永田 雅宜 教授（岡山理科大学）

談話会（9月11日）アブストラクト

Jacobian Conjecture について

複素数体上の多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ の元 $f_1,\ldots,f_n$ について、その Jacobianが 0 でない定数であるならば $\mathbb{C}[f_1,\ldots,f_n] = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ であるというのがJacobian Conjecture です．$n=1$ なら当然ですが、$n=2$ のときが、まだ未解決であり、「証明した」と称する間違いの論文が多くあることでも有名です。$n=2$ の場合について、S. Abhyankar, T. Moh等はいろいろな角度からの検討をしています。Newton polygonを用いた方法が、Abhyankar, 中井喜和、etc.によって利用されているが、その方法について紹介するとともに、Abhyankar の考察で利用された「weight付きの意味で斉次な2変数の多項式 h、kのJacobian = h」を、weight> 0を仮定しない場合への拡張を考える。

Poincaré - Dulacの標準形とSeifert予想

伊藤敏和（龍谷大学）

$\mathbb{C}^n$の$2n$次元閉円板$D^{2n}(1)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \|z\|\leqq 1\}$の近傍で定義された正則ベクトル場$Z$を考える。そして，$Z$の解によって定義される葉層構造を$\mathcal{F}(Z)$とかく。すると，次の定理が証明できる。

<u>定理</u>　もし$D^{2n}(1)$の境界の$2n-1$次元球面$S^{2n-1}(1)=\partial D^{2n}(1)$が$\mathcal{F}(Z)$に横断的ならば，$S^{2n-1}(1)$上に$\mathcal{F}(Z)$より引きおこされる実1次元葉層構造$\mathcal{F}(Z)|_{S^{2n-1}(1)}$のコンパクト葉の個数は$1, 2, \cdots, n$又は$\infty$個のいずれかである。

この講演で，$n=2$の場合についてPoincaré - Dulacの標準形をもちいて具体例による計算と考察をとうして，幾何学的構造を解説し，定理の証明のアイデアを述べた。

<u>Poincaré（1879年）- Dulac（1912年）の標準形定理</u>（一般の$\mathbb{C}^n$上で成立しているが，ここでは$n=2$の場合のみ述べる）

$Z=\sum_{i=1}^{2} f_i(z)\partial/\partial z_i$を$\mathbb{C}^2$の原点の近傍で定義された正則ベクトル場とし，原点はZの孤立特異点とする。さらに，2×2行列$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)$の固有値$\lambda_1, \lambda_2$は零でなく，$\lambda_1/\lambda_2$は負の実数でないと仮定する。このとき，原点の近くで正則変換$\Phi(z)=w$があって，$\Phi_*(Z)=W$は次の3つのどれかになる。

(i) $W=\lambda_1 w_1\partial/\partial w_1+\lambda_2 w_2\partial/\partial w_2$

(ii) $W=\lambda w_1\partial/\partial w_1+(\lambda w_2+w_1)\partial/\partial w_2$，　$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$

(iii) $W=\lambda w_1\partial/\partial w_1+(k\lambda w_2+a w_1^k)\partial/\partial w_2$，　$\lambda_1=\lambda$，$\lambda_2=k\lambda_1$

aは零でない複素数，kは2より大きい整数

この(i)〜(iii)のときに，$\mathcal{F}(W)|_{S^3(\varepsilon)}$（$\varepsilon$は十分小な正の数）のコンパクト葉の個数は次のようになる。(ii)と(iii)の場合は1個，(i)のときは2つにわかれ，(イ) λ_1/λ_2が正の有理数のときは非可算無限個

(ロ) λ_1/λ_2 が負の実数でも正の有理数でもないときは2個。

一方，Seifert予想は「3次元球面 S^3 上の非特異な1次元葉層構造はコンパクト葉を少なくとも1つもつ」である。この予想については C^1 級の反例はP.A. Schweitzer（1974年），C^∞ 級の反例はK. Kuperberg（1994年）によって作られた。しかし，次の例はこの予想の本質をついている。

<u>例</u>　$W = w_1 \partial/\partial w_1 + w_2 \partial/\partial w_2$ によって $S^3(1)$ 上に定義される1次元葉層構造 $\mathcal{F}(W)|_{S^3(1)}$ は Hopf fibration で，すべてコンパクト葉からなる。そこで，この W を少し摂動した $W_\varepsilon = w_1 \partial/\partial w_1 + (w_2 + \varepsilon w_1)\partial/\partial w_2$，（$\varepsilon$ は十分小な正の数），と考えると，$\mathcal{F}(W_\varepsilon)|_{S^3(1)}$ のコンパクト葉はただ1つである。

最後に定理の証明の道筋は次のようになる。$S^{2n-1}(1)$ が $\mathcal{F}(Z)$ に横断的であると，Douady-Itoの定理の応用として $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)$ の固有値 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ は Poincaré-domain に属することが証明され，原点の近傍で Poincaré-Dulac の標準形定理をもちいることができ，$D^{2n}(1)$ 内部の $\mathcal{F}(Z)$ の構造が決定されてしまい，証明が完了する。

On finitely and infinitely determined map-germs

Hans Brodersen
University of Oslo

Let $C_{n,p}$ be the set of C^∞ map-germs from $(\mathbb{R}^n, 0)$ to $\mathbb{R}^p$, and $m_n C_{n,p}$ the subset of germs mapping 0 to 0. Let $\mathcal{A}$ be the group of germs of diffeomorphisms (h, k) where $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ and $k : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$. $\mathcal{A}$ acts on $m_n C_{n,p}$ by the formula $(k, h)f = k \circ f \circ h^{-1}$. We say that f is r-determined if any g with $j^r g(0) = j^r f(0)$ is in f's $\mathcal{A}$-orbit. Looking at the formal Taylor's series $j^\infty f(0)$ of f, we define the notion of infinite determinacy in a similar manner. In fact given any equivalence relation on $m_n C_{n,p}$ we can define the notion of finite/infinite determinacy with respect to this relation.

