合が一般的であるため、磁場の不連続性を含まない。したがって、核融合プラズマのMHD解析ではベクトルポテンシャルの導入が磁場のソレノイダル条件を満たすために有効であると考えられる。特に、LHDにおいて使用されるMINOSコードやMIPSコードではFaradayの式を変形せずに利用しているため、ベクトルポテンシャルの導入をしやすい。

そこで本研究では、LHDのMHD解析において磁場のソレノイダル条件が与える影響を明らかにすることを目的と位置付けた。ただし、非線形計算は非常に複雑化し、また時間が掛かるため、本研究では線形計算のみを対象とした。この目的を達成するため、まず既存の線形MHD解析コードである線形MIPSコード[28]にベクトルポテンシャルを導入する。本研究では摂動量についてのみベクトルポテンシャルを導入し、平衡量に対する磁場のソレノイダル条件は考慮しない。ベクトルポテンシャルを導入したコード、および導入していない元のコードを用いて、標準的な平衡分布に対する不安定性解析を行い、計算結果の比較により、ベクトルポテンシャルの導入が磁場のソレノイダル条件を満たしながら、妥当な計算結果を得ることができる有効な手法であることを示し、また、ベクトルポテンシャルの導入が計算結果に与えた影響の大きさなどを評価する。次に、磁場のソレノイダル条件に関する誤差の大きさと計算結果の依存性を調べるため、ベクトルポテンシャルを導入した線形MHD解析コードに、磁場のソレノイダル条件に関する人工的な誤差項を追加し、加えた誤差の大きさを変化させ、標準的な平衡分布に対する不安定性解析において、誤差がどの程度大きくなると計算結果の妥当性が失われ始めるかを評価し、磁場のソレノイダル条件に関する誤差の許容限界について指標を与える。さらに、1.3節で述べた特定の長波長の不安定性に着目した解析において、磁場のソレノイダル条件が与える影響についても評価を行い、この結果から、磁場のソレノイダル条件に関する大きな誤差が、実際の解析において生じさせる問題について検討する。

1.5 本論文の構成

第2章では、使用した線形MIPSコードと呼ばれる線形MHD解析コードの概要を示し、コードへのベクトルポテンシャルの導入法、および新たに考案した磁場のソレノイダル条件を数値計算の精度で満たす手法を述べる。また、計算に使用したMHD平衡を計算するコードや、不安定性を波長ごとに分解するための手法なども示す。

第3章では、ベクトルポテンシャルを新たに導入した線形MHD解析コードを用いて、LHD

の標準的な平衡分布に対する解析を通して、計算コードの妥当性を証明し、解析結果から得られる知見について論じる。まず、磁場のソレノイダル条件が数値計算の精度で満たされていること、すなわちベクトルポテンシャルのコードへの導入が適切に行われたことを示す。次に MHD 不安定性解析において重要となる運動エネルギーの時間変化、および主要な物理量の成長率を比較し、これらの値は磁場のソレノイダル条件の影響を受けずベクトルポテンシャルの導入前後で違いは生じないことを示す。さらに成長した不安定性の構造を調べるため、波長ごとに分解して振幅とプラズマ内での広がりと比較し、ソレノイダル条件の破綻は長波長の不安定性の構造には影響を与えないが、短波長の不安定性の構造には影響を与えることを示す。LHD の標準的な平衡分布に対するこれらの計算によって、磁場のソレノイダル条件が破綻していても標準的な平衡分布に対しては、既存の解析コードによる結果は妥当であることを明らかにする。また同時に、LHD のような装置の MHD 解析においてベクトルポテンシャルの導入は著しい誤差を生じさせることはなく、磁場のソレノイダル条件を満たした MHD 解析を行う有効な手法であることについても論じる。

第4章では、磁場のソレノイダル条件の許容誤差の上限を見積もるために、ベクトルポテンシャルを導入した線形 MHD 解析コードに、磁場のソレノイダル条件に関する人工的な誤差項を加え、その影響について論じる。LHD の標準的な平衡分布に対する線形 MHD 解析により、ソレノイダル条件の誤差の大きさが解析結果に与える影響を定量的に評価し、磁場のソレノイダル条件の誤差は特に不安定性の振幅に影響を与えることを示す。とりわけ、波長ごとに分解した不安定性の振幅を順位付けするとその順位が磁場のソレノイダル条件の誤差によって影響を受けることを示す。このことから磁場のソレノイダル条件の誤差が大きい場合、主要化すべき波長を持った不安定性が全く成長せず異なる波長を持つ不安定性が主要化される場合があることを明らかにし、MHD 不安定性解析において大きな問題を生じさせ得ることを示す。また磁場のソレノイダル条件の誤差に起因する磁場方向の力を Lorentz 力に対する比で評価し、誤差の許容限界を調べる。その結果、プラズマ内でこの比が約 20% を下回るとき磁場のソレノイダル条件の誤差は MHD 不安定性解析結果に悪影響を及ぼさないことを示す。すなわち、この比を用いた評価は磁場のソレノイダル条件の誤差に対する許容限界を与える指標になり得ることを示している。さらに、圧力に対して単一波長のみを持つ初期摂動を与え、人工的な誤差項を追加した計算を行い、磁場のソレノイダル条件に関する誤差が実際の解析に与える影響について論じる。計算結果から、大きな誤差の影響によって本来成長すべき波長を持つ不安定性は

成長せず，異なる波長を持つ不安定性が成長することを示す．すなわち，磁場のソレノイダル条件に関する大きな誤差が特定の波長を持つ不安定性に着目するような計算を妨げる場合があることを明らかにする．

第5章では，本研究の結論として得られた知見の概要を記す．

参考文献

- [1] 国立研究開発法人 量子科学研究開発機構「ITER 計画」: <http://www.fusion.qst.go.jp/ITER>
- [2] 大学共同利用機関法人 自然科学研究機構「核融合科学研究所」: <http://www.nifs.ac.jp>
- [3] 関口忠:「プラズマ工学」(電気学会, 1997) p. 285.
- [4] 山中千代衛, 中井貞雄, 核融合研究 **58**, 26 (1987).
- [5] EUROfusion "JET": <http://www.euro-fusion.org/jet>
- [6] 国立研究開発法人 量子科学研究開発機構「JT-60/JT-60SA 計画」: <http://www-jt60.naka.qst.go.jp/jt60/html/mokuteki-jt60sa.html>
- [7] Max-Planck-Institut für Plasmaphysik "Wendelstein 7-X": <http://www.ipp.mpg.de/w7x>
- [8] 宮本健郎:「核融合のためのプラズマ物理 (NIFS-PROC-80)」(NIFS, 2010) p. 186.
- [9] S. C. Jardin and W. Park, Phys. Fluids **24**, 679 (1981).
- [10] 岡本正雄: 講義「核融合プラズマ物理の基礎-I (NIFS-PROC-29)」(NIFS, 1996) pp. 108, 156.
- [11] K. Ichiguchi, N. Nakajima, M. Wakatani, B. A. Carreras, and V. E. Lynch, Nucl. Fusion **43**, 1101 (2003).
- [12] T. Suzuki, M. Akiba, and M. Saito, J. Plasma Fusion Res. **82**, 699 (2006).
- [13] N. Nakajima, S. R. Hudson, and C. C. Hegna, Fusion Sci. Tech. **51**, 79 (2007).
- [14] H. Miura and N. Nakajima, Nucl. Fusion **50**, 054006 (2010).
- [15] Y. Todo, N. Nakajima, M. Sato, and H. Miura, Plasma Fusion Res. **5**, S2062 (2010).

- [16] J. U. Brackbill and D. C. Barnes, *J. Comput. Phys.* **35**, 426 (1980).
- [17] J. D. Ramshaw, *J. Comput. Phys.* **52**, 592 (1983).
- [18] G. Tóth, *J. Comput. Phys.* **161**, 605 (2000).
- [19] C. R. Evans and J. F. Hawley, *Astrophys. J.* **332**, 659 (1988).
- [20] O. Motojima, H. Yamada, A. Komori, N. Ohyabu, K. Kawahata, O. Kaneko, S. Masuzaki, A. Ejiri, M. Emoto, H. Funaba, M. Goto, K. Ida, H. Idei, S. Inagaki, N. Inoue, S. Kado, S. Kubo, R. Kumazawa, T. Minami, J. Miyazawa, T. Morisaki, S. Morita, S. Murakami, S. Muto, T. Mutoh, Y. Nagayama, Y. Nakamura, H. Nakanishi, K. Narihara, K. Nishimura, N. Noda, T. Kobuchi, S. Ohdachi, Y. Oka, M. Osakabe, T. Ozaki, B. J. Peterson, A. Sagara, S. Sakakibara, R. Sakamoto, H. Sasao, M. Sasao, K. Sato, M. Sato, T. Seki, T. Shimosuma, M. Shoji, H. Suzuki, Y. Takeiri, K. Tanaka, K. Toi, T. Tokuzawa, K. Tsumori, K. Tsuzuki, I. Yamada, S. Yamaguchi, M. Yokoyama, K. Y. Watanabe, T. Watari, Y. Hamada, K. Matsuoka, K. Murai, K. Ohkubo, I. Ohtake, M. Okamoto, S. Satoh, T. Satow, S. Sudo, S. Tanahashi, K. Yamazaki, M. Fujiwara, and A. Iiyoshi, *Phys. Plasmas* **6**, 1843 (1999).
- [21] T. Mito, A. Nishimura, S. Yamada, S. Imagawa, K. Takahata, N. Yanagi, R. Maekawa, H. Chikaraishi, H. Tamura, A. Iwamoto, S. Hamaguchi, Y. Hishinuma, T. Satow, O. Motojima, and LHD group, *Proc. of 19th Symposium on Fusion Engineering (SOFE)*, 144 (2002).
- [22] 山崎耕造, *J. Plasma Fusion Res.* **74**, 16 (1988).
- [23] 宮本健郎 : 「プラズマ物理入門」 (岩波書店, 1991) p. 77.
- [24] 渡邊清政, *J. Plasma Fusion Res.* **79**, 136 (2003).
- [25] N. Nakajima, C. Nührenberg, and J. Nührenberg, *J. Plasma Fusion Res.* **6**, 45 (2004).

- [26] K. Y. Watanabe, S. Masamune, Y. Takemura, H. Funaba, S. Sakakibara, F. Watanabe, K. Tanaka, S. Ohdachi, K. Toi, Y. Narushima, and LHD Experiment Group, Phys. Plasmas **18**, 056119 (2011).
- [27] R. Ueda, M. Sato, K. Y. Watanabe, Y. Matsumoto, Y. Suzuki, M. Itagaki, S. Oikawa, and Y. Todo, Plasma Fusion Res. **8**, 2403157 (2013).
- [28] M. Sato, N. Nakajima, K. Y. Watanabe, Y. Todo, and Y. Suzuki, 24th IAEA FEC 2012, TH/P3-25 (2012).

第2章 解析手法

2.1 はじめに

本研究では、線形 MHD Infrastructure for Plasma Simulation (MIPS) コード [1, 2] を利用した。このコードは線形 MHD 方程式系に基づき、各物理量の時間発展を求めるコードであり、MHD 不安定性の線形解析に利用可能である。また、磁場のソレノイダル条件が与える影響を評価するため、線形 MIPS コードにベクトルポテンシャルを導入した。この章では、線形 MIPS コードの概要とベクトルポテンシャルの導入方法、およびその他計算に必要な解析手法の説明を行う。なお、計算においてすべての変数、物理量は無次元化して扱う。無次元化していない変数、物理量はもともと無次元である場合を除いて $\sim$ を付して表記する。また、本論文の趣旨から離れた変数、物理量の無次元化の方法については一部省略している。

2.2 線形 MIPS コードの概要とベクトルポテンシャルの導入

線形 MHD Infrastructure for Plasma Simulation (MIPS) コード [1, 2] は、2.2.1 節で示す式 (2.58)-(2.63) に基づき各物理量の時間発展を計算するコードである。このコードでは空間微分を 4 次精度中央差分法、時間積分を 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いて計算する。計算には円柱座標系 (R, ϕ, Z) を使用する。無次元化は $R = \tilde{R}/\tilde{L}$, $Z = \tilde{Z}/\tilde{L}$ によって行う。 $\tilde{L}(= 1 \text{ m})$ は単位長さである。

4 次精度中央差分法は

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}\right)_i = \frac{X_{i-2} - 8X_{i-1} + 8X_{i+1} - X_{i+2}}{12\Delta x^1} \quad (2.1)$$

で計算を行う。 X は微分される物理量、 x^1 は任意の座標系における方向 1 を表す変数、 Δx^1 は x^1 方向の格子点間隔、 i は格子点番号である。ただし、計算領域の端では 1 次精度前進差分法、

または後退差分法

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}\right)_1 = \frac{-X_1 + X_2}{\Delta x^1}, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}\right)_{i_{\max}} = \frac{X_{i_{\max}} - X_{i_{\max}-1}}{\Delta x^1} \quad (2.3)$$

で計算を行い，その隣の格子点では2次精度中央差分法

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}\right)_i = \frac{-X_{i-1} + X_{i+1}}{2\Delta x^1} \quad (2.4)$$

で計算を行う． $i_{\max}$ は i の最大値である．線形 MIPS コードでは図 2.1 に示すように， R 方向について $i = 1, i_{\max}$ ， Z 方向について $k = 1, k_{\max}$ 上に壁面があると考え，計算を行っている． k は格子点番号， $k_{\max}$ は k の最大値である． ϕ 方向については周期境界条件を用いるため，壁面が存在しない．

4次精度 Runge-Kutta 法は，求めたい連立微分方程式が

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (2.5)$$

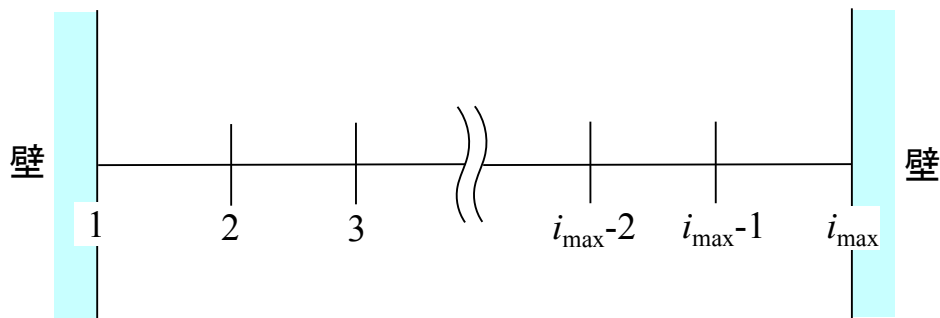


図 2.1: 線形 MIPS コードにおける計算領域の端での壁面位置の与え方.

と書ける場合,

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}^p + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{Y}^p), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{Y}^{**} = \mathbf{Y}^p + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{Y}^*), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Y}^{***} = \mathbf{Y}^p + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{Y}^{**}), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{Y}^{p+1} = \mathbf{Y}^p + \frac{\Delta t}{6} [\mathbf{f}(\mathbf{Y}^p) + 2\mathbf{f}(\mathbf{Y}^*) + 2\mathbf{f}(\mathbf{Y}^{**}) + \mathbf{f}(\mathbf{Y}^{***})] \quad (2.9)$$

で時間発展を計算する. $\mathbf{Y}$ は各微分方程式の左辺における被微分関数からなる列ベクトル, $\mathbf{f}$ は各微分方程式の右辺を表す関数からなる列ベクトルである. p はタイムステップ数, Δt は時間刻み, $\mathbf{Y}^*, \mathbf{Y}^{**}, \mathbf{Y}^{***}$ は計算の過程で使用する列ベクトルである.

2.2.1 支配方程式 (線形 MHD 方程式系)

まず, 非線形 MIPS コードで計算している非線形 MHD 方程式系を, 通常用いられる MHD 方程式系 (補遺 A.4 節参照) から導く. MHD 方程式系は, Boltzmann 方程式に 0 次, 1 次, 2 次のモーメントを取って得られる連続の式, 運動方程式, エネルギーの式, および Maxwell 方

程式系にいくつかの近似を導入することで導出される．通常用いられる MHD 方程式系は

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\Pi}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} = -\gamma \tilde{P} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) + (\gamma - 1) (\tilde{\eta} \tilde{J}^2 - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\Pi} : \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}}), \quad (2.12)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\eta} \tilde{\mathbf{J}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mu}_0 \tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\Pi} = 2\tilde{\mu}(\tilde{\mathbf{D}} - \frac{\mathbf{I}}{3}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}), \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}[(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^T + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}}], \quad (2.18)$$

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \right) \quad (2.20)$$

と書ける．ここで， $\tilde{t}$ は時刻， $\tilde{\nabla}$ はナブラ演算子， $\tilde{\rho}$ は質量密度， $\tilde{P}$ は圧力， $\tilde{\mathbf{V}}$ は速度， $\tilde{\mathbf{B}}$ は磁場（磁束密度）， $\tilde{\mathbf{J}}$ は電流密度， $\tilde{\mathbf{E}}$ は電場， $\mathbf{I}$ は単位テンソル， $\tilde{\Pi}$ は滑り応力テンソル， $\tilde{\mathbf{D}}$ はひずみ速度テンソル， $\tilde{\mathbf{q}}$ は熱流束， $\tilde{\eta}$ は抵抗率， $\tilde{\mu}$ は粘性係数（絶対粘度）， $\tilde{\nu}$ は動粘性係数（動粘度）， $\tilde{\lambda}$ は熱伝導率， $\tilde{\mu}_0$ は真空中の透磁率， γ は比熱比である．式 (2.11) の左辺を

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}} \right) = \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \left(\frac{\tilde{V}^2}{2} \right) \quad (2.21)$$

と変形する．ここで， $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ は渦度であり， $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{V}}$ を満たす．また，式 (2.11) の右辺第3項を式 (2.17)-(2.19) を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\Pi} &= \tilde{\nu} \tilde{\rho} \left[\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^T + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}}) - \frac{2}{3} \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \right] \\ &= \tilde{\nu} \tilde{\rho} \left[\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^T + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{V}} - \frac{2}{3} \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

と変形する．ここで， $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^T$ は

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^T = \tilde{g}^{\hat{j}\hat{k}} \tilde{V}_{\hat{j};\hat{i}\hat{k}} = \tilde{g}^{\hat{j}\hat{k}} (\tilde{V}_{\hat{j};\hat{k}\hat{i}} + \tilde{R}_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{p}} \tilde{V}_{\hat{p}}) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) + \tilde{g}^{\hat{j}\hat{k}} \tilde{R}_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{p}} \tilde{V}_{\hat{p}} \quad (2.23)$$

である．ここで，上下の添え字はそれぞれ反変添え字，共変添え字を表す．また， $'$ は共変微分を表す． $\tilde{g}^{\hat{j}\hat{k}}$ は共役計量テンソル， $\tilde{R}_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{p}}$ は曲率テンソルである．これらの記法は文献 [3] に準拠した．曲率テンソルは Christoffel の第2種記号を用いて

$$\tilde{R}_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{p}} \equiv \left\{ \begin{matrix} \tilde{p} \\ \hat{i} \hat{k} \end{matrix} \right\}_{\hat{j}} - \left\{ \begin{matrix} \tilde{p} \\ \hat{i} \hat{j} \end{matrix} \right\}_{\hat{k}} + \left\{ \begin{matrix} \tilde{m} \\ \hat{i} \hat{k} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tilde{p} \\ \hat{m} \hat{j} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tilde{m} \\ \hat{i} \hat{j} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tilde{p} \\ \hat{m} \hat{k} \end{matrix} \right\} \quad (2.24)$$

で定義される．下付き添え字中の $'$ は偏微分を表す．MIPS コードでは円柱座標系を使用する．そこで，円柱座標系 $(\tilde{R}, \tilde{\phi}, \tilde{Z})$ における0でない Christoffel の第2種記号を求めると，

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{1} \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\tilde{R}, \quad (2.25)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{2} \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{2} \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\tilde{R}} \quad (2.26)$$

であるから，円柱座標系では

$$\tilde{R}_{\hat{j}\hat{i}\hat{k}}^{\hat{p}} = 0 \quad (2.27)$$

である．さらに， $\tilde{\nabla} \tilde{\nu} = 0, \tilde{\nabla} \tilde{\rho} \rightarrow 0$ の近似を導入し，

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\Pi} &= \tilde{\nu} \tilde{\rho} \left[\frac{1}{3} \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{V}} \right] \\ &\simeq \frac{4}{3} \tilde{\nabla}[\tilde{\nu} \tilde{\rho}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})] - \tilde{\nabla} \times [\tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

と変形する．次に，式 (2.12) の左辺第2項を右辺に移項し，右辺第1項と足し合わせて，

$$-\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{P} - \gamma \tilde{P}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) = -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{P} \tilde{\mathbf{V}}) - (\gamma - 1) \tilde{P} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.29)$$

と変形する．厳密な MHD 平衡は $\tilde{\eta} = 0, \tilde{\lambda} = 0$ の条件下でのみ成立するが，一方で MHD 方程式系を用いた時間発展計算では数値計算上の数値不安定性を抑えるために $\tilde{\eta} \neq 0, \tilde{\lambda} \neq 0$ でなければ計算が難しい．この問題を解決するため，一般的な MHD 不安定性の計算では $\tilde{\eta} \neq 0, \tilde{\lambda} \neq 0$

の条件下でも MHD 平衡が成立するように、項の置き換えを行う。式 (2.12) の右辺第2項、および第3項を平衡時に0となるように

$$(\gamma - 1)\tilde{\eta}\tilde{J}^2 \rightarrow (\gamma - 1)\tilde{\eta}\tilde{\mathbf{J}} \cdot (\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{eq}}), \quad (2.30)$$

$$(\gamma - 1)\tilde{\lambda}\tilde{\nabla}^2 \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \right) \rightarrow \tilde{\chi}\tilde{\nabla}^2 (\tilde{P} - \tilde{P}_{\text{eq}}) \quad (2.31)$$

と置き換える。ただし、 $\tilde{\nabla}\tilde{\rho} \rightarrow 0$ の近似を導入し、 $\tilde{\chi} = (\gamma - 1)\tilde{\lambda}/\tilde{\rho}$ を熱拡散係数とした。 $\tilde{\mathbf{J}}_{\text{eq}}$ は平衡電流、 $\tilde{P}_{\text{eq}}$ は平衡圧力である。また、右辺第3項は

$$\tilde{\Pi} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\nu}\tilde{\rho} \left[(\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}})^T : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} - \frac{2}{3}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})^2 \right] \quad (2.32)$$

である。この式はスカラーであるため Cartesian 座標系で考えると、

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}})^T : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} &= \tilde{g}_{ik}\tilde{g}^{jl}\tilde{V}_{,i}^k\tilde{V}_{,j}^i \\ &= (\tilde{V}_{,1}^1)^2 + (\tilde{V}_{,2}^2)^2 + (\tilde{V}_{,3}^3)^2 \\ &\quad + (\tilde{V}_{,2}^1)^2 + (\tilde{V}_{,1}^2)^2 + (\tilde{V}_{,3}^2)^2 + (\tilde{V}_{,2}^3)^2 + (\tilde{V}_{,1}^3)^2 + (\tilde{V}_{,3}^1)^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} &= \tilde{V}_{,i}^j\tilde{V}_{,j}^i \\ &= (\tilde{V}_{,1}^1)^2 + (\tilde{V}_{,2}^2)^2 + (\tilde{V}_{,3}^3)^2 \\ &\quad + 2(\tilde{V}_{,2}^1\tilde{V}_{,1}^2 + \tilde{V}_{,3}^2\tilde{V}_{,2}^3 + \tilde{V}_{,1}^3\tilde{V}_{,3}^1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

であるから、

$$\tilde{\Pi} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\nu}\tilde{\rho} \left[\tilde{\omega}^2 + \frac{4}{3}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})^2 + 4(\tilde{V}_{,2}^1\tilde{V}_{,1}^2 + \tilde{V}_{,3}^2\tilde{V}_{,2}^3 + \tilde{V}_{,1}^3\tilde{V}_{,3}^1) \right] \quad (2.35)$$

となる。ここで、 $4(\tilde{V}_{,2}^1\tilde{V}_{,1}^2 + \tilde{V}_{,3}^2\tilde{V}_{,2}^3 + \tilde{V}_{,1}^3\tilde{V}_{,3}^1) \rightarrow 0$ の近似を導入し、

$$\tilde{\Pi} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\nu}\tilde{\rho} \left[\tilde{\omega}^2 + \frac{4}{3}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})^2 \right] \quad (2.36)$$

と変形する。次に、式 (2.13) の右辺を平衡時に0となるように、

$$\tilde{\eta}\tilde{\mathbf{J}} \rightarrow \tilde{\eta}(\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{eq}}) \quad (2.37)$$

と置き換える．以上をまとめて，非線形 MIPS コードで使用される MHD 方程式系

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} = & -\tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\rho} \tilde{\nabla} \left(\frac{\tilde{V}^2}{2} \right) - \tilde{\nabla} \tilde{P} + \tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} \\ & + \frac{4}{3} \tilde{\nabla} [\tilde{\nu} \tilde{\rho} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})] - \tilde{\nabla} \times (\tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{\omega}}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{t}} = & -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{P} \tilde{\mathbf{V}}) - (\gamma - 1) \tilde{P} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \\ & + (\gamma - 1) \left[\tilde{\nu} \tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 + \frac{4}{3} \tilde{\nu} \tilde{\rho} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})^2 + \tilde{\eta} \tilde{\mathbf{J}} \cdot (\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{eq}}) \right] + \chi \tilde{\nabla}^2 (\tilde{P} - \tilde{P}_{\text{eq}}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\eta} (\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{eq}}), \quad (2.42)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_0} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.43)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.44)$$

が導かれる．

これらの方程式系を，線形 MIPS コードで使用される線形 MHD 方程式系へ変形する．まず，

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_1, \quad (2.45)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1, \quad (2.46)$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0 + \tilde{P}_1, \quad (2.47)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{J}}_1 \quad (2.49)$$

とおく．下付き添え字 0, 1 はそれぞれ平衡量，1 次の摂動量を表す．また， $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ は 1 次の摂動量として扱う．これらを代入し，2 次以上の摂動量を 0 と近似する線形化を施すことで，本研

究で使した線形 MIPS コードで使される支配方程式である線形 MHD 方程式系：

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_0 \tilde{\mathbf{V}}), \quad (2.50)$$

$$\tilde{\rho}_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P}_1 + \tilde{\mathbf{J}}_1 \times \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{J}}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}_1 + \frac{4}{3} \tilde{\nu} \tilde{\rho}_0 \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) - \tilde{\nu} \tilde{\rho}_0 \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}_1}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{P}_0 \tilde{\mathbf{V}}) - (\gamma - 1) \tilde{P}_0 \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} + (\gamma - 1) \tilde{\eta} \tilde{\mathbf{J}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_1 + \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^2 \tilde{P}_1, \quad (2.53)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = -\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\eta} \tilde{\mathbf{J}}_1, \quad (2.54)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_1 = \frac{1}{\tilde{\mu}_0} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}_1, \quad (2.55)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.56)$$

が得られる．ここで，式 (2.50) 以外の方程式には $\tilde{\rho}_1$ は現れないため，式 (2.50) を除いて計算を行っても $\tilde{\rho}_1$ 以外の変数の時間発展を問題なく計算できる．また， $\tilde{\rho}_0$ 分布は MHD 平衡の式からは一般に求まらないため，一般に一様分布を持つ $\tilde{\rho}_0$ を与えることが多く，式 (2.50) によって $\tilde{\rho}_1$ の時間発展を計算する必要性はあまりないといえる．ゆえに，実際には式 (2.50) を除いた方程式系を支配方程式として扱っている．一般に MHD 解析では無次元化された方程式系を用いて解析される．このような無次元化は，各方程式のオーダーを揃えることで何度も定数を掛けるという数値計算上不要な操作を省くことを目的として行われる．また，一般に数値解析結果はサイズの異なる実験装置に対して適用可能となるように無次元量を用いて評価されることも，無次元化を行う理由の1つである．通常の流体解析では各項のオーダー評価を目的とした無次元化を行うこともあるが，補遺 A 節で述べる通り，MHD 方程式系では導出過程において既にオーダーの小さい項は無視されているため，オーダー評価を目的とした無次元化ではない．ただし，MHD 方程式系では計算の安定化のため，拡散項などオーダーの小さい項もいくつか残してある．各変数に対する無次元量を $t = \tilde{t}/(\tilde{L}/\tilde{V}_A)$ ， $\nabla = \tilde{\nabla}/(1/\tilde{L})$ ， $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}/\tilde{V}_A$ ， $P = \tilde{P}/(\tilde{B}_{\text{ax}}^2/\tilde{\mu}_0)$ ， $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}/\tilde{B}_{\text{ax}}$ ， $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}/(\tilde{V}_A \tilde{B}_{\text{ax}})$ ， $\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}}/[\tilde{B}_{\text{ax}}/(\tilde{\mu}_0 \tilde{L})]$ ， $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}/(\tilde{V}_A/\tilde{L})$ ， $\rho = \tilde{\rho}/[\tilde{B}_{\text{ax}}^2/(\tilde{\mu}_0 \tilde{V}_A^2)]$ ， $\eta = \tilde{\eta}/(\tilde{\mu}_0 \tilde{L} \tilde{V}_A)$ ， $\nu = \tilde{\nu}/(\tilde{L} \tilde{V}_A)$ ， $\chi = \tilde{\chi}/(\tilde{L} \tilde{V}_A)$ とおく． $\tilde{V}_A$ は磁気軸上の Alfvén 速度の大きさ， $\tilde{B}_{\text{ax}}$ は磁気軸上の磁場強度を，それぞれ規格化の基準値として使用する．Alfvén 速度とは，磁力線に垂直方向の非圧縮性変位が磁力線にそって伝搬する波（Alfvén 波）の伝搬速度であり，

その大きさは

$$\tilde{V}_A = \frac{\tilde{B}}{\sqrt{\tilde{\mu}_0 \tilde{\rho}}} \quad (2.57)$$

で表される [4]. 本解析では磁気軸上の $\tilde{B}_0, \tilde{\rho}_0$ を用いた. これらの無次元量を用いて方程式系 (2.51)-(2.56) を無次元化すると, 規格化線形 MHD 方程式系:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \frac{4}{3} \nu \rho_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nu \rho_0 \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_1, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (P_0 \mathbf{V}) - (\gamma - 1) P_0 \nabla \cdot \mathbf{V} + (\gamma - 1) \eta \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_1 + \chi \nabla^2 P_1, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 + \eta \mathbf{J}_1, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{J}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1, \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (2.63)$$

が得られる. 線形 MIPS コードでは, これらの方程式系 (2.58)-(2.63) を計算し, 各変数の時間発展を計算する. 一般に, 不安定性解析では平衡量として $\mathbf{V} = 0$ かつ MHD 平衡 $\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ を満たす分布を用いる. 本研究で用いた具体的な平衡分布は 3.2 節で述べる.

