



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	1996年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures 北海道大学理学部数学教室
Author(s)	Yamada, Hirofumi
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 50, 1
Issue Date	1997-01-01
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/642">https://doi.org/10.14943/642</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/700">https://hdl.handle.net/2115/700</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	1996da001.pdf



1996年度談話会・特別講演  
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by H.-F. Yamada

Series #50. August, 1997

HOKKAIDO UNIVERSITY  
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- # 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- # 25: K. Takasaki, “非線型可積分系の数理” 1992.9.28~10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- # 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- # 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- # 28: T. Hibi (Ed.), 1992 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- # 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第 2 回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- # 30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- # 31: K. Kubota (Ed.), 第 19 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- # 32: T. Ozawa (Ed.), 1993 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- # 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- # 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.
- # 35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第 3 回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.
- # 36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.
- # 37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.
- # 38: M. Saito (Ed.), 1994 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.
- # 39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.
- # 40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.
- # 41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第 4 回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.
- # 42: R. Agemi (Ed.), 第 20 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.
- # 43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.
- # 44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.
- # 45: G. Ishikawa (Ed.), 1995 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.
- # 46: R. Agemi (Ed.), 第 21 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.
- # 47: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関する位相幾何学, 61 pages. 1996.
- # 48: S. Miyajima, J. Inoue (Eds.), 第 5 回関数空間セミナー報告集, 90 pages. 1997.
- # 49: T. Ozawa (Ed.), Proceedings of the 22nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 1997.

## 1996年度 談話会・特別講演アブストラクト 目次

1.	Mathijs S. Dijkhuizen 氏 (神戸大・理) Quantum complex Grassmannians and BC type multivariable $q$ -orthogonal polynomials	1
2.	高橋 陽一郎 氏 (京大・数理研) Szegő の公式を巡る確率論	4
3.	大鹿 健一 氏 (東工大・理) An approach to Marden's conjecture for finitely generated Kleinian groups	6
4.	志賀 徳造 氏 (東工大・理) 相互作用のある拡散系の最近の話題	8
5.	松岡 隆 氏 (鳴門教育大) 2次元力学系の周期軌道と組みも不変量	9
6.	金行 壯二 氏 (上智大・理工) 実単純階別リー環に於けるシルヴェスターの慣性律	11
7.	Stephen D. Smith 氏 (イリノイ大) Some applications of combinatorics (especially finite geometry) to group cohomology	13
8.	角田 秀一郎 氏 (奈良女子大・理) 心の幾何学	14
9.	谷崎 俊之 氏 (広島大・理) エルミート対称空間上の超幾何方程式	16
10.	吉田 敬之 氏 (京大・理) On absolute CM-periods	18
11.	山田 裕史 氏 (北大・理) 被約シューア関数とアフィンリー環の基本表現	20
12.	Charles R. Johnson 氏 (college of William and Mary) Recent results on matrix completion problems	22
13.	有木 進 氏 (東京商船大) ヘッケ環の分解行列と量子群の表現	24
14.	西山 亨 氏 (京大・総合人間) Schur duality for Cartan type Lie algebra $W_n$ and transformation semigroup $\mathfrak{T}_m$	28
15.	Bernhard Runge 氏 (Max Planck Institut・阪大) Cycles on complex Shimura varieties	30
16.	永田 雅宜 氏 (岡山理科大・理) Jacobian conjecture について	33
17.	伊藤 敏和 氏 (龍谷大・経済) Poincaré-Dulac の標準形と Seifert 予想	34
18.	Hans Brodersen 氏 (オスロ大) On finitely and infinitely determined map-germs	36
19.	Andrew du Plessis 氏 (アーハス大) Discriminants and vector fields (joint work with C.T.C. Wall)	38
20.	廣川 真男 氏 (東京学芸大) On a generalized Spin-Boson model	39
21.	Herbert Spohn 氏 (ミュンヘン大) Ground state of an atom coupled to the radiation field	41
22.	Ricardo Alfaro 氏 (University of Michigan Flint) On Galois extensions of an Azumaya algebra	43

23.	中井 三留 氏 (名古屋工業大)	
	コンデンサー問題と調和測度 .....	45
24.	井上 淳 氏 (福岡大・理)	
	Trace representation of regular weights on algebras of unbounded operators .....	47
25.	Laszlo Kerchy 氏 (ハンガリー・ボリアイ研究所)	
	Operators with regular norm-sequences .....	49
26.	高橋 眞映 氏 (山形大・工)	
	Korovkin 型近似論 .....	52
27.	広中 由美子 氏 (信州大・理)	
	Spherical functions and local densities on hermitian forms .....	55
28.	佐藤 文広 氏 (立教大・理)	
	Zeta functions of prehomogeneous vector spaces and parabolic subgroup action .....	57
29.	Hubert Rubenthaler 氏 (レイ・バースツール大)	
	Zeta functions associated to certain families of real symmetric spaces .....	59
30.	中尾 慎宏 氏 (九大・数理)	
	局在化した摩擦項をもつ波動方程式の解の減衰について .....	60
31.	上田 哲生 氏 (京大・総合人間)	
	射影空間上の複素力学系と小林計量 .....	62
32.	楫 元 氏 (早稲田大・理工)	
	グレブナー基底は面白い .....	64
33.	佐々木 武 氏 (神戸大・理)	
	線叢の幾何 .....	66
34.	小林 昭七 氏 (カリフォルニア大・慶応大)	
	Subvarieties of Tori .....	68
35.	吉田 正章 氏 (九大・数理)	
	配置空間いじり .....	70
36.	今野 紀雄 氏 (横浜国立大・工)	
	粒子系におけるハリス法と相関不等式 .....	72
37.	種村 秀紀 氏 (千葉大・理)	
	無限粒子系に対応するディリクレ形式の一意性 .....	73
38.	竹田 雅好 氏 (阪大・基礎工)	
	On exponential tails of total occupation times for symmetric Markov processes .....	75
39.	上野 喜三雄 氏 (早稲田大・理工)	
	$ q  = 1$ における $q$ 超幾何差分方程式の積分分解について .....	76
40.	松下 大介 氏 (東大・数理)	
	On a relation among minimal models .....	78
41.	S. Janeczko 氏 (ワルシャワ工科大)	
	On singularities of isotropic submanifolds .....	79
42.	橋本 義武 氏 (大阪市立大・理)	
	重力の正準理論の幾何 .....	81
43.	西村 尚史 氏 (横浜国立大・教育)	
	Characterization of right left equivalence of smooth map germs .....	82
44.	Rauno Aulaskar 氏 (University of Joensuu)	
	On $Q_p$ spaces .....	83
45.	佐久間 一浩 氏 (高知高専)	
	Elimination of singularities and smooth structures of 4-manifolds .....	85

46.	大本 亨 氏 (鹿児島大・理)	
	Isotopy invariants of discriminants of smooth stable mappings .....	88
47.	松崎 克彦 氏 (お茶の水女子大・理)	
	擬フックス群空間の構造 .....	89
48.	小藺 英雄 氏 (名大・多元数理)	
	Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について .....	91
49.	望月 清 氏 (都立大・理)	
	Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations .....	93
50.	伊東 裕也 氏 (電気通信大)	
	不定値行列多項式の因数分解と圧電体の方程式への応用 .....	95
51.	原田 耕一郎 氏 (オハイオ州立大・筑波大)	
	ムーンシャイン加群の既約分解の母関数について .....	97
52.	千代延 大造 氏 (名大・多元数理)	
	行列アンサンブルにあらわれる汎関数に対するある極限定理について .....	99

## 1996年度 談話会・特別講演一覧

1. 4月24日(水) D. W. Robinson 氏 (オーストラリア国立大) Elliptic operators on Lie groups
2. 5月7日(火) \* Mathijs S. Dijkhuizen 氏 (神戸大・理) Quantum complex Grassmannians and BC type multivariable  $q$ -orthogonal polynomials
3. 5月7日(火) Paul Floris 氏 (神戸大・理) Addition formulas for spherical functions on quantum spheres
4. 5月22日(水) \* 高橋 陽一郎 氏 (京大・数理研) Szegő の公式を巡る確率論
5. 6月5日(水) \* 大鹿 健一 氏 (東工大・理) An approach to Marden's conjecture for finitely generated Kleinian groups
6. 6月10日(月) Konstantin Mischaikov 氏 (ジョージア工科大) On the selection of slow diffusion
7. 6月12日(水) \* 志賀 徳造 氏 (東工大・理) 相互作用のある拡散系の最近の話題
8. 6月12日(水) \* 松岡 隆 氏 (鳴門教育大) 2次元力学系の周期軌道と組ひも不変量
9. 6月19日(水) \* 金行 壯二 氏 (上智大・理工) 実単純階別リー環に於けるシルヴェスターの慣性律
10. 6月26日(水) \* Stephen D. Smith 氏 (イリノイ大) Some applications of combinatorics (especially finite geometry) to group cohomology
11. 7月3日(水) \* 角田 秀一郎 氏 (奈良女子大・理) 心の幾何学
12. 7月10日(水) \* 谷崎 俊之 氏 (広島大・理) エルミート対称空間上の超幾何方程式
13. 7月10日(水) \* 吉田 敬之 氏 (京大・理) On absolute CM-periods
14. 7月17日(水) \* 山田 裕史 氏 (北大・理) 被約シューア函数とアフィンリー環の基本表現
15. 8月5日(月) 寺 柚友秀 氏 (東大・数理) A generalization of connection matrix of hypergeometric functions
16. 8月5日(月) \* Charles R. Johnson 氏 (college of William and Mary) Recent results on matrix completion problems
17. 8月14日(水) \* 有木 進 氏 (東京商船大) ヘッケ環の分解行列と量子群の表現
18. 8月15日(木) 席 南華 氏 (中国科学院・京大数理研) Quantum groups at roots of unity
19. 9月10日(火) \* 西山 亨 氏 (京大・総合人間) Schur duality for Cartan type Lie algebra  $W_n$  and transformation semigroup  $\mathfrak{T}_m$
20. 9月11日(水) \* Bernhard Runge 氏 (Max Planck Institut・阪大) Cycles on complex Shimura varieties
21. 9月11日(水) \* 永田 雅宜 氏 (岡山理科大・理) Jacobian conjecture について
22. 9月19日(木) \* 伊藤 敏和 氏 (龍谷大・経済) Poincaré-Dulac の標準形と Seifert 予想
23. 9月26日(木) \* Hans Brodersen 氏 (オスロ大) On finitely and infinitely determined map-germs
24. 9月26日(木) \* Andrew du Plessis 氏 (アーハス大) Discriminants and vector fields (joint work with C.T.C. Wall)
25. 9月27日(金) Leslie Wilson 氏 (ハワイ大) Sufficiency of jets and condition  $t'$
26. 9月27日(金) Washington Marar 氏 (サンパウロ大) On the geometry of finite A-determined germs of maps from  $\mathbb{C}^2$  to  $\mathbb{C}^3$
27. 10月1日(火) \* 廣川 真男 氏 (東京学芸大) On a generalized Spin-Boson model
28. 10月2日(水) \* Herbert Spohn 氏 (ミュンヘン大) Ground state of an atom coupled to the radiation field
29. 10月2日(水) \* Ricardo Alfaro 氏 (University of Michigan Flint) On Galois extensions of an Azumaya algebra