The foundations of the study of finitely determined germs was laid by John Mather in an important series of paper examining the properties of the C^∞-stable mappings.

Given two manifold N and P and consider the set C^∞ proper mappings $f : N \to P$. We say that f is stable if any mapping sufficiently close to f is equivalent to f under the action of $\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)$.

Mather examined the local geometry of germs of stable mappings, and he gave local normal forms of stable map-germs. Important in this study is the following theorem:

Theorem 1 (Mather). *Let $f : N \to P$ be a stable mapping, and denote by f_{x_0}, f's germ at $x_0 \in N$. Then f_{x_0} is $p+1$-determined, where $p = \dim P$.*

Mather gave a fundamental necessary and sufficient criterium for finite determinacy. Let f be as above, and consider a map-germ $\tau : (\mathbb{R}^n, 0) \to (T\mathbb{R}^p, \pi^{-1}(0))$ such that $\tau(x) \in T_{f(x)}\mathbb{R}^p$ (a vector field along f). We denote the space of such vectorfields by $\theta(f)$. This vectorspace is a C_n module, and can be intepreted as the tangent space of $C_{n,p}$ at f. Let $\theta(n)$ (resp. $\theta(p)$) denote the space of germs at 0 of vectorfields on $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$). Then we have mappings $tf : \theta(n) \to \theta(f)$ (resp. $\omega f : \theta(p) \to \theta(f)$) given by $\xi \to df(\xi)$(resp. $\eta \to \eta \circ f$). With this notation the vectorspace $T\mathcal{A}f = tf(m_n\theta(n)) + \omega f(m_p\theta(p))$ can be interpreted as the tangentspace of f's $\mathcal{A}$-orbit at f. Mather's theorem giving a necessary and sufficient condition for f to be finitely determined is now.

Theorem 3 (Mather). *The following conditions are equivalent*

(1) f is finitely determined

(2) There exists integer r s.t. $m_n^r\theta(f) \subset T\mathcal{A}f$.

Also consider the vectorspace $T_e\mathcal{A}f = tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$. We say that f is infinitesimally stable if $\theta(f) = T_e\mathcal{A}f$. The relation between infinitesimal stability and stability of global mappings is given by the following theorem.

Theorem 4 (Mather). *If $f : N \to P$ is a proper map then the germ of f at any point is infinitesimally stable.*

There is also a relation between infinitesimal stability and finite determinacy.

Theorem 5 (Gaffney, Mather). *Let f be an analytic and finitely $\mathcal{K}$-determined germ. Let $f_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (C^p, 0)$ be its complexification. Then f is finitely $\mathcal{A}$-determined if and*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

only if there exists a neighbourhood V of 0 in $\mathbb{C}^p$ s.t. for $y \in V - \{0\}$, the germ of $f_{\mathbb{C}}$ is infinitesimally stable at any finite set of points in $f_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$.

Instead of considering the group $\mathcal{A}$, we can look at homeomorphism germs (h, k), and define germs f and g to be topologically equivalent if $g = k \circ f \circ h^{-1}$ for some homemorphism germs . We say that f is topologically finitely determined if it is finitely determined with respect to this relation, and one can ask for conditions for topological determinacy as well as conditions for infinite $\mathcal{A}$-determinacy. The following is a review of results obtained on this matter by Goo Ishikawa, Leslie Wilson and myself.

The following theorem is analogous to Theorem 3 of Mather stated above.

Theorem 6. *The following conditions are equivalent:*
(1) f is infinitely $\mathcal{A}$-determined
(2) $m_n^\infty \theta(f) \subset T\mathcal{A}f$.

$m_n^\infty \theta(f)$ is here the set of vectorfields with vanishing derivatives at 0 of all orders. One can also ask for a possible relation between infinitesimal stability and infinite determinacy. However, it is easy to see that infinite determinacy is not implied by infinitesimal stablilty outside 0 alone. We define a condition (e) (which is too technical to state here), consisting of some Łojasiewicz inequalities having the following properties: If f satifies (e) then the germ f has a representative which is infinitesimally stable outside 0, and the inequalities of (e) control the rate at which we approach unstability when we approach 0. Now we have

Theorem 7. *(1), (2) of Theorem 6 and condition (e) are equivalent conditions.*

Finally we look at conditions for finite topological determinacy. Here, there is a relation between topological determinacy and the notion of topological stability which is somewhat similar to the relation between finite $\mathcal{A}$-determinacy and smooth stability. A map f is topologically stable if for each map g sufficiently close to f there exist homeomorphisms h, k s.t. $k \circ f \circ h^{-1} = g$. Mather has proved that when N is compact the set of topologically stable mappings are dense in $C^\infty(N, P)$ (in the Whitney topology). The density of the topologically stable maps can be derived by constructing a certain "canonical" stratification of the jetbundle $J^r(N, P)$, showing that multitransversality to this stratification implies topological stability, and using Thom's transversality theorem to show that we have multitransversality for a dense set of mappings.