なお, 本研究のように初期分布として平衡分布を使用する場合, 平衡条件からは一般に $\tilde{P}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ の空間分布のみが与えられる. $\tilde{B}_{\text{ax}}$ は $\tilde{\mathbf{B}}$ の初期空間分布から求めることが可能である. 一方, $\tilde{\rho}$ の分布がなければ $\tilde{V}_A$ の値を決めることができない. そこで, LHD における一般的な数値として磁気軸磁場強度 $\tilde{B} \simeq 3 \text{ T}$ [5], 数密度 $\tilde{n}_d \simeq 10 \text{ 兆個/cc}$ [6] とすると,

$$\tilde{\rho} \simeq (10^{13} \times 10^6)(\text{個/m}^3) \times (1.7 \times 10^{-27})(\text{kg/個}) = 1.7 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^3 \quad (2.64)$$

であるから,

$$\tilde{V}_A \simeq \frac{3(\text{T})}{\sqrt{(1.3 \times 10^{-6})(\text{H/m}) \times (1.7 \times 10^{-8})(\text{kg/m}^3)}} \simeq 2 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (2.65)$$

程度の大きさとなる.

2.2.2 ベクトルポテンシャルの導入

MHD 方程式系で時間変化する磁場には,

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_1 = 0 \quad (2.66)$$

で表されるソレノイダル条件を課す必要がある．しかし，2.2.1 節で示した支配方程式 (2.51)-(2.56) には，この式 (2.66) が陽に含まれない．そこで本研究では，磁場のソレノイダル条件 (2.66) を満たすためにベクトルポテンシャル $\tilde{\mathbf{A}}$ を導入した． $\tilde{\mathbf{A}}$ を用いると， $\tilde{\mathbf{B}}$ は

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{A}}_1 \quad (2.67)$$

で表され，式 (2.66) が自動的に満たされる．さらに，式 (2.52) は

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_1}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_1 \quad (2.68)$$

と書き換えることができる．ここで， $\tilde{\varphi}$ はスカラーポテンシャルである．本研究では摂動量にのみベクトルポテンシャルを導入し，平衡量に対する磁場のソレノイダル条件は考慮しない．しかし，平衡計算によって $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0$ を満たす $\tilde{\mathbf{B}}_0$ を得ることが可能であれば，本手法によって全磁場 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{all}}$ について $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{\text{all}} = 0$ を満たすことが可能である．

2.2.1 節と同様に無次元量を， $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}/(\tilde{L}\tilde{B}_{\text{ax}})$ ， $\varphi = \tilde{\varphi}/(\tilde{L}\tilde{V}_A\tilde{B}_{\text{ax}})$ とおくと，ベクトルポテンシャルを導入した規格化線形 MHD 方程式系：

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \frac{4}{3} \nu \rho_0 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nu \rho_0 \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = -\mathbf{E}_1 - \nabla \varphi_1, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (P_0 \mathbf{V}) - (\gamma - 1) P_0 \nabla \cdot \mathbf{V} + (\gamma - 1) \eta \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_1 + \chi \nabla^2 P_1, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 + \eta \mathbf{J}_1, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{J}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1, \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (2.75)$$

が得られる．ベクトルポテンシャルを導入した線形 MIPS コードでは，これらの方程式系 (2.69)-(2.75) を用いて，各変数の時間発展を計算する．

ここで，式 (2.70) を用いて，ある時刻 τ の $\mathbf{A}_1$ は

$$\mathbf{A}_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} dt \quad (2.76)$$

$$= \int_0^\tau (-\mathbf{E}_1 - \nabla \varphi_1) dt \quad (2.77)$$

であるから，式 (2.72) を用いて，

$$\mathbf{B}_1(\tau) = \nabla \times \mathbf{A}_1(\tau) \quad (2.78)$$

$$= \nabla \times \left[\int_0^\tau (-\mathbf{E}_1 - \nabla \varphi_1) dt \right] \quad (2.79)$$

$$= \int_0^\tau (-\nabla \times \mathbf{E}_1 - \nabla \times \nabla \varphi_1) dt \quad (2.80)$$

$$= \int_0^\tau -\nabla \times \mathbf{E}_1 dt \quad (2.81)$$

であり， φ_1 に関する項は0となる．したがって， $\mathbf{B}_1$ は φ_1 の値に依存しない．また，(2.69),(2.71) の右辺に $\mathbf{A}_1$ が存在しないため， $\mathbf{V}, P_1$ の時間発展に φ_1 の値は影響しない．したがって，方程式系 (2.69)-(2.75) の解は φ_1 の値に依存しない．そこで，本研究では $\varphi_1 = 0$ として計算を行った．

また，ベクトルポテンシャル非導入時の計算では式 (2.59) から $\mathbf{E}_1$ の空間差分を時間積分することで， $\mathbf{B}_1$ を1タイムステップ進める．一方，ベクトルポテンシャル導入時の計算では式 (2.70)，(2.72) から $\mathbf{E}_1$ を時間積分して1タイムステップ進めた $\mathbf{A}_1$ を求め，さらに $\mathbf{A}_1$ を空間差分することで $\mathbf{B}_1$ を求める．したがって，初期摂動が同一の変数に対して与えられる限り，両者の計算で同じ時刻までの空間差分の回数は同一である．ゆえに，ベクトルポテンシャル導入時に空間差分の回数を理由として誤差が増えることはない．

2.2.3 境界条件

線形 MIPS コードでは計算領域全体を線形 MHD 方程式系によって計算する．しかし，LHD プラズマに適用した場合，使用される円柱座標系では，計算領域内にプラズマ外の真空領域や真空容器壁，コイルなどを含む．コイル近傍では非常に大きな磁場強度を持ち，このような領

域を厳密な線形 MHD 方程式系で計算することは、現実の物理現象と比較して正しくない計算結果を生じる原因となる．そのため、線形 MIPS コードでは2つの方法で境界条件を与えている．すなわち、計算領域の境界における滑りなし完全導体壁に相当する条件、およびプラズマ-真空境界における固定端に相当する境界条件を設けることで、プラズマ外の計算によって生じる悪影響を抑えている．

1つ目の方法として、滑りなし完全導体壁に相当する条件

$$\mathbf{V} = 0, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_w = 0 \quad (2.83)$$

を壁面上で与えている．ここで、 $\mathbf{n}_w$ は壁面上の単位法線ベクトルである．一般的な完全導体壁の条件は

$$(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_w = 0 \quad (2.84)$$

であるが、実際の装置において計算領域の境界は完全導体ではなく、初期分布として与える平衡磁場はこの条件を満たさない．そこで、初期磁場を除いた摂動磁場のみがこの条件を満たすと仮定し、式 (2.83) に示す条件で磁場の境界条件を与えている．また、 $\mathbf{A}_1$ を導入した場合、式 (2.83) の代わりに $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_w = 0$ から

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_w = 0 \quad (2.85)$$

を与えている．

2つ目の方法として、

$$C_{\text{vac}} = \begin{cases} 1 & \text{for } P_0 \geq 0.002P_{\text{max}} \\ \frac{P_0}{0.002P_{\text{max}}} & \text{for } 0 < P_0 < 0.002P_{\text{max}} \\ 0 & \text{for } P_0 = 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

で C_{vac} を定義し、各タイムステップで更新された $\mathbf{V}$ に C_{vac} を掛けている．ここで、 P_{max} は P_0 の最大値であり、一般に磁気軸上の P_0 である．この操作によって、プラズマ-真空境界、および真空領域において $\mathbf{V} = 0$ となる．そのため、プラズマ-真空境界の位置は平衡分布によって

決まり，時間変化しない．式 (2.58)-(2.63) に $\mathbf{V} = 0, \partial\mathbf{V}/\partial t = 0$ を代入し整理すると，

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} = 0, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t} = \eta\nabla^2\mathbf{B}_1, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = (\gamma - 1)\eta\mathbf{J}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{B}_1 + \chi\nabla^2 P_1 \quad (2.89)$$

となる．式 (2.87)-(2.89) は $\mathbf{B}_1, P_1$ に関する拡散方程式を含むため，厳密にはプラズマ内から $\mathbf{B}_1, P_1$ の値が真空領域へ広がる．しかし， η, χ は一般に比較的小さな値であることを考慮すると，この境界条件はプラズマ-真空境界において固定端とする境界条件とみなすことができる．また， $\mathbf{A}_1$ を導入した場合，式 (2.88) の代わりに

$$\frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial t} = \eta\nabla^2\mathbf{A}_1 \quad (2.90)$$

である．式 (2.90) は $\mathbf{A}_1$ に関する拡散方程式であるため，厳密にはプラズマ内から $\mathbf{A}_1$ の値が真空領域へ広がる．しかし， η は一般に比較的小さな値であることを考慮すると，やはりこの境界条件はプラズマ-真空境界において固定端とする境界条件とみなすことができる．

2.2.4 ベクトルポテンシャル導入時の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ の保証

有限差分法を用いた数値計算では，離散化に起因する誤差を低減することが望ましい．特に本研究では，ベクトルポテンシャル導入時に磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ が高い精度で満たされていることが重要である．テンソル表記を用いて，発散，および回転を

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}B^{\hat{i}})}{\partial x^{\hat{i}}}, \quad (2.91)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \frac{\partial A_{\hat{k}}}{\partial x^{\hat{j}}} \quad (2.92)$$

の形で記述する．ここで， $\sqrt{g}$ は Jacobian (g は計量テンソル $g_{\hat{i}\hat{j}}$ の行列式)， $e^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}$ は e システム (順列テンソル) である． e システムは

$$e^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} = \begin{cases} 0 & : \text{添え字 } \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \text{ の任意の 2 つが同じ場合} \\ 1 & : \text{添え字の順序 } \hat{i}\hat{j}\hat{k} \text{ が } 123 \text{ の偶順列の場合} \\ -1 & : \text{同様に } \hat{i}\hat{j}\hat{k} \text{ が } 123 \text{ の奇順列の場合} \end{cases} \quad (2.93)$$

で定義される． $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ とし，式 (2.91) に式 (2.92) を代入すると，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}} \left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} e^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \frac{\partial A_{\hat{k}}}{\partial x^{\hat{j}}} \right) \quad (2.94)$$

と書くことができる．ここで，式 (2.94) の括弧内の 2 つの $\sqrt{g}$ は，離散化した計算においても同一の座標上の値である．したがって，数値計算上も離散化の誤差なく $\sqrt{g}/\sqrt{g} = 1$ であるため，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}} \frac{\partial A_{\hat{k}}}{\partial x^{\hat{j}}} \quad (2.95)$$

となる．

ここで， $A(x^1, x^2)$ の x^1, x^2 による偏微分が

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^1} \right)_{i,j} = \sum_{\hat{n}=\hat{n}_{\min}}^{\hat{n}_{\max}} c_{\hat{n}} A_{i+\hat{n},j}, \quad (2.96)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \sum_{\hat{m}=\hat{m}_{\min}}^{\hat{m}_{\max}} d_{\hat{m}} A_{i,j+\hat{m}} \quad (2.97)$$

の形で差分表示できるとする．ここで，図 2.2 に示すように， i, j は方向 1, 2 に対する格子点番号であり， $\hat{n}, \hat{n}_{\min}, \hat{n}_{\max}$ ，および $\hat{m}, \hat{m}_{\min}, \hat{m}_{\max}$ は整数， $c_{\hat{n}}, d_{\hat{m}}$ は実数である．このとき，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \sum_{\hat{n}=\hat{n}_{\min}}^{\hat{n}_{\max}} c_{\hat{n}} \sum_{\hat{m}=\hat{m}_{\min}}^{\hat{m}_{\max}} d_{\hat{m}} A_{i+\hat{n},j+\hat{m}} \\ &= \sum_{\hat{m}=\hat{m}_{\min}}^{\hat{m}_{\max}} d_{\hat{m}} \sum_{\hat{n}=\hat{n}_{\min}}^{\hat{n}_{\max}} c_{\hat{n}} A_{i+\hat{n},j+\hat{m}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^1} \right)_{i,j} \end{aligned} \quad (2.98)$$

であるから偏微分の順序交換が可能である．例として2次精度中央差分法の場合，

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^1}\right)_{i,j} = -\frac{1}{2\Delta x^1}A_{i-1,j} + \frac{1}{2\Delta x^1}A_{i+1,j}, \quad (2.99)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = -\frac{1}{2\Delta x^2}A_{i,j-1} + \frac{1}{2\Delta x^2}A_{i,j+1} \quad (2.100)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= -\frac{1}{2\Delta x^1} \left(-\frac{1}{2\Delta x^2}A_{i-1,j-1} + \frac{1}{2\Delta x^2}A_{i-1,j+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta x^1} \left(-\frac{1}{2\Delta x^2}A_{i+1,j-1} + \frac{1}{2\Delta x^2}A_{i+1,j+1} \right) \\ &= -\frac{1}{2\Delta x^2} \left(-\frac{1}{2\Delta x^1}A_{i-1,j-1} + \frac{1}{2\Delta x^1}A_{i+1,j-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta x^2} \left(-\frac{1}{2\Delta x^1}A_{i-1,j+1} + \frac{1}{2\Delta x^1}A_{i+1,j+1} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^1}\right)_{i,j} \end{aligned} \quad (2.101)$$

となる．同様に方向2,3，および方向3,1についても順序交換が可能である．したがって，式(2.95)は数値計算上も離散化の誤差なく

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.102)$$

となる．なお，計算機が有限桁の実数しか扱えないことに起因する誤差は残る． $\hat{n}, \hat{n}_{\min}, \hat{n}_{\max}$ ，および $\hat{m}, \hat{m}_{\min}, \hat{m}_{\max}$ が i, j に依存する場合でも，式(2.98)は成り立つ．すなわち，計算領域の端において差分精度を下げた場合などにおいても偏微分の順序交換が可能であり，離散化の誤差なく $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ となる．ただし，偏微分の差分表示が式(2.96),(2.97)で書けない場合は， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の保証について別途考える必要がある．

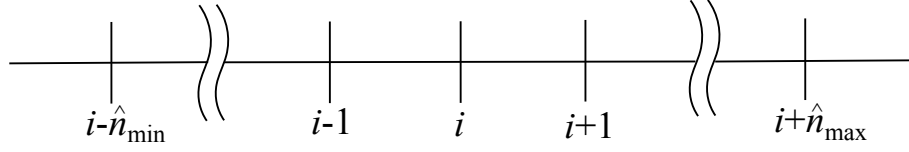


図 2.2: 偏微分に関する格子点の位置.

2.2.5 ベクトルポテンシャル非導入時の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$

線形 MIPS コードでは，時間発展を式 (2.6)-(2.9) で表される 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いて計算する．したがって，式 (2.59) によって計算される $\mathbf{B}_1$ の時間発展は

$$\mathbf{B}_1^* = \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{2} \nabla \times \mathbf{E}_1^p, \quad (2.103)$$

$$\mathbf{B}_1^{**} = \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{2} \nabla \times \mathbf{E}_1^*, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{B}_1^{***} = \mathbf{B}_1^p - \Delta t \nabla \times \mathbf{E}_1^{**}, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{B}_1^{p+1} = \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{6} (\nabla \times \mathbf{E}_1^p + 2\nabla \times \mathbf{E}_1^* + 2\nabla \times \mathbf{E}_1^{**} + \nabla \times \mathbf{E}_1^{***}) \quad (2.106)$$

であり，両辺の発散をとると，

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1^* = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^p = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p, \quad (2.107)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1^{**} = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^* = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p, \quad (2.108)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1^{***} = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p - \Delta t \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^{**} = \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p, \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_1^{p+1} &= \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p - \frac{\Delta t}{6} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^p + 2\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^* + 2\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^{**} + \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1^{***}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{B}_1^p \end{aligned} \quad (2.110)$$

となる．ただし，2.2.4節の計算方法によって，離散化した計算においても $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 = 0$ であるとした．したがって， $\nabla \cdot \mathbf{B}_1^p = 0$ であれば $\nabla \cdot \mathbf{B}_1^{p+1} = 0$ となる．ここで， $\mathbf{B}_1^{p=0} = 0$ であるから， p によらず $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ が成立する．以上から，4次精度 Runge-Kutta 法のみを使用した時間発展では，空間離散化，および時間離散化に起因する $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差は生じない．ただし，式 (2.107)-(2.110) の計算によって数値計算の精度で生じる誤差は毎タイムステップ加えられるため，この誤差は蓄積する．さらに線形 MIPS コードによる計算では数値振動を抑制するため，4次精度 Runge-Kutta 法だけでなく 2.2.6 節で述べるスムージングを導入している．したがって，このスムージングによる影響を考慮に加える必要がある．

2.2.6 スムージング

線形 MIPS コードでは，100 タイムステップおきに $\mathbf{V}, \mathbf{B}_1, P_1$ に対してスムージングを行う．これは短波長の数値振動の増大を抑え，妥当な解析結果を得るために導入されている．スムージングは， R 方向について

$$X'_{i,j,k} = \frac{1}{4}(X_{i-1,j,k} + 2X_{i,j,k} + X_{i+1,j,k}), \quad (2.111)$$

$$X''_{i,j,k} = \frac{1}{4}(-X'_{i-1,j,k} + 6X'_{i,j,k} - X'_{i+1,j,k}) \quad (2.112)$$

の形で計算する [7]． X はスムージング対象となる物理量， X' は計算の過程で使用する変数である． X'' がスムージング後の X である．ただし， X には 100 タイムステップの間で変化した量のみを代入する． ϕ, Z 方向についても同様の形の式を用いてスムージングを行う．

長さ Δx 間隔で離散化された周期 $(i_{\max} - i_{\min} + 1)\Delta x$ の関数 h_i の離散 Fourier 変換 H_i は

$$H_i = \sum_{i'=i_{\min}}^{i_{\max}} h_{i'} e^{-j2\pi i i' / (i_{\max} - i_{\min} + 1)} \quad (2.113)$$

で与えられる [8]．ここで， j は虚数単位である． H_i は空間周波数 $1/[(i_{\max} - i_{\min} + 1)\Delta x]$ 間隔で離散化された周期 $1/\Delta x$ の関数である．長さ Δx 間隔で離散化された周期 $(i_{\max} - i_{\min} + 1)\Delta x$ の重み関数 w_i を用いて， h_i をスムージングした後の関数 h'_i は離散畳み込み積分

$$h'_i = \sum_{i'=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i'} h_{i-i'} \quad (2.114)$$

で与えられる．したがって，この離散 Fourier 変換 H'_i は

$$\begin{aligned}
H'_i &= \sum_{i''=i_{\min}}^{i_{\max}} \left(\sum_{i'=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i''} h_{i'-i''} \right) e^{-j2\pi i i'' / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \\
&= \sum_{i''=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i''} \left(\sum_{i'=i_{\min}}^{i_{\max}} h_{i'-i''} e^{-j2\pi i i' / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \right) \\
&= \sum_{i''=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i''} \left(\sum_{(i'-i'')=i_{\min}-i''}^{i_{\max}-i''} h_{i'-i''} e^{-j2\pi i (i'-i'') / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \right) e^{-j2\pi i i'' / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \\
&= \sum_{i''=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i''} \left(\sum_{(i'-i'')=i_{\min}}^{i_{\max}} h_{i'-i''} e^{-j2\pi i (i'-i'') / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \right) e^{-j2\pi i i'' / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \\
&= \left(\sum_{i''=i_{\min}}^{i_{\max}} w_{i''} e^{-j2\pi i i'' / (i_{\max}-i_{\min}+1)} \right) H_i \\
&= W_i H_i
\end{aligned} \tag{2.115}$$

となる．ここで， W_i は w_i の離散 Fourier 変換である．式 (2.115) は，畳み込み定理の離散的表現である．式 (2.111)，(2.112) で表されるスムージングを表す重み関数 $w_{1,i}, w_{2,i}$ はそれぞれ

$$w_{1,i} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{for } i = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } i = 0 \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases}, \tag{2.116}$$

$$w_{2,i} = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{for } i = \pm 1 \\ \frac{3}{2} & \text{for } i = 0 \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \tag{2.117}$$

で与えられる．この離散 Fourier 変換をそれぞれ W_1, W_2 とおく． w_1, w_2 はどちらも実部のみを持つ偶関数であるから， W_1, W_2 も実部のみを持つ偶関数である．図 2.3 は W_1, W_2 の実部，および積 $W_1 W_2$ の実部である．横軸は無次元化された波数 $k_c \Delta x$ である．ここで，連続関数 $\hat{h}(x)$ がその標本値

$$\hat{h}(x) = \hat{h}(i\Delta x) \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \delta(x - i'\Delta x) \tag{2.118}$$

から一意に定まるという標本化定理の制約条件は， $\hat{h}$ の Fourier 変換は $f_{c,\max}$ より大なる空間

周波数で0であり、標本化間隔が $\Delta x = 1/(2f_{c,\max})$ に選ばれていることである。 $\delta(x)$ はデルタ関数である。離散 Fourier 変換は打ち切り関数を畳み込み積分することで $f_{c,\max} = 1/(2\Delta x)$ より大なる空間周波数を0として導かれるため、標本化定理が成立する。また、波数 k_c は空間周波数 f_c と $k_c = 2\pi f_c$ の関係である。したがって、離散 Fourier 変換では $k_{c,\max}\Delta x = \pi$ であり、 $k_c\Delta x \geq \pi$ で離散 Fourier 変換は0である。ゆえに、図 2.3 では $k_c\Delta x < \pi$ の値のみが示されている。本手法は W_1W_2 で表される曲線であり、2段階のスミージング操作を行うことで、長波長の波にあまり影響を与えずに短波長の波を減衰させる手法であることがわかる。特に、 $W_1W_2 < 0.9$ となるのは $k_c\Delta x > 1.2$ 程度の場合である。3.2節で述べるように、 ϕ 方向の格子間隔は R 依存性を持つため、スミージングの掛かり方も R 依存性を持つ。そこで、格子間隔を大きめに見積もることで、スミージングにより減衰する波長を大きめに見積もることとする。格子間隔が最も大きくなるのは、 R が計算領域内で最大値をとる $\tilde{R} = 4.75$ m における ϕ 方向の格子間隔である。 ϕ 方向には640の格子点をとるため、 $\tilde{R} = 4.75$ m における ϕ 方向の格子間隔は、大きく見積もって $2\pi \times 4.75/640 \simeq 4.7 \times 10^{-2}$ m 程度である。したがって、波長 $\tilde{\lambda}_c < 4.7 \times 10^{-2} \times (2\pi/1.2) \simeq 0.25$ m の波は大きく減衰されると考えるべきである。

この条件を2.5節において述べるトロイダルモード数 n 、ポロイダルモード数 m に置き換える。 ϕ 方向の周長を小さく見積もると、 R が計算領域内で最小値をとる $\tilde{R} = 2.55$ m において、 $2\pi \times 2.55 \simeq 16$ m 程度である。また、3.2節で述べる初期平衡分布における最外殻磁気面の小半径は、小さく見積もって0.3 m 程度である。よって、最外殻磁気面におけるポロイダル方向の周長は、小さく見積もって $2\pi \times 0.3 \simeq 1.9$ m 程度である。最外殻磁気面より内側のポロイダル方向の周長は小半径に大きく依存するため、2.4節で述べる Boozer 座標系における規格化小半径 ρ_B を用いてこれを評価すると、ポロイダル方向の周長は小さく見積もって $1.9\rho_B$ m 程度である。したがって、 m/n のモード（2.5節参照）を持つ波の波長とスミージングで大きく減衰される波の波長を比較し、

$$\sqrt{\left(\frac{16}{n}\right)^2 + \left(\frac{1.9\rho_B}{m}\right)^2} < 0.25 \quad \text{for } m \neq 0, n \neq 0, \quad (2.119)$$

$$\frac{16}{n} < 0.25 \quad \text{for } m = 0, n \neq 0, \quad (2.120)$$

$$\frac{1.9\rho_B}{m} < 0.25 \quad \text{for } m \neq 0, n = 0 \quad (2.121)$$

を満たす波はスミージングで大きく減衰される。ゆえに、例えば $1 \leq |n| \leq 64$ の場合 ρ_B の値に

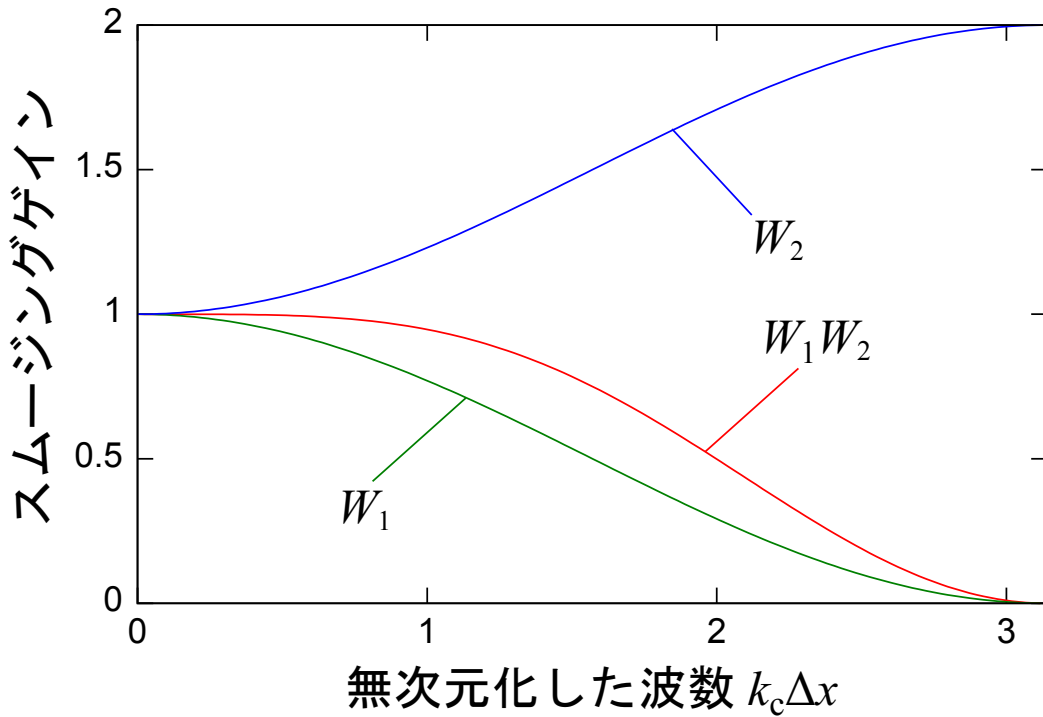


図 2.3: 横軸を無次元化した波数にとったスムージングゲイン（スムージングによるフィルタリングゲイン）。スムージングゲインは離散 Fourier 変換後の値が，スムージング前後で何倍されるかを表している。