30. 10月 3日 (木) 木下佳樹氏 (電子技術総合研究所) データ精製と代数構造
31. 10月 9日 (水) Peter Érdi 氏 (ハンガリー科学アカデミー) Chaos and bifurcation in neural systems
32. 10月 9日 (水) 辻井正人氏 (北大・理) 一次元力学系の族における分岐について
33. 10月16日 (水) 寺尾宏明氏 (北大・理) 超平面配置と超幾何関数
34. 10月23日 (水) \* 中井三留氏 (名古屋工業大) コンデンサー問題と調和測度
35. 10月30日 (水) \* 井上淳氏 (福岡大・理) Trace representation of regular weights on algebras of unbounded operators
36. 11月11日 (月) \* Laszlo Kerchy 氏 (ハンガリー・ボリアイ研究所) Operators with regular norm-sequences
37. 11月11日 (月) \* 高橋眞映氏 (山形大・工) Korovkin 型近似論
38. 11月11日 (月) \* 広中由美子氏 (信州大・理) Spherical functions and local densities on hermitian forms
39. 11月12日 (火) \* 佐藤文広氏 (立教大・理) Zeta functions of prehomogeneous vector spaces and parabolic subgroup action
40. 11月12日 (火) \* Hubert Rubenthaler 氏 (ルイ・パスツール大) Zeta functions associated to certain families of real symmetric spaces
41. 11月13日 (水) Lê Dũng Tráng 氏 (プロバンス大) Rational singularities and combinatorics
42. 11月18日 (月) Lê Dũng Tráng 氏 (プロバンス大) Sandwich singularities
43. 11月20日 (水) \* 中尾慎宏氏 (九大・数理) 局在化した摩擦項をもつ波動方程式の解の減衰について
44. 11月27日 (水) 松井卓氏 (都立大・理) 量子スピン系のソリトン・セクター
45. 12月18日 (水) \* 上田哲生氏 (京大・総合人間) 射影空間上の複素力学系と小林計量
46. 1月 8日 (水) 平井武氏 (京大・理) 量子物理学に於ける微分同相群のユニタリ表現
47. 1月16日 (木) V. V. Goldberg 氏 (ニュージャージー工科大) Web Geometry: Its past, present, and future
48. 1月20日 (月) \* 楫元氏 (早稲田大・理工) グレブナー基底は面白い
49. 1月21日 (火) \* 佐々木武氏 (神戸大・理) 線叢の幾何
50. 1月22日 (水) \* 小林昭七氏 (カリフォルニア大・慶応大) Subvarieties of Tori
51. 1月29日 (水) \* 吉田正章氏 (九大・数理) 配置空間いじり
52. 2月 3日 (月) \* 今野紀雄氏 (横浜国立大・工) 粒子系におけるハリス法と相関不等式
53. 2月 3日 (月) \* 種村秀紀氏 (千葉大・理) 無限粒子系に対応するディリクレ形式の一意性
54. 2月 3日 (月) \* 竹田雅好氏 (阪大・基礎工) On exponential tails of total occupation times for symmetric Markov processes
55. 2月 4日 (火) \* 上野喜三雄氏 (早稲田大・理工)  $|q|=1$  における  $q$  超幾何差分方程式の積分分解について
56. 2月12日 (水) \* 松下大介氏 (東大・数理) On a relation among minimal models
57. 2月12日 (水) \* S. Janeczko 氏 (ワルシャワ工科大) On singularities of isotropic submanifolds
58. 2月13日 (木) \* 橋本義武氏 (大阪市立大・理) 重力の正準理論の幾何
59. 2月17日 (月) S. Janeczko 氏 (ワルシャワ工科大) Sub-Riemann geometry and nonisolated singularities of Lagrangian projections
60. 2月17日 (月) \* 西村尚史氏 (横浜国立大・教育) Characterization of right left equivalence of smooth map germs

61. 2月17日(月)\* Rauno Aulaskar 氏 (University of Joensuu) On  $Q_p$  spaces
62. 2月17日(月)\* 佐久間 一 浩 氏 (高知高専) Elimination of singularities and smooth structures of 4-manifolds
63. 2月18日(火)\* 大 本 亨 氏 (鹿児島大・理) Isotopy invariants of discriminants of smooth stable mappings
64. 2月18日(火) 塚 田 孝 治 氏 (北大・理院) Optical reticular Lagrangian singularities
65. 2月21日(金)\* 松 崎 克 彦 氏 (お茶の水女子大・理) 擬フックス群空間の構造
66. 2月24日(月)\* 小 藪 英 雄 氏 (名大・多元数理) Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について
67. 2月24日(月)\* 望 月 清 氏 (都立大・理) Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations
68. 2月26日(水)\* 伊 東 裕 也 氏 (電気通信大) 不定値行列多項式の因数分解と圧電体の方程式への応用
69. 3月 5日(水)\* 原 田 耕一郎 氏 (オハイオ州立大・筑波大) ムーンシャイン加群の既約分解の母関数について
70. 3月11日(火) 橋 爪 道 彦 氏 (岡山理科大・理)  $(q_0, q_1)$ -analogue of  $C_0(\mathbb{Z}_+)$
71. 3月18日(火)\* 千代延 大 造 氏 (名大・多元数理) 行列アンサンブルにあらわれる汎関数に対するある極限定理について

QUANTUM COMPLEX GRASSMANNIANS AND BC TYPE  
MULTIVARIABLE  $q$ -ORTHOGONAL POLYNOMIALS

MATHIJS S. DIJKHUIZEN

Department of Mathematics, Faculty of Science,  
Kobe University, Kobe, Japan

Here we shall be concerned with harmonic analysis on some quantum analogues of the complex Grassmannian  $U(n)/U(n-l) \times U(l)$ , which is a compact irreducible Hermitian symmetric space of rank  $l$  with symmetry group  $G = U(n)$ . Let  $\mathfrak{u} = \mathfrak{ig}$  denote the space of Hermitian  $n \times n$  matrices.  $G$  acts on  $\mathfrak{u}$  via the adjoint action  $X \mapsto TXT^*$ . Let  $J \in \mathfrak{u}$  be a Hermitian matrix with two distinct eigenvalues occurring with multiplicities  $n-l$  and  $l$  respectively. Then the stabilizer subgroup of  $J$  in  $G$  is conjugate in  $G$  with  $K = U(n)/U(n-l) \times U(l)$  and the  $G$ -orbit of  $J$  is isomorphic with the complex Grassmannian  $G/K$ .

We shall now discuss a quantum analogue of the above picture. Fix  $0 < q < 1$ . Let  $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_q(U(n))$  denote the quantized algebra of functions on the unitary group with canonical generators  $t_{ij}$ . Similar to the classical situation, there is a quantized algebra  $\mathcal{A}_q(K)$  together with a surjective Hopf  $*$ -algebra morphism  $\mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_q(K)$ . There is a natural right coaction of  $\mathcal{A}_q(K)$  on  $\mathcal{A}_q$ . We denote by  $\mathcal{A}_q(G/K)$  the subalgebra of  $\mathcal{A}_q(K)$ -invariant functions in  $\mathcal{A}_q$ . The comultiplication on  $\mathcal{A}_q$  restricts to a left coaction of  $\mathcal{A}_q$  on  $\mathcal{A}_q(G/K)$ . In short, we now have a quantum analogue of the complex Grassmannian  $G/K$  and its transitive  $U(n)$ -action. Our main objective will be to analyse the quantum symmetric space  $(G/K)_q$  and its zonal spherical functions.

Before proceeding to do this, let us first note that  $(G/K)_q$  can also be realized as a quantum adjoint orbit in a quantum space of  $q$ -Hermitian matrices. Indeed, there is a natural  $*$ -algebra  $\mathcal{C}_q$  generated by elements  $x_{ij}$  satisfying  $x_{ij}^* = x_{ji}$  such that in the limit  $q \rightarrow 1$  one recovers the algebra of polynomial functions on  $\mathfrak{u}(n)$ . The commutation relations between the  $x_{ij}$  are given by a certain matrix equation involving Jimbo's  $R$ -matrix and  $X = (x_{ij})$ . This equation is known in quantum integrable systems theory as the reflection equation. The assignment  $X \mapsto TXT^*$ , when written out in terms of the generators  $x_{ij}$  and  $t_{ij}$ , defines a left coaction of  $\mathcal{A}_q$  on the algebra  $\mathcal{C}_q$ . Let  $J^\infty$  denote the  $n \times n$  matrix defined by  $J^\infty := \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (the entry 1 occurring  $n-l$  times). Then  $J^\infty$  satisfies the reflection equation (with  $X$  replaced by  $J^\infty$ ), in other words the assignment  $x_{ij} \mapsto J_{ij}^\infty$  defines a  $\mathbb{C}$ -valued  $*$ -algebra homomorphism on the non-commutative algebra  $\mathcal{C}_q$ . We shall call  $J^\infty$  a "classical point" in the quantum space of  $q$ -Hermitian matrices. The algebra of functions on the corresponding quantum orbit can be naturally identified with  $\mathcal{A}_q(G/K)$ .

Typeset by  $\mathcal{A}_M\mathcal{S}$ -T $\mathcal{E}$ X

Using the classical branching rules for the subgroup  $K \subset G$ , one can prove in a fairly straightforward way that, for any irreducible finite-dimensional corepresentation  $V$  of  $\mathcal{A}_q$ , the subspace  $V_K$  of  $\mathcal{A}_q(K)$ -fixed vectors is at most one-dimensional. The irreducible corepresentations  $V$  with non-zero  $\mathcal{A}_q(K)$ -fixed vectors are labelled by the same subset  $P_K^+$  of dominant weights as in the classical case. Let  $\mathcal{H}$  denote the subalgebra of  $\mathcal{A}_q(K)$ -biinvariant functions in  $\mathcal{A}_q$ . It has a canonical multiplicity-free simultaneous eigenspace decomposition  $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in P_K^+} \mathcal{H}(\lambda)$  under the action of the center of the quantized universal enveloping algebra  $\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}(n))$ . For every  $\lambda \in P_K^+$ , fix a non-zero element  $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}(\lambda)$  and call it a zonal spherical function. It can be proved that  $\mathcal{H}$  is generated by  $l$  algebraically independent and commuting elements  $m_i \in \mathcal{H}$  ( $1 \leq i \leq l$ ). In particular,  $\mathcal{H}$  is commutative. By sending  $m_i$  to the  $i$ -th elementary symmetric polynomial in the algebra  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_l]$  of polynomials in  $l$  variables  $x_1, \dots, x_l$ , one obtains an algebra isomorphism of  $\mathcal{H}$  onto the algebra of symmetric polynomials in the variables  $x_1, \dots, x_l$ . Under this isomorphism, the zonal spherical functions  $\varphi_\lambda$  are mapped onto a (scalar multiple of) the multivariable little  $q$ -Jacobi polynomials [S1] for certain values of the multiplicity parameters. These results on the quantum Grassmannian  $(G/K)_q$  and its zonal spherical functions are joint work with J.V. Stokman and will appear in a forthcoming paper [DS]. The case  $l = 1$  was dealt with by Noumi, Yamada and Mimachi [NYM]. In this case, the rank of the symmetric space  $G/K$  is equal to 1 and the corresponding zonal spherical functions are expressed as one-variable little  $q$ -Jacobi polynomials, which are a straight-forward  $q$ -analogue of the classical Jacobi polynomials.