We can now let the map-germs which are transverse to the canonical stratification play a role similar to that of the infinitesimally stable germs. We put up a condtion (e_{top}) consistsing of some Łojasiewicz inequalities having the property that if f satifies (e_{top}) then the germ f has a representative which is multitransverse to the canonical stratification outside 0, and the inequalities of (e_{top}) control the rate at which we approach non-transversality when we approach 0.
Then we have:

Theorem 8. *If f satisfies (e_{top}), then f is finitely topologically determined.*

Discriminants and vector fields

A. A. du Plessis
(joint work with C.T.C. Wall)

Abstract

It is just 20 years since the theory of the discriminant of a map began to be investigated as a topic in its own right. The year is clearly defined by important papers from different Arnol'd, Teissier and Zakalyukin. Numerous papers have appeared since then in which this topic plays an important role.

The theory of the discriminant is now so well developed as to be a research tool in its own right, with applications to problems in which the role of the discriminant may not be apparent. Indeed, the discriminant gives detailed insight into - and usually determines the entire structure of - the map; while on the other hand effective calculations of it may be made. Important varieties may be viewed as discriminants, ranging from the original example of the space of polynomials in one variable with a repeated root to the dual of an algebraic hypersurface.

In this talk we present a review of, and some new results on, vector fields related to the discriminant, from a geometrical viewpoint.

On a Generalized Spin-Boson Model *

Masao Hirokawa
Department of Mathematics,
Tokyo Gakugei University,
Koganei 184, Japan

Abstract

The existence and uniqueness of ground states of the generalized spin-boson Hamiltonian, H_{GSB}, is considered. H_{GSB} acts in the Hilbert space $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_b$, where $\mathcal{H}$ and $\mathcal{F}_b$ are a Hilbert space with $\dim \mathcal{H} \equiv N \leq \infty$ and the symmetric Fock space, respectively. The main results in the case of massive bosons include: (i) (existence) under $\dim \mathcal{H} < \infty$, there exists a ground state *without restriction for the finite size of the coupling*; (ii) (existence and uniqueness) under a mild (nonperturbative) condition for the parameters contained in H_{GSB}, H_{GSB} has only one ground state; (iii) (degeneracy) under a certain condition for the parameters of H_{GSB} which is weaker than that of (ii) and the condition of $N < \infty$, the number of the ground states is at most N. In the case of massless bosons, the existence of ground state of H_{GSB} is shown as a limit of ground states of the massive case. The methods used are *nonperturbative*.

The spin-boson model, which describes a two-level system coupled to a quantized Bose field, has been investigated as a simplified model for atomic systems interacting with a quantized radiation or phonon field. The ground states of the model are particular interest. Spohn [S1] discussed properties of ground states defined as zero-temperature limits of positive temperature equilibrium states. Analysis related to the work of Spohn was made by Amann [Am] in terms of the notion of algebraic ground states, although it treats only discrete version of the model. Recently attention has been paid to the ground states as the eigenvectors of the Hamiltonian H_{SB} of the spin-boson model with eigenvalue equal to the infimum of its spectrum to analyze spectral properties of H_{SB} and the process of radiative decay in the model [HS1, HS2]. In [HS1] Hübner and Spohn showed that, under certain conditions for the dispersion ω for bosons, the coupling function, the coupling constant α and the spectral gap μ of the unperturbed two-level system, there exists a unique ground state of H_{SB} and identify the spectrum of H_{SB}.

In my talk we focus our attention on the existence and uniqueness of ground states of the *generalized* spin-boson Hamiltonian H_{GSB}

$$H_{GSB} = A \otimes I + I \otimes H_b + B \otimes \phi(\lambda),$$

where H_b and $\phi(\lambda)$ are the free Hamiltonian and the time-zero field of Bose field, respectively. A and B are operators acting in a Hilbert space $\mathcal{H}$. H_{GSB} is given by extending the Pauli spin matrices,

*This is a joint work with Prof. A.Arai of Hokkaido University.

$\frac{\mu}{2}\sigma_z$ and $\alpha\sigma_x$, multiplied by numerical constants, $\frac{\mu}{2}$ and α, in H_{SB} to a class of self-adjoint bounded operators. We first consider the case where the bosons are massive (i.e., $m \equiv \inf_k \omega(k) > 0$) and show that, *as far as the existence of the ground states is concerned, no restriction is needed for* $\|B\|$, *i.e., the coupling constant* α *in* H_{SB}. The basic idea to do it is as follows: we first do a unitary transformation for H_{GSB} to convert it to an operator more tractable in a sense and then apply the method of constructive quantum field theory [GJ] to the latter operator. Moreover, by employing the min-max principle, under an additional condition for the parameters m and A, B, which is nonperturbative, we show that H_{GSB} has a unique ground state. When the dimension of $\mathcal{H}$ is finite ($\dim \mathcal{H} \equiv N < \infty$), we also suggest the possibility for H_{GSB} to have degenerate ground states by showing that, under a weaker condition for m, $\|A\|$ and $\|B\|$, there exist at most N ground states of H_{GSB}. In the case of massless bosons (i.e., $m = 0$) in H_{GSB}, we construct a ground state as a weak limit of ground states in the massive case.

References

[Am] A.Amann, *Ground states of a spin-boson model*, Ann. Phys. **208** (1991), pp. 414-448.