よらずすべての m に対してスムージングによる減衰は小さく，また $n = 0$ の場合 $\rho_B < 0.13$ であればすべての m に対してスムージングによる減衰は大きいことがわかる。

ベクトルポテンシャル導入時は，主要な変数が $\mathbf{B}_1$ から $\mathbf{A}_1$ へ置き換わる．そこで，スムージング対象も同様に置き換えを行い， $\mathbf{V}, \mathbf{A}_1, P_1$ に対してスムージングを行うこととした。

ここで，スムージングが $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に与える影響を考察する．ベクトルポテンシャル導入時にスムージングが実行された $\mathbf{A}_1$ は，2.2.4 節の計算方法を用いることで，やはり $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 = 0$ を満たすことが保証される．一方，ベクトルポテンシャル非導入時にスムージングが実行された $\mathbf{B}_1$ は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ であることを全く考慮していない．したがって，スムージング後の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ は誤差が生じることが予想される．ベクトルポテンシャル非導入時にスムージングに起因する $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差を減らすためには，例えば 2.2.5 節に示す 4 次精度 Runge-Kutta 法のような陽解法でなく，陰解法のような数値的安定性の高い計算手法を用いることで，スムージングを行わないという方法も考えられる．しかし，一般に陰解法は毎タイムステップの収束計算や逆行列の計算などを必要とする手法が多く，長い時間発展の計算に適さないといった問題がある．し

たがって、ベクトルポテンシャルの導入は、スムージングに起因する $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差を減らす上で非常に単純かつ有効な解決策である。

2.3 平衡計算と HINT コードの概要

本研究における MHD 不安定の解析では、MHD 方程式系から各物理量の時間発展を計算する手法を用いる。1.2 節で述べたように、この手法では一般に初期条件として次の MHD 平衡

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.122)$$

を満たす圧力分布、磁場分布を使用する。MHD 平衡を満たす初期分布は一般に、 P の小半径分布から $\mathbf{B}$ の分布を求める平衡計算によって求められる。トカマクのような軸対称プラズマでは、Grad-Shafranov 方程式を数値的に解くことで、厳密な $\mathbf{B}$ を与えることができる。一方、LHD のような非軸対称プラズマでは対称性がないので、Grad-Shafranov 方程式に相当する式が厳密には定められないため、異なる手法が必要となる [9]。

本研究では平衡計算に HINT コード [10,11] を利用した。HINT コードでは真空磁場の 3 次元分布、および圧力の小半径分布を入力データとして、以下の 2 つのステップ A,B を交互に繰り返し実行する。なお、真空磁場とはプラズマが存在しない場合にコイル電流がつくる磁場のことである。ステップ A では、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0 \quad (2.123)$$

を満たす P の分布を計算する。この式 (2.123) は、ある 1 本の磁力線について、その磁力線上で圧力が変化しないことを意味する。そこで、この式 (2.123) を満たす P を求めることを、磁力線追跡を利用し

$$P' = \frac{\int_{-L_{\text{in}}}^{L_{\text{in}}} \mathcal{F} P \frac{dl}{B}}{\int_{-L_{\text{in}}}^{L_{\text{in}}} \frac{dl}{B}}, \quad (2.124)$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} 1 & \text{for } L_C \geq L_{\text{in}} \\ 0 & \text{for } L_C < L_{\text{in}} \end{cases} \quad (2.125)$$

を計算することと置き換える． P' は式 (2.123) を満たす圧力分布， dl は磁力線追跡における微小線素， L_C は磁力線連結長（磁力線の長さ）， L_{in} は磁力線追跡を行う長さである．ただし式 (2.125) の場合分けに関しては，磁力線追跡が計算領域内で L_{in} の長さに到達したとき $L_C \geq L_{in}$ であり， L_{in} の長さに到達する前に計算領域の端に到達したとき $L_C < L_{in}$ であるとみなす．ステップ B では，

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\ &= \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta(\mathbf{J} - \mathbf{J}_{coil} - \mathbf{J}_{net})], \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.128)$$

によって，各物理量の時間発展を計算する． $\mathbf{J}_{coil}$ はコイル電流， $\mathbf{J}_{net}$ はオーミック電流などの正味の電流を表す．なお，これらは無次元化された式である．以上のステップ A，B を交互に実行し， $\partial \mathbf{V} / \partial t \rightarrow 0, \partial \mathbf{B} / \partial t \rightarrow 0$ に収束したときの $P, \mathbf{B}$ が式 (2.122) を近似的に満たす平衡分布となる．

なお，式 (2.123) から平衡分布における磁力線は等圧面上に乗っており，等圧面と磁気面が一致することがわかる．したがって，1.2 節で述べたように，平衡の存在するトーラス型装置では一般に，プラズマ内に入れ子状のトーラス形状の磁気面が存在することとなる．ただし，実際のプラズマはストキャスティック領域において MHD 方程式系を満足しない．そのため，ストキャスティック領域では式 (2.122) で表される MHD 平衡条件を満足せず，平衡状態においても磁気面を形成しない．HINT コードでは，ステップ A における磁力線追跡を有限な長さで打ち切ることで，ストキャスティック領域における平衡磁場も近似的に計算している．また，使用した HINT コードで得られた $\mathbf{B}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たすことを考慮していないため，3.2 節に示すように平衡磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ は満たされない．

2.4 Boozer 座標系

成長した MHD 不安定性の性質を調べるために，磁気座標系の 1 つである Boozer 座標系 $(\rho_B, \theta_B, \zeta_B)$ [12, 13] がよく用いられる． ρ_B は規格化小半径， θ_B はポロイダル角変数， ζ_B はトロ

イダル角変数である．Boozer 座標系はトーラス型の入れ子状の磁気面が存在する空間においてのみ定義可能である． ρ_B は磁気面ごとに一定値をとり，磁気軸から最外殻磁気面へ単調に変化する実数である．LHD の場合，

$$\rho_B = \sqrt{\frac{\Psi_t}{\Psi_{t,LCMS}}} \quad (2.129)$$

がよく用いられる． Ψ_t はトロイダル磁束， $\Psi_{t,LCMS}$ は最外殻磁気面におけるトロイダル磁束である．トロイダル磁束はポロイダル断面において1つの磁気面に囲まれた領域を貫く磁束である． θ_B, ζ_B は $0 \leq \theta_B < 2\pi, 0 \leq \zeta_B < 2\pi$ の値をもつ変数であり，Boozer 座標系上の各物理量は θ_B, ζ_B 方向に 2π の周期を持つ． θ_B, ζ_B は幾何学的角度でないことに注意を要する．基底ベクトルは

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} = \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + I_t \mathbf{B}), \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} = \frac{1}{B^2} (-\iota \mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + I_p \mathbf{B}) \quad (2.131)$$

で定義される．基底ベクトルの導出は補遺 C 節に記述した． $\mathbf{r}$ は位置ベクトル， I_t はトロイダル電流， I_p はポロイダル電流， ι は回転変換である．ここで，式 (2.130)，(2.131) は無次元化した式であることに注意が必要である．無次元化しない場合は，右辺第2項に $\tilde{\mu}_0$ が掛けられる．式 (2.130)，(2.131) におけるトロイダル電流はポロイダル断面において1つの磁気面に囲まれた領域を貫く電流であり，ポロイダル電流は1つの磁気面がトーラスの外側につくる領域を貫く電流である．また， ι は

$$\iota = \frac{d\Psi_p}{d\Psi_t} \quad (2.132)$$

で定義され，磁力線がトロイダル方向に1周する間にポロイダル方向にどの程度周回したかを表す値である． Ψ_p はポロイダル磁束であり，図 1.2 に示す面を貫く磁束である．また，Jacobian は

$$\sqrt{g_B} = \frac{I_p + \iota I_t}{B^2} \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \quad (2.133)$$

である．Boozer 座標系において，磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g_B}} \left(\frac{d\Psi_p}{d\rho_B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} + \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} \right) \quad (2.134)$$

で表される．したがって，磁場は θ_B 方向と ζ_B 方向の基底ベクトルの一次結合となるため，Boozer 座標系上において磁場は直線的に表現される．なお，HINT コードによる計算結果では平衡状態においてもわずかに磁気島が存在する場合があるが，Boozer 座標系で磁気島の存在する空間を正確に定義することはできない．また，ストキャスティック領域では入れ子状の磁気面が存在しないため，Boozer 座標系でストキャスティック領域に相当する空間を定義することもできない．

実際の計算では，実座標系（円柱座標系など）で与えられた平衡分布から精度よく Boozer 座標系を得ることは困難である．そこで，VMEC 磁気座標系において平衡計算を行う VMEC コード [14] によって実座標系での平衡分布と同じ圧力分布，平衡磁場を求め，これを座標変換し Boozer 座標系を得るという手法がよく用いられる．本研究でもこの手法を用いて，円柱座標系における Boozer 座標系の格子点の座標を求めた．

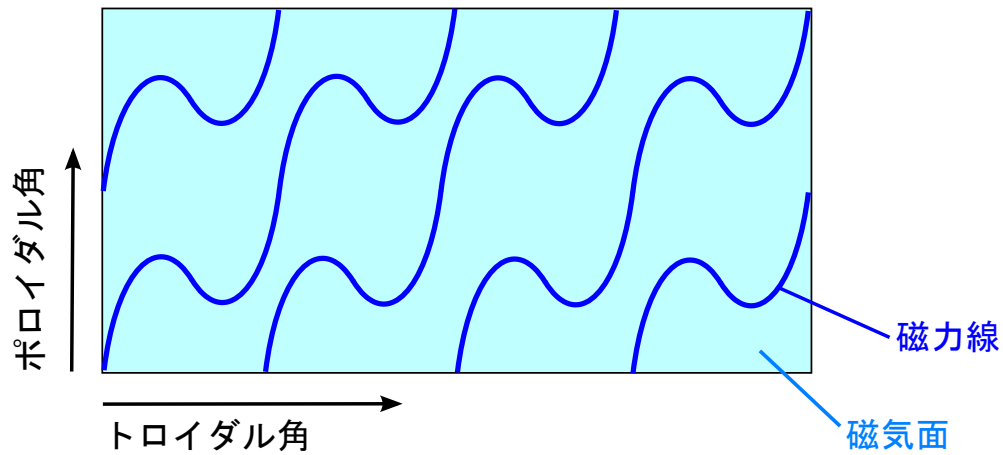
また，Boozer 座標系には左手系が用いられることがあり，本研究で使用したコード内でも実際は左手系の Boozer 座標系を用いて計算している．しかし，一般的な座標系では右手系が好まれることを考慮し，論文などにおいては右手系に置き換えて計算結果を記述することも多い．これにならい，本論文ではすべて右手系の Boozer 座標系を用いて記述した．

2.5 モード解析

プラズマに摂動として微小変位が生じた場合を考える．1.3 節で述べたように，この摂動が磁力線を曲げるような摂動である場合，磁気張力が増加するためプラズマは安定化する．一方，この摂動が磁力線をあまり曲げない摂動の場合，磁気張力があまり変化しないため変位の増大を抑えることができず，プラズマが不安定化する可能性がある．このようにして生じる不安定性は交換型不安定性（または交換型モード）と呼ばれる．LHD の場合， $\langle\beta\rangle \simeq 1\%$ 程度の低ベータプラズマにおいて生じやすい不安定性である．前述の磁力線をあまり曲げない摂動とは，磁力線に摂動の等位相線が一致するような摂動である．したがって，2.4 節で述べた Boozer 座標系上では，この摂動の等位相線もまた直線的となる．そこで，Boozer 座標系上での θ_B, ζ_B に関する2次元 Fourier 級数展開を利用することで，ランダムな摂動から成長しやすい摂動のみを単一のモードとして抽出することが可能となる．図 2.4 に (a) 切り開いた磁気面，および Boozer 座標系における磁気面を示す．Boozer 座標系では磁力線は直線的に描かれ，成長しやすい摂動

の波数ベクトルの向きは磁力線に直交することを表している。

(a) 切り開いた磁気面



(b) Boozer座標系における磁気面

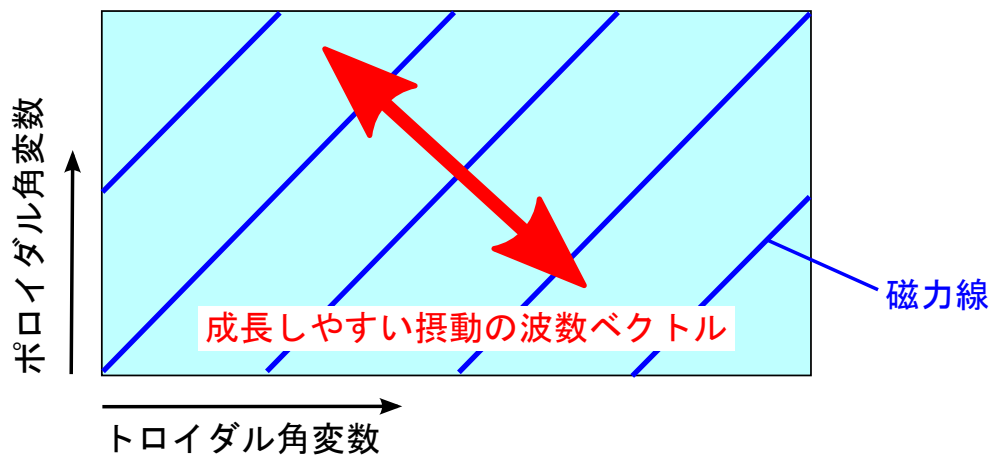


図 2.4: 切り開いた磁気面, および Boozer 座標系における磁気面. Boozer 座標系では磁力線は直線的に描かれ, 成長しやすい摂動の波数ベクトルの向きは磁力線に直交する。

本研究におけるモード解析では摂動圧力 P_1 の Fourier 級数展開

$$P_1(\rho_B, \theta_B, \zeta_B) = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (P_{mn} - jP'_{mn}) e^{j(m\theta_B + n\zeta_B)}, \quad (2.135)$$

$$P_{mn}(\rho_B) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_1 \cos(m\theta_B + n\zeta_B) d\theta_B d\zeta_B, \quad (2.136)$$

$$P'_{mn}(\rho_B) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_1 \sin(m\theta_B + n\zeta_B) d\theta_B d\zeta_B \quad (2.137)$$

を計算している． j は虚数単位， m, n はそれぞれポロイダルモード数，トロイダルモード数である． m, n の両方の符号が反転した場合 $P_{mn} = P_{-m-n}$, $P'_{mn} = -P'_{-m-n}$ が成り立つため，計算上は $m < 0$ の場合を考えなくてよい．実際の計算でも高速 Fourier 変換ではなく Fourier 級数展開を使用しており，式 (2.135) における m, n に関する総和は有限の値で打ち切っている．なお，高速 Fourier 変換ではなく Fourier 級数展開を使用しているのは，線形 MIPS コードでは Message Passing Interface (MPI) を用いて領域を分割した並列計算を行っており，高速 Fourier 変換の導入が難しいためである．式 (2.136), (2.137) の計算には Boozer 座標系の格子点上の P_1 の値が必要となるため，線形補間によってこれを求めている．Fourier 級数展開を行う変数は P_1 以外に， $\mathbf{V}$ の小半径方向の成分を用いる場合もある．これは，交換型モードが小半径方向の変位として生じやすいためである．

まず， $\zeta_B \theta_B$ -平面における摂動の等位相線の傾きについて考える．式 (2.135) から，等位相線は定数 c を用いて

$$m\theta_B + n\zeta_B = c \quad (2.138)$$

と書け， $\zeta_B \theta_B$ -平面において傾き $-n/m$ の直線となる．次に， $\zeta_B \theta_B$ -平面における磁力線の傾きについて考える． θ_B, ζ_B 方向の微小線素の長さを $dl_{\theta_B}, dl_{\zeta_B}$ とおくと， θ_B, ζ_B の微小増分 $d\theta_B, d\zeta_B$ はそれぞれ

$$d\theta_B = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} \right|} dl_{\theta_B}, \quad (2.139)$$

$$d\zeta_B = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} \right|} dl_{\zeta_B} \quad (2.140)$$

であるから [3],

$$\frac{d\theta_B}{d\zeta_B} = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} \right|}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} \right|} \frac{dl_{\theta_B}}{dl_{\zeta_B}} \quad (2.141)$$

となる．磁力線方向の微小なベクトルを θ_B 方向, ζ_B 方向のベクトルに分解し, それぞれの長さが $dl_{\theta_B}, dl_{\zeta_B}$ であると考え, 式 (2.134) から

$$\frac{dl_{\theta_B}}{dl_{\zeta_B}} = \frac{\frac{d\Psi_p}{d\rho} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} \right|}{\frac{d\Psi_t}{d\rho} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} \right|} \quad (2.142)$$

である．したがって, 式 (2.141), (2.142) より

$$\frac{d\theta_B}{d\zeta_B} = \frac{d\Psi_p}{d\Psi_t} = \iota \quad (2.143)$$

となり, 磁力線は $\zeta_B\theta_B$ -平面において傾き ι の直線となる．以上より, 磁力線と摂動の等位相線が一致する条件は

$$\iota = -\frac{n}{m} \quad (2.144)$$

である．この条件を満たすような摂動は磁力線をあまり曲げないため, 磁気張力による復原力が十分に働かず, 交換型モードの不安定性を生じさせやすい．

一般に, 交換型モードは小半径方向に隣接したモードが異符号を持つ, または隣接したモードが同符号でも値が小さいという特徴がある．このような隣接したモードは, 主要なモードとわずかに波長の違うモード (サイドバンドモード) として現れる．サイドバンドモードは, 主要なモードのモード数 m/n に対して m または n をわずかに変えたモード数をもつ．主要モードのモード数 m/n は式 (2.144) を満たし, 比較的長波長である．一方, バルーニングモードは小半径方向に隣接したモードが同符号で同程度の値を持つという特徴がある．この場合の隣接モードも, サイドバンドモードとして現れる．主要モードのモード数 m/n は式 (2.144) を満たさず, 比較的短波長である [15]．このように, モード解析の結果から成長した不安定性の種類をある程度判別することが可能である．

参考文献

- [1] Y. Todo, N. Nakajima, M. Sato, and H. Miura, Plasma Fusion Res. **5**, S2062 (2010).
- [2] M. Sato, N. Nakajima, K. Y. Watanabe, Y. Todo, and Y. Suzuki, 24th IAEA FEC 2012, TH/P3-25 (2012).
- [3] 横道英雄：「工学系のためのテンソル解析」（技法堂，1983）。
- [4] 岡本正雄：講義「核融合プラズマ物理の基礎-I（NIFS-PROC-29）」（NIFS，1996） p. 119.
- [5] T. Mito, A. Nishimura, S. Yamada, S. Imagawa, K. Takahata, N. Yanagi, R. Maekawa, H. Chikaraishi, H. Tamura, A. Iwamoto, S. Hamaguchi, Y. Hishinuma, T. Satow, O. Motojima, and LHD group, Proc. of 19th Symposium on Fusion Engineering (SOFE), 144 (2002).
- [6] 大学共同利用機関法人 自然科学研究機構「核融合科学研究所」：<http://www.nifs.ac.jp>
- [7] C. K. Birdsall and A. B. Langdon: "Plasma Physics via Computer Simulation" (McGraw-Hill, 1985) p. 437.
- [8] E. O. Brigham （宮川洋，今井秀樹 訳）：「高速フーリエ変換」（科学技術出版，1978）。
- [9] 中島徳嘉，山崎耕造，J. Plasma Fusion Res. **88**, 153 (2012).
- [10] K. Harafuji, T. Hayashi, and T. Sato, J. Comput. Phys. **81**, 169 (1989).
- [11] Y. Suzuki, N. Nakajima, K. Y. Watanabe, Y. Nakamura, and T. Hayashi, Nucl. Fusion **46**, L19 (2006).
- [12] A. H. Boozer, Phys. Fluid **23**, 904 (1980).
- [13] 宮本健郎：「核融合のためのプラズマ物理（NIFS-PROC-80）」（NIFS，2010） p. 246.

- [14] S. P. Hirshman, W. I. van RIJ, and P. Merkel, Comput. Phys. Commun. **43**, 143 (1986).
- [15] N. Nakajima, S. R. Hudson, and C. C. Hegna, Fusion Sci. Tech. **51**, 79 (2007).

第3章 ベクトルポテンシャルを導入した MHD 解析

3.1 はじめに

この章では、LHD の標準的な平衡分布に対して、ベクトルポテンシャル導入時と、非導入時の線形 MHD 解析を行い、計算結果を比較する。この比較から、磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ を満足しないことによる MHD 不安定性解析結果への影響を評価する。

3.2 初期平衡分布，および計算条件

初期平衡分布は HINT コードを用いて得られた $P_0, \mathbf{B}_0$ を使用した。HINT コードでは $R_{\text{ax}}^v = 3.6, B_{\text{ax}}^v = 3, \gamma_c = 1.1967$ の真空磁場に対し、平均ベータ $\langle \beta \rangle = 1.4\%$ となる平衡磁場を計算した。ここで、ベータは $\beta \equiv \tilde{P}/(\tilde{B}^2/2\tilde{\mu}_0)$ で定義され、コイルがつくる磁場強度に対しどれだけ高圧力のプラズマを閉じ込めたかの指標として用いられる。特にプラズマ全体での体積平均を表す $\langle \rangle$ の記号を用いた、平均ベータ $\langle \beta \rangle \equiv \langle \tilde{P} \rangle / (\langle \tilde{B} \rangle^2 / 2\tilde{\mu}_0)$ は最もよく用いられる指標の1つである [1]。 R_{ax}^v は磁気軸の大半径、 B_{ax}^v は磁気軸上の磁場強度、 γ_c はコイルピッチパラメータである。コイルピッチパラメータは $\gamma_c \equiv (Ma_c)/(\ell R_c)$ で定義される [2]。 ℓ, M はそれぞれヘリカルコイルのポロイダル周期数 $\ell = 2$ 、トロイダル周期数 $M = 10$ であり、 a_c, R_c はそれぞれコイルの小半径、大半径である。初期平衡圧力 P_0 、初期平衡磁場強度 B_0 、および回転変換 $\mathbf{t}$ をそれぞれ図 3.1-3.3 に示す。図 3.2 に示すように、 B_0 は Boozer 座標系において様々なモードを持つ。本解析で与えた初期平衡分布は標準的な LHD プラズマを想定しているが、実際には様々な平衡分布をとり得るため、本解析で使用する平衡分布は一般性を持たない。また、ポロイダル断面上の $|\nabla \cdot \mathbf{B}_0|$ 、および $|\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)|/|\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0|$ の分布を図 3.4 に示す。 $|\nabla \cdot \mathbf{B}_0| \sim 1$ 、および $|\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)|/|\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0| \sim 10^{-2}$ 程度の比較的大きな誤差を持っているが、本研究ではこの誤差

の影響については扱わないこととする．すなわち，本研究における解析結果は $|\nabla \cdot \mathbf{B}_0| \neq 0$ の状況下で $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の影響を評価するものである．

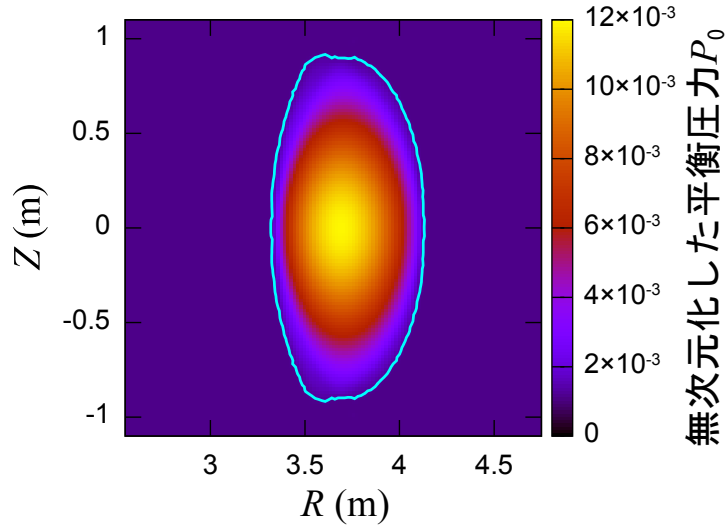


図 3.1: $\phi = 0$ の縦長断面における，ポロイダル断面上の初期平衡圧力 P_0 分布．圧力等高線から計算された水色の線はプラズマ-真空境界を表す．

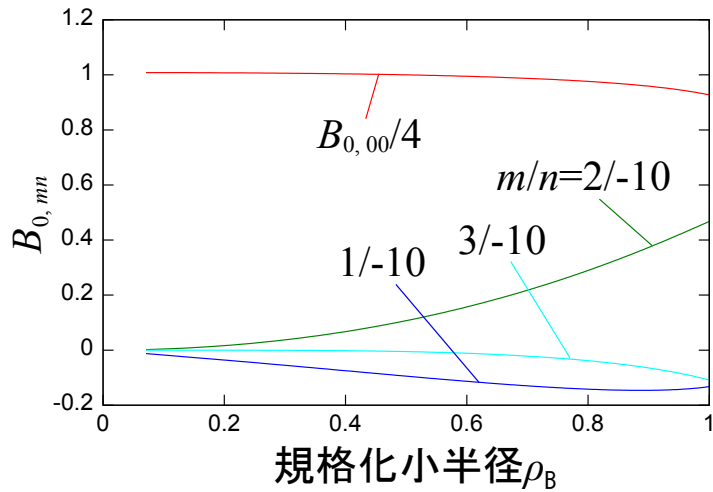


図 3.2: 初期平衡磁場強度 B_0 の Fourier モードの規格化小半径 ρ_B 分布．

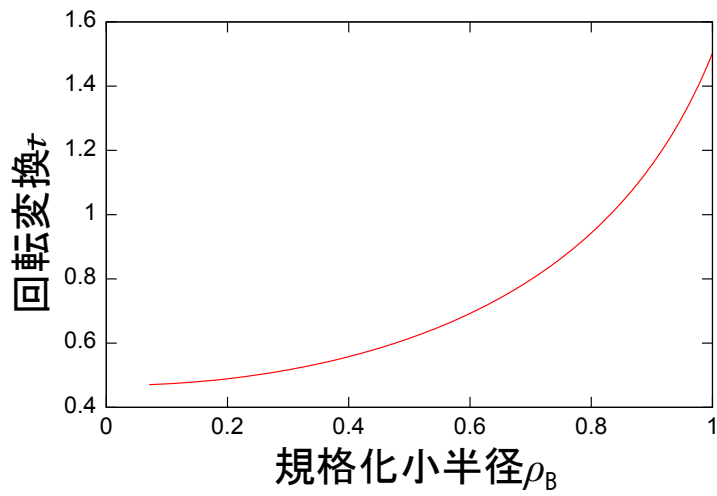


図 3.3: 平衡磁場の回転変換 t の規格化小半径 ρ_B 分布. t, ρ_B の定義は 2.4 節で述べている.