Let us devote a few words to the proof of the above results, since it has some intrinsic interest and is radically different from the method used in [NYM]. As discussed above, the quantum Grassmannian  $(G/K)_q$  can be regarded as the quantum adjoint orbit containing the "classical point"  $J^\infty$ . It turns out that there are other quantum adjoint orbits of Grassmannian type that are non-isomorphic with  $(G/K)_q$ . More precisely, there is a one-parameter family of  $n \times n$  matrices  $J^\sigma$  ( $\sigma$  real) satisfying the reflection equation. Each  $J^\sigma$  defines a "classical point" in the quantum space of  $q$ -Hermitian matrices and a corresponding quantum orbit. These quantum orbits, however, cannot be written as the quotient of the quantum unitary group by some stabilizing quantum subgroup. What one can do, though, is write down an infinitesimal stabilizer. More precisely, there is a two-sided coideal  $\mathfrak{k}^\sigma \subset \mathcal{U}_q$  such that the algebra of functions on the quantum orbit through  $J^\sigma$ , when naturally identified with a subalgebra of  $\mathcal{A}_q$ , coincides with the subalgebra  $\mathcal{A}_q(\mathfrak{k}^\sigma \backslash G)$  of left  $\mathfrak{k}^\sigma$ -invariant functions in  $\mathcal{A}_q$ . This subalgebra has a multiplicity-free decomposition under the natural coaction of  $\mathcal{A}_q$  and the irreducible corepresentations occurring with non-zero multiplicity are labelled by  $P_K^+$ . In the limit  $\sigma \rightarrow \infty$ , the matrices  $J^\sigma$  tend to  $J^\infty$ . The notions of  $\mathfrak{k}^\sigma$ -invariance and  $\mathcal{A}_q(K)$ -invariance coincide in the limit.

Given the above, one is naturally led to study left  $\mathfrak{k}^\sigma$ -invariant and right  $\mathfrak{k}^\tau$ -invariant functions in  $\mathcal{A}_q$ . These functions form a subalgebra  $\mathcal{H}^{(\sigma, \tau)}$ , which again naturally decomposes as a direct sum of one-dimensional subspaces  $\mathcal{H}(\lambda)$  ( $\lambda \in P_K^+$ ). Fix non-zero elements  $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}(\lambda)$  and call them zonal  $(\sigma, \tau)$ -spherical functions. Under restriction to the (classical) maximal torus  $\mathbb{T} \subset U_q(n)$ , the algebra  $\mathcal{H}^{(\sigma, \tau)}$  is

mapped injectively onto the algebra of  $W$ -invariant Laurent polynomials in certain variables  $x_1, \dots, x_l$ , where  $W$  is the Weyl group of the restricted root system  $BC_l$  of the symmetric space  $G/K$ . The images of the  $\varphi_\lambda$  under restriction to  $\mathbb{T}$  coincide up to a scalar multiple with a subfamily of multivariable Askey-Wilson polynomials [K2] depending on two continuous parameters  $\sigma, \tau$  and two discrete parameters  $n, l$ . This can be proved by computing the radial part of a suitable Casimir element  $C \in \mathcal{U}_q$  and showing that it essentially coincides with Koornwinder's second-order partial  $q$ -difference operator [K2], which is diagonalized by the multivariable Askey-Wilson polynomials. These results on the quantum Grassmannians  $(\mathfrak{k}^\sigma \backslash G)_q$  are joint work with M. Noumi and T. Sugitani and were announced in [NDS]. A detailed treatment with full proofs of the rank one case (quantum projective spaces), for  $\sigma$  either finite or infinite, can be found in [DN].

In the one-variable case, it has been known for some time (cf. [K3]) that little  $q$ -Jacobi polynomials (for the full range of parameters) can be recovered from Askey-Wilson polynomials  $p_n(x; a, b, c, d \mid q)$  by suitably rescaling the parameters  $a, b, c, d$  and the variable  $x$  and sending one of the parameters to zero. Stokman and Koornwinder [SK], [S2] recently showed that, in a similar way, multivariable little  $q$ -Jacobi polynomials [S1] can be regarded as a limit case of multivariable Askey-Wilson polynomials [K2]. The key observation now is that this limit transition corresponds on the level of quantum Grassmannians to the limit  $\sigma \rightarrow \infty$ . This enables one to prove that  $\mathcal{H}$  is commutative and polynomial in  $l$  generators and to identify the zonal spherical functions as little  $q$ -Jacobi polynomials.

#### REFERENCES

- [DN] M.S. Dijkhuizen, M. Noumi, *A family of quantum projective spaces and related  $q$ -hypergeometric orthogonal polynomials*, preprint (1996).
- [DS] M.S. Dijkhuizen, J.V. Stokman, *Some limit transitions between  $BC$  type  $q$ -orthogonal polynomials interpreted on quantum complex Grassmannians*, preprint (in preparation).
- [K1] T.H. Koornwinder, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type  $BC$* , in: "Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications", ed. D.S.P. Richards, Contemp. Math. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 189-204.
- [K2] ———, *Askey-Wilson polynomials as zonal spherical functions on the  $SU(2)$  quantum group*, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993), no. 3, 795-813.
- [NDS] M. Noumi, M.S. Dijkhuizen, T. Sugitani, *Multivariable Askey-Wilson polynomials and quantum complex Grassmannians*, in: Proceedings of a Workshop on Special Functions,  $q$ -Series and Related Topics, Toronto (1995), Fields Inst. Comm. (to appear).
- [NYM] M. Noumi, H. Yamada, and K. Mimachi, *Finite-dimensional representations of the quantum group  $GL_q(n, \mathbb{C})$  and the zonal spherical functions on  $U_q(n-1) \backslash U_q(n)$* , Japanese J. Math. 19 (1993), no. 1, 31-80.
- [S1] J.V. Stokman, *Multivariable big and little  $q$ -Jacobi polynomials*, Mathematical Preprint Series 95-16, University of Amsterdam (1995), SIAM J. Math. Anal. (to appear).
- [S2] ———, *Two limit transitions involving multivariable  $BC$  type Askey-Wilson polynomials*, in: Proceedings of a Mini-semester on Quantum Groups and Quantum Spaces, Warszawa, Nov. 1995, Banach Center Publications (to appear).
- [SK] J.V. Stokman, T.H. Koornwinder, *Limit transitions for  $BC$  type multivariable orthogonal polynomials*, Mathematical Preprint Series 95-19, University of Amsterdam (1995), Canadian J. Math. (to appear).

# 談話会

## Szegő の公式 に関する確率論

1996.5.22 京大数理論 高橋陽一郎

0. Szegő は Toeplitz 行列に対して, 次の漸近公式を示す (T. (1952))  
 $f \in C^{1+\alpha}(\mathbb{T}^1, (0, \infty))$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-\sqrt{|k|}\theta} d\theta$ ,

$\alpha > 0$  とき,  $n \rightarrow \infty$  とき

$$\log \det (\hat{f}(j-k)_{0 \leq j, k < n}) - n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2$$

ただし,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+z e^{-\sqrt{|k|}\theta}}{1-z e^{-\sqrt{|k|}\theta}} \log f(\theta) d\theta.$$

1. M. Kac 1954 は, この公式は簡単な補題に帰着されることを示し,

次の上3つの公式 (3つとも,  $\alpha$  の連続性仮定) を示している。

$\lambda_j(n)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は  $(\hat{f}(j-k)_{0 \leq j, k < n})$  の固有値とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j(n)^k - \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)^k d\theta \right\} = -2 \sum_{l_1, \dots, l_{k-1}} \max\{0, l_1, l_1+l_2, \dots, l_1+\dots+l_{k-1}\} \hat{f}(l_1) \dots \hat{f}(l_{k-1}) \hat{f}(l_1+\dots+l_{k-1}).$$

2. (上の行列式は 2つの積分作用素の Fredholm 行列式で表すことに注意し,

2. Szegő の公式は, 中心極限定理である。実際,

まず,

$$\det (\hat{f}(j-k)_{0 \leq j, k < n}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\theta_1) \dots f(\theta_n) \prod_{j < k} |e^{\sqrt{|j|}\theta_j} - e^{\sqrt{|k|}\theta_k}| d\theta_1 \dots d\theta_n$$

に注意すると,  $\ln 0$  の漸近公式は, Laplace method の分析であり,  $\neq 1$  に平均場近似が可能であり, 次に, 平均からの差が二次形式  $\frac{1}{4} \sum k |a_k|^2$  と同じことを示している。

3. ところで, 上の行列式は random matrix ensemble の固有値分布として自然に現れ出る。実際, circular orthogonal ensemble,  $CO(n)$  種の各成分が "独立" 一様分布に従う確率変数  $X$  を考え,  $\alpha$  の固有値  $\lambda_j = e^{\sqrt{|j|}\theta_j}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とすると,



# An approach to Marden's conjecture for finitely generated Kleinian groups

大鹿健一

Lie 群  $PSL_2\mathbb{C}$  の離散部分群を Klein 群と称える。Klein 群論における最も重要な未解決問題は次に掲げる Ahlfors 予想である。

**予想 1** 任意の有限生成 Klein 群について、その極限集合  $\subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  は  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  全体であるか、Lebesgue 測度 0 であるかの何れかであろう。

この予想は Lars Ahlfors が 30 年以上前に述べたものであるにも拘わらず、未だに解決されていない。容易な考察により、この予想は torsion-free な Klein 群のみについて考えれば十分であることがわかる。この場合、Ahlfors 予想は、次の Marden 予想を解くことに帰着されることが、Richard Canary によって、1993 年に証明された。

**予想 2**  $G$  を任意の torsion-free, 有限生成 Klein 群とするとき、商多様体  $\mathbb{H}^3/G$  は almost compact であろう。

但しここで、開多様体が almost compact であるというのは、ある compact 多様体の、内部と同相であるという謂である。

講演者はこの Marden 予想を肯定的に解決することを目指し研究を重ねてきたが、解決の戦略の枠組みとして、次のようなものを考えた。まず考えなければならないのは、 $\mathbb{H}^3/G$  が compression body と同相な core を有する場合のみであることがわかる。そこで  $\mathbb{H}^3/G$  を余次元 1 の部分多様体となっているような metric balls  $C_1 \subset C_2 \subset \dots$  の exhaustion として表す。一方、 $\mathbb{H}^3/G$  には disc-busting geodesic という、それと交わらずには  $G$  の自由積分解が行えないような閉測地線が存在することがわかる。このようなものを 1 つ固定し  $\gamma$  とする。さて  $\mathbb{H}^3/G$  が almost compact でなくなり得るのは、無限の  $i$  について、 $C_i$  の handles が  $C_{i+1}$  の中で、knot 或いは link している場合である。しかしながら、このような handle の中に  $\gamma$  が essential に含まれなければ、 $\mathbb{H}^3/G$  はやはり almost compact になる。他方 knot した handle の中に、

$\gamma$ が含まれることは、geodesic knot の simplicity に反する。また、link した handles 中に  $\gamma$  が essential に含まれるという事態が無限の  $i$  について生じたとすると、極小曲面論を使い矛盾が生じる。従って、 $\mathbf{H}^3/G$  は almost compact でなくてはならないことがわかる。

以上が証明方針の大要であるが、細部の検討は未だ完遂されておらず、今後これを詰めていく所存である。

## 相互作用のある拡散系の最近の話題

志賀 徳造 (東京工業大学理学部)

相互作用のある拡散系とは区間の無限直積空間を状態空間とする拡散過程のクラスであり、物理や生物の確率モデルに豊富な例をもつ。それは次の形の確率微分方程式または発展方程式で与えられる。

$I$  を区間  $[0, 1]$   $[0, \infty)$   $(-\infty, \infty)$  のいずれかとし  $S$  を  $Z^d$  のような格子空間とする。 $S$  上の実行列  $A = (A_{ij})_{i,j \in S}$  および関数  $a(x) : I \rightarrow R$  に対して次の確率微分方程式の定める確率過程  $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}$  を相互作用のある拡散系という。

$$dx_i(t) = \sum_{j \in S} A_{ij} x_j(t) dt + a(x_i(t)) dW_i(t) \quad (i \in S).$$