[FNV] M.Fannes, B.Nachtergaele and A.Verbeure, *The equilibrium state of the spin-boson model*, Commu. Math. Phys. **114** (1988), pp. 537-548.

[GJ] J.Glimm and A.Jaffe, *The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs: II. The field operators and the approximate vacuum*, Ann. of Math. **91** (1970), pp. 362-401.

[HS1] M.Hübner and H.Spohn, *Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian*, Ann. Inst. H. Poincaré **62** (1995), pp. 289-323.

[HS2] M.Hübner and H.Spohn, *Radiative decay: nonperturbative approach*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), pp. 363-387.

[S1] H.Spohn, *ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian*, Coomu. Math. Phys. **123** (1989), pp. 277-304.

[S2] In private communication with Prof.Spohn at Hokkaido Univ. during the first week of Oct. '96, Prof. Spohn showed the existence and uniqueness of the ground state of H_{SB} under the condision that $\int_{\mathbb{R}^\nu} d^\nu k \frac{\lambda(k)^2}{\omega(k)^2} < \infty$. Moreover, he told us that there exists a unique ground state of H_{GSB} under a condision.

Ground State of an Atom Coupled to the Radiation Field

As a simplified description one employs the spin-boson hamiltonian

$$H = (\mu/2)\,\sigma_z \otimes 1 + 1 \otimes \int dk\, \omega(k)\, a^+(k) a(k) + \sqrt{\alpha}\, \sigma_x \otimes \int dk \{ \lambda(k) a^+(k) + \lambda(k)^* a(k) \} .$$

Here σ_x, σ_z are the Pauli spin matrices, $\{a(k), a^+(k)\}$ is a Bose field over $\mathbb{R}^d$, $\omega \geq 0$ a.s., and $\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ with $\lambda \neq 0$ a.s.. $\mu > 0$ is the bare splitting and $\alpha \geq 0$ is the coupling constant. H acts on $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}$ and is a self-adjoint operator with domain $\mathcal{D}(1 \otimes H_B)$ provided $\lambda/\sqrt{\omega} \in L^2$. We explain that a sufficient condition for H to have a unique ground state is given by $\lambda/\omega \in L^2$. In fact, this condition is fairly close to the optimal condition. A mapping to a ferromagnetic Ising model over $\mathbb{R}$ reveals that the relevant quantity is $W(t) = \int dk |\lambda|^2 e^{-\omega |t|}$.

If $\lim_{t \to \infty} t^2 W(t) = 0$, then there is a unique ground state for any α and $\mu > 0$. However if $\lim_{t \to \infty} t^2 W(t) > 0$, then for sufficiently strong α the atom acquires an infinite number of bosons. This means that H has no ground state in Fock space. The physically relevant ground states have to be constructed now as states on a suitable C^*-algebra of local observables. There are then two distinct ground states related to each other by a reflection symmetry.

H. Spohn
Theoretische Physik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Theresienstr. 37
D-80333 München
Germany

"On Galois Extensions of an Azumaya Algebra".

Ricardo Alfaro
University of Michigan-Flint.

We give some correspondence between subalgebras of a Galois Azumaya extension, as defined by Alfaro and Szeto on "Skew Group Rings which are Azumaya". (Communications in Algebra, 23(6), 2255-2261 (1995)).

First, there is a one-to-one correspondence between the set of separable C-subalgebras of R and the set of G-Galois Azumaya extensions containing $C_S(R)$ and ~~the~~ separable over C. by taking commutators respect to S and R respectively. Here R is the fixed ring and C is the center of the fixed ring.

Second, there is a one-to-one correspondence between the set of separable C-subalgebras of S containing R and the set of separable C-subalgebras of $C_S(R)$ given by $A \to C_A(R)$ and inverse map $B \to R \cdot B$.

Moreover, we show that a Galois Azumaya extension S/R with group G acting as inner automorphism is always a twisted group ring over the fixed ring with same group G and Azumaya over the center of the ring.

コンデンサー問題と調和測度

名古屋工大　**中井　三留** (Mitsuru Nakai)

Riemann 多様体 M の理想境界 δ を 2 個の部分 δ_0 と δ_1 に分割する．δ_0 を接地し δ_1 を総エネルギー有限な電荷で帯電して自明でない電界を形成し δ_1 上に電位差 1 を生ずる様に出来るとき $(M;\delta_0,\delta_1)$ はコンデンサーを形成すると言う．δ をどの様に分割してもコンデンサーが作れない条件を求める問題を**コンデンサー問題**と言う．此の問題の解は，幾何学的に言えば，M の 2 位の Royden 調和境界 $\Delta_2(M)$ が連結となること，解析的に言えば，M 上の Dirichlet 積分有限な調和測度は定数にかぎること，である事が知られている．此の見地から $\Delta_2(M)$ の連結性を保証する条件に興味がある．特に　M が d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ の有界領域である場合に，M の相対境界 ∂M の連結性からどの程度 $\Delta_2(M)$ の連結性が惹起されるかを論ずる．2 位の Royden 調和境界 $\Delta_2(M)$ ばかりでなく任意の指数 $1 < p < \infty$ に対する p 位の Royden 調和境界 $\Delta_p(M)$ の場合も含めて考える（対応する微分方程式で言えば，調和構造を Laplace 方程式だけでなく p-Laplace 方程式（非線形）又は更に一般な増大度 p の仮似線形楕円型偏微分方程式に依って与える）．p については問題本来の意味から考えて $p = 2$ に主たる興味があるが，他分野への応用等の観点から一般の $1 < p < \infty$ に迄ひろげる訳である．但し $p > d$ の場合は，全く一般のコムパクトな境界を持つコムパクトな境界付き Riemann 多様体上の調和測度は常に境界まで連続に拡張できて，各境界成分で境界値 0 又は 1 を取ることが示されるので，$p > d$ の場合に本質的な意味はなく，$1 < p \leq d$ に限定して考えれば十分である．さて出発点の結果として