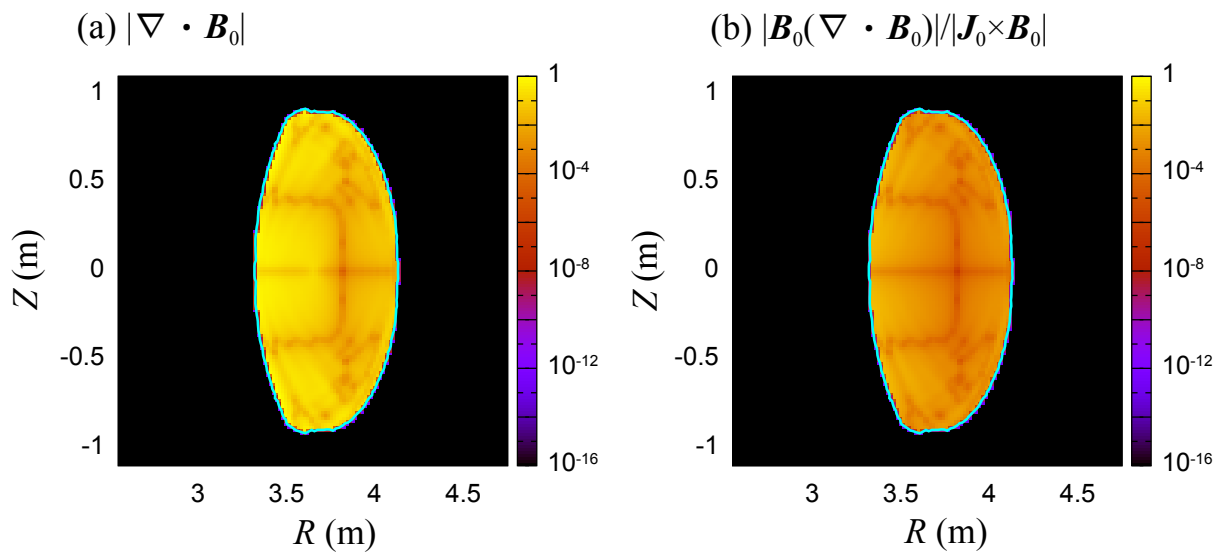


図 3.4: ポロイダル断面上の $|\nabla \cdot \mathbf{B}_0|$, および $|\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)|/|\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0|$ の分布. 水色の線はプラズマ-真空境界を表し, プラズマ外では $|\nabla \cdot \mathbf{B}_0| = 0$, および $|\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)|/|\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0| = 0$ とした.

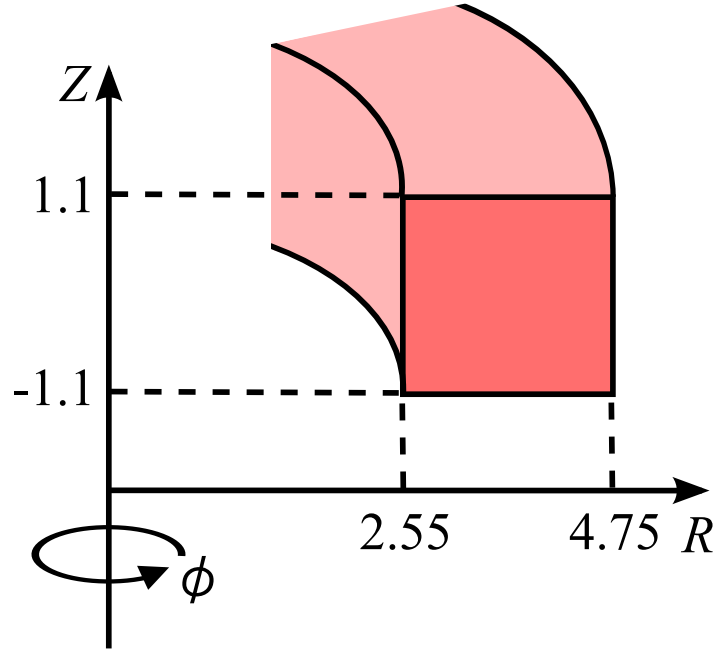


図 3.5: 解析領域.

ベクトルポテンシャル導入時の式 (2.58)-(2.63), および非導入時の式 (2.69)-(2.75) を計算する際の計算条件は $\rho_0 = 1, \eta = 10^{-6}, \nu = 10^{-8}, \chi = 10^{-8}, \gamma = 5/3$ とし, すべて一様な定数とした. 解析領域は図 3.5 に示すように $2.55 < R < 4.75, 0 \leq \phi < 2\pi, -1.1 < Z < 1.1$ とし, 各方向の格子点数を (128, 640, 128) とした. 時間増分は $\Delta t = 1.6 \times 10^{-2}$ とした.

以上の条件のもと, 一様乱数を用いて $\mathbf{A}_1$ に初期摂動を与えた. 摂動の大きさ $|\mathbf{A}_1|$ は最大で $|\mathbf{B}_0|\Delta R$ の $10^{-4}\%$ 程度である. ベクトルポテンシャル導入時, 非導入時の両方で乱数の種は同一の値を使用し, 完全に同一な $\mathbf{A}_1$ の分布を与えた. ベクトルポテンシャル非導入時の計算では, この $\mathbf{A}_1$ の分布を $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$ を用いて $\mathbf{B}_1$ の初期摂動へ変換した.

3.3 計算結果

3.3.1 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさの評価

運動方程式 (2.58), (2.69) より, Lorentz 力は

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \quad (3.1)$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

と変形できる. $\mathbf{I}$ は単位テンソルである. ここで, $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$ の項は $\nabla \cdot \mathbf{B}$ の誤差に起因する項であり, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば本来 0 となる項である. そこで,

$$\hat{F}_e \equiv \frac{|\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{B}_1)|}{|\mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1|} \quad (3.3)$$

を用いることで, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさを Lorentz 力に対する力の比として評価できる. ただし, $\nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B} - B^2 \mathbf{I}/2)$ の項も $\nabla \cdot \mathbf{B}$ の誤差の影響を受けること, および実際の計算では $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ の形で計算されることから, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の影響の大きさは $\hat{F}_e$ の大きさから直接見積もれるとは限らないことに注意が必要である. 図 3.6 は十分な時間が経過した $t = 800$, および $t = 1280$ (線形成長した不安定性が支配的な時刻) における $\hat{F}_e$ の分布である. $\hat{F}_e$ の大きさはあまり時間変化していない. これは, $\hat{F}_e$ が無次元量であり, 分子と分母がともに時間発展することに起因すると考えられる. $t = 800$, および $t = 1280$ においてベクトルポテンシャル導入時の $\hat{F}_e$ は $\hat{F}_e < 10^{-9}$ であり, 非導入時の $\hat{F}_e$ は $\hat{F}_e \sim 10^{-2}$ 程度でプラズマ全体に広がっている. また図 3.7 に同時刻の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ を示す. $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさもあまり時間変化していない. これは, 時間発展による誤差の蓄積が無いことを意味する. またこの図から, $t = 800$, および $t = 1280$ においてベクトルポテンシャル導入時は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 < 10^{-14}$ であり, ここから $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ の条件が数値計算の精度で満たされていることがわかる. この図において, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の分布が R 依存性を持つのは, 差分計算したものを $\text{Jacobian} \sqrt{g} = R$ で割るためであると考えられる.

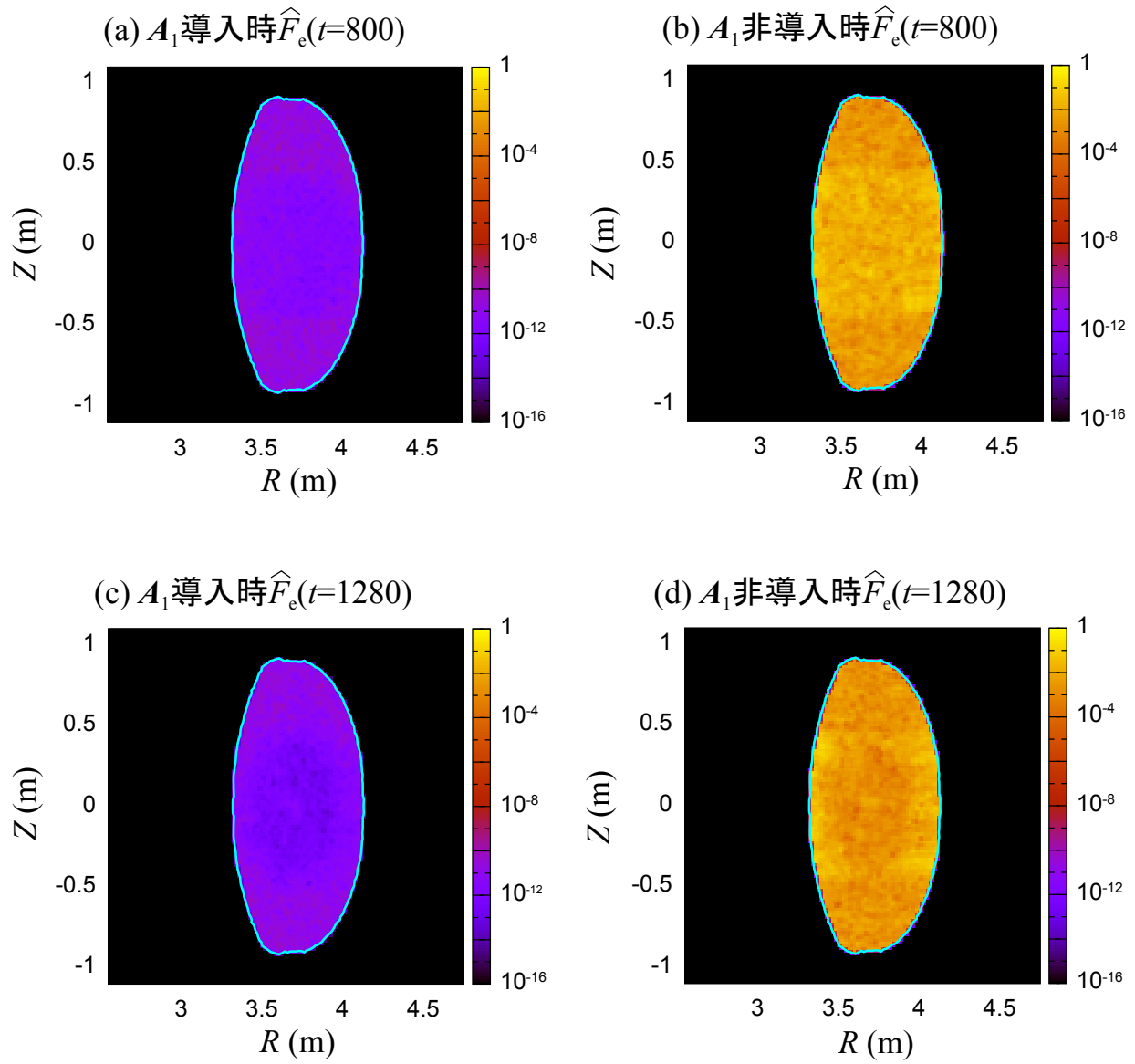


図 3.6: ポロイダル断面上の $\hat{F}_e$ の分布. 水色の線はプラズマ-真空境界を表し, プラズマ外では $\hat{F}_e = 0$ とした.

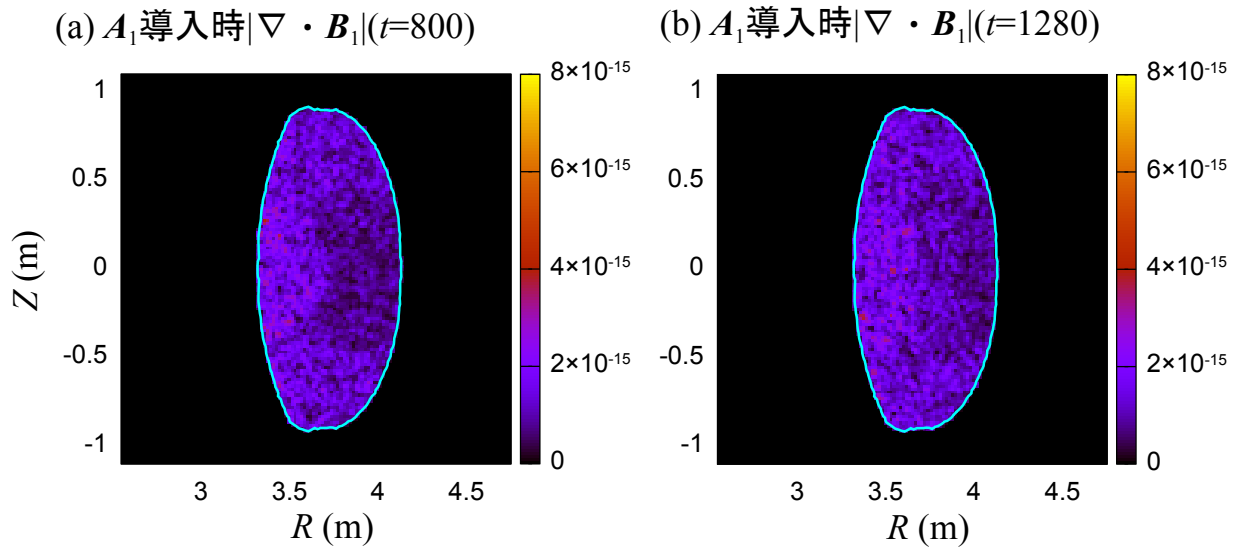


図 3.7: ベクトルポテンシャル導入時，ポロイダル断面上の $|\nabla \cdot \mathbf{B}_1|$ の分布．水色の線はプラズマ-真空境界を表し，プラズマ外では $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ とした．

3.3.2 運動エネルギーの時間発展，成長率

図 3.8 は運動エネルギーの時間変化である．これらは計算領域全体における体積分で評価した．ベクトルポテンシャル導入時と非導入時の運動エネルギーをそれぞれ $K_{\text{modified}}, K_{\text{original}}$ とし，それぞれ対数を取り，その差を求めると， $|\ln K_{\text{modified}} - \ln K_{\text{original}}| \simeq \ln 1.1$ 程度である．指数関数的な増加において Napier 数 e 倍程度の差が生じるのは $\ln e$ 程度であり， $\ln 1.1$ という差は解析結果としては十分に小さい．

線形計算では主要な各物理量の時間発展は

$$f = \sum_{m,n} f_{\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t} \quad (3.4)$$

の形で記述されることを仮定する．ここで m, n はそれぞれポロイダルモード数，トロイダルモード数であり，第2章2.5節で述べたものに等しい． $f_{\text{init},mn}$ は $t = 0$ における f である．計算ではベクトルポテンシャル，または磁場に対してのみ初期摂動を与えているが，理論解析では一般にすべての主要な物理量に初期摂動が与えられると仮定する． $\gamma_{g,mn}$ は成長率であり，すべての主要な物理量が等しい成長率をもつと仮定する．これらの仮定に基づき，運動エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_0 V^2 &= \frac{1}{2} \rho_0 (V_R^2 + V_\phi^2 + V_Z^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \left[\left(\sum_{m,n} V_{R\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t} \right)^2 + \left(\sum_{m,n} V_{\phi\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t} \right)^2 + \left(\sum_{m,n} V_{Z\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t} \right)^2 \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \rho_0 \sum_{m,n} [(V_{R\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t})^2 + (V_{\phi\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t})^2 + (V_{Z\text{init},mn} e^{\gamma_{g,mn} t})^2] \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \sum_{m,n} (V_{R\text{init},mn}^2 + V_{\phi\text{init},mn}^2 + V_{Z\text{init},mn}^2) e^{2\gamma_{g,mn} t} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \sum_{m,n} V_{\text{init},mn}^2 e^{2\gamma_{g,mn} t} \\ &\simeq \frac{1}{2} \rho_0 V_{\text{init}}^2 e^{2\gamma_g t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

と書ける．ここで， $V_{\text{init}} \equiv \max V_{\text{init},mn}$ ， $\gamma_g \equiv \max \gamma_{g,mn}$ である．この成長率 γ_g を表3.1に示す． γ_g は，図 3.8 における片対数グラフの $960 \leq t \leq 1280$ (60000 - 80000 タイムステップ) における傾きを 0.5 倍した値として，運動エネルギーの時間変化から評価した． $t \simeq 1000$ 程度の指数関数的な増加において Napier 数 e 倍程度の差が生じるのは，成長率における差が $\ln e / 2000 = 0.5 \times 10^{-3}$

程度の場合である．したがって，ベクトルポテンシャル導入時，非導入時の成長率の差は無視できるほどに十分小さいといえる．

また，図 3.9 にベクトルポテンシャル導入時のモードごとの成長率の非導入時に対する相対偏差の大きさ $|\Delta\hat{\gamma}_{g,mn}|$ を示す．これらの値は運動エネルギーの Fourier モードの時間発展から計算された成長率を用いて，

$$\Delta\hat{\gamma}_{g,mn} \equiv \frac{\gamma_{g,mn}(\text{導入時}) - \gamma_{g,mn}(\text{非導入時})}{\gamma_{g,mn}(\text{非導入時})} \quad (3.6)$$

計算した．ここで， $\gamma_{g,mn}(\text{導入時})$, $\gamma_{g,mn}(\text{非導入時})$ はそれぞれベクトルポテンシャル導入時，非導入時の成長率である．どのモードも相対偏差は 3% 未満であり，十分に小さい．

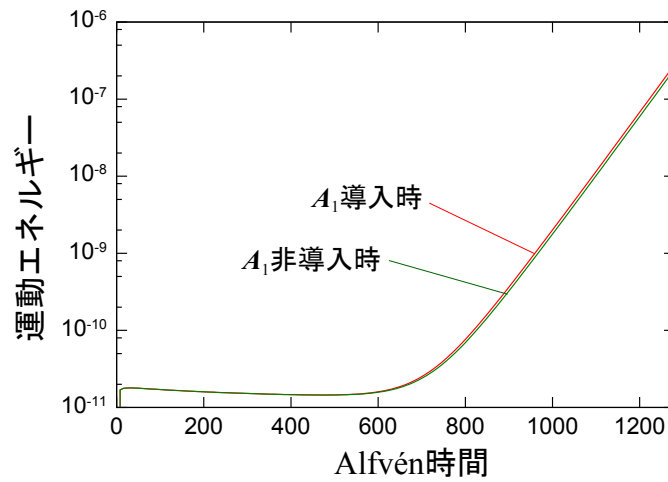


図 3.8: 運動エネルギーの時間変化．

表 3.1: 成長率 γ_g .

	A_1 導入時	A_1 非導入時
γ_g	8.79×10^{-3}	8.78×10^{-3}

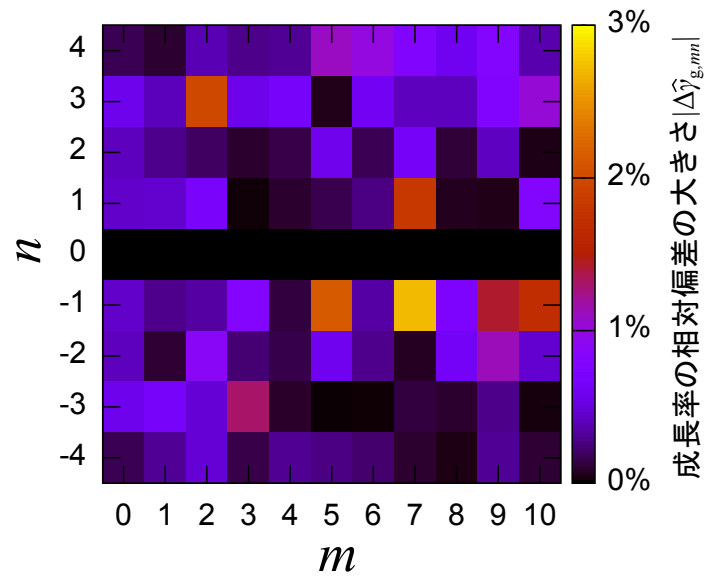


図 3.9: ベクトルポテンシャル導入時のモードごとの成長率の非導入時に対する相対偏差の大きさ $|\Delta\hat{\gamma}_{g,mn}|$. $n=0$ については 0% を与えている.

3.3.3 モード構造

図 3.10 に $t = 1280$ における P_1 の主要な Fourier モードの小半径分布を示す．ベクトルポテンシャル導入時，非導入時の間の差は比較的小さい．

より詳細な比較のため，表 3.2 に圧力の主要な 5 つの Fourier モードのピーク値と半値幅の値を示す．ピーク値に関しては，最大で 16% 程度の差が生じている．特に， m, n の値が大きくなるほど差は大きい傾向がある．これはベクトルポテンシャルの導入が，より短波長の摂動の成長に影響したためであると考えられる．また，半値幅は両者で同じ値となっており，半値幅に対する影響はないといえる．表 3.3 は圧力の主要な Fourier モードをピーク値が大きい順に並べた場合の順位である．この順位における違いはみられなかった．

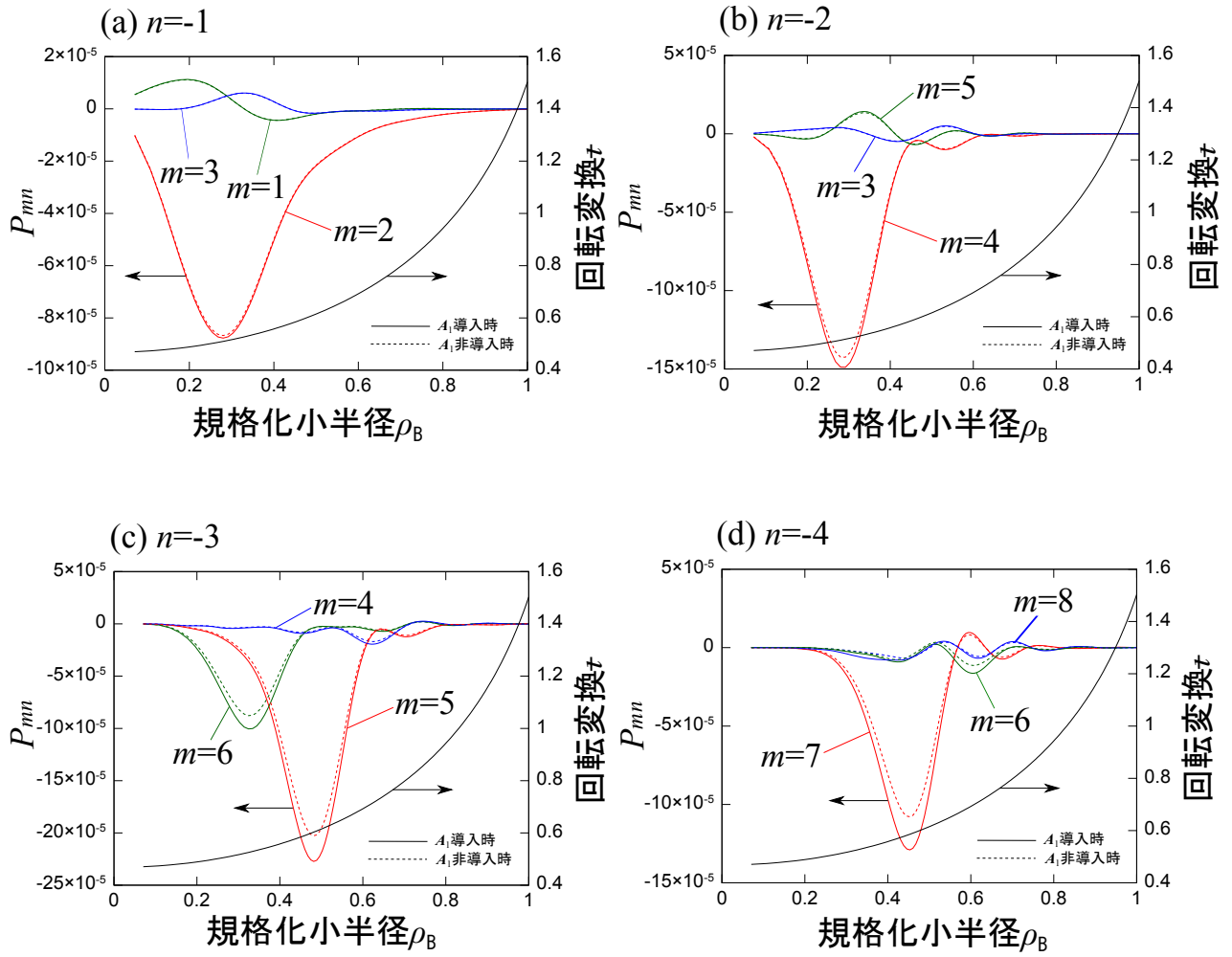


図 3.10: P_{mn} の規格化小半径 ρ_B 分布 ($t = 1280$)。参考のため、回転変換 t の ρ_B 分布も示されている。

表 3.2: 圧力の Fourier モードのピーク値と半値幅.

	ピーク値 P_v	比 $\frac{P_v(\text{非導入時})}{P_v(\text{導入時})}(\%)$	半値全幅 (FWHM) W
(a) $m/n = 2/-1$			
$\mathbf{A}_1$ 導入時	-8.77×10^{-5}	-	0.26
$\mathbf{A}_1$ 非導入時	-8.67×10^{-5}	99%	0.26
(b) $m/n = 4/-2$			
$\mathbf{A}_1$ 導入時	-1.49×10^{-4}	-	0.18
$\mathbf{A}_1$ 非導入時	-1.42×10^{-4}	95%	0.18
(c) $m/n = 5/-3$			
$\mathbf{A}_1$ 導入時	-2.27×10^{-5}	-	0.16
$\mathbf{A}_1$ 非導入時	-2.03×10^{-5}	89%	0.16
(d) $m/n = 6/-3$			
$\mathbf{A}_1$ 導入時	-1.00×10^{-4}	-	0.16
$\mathbf{A}_1$ 非導入時	-8.78×10^{-5}	88%	0.16
(e) $m/n = 7/-4$			
$\mathbf{A}_1$ 導入時	-1.29×10^{-4}	-	0.15
$\mathbf{A}_1$ 非導入時	-1.08×10^{-4}	84%	0.15

表 3.3: 圧力の主要な Fourier モードをピーク値が大きい順に並べた場合の順位.

順位	$\mathbf{A}_1$ 導入時	$\mathbf{A}_1$ 非導入時
1	5/-3	5/-3
2	4/-2	4/-2
3	7/-4	7/-4
4	6/-3	6/-3
5	2/-1	2/-1

3.4 考察

前節で述べたように、ベクトルポテンシャル導入による高精度化の効果がより短波長の摂動の成長に現れること、すなわち、ベクトルポテンシャル非導入時の $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 \neq 0$ の影響がより短波長の摂動の成長に現れることがわかった。この原因として、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差がより短波長の摂動の成長に寄与しやすいという性質を持っている可能性、ならびに、スムージングの影響の二点が考えられる。本研究における計算では、2.2.6 節で述べたスムージングを利用している。このスムージングは、短波長の摂動を低減することで数値振動を抑える目的で導入している。ベクトルポテンシャル導入により、主要な変数を $\mathbf{B}_1$ から $\mathbf{A}_1$ へ置き換えたため、スムージングの対象も同様に置き換えた。異なる変数をスムージングしていることが、このような短波長の摂動における違いを生じさせている可能性がある。しかし、スムージングを利用せずに正しい解析結果を得ることは困難であり、これら2つの可能性を分離することは難しい。

次に、ベクトルポテンシャル非導入時の計算では $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ が大きな値となった理由について考察を加える。この理由として、 $\mathbf{B}_1$ に対し 2.2.6 節で述べたスムージングが $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ を全く保証していないことが挙げられる。そのため、スムージングを行うたびに $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差が生じることとなる。ベクトルポテンシャルを導入した計算手法はこのような問題点を克服しており、一方で導入することによるデメリットはほとんど無く、LHD の MHD 不安定性解析において $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ を満たしながら計算したい場合には有効な計算手法である。

3.5 まとめ

この章では、ベクトルポテンシャルを新たに導入した線形 MHD 解析コードを用いて、LHD の標準的な平衡分布に対して解析を行った。その結果より、磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ が数値計算の精度で満たされていること、すなわちベクトルポテンシャルのコードへの導入が適切に行われたことを示した。次に MHD 不安定性解析において重要となる運動エネルギーの時間変化、および主要な物理量の成長率を比較し、これらの値は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ が満たされないことの影響を受けずベクトルポテンシャルの導入前後で違いは生じないことを示した。成長した不安定性の構造を調べるため、波長ごとに分解して振幅とプラズマ内での広がりと比較するモード解析を行った。その結果、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ の条件の破綻は長波長の不安定性の構造には影響

は与えないが、短波長の不安定性の構造には影響を与えることを示した。LHD の標準的な平衡分布に対するこれらの計算によって、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ の条件が破綻していても既存の解析コードによる結果は妥当であることを明らかにした。また同時に、LHD のような装置の MHD 解析においてベクトルポテンシャルの導入は著しい誤差を生じさせることはなく、磁場のソレノイダル条件を満たした MHD 解析を行う有効な手法であることも示した [3].