ここで  $\{W_i(t)\}_{i \in S}$  は独立なブラウン運動である。この確率過程  $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}$  の分布  $u(t, d\mathbf{x})$  は次の発展方程式の解である。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = L^* u(t, \mathbf{x}) \quad (t \geq 1, \mathbf{x} \in I^S),$$

ここで

$$Lf(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} a(x_i)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i \in S} \left( \sum_{j \in S} A_{ij} x_j \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

相互作用のある拡散系の興味は係数  $a(x)$  と行列  $A$  によっていろいろな現象があらわれることにある。この講演では次の問題について相互作用のある拡散系の最近の発展を論じたい。

- (1) 定常分布をすべて求める問題。(定常分布は一意とは限らないのですべての定常分布を記述すること。)
- (2) 軌道の漸近的挙動。(とくに軌道のリヤブノフ指数のパラメータに関する漸近解析)
- (3) 有限系と無限系の関係。(有限系と無限系のエルゴード的挙動は全く異なるが、有限系をサイズに応じた時間スケールで見ることにより、無限系のエルゴード的挙動を観察できる。)

## 2次元力学系の周期軌道と組ひも不変量

1996.6.12 鳴門教育大 松岡 隆

近年、結び目 (knot), 組ひも (braid) のような低次元トポロジーの概念・手法を用いた力学系理論の研究が活発に行われてきている。周期軌道がなす結び目の研究は、1970年代末から始められ、その中心をなすテンプレート理論は、3次元自励的常微分方程式系のアトラクターの幾何学的構造を理解するために有効な手段として活用されている。

一方、周期軌道の組ひも不変量は、結び目の場合より少し遅れ、1980年代初め頃から盛んに研究されるようになった。「組ひも」は「結び目」とは非常に近い関係にある概念であるが、力学系への応用という面では、全く異なった個性をもち、両者の問題意識、研究課題、手法にはほとんど共通点が無いといってよい。

ここでは、組ひも不変量とその応用について、現在までの研究の流れを概観する。

### 1. 1次元力学系

組ひも不変量に関するこれまでの研究によって、2次元力学系の構造と1次元力学系の構造との間に、大きな類似点が存在することが分かってきた。そこで、まず、1次元力学系について知られている主な事項を簡単に紹介する。

1次元写像の周期点の特性のうち最も簡単なものとして、その最小周期（以後、単に周期という）が考えられるが、周期に関して次の定理が成り立つ。 $f$ を区間  $I$  からそれ自身への連続写像とする。

定理 ( Sharkovskii 1964 ) 自然数全体にシャルコフスキー順序と呼ばれる全順序が定義される。もし  $f$  が周期が  $n$  である周期点をもてば、 $f$  はシャルコフスキー順序に関し  $n$  より小さい任意の自然数  $m$  に対し、 $m$  を周期とする周期点をもつ。

上の定理によって、 $f$  が周期が2のべきでない周期点をもつならば、 $f$  は無限個の周期点をもつことが分かるが、これは  $f$  が力学系的に‘複雑’であることを示唆している。実際、次の事実が成り立つ。

定理 ( Bowen and Franks 1976, Misiurewicz 1979 )

$f$  のトポロジカル・エントロピーを  $h(f)$  とかくとき、

$$h(f) > 0 \iff f \text{ に周期が } 2 \text{ のべきでない周期点が存在する。}$$

周期より更に詳しい情報をもつものとして、周期点の置換型があるが、置換型の詳しい研究、特にシャルコフスキーの定理の精密化に関する研究が現在進展中である。

## 2. 2次元写像と組ひも不変量

1次元写像の周期点の特性は周期で表されたが、2次元の場合、その特性は組ひもを用いて表される。以後、写像  $f$  の定義域は円板  $D$  とし、 $f$  は単射とする。  $n$  本のひもからなる組ひもを  $n$  次組ひも ( $n$ -braid) という。連続変形で移り合う2つの  $n$  次組ひもを同値とみなすとき、この同値関係に関する同値類を  $n$  次組ひも型 ( $n$ -braid type) という。

定義.  $S$  を  $f$  の有限不変集合とし、 $n$  を  $S$  の個数  $\sharp S$  とする。恒等写像  $id_D$  を  $f$  に変形するイソトピー  $f_t: D \rightarrow D$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) を1つ選ぶ。(このようなイソトピーは常に存在することが知られている) このとき、空間  $D \times [0, 1]$  内の  $n$  本の曲線の集まり

$$\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(S) \times \{t\})$$

は  $n$  次組ひもを定義する。これが定める組ひも型を  $bt(S, f)$  と表し、 $S$  の組ひも型という。

既に見たように、1次元の場合、周期を素因数分解したときに現れる成分が重要な情報をもっていた。(「周期  $n$  が2のべきで無い  $\iff n$  を素因数分解したときその成分に奇素数が存在」に注意)。2次元の場合でも、組ひもを素なものに「分解」することが重要である。この分解は、曲面上の同相写像に関するニールセン・サーストン分解と呼ばれるものを、組ひもの言葉に翻訳することによって得られる。このとき、分解の結果として現れる既約成分(素な成分)として、有限位数型、擬アノソフ(pseudo-Anosov)型の2種類のものが存在する。

定理(本質的に Thurston による)  $S$  の組ひも型  $bt(S, f)$  が pA 成分をもつ。

- $\implies$  (1)  $h(f) > 0$   
 (2)  $f$  は周期の異なる無限個の周期点をもつ。

この定理は、1次元で成立する事実が、「周期」を「組ひも」と置き換え、また「奇素数」を「pA成分」と置き換えれば2次元でも同様に成立することを示している。

以上の他に、組ひも型について次のような研究が行われてきた。

- (1) 組ひもを既約分解するアルゴリズムは、現在までに3種類開発されているが、一般にその実行には膨大な時間がかかる。
- (2) pA成分をもつための簡単な充分条件が求められている( $S$ の周期が奇素数  $\geq 5$  のとき (Boyland 1984),  $\sharp S = 3$  の場合の必要充分条件 (Matsuoka 1986) など)。
- (3) シャルコフスキーの定理の2次元版を作る試みが行われ、部分的な成果が出ている。
- (4) 組ひもの古典的な行列表現である Burau 表現を用いて、周期点のトポロジカルな性質(不動点指数, リンク数)が調べられている。
- (5) Burau 行列のスペクトル半径を用いて  $f$  のエントロピーの下からの評価が与えられた。(Fried 1986)
- (6) 組ひも不変量を用いて、ハミルトン力学系の研究において重要な役割を果たすツイスト写像の力学系の構造が調べられている。更に、ツイスト写像の理論を一般の円環上の力学系に拡張している。(Boyland ら)

### 参考文献

P. Boyland, Topological methods in surface dynamics, *Topology and its Appl.*, **58** (1994), 223-298.

# 北大数学専攻談話会 ABSTRACT

実単純階別リー環に於けるシルヴェスターの慣性律  
1996.6.19 上智大・理工 金行社二

実対称行列と正則行列で標準形  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$  に移す事が出来, この標準形は一意的に定まる, というシルヴェスターの慣性律は階別リー環 (GLA と略記)  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$  において,  $\mathfrak{g}_0$  に対応する群が  $\mathfrak{g}_{-1}$  に作用する時の軌道分解を求めると云う風と解釈出来る. これを一般化して次の問題を考える:

問題,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$  を実単純 GLA とし,  $G_0$  をこの階別付けを保つ  $\mathfrak{g}$  の自己同型の為す群,  $G_0^\circ$  をその単位元の連結成分とする ( $\text{Lie } G_0 = \mathfrak{g}_0$ ). この時,  $\mathfrak{g}_{-1}$  の  $G_0^\circ$  軌道分解と  $G_0$  軌道分解を求めよ.

GLA, Jordan 3項積 (JTS と略記), Jordan 代数の理論を用いて, この問題に解答を与える事が出来る. 組  $(G_0, \mathfrak{g}_{-1})$  は実 GLA  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$  は 18 個あり, これらは対称  $\mathbb{R}$  空間と 1 対 1 に対応している. その対称空間の階数  $r$  とする.  $\mathfrak{g}_{-1}$  にはコンパクト単純 JTS の構造が入る事が知られている. この時,  $\mathfrak{g}_{-1}$  の直交冪等元の極大系  $e_1, \dots, e_r$  を用いて,  $G_0^\circ$  軌道の代表元の候補を作る事が出来る. 同次元の  $G_0^\circ$  軌道の合併を  $V_i$  の小なる方から番号を付したものを  $V_0 = \{0\}, V_1, \dots$

...,  $V_r$  とする ( $r$ 個存在する).  $V_r$  は  $G_0^0$  軌道の合併である.  
各  $V_i$  は JTS の言葉で式で記述出来, それより  $g_1 =$   
 $V_0 \perp \dots \perp V_r$  は  $g_1$  の成層分解になる事が解る. 各  $V_i$  を更に

$G_0^0$  軌道に分ける為には, 対称  $R$  空間のルート系が (1) A型,  
(2) B, BC, C型, (3) D型 に分けよう考える必要がある. 各  $G_0^0$   
軌道は  $R^+$  の作用で不変, 特に  $G_0^0$  軌道は必ずしも凸でない  
円錐体である. 軌道分解の応用として,

(1) 単純リー群の擬エルミート対称空間の或る類の各々は  
あるザリスキー閉集合を除いて, 上述の円錐体上の等質ジ-  
ゲル領域として表わされる.

(2)  $G_0^0$  特異軌道の合併は一般化された共形構造と対称  $R$  空  
間上に誘起する. 田中昇氏の理論を適用して, この共形構造  
の自己同型群を決定する事が出来る (Gindikin-Kaneyuki,  
1995). これは共形幾何での Liouville の定理の拡張と考へら  
れる.

Some applications of combinatorics (especially finite geometry)  
to group cohomology

Colloquium  
Hokkaido University  
26 June 1996

Stephen D. Smith  
University of Illinois at Chicago

Recently group cohomologists have become interested in sporadic simple groups, discovering connections with certain exotic behavior in algebraic topology. Some of their work involves group geometries defined by  $p$ -local subgroups (normalizers of  $p$ -groups) --- which had already been studied to explain exotic phenomena in group theory.

The talk surveys three areas of applications of these geometries to group cohomology:

- 1) Vanishing of  $H^1$  of certain modules
- 2) Expressions of  $H^*(G)$  as the INTERSECTION of  $H^*$  of certain subgroups
- 3) Expressions of  $H^*(G)$  as the ALTERNATING SUM of  $H^*$  of certain subgroups

It is emphasized that not only can the group theory assist in computation of cohomology,  
but also the cohomology illuminates the study of the group structure.