1. 定理． B^d **を** $\mathbf{R}^d$ **の単位球とするとき，** $\Delta_p(B^d)$ **は** $1 < p < 2$ **のとき非連結，** $2 \leq p < \infty$ **のとき連結となる．**

$\Delta_p(B^d)$ $(1 < p < 2)$ の非連結性は，B^d 上 p-Dirichlet 積分有限な調和測度の存在を意味するが，実はこの様なものが或意味で非常に沢山ある．そこで実は $\Delta_p(B^d)$ $(1 < p < 2)$ は完全非連結又は更に進んで Stone 空間とならぬかどうかと言う問題があるが未解決である．実は $1 < p < 2$ ならば p-Dirichlet 積分無限の調和測度は存在しないのではないかと言う大津賀信の問題は否定的に解かれている．但し，コンデンサー問題の見地からは上の定理 1 の後半が真に重要である．そこで B^d の特徴的な性質である有界性と ∂B^d の連結性に注目して，一般に $\mathbf{R}^d$ の部分領域 M が有界で ∂M が連結（$\mathbf{R}^d \setminus M$ が連結な事と同値）のとき簡単の為**許容領域**と呼ぶ．B^d は単に許容領域であるばかりでなく ∂B^d の滑らかさも又特徴的でこれに着眼して，定理 1 は B^d を ∂M が C^2 級である様な $\mathbf{R}^d$ の許容領域 M でおきかえて成立することがわかる．C^2 級を C^1 級とするには全く別の見地が必要であり，定理 1 は更に一般化できる：

2. 定理． M **を** $\mathbf{R}^d$ **の Lipschitz 領域である許容領域とすると，** $\Delta_p(M)$ **は** $1 < p < 2$ **のとき非連結，** $2 \leq < \infty$ **のとき連結となる．**

次元 $d = 2$ のときは 2 調和構造の等角写像による不変性があることと，M の 2 次元特有の幾

何学的性格により，特別に状況が簡明である：

3. 定理. M**を**R^2**の任意の許容領域とするとき，**$\Delta_p(M)$**は**$1 < p < 2$**のとき非連結，**$2 \leq p < \infty$**のとき連結となる.**

一般次元$d \geq 3$でも定理２の前半は若干弱められるし後半に限れば更に一般な次の結果が得られる：

4. 定理. M**を**R^d**の連続領域である許容領域とすれば，**$\Delta_p(M)$**は**$2 \leq p < \infty$**のとき連結である.**

此の結果は∂Mの滑らかさを全く仮定しないので可成り最終的な形に近いと思われる．もしかして無条件で良いのかと推測出来るが，それに関連して次のことを考える．Mが許容領域であるより強く，**位相球**であるとは，$\overline{M}$から閉球$\overline{B}^d$上への位相写像φで$\varphi(M) = B^d$となるものが存在することであるとする．位相球Mの$\Delta_2(M)$に限って言えば，次元$d = 2$であれば常に$\Delta_2(M)$は連結であり，次元$d \geq 3$の場合でも，Mが連続領域であると言う非常に弱い仮定の下で$\Delta_2(M)$は連結となる．よってますます無条件で良いかと思いたくなるが実は

5. 定理. 次元$d \geq 3$**であると**$\Delta_2(M)$**が非連結となる**R^d**の位相球**M**が常に存在する.**

位相的に球の形をしている或Mの境界∂Mを適当に２つの部分δ_0, δ_1に分解して$(M; \delta_0, \delta_1)$がコンデンサーになるという直観には全く反する結果である．ここで∂Mは有限表面積$|\partial M| < \infty$をもち，∂Mの各点はポテンシャル論的正則点で，δ_0もδ_1も共に正の面積$|\delta_i| > 0\ (i = 1, 2)$を持つ様に出来る．

コンデンサー問題の一般化は，境界付コムパクト Riemann 多様体M上の調和測度が常に∂M迄連続に拡張できて各境界成分上境界値０又は１となると言う状況がどの程度∂Mに条件を付ければ結論出来るかと言う形と，任意の Riemann 多様体Mの Royden 調和境界$\Delta_p(M)$が連結となる条件を求める（特に$p = 2$又は$p \geq 2$の場合）と言う形の２方向で考えられる．夫れ夫れについて若干の結果があるが，今後の問題である．

関連論文 (by M. Nakai)

[1] *Dirichlet finite harmonic measures on Riemann surfaces*, Complex Variables, **17**(1991), 123-131.

[2] *Riemnnian manifolds with connected Royden harmonic boundaries*, Duke Math. J., **67**(1992), 587-625.

[3] *Existence of Dirichlet finite harmonic measures in nonlinear potential theory*, Complex Variables, **21**(1993), 107-114.

[4] *Existence of Dirichlet finite harmonic measures on Euclidean balls*, Nagoya Math. J., **133**(1994), 85-125.

[5] *Existence of Dirichlet infinite harmonic measures on the unit disc*, Nagoya Math. J., **138**(1995), 141-167.