参考文献

- [1] 山崎耕造, J. Plasma Fusion Res. **79**, 121 (2003).
- [2] 山崎耕造, J. Plasma Fusion Res. **74**, 16 (1988).
- [3] W. Takado, Y. Matsumoto, K. Y. Watanabe, S. Tomioka, and S. Oikawa, Phys. Plasmas **23**, 102509 (2016).

第4章 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の大きさに対する MHD 解析結果の依存性

4.1 はじめに

この章では、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の大きさに対する MHD 解析結果の依存性を調べることを目的として、ベクトルポテンシャル導入時の計算コードに $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に関する人工的な誤差項を追加し、磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ をあえて破綻させた場合の、LHD の標準的な平衡分布に対する線形 MHD 解析結果を示す。誤差の大きさに対する計算結果の依存性を調べ、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ がどの程度の大きさになると解析結果の妥当性が失われ始めるかを評価する。

4.2 人工的な誤差項の導入

この章における計算では、2.2.2 節で導いたベクトルポテンシャル導入時の支配方程式 (2.69)-(2.75) のうち、式 (2.72) を

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 + \nabla \Phi_e \quad (4.1)$$

と書き換えた。ここで、 $\nabla \Phi_e$ は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に関する人工的な誤差項である。 $-\Phi_e$ は静磁ポテンシャルと呼ばれる物理量に相当し、無次元化は $\Phi_e = \tilde{\Phi}_e / (\tilde{L} \tilde{B}_{ax})$ で行う。式 (4.1) の両辺の発散から、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_1) + \nabla \cdot (\nabla \Phi_e) = \nabla^2 \Phi_e \quad (4.2)$$

であるため、 $\nabla^2 \Phi_e \neq 0$ である限り $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 \neq 0$ となる。

3 章の 3.4 節で述べた通り、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差はスムージングにより生じているものと考えられる。そこで、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ が毎ステップの計算で生じていることを模擬するため、 Φ_e を

$$\Phi_e^{p+1} = \Phi_e^p + \delta_e \lambda_{i,j,k}^p \quad (4.3)$$

により毎タイムステップ変化させた．ここで， p はタイムステップ数， i, j, k は各方向の格子点番号， λ は $-0.5 \leq \lambda < 0.5$ の範囲の値をとる時間と空間の両方に対してランダムな一様乱数である． δ_e は誤差の大きさを決めるパラメータであり，時間と空間に対して一定の値である． Φ_e の初期分布は一様に 0 とした．

式 (4.3) の右辺第 2 項の確率密度関数は平均 0，標準偏差 $\delta_e/(2\sqrt{3})$ の一様分布であるから，中心極限定理より時刻 t における Φ_e の確率密度関数は平均 0，標準偏差 $\delta_e/(2\sqrt{3t/\Delta t})$ の正規分布に近づいていく．また， $|\Phi_e|$ の最大値はおおよそ時間に比例して増大する．厳密に言えば，実際の計算で発生する $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差は $\mathbf{B}_1$ の大きさに依存することが予想される．しかし， $\mathbf{B}_1$ の大きさに依存する形で人工的な誤差を変化させた場合， $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさと $\mathbf{B}_1$ の大きさが相互に影響を及ぼし合うため， $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の影響が複雑化することが予想される．そのため，本研究では式 (4.3) に示す， $\mathbf{B}_1$ の大きさに依存しない単純な形の式を用いることとした．また， Φ_e は空間依存性を持たないため， R の小さい場所で $|\nabla \Phi_e|$ は大きな値を持つ．そのため，本研究で用いた手法は $\mathbf{B}_1$ の誤差が R 依存性を持つという $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の与え方となっている．支配方程式の中で， $\mathbf{B}_1$ が右辺に現れる式は式 (2.69) による $\mathbf{V}$ の更新と式 (2.74) による $\mathbf{J}_1$ の更新のみである．このうち式 (2.74) は，式 (4.1) から

$$\mathbf{J}_1 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_1) + \nabla \times (\nabla \Phi_e) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_1) \quad (4.4)$$

となるため， Φ_e は $\mathbf{J}_1$ に直接影響しない．そのため，式 (2.69) の右辺第 3 項の $\mathbf{B}_1$ に含まれる Φ_e がまず $\mathbf{V}$ を変化させ， $\mathbf{V}$ がその他の物理量の変化を引き起こすことで解析結果に様々な影響を及ぼす．

4.3 初期平衡分布，初期条件，および計算条件

3.2 節と同一の初期平衡分布，および計算条件を使用した．また，この章では $\delta_e = 0, 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}$ の 6 通りで計算を行った．

4.4 計算結果

4.4.1 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさの評価

3.3.1 節の式 (3.3) に示す $\hat{F}_e$ を用いて評価を行った. 図 4.1, 4.2 は十分な時間が経過した $t = 800$, および $t = 1280$ における $\hat{F}_e$ の分布である. $\delta_e \leq 10^{-11}$ の場合, プラズマ内のほとんどの領域が $\hat{F}_e \simeq 0$ である. 一方, $\delta_e \geq 10^{-10}$ の場合, $\hat{F}_e \geq 100\%$ の領域がプラズマ内に広がっている. δ_e が大きいほど $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ も大きくなっており, δ_e が $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の大きさを決めるパラメータの役割を果たしていることが確認できる. また, $t = 800$ に比べて $t = 1280$ の場合, プラズマ中心付近における $\hat{F}_e$ が小さい. これは, プラズマ中心付近の方がより不安定性が成長したために, $\hat{F}_e$ の分母である Lorentz 力が大きくなったことに起因すると考えられる. また, 第3章のベクトルポテンシャル非導入時の $\hat{F}_e$ と比較するため, 図 4.3 に $t = 1280$ において対数で表した $\hat{F}_e$ を示す. 図 3.6(b) に示すベクトルポテンシャル非導入時の場合は, およそ $\delta_e = 10^{-11}$ の場合に相当することがわかる.

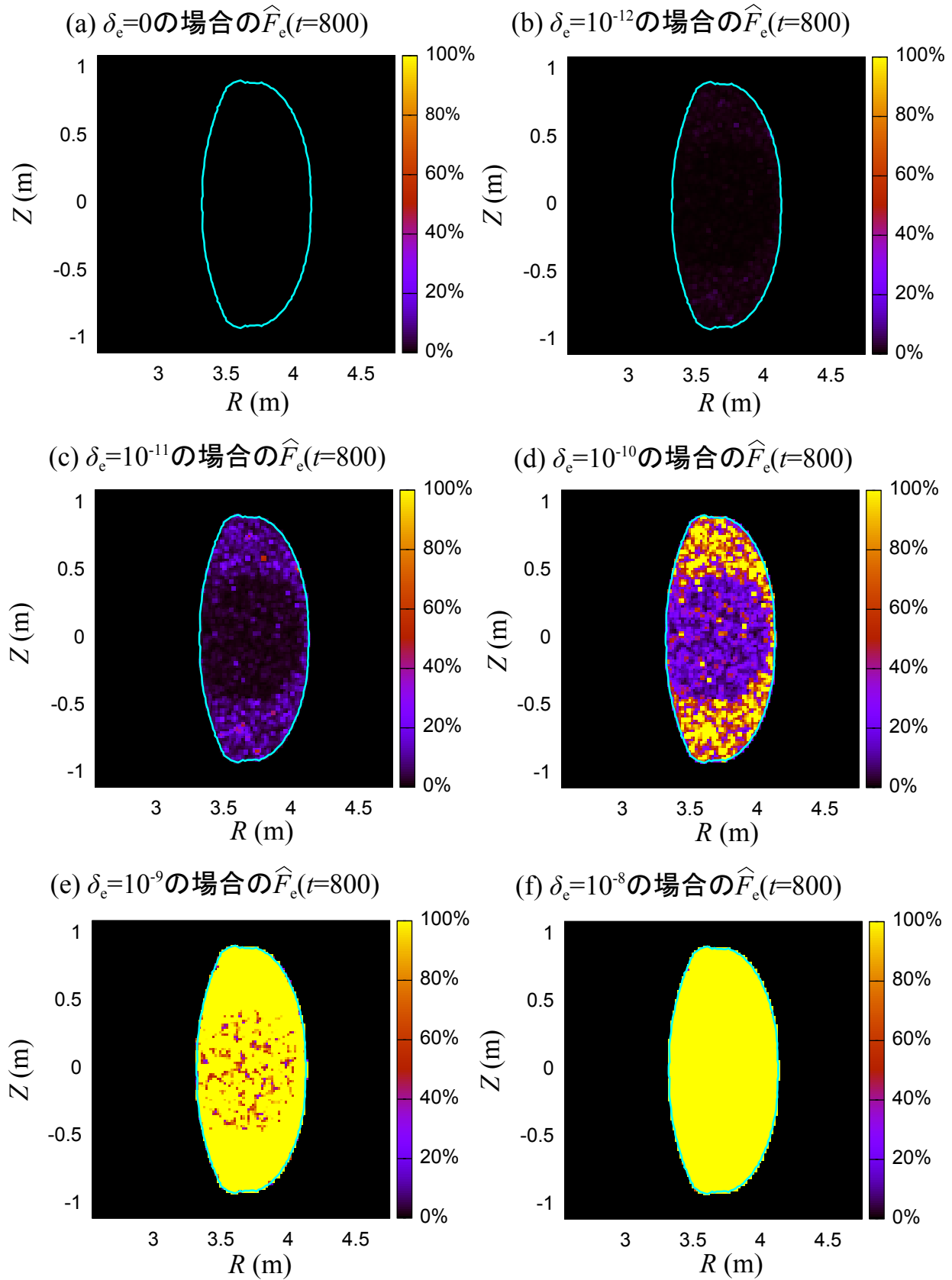


図 4.1: ポロイダル断面上の $\hat{F}_\epsilon$ の分布 ($t = 800$). $\hat{F}_\epsilon \geq 100\%$ の領域はすべて黄色で示す. 水色の線はプラズマ-真空境界を表し, プラズマ外では $\hat{F}_\epsilon = 0$ とした.

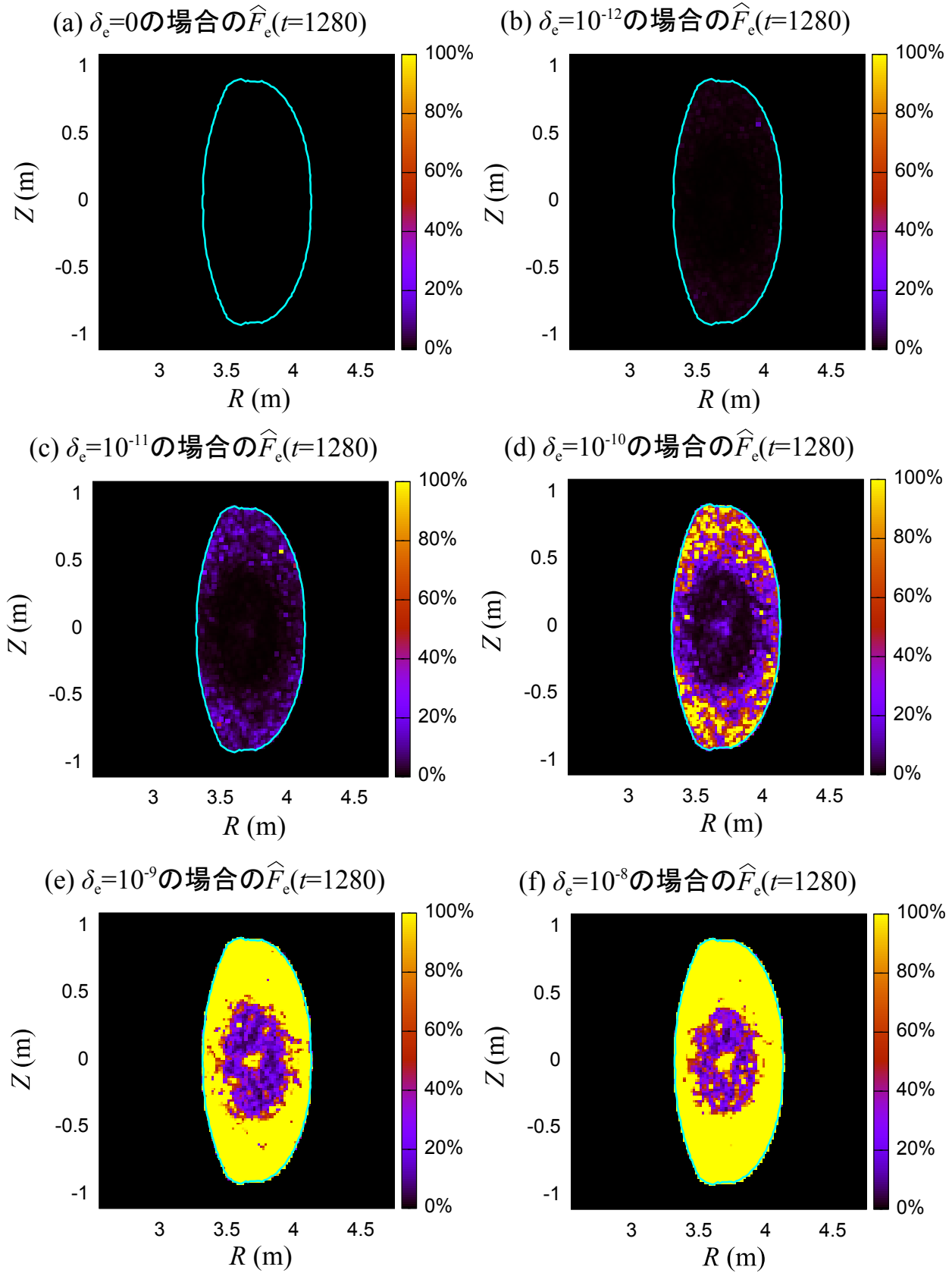


図 4.2: ポロイダル断面上の $\hat{F}_e$ の分布 ($t = 1280$). $\hat{F}_e \geq 100\%$ の領域はすべて黄色で示す. 水色の線はプラズマ-真空境界を表し, プラズマ外では $\hat{F}_e = 0$ とした.

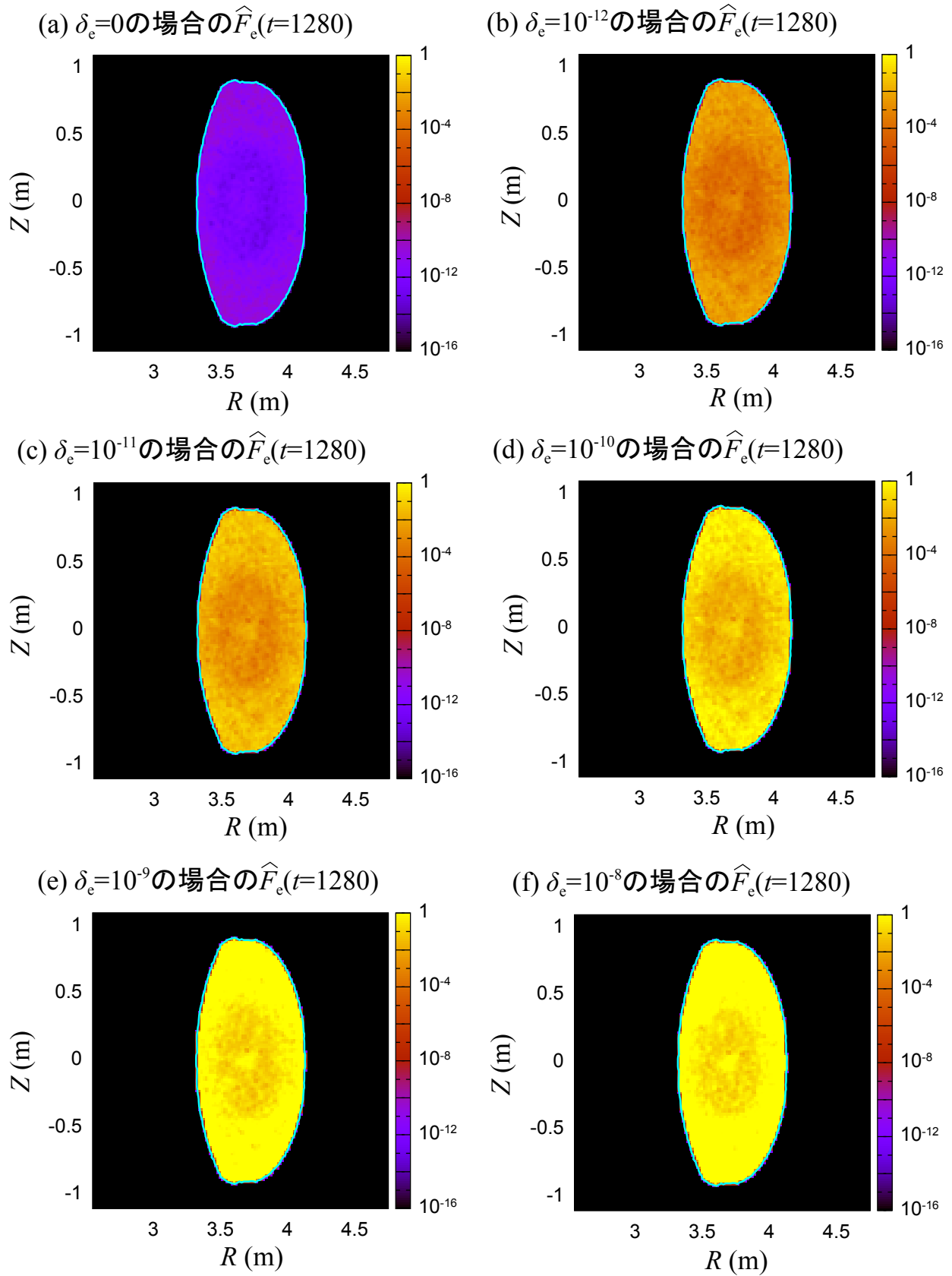


図 4.3: 対数で表したポロイダル断面上の $\hat{F}_\epsilon$ の分布 ($t = 1280$). $\hat{F}_\epsilon \geq 1$ の領域はすべて黄色で示す. 水色の線はプラズマ-真空境界を表し, プラズマ外では $\hat{F}_\epsilon = 0$ とした.

4.4.2 運動エネルギーの時間発展, 成長率

図 4.4 に δ_e ごとの運動エネルギーの時間変化を示す. これらは計算領域全体における体積分で評価した. $\delta_e = 10^{-9}$ と $\delta_e = 0$ の場合の運動エネルギーの対数を取り, その差を求めると, $|\ln K(\delta_e = 10^{-9}) - \ln K(\delta_e = 0)| \simeq \ln 1.1$ 程度である. したがって, 3.3.2 節で述べたように, この値は解析結果としては無視できるほど十分に小さい. 一方, $\delta_e = 10^{-8}$ と $\delta_e = 10^{-9}$ の場合の運動エネルギーの対数の差は, $|\ln K(\delta_e = 10^{-8}) - \ln K(\delta_e = 10^{-9})| \simeq \ln 40$ 程度であり, 大きな差が生じている. これは, 加えた誤差が非常に大きいために, 誤差によって $t < 600$ の不安定性が成長する前に運動エネルギーが増大したことに起因する.

表 4.1 に各 δ_e の値に対する成長率 γ_g の値を示す. γ_g は 3.3.2 節と同様に評価した. $\delta_e \leq 10^{-9}$ の場合 $\gamma_g \simeq 8.6 \times 10^{-3}$, $\delta_e = 10^{-8}$ の場合 $\gamma_g \simeq 8.8 \times 10^{-3}$ となり, あまり違いは生じなかった.

図 4.5 にモードごとの成長率の $\delta_e = 0$ に対する相対偏差の大きさ $|\Delta \hat{\gamma}_{g,mn}|$ を示す. これらの値は運動エネルギーの Fourier モードの時間発展から計算された成長率を用いて,

$$\Delta \hat{\gamma}_{g,mn} \equiv \frac{\gamma_{g,mn}(\delta_e \neq 0) - \gamma_{g,mn}(\delta_e = 0)}{\gamma_{g,mn}(\delta_e = 0)} \quad (4.5)$$

から計算した. 相対偏差の最大値は $\delta_e = 10^{-8}$ の場合の $m/n = 5/-1$ における 10% である. $\delta_e = 10^{-8}$ の場合, $F_e \sim 10000\%$ の非常に大きな値をとっているのに対し, 成長率にほとんど影響がないことがわかる.

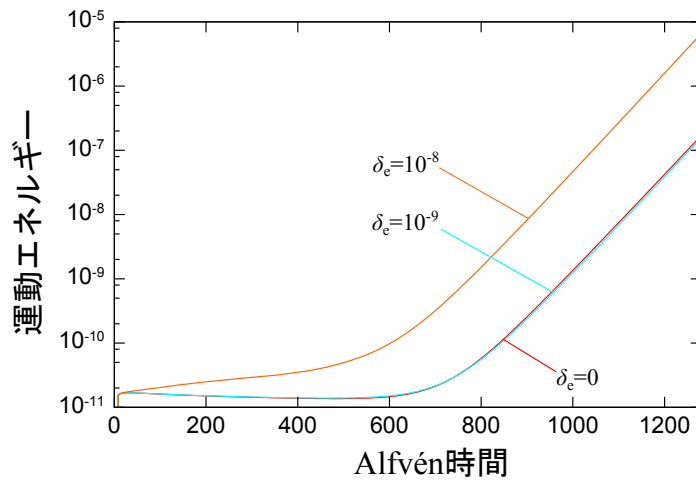


図 4.4: $\delta_e = 0, 10^{-9}, 10^{-8}$ の場合の運動エネルギーの時間変化に対する δ_e の影響.

表 4.1: 各 δ_e の値に対する成長率 γ_g .

	$\delta_e = 0$	$\delta_e = 10^{-12}$	$\delta_e = 10^{-11}$	$\delta_e = 10^{-10}$	$\delta_e = 10^{-9}$	$\delta_e = 10^{-8}$
γ_g	8.61×10^{-3}	8.61×10^{-3}	8.61×10^{-3}	8.60×10^{-3}	8.61×10^{-3}	8.82×10^{-3}

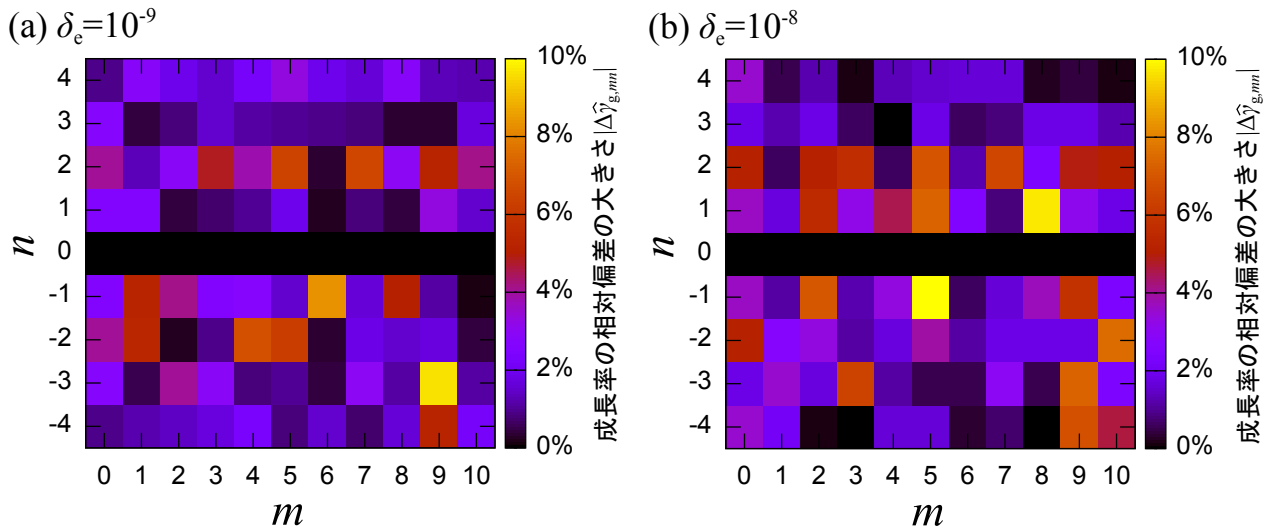


図 4.5: モードごとの成長率の $\delta_e = 0$ に対する相対偏差の大きさ $|\Delta \hat{\gamma}_{g,mn}|$ に対する δ_e の影響.
 $n = 0$ については 0% を与えている.

4.4.3 モード構造

図 4.6, 4.7 は, $t = 1280$ における $\delta_e = 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}$ の場合の P_1 の主要な Fourier モードである. $n = -1, -2$ のどちらの場合も, $\delta_e \geq 10^{-9}$ のモード構造は $\delta_e = 0$ の場合と大きく異なっている. 特に, $m/n = 2/-1$ モードの符号は反転している. このことは, ある大きさの δ_e に対し $m/n = 2/-1$ モードがまったく成長しない場合があることを意味する. $\delta_e = 10^{-8}$ の場合, すべてのモードで符号の反転がみられた. すなわち, 大きな $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ が生じた場合, すべてのモードについてそのモードがまったく成長しない場合があることを意味する.

表 4.2 に主要な 5 つの Fourier モードのピーク値と半値幅の値を示す. $10^{-10} \leq \delta_e \leq 10^{-8}$ の場合のピーク値は $\delta_e = 0$ とは差がみられる. 一方, 半値幅にほぼ差はみられなかった. これらのことは, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差は半値幅に影響をあまり与えず, ピーク値により大きな影響を与える傾向があることを示す. また, 表 4.3 は圧力の Fourier モードをピーク値が大きい順に並べた場合の順位である. $\delta_e = 10^{-9}, 10^{-8}$ の場合, $\delta_e = 0$ とは異なるモードが主要となっている. 全体の成長率にあまり差がなかったにも関わらず異なるモードが主要化したのは, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に含まれるモードの影響と予想される. また, モード構造に関して $\delta_e \leq 10^{-11}$ であれば影響はないといえる.