北大理数談話会アブストラクト (7/3/96)

題目：心の幾何学

講演者：角田秀一郎 (奈良女子大・理)

従来の科学は、基本的に「説明」することを目標にしている。とくに、自然科学では、「なぜ」、「どうして」がキーワードである。この立脚点は、すべてが物質（あるいはもっと素朴に「もの」）で構成されているという事実である。まさに、これは、物理学のおおもとである。したがって、脳で意識などを説明するというのも、大きく言って、この科学の範疇に属する。自我を脳の働きで完全に説明することなどは、現時点では、困難だと思われるが、その困難は科学の進歩によって、解消されていくと信じられているし、実際そうなるであろう。

しかし、それはあくまで「われわれが物理世界に存在している」という仮説の上の話である。この点については、誤解を招く恐れがあるので、少し詳しく説明する。物理世界とそのなかのわれわれ人間が存在することを疑っているわけではない。いまのところ、数学の世界で扱う集合は、物理世界よりはるかに広い。そして、数学のなかの論理的世界が存在することも事実である。標数正のような奇妙な世界を論理的矛盾があつてそれゆえ存在しない世界とはだれも思わない。（その研究に意味があると思うかどうかはまた別の問題である）

物理世界があれば、そのなかで話を進めればよいように思われるが、じつはそうではない。なぜなら、物理世界が、われわれが存在するためのただ一つの「モデル」かどうかわからないからである。（ここでのモデルということばは素朴な意味で使っており、厳密な意味を与えているわけではない）このことは、物理世界を仮定しても、すぐにわかる。

まず、脳の働きでわれわれの意識をはじめとする精神活動が記述されたとする。これは、ようするに、脳でおこっているなにかが、意識と呼ばれるなものに「対応する」という意味である。たとえば、完全な脳死状態では自分がベッドで寝ているという意識がない、などを仮定していることになる。こう仮定すると、われわれは、脳を通じてしか、外界についての情報をうるることができないことになる。錯覚が示すように、外界が実際どうなっているか、確かなことはわからないことになる。それどころか、直接間接に脳になんらかの情報がこない限り、外界が存在することさえ不確実なのである。逆にいえば、外界がなくとも、脳のなんらかの動きがあればよいことになる。なんらかの働きのモデルがあれば、それがわれわれかもしれない。すくなくとも、物理世界は、われわれが存在するモデルのなかで「極小」ではないことになる。もちろん、先に述べた仮説のもとでの話である。この先、極小モデル目指して、モデルをどんどん小さくしていくことが可能であるが、ここでストップする。注意したいのは、脳の現象を科学的に説明しようとするれば、極小モデルではうまくいかないかもしれない。記憶などは、極小モデルでは意味すらなくなる。

モデルが複数あるとすれば、モデルがどれだけあるかを知ろうとするのは当然のことである。そのなかで、極小のものだけをとるのも自然である。物理世界に、それとは無関係に論理矛盾のない「神様」を無数に付け加えることができるから、いくらでも大きくすることができる。これらは、ほとんど意味がない。

物理世界とはことなるモデルはあるかといえば、それは存在する。詳しく述べることはしないが、いわゆる錯覚がじつは錯覚ではないというモデルが容易につくれる。もちろん、これはほとんどすべての物理法則が成立しないモデルである。物理モデルがいろいろな意味で、優れたモデルであることは人類の科学の歴史をみれば、自明である。ここで問題にしているのは、モデル優劣ではなく、モデルになっているかどうかだけである。

心については説明が不要かというところではない。心についての説明は文系的説明と考えられる。すなわち、事実の集約としての説明である。

さて、このような心の問題を記述する数学を考えてみる。モデルが変われば、数学も変わりうるので、ここでは、物理モデルを仮定したうえで、考えられる極小モデルの記述を考察する。

この場合、数学として新しいものがでてきてはいない。しかし、重要なことは、いままでの数学の見方は、異なるのである。例でみてみよう。

りんごが落ちる状況は、2次関数で記述される。ところがわれわれが問題にするのは、「2次関数とはなにか」ということである。2次関数をつくるために実数は必要ではない。適当な有界集合があればよい。また、実数濃度は必要ない。実際、十分細かい有限集合であれば、実数の場合と区別できない。このように、2次関数とはなにかについてもいろいろな問題があるのである。

これで十分というのではなく（これも重要であるが）、なにが必要かがむしろ中心議題となる。

もちろん、いままでの数学でもある定理の条件はどこまで落とせるかなどという形で、必要性はある程度考慮されていた。しかし、証明のなかで外延性の公理が何回必要かなどはほとんど検討されることがないように思われる。

ここで、さらに、精神活動は、脳の状態のなかでもニューロンが発火（神経細胞の電位変化）しているかいないかだけできまる、と仮定する。この仮定の妥当性には疑問があるが、発火だけでどのくらい、意識を記述できるか、を考えていると思えばよい。

このように仮定すると、意識の記述は、標数2の素体上のベクトル空間の点あるいは多様体と考えることができる。これによると、心に関する多くの問題が、多様体の問題に帰着する。

たとえば、「りんごが木から落ちる」という現象の記述は、多様体の「デサント」という概念で表現できるし、「単語」は、多様体の族に対応する。人が「りんごが木から落ちる」をみたときのニューロンの発火パターンをすべて考える。それ全体は、 $S^1$ の部分多様体となる。これを求めればそれでよいとも言える。ここにあるのは、現実のりんごの羅列のみである。しかし、ことばの問題としては、その部分多様体の本質的でない部分を削るか、という問題が残る。つまり、アメリカであれ、中国であれ、北海道であれ、りんごが落ちれば、それはりんごが落ちたことであるから、りんごのある場所は本質的ではない。この部分を記述から落とすことは、多様体の理論では、デサントと呼ばれるものに対応する。簡単にいえば、変数を減らすことである。

もちろん、上で述べたように、この定義には、（時間軸に関する）普遍性がない。いいかえれば、その時々によって、「りんごが落ちる」という意味が変わりうる。時間普遍性をもつ「りんごが落ちる」という概念を抽出しようというのは、別の学問分野、評論家、に任せるとするのが、われわれの立場である。

数学的には、標数2の代数多様体の素体有理点だけを考えていることになる。この集合は有限であるが、多様体としての「構造」が入り、ハミング距離と呼ばれるユークリッド距離に対応する距離もあり、リーマン計量も定義できる（筆者の学位論文）。じつは、標数正の有限代数多様体で記述される現象が他にもある。人間に関係する現象の記述には、標数正の多様体の方が相性がよいようである。とにかく、心の研究と多様体の研究は、すくなくとも、しばらくの間、相互に関連しながら進んでいくものと思われる。

## エルミート対称空間上の超幾何方程式

広島大学理学部 谷崎俊之

0. Gelfand ([2], [3]) により導入されたグラスマン多様体上の一般超幾何微分方程式系の群論的意味を明らかにすると共に, その新たな拡張を与えることが目標である.

1.  $V$  を  $C$  上の有限次元ベクトル空間,  $X$  を  $V$  中の  $k$  次元部分空間全体からなるグラスマン多様体とする.  $X$  上の直積型ベクトル束  $X \times \wedge^k V$  の階数 1 の部分束  $L$  を  $W \in X$  におけるファイバーが  $\wedge^k W$  となるものとして定める. このとき, 群  $G = SL(V)$  が  $X$  に推移的に作用しており, また  $L$  は  $X$  上の  $G$  同変直線束である.  $L$  の切断に作用する微分作用素のなす環の層を  $D_{X,L}$  とする.  $G$  の  $L$  への作用を微分して, リー代数の準同型  $\mathfrak{g} = Lie(G) \rightarrow \Gamma(X, D_{X,L})$  ( $a \mapsto \partial_a^L$ ) が定まる.  $G$  の極大トーラス  $K$  を一つ固定し  $\mathfrak{k} = Lie(K)$  とする. いわゆるゲルファント超幾何方程式は  $L$  の切断を未知関数とする線形微分方程式であり, 従って  $D_{X,L}$  加群に対応しているが, それは次の形をしている:

$$(1) \quad M_\xi = D_{X,L} / (J + \sum_{a \in \mathfrak{k}} D_{X,L}(\partial_a^L - \xi(a))).$$

ここで  $\xi$  は任意の (一つ固定した)  $\mathfrak{k}$  の指標, また  $J$  は  $D_{X,L}$  のある  $G$  不変左イデアルである.

2. 次の観察が我々の出発点である:  $D_{X,L}$  の  $G$  不変左イデアルの集合と, ある (ヴァーマ加群と呼ばれる)  $\mathfrak{g}$  加群の部分加群の集合は, 1 対 1 に対応し, この対応の元で, 上にでてきた  $J$  は極大真部分加群に対応する. 従って, 以下のような拡張が考えられる.

$G$  を  $C$  上の連結半単純代数群,  $P$  を  $G$  の放物型部分群とし, 一般旗多様体  $X = G/P$  を考える.  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ ,  $\mathfrak{p} = Lie(P)$  とおく.  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  に対して  $X$  上の捻れ微分作用素の層  $D_{X,\lambda}$  およびリー代数の準同型  $\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(X, D_{X,\lambda})$  ( $a \mapsto \partial_a^\lambda$ ) が定まる ([1] 参照). このとき,  $D_{X,\lambda}$  の  $G$  不変左イデアルの集合と,  $\lambda$  に対応する 1 次元  $\mathfrak{p}$  加群を誘導してできる右  $\mathfrak{g}$  加群  $M(\lambda)$  の部分加群の集合とは, 1 対 1 に対応する.  $J_\lambda$  を  $D_{X,\lambda}$  の  $G$  不変左イデアルであって,  $M(\lambda)$  の極大真部分加群に対応するものとする.  $K$  を  $G$  の閉部分群とし,  $\mathfrak{k} = Lie(K)$  の指標  $\xi$  を選ぶとき, 左  $D_{X,\lambda}$  加群

$$(2) \quad M_{\lambda,K,\xi} = D_{X,\lambda} / (J_\lambda + \sum_{a \in \mathfrak{k}} D_{X,\lambda}(\partial_a^\lambda - \xi(a)))$$

は(1)のひとつの拡張になっている。しかし、(2)が面白い方程式であるためには  $G, P, \lambda, K$ , および  $i$  の取り方をうまく与えなければならない。実際、 $\lambda$  が一般なら、 $J_i da = 0$  である。

以下、 $P$  のべき単根基が可換な場合に話を限ることにする。この場合には  $\mathfrak{p}$  の指標からなる有限集合  $A$  があって、 $\lambda \in A$  に対する  $J_\lambda$  の具体的表示が存在する。

我々の結果は次のとおり: ある種の  $\lambda \in A$  に対して、 $G$  の別の放物型部分群  $Q = Q_\lambda$  および  $\text{Lie}(Q)$  の指標  $\mu = \mu_\lambda$  であって、以下の条件を満たすものがとれる。 $Y = G/Q$  上の捻れ微分作用素の層であって  $\mu$  に対応するものを  $D_{Y,\mu}$  とする。左  $D_{Y,\mu}$  加群  $N$  に対してそのラドン変換  $R(N)$  が  $D_{X,\lambda}$  加群 (の複体) として定まる。 $N_{\mu,K,\xi} = D_{Y,\mu} / \sum_{a \in \mathfrak{t}} D_{Y,\mu}(\partial_a^\mu - \xi(a))$  とおく。このとき自然な準同型  $M_{\lambda,K,\xi} \rightarrow R(N_{\mu,K,\xi})$  が定まる。(これは  $M_{\lambda,K,\xi}$  に対応する微分方程式の解の積分表示を与える)。またさらに、 $Y$  が有限個の  $K$  軌道からなるならば、 $M_{\lambda,K,\xi}$  はホロノミー系である (これにより解空間は有限次元であることがわかる)。

## 参考文献

- [1] A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.
- [2] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 573-577.
- [3] I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, Generalized hypergeometric equations, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 643-646.
- [4] M. Kashiwara, Representation theory and  $D$ -modules on flag varieties, Astérisque., **173-174** (1989), 55-109.
- [5] T. Tanisaki, Certain differential equations on Hermitian symmetric spaces, preprint 1996.