[6] *On the definition of the Virtanen Property for Riemannian manifolds*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **71**(1995), 6-9.

[7] *Existence of Dirichlet infinite harmonic measures on the Euclidean unit ball*, Hiroshima Math. J., **26**(1996), 605-621. .

[8] ロイデン調和境界の連結性，数理研講究録，**946**(1996), 110-124.

[9] *Boundary continuity of Dirichlet finite harmonic measures on compact bordered Riemannian manifolds*, Hiroshima Math. J., **27**(1997) (to appear).

[10] *Dirichlet finite harmonic measures on topological balls*, Preprint.

Trace Representation of Regular weights on Algebras of Unbounded Operators

In [1,2,3] we have studied weights on O*-algebras for the study of the structure of O*-algebras and for the applications to quantum physics. We here talk about the trace representation of weights on O*-algebras. Many important examples of states in quantum physics are trace functionals, that is, they are the form $f(X) = tr\overline{TX} = trXT$ with a certain density matrix T, and so it is important to consider the quantum moment problem : Under what conditions is every strongly positive linear functional on an O*-algebra a trace functional? This problem was studied by T.Sherman [4], S.L.Woronowicz [5], G.Lassner and W.Timmermann [6] and K.Schmüdgen [7,8,9,10]. Let f be a trace functional on a closed O*-algebra $\mathcal{M}$, that is,

$$f(X) = trXT = tr\overline{TX}, \quad X \in \mathcal{M}$$

for some positive trace class operator T on $\mathcal{H}$ such that XT is a trace class operator for all $X \in \mathcal{M}$, and then f is also represented as

$$f(X^\dagger X) = tr(X\Omega)^*(X\Omega), \quad X \in \mathcal{M} \tag{$*$}$$

for the positive Hilbert-Schmidt operator $\Omega \equiv T^{\frac{1}{2}}$ on $\mathcal{H}$ such that $X\Omega$ is a Hilbert-Schmidt operator for all $X \in \mathcal{M}$, and so the GNS-representation π_f for f is unitarily equivalent to the $*$-representation π of $\mathcal{M}$ in the Hilbert space $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ of Hilbert-Schmidt operators on $\mathcal{H}$. This result is useful for the unbounded Tomita-Takesaki theory and applicable to the quantum physics [11,12,13]. Recently such weights as the form ($*$) have been appeared in the quantum physics [1]. The weight φ is of the form

$$\varphi(X^\dagger X) = tr(X^{\dagger *}\Omega)^* \overline{X^{\dagger *}\Omega} \ \text{ whenever } X \in \mathfrak{N}_\varphi^0 \equiv \{X \in \mathcal{M}; \varphi(X^\dagger X) < \infty\} \tag{$**$}$$

for some positive self-adjoint operator Ω in $\mathcal{H}$. Hence it is important to consider under what conditions is a weight on $\mathcal{M}_+$ represented as the similar form to ($**$). Suppose $\mathcal{M}$ is *QMP-solvable* [iff every strongly positive linear functional on $\mathcal{M}$ is of the form ($**$)], and a weight φ on $\mathcal{M}_+$ is *regular* [iff $\varphi = \sup_\alpha f_\alpha$ for some net $\{f_\alpha\}$ of strongly positive linear functional on $\mathcal{M}$]. Then there exists a net $\{T_\alpha\}$ of positive trace calss operators on $\mathcal{H}$ such that XT_α is a trace class operator for all $X \in \mathcal{M}$ and α and $\varphi(X) = \sup_\alpha trXT_\alpha$ for all $X \in \mathcal{M}_+$. We show that if $\{T_\alpha\}$ is increasing then φ is a weight on $\mathcal{M}_+$ of the form ($**$), in particular, if $\varphi = \sup_n f_n$ for some increasing sequence $\{f_n\}$ of strongly positive linear functionals on $\mathcal{M}$, then φ is of the form ($**$).

References

[1] J. P. ANTOINE, A. INOUE AND H. OGI, Standard generalized vectors in the space of Hilbert-Schmidt operators, Ann. Inst. H. Poincaré **63**(1995), 177-210.

[2] A. INOUE, W. KARWOWSKI AND H. OGI, Standard weights on algebras of unbounded operators, Preprint.

[3] A. INOUE AND H. OGI, Regular weights on algebras of unbounded operators, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] T. SCHERMAN, Positive linear functionals on $*$-algebras of unbounded operators, J. Math. Anal. Appl. **22**(1968), 285-318.

[5] S.L. WORONOWICZ, The quantum problem of moments I, II, Rep. Math. Phys. **1** (1970), 135-145, **1**(1971), 175-183.

[6] G. LASSNER AND W. TIMMERMANN, Normal states on algebras of unbounded operators, Rep. Math. Phys. **3**(1972), 295-305.

[7] K. SCHMÜDGEN, On trace representation of linear functionals on unbounded operator algebras, Commun. Math. Phys. **63**(1978), 113-130.

[8] K. SCHMÜDGEN, A proof of a theorem on trace representation of strongly positive linear functionals on O_p^*-algebras, J. Operator Theory **2**(1979), 39-47.

[9] K. SCHMÜDGEN, Unbounded Operator Algebras and Representation Theory, Akademie-Verlag Berlin 1990.

[10] K. SCHMÜDGEN, Non-commutative moment problems, Math. Z. **206**(1991), 623-650.