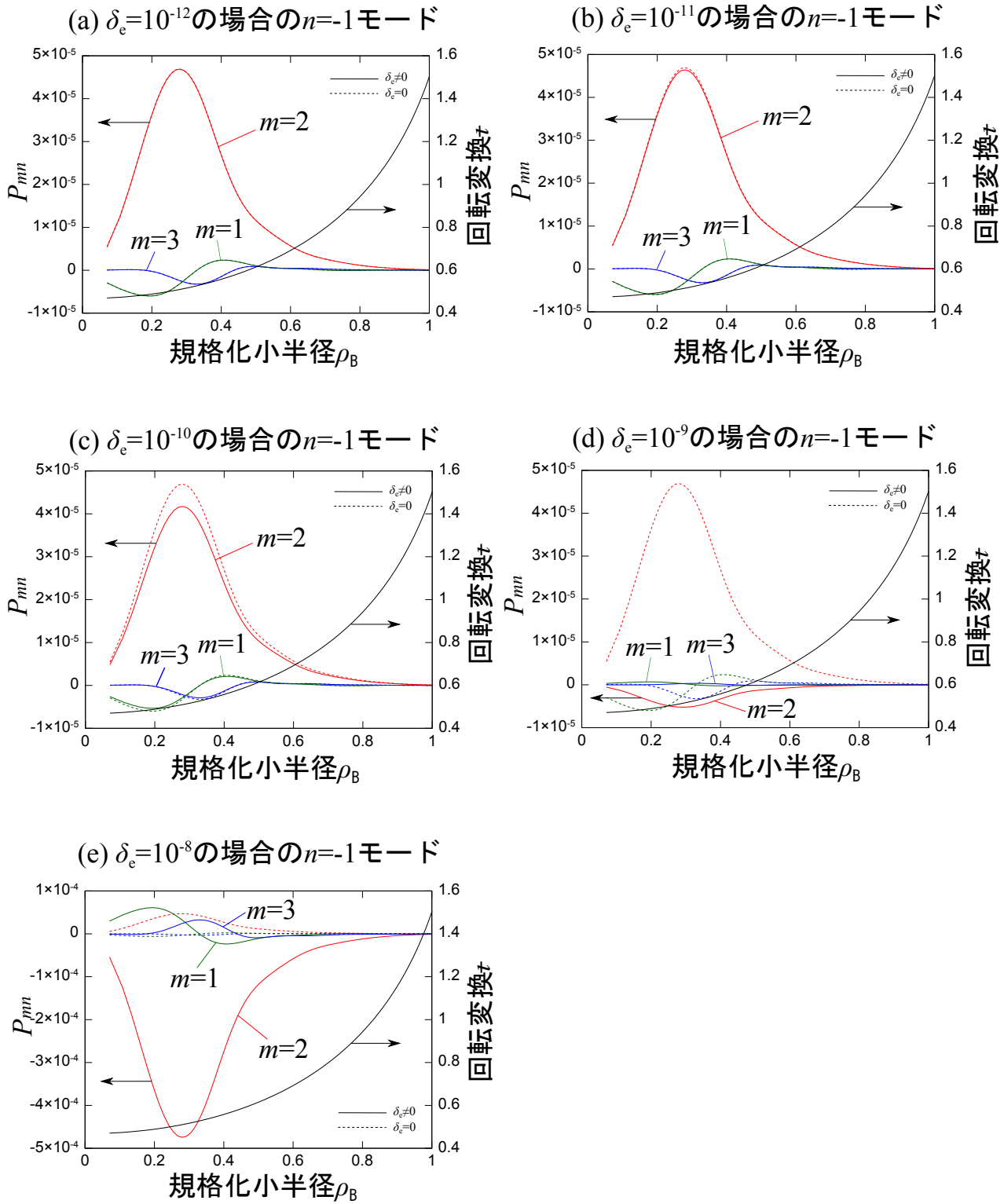


図 4.6: P_{mn} の $n = -1$ モードの規格化小半径 ρ_B 分布 ($t = 1280$)。参考のため、回転変換 t の ρ_B 分布も示されている。

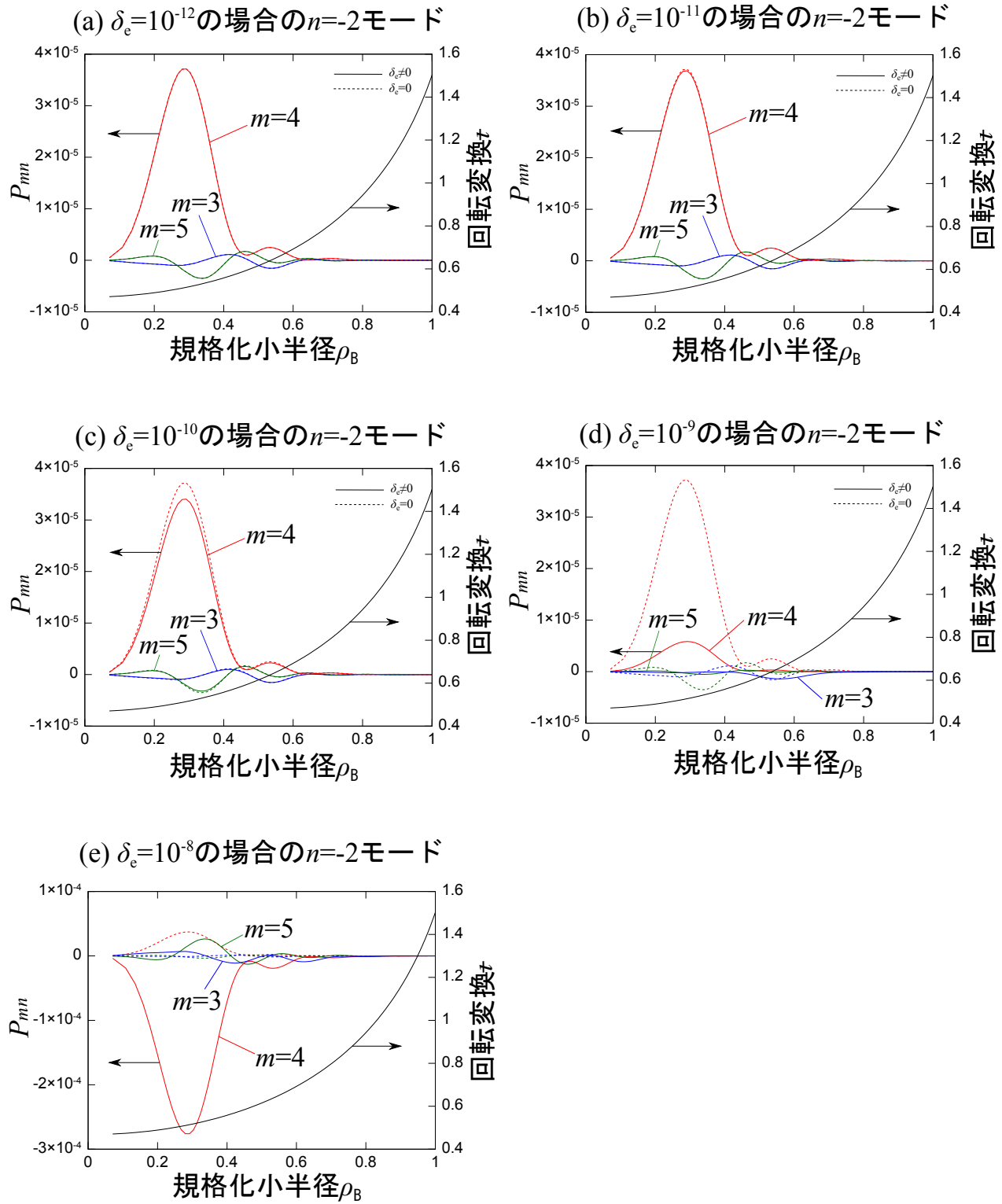


図 4.7: P_{mn} の $n = -2$ モードの規格化小半径 ρ_B 分布 ($t = 1280$)。参考のため、回転変換 t の ρ_B 分布も示されている。

表 4.2: 圧力の Fourier モードのピーク値と半値幅.

δ_e	ピーク値 P_v	比 $\frac{P_v(\delta_e \neq 0)}{P_v(\delta_e = 0)}$ (%)	半値全幅 (FWHM) W
(a) $m/n = 2/-1$			
0	4.69×10^{-5}	-	0.26
10^{-12}	4.69×10^{-5}	100	0.26
10^{-11}	4.64×10^{-5}	99	0.26
10^{-10}	4.17×10^{-5}	89	0.26
10^{-9}	-5.22×10^{-6}	-11	0.27
10^{-8}	-4.74×10^{-4}	-1011	0.26
(b) $m/n = 4/-2$			
0	3.72×10^{-5}	-	0.18
10^{-12}	3.71×10^{-5}	100	0.18
10^{-11}	3.69×10^{-5}	99	0.18
10^{-10}	3.40×10^{-5}	91	0.18
10^{-9}	5.85×10^{-6}	16	0.18
10^{-8}	-2.76×10^{-4}	-742	0.18
(c) $m/n = 5/-3$			
0	2.40×10^{-4}	-	0.16
10^{-12}	2.40×10^{-4}	100	0.16
10^{-11}	2.38×10^{-4}	99	0.16
10^{-10}	2.21×10^{-4}	92	0.16
10^{-9}	4.23×10^{-5}	18	0.16
10^{-8}	-1.74×10^{-3}	-725	0.16
(d) $m/n = 6/-3$			
0	9.12×10^{-5}	-	0.16
10^{-12}	9.11×10^{-5}	100	0.16
10^{-11}	9.05×10^{-5}	99	0.16
10^{-10}	8.41×10^{-5}	92	0.16
10^{-9}	2.04×10^{-5}	22	0.16
10^{-8}	-6.18×10^{-4}	-678	0.17
(e) $m/n = 7/-4$			
0	1.36×10^{-4}	-	0.15
10^{-12}	1.36×10^{-4}	100	0.15
10^{-11}	1.36×10^{-4}	100	0.15
10^{-10}	1.32×10^{-4}	97	0.15
10^{-9}	9.57×10^{-5}	70	0.15
10^{-8}	-2.68×10^{-4}	-682	0.15

表 4.3: 圧力の主要な Fourier モードをピーク値が大きい順に並べた場合の順位.

順位	$\delta_e = 0$	$\delta_e = 10^{-12}$	$\delta_e = 10^{-11}$	$\delta_e = 10^{-10}$	$\delta_e = 10^{-9}$	$\delta_e = 10^{-8}$
1	5/-3	5/-3	5/-3	5/-3	7/-4	5/-3
2	7/-4	7/-4	7/-4	7/-4	5/-3	6/-3
3	6/-3	6/-3	6/-3	6/-3	6/-3	2/-1
4	2/-1	2/-1	2/-1	2/-1	10/-6	4/-2
5	4/-2	4/-2	4/-2	4/-2	6/-4	7/-4

4.5 誤差の許容限界の見積もり

4.4 節の計算結果から、許容限界を $\delta_e \sim 10^{-11}$ と見積もることができる。本解析における不安定性は $\rho_B \lesssim 0.5$ で成長しているため、この領域における $\delta_e = 10^{-10}$ のときの $\hat{F}_e$ の値を図 4.1(d), および図 4.2(d) から調べると、 $\hat{F}_e \lesssim 20\%$ であることに対応する。したがって、この条件を許容限界の目安とすることができると考えられる。ただし、より厳密な許容限界を与えるためには、他の平衡条件、計算条件、計算手法などを用いたさらに詳細な解析を行う必要があると考えられる。

4.6 特定のモードに着目した計算に対する影響

4.6.1 初期摂動の与え方

大きな $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差が特定単一モードの不安定性の解析に与える影響を調べるため、4.3 節とは異なる初期摂動を与えた。初期摂動は圧力が $m/n = 2/-1$ モードのみを持つように、

$$P_1 = 10^{-8} \exp \left[- \left(\frac{\rho_B - 0.25}{\sqrt{2} \times 0.03} \right)^2 \right] \times \cos(2\theta_B - \zeta_B) \quad (4.6)$$

で与えた [1]。図 3.3 より、 $\rho_B = 0.25$ において $t \simeq 0.5$ であり、これは有理数であるため、 $\rho_B \simeq 0.25$ は $m/n = 2/-1$ モードが最も成長しやすい位置である。そこで、式 (4.6) では、 $\rho_B = 0.25$ にピークを持つような規格化小半径分布を与えている。このような摂動の与え方は、長波長の特定の不安定性モードのみを解析したい場合に役立つ。

ここで、式 (4.6) を用いて P_1 を線形 MIPS コードで使用している円柱座標系上で与えるためには、円柱座標系の各格子点上における $(\rho_B, \theta_B, \zeta_B)$ を求める必要がある。しかし、2.4 節で説

明した VMEC コードを用いた方法では R, ϕ, Z が離散的な ρ_B の値ごとに θ_B, ζ_B の関数として Fourier 級数を用いて与えられるため、その逆関数を求めることは難しい．そこで、以下に述べる手順を用いて各格子点上における $(\rho_B, \theta_B, \zeta_B)$ を求めた．この方法は乱数を用いた近傍探索法の一つである．

手順1：まず、初期値として

$$\rho_B^{\hat{p}=0} = 0.5, \quad (4.7)$$

$$\theta_B^{\hat{p}=0} = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{R-R_{\text{ax}}}{(R-R_{\text{ax}})^2+Z^2} \right) & \text{for } Z \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{R-R_{\text{ax}}}{(R-R_{\text{ax}})^2+Z^2} \right) & \text{for } Z < 0 \end{cases}, \quad (4.8)$$

$$\zeta_B^{\hat{p}=0} = 2\pi - \phi \quad (4.9)$$

を与える．ここで、 R_{ax} は磁気軸の大半径、 $\hat{p}$ は収束計算の計算ステップ数である．この値が求めたい $\rho_B, \theta_B, \zeta_B$ に近いほど収束が速くなるが、任意の値でも構わない．この $\rho_B^{\hat{p}=0}, \theta_B^{\hat{p}=0}, \zeta_B^{\hat{p}=0}$ から $R^{\hat{p}=0}, \phi^{\hat{p}=0}, Z^{\hat{p}=0}$ を求める．ただし、 $\rho_B^{\hat{p}=0}$ と VMEC コードを用いた方法で与えられた離散的な ρ_B の値が一致しない場合、線形補間を用いる． R, ϕ, Z と $R^{\hat{p}=0}, \phi^{\hat{p}=0}, Z^{\hat{p}=0}$ の距離 $d^{\hat{p}}$ を

$$d^{\hat{p}} = \sqrt{(R^{\hat{p}=0} - R)^2 + (Z^{\hat{p}=0} - Z)^2 + \left[\frac{1}{2}(R^{\hat{p}=0} + R) \times \phi^* \right]^2}, \quad (4.10)$$

$$\phi^* = \begin{cases} \phi^{\hat{p}=0} - \phi + 2\pi & \text{for } \phi^{\hat{p}=0} - \phi < -\pi \\ \phi^{\hat{p}=0} - \phi & \text{for } -\pi \leq \phi^{\hat{p}=0} - \phi < \pi \\ \phi^{\hat{p}=0} - \phi - 2\pi & \text{for } \phi^{\hat{p}=0} - \phi \geq \pi \end{cases} \quad (4.11)$$

によって求める．

手順2：次に、

$$\rho_B^{\hat{p}+1} = \rho_B^{\hat{p}} + \frac{d^{\hat{p}}}{1.1} \lambda'^{\hat{p}}, \quad (4.12)$$

$$\theta_B^{\hat{p}+1} = \theta_B^{\hat{p}} + \frac{d^{\hat{p}}}{1.1\rho_B^{\hat{p}}} \lambda''^{\hat{p}}, \quad (4.13)$$

$$\zeta_B^{\hat{p}+1} = \zeta_B^{\hat{p}} + \frac{d^{\hat{p}}}{3.65} \lambda'''^{\hat{p}} \quad (4.14)$$

を求める．上式中の 1.1 は計算領域の R, Z 方向の半分の長さであり，最外殻磁気面における小半径に近い長さとして用いている．また，3.65 は計算領域の R 方向の中心の R の値であり，磁気軸の大半径に近い長さとして用いている． $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ は -0.5 から 0.5 の間の値をとる一様乱数である．これらの値は，最大で $d^{\hat{p}}$ の程度の距離が移動すれば任意の値で構わない． $\rho_B^{\hat{p}+1}, \theta_B^{\hat{p}+1}, \zeta_B^{\hat{p}+1}$ から $R^{\hat{p}+1}, \phi^{\hat{p}+1}, Z^{\hat{p}+1}$ を求める． R, ϕ, Z と $R^{\hat{p}+1}, \phi^{\hat{p}+1}, Z^{\hat{p}+1}$ の距離 $d^{\hat{p}+1}$ を求める． $d^{\hat{p}+1} \geq d^{\hat{p}}$ であれば， $\lambda^{\hat{p}}, \lambda'^{\hat{p}}, \lambda''^{\hat{p}}$ の値を変え，再度 $\rho_B^{\hat{p}+1}, \theta_B^{\hat{p}+1}, \zeta_B^{\hat{p}+1}$ を計算し直す．

手順 3: $d^{\hat{p}+1}$ がまだ十分に小さい場合，次の計算ステップとして手順 2 の計算を実行する． $d^{\hat{p}+1} < 10^{-3}$ であれば， $\rho_B^{\hat{p}+1}, \theta_B^{\hat{p}+1}, \zeta_B^{\hat{p}+1}$ が求める $\rho_B, \theta_B, \zeta_B$ であるとした．

4.6.2 解析結果

図 4.8 に $m/n = 2/-1$ モードとその他の主要な圧力 Fourier モードを示す． $\delta_e = 0$ の場合， $m/n = 2/-1$ モードが主要なモードとして現れている．この傾向は $\delta_e = 10^{-10}, 10^{-9}$ でも同様であった．また， $m/n = 1/-1$ モードや $m/n = 3/-1$ モードもわずかに現れている．このようなモードが現れる 1 つ目の理由は，平衡量とのカップリングモードが存在することである．異なるモード m_1/n_1 ，および m_2/n_2 をもつ 2 つの変数の積は，三角関数の積和の公式に従い $(m_1 + m_2)/(n_1 + n_2)$ ，および $(m_1 - m_2)/(n_1 - n_2)$ の 2 つのモードをもつ．このようなモードをカップリングモードと呼ぶ．平衡量は非常に多くのモードを含むため，平衡量と摂動量の積は非常に多くのカップリングモードを生じさせる．2 つ目の理由は，Boozer 座標系が磁気島を含む平衡分布を考慮できないことである．一般に真空磁場分布は入れ子状の磁気面のみから構成されるが，プラズマが存在すると磁気リコネクションが生じ，入れ子状の磁気面が部分的に壊れる場合がある．このとき，ポロイダル断面上で磁気面が島のような小さな閉曲線を描くことから，このような磁気面を磁気島と呼ぶ [2]．Boozer 座標系を含むすべての磁気座標系は，磁気島が存在しないという仮定の上で成り立つ座標系である．3 つ目の理由は，補間に伴う計算誤差などが存在することである．一方， $\delta_e = 10^{-7}$ の場合， $m/n = 2/-1$ モードがあまり成長せず，異なるモードが主要化した． $m/n = 2/-1$ モードのピーク値は， $\delta_e = 0$ の場合は 7.21×10^{-4} であるのに対し， $\delta_e = 10^{-7}$ の場合は 2.44×10^{-4} である．これは，大きな $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ が特定のモードに着目するような計算を妨げる場合があることを意味している．

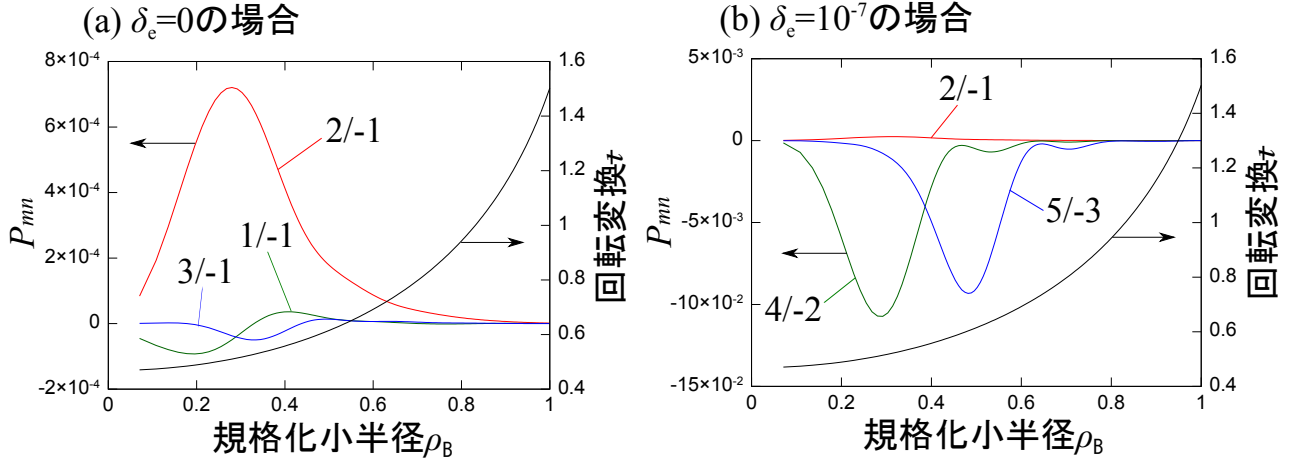


図 4.8: P_{mn} の $m/n = 2/-1$ モードとその他の主要モードの規格化小半径 ρ_B 分布 ($t = 1280$). 参考のため、回転変換 t の ρ_B 分布も示されている.

4.7 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の与え方の妥当性

前節までは $t = 1280$ までの計算結果を示したが、本節では $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の与え方の妥当性を示すために、 $t = 1280$ と $t = 12800$ のモード構造の比較を示す。この節では $t = 12800$ まで計算を行ったため、より高速に計算するために MPI(Message Passing Interface) を用いた並列計算にて使用するプロセス数を増やした。これに伴い、同一の乱数を使用することが難しく、用いた初期摂動や Φ_e の時間発展が 4.3, 4.6 節で述べたものとは異なるため、計算結果も異なる。図 4.9 は $\delta_e = 10^{-13}, 10^{-12}$ の場合の、 $t = 1280, 12800$ における $m/n = 5/-3$ モードの圧力の Fourier モードの規格化小半径分布である。 $t = 1280$ において $\delta_e = 10^{-12}, 10^{-13}$ の場合のピークの符号は異符号となっている。この傾向は $t = 12800$ においても維持されている。これはすなわち、 δ_e は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の変化の特徴的時間スケールを決定するパラメータであるものの、他の物理量の変化の特徴的時間スケールを決定していないことを意味する。この計算では $|\nabla \cdot \mathbf{B}_1|$ は正規分布に従い、その最大値の増大は大きく見積もった場合でも時間に対して線形であるが、主要な物理量は指数関数的に増大することからも予測された結果である。したがって、本研究で使用した $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の与え方によって、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ が主要な物理量の特徴的時間スケールを決定する主要項となっていないことが確認された。

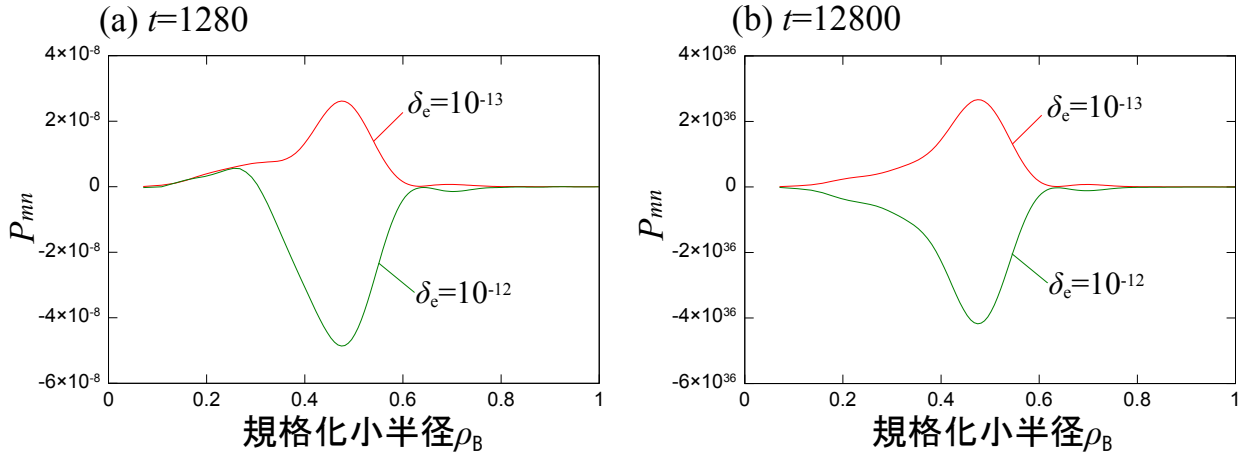


図 4.9: $t = 1280$, および $t = 12800$ における P_{mn} の $m/n = 5/-3$ モードの規格化小半径 ρ_B 分布の δ_e による違い.

4.8 まとめ

この章では、ベクトルポテンシャルを導入した線形 MHD 解析コードに加えた、磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ に関する人工的な誤差項について解説した。このコードを用いて LHD の標準的な平衡分布に対する線形 MHD 解析を行い、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差の大きさが解析結果に与える影響を定量的に評価した。計算結果から、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差は特に不安定性の振幅に影響を与えることを示した。とりわけ、モードごとに分解した不安定性の振幅を順位付けするとその順位が $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差によって影響を受けることを示した。このことから $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差が大きい場合、主要化すべきモードを持った不安定性が全く成長せず異なるモードを持つ不安定性が主要化される場合があることを明らかにし、MHD 不安定性解析において大きな問題を生じさせ得ることを示した。また $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差に起因する磁場方向の力を Lorentz 力に対する比 $\hat{F}_e$ で評価し、誤差の許容限界を調べた。その結果、プラズマ内でこの比が約 20% を下回るとき $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差は MHD 不安定性解析結果に悪影響を及ぼさないことを示した。すなわち、この比を用いた評価は $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ の誤差に対する許容限界を与える指標になり得ることを見いだした。さらに、 $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に関する誤差が実際の解析に与える影響を調べるため、圧力に対して単一モードのみを持つ初期摂動を与え、人工的な誤差項を追加した計算を行った。計算結果から、大きな誤差の影響によって本来成長すべきモードを持つ不安定性は成長せず、異なるモードを持つ不安定性

が成長することを示した. すなわち, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1$ に関する大きな誤差が特定のモードを持つ不安定性に着目するような計算を妨げる場合があることを明らかにした [3].

参考文献

- [1] R. Ueda, M. Sato, K. Y. Watanabe, Y. Matsumoto, Y. Suzuki, M. Itagaki, S. Oikawa, and Y. Todo, Plasma Fusion Res. **8**, 2403157 (2013).
- [2] 岡本正雄：講義「核融合プラズマ物理の基礎-I (NIFS-PROC-29)」(NIFS, 1996) p. 213.
- [3] W. Takado, Y. Matsumoto, K. Y. Watanabe, S. Tomioka, and S. Oikawa, Phys. Plasmas **24**, 092506 (2017).

第5章 結論

本研究では、簡約化していない電磁流体力学 (MHD) 方程式系を計算する既存のコードに対して磁場のソレノイダル条件を満たすようベクトルポテンシャルを導入し、大型ヘリカル装置 (LHD) の標準的な平衡分布に対して線形 MHD 解析を行った。ベクトルポテンシャル導入時、非導入時の計算結果を比較し、磁場のソレノイダル条件を満足しないことが解析結果に及ぼす影響を評価した。さらにベクトルポテンシャルを導入したコードに人工的な誤差項を追加した計算を行うことで、MHD 不安定性の計算結果が磁場のソレノイダル条件に対する誤差の大きさに対して、誤差がどの程度の大きさになると解析結果の妥当性が失われ始めるかを評価し、許容限界を与えた。また特定の単一波長を持つ不安定性の解析に対してソレノイダル条件の誤差が与える影響も調べた。

ベクトルポテンシャルを導入した MHD 解析

ベクトルポテンシャルを新たに導入した線形 MHD 解析コードを用いて、LHD の標準的な平衡分布に対して解析を行った。MHD 不安定性解析において重要となる運動エネルギーの時間変化、および主要な物理量の成長率を比較し、これらの値は磁場のソレノイダル条件の影響を受けずベクトルポテンシャルの導入前後で違いは生じないことを示した。成長した不安定性の構造を調べるため、波長ごとに分解して振幅とプラズマ内での広がりを比較した。その結果、ソレノイダル条件の破綻は長波長の不安定性の構造には影響は与えないが、短波長の不安定性の構造には影響を与えることを示した。LHD の標準的な平衡分布に対するこれらの計算によって、磁場のソレノイダル条件が破綻していても既存の解析コードによる結果は妥当であることを明らかにした。また同時に、LHD のような装置の簡約化を行わない MHD 解析においてベクトルポテンシャルの導入は著しい誤差を生じさせることはなく、LHD の最外殻磁気面外側に存在するストキャスティック領域の計算が可能なまま磁場のソレノイダル条件を満たす有効な手法であることを解析的、および数値的に示した。

磁場のソレノイダル条件に関する誤差の大きさに対する MHD 解析結果の依存性

ベクトルポテンシャルを導入した線形 MHD 解析コードに、磁場のソレノイダル条件に関する人工的な誤差項を加えた。このコードを用いて LHD の標準的な平衡分布に対する線形 MHD 解析を行い、ソレノイダル条件の誤差の大きさが解析結果に与える影響を定量的に評価した。計算結果から、磁場のソレノイダル条件の誤差は特に不安定性の振幅に影響を与えることを示した。とりわけ、波長ごとに分解した不安定性の振幅を順位付けするとその順位が磁場のソレノイダル条件の誤差によって影響を受けることを示した。このことから磁場のソレノイダル条件の誤差が大きい場合、主要化すべき波長を持った不安定性が全く成長せず異なる波長を持つ不安定性が主要化される場合があることを明らかにし、MHD 不安定性解析において大きな問題を生じさせ得ることを示した。また磁場のソレノイダル条件の誤差に起因する磁場方向の力を Lorentz 力に対する比で評価し、誤差の許容限界を調べた。その結果、プラズマ内でこの比が約 20% を下回るとき磁場のソレノイダル条件の誤差は MHD 不安定性解析結果に悪影響を及ぼさないことを示した。すなわち、この比を用いた評価は磁場のソレノイダル条件の誤差に対する許容限界を与える指標になり得ることを見いだした。さらに、磁場のソレノイダル条件に関する誤差が実際の解析に与える影響を調べるため、圧力に対して単一波長のみを持つ初期摂動を与え、人工的な誤差項を追加した計算を行った。計算結果から、大きな誤差の影響によって本来成長すべき波長を持つ不安定性は成長せず、異なる波長を持つ不安定性が成長することを示した。すなわち、磁場のソレノイダル条件に関する大きな誤差が特定の波長を持つ不安定性に着目するような計算を妨げる場合があることを明らかにした。

総括

本研究において、MHD 不安定性解析コードにベクトルポテンシャルを導入し、それを用いた LHD の標準的なプラズマに対する解析によって、磁場のソレノイダル条件の破綻が MHD 不安定性解析に与える影響を明らかにした。その結果から、磁場のソレノイダル条件の誤差を評価する方法を新たに考案し、その手法によって表した許容限界を下回る限りにおいて、磁場のソレノイダル条件の破綻は MHD 不安定性解析に影響を与えないことを示した。

補遺

A MHD 方程式系の導出

この節では文献 [1] に従い, MHD 方程式系を導出する. この節で扱う変数はすべて無次元化されていないが, 煩雑な表記となることを避けるため, この節では $\sim$ を付さない形式で表記する.