## On absolute CM-periods

吉田敬之 (京大理)

$K$  を CM 体,  $F$  を  $K$  の最大実部分体とする.  $\chi$  を 2 次拡大  $K/F$  に対応する  $F_A^\times$  の Hecke character,  $L_F(s, \chi)$  を  $\chi$  の  $L$  函数とする.

$$P = \exp\left(\frac{L'_F(0, \chi)}{L_F(0, \chi)}\right)$$

とおく. このとき

CONJECTURE A.

$$P \sim \pi^{[K:\mathbf{Q}]/2} \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \sigma)$$

が予想される. ここに  $p_K$  は Shimura [2] で導入された period symbol であり,  $K$  による虚数乗法をもつアーベル多様体の周期を分解することにより定義される.  $J_K$  は  $K$  から  $\mathbf{C}$  の中への同型写像全体の集合を表す.  $a, b \in \mathbf{C}$  に対し,  $a \sim b$  は  $b \neq 0, a/b \in \overline{\mathbf{Q}}$  を表す.

$\mathfrak{f}$  を  $K$  の integral ideal とし,  $K$  の modulo  $\mathfrak{f}$  の ideal group を  $I_{\mathfrak{f}}(K)$  とかく.  $\lambda$  は  $I_{\mathfrak{f}}(K)$  の character で

$$\lambda((\alpha)) = \prod_{\sigma \in \Phi} \left(\frac{\alpha^{\sigma\rho}}{|\alpha^\sigma|}\right)^{t_\sigma}, \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\times \mathfrak{f}}$$

をみたすとする. ここに  $\Phi$  は  $K$  の CM-type,  $t_\sigma$  は non-negative integers であり,  $\rho$  は complex conjugation である. (このような  $\lambda$  を  $I_{\mathfrak{f}}(K)$  の量指標という.)

THEOREM (SHIMURA [1], [2]).  $m \in \mathbf{Z}$  が,  $\forall \sigma \in \Phi$  に対して,  $m \equiv t_\sigma \pmod{2}$ ,  $-t_\sigma < m \leq t_\sigma$  をみたすならば

$$L(m/2, \lambda) \sim \pi^{e/2} p_K\left(\sum_{\sigma \in \Phi} t_\sigma \cdot \sigma, \Phi\right), \quad e = m[F:\mathbf{Q}] + \sum_{\sigma \in \Phi} t_\sigma.$$

この Theorem を用いて, Conjecture A を数値実験で試すことができる. 談話会では, 筆者が最初に試みたやや複雑な例について述べたが, ここでは簡単な example を書いておこう.

数値例  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3+2\sqrt{2}}i)$ ,  $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$  とする.  $K$  の類数は 2 であり, ideal  $(\sqrt{2})$  が分岐した  $K$  の prime ideal  $\mathfrak{p}_2$  が non-principal class を与える.  $\sigma \in J_K$  を  $(\sqrt{3+2\sqrt{2}}i)^\sigma = \sqrt{3-2\sqrt{2}}i$  で定める. Theorem で  $t_\sigma = 2, \forall \sigma \in \Phi$ ,  $\mathfrak{f} = (1)$  とし, CM-type として  $\Phi = \{\text{id}, \sigma\}, \{\text{id}, \sigma\rho\}$  ととって得られる  $I_{\mathfrak{f}}(K)$  の character をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  とする.  $\lambda_i$  は  $\lambda_i(\mathfrak{p}_2) = \pm 1$  に応じて 2 通りの取り方がある. Theorem により

$$L(1, \lambda_1) \sim \pi^4 p_K(2 \cdot \text{id} + 2 \cdot \sigma, \text{id} + \sigma), \quad L(1, \lambda_2) \sim \pi^4 p_K(2 \cdot \text{id} + 2 \cdot \sigma\rho, \text{id} + \sigma\rho)$$

であるが,  $p_K$  の性質を用いると ([2], Theorem 1.1)

$$L(1, \lambda_1)L(1, \lambda_2) \sim \pi^8 \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \sigma)$$

がわかる. 故に Conjecture A は  $L(1, \lambda_1)L(1, \lambda_2) \sim \pi^4 P^2$  と同値である. 数値計算により

$$(1) \quad \frac{L(1, \lambda_1)L(1, \lambda_2)}{\pi^4 P^2} = \begin{cases} 3/2^3, & \lambda_1(\mathfrak{P}_2) = \lambda_2(\mathfrak{P}_2) = 1, \\ \sqrt{2}/(2^2 \cdot 3), & \lambda_1(\mathfrak{P}_2) = \lambda_2(\mathfrak{P}_2) = -1 \end{cases}$$

が成り立つことが強く suggest される. (約 30 桁一致する.)

その他多くの例から, (1) の左辺のような量の代数性を予測するには,  $P$  を Galois 群の作用を受けない “absolute CM-period” とみて量指標  $\lambda_i$  に形式的に Galois 群を作用させるとよいことが示唆される. この予想の 1 つの定式化を与えておこう.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は  $I_f(K)$  の量指標で, Shimura の定理と Conjecture A から  $p_K$  の性質を用いて

$$\prod_{i=1}^n L(m/2, \lambda_i) \sim \pi^A P^e$$

が導かれたとする. ここに  $A, e \in 2^{-1}\mathbf{Z}$  とする.

CONJECTURE B. 任意の  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{C})$  に対して, 1 のべき根  $\zeta$  があって

$$\left( \frac{\prod_{i=1}^n L(m/2, \lambda_i)}{\pi^A P^e} \right)^\sigma = \zeta \cdot \frac{\prod_{i=1}^n L(m/2, \lambda_i^\sigma)}{\pi^A P^e}$$

が成り立つ.

PROBLEM.  $\zeta$  はどのように決まっているか.

$\zeta$  を決めることは, 一種の相互法則である.

THEOREM.  $K$  が虚 2 次体のとき, Conjecture B は成り立つ.

この場合には  $\zeta$  はほぼ具体的に決定できる.  $K$  が一般の CM 体の時も motive 理論により  $\zeta$  の形をある程度は予想できる.

#### 文献

- [1] G. Shimura, On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Ann. of Math., 102(1975), 491–515.
- [2] G. Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math., 111(1980), 313–375.

## 被約シューア函数とアフィンリー環の基本表現

山田裕史 (北大・理)

最近、といってももう昨年のこととなりますが、 $A_{r-1}^{(1)}$ 型のアフィンリー環の基本表現の多項式環上の実現についてちょっと面白い現象を見つけましたので報告いたします。これは東京商船大の有木進氏と明海大の中島達洋氏との共同研究です。

きっかけはKdV方程式系でした。 $A_1^{(1)}$ 、すなわち $sl_2$ の基本表現が(大雑把に言って)KdV方程式系の解の変換を与えるというのが1980年代初頭の京都スクールの理論(の一部)であったわけですが、そこには特徴的な形のヤング図形に付随するシューア函数が登場します。もう少しだけ詳しく書きましょう。 $V = \mathbb{C}[t_j; j \geq 1, \text{odd}]$ という無限変数の多項式環を準備します。 $V$ 上の作用素 $\partial/\partial t_j$ 、 $t_j$ (かけ算) ( $j \geq 1, \text{odd}$ )は無有限次元ハイゼンベルグ・リー環をなしますが、これに“頂点作用素”の斉次成分を付け加えたリー環が $A_1^{(1)}$ である、正確に言うとこれが $A_1^{(1)}$ の $V$ 上の基本表現を与える、というのが1978年のLepowskyとWilsonの発見でした。基本表現というのは最高ウェイト表現のひとつで、その最高ウェイトは通常 $\Lambda_0$ と書かれます。この表現のウェイトの分布は良く知られていて、

$$P = \{\Lambda_0 - q\delta + p\alpha_1; p, q \in \mathbb{Z}, q \geq p^2\}$$

がその全体になります。ここで $\alpha_0$ と $\alpha_1$ は単純ルート、 $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$ は基本虚ルートです。放物線 $q = p^2$ 上のウェイト $\Lambda$ は $\Lambda + \delta \notin P$ という意味で、極大ウェイトと呼ばれます。極大ウェイトの全体は最高ウェイト $\Lambda_0$ を通るWeyl群の軌道になっています。京都スクールの発見は、 $V$ 上に基本表現を実現したとき極大ウェイトのウェイトベクトルが階段型のヤング図形 $\kappa_r = (r, r-1, r-2, \dots, 2, 1)$  ( $r \in \mathbb{N}$ )に付随するシューア函数で与えられ、これらはKdV方程式系の斉次多項式解を尽くすという事実でした。ここでシューア函数と言っているのは、いわゆる対称函数としてのシューア函数を巾和 $t_j = (x_1^j + x_2^j + \dots)/j$ を用いて書き直したものです。

そこで私は次のような問題を考えました。 $V$ の一般のウェイトベクトルはシューア函数を用いてどのように書き表されるだろうか?もちろんシューア函

数全体は  $V$  を張っているので一次結合で書かれることはわかります。“良い基底”を求めようというのが問題です。一般に、ヤング図形を与えるとそのシューア関数は  $t_1, t_2, t_3, \dots$  の多項式になり、 $V$  の元とは限りません。そこでシューア関数において“手で”  $t_2 = t_4 = t_6 = \dots = 0$  と置いて  $V$  の元をつくります。このような手続きで得られた多項式を“被約シューア関数”と呼びます。一般に被約シューア関数はウエイトベクトルになります。どのウエイトに属するかは与えられたヤング図形の“2-core”を見ればわかります。また、変数を落しているので一次独立性はくずれており、したがってウエイト空間の基底を選ぶには手続きが必要になります。そのために今度はヤング図形の“2-quotient”という概念が必要となります。このようにして得られた基底で、一般の被約シューア関数を展開すると、Littlewood-Richardson 係数が登場します。

この辺りのことをお話ししたいと思います。この結果は見方を変えれば、対称群の指標表、モジュラー表現の分解行列に関するある情報を与えることにもなっています。 $A_1^{(1)}$  だけでなく、 $A_{r-1}^{(1)}$  や  $A_{2\ell}^{(2)}$  についてもほぼ同様の議論ができることもわかっています。ただし  $A_{2\ell}^{(2)}$  では、シューア関数ではなくてシューアの“ $Q$ -関数”というものがウエイトベクトルとして登場します。やさしい話で誰でも理解できると信じています。

# Recent Results on Matrix Completion Problems

Charles R. Johnson  
College of William and Mary  
Virginia, USA

A partial matrix is a rectangular array in which some entries are specified, while the remaining entries are free to be chosen from an agreed upon set. A completion of a partial matrix is a choice of values for the unspecified entries, resulting in a conventional matrix. Given a property  $P$ , a matrix completion problem asks which partial matrices have a completion with property  $P$ . For example, the positive definite completion problem asks which partial (Hermitian) matrices have a positive definite completion. Since positive definiteness is inherited by principal submatrices, an obvious necessary condition is that every fully specified principal submatrix is positive definite. A partial Hermitian matrix meeting this condition is called partial positive definite, and similar inheritance features and terminology appear in other completion problems. Completion problems arise in a variety of applications as well play a natural role in theory.

It is convenient to describe the positions of the specified entries in a partial matrix via a graph, and graph theory plays a key role in completion theory. An undirected graph is chordal if it has no induced cycle of 4 or more vertices.

We survey fundamental ideas in completion theory and then focus upon results about the positive definite completion problem as good examples of the subject. For example, each

partial positive definite matrix with graph  $G$  has a positive definite completion if and only if  $G$  is chordal. Furthermore, any partial positive definite matrix  $A$  that has a positive definite completion has a unique determinate maximizing completion, and that completion is characterized by having 0's in its inverse in all the unspecified positions of  $A$ . Chordal graphs have remarkably rich structure, and if the graph of  $A$  is chordal, there are simple rational formulae for this special "0's in the inverse" completion (and not otherwise) and a nice superposition formula for the inverse. These formulae extend very generally beyond the positive definite case, and this special completion plays a major role in many other problems.

Conditions are also given for completability when the graph is a single cycle; and the graphs for which these additional conditions are sufficient for completability are characterized. A general approach to the positive definite completion is outlined.