[11] S. P. GUDDER AND R.L. HUDSON, A noncommutative probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. **245**(1978), 1-41.

[12] A. INOUE, An unbounded generalization of the Tomita-Takesaki theory, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **22**(1986), 725-765.

[13] A. INOUE, Modular systems induced by trace functionals on algebras of unbounded operators, J. Math. Phys. **35**(1994), 435-442.

Operators with regular norm-sequences

László Kérchy
(Sapporo, November 11, 1996)

Some fundamental questions of operator theory are still open. One of them asks whether every operator T acting on a complex Hilbert space H has a non-trivial invariant subspace. A related question: Is it true that if T is not a scalar multiple of the identity operator I, then T has a non-trivial hyperinvariant subspace, that is a subspace which is invariant for every operator C such that $CT = TC$? Though these basic questions are unanswered for a general Hilbert space operator, the structure of operators belonging to several special classes is well-understood. For example, we know almost everything about isometries and unitary operators. Hence it is reasonable to relate the operator T to an isometry V, and then to derive properties of T from that of V. A famous theorem of this type is due to B. Szőkefalvi-Nagy and C. Foias (1966). It says that if T is a power bounded operator (that is $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$) and $\inf_n \|T^n x\| > 0$, $\inf_n \|T^{*n} x\| > 0$ hold for every non-zero vector x, then T is quasi-similar to a unitary operator U. Although quasi-similarity is a weaker relation than similarity, nevertheless it yields the existence of a non-trivial hyperinvariant subspace, provided $T \neq cI$.

If $\|T\| \leq 1$ then application of the Sz.-Nagy – Foias theory of contractions results in much more than just the pure existence of a non-trivial invariant subspace. For example, the reflexivity of T was proved by H. Bercovici, K. Takahashi and L. Kérchy under different conditions. Roughly speaking, reflexivity means that T has a rich invariant subspace lattice.

The unitary operator U above has been constructed introducing a new inner product on H by the use of a general Banach limit L on the sequence space l^∞. Our aim was to extend this method from the power bounded case to operators belonging to a class as large as possible. Our investigations are based on a fine analysis of

Banach limit due to G. G. Lorentz (1948).

Using the concept of almost convergence we introduce the class $\mathcal{L}^{(G)}$ of operators T with regular norm sequence $\{\|T^n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$. This class is rather broad. For example, if T has positive spectral radius $r(T)$ and $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \|T^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}}$ for every $n \in \mathbb{N}$, then T belongs to $\mathcal{L}^{(G)}$. (At this moment it is not clear whether solely $r(T) > 0$ suffices to the membership in $\mathcal{L}^{(G)}$.)

A classification can be made in terms of the asymptotic behaviour of the vector orbits $\{\|T^n x\|\}_{n\in\mathbb{N}}$. Furthermore, the operators in $\mathcal{L}^{(G)}$ can be related to canonical isometries. On the base of that connection we can prove hyperinvariant subspace theorems and we can extend the well-known Arendt-Batty and Katznelson-Tzafriri theorems.

Korovkin 型近似論 (山形大学工学部　高橋眞映)

1。**正線形近似法。** 単位閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数環 $C([0,1])$ に対して，次で定義される $C([0,1])$ 上の正線形作用素 B_n を Bernstein 作用素と呼ぶ：

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \quad (f \in C([0,1]),\ 0 \le x \le 1,\ n = 1, 2, \ldots).$$

このとき，各 $f \in C([0,1])$ に対して，$\{B_n(f)\}$ は f に $[0,1]$ 上一様収束することが知られている (Bernstein の近似定理) が，このような性質をもつ正線形作用素列を正線形近似法と呼んでいる。勿論これはWeierstrass の代数多項式近似定理の直接証明を与えている。

実数直線 $\boldsymbol{R}$ 上の周期 2π の可積分関数 $f(x)$ に対して，次で定義される正線形作用素 F_n を Fejer 作用素と呼ぶ：

$$(F_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_n(x-y)dy \quad (x \in \boldsymbol{R}),\quad F_n(x) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right\}^2.$$

このときやはり Fejer 作用素列は周期 2π の連続関数（または L^p 関数 $(1 \le p < \infty)$）のつくるBanach 空間上の正線形近似法となり，これは Weierstrass の三角多項式近似定理の直接証明を与えている。

2。**疑問。** 正線形作用素の列がどのような条件を持てばそれが正線形近似法となるであろうか？

3。**H. Bohman の着想。** １９５２年、H. Bohman は次のような補間作用素列に関する近似定理を発見した。

定理 (H. Bohman). $f \in C([0,1])$ に対して，

$$H_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(t_{k,n})h_{k,n} \ (n = 1, 2, \ldots),\ t_{k,n} \in [0,1],\ t_{j,n} < t_{k,n}\ (j<k),\ 0 \le h_{k,n} \in C([0,1])$$

と置く。このとき、もし $\lim_{n\to\infty}\left\|H_n(x^m) - x^m\right\|_\infty = 0\ (m = 0, 1, 2)$ ならば，$\{H_n\}$ は $C([0,1])$ 上の正線形近似法である。

Bohman の定理において、$\{1, x, x^2\}$ を**試験関数族**と言う。Bohman の近似定理は Bernstein の近似定理を導く。実際、

$$B_n(1) = 1, B_n(x) = x, B_n(x^2) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