A.1 Boltzmann 方程式と Maxwell 方程式系

まず, 分布関数を定義し, この分布関数を用いて Boltzmann 方程式を導く. また, Maxwell 方程式系についても示す.

分布関数

空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と速度座標 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で定義される 6 次元位相空間での微小体積

$$d\Omega = d\mathbf{r}d\mathbf{v} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (\text{A.1})$$

の中に含まれる粒子数を

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Omega = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (\text{A.2})$$

と書き, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ をその粒子についての分布関数と呼ぶ. 分布関数 f は, 多数の粒子を含む微小体積内で平均された数密度を表している.

Boltzmann 方程式

分布関数 f を支配する式は, 一般に Boltzmann 方程式と呼ばれる. 時刻 t に $d\Omega$ に $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Omega$ 個の粒子があり, 粒子の運動の結果, 微小時間 Δt 後に $d\Omega'$ に移ったとする. この間に粒子間の

衝突や粒子の生成，消滅がないと考えると，

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') d\Omega' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Omega \quad (\text{A.3})$$

が成立するはずである． Δt 後には

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} \\ t' &= t + \Delta t \\ d\Omega' &= J_f d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

が成立している．ただし， J_f は Jacobian である． Δt , $|\Delta \mathbf{r}|$, $|\Delta \mathbf{v}|$ を微小量とし， $f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$ を $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, t の周りに展開すると，

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') &= f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, t + \Delta t) \\ &\simeq f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる．ここで， $O(\Delta t^2)$ を無視すると， $J_f = 1$ である．ゆえに，

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

が成立し， $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{A.7})$$

が成立する．一方， $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ であり，粒子に加わる力 $\mathbf{F}$ を電磁力とすると，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.8})$$

である．ここで， e は電荷， m は粒子の質量である．また， $\mathbf{E}$ は電場， $\mathbf{B}$ は磁場（磁束密度）を表す．よって，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (\text{A.9})$$

が導ける．ただし， $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$, $\nabla_v \equiv \partial/\partial \mathbf{v}$ である．もし， $d\Omega \rightarrow d\Omega'$ のときに粒子の衝突や生成，消滅があれば，この変化率を $\delta f/\delta t$ と書くと，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = \frac{\delta f}{\delta t} \quad (\text{A.10})$$

と書ける．これを Boltzmann 方程式という．

一般に，プラズマ中の電子，イオン，不純物イオンなどはそれぞれ質量と電荷が異なり，また緩和時間が異なるので，それぞれの粒子種 a ($a = e$: 電子， $a = i$: 主プラズマイオン， $a = I$: 不純物プラズマイオン， $\dots$) に対する 1 体の分布関数 f_a に対して Boltzmann 方程式が

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{e_a}{m_a} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\delta}{\delta t} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (\text{A.11})$$

のように成立する．また，粒子種 a の数密度 n_a ，および電荷密度 ρ_e ，電流密度 $\mathbf{J}$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} n_a(\mathbf{r}, t) &= \int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ \rho_e(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a n_a(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.12})$$

で定義される．

Maxwell 方程式系

一般的な電磁気学における Maxwell 方程式系は，

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{ext}}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}, \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{A.18})$$

で記述される．ここで， $\mathbf{H}$ は磁場強度， $\mathbf{D}$ は電束密度， ϵ は誘電率， μ は透磁率である．また， $\mathbf{J}_{\text{ext}}, \rho_{\text{ext}}$ はそれぞれ外部電流，外部電荷密度であり，磁化電流や分極電流，分極電荷は含まれない．単位体積当たりの磁化 $\mathbf{M}$ ，単位体積当たりの分極 $\mathbf{P}$ を用いて，磁化電流密度 $\mathbf{J}_b$ ，誘導電流密度 $\mathbf{J}_p$ ，および分極電荷密度 ρ_p は

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (\text{A.21})$$

で与えられる．磁化と分極は

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{A.23})$$

の形で $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ に陰に含まれている．したがって，

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}) \\ &= \mu_0(\mathbf{J}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_b) \\ &= \mu_0(\mathbf{J}_{\text{ext}} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}_b) \\ &= \mu_0(\mathbf{J}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_b) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ &= \rho_{\text{ext}} + \rho_p \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

である．

プラズマでは分極電荷，分極電流が主役をなすことも多く，これらを全て陽に含んだ全電流密度 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_b$ ，全電荷密度 $\rho_e = \rho_{\text{ext}} + \rho_p$ を用いる方が直接的で便利である．以上か

ら、プラズマ物理学における Maxwell 方程式系は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.26})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e, \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.29})$$

のように記述される． c は光速で $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ の関係があり， μ_0 は真空中の透磁率， ϵ_0 は真空中の誘電率を表す．

A.2 2 流体方程式系

この節以降では核融合プラズマを想定し，粒子間衝突が十分に大きいことを仮定する．すなわち，平均自由行程 ℓ_p は系の代表的長さ L に比べて十分に小さく，Knudsen 数 $K_n \equiv \ell_p/L \ll 1$ が成り立つため，プラズマは連続体として扱うことができることを仮定する．Boltzmann 方程式 (A.11) の右辺項 $\delta f_a/\delta t$ に粒子の発生や消滅を含まないとし，粒子間衝突のみを考え，

$$\frac{\delta f_a}{\delta t} = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b) \quad (\text{A.30})$$

とする．ここで， C_{ab} は a 種粒子の b 種粒子との Coulomb 2 体衝突を表す衝突積分である． C_{ab} は粒子数，運動量，およびエネルギーの保存則

$$\int C_{ab} d\mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$\int m_a \mathbf{v} C_{ab} d\mathbf{v} + \int m_b \mathbf{v} C_{ba} d\mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$\int \frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} d\mathbf{v} + \int \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.33})$$

を満たす．これらの保存則は，同種粒子間 ($a = b$) の衝突に対しても成立する．次に，

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle_a, \quad (\text{A.34})$$

$$T_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \frac{m_a}{3} v'^2 f_a(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \equiv \left\langle \frac{m_a}{3} v'^2 \right\rangle_a \quad (\text{A.35})$$

を定義する．ただし， $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}_a$ である． $\mathbf{v}_a$ は a 種粒子の平均速度， T_a は a 種粒子のエネルギーの単位で表された温度である．

ここで，Boltzmann 方程式 (A.11) の 0 次，1 次，2 次のモーメントを取る．すなわち，式 (A.11) の両辺に 1, $m_a \mathbf{v}$, $m_a v^2/2$ を掛けて，速度空間で積分する．式 (A.31)-(A.33) を考慮すると， n_a , $\mathbf{v}_a$, T_a に関する方程式系

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \mathbf{v}_a = 0, \quad (\text{A.36})$$

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_a + e_a n_a (\mathbf{E} + \mathbf{v}_a \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_a, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{d_a T_a}{dt} + \mathbf{P}_a : \nabla \mathbf{v}_a = -\nabla \cdot \mathbf{q}_a + Q_a \quad (\text{A.38})$$

が得られる．ただし，

$$\frac{d_a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla \quad (\text{A.39})$$

である． $\mathbf{P}_a$, $\mathbf{q}_a$, $\mathbf{R}_a$, Q_a はそれぞれ

$$\mathbf{P}_a \equiv n_a m_a \langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle = p_a \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_a, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{q}_a \equiv n_a m_a \left\langle \frac{1}{2} |\mathbf{v}'|^2 \mathbf{v}' \right\rangle, \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{R}_a \equiv \sum_b \int m_a \mathbf{v}' C_{ab} d\mathbf{v} = \sum_{b \neq a} \int m_a \mathbf{v} C_{ab} d\mathbf{v}, \quad (\text{A.42})$$

$$Q_a \equiv \sum_b \int \frac{m_a}{2} (v')^2 C_{ab} d\mathbf{v} = \sum_{b \neq a} \int \frac{m_a}{2} v^2 C_{ab} d\mathbf{v} + \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{v}_a \quad (\text{A.43})$$

で定義される． $\mathbf{P}_a$ は圧力テンソル， $\mathbf{q}_a$ は熱流束， $\mathbf{R}_a$ は異種粒子との衝突による運動量伝達率， Q_a は異種粒子との衝突により発生する熱， $\mathbf{\Pi}_a$ は滑り応力テンソル， $\mathbf{I}$ は単位テンソルである．

式 (A.36)-(A.38) は，Boltzmann 方程式 (A.11) から厳密に導かれたものであるが，圧力テンソルの非等方成分 $\mathbf{\Pi}_a$ や熱流速 $\mathbf{q}_a$ などが現れるため，未知変数の数が方程式の数より多い．そこで，方程式系を解くことができるようにするためには，低次のモーメントにより高次のモーメントの消去を行う必要がある．

A.3 1 流体方程式系

2 流体方程式系 (A.36)-(A.38) は, Boltzmann 方程式 (A.11) から厳密に導かれたものであるが, 未知変数の数が方程式の数より多い. そこで, 方程式系を解くことができるようにするため, いくつかの近似のもとに 1 流体方程式系を導く. まず, 1 種のイオン ($Z_i = 1$) からなるプラズマの場合について, 質量密度 ρ , 速度 $\mathbf{V}$, 電流密度 $\mathbf{J}$ を

$$\rho = \sum_a m_a n_a = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n_i, \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \mathbf{v}_a \simeq \mathbf{v}_i, \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{J} = \sum_a Z_a e_c n_a \mathbf{v}_a = -e_c n_e \mathbf{v}_e + Z_i e_c n_i \mathbf{v}_i \quad (\text{A.46})$$

と定義する. e_c は電気素量である. これらの式を用いて, 1 流体の連続の式, 運動方程式, エネルギーの式, および Ohm の式を導く.

1 流体の連続の式

a 種粒子に対する粒子密度保存の式 (A.36) を全ての粒子種で足し合わせ, ρ と $\mathbf{V}$ の定義式 (A.44), (A.45) を用いると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.47})$$

が得られ, 連続の式と呼ばれる.

1 流体の運動方程式

a 種粒子に対する運動方程式 (A.37) は,

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = -\nabla p_a + \nabla \cdot \Pi_a + e_a n_a (\mathbf{E} + \mathbf{v}_a \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_a \quad (\text{A.48})$$

と書ける. この式で, 右辺第 1 項は圧力, 第 2 項は粘性力, 第 3 項は電磁力, 最後の項は摩擦力を表している. 式 (A.48) を全ての粒子種について足し合わせると, 1 流体の運動方程式が得られるが, その際に次のような仮定をおく.

(i) 電子の慣性は無視する ($m_e \rightarrow 0$)。このとき、式 (A.48) の左辺の a による和は

$$\begin{aligned} \sum_a m_a n_a \frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} &= m_i n_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + m_i n_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e n_e \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e \\ &\simeq \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

となる。

(ii) 準中性条件 ($n_e = Z_i n_i$) とする。すなわち

$$\sum_a e_a n_a \mathbf{E} = (Z_i e_c n_i - e_c n_e) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.50})$$

とする。この仮定は後に吟味する。

ここで、電流密度 $\mathbf{J}$ の定義式 (A.46) より

$$\sum_a e_a n_a \mathbf{v}_a \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.51})$$

であり、また衝突における運動量保存

$$\sum_a \mathbf{R}_a = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_i = 0 \quad (\text{A.52})$$

を考慮すると、運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} \quad (\text{A.53})$$

となる。ただし、圧力 P 、滑り応力テンソル $\mathbf{\Pi}$ はそれぞれ、

$$P = \sum_a p_a = p_e + p_i, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{\Pi} = \sum_a \mathbf{\Pi}_a = \mathbf{\Pi}_e + \mathbf{\Pi}_i \quad (\text{A.55})$$

と定義した。

ここで，準中性条件の仮定について考える．1種類のイオンからなるプラズマでは，

$$\rho_e \equiv Z_i e_c n_i - e_c n_e \quad (\text{A.56})$$

と定義される．電子とイオンに対する連続の式に電荷を掛けて，両者の差をとると，

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.57})$$

が成立する．後述する Ohm の式 (A.78) から，電場 $\mathbf{E}$ は大きさとして $E \sim VB$ であり，運動方程式 (A.53) から， $\omega_c \rho V$ は大きさとして $\omega_c \rho V \sim P/L_c \sim JB$ である．ただし， ω_c は系の特徴的振動数， L_c は系の特徴的長さである．式 (A.57) の左辺第1項と第2項の大きさを比較すると，

$$\left| \frac{\partial \rho_e / \partial t}{\nabla \cdot \mathbf{J}} \right| \sim \frac{\omega_c \rho_e}{J/L_c} \sim \frac{\omega_c}{J} L_c \frac{\epsilon_0 E}{L_c} = \epsilon_0 \frac{\omega_c}{J} VB = \epsilon_0 \frac{\omega_c}{J} \frac{JB^2}{\omega_c \rho} = \frac{V_A^2}{c^2} \quad (\text{A.58})$$

となる． c は光速で， $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ である．ここで，Maxwell 方程式系中の Gauss の式 (A.28) から $\rho_e \sim \epsilon_0 E/L_c$ と考えた． V_A は $V_A^2 = B^2/(\mu_0 \rho)$ で定義される，Alfvén 速度と呼ばれる速度の大きさである．これは磁力線に沿って進行する代表的な磁気流体波の速度を表す．もし， $V_A^2/c^2 \ll 1$ ならば $|\nabla \cdot \mathbf{J}| \gg |\partial \rho_e / \partial t|$ であり， $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ と考えてよい．また，運動方程式 (A.53) に $\rho_e \mathbf{E}$ を残したとすると，

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \rho_e \mathbf{E} - \nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} \quad (\text{A.59})$$

となる．まず， ∇P と $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ の大きさを比較すると，

$$\frac{|\nabla P|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{P}{L_c} \frac{1}{JB} \sim \frac{P}{L_c} \frac{\mu_0}{B^2/L_c} = \frac{P}{B^2/\mu_0} \quad (\text{A.60})$$

となる．プラズマ圧力と磁場の圧力の比

$$\beta \equiv \frac{P}{B^2/2\mu_0} \quad (\text{A.61})$$

はベータ値と呼ばれ，核融合プラズマの閉じ込めにとって重要な量である．通常この値は1より小さいが，無視できるほど小さくはない．また，衝突が十分大きく圧力は等方的であると仮定し，粘性力 $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} \rightarrow 0$ と考える場合もあるが，本研究で使用する MHD 方程式系において

はこの仮定を導入しないため、 $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}$ の項は残すこととする。 $\rho_e \mathbf{E}$ の大きさは、式 (A.58) と $V_A^2/c^2 \ll 1, \omega L_c \simeq V$ を用いると、

$$\frac{|\rho_e \mathbf{E}|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{\rho_e E}{JB} \sim \frac{\rho_e VB}{JB} = \frac{\rho_e V}{J} \sim \frac{J}{\omega_c L_c} \frac{V_A}{c} \frac{V}{J} \ll \frac{1}{\omega_c} \frac{V}{L_c} \sim 1 \quad (\text{A.62})$$

となり、 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ と比較すると十分小さく、 $\rho_e \mathbf{E}$ の項は無視できる。したがって、事実上 $\rho_e = 0$ とおいてよく、準中性条件の仮定は正当化され、式 (A.53) も正当化される。

Ohm の式

電子の運動方程式とイオンの運動方程式の差を取ると、Ohm の式が得られる。その結果は、電子の運動方程式から得られるものと同じである。ここでは、電子の運動方程式

$$m_e n_e \frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla p_e + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e - e_c n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_e \quad (\text{A.63})$$

から直接 Ohm の式を導く。そのため、次の仮定をおく。

(i) 慣性項を無視する ($m_e \rightarrow 0$)。すなわち、慣性項の大きさは、

$$\frac{|m_e n_e (d_e \mathbf{v}_e / dt)|}{|e_c n_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}|} \simeq \frac{m_e n_e (\omega_c + v_e / L_c) v_e}{e_c n_e v_e B} = \frac{\omega_c + v_e / L_c}{e_c B / m_e} \simeq \frac{2\omega_c}{\omega_{ce}} \ll 1 \quad (\text{A.64})$$

と評価できる。ただし、 v_e は特徴的速さで、 $\omega_c \simeq v_e / L_c$ である。また、 ω_{ce} は電子のサイクロトロン周波数で、 $\omega_{ce} = e_c B / m_e$ である。ここで、考えている時間尺度 $2\pi / \omega_c$ は、電子サイクロトロン周期 $2\pi / \omega_{ce}$ よりはるかに長いと仮定した。

(ii) 衝突頻度が十分大きく、圧力はスカラーと仮定する。すなわち、 $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e \rightarrow 0$ とする。

(iii) 熱起電力の式

$$\mathbf{R}_T = -0.71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_e} \frac{\mathbf{B}}{B} \times \nabla T_e \quad (\text{A.65})$$

において磁力線に沿って電子温度 T_e は一定、すなわち $\nabla_{\parallel} T_e = 0$ と仮定し、また電子の衝突周波数 $\nu_e = 1/\tau_e$ (τ_e : 衝突時間) について、 $\nu_e \ll \omega_{ce}$ と仮定すると、

$$\frac{|\nabla p_e|}{|(3/2)(n_e / \omega_{ce} \tau_e)(\mathbf{B}/B) \times \nabla T_e|} \sim \frac{n_e T_e / L_c}{(n_e / \omega_{ce} \tau_e)(T_e / L_c)} = \omega_{ce} \tau_e = \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \gg 1 \quad (\text{A.66})$$

であるので, $\mathbf{R}_T \rightarrow 0$ としてよい. 摩擦力は, $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u$ であり, $\mathbf{R}_u = e_c n_e \eta \mathbf{J}$ であるので, 以上の仮定から, 電子の運動方程式 (A.63) は,

$$\frac{1}{e_c n_e} \nabla p_e + \mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.67})$$

となる. この式を, $\mathbf{v}_e$ を消去して書き換える. $\mathbf{J} = -e_c n_e \mathbf{v}_e + e_c n_i \mathbf{v}_i$ であるから, $\mathbf{v}_i \simeq \mathbf{V}$ を用いて,

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{e_c n_e} (e_c n_i \mathbf{v}_i - \mathbf{J}) \simeq \mathbf{V} - \frac{1}{e_c n_e} \mathbf{J} \quad (\text{A.68})$$

となる. これを式 (A.67) に代入すると, Ohm の式の別の形

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{e_c n_e} \nabla p_e - \frac{1}{e_c n_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.69})$$

が得られる. ここで, $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ の項はホール効果を表し, $\mathbf{B}$ を横切る $\mathbf{J}$ は, $\mathbf{E}$ を生成することを意味している. 式 (A.67), あるいは式 (A.69) を一般化 Ohm の式と呼ぶ. 運動方程式 (A.53) を使って式 (A.69) をさらに書き換える. $\mathbf{v}_i \simeq \mathbf{V}$, $P = p_e + p_i$ であるので, 運動方程式 (A.53) は,

$$\rho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p_e - \nabla p_i + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.70})$$

と書け, これを用いると Ohm の式は,

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{e_c n_e} \nabla p_i - \frac{m_i}{Z_i e_c} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.71})$$

と書ける. ただし,

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \simeq \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \quad (\text{A.72})$$

である. また, Z_i はイオンの原子番号であり, $Z_i = n_e/n_i$ である. ここで, $\omega_c \ll \omega_{ci}$ を仮定する. ω_{ci} はイオンのサイクロトロン周波数で, $\omega_{ci} = Z_i e_c B/m_i$ である. このとき, イオンの慣性項の大きさは

$$\frac{|(m_i/Z_i e_c)(d\mathbf{v}_i/dt)|}{|\mathbf{V} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{m_i}{Z_i e_c} (\omega_c v_i + \frac{v_i^2}{L_c}) \frac{1}{v_i B} = \frac{2\omega_c}{\omega_{ci}} \ll 1 \quad (\text{A.73})$$

と小さく, 式 (A.71) において無視できる. ここで, $\omega_c \simeq v_i/L_c$ を用いた. したがって, Ohm の

式は

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{e_c n_e} \nabla p_i = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.74})$$

となる． ∇p_i の項の大きさを考えると，

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{|(1/e_c n_e) \nabla p_i|} &\simeq \frac{V B e_c n_e}{n_i T_i / L_c} = \frac{n_i}{n_i} \frac{V Z_i e_c B}{T_i} L_c = \frac{m_i}{m_i} \frac{V Z_i e_c B}{T_i} L_c \\ &= \frac{\omega_{ci}}{T_i / m_i} V L_c \simeq \frac{\omega_{ci}}{v_{Ti}^2} V L_c = \frac{V}{v_{Ti}} \frac{1}{r_{Li}} L_c \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

となる．ここで， r_{Li} はイオンの Larmor 半径（サイクロトロン半径）で， $r_{Li} = v_{Ti} / \omega_{ci}$ である． ∇p_i の項が無視できるためには，

$$\frac{V}{v_{Ti}} \gg \frac{r_{Li}}{L_c} \quad (\text{A.76})$$

でなければならない． $T_i \simeq T_e$ ならば $v_{Ti} \sim C_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$ （音速）である．ここで， γ は比熱比である．流体の速度は一般に音速より遅いので，

$$1 \gg \frac{V}{C_s} \gg \frac{r_{Li}}{L_c} \quad (\text{A.77})$$

でなければ， ∇p_i の項は無視できない． ∇p_i の項が無視できるならば，

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.78})$$

となり，これを Ohm の式（Ohm の法則）と呼ぶ．

1 流体のエネルギーの式

MHD 方程式系を完結させるため，1 流体のエネルギーの式を導く． a 種粒子に対するエネルギーの式

$$\frac{3}{2} n_a \frac{d_a T_a}{dt} + p_a \nabla \cdot \mathbf{v}_a = -\nabla \cdot \mathbf{q}_a + \Pi_a : \nabla \mathbf{v}_a + Q_a \quad (\text{A.79})$$

を全ての粒子に対して和を取ると， $|\mathbf{V}| \sim |v_i| \gg |v_e - v_i|$ の近似のもとに，

$$\frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} P \mathbf{V} \right) + P \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \sum Q \quad (\text{A.80})$$

を得る．ここで， $\mathbf{q}$ は熱流束で， Q は発熱を表し，

$$\left. \begin{aligned} P &= p_e + p_i = n_e T_e + n_i T_i \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i \\ \sum Q &= \eta J^2 + \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.81})$$

である．第3式の右辺第1項は Joule 加熱，第2項は粘性加熱を表す．ここで，比熱比 $\gamma = 5/3$ を用いると，式 (A.80) は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} + (\gamma - 1)(\eta J^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{V}) \quad (\text{A.82})$$

と書ける．

A.4 MHD 方程式系

1 流体における MHD 方程式系は，連続の式 (A.47)，運動方程式 (A.53)，Ohm の式 (A.78)，エネルギーの式 (A.82) と Maxwell 方程式系 (A.26)-(A.29) からなる．Ampère の式 (A.27) の右辺第2項は，

$$\frac{|(1/c^2)(\partial \mathbf{E}/\partial t)|}{|\mu_0 \mathbf{J}|} \simeq \frac{\omega_c E}{c^2 \mu_0 J} \sim \frac{\omega_c V B}{c^2 \mu_0 \omega_c \rho V/B} = \frac{V_A^2}{c^2} \ll 1 \quad (\text{A.83})$$

と評価できる．Alfvén 速度は光速と比べて十分小さいため，Ampère の式 (A.27) において，変位電流の項は無視してよい．以上から，Maxwell 方程式系 (A.26)-(A.29) は MHD 近似では，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.84})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.85})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{A.86})$$

となる．したがって，MHD 方程式系は，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (\text{A.87})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = -\gamma P (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\gamma - 1)(\eta J^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{V}), \quad (\text{A.89})$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (\text{A.91})$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.92})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.93})$$

$$\mathbf{\Pi} = 2\mu(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{I}}{3}\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (\text{A.94})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{V})^T + \nabla \mathbf{V}], \quad (\text{A.95})$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (\text{A.96})$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (\text{A.97})$$

と書ける． $\mathbf{D}$ はひずみ速度テンソル， μ は粘性係数（絶対粘度）， ν は動粘性係数（動粘度）， λ は熱伝導率である． $\mathbf{\Pi}$ の導出は文献 [2] を， $\mathbf{q}$ の導出は文献 [3] を参考にした．ここで，流体力学的変数（ ρ ， P ， $\mathbf{V}$ ）を求める式 (A.87)-(A.89) を，流体場の式と呼び，電磁気学的変数（ $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{J}$ ）を求める式 (A.90)-(A.93) を，電磁場の式と呼ぶ．以上で方程式は 15 個あり，未知数は 14 個（ ρ ， P ， $\mathbf{v}$ ， $\mathbf{J}$ ， $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{E}$ ）ある．しかし， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は $t = 0$ で満足させておくと，以後自動的に成立する．すなわち，式 (A.91) より，

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.98})$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{A.99})$$

である．ただし，数値計算では計算誤差が生じるため，式 (A.99) が自動的に成立するとは限らない． $\eta \neq 0$ のときは， η に対する式も与えなければならない．簡単には $\eta = \text{const.}$ として与え

られることがある．また，次の式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (\text{A.100})$$

で与えられることもある．上記の式 (A.87)-(A.93) は， $\eta = 0$ の場合に理想 MHD 方程式系， $\eta \neq 0$ の場合に抵抗性 MHD 方程式系という．

B 運動方程式，および Faraday の式の記述方法とエネルギー保存則

この節では文献 [4] に従い，運動方程式と Faraday の式の両方を保存形，または非保存形で計算すると $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の条件下においてエネルギー保存則が成立せず，一方を保存形，他方を非保存形で記述することで $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の条件下においてもエネルギー保存則が成立することを示す．ここでいう保存形とは，ある変数 $\mathbf{Y}$ の時間偏微分をあるテンソル関数 $\mathbf{F}$ を用いて

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (\text{B.1})$$

の形で書いた式のことである．ただしこの節では，物理的条件や仮定を課さずに保存形へ変形できる式は，保存形と同等であるとみなしている．また，保存形の運動方程式を用いた場合 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ に起因する磁場方向の力が引き起こされることも示す．この節で扱う変数はすべて無次元化されていないが，煩雑な表記となることを避けるため，この節では $\sim$ を付さない形式で表記する．また，本節では非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ の仮定のもとで議論を進める．

B.1 運動方程式，Faraday の式がともに非保存形の場合

運動方程式 (A.88) から粘性項を省略し，Ampère の式 (A.92) を用いると，

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (\text{B.2})$$

となる．ここで， d/dt は Lagrange 微分である．また，Faraday の式 (A.88) に理想 MHD の条件 $\eta = 0$ を適用し，Ohm の式 (A.90) を用いて，さらに $\nabla \cdot \mathbf{B}$ を含む項を省略せずに記述すると，

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.3})$$

となる．ここで，右辺第 2 項は文献 [5] の表記に従っている．式 (B.2)，(B.3) はいずれも非保存形である．

式 (B.2)，連続の式 (A.87)，および非圧縮性条件 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ を用いると，運動エネルギーの Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) &= \frac{1}{2} V^2 \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} V^2 \rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla P - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\ &= -\frac{1}{2} V^2 \rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (P \mathbf{V}) + P \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\ &= -\nabla \cdot (P \mathbf{V}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V})] &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}] \\ &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

であり，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (B^2 \mathbf{V}) &= B^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla B^2 \\ &= 2 \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \\ &= 2 \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

を用いて，

$$\mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \frac{1}{2} \nabla \cdot (B^2 \mathbf{V}) - \nabla \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V})] + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}) \quad (\text{B.7})$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) &= -\nabla \cdot (P \mathbf{V}) + \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\frac{1}{2} \nabla \cdot (B^2 \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V})] \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる. 一方, 式 (B.3), および非圧縮性条件 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ を用いると, 磁気エネルギーの Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B}] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} \\ &\quad - \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる. したがって, 全空間におけるエネルギー積分は式 (B.8) と (B.9) の和より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV_{\text{vol}} &= \int \left\{ \nabla \cdot \left[- \left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} \right\} dV_{\text{vol}} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となる. よって $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合, 孤立系のエネルギーは保存量でなくなる. さらに文献 [4] によれば, $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合, 孤立系の運動量や磁束も保存量でなくなる.