Among other properties for which the completion problem has been studied are Euclidean distance matrices, contractions, rank  $k$  matrices, completely positive and doubly nonnegative matrices,  $M$ -matrices and inverse  $M$ -matrices, and totally positive matrices.

# ヘッケ環の分解行列と量子群の表現

有木 進

東京商船大学

ariki@ipc.tosho-u.ac.jp

平成8年8月14日(水)

(於北海道大学)

## 1 複素鏡映群のヘッケ環

最近 Lascoux-Leclerc-Thibon により対称群のヘッケ環の  $q$  が 1 のべき根の場合に分解行列を計算しているのではないかと予想されるあるアルゴリズムが提案されました。これは実は量子群の標準基底を計算するアルゴリズムです。この講演ではこの量子群を用いた分解行列の予想を解決する方法とそれが如何にアファインヘッケ環の場合に拡張されるかを説明します。そこで使われるのはアファインヘッケ環の表現の幾何的実現の理論ですが従来の方法、すなわち特殊化アファインヘッケ環を考えるのではうまく量子群の既約表現と結びつきません。キーとなるのは最近の私の研究のなかで導入された複素鏡映群  $G(m, 1, n)$  のヘッケ環を用いることです。これを用いることにより、実質的にはアファインヘッケ環のすべての表現を扱いながら、他方  $A_{r-1}^{(1)}$  型の量子群の既約表現 (integrable highest weight representation) と結びつくことが可能となります。まず、定義から。

**定義 1.1** パラメータ  $q \in F^\times$  および  $v_1, \dots, v_m \in F$  が与えられたとき、 $G(m, 1, n)$  のヘッケ環とは、次の生成元と基本関係で定義される  $F$ -代数である。

$$(a_1 - v_1)(a_1 - v_2) \cdots (a_1 - v_m) = 0,$$

$$(a_i - q)(a_i + q^{-1}) = 0 \quad (i \geq 2),$$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 a_1 a_2 &= a_2 a_1 a_2 a_1, \\
a_i a_{i+1} a_i &= a_{i+1} a_i a_{i+1} \quad (i \geq 2), \\
a_i a_j &= a_j a_i \quad (j \geq i + 2).
\end{aligned}$$

さて一般に、 $R$  を可換局所環、 $K$  をその商体、 $F$  を剰余体とし、 $R$  上の環  $A$  に対して、「 $A \otimes K$  は半単純だが、 $A \otimes F$  は半単純ではない。」という状況を考えると、分解写像とよばれる  $A \otimes K$ -加群のグロタンディエク群から  $A \otimes F$ -加群のグロタンディエク群への写像が定義されます。このとき、各々の既約加群を基底にとって行列表示したときの行列を分解行列とよびます。

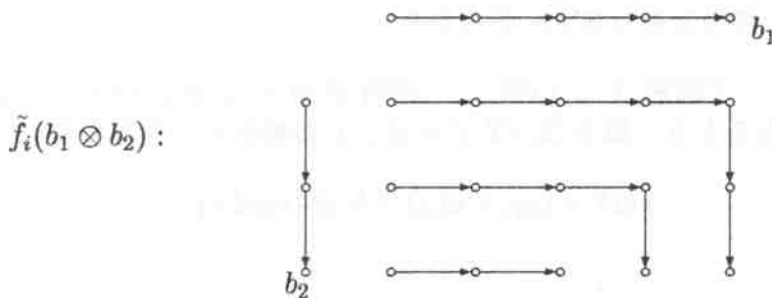
今考えたいのは、 $A$  が  $G(m, 1, n)$  のヘッケ環で、 $q^2$  が 1 の原始  $r$ -乗根、 $v_1, \dots, v_m$  が  $q^2$  の冪、 $R$  として、 $\mathbf{C}[v_1, \dots, v_m, q]$  を点  $(q^{2i_1}, \dots, q^{2i_m}, q)$  において局所化した環、をとったときの分解係数です。このとき、 $A \otimes K$ -加群はいままで我々の研究でよくわかっているもので、この講演で紹介する定理とあわせて既約  $A \otimes F$ -加群をグロタンディエク群のレベルで完全に理解できたこととなります。

## 2 量子群

我々が必要とするのは、 $A_{r-1}^{(1)}$  型の量子群です。また採用する結晶基底は、lower crystal base のほうなので、余積としては次のものを採用します。

$$\begin{cases}
\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + v^{-h_i} \otimes e_i, \\
\Delta(f_i) = f_i \otimes v^{h_i} + 1 \otimes f_i, \\
\Delta(v^h) = v^h \otimes v^h
\end{cases}$$

テンソル積のクリスタルグラフはよく知られているように次の場合をもととして定義されます。



さて、 $G(m, 1, n)$  のヘッケ環のグロタンディエク群との関係を見るには、[2] と異なり、 $L(\Lambda)$  をレベル 1 のフォック空間の  $m$  階テンソル積の空間に埋め込みます。ここで必要なのは林孝宏氏による  $L(\Lambda_0)$  の実現と三輪哲二先生等によるこの表現上の結晶基底の構成です。これらは完全にヤング図形の言葉で記述されます。そして、この定理と結晶基底のテンソル積規則により、レベル 1 のフォック空間の  $m$  階のテンソル積への量子群の作用とその結晶格子及び結晶基底が具体的に与えられるわけです。

### 3 定理

さて以下では常に、1 の  $r$ -乗根  $q^2$  と、 $q^2$  の冪、 $v_1 := q^{2i_1}, \dots, v_m := q^{2i_m}$  が固定されていると仮定し、このときの複素鏡映群のヘッケ環を  $H_n$  とかくこととします。

もし、パラメータが上のように特殊化されていなければ、おなじ基本関係が局所環  $\mathbf{C}[v_1, \dots, v_m, q]_{(v_1-v_1, \dots, v_m-v_m, q-q)}$  の商体上の代数を定めますがこれを  $\mathbf{H}_n$  とかくこととします。以下記号ですが、 $H_n$ -加群のなすグロタンディエク群を  $K(H_n)$ 、 $\mathbf{H}_n$ -加群のなすグロタンディエク群を  $K(\mathbf{H}_n)$  とかきます。ただしどちらの場合にも係数が  $\mathbf{C}$  に拡大されているものとします。そして、 $\varphi_n : K(\mathbf{H}_n) \rightarrow K(H_n)$  を分解写像とします。このとき、

**補題 3.1** (1)  $\mathbf{H}_n$  は半単純環。

(2) 既約  $\mathbf{H}_n$ -加群は、 $\{\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}) \mid |\lambda| = n\}$  でパラメトライズされる。各  $\lambda$  に対し、対応する加群を  $\{S^\lambda\}$  とかく。

$K(H)^*$  と  $K(\mathbf{H})^*$  をそれぞれ、 $K(H_n)$  と  $K(\mathbf{H}_n)$  の双対空間の全ての  $n$  にわたる直和とします。 $\{[S^\lambda]\}$  の双対基底を  $\{\lambda\}$  とかくことにします。また、 $\varphi^T$  を、 $\varphi_n$  の転置の直和だとします。

さて林さんの表現の  $v=1$  への特殊化として、 $K(\mathbf{H})^*$  はアフィンリー環  $g(A_{r-1}^{(1)})$  の作用をもちます。すなわち、

**定義 3.1** ヤング図形  $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$  のセル  $x$  が、 $\lambda^{(c(x))}$  の  $a(x)$  行  $b(x)$  列めにあるとき、値を  $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$  にとり、 $x$  の剰余というものを、

$$r(x) = i_{c(x)} - a(x) + b(x) \pmod{r}$$

で定める。

補題 3.2  $e_i, f_i$  を  $K(\mathbf{H})^*$  上に定義される次のような作用素とする。

$$e_i \lambda = \sum_{r(\lambda/\mu)=i} \mu, \quad f_i \lambda = \sum_{r(\mu/\lambda)=i} \mu$$

すると、これにカルタン部分の作用を付け加えることによって、 $K(\mathbf{H})^*$  に  $g(A_{r-1}^{(1)})$ -加群構造がはいる。

さて、以上の準備のもとで定理は次のようになります。

#### 定理

- (1)  $Im(\varphi^T)$  は空なヤング図形で生成される  $K(\mathbf{H})^*$  の巡回的部分加群。
- (2)  $n_i$  を  $v_1, \dots, v_m$  中の  $q^{2i}$  の重複度とする。  $\Lambda = \sum n_i \Lambda_i$  とおくと、 $K(H)^*$  は最高ウェイト  $\Lambda$  の既約最高整ウェイト加群  $L(\Lambda)$  と同値。
- (3)  $K(H_n)$  は既約加群からなる基底をもつが、これの双対基底は、上の同型により、 $L(\Lambda)$  の標準基底 (Lusztig の canonical basis) に一致する。

主定理の命題自体は完全に代数的なのですが、証明には、(i) Lusztig による量子群の幾何的実現、(ii) Ginzburg によるアフィンヘッケ環の既約加群の幾何的構成、(iii) 位相的K理論を用いたアフィンヘッケ環の標準加群の幾何的構成、の3つの結果を必要とします。またこの定理をもとにして分解行列を計算するアルゴリズムを与えることができます。これが  $m=1$  の場合、Lascoux-Leclerc-Thibon の言っていたアルゴリズムになります。

## References

- [1] S. Ariki, "On the decomposition numbers of the Hecke algebra of  $G(m, 1, n)$ " *Journal of Mathematics Kyoto University*, to appear.
- [2] M. Jimbo, K.C. Misra, T. Miwa, M. Okado, "Combinatorics of representations of  $U_q(\hat{sl}(n))$  at  $q=0$ " *C.M.P.*, **136**, 1991, pp.543-566.
- [3] A. Lascoux, B. Leclerc, J.Y. Thibon, "Hecke algebras at roots of unity and crystal bases" *Comm. Math. Phys.*, to appear.

# Schur duality for Cartan type Lie algebra $W_n$ and transformation semigroup $\mathfrak{S}_m$ .

By Kyo Nishiyama

Division of Mathematics, Faculty of Integrated Human Studies,  
Kyoto University, Kyoto 606-01, JAPAN  
e-mail: kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp

Cartan type Lie algebras are Lie subalgebras of algebraic vector fields on a flat affine space  $\mathbb{F}^n$ , where  $\mathbb{F}$  is a field of characteristic zero. They are  $\mathbb{Z}$ -graded, simple Lie algebras with polynomial growth. By the result of Kac and Mathieu, Lie algebras with such properties are known to be (1) finite dimensional simple Lie algebras; (2) their loop algebras; (3) Witt algebra; and (4) Cartan type Lie algebras.

Irreducible representations of a Cartan type Lie algebra  $\mathfrak{g}$  were studied extensively by Rudakov and Kostrikin in 1970's. If an irreducible representation admits a weight decomposition with respect to Euler's degree operators, then it is a lowest weight module or its dual except the only one case  $\mathfrak{g} = W_1$ . Therefore, the description of the irreducible representations are quite easy. However, it is rather difficult to do analysis on them because representations of  $W_n$  are not semisimple.

In the previous research, we found an interesting phenomenon on the tensor product representations of  $\mathfrak{g} = W_n$ , which is one of the four series of Cartan type Lie algebras. Since, by definition,  $W_n$  is a Lie algebra of all the derivations on the polynomial ring  $P[z_1, \dots, z_n]$  of  $n$ -variables,  $W_n$  acts naturally on  $P = P[z_1, \dots, z_n]$ . Form the  $m$ -fold tensor product  $\otimes^m P$ . Then the full commutant algebra of  $W_n$  in  $\otimes^m P$  becomes a finite dimensional algebra. So we expect simultaneous decomposition of  $\otimes^m P$  as a module of  $W_n$  and its finite dimensional commutant algebra.