B.2 運動方程式が非保存形, Faraday の式が保存形の場合

非保存形の運動方程式は式 (B.2) である. また, 保存形の Faraday の式は式 (B.3) において $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ として,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.11})$$

で記述される．この式は変形すると，

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{V}) \quad (\text{B.12})$$

で書けるから，保存形であることが確認できる．

式 (B.11)，および非圧縮条件 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ を用いると，磁気エネルギーの Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

となる．また，運動方程式は非保存形であるため，運動エネルギーの Lagrange 微分は式 (B.8) に等しい．したがって，全空間におけるエネルギー積分は式 (B.8) と (B.13) の和より，

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV_{\text{vol}} = \int \nabla \cdot \left[- \left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \right] dV_{\text{vol}} \quad (\text{B.14})$$

となる．よって $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合でも，孤立系のエネルギーは保存量となる．

B.3 運動方程式が保存形，Faraday の式が非保存形の場合

非保存形の Faraday の式は式 (B.3) である．また，非保存形の運動方程式 (B.2) を変形すると，

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \nabla B^2 + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] \\ &= -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \nabla B^2 + \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} \right] \\ &= \nabla \cdot \left[- \left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} \right] - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

となる．ここで， $\mathbf{I}$ は単位テンソルである． $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ として，保存形の運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla \cdot \left[-\left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right] \quad (\text{B.16})$$

で記述される．この式は連続の式 (A.87) を用いて変形すると，

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} = \nabla \cdot \left[-\rho \mathbf{V} \mathbf{V} - \left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right] \quad (\text{B.17})$$

で書けるから，保存形であることが確認できる．

保存形の運動方程式 (B.16) は非保存形の運動方程式 (B.2) を変形した式 (B.15) において $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ としたものである．一方，非保存形の運動方程式 (B.2) の右辺に $\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} / \mu_0$ を加え，

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.18})$$

とおいても，やはり保存形の運動方程式 (B.16) が得られる．これと連続の式 (A.87)，および式 (B.7) から，運動エネルギーの Lagrange 微分は，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) &= \frac{1}{2} V^2 \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} V^2 \rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla P - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= -\nabla \cdot (P \mathbf{V}) + P \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= -\nabla \cdot (P \mathbf{V}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= -\nabla \cdot (P \mathbf{V}) + \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\frac{1}{2} \nabla \cdot (B^2 \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V})] \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

となる．また，Faraday の式は非保存形であるため，磁気エネルギーの Lagrange 微分は式 (B.9) に等しい．したがって，全空間におけるエネルギー積分は式 (B.19) と (B.9) の和より，

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV_{\text{vol}} = \int \nabla \cdot \left[-\left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}\right) \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \right] dV_{\text{vol}} \quad (\text{B.20})$$

となる．よって $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合でも，孤立系のエネルギーは保存量となる．

B.4 運動方程式, Faraday の式がともに保存形の場合

保存形の運動方程式は式 (B.16), 保存形の Faraday の式は式 (B.11) である. 運動エネルギーの Lagrange 微分は式 (B.19) に, 磁気エネルギーの Lagrange 微分は式 (B.13) に等しくなる. したがって, 全空間におけるエネルギー積分は式 (B.19) と (B.13) の和より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV_{\text{vol}} = & \int \left\{ \nabla \cdot \left[- \left(P + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) \nabla \cdot \mathbf{B} \right\} dV_{\text{vol}} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

となる. よって $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合, 孤立系のエネルギーは保存量でなくなる.

B.5 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合に磁場方向の力が引き起こされる理由

Rankine-Hugoniot の関係式を満たさないような高速流に対してのみ, 保存形での計算が必須である. 一方, 低速流で特徴付けられる低ベータプラズマに対する不安定性計算や平衡計算のように, 短い時間の時間積分を何度も必要とする計算の場合, 保存形の運動方程式を用いた計算は適さない. ここで, 保存形の運動方程式 (B.16) において, Lorentz 力 $\mathbf{F}$ は Maxwell 応力テンソルに等しく,

$$\mathbf{F} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \quad (\text{B.22})$$

である. $\mathbf{B}$ との内積を取ると

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{B} \cdot \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \right] \\ &= \mathbf{B} \cdot \left[-\frac{1}{2} \nabla B^2 + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] \\ &= \mathbf{B} \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + B^2 \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= B^2 \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

となる. したがって, $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ の場合, 磁場方向の力が引き起こされる. 文献 [4] では実際に数値計算によって保存形の運動方程式を計算し, 磁場方向の力が引き起こされたことを確認している.

C Boozer 座標系の基底ベクトルの導出

この節では文献 [6] に従い磁気座標系の 1 つである Boozer 座標系を定義し, Boozer 座標系における基底ベクトルを導出する. この節で扱う変数はすべて無次元化されていないが, 煩雑な表記となることを避けるため, この節では $\sim$ を付さない形式で表記する.

C.1 Boozer 座標系の定義

平衡時の MHD 方程式系から得られる平衡方程式系は

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.1})$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{C.3})$$

である. ここで, P は圧力, $\mathbf{J}$ は電流密度, $\mathbf{B}$ は磁場 (磁束密度) である. 式 (C.2) から

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{C.4})$$

であり, 式 (C.1) から

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla P = 0 \quad (\text{C.6})$$

である. 式 (C.1)-(C.6) で与えられるトロイダル MHD 平衡配位は単一磁気軸を持つ入れ子状の磁気面からなり, 各磁束面は ρ_g で指定されるものと仮定する. ρ_g は一般に, 2.4 節で述べる規格化小半径に対応する. まず, $\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0$ から

$$P = P(\rho_g) \quad (\text{C.7})$$

であり, P は ρ_g のみの関数となる. 式 (C.5), (C.7) から $\mathbf{B} \cdot \nabla \rho_g = 0$ となり, $\mathbf{B}$ と $\nabla \rho_g$ は直交する. そこで, $\mathbf{B}$ を $\nabla \rho_g$ と任意のベクトル $\mathbf{v}_{\text{ar}}$ の外積として表現すると,

$$\mathbf{B} = \nabla \rho_g \times \mathbf{v}_{\text{ar}}$$

と書け, 両辺の発散をとると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \rho_g \times \mathbf{v}_{\text{ar}}) \\ &= \mathbf{v}_{\text{ar}} \cdot \nabla \times \nabla \rho_g - \nabla \rho_g \cdot \nabla \times \mathbf{v}_{\text{ar}} = -\nabla \rho_g \cdot \nabla \times \mathbf{v}_{\text{ar}} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

となる. この式の右辺は式 (C.3) から 0 であるため, $\mathbf{v}_{\text{ar}}$ は任意のスカラー関数 v_g の勾配として $\mathbf{v}_{\text{ar}} = \nabla v_g$ で与える必要があり, $\mathbf{B}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \rho_g \times \nabla v_g \\ &= \nabla \times (\rho_g \nabla v_g) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

で表現できる. したがって, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \rho_g \nabla v_g \quad (\text{C.10})$$

と書ける. 同様に, 式 (C.4), (C.6), (C.7) から, $\mu_0 \mathbf{J}$ を

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla w_g \times \nabla \rho_g \\ &= \nabla \times (w_g \nabla \rho_g) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

で与える. ここで, w_g は任意のスカラー関数である. したがって, 式 (C.2), (C.11) から

$$\nabla \times (\mathbf{B} - w_g \nabla \rho_g) = 0 \quad (\text{C.12})$$

と書け,

$$\mathbf{B} = \nabla u_g + w_g \nabla \rho_g \quad (\text{C.13})$$

が導かれる．ここで， u_g は任意のスカラー関数である．

ここで， u_g, v_g, w_g を周期的成分と，非周期的成分に分けると，

$$v_g = v_{\theta_g}(\rho_g)\theta_g + v_{\zeta_g}(\rho_g)\zeta_g + v'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g), \quad (C.14)$$

$$w_g = w_{\theta_g}(\rho_g)\theta_g + w_{\zeta_g}(\rho_g)\zeta_g + w'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g), \quad (C.15)$$

$$u_g = u_{\theta_g}(\rho_g)\theta_g + u_{\zeta_g}(\rho_g)\zeta_g + u'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g) \quad (C.16)$$

と書ける． θ_g, ζ_g はそれぞれ，一般の磁気座標系におけるポロイダル角変数，トロイダル角変数である． $v_{\theta_g}, v_{\zeta_g}, w_{\theta_g}, w_{\zeta_g}, u_{\theta_g}, u_{\zeta_g}$ は非周期的成分を表す関数， $u', v'w'$ は周期的成分を表す関数である．ここで，

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla\rho_g \times \nabla v_g \\ &= v_{\theta_g}(\nabla\rho_g \times \nabla\theta_g) + v_{\zeta_g}(\nabla\rho_g \times \nabla\zeta_g) + \nabla\rho_g \times \nabla v' \end{aligned} \quad (C.17)$$

であるから，

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\theta_g = -\frac{1}{\sqrt{g_g}}v_{\zeta_g} + (\nabla\rho_g \times \nabla v') \cdot \nabla\theta_g, \quad (C.18)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\zeta_g = \frac{1}{\sqrt{g_g}}v_{\theta_g} + (\nabla\rho_g \times \nabla v') \cdot \nabla\zeta_g \quad (C.19)$$

となる．ここで， $\sqrt{g_g}$ は一般の磁気座標系における Jacobian である．ポロイダル磁束 Ψ_p ，ト

ロイダル磁束 Ψ_t はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 2\pi\Psi_p &= \int_{\mathbf{S}_p} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p \\
 &= \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_g} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta_g d\zeta_g d\rho_g \\
 &= - \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} \int_0^{2\pi} v_{\zeta_g} d\zeta_g d\rho_g \\
 &= -2\pi \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} v_{\zeta_g} d\rho_g, \tag{C.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi\Psi_t &= \int_{\mathbf{S}_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_t \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} \sqrt{g_g} \mathbf{B} \cdot \nabla\zeta_g d\rho_g d\theta_g \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} v_{\theta_g} d\rho_g d\theta_g \\
 &= 2\pi \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} v_{\theta_g} d\rho_g \tag{C.21}
 \end{aligned}$$

である．ここで， $\mathbf{S}_p, \mathbf{S}_t$ はそれぞれ図 C.1, C.2 に示すような，1つの磁気面と磁気軸が作る領域，ポロイダル断面において1つの磁気面に囲まれた領域の面ベクトルである． $\rho_{g,\min}$ は磁気軸上の ρ_g の値である．したがって，

$$v_{\theta_g} = \frac{d\Psi_t}{d\rho_g}, \tag{C.22}$$

$$v_{\zeta_g} = -\frac{d\Psi_p}{d\rho_g} \tag{C.23}$$

が得られる．また，

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla w_g \times \nabla \rho_g \\
 &= w_{\theta_g} (\nabla\theta_g \times \nabla\rho_g) + w_{\zeta_g} (\nabla\zeta_g \times \nabla\rho_g) + \nabla w' \times \nabla\rho_g \tag{C.24}
 \end{aligned}$$

であるから，

$$\mu_0 \mathbf{J} \cdot \nabla\theta_g = \frac{1}{\sqrt{g_g}} w_{\zeta_g} + (\nabla w' \times \nabla\rho_g) \cdot \nabla\theta_g, \tag{C.25}$$

$$\mu_0 \mathbf{J} \cdot \nabla\zeta_g = -\frac{1}{\sqrt{g_g}} w_{\theta_g} + (\nabla w' \times \nabla\rho_g) \cdot \nabla\zeta_g \tag{C.26}$$

となる．ポロイダル電流 I_p ，トロイダル電流 I_t はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 2\pi I_p &= \int_{S'_p} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}'_p \\
 &= \int_{\rho_g}^{\rho_{g,\max}} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_g} \mathbf{J} \cdot \nabla \theta_g d\zeta_g d\rho_g \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\rho_g}^{\rho_{g,\max}} \int_0^{2\pi} w_{\zeta_g} d\zeta_g d\rho_g \\
 &= \frac{2\pi}{\mu_0} \int_{\rho_g}^{\rho_{g,\max}} w_{\zeta_g} d\rho_g, \tag{C.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi I_t &= \int_{S_t} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_t \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} \sqrt{g_g} \mathbf{J} \cdot \nabla \zeta_g d\rho_g d\theta_g \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} w_{\theta_g} d\rho_g d\theta_g \\
 &= -\frac{2\pi}{\mu_0} \int_{\rho_{g,\min}}^{\rho_g} w_{\theta_g} d\rho_g \tag{C.28}
 \end{aligned}$$

である．ここで， S'_p は図 C.3 に示すような，1つの磁気面がトーラスの内側に作る領域の面ベクトルである． $\rho_{g,\max}$ は最外殻磁気面上の ρ_g の値である．したがって，

$$w_{\theta_g} = -\mu_0 \frac{dI_t}{d\rho_g}, \tag{C.29}$$

$$w_{\zeta_g} = -\mu_0 \frac{dI_p}{d\rho_g} \tag{C.30}$$

が得られる．また，式 (C.13) から，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot (\nabla \rho_g \times \nabla \theta_g) &= \nabla u_g \cdot (\nabla \rho_g \times \nabla \theta_g) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g_g}} u_{\zeta_g} + \nabla u' \cdot (\nabla \rho_g \times \nabla \theta_g), \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot (\nabla \zeta_g \times \nabla \rho_g) &= \nabla u_g \cdot (\nabla \zeta_g \times \nabla \rho_g) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g_g}} u_{\theta_g} + \nabla u' \cdot (\nabla \zeta_g \times \nabla \rho_g) \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}
 2\pi\mu_0 I_p &= \mu_0 \int_{S'_p} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}'_p \\
 &= \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_t \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_g} \mathbf{B} \cdot (\nabla \rho_g \times \nabla \theta_g) d\zeta_g \\
 &= \int_0^{2\pi} u_{\zeta_g} d\zeta_g \\
 &= 2\pi u_{\zeta_g}, \tag{C.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi\mu_0 I_t &= \mu_0 \int_{S_t} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_t \\
 &= \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_p \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_g} \mathbf{B} \cdot (\nabla \zeta_g \times \nabla \rho_g) d\theta_g \\
 &= \int_0^{2\pi} u_{\theta_g} d\theta_g \\
 &= 2\pi u_{\theta_g} \tag{C.34}
 \end{aligned}$$

である．ここで， $\mathbf{l}_t, \mathbf{l}_p$ はトロイダル方向，ポロイダル方向の線ベクトルである．したがって，

$$u_{\theta_g} = \mu_0 I_t, \tag{C.35}$$

$$u_{\zeta_g} = \mu_0 I_p \tag{C.36}$$

が得られる．以上から，

$$v_g = \frac{d\Psi_t}{d\rho_g} \theta_g - \frac{d\Psi_p}{d\rho_g} \zeta_g + v'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g), \tag{C.37}$$

$$w_g = -\mu_0 \frac{dI_t}{d\rho_g} \theta_g - \mu_0 \frac{dI_p}{d\rho_g} \zeta_g + w'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g), \tag{C.38}$$

$$u_g = \mu_0 I_t \theta_g + \mu_0 I_p \zeta_g + u'(\rho_g, \theta_g, \zeta_g) \tag{C.39}$$

と表される．これが一般の磁気座標系の定義である．ここで， θ_g, ζ_g に関する適切な変換を行うことで， u_g, v_g, w_g のうち2つを0にすることができる．特に， $u' = 0, v' = 0$ の場合を Boozer 座標系という．

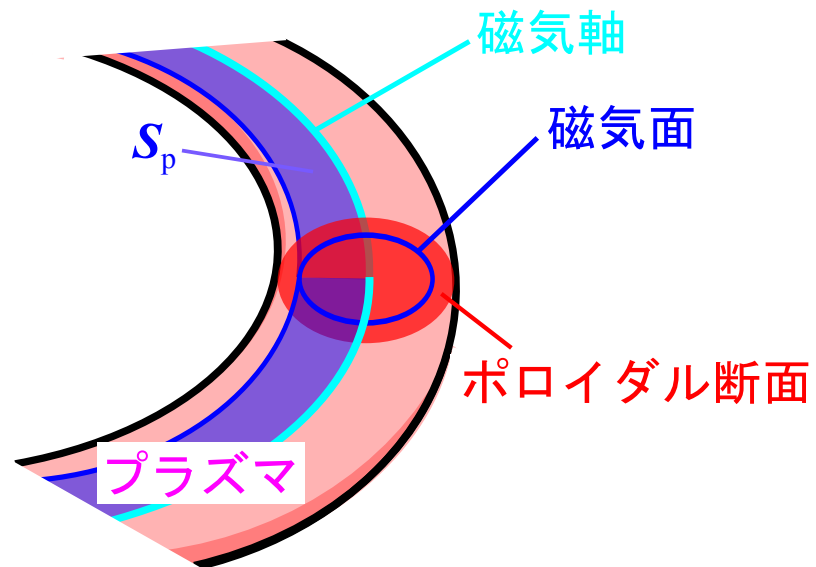


図 C.1: S_p の定義. 青で示す面の下向き法線ベクトルとして定義される. S_p を用いてポロイダル磁束が決定される.

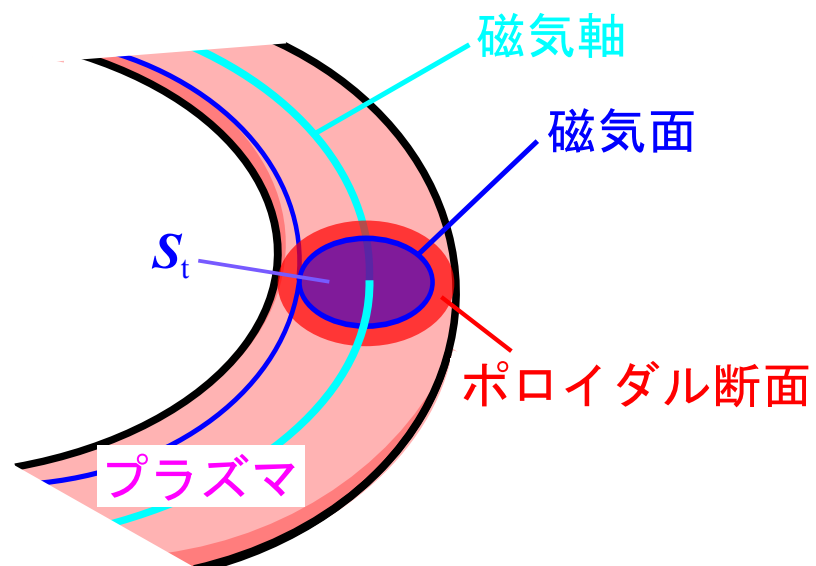


図 C.2: S_t の定義. 青で示す面の手前向き法線ベクトルとして定義される. S_t を用いてトロイダル磁束, トロイダル電流が決定される.

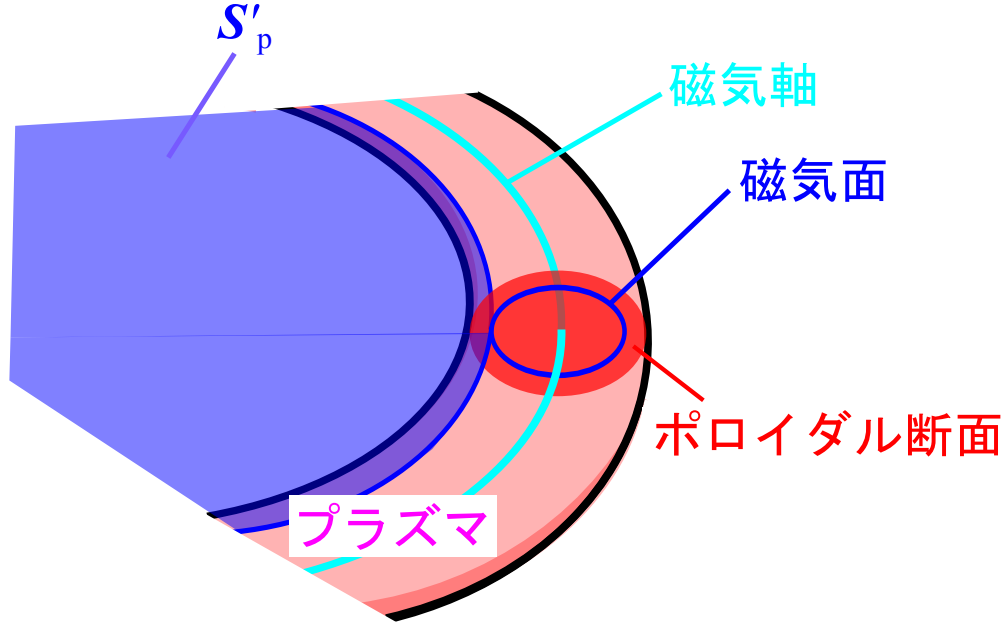


図 C.3: S'_p の定義. 青で示す面の下向き法線ベクトルとして定義される. S'_p を用いてポロイダル電流が決定される.

C.2 Boozer 座標系における Jacobian と基底ベクトルの導出

ここでは, Boozer 座標系の場合について記述するため, 一般の磁気座標系において使用した添え字 g が B に置き換わる. まず, Jacobian を導出する. 式 (C.9), (C.13) から,

$$B^2 = \mathbf{B} \cdot \nabla u_B \quad (\text{C.40})$$

である. また, 式 (C.37), および (C.39) にて $u' = 0, v' = 0$ とし, 式 (C.9) に代入すると,

$$u_B = \mu_0 I_t \theta_B + \mu_0 I_p \zeta_B, \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \nabla \rho_B \times \nabla \theta_B - \frac{d\Psi_p}{d\rho_B} \nabla \rho_B \times \nabla \zeta_B \quad (\text{C.42})$$

が得られ, 回転変換 $t = d\Psi_p/d\Psi_t$ を用いて,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla u_B = \mu_0 \frac{I_p + t I_t}{\sqrt{g_B}} \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \quad (\text{C.43})$$

である。したがって、Jacobian

$$\sqrt{g_B} = \mu_0 \frac{I_p + \iota I_t}{B^2} \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \quad (\text{C.44})$$

が導かれる。次に、式 (C.39) にて $u' = 0$ とし、式 (C.13) に代入すると、

$$\mathbf{B} = \mu_0 I_t \nabla \theta_B + \mu_0 I_p \nabla \zeta_B + w_B \nabla \rho_B \quad (\text{C.45})$$

であるから、

$$\nabla \rho_B \times \mathbf{B} = \mu_0 I_t \nabla \rho_B \times \nabla \theta_B + \mu_0 I_p \nabla \rho_B \times \nabla \zeta_B \quad (\text{C.46})$$

である。式 (C.42), (C.46) から、

$$\begin{aligned} \nabla \zeta_B \times \nabla \rho_B &= \frac{1}{B^2 \sqrt{g_B}} \left(\frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \mathbf{B} \times \nabla \rho_B + \mu_0 I_t \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{1}{B^2 \sqrt{g_B}} (\mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + \mu_0 I_t \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

$$\begin{aligned} \nabla \rho_B \times \nabla \theta_B &= \frac{1}{B^2 \sqrt{g_B}} \left(-\iota \frac{d\Psi_t}{d\rho_B} \mathbf{B} \times \nabla \rho_B + \mu_0 I_p \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{1}{B^2 \sqrt{g_B}} (-\iota \mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + \mu_0 I_p \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

である。したがって、基底ベクトルは

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_B} &= \sqrt{g_B} \nabla \zeta_B \times \nabla \rho_B \\ &= \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + \mu_0 I_t \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_B} &= \sqrt{g_B} \nabla \rho_B \times \nabla \theta_B \\ &= \frac{1}{B^2} (-\iota \mathbf{B} \times \nabla \Psi_t + \mu_0 I_p \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

となる。なお、 ρ_B 方向の基底ベクトルは Boozer 座標系の定義のみでは与えられない。

参考文献

- [1] 岡本正雄：講義「核融合プラズマ物理の基礎-I (NIFS-PROC-29)」(NIFS, 1996) p. 100.
- [2] 藤川重雄, 武田靖, 矢野猛, 村井祐一：「工学の基礎 流体力学」(培風館, 2005) p. 36.
- [3] 相原利雄：「伝熱工学」(裳華房, 1994) p. 9.
- [4] J. U. Brackbill and D. C. Barnes, J. Comput. Phys. **35**, 426 (1980).
- [5] N. Panofsky and M. Phillips: "Classical Electricity and Magnetism" (Addison-Wesley, 1962) p. 162.
- [6] 宮本健郎：「核融合のためのプラズマ物理 (NIFS-PROC-80)」(NIFS, 2010) p. 246.

謝辞

本論文の作成にあたりまして、多くの方々のお世話になりました。ここに、感謝の意を述べさせていただきます。

まず、北海道大学の先生方への感謝の意を述べさせていただきます。松本裕助教には、研究において直接のご指導を頂きまして、とりわけ大変お世話になりました。いつも非常に丁寧なご指導を頂き、また研究などが行き詰まった際のご相談にも乗って頂きました。心強いご支援を頂きましたこと、誠にありがとうございました。富岡智教授には、論文全体の構成などの観点からご助言を頂き、また数式の確認なども丁寧に行って頂きまして、大変お世話になりました。ありがとうございました。及川俊一准教授には、論理的観点から多くのご助言を頂きまして、大変お世話になりました。ご助言によって、より価値のある研究成果を得ることができたと考えています。ありがとうございました。ご退職されました板垣正文先生には、研究室への配属時から大変お世話になりまして、研究の基礎を学ばせて頂きました。研究が順調に進まず、ご心配を多くお掛けしたこと大変心苦しく思っております。ご支援を頂きましたこと、誠にありがとうございました。また、佐々木浩一教授、渡部正夫教授には、本論文をより良い形に仕上げるため多くのご助言を頂きました。ありがとうございました。

続きまして、自然科学研究機構 核融合科学研究所の先生方への感謝の意を述べさせていただきます。渡邊清政教授には、研究を進める上で多くのご協力を頂きまして、大変お世話になりました。論文全体の構成などの観点からご助言も頂いたことで、より価値のある研究成果を得ることができたと考えています。ありがとうございました。藤堂泰教授、佐藤雅彦助教には MIPS コードのご使用の許可を頂き、また解析結果に関する多くのご助言を頂きまして、大変お世話になりました。より専門的な見地からのご助言は非常に役立ちました。ありがとうございました。また、鈴木康浩准教授、關良輔助教、上田亮介さんには、研究を進める上で多くのご協力を頂きまして、大変お世話になりました。ありがとうございました。

最後に、これまでの私の人生を支えて下さいました両親、および家族に深く感謝致します。

本論文の作成にあたり，他にも多くの方々のお世話になりました．ご支援頂けましたこと，誠にありがとうございました．

平成 30 年 2 月 16 日

高堂 渉