To be more precise, let us assume that  $m \leq n$ . Then the full commutant algebra of  $W_n$  in  $End(\otimes^m P)$  becomes the semigroup ring of the transformation semigroup  $\mathfrak{S}_m$ , which is a semigroup consisting of all the maps from the finite set  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$  to itself. In the talk at Hokkaido University, I discussed on the decomposition of  $\otimes^m P$  as a representation of  $W_n \times \mathfrak{S}_m$ . Unfortunately, the representations of  $W_n$  and  $\mathfrak{S}_m$  are *not* semisimple, and even worse,  $\otimes^m P$  admits a composition series of *infinite length*. However, we can still get a control on the *irreducible quotients* of  $\otimes^m P$ .

Let  $U$  be a representation of  $W_n \times \mathfrak{S}_m$  and  $\pi \otimes \Sigma$  an irreducible representation of  $W_n \times \mathfrak{S}_m$ . Then we say that  $\pi \otimes \Sigma$  has *quotient multiplicity*  $k$  in  $U$  if

$$\dim Hom_{W_n \times \mathfrak{S}_m}(U, \pi \otimes \Sigma) = k$$

holds. Further, we say that  $U$  is *quotient multiplicity free* if

$$\dim Hom_{W_n \times \mathfrak{S}_m}(U, \pi \otimes \Sigma) \leq 1$$

for any irreducible representation  $\pi \otimes \Sigma$ . With these terminologies, we can state our main result.

**Theorem 1** *If  $m \leq n$ , then  $\otimes^m P$  is quotient multiplicity free. There is a one-to-one correspondence between the subsets of irreducible representations  $W_n^\wedge \ni \pi \leftrightarrow \Sigma \in \mathfrak{T}_m^\wedge$ , which is defined by the following property:*

$$\dim \text{Hom}_{W_n \times \mathfrak{S}_m} (\otimes^m P, \pi \otimes \Sigma) = 1.$$

Note that the above correspondence  $\pi \leftrightarrow \Sigma$  cannot be bijective. However, we can give it in terms of Young diagrams or, equivalently to say, partitions of various sizes. The correspondence is an explicit one, hence we obtain a realization of irreducible representations of  $W_n$  as irreducible quotients of  $\otimes^m P$ .

Let  $GL_n$  act on  $V = \mathbb{C}^n$  as its defining representation and  $\mathfrak{S}_m$  act on its  $m$ -fold tensor product  $\otimes^m V$  by the permutations of coordinates. Then *Schur duality* says that there is a correspondence between the irreducible representations of  $GL_n$  and  $\mathfrak{S}_m$  via Young diagrams. Weyl became the first mathematician who pointed out the machinery works for two mutually commutant algebras which are semisimple. Our theorem is a generalization of their theory to non-semisimple and infinite dimensional algebras.

On the other hand, our method is under strong influence of series of works of Howe. He developed correspondences of representations of various pairs of reductive groups, which are called *Howe duality*. Although the groups are reductive, their  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules, which are infinite dimensional, are not semisimple. So he needed to consider irreducible quotients to establish one-to-one correspondence. Since our theorem is proved by using the similar technique, it is the same as Howe's in its spirit.

Our theory also applies to the finite dimensional Lie superalgebra  $\mathcal{W}_n$  (we use the script letter  $\mathcal{W}$  to avoid the confusion). In this case, the whole representation space becomes finite dimensional and we expect an explicit description of composition series. The duality for Lie superalgebra  $\mathcal{W}_n$  is now studied by H. Wang.

**Acknowledgment.** This work has been inspired by the explicit calculations done by H. Wang for Cartan type Lie superalgebras. The author expresses sincere thanks to him. He also thanks the organizer, Prof. Hiro-fumi Yamada, of the talk at Hokkaido University.

## Cycles on complex Shimura varieties

Bernhard Runge, Osaka University

In this lecture we study moduli spaces of principally polarized abelian varieties with a given algebra  $L$  of complex multiplications. Then  $\mathbb{H}(L) = \{\tau \in \mathbb{H}_g ; L \subset \text{End}^0(A_\tau)\}$  is a connected complex submanifold of the Siegel upper half space  $\mathbb{H}_g$ . We consider  $L$  as a subalgebra of  $M_{2g}(\mathbb{Q})$  using the rational representation. Let  $\Gamma(L)$  be the normalizer of  $L$  in the modular group  $\Gamma_g$ . We call  $L$  the Shimura type, because such varieties were studied by Shimura [Sh]. Then  $\Gamma(L) \backslash \mathbb{H}(L)$  is the associated moduli variety of Shimura type  $L$ . Moreover, we study the Satake compactification, i.e. the closure  $\mathcal{A}(L)$  of  $\Gamma(L) \backslash \mathbb{H}(L)$  in the Satake compactification  $\mathcal{A}_g = \text{Proj}(A(\Gamma_g))$  of  $\Gamma_g \backslash \mathbb{H}_g$ . Similar to modular forms we define modular forms of Shimura type  $L$ . The ring  $A(L)$  of modular forms of Shimura type  $L$  defines the Shimura variety  $\mathcal{A}(L) = \text{Proj}(A(L))$  algebraically.

In the elliptic case the modulus  $\tau$  of the elliptic curve  $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  is a (zero-dimensional) Shimura variety, if  $E_\tau$  has complex multiplication. In [Sh] Shimura gave a description of Shimura varieties in arbitrary dimension using spaces of complex matrices  $\mathcal{H}_\tau^1$ ,  $\mathcal{H}_\tau^2$  and  $\mathcal{H}_{\tau,s}^3$  and gave a classification of the possible algebras of endomorphisms using sophisticated matrix calculations. We use a real model of the Siegel upper half space to describe Shimura varieties more directly as subvarieties of  $\Gamma_g \backslash \mathbb{H}_g$ . This allows to classify the endomorphism algebras by a careful dimension analysis avoiding matrix calculations. Moreover, the real (or algebraic) model behaves functorial in a natural way with respect to morphisms of endomorphism algebras.

For our purpose it turns out to be convenient to consider an algebraic model of the Siegel upper half space. A period matrix  $\tau$  induces by

$$\phi_\tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - \tau y$$

an isomorphism

$$\phi_\tau : \mathbb{R}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^g$$

and

$$M_\tau = \phi_\tau^{-1} i \phi_\tau$$

defines the corresponding complex structure on  $\mathbb{R}^{2g}$ . As a matrix we have

$$\mathbb{H}_g \ni \tau = p + iq \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} -pq^{-1} & q + pq^{-1}p \\ -q^{-1} & q^{-1}p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

*Proof.* We have  $i = \tau q^{-1} - pq^{-1}$ , hence

$$i(x - \tau y) = (pq^{-1}py + qy - pq^{-1}x) - \tau(q^{-1}py - q^{-1}x)$$

□

The matrices  $M_\tau$  are elements in  $Sp(2g, \mathbb{R})$  and satisfy  $\widehat{M}_\tau = -M_\tau = M_\tau^{-1}$ . Instead of  $M_\tau$  we furthermore define  $S_\tau = -M_\tau J$  and get an isomorphism of complex manifolds

$$\mathbb{H}_g \cong \{S_\tau \in Sp(2g, \mathbb{R}); S_\tau \text{ symmetric and positive definite} \}$$

In terms of matrices the bijection is given by

$$\mathbb{H}_g \ni \tau = p + iq \mapsto S_\tau = \begin{pmatrix} q + pq^{-1}p & pq^{-1} \\ q^{-1}p & q^{-1} \end{pmatrix}$$

The proof is easy and therefore omitted. We call this the real (or algebraic) model of the Siegel upper half space. The Rosati anti-involution restricts to an involution on  $\mathbb{H}_g$  (in the standard model  $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ ).

The group  $Sp(2g, \mathbb{R})$  acts on  $\mathbb{H}_g$  by

$$\sigma \langle \tau \rangle = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1} \text{ for } \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{R}) \text{ and } \tau \in \mathbb{H}_g.$$

This corresponds to the action

$$\sigma \bullet M_\tau = \sigma M_\tau \sigma^{-1}$$

on matrices of type  $M_\tau$  and

$$\sigma \circ S_\tau = \sigma S_\tau \sigma^t$$

on the real model. Remark that

$$\sigma \bullet M_\tau = \sigma S_\tau J \sigma^{-1} = \sigma S_\tau \sigma^t J = (\sigma \circ S_\tau) J,$$

hence the actions are equivariant. We will freely use  $\tau$ ,  $M_\tau$  or  $S_\tau$  to denote an element of the Siegel upper half space in the standard model or the real model. For our purpose the algebraic model is more appropriate.

One easily checks that for  $M_\tau = \begin{pmatrix} -pq^{-1} & q + pq^{-1}p \\ -q^{-1} & q^{-1}p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  and for an element  $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \in Mat_{2g}(\mathbb{Z})$  we have

$$\begin{aligned} M \in End(A_\tau) &\iff (A + \tau C)\tau = B + \tau D \\ &\iff MM_\tau = M_\tau M \\ &\iff A\alpha - B\gamma = \alpha A - \beta C \\ &\quad - C\alpha + D\gamma = \gamma A - \delta C \\ &\quad A\beta - B\delta = -\alpha B + \beta D \\ &\quad - C\beta + D\delta = -\gamma B + \delta D \end{aligned}$$

This leads to the following definitions for an algebra  $L \subset M_{2g}(\mathbb{Q})$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(L) &= \{\tau \in \mathbb{H}_g; lM_\tau = M_\tau l \text{ for all } l \in L\} \\ \Gamma(L) &= \{\sigma \in \Gamma_g; \sigma L = L\sigma\} \end{aligned}$$

Moreover we consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L) \backslash \mathbb{H}(L) & \hookrightarrow & \Gamma_g \backslash \mathbb{H}_g \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{A}(L) & \hookrightarrow & \mathcal{A}_g \end{array}$$

where  $\mathcal{A}(L)$  denotes the closure of  $\Gamma(L) \backslash \mathbb{H}(L)$  in the Satake compactification  $\mathcal{A}_g$ . We call  $\mathcal{A}(L)$  the Shimura variety of type  $L$ . We remark that  $\mathbb{H}(M)$  is  $\mathbb{H}(L)$  for  $L = \mathbb{Q}(M)$  in the new notation.

It is proved in [R2] that the map  $L \mapsto \Gamma(L) \backslash \mathbb{H}(L)$  is an equivalence of categories of admissible algebras with Rosati-equivariant embeddings in  $M_{2g}(\mathbb{Q})$  and irreducible varieties parametrizing principally polarized abelian varieties with  $L \subset \text{End}^0(A_\tau)$ .

Finally we give an application to the theory of Shimura curves and Picard varieties. For more details we refer to [R1,2].

### References

- [BB] Baily, W., Borel, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Ann. Math.* **84**, 442-528 (1966)
- [F] Freitag, E.: *Siegelsche Modulformen*. (Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 254) Berlin Heidelberg New York: Springer 1983
- [R1] Runge, B.: On Picard modular forms (to appear in „Mathematische Nachrichten“)
- [R2] Runge, B.: On complex Shimura varieties (preprint)
- [Sa] Satake, I.: *Algebraic structures of symmetric domains*. Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press (1980)
- [Sh] Shimura, G.: On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. *Ann. Math.* **78**, 149-192 (1963)

Bernhard Runge  
 Department of Mathematics  
 Osaka University  
 Machikaneyama 1-1, Toyonaka  
 Osaka 560  
 Japan