となるからである。

4。**Korovkin の着想。** １９５３年 P. P. Korovkin は Bohman とは独立に次のような近似定理を発見した。

定理 (P. P. Korovkin). (i) $C([0,1])$ 上の正線形作用素列 $\{T_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}\left\|T_n(x^k) - x^k\right\|_\infty = 0\ (k = 0, 1, 2)$ を満たせば，$\{T_n\}$ は $C([0,1])$ 上の正線形近似法である。

(ii) $\boldsymbol{R}$ 上の周期 2π の連続関数空間 $C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ 上の正線形作用素列 $\{T_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}\left\|T_n(1) - 1\right\|_\infty = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left\|T_n(\cos x) - \cos x\right\|_\infty = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left\|T_n(\sin x) - \sin x\right\|_\infty = 0$ を満たせば，$\{T_n\}$ は $C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ 上の正線形近似法である。

勿論、Korovkin の近似定理は Bohman の近似定理を導く。しかしこれはまた Fejer の近似定理を導く。実際，

$$F_n(1) = 1, F_n(\cos x)) = \frac{n}{n+1}\cos x, F_n(\sin x)) = \frac{n}{n+1}\sin x$$

となるからである。

5。Korovkin 閉包。 $C([0, 1])$ の部分集合 S に対して、

$$\mathrm{Kor}(S) = \{f \in C([0, 1]) : \textit{If } \{T_n\} \text{ is a sequence of positive linear op.s on } C([0, 1]) \text{ s. t. } \lim_{n\to\infty} \| T_n(h) - h \|_\infty = 0 \text{ for all } h \in S, \text{ then } \lim_{n\to\infty} \| T_n(f) - f \|_\infty = 0\}$$

をKorovkin 閉包と言う。特に, $\mathrm{Kor}(S) = C([0, 1])$ のとき、S を Korovkin 集合と言う。$\{1, x, x^2\}$ は Korovkin 集合である。

$$\hat{S} = \{f \in C([0, 1]) : [\, \mu \in M^+([0, 1]), \omega \in [0, 1] \; s.t. \; \mu \mid S = \delta_\omega \mid S \,] \Rightarrow [\, \mu(f) = f(\omega) \,]\}$$

と置く。

定理 (Altomare and Boccaccio). S が 1 を含むとき, $\mathrm{Kor}(S) = \hat{S}$. 特に, S が $C([0, 1])$ における Korovkin 集合であるための必要十分条件は $[0, 1]$ が $[0, 1]$ の S に関する Choquet 境界 $\partial_S([0, 1])$ に等しいことである。

7。Lorentz-Micchelli の問題（real case）。 Ω を compact Hausdorff 空間, S を $C(\Omega)$ の正値関数を含む部分集合するとき, 次の性質を持つ $C(\Omega)$ 上の正線形作用素 T を記述せよ：

『S 上で T に強収束する任意の $C(\Omega)$ 上の正線形作用素のネットは全体でTに強収束する。』

多分興味のあるのは S が有限集合の場合であろう。このとき, T は有限型作用素でなければならないことを Micchelli は示している。そして例えば, $\Omega = [0, 1]$, $S = \{1, x, x^2\}$ のときは,

$$(Tf)(t) = (1-t)f(0) + tf(1) \quad (0 \le t \le 1, f \in C([0, 1]))$$

で定義される有限型作用素はそのような性質をもつことを示している。

7。BKW-作用素。 D. Wulbert は次のような定理を証明している。

定理 (Wulbert). Let S be a subset of $C(\Omega)$ such that $1 \in S$ and $\Omega = \partial_S(\Omega)$, and let X be a linear subspace of $C(\Omega)$ containing S . If $\{T_\lambda\}$ is a net of bounded linear operators of X into $C(\Omega)$ such that $\lim_\lambda \|T_\lambda\| = 1$ and $\lim_\lambda \|T_\lambda(g) - g\|_\infty = 0$ $(\forall g \in S)$, then $\lim_\lambda \|T_\lambda(f) - f\|_\infty = 0$ for all $f \in X$.

上の定理から次のような定義をすることは自然であろう。

定義。X, Y をノルム空間, $B(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素の全体, S を X の部分集合とする。与えられた $T \in B(X, Y)$ が次の条件を満たすとき, T を X から Y への試験集合 S に関する BKW-作用素と呼ぶ：

If $\{T_\lambda\}$ is a net of $B(X, Y)$ satisfying $\lim_\lambda \|T_\lambda\| = \|T\|$ and $\lim_\lambda \|T_\lambda(s) - T(s)\| = 0$ $(\forall s \in S)$, then $\lim_\lambda \|T_\lambda(x) - T(x)\| = 0$ $(\forall x \in X)$.

定理。 $C([0, 1])$ 上の $\{1, x\}$ に関するBKW-作用素を完全に決定できる。また $\{1, x, x^2\}$ に関する norm one unital BKW-作用素は次のように完全に決定できる。

Every norm one unital BKW-operators T on $C([0, 1])$ for the test functions $\{1, x, x^2\}$ is of form

$$(Tf)(\omega) = \begin{cases} f(\varphi(\omega)), \text{ if } \omega \in \Omega \setminus G \\ \\ f(0)\{1-\varphi(\omega)\} + f(1)\varphi(\omega), \text{ if } \omega \in G \end{cases}$$

for every $f \in X$, where φ is a continuous map from $[0, 1]$ into itself and G is an open subset of $[0, 1]$ such that $0 < \varphi(\omega) < 1$ $(\forall \omega \in G)$ and $\varphi(\omega) = 0$ *or* 1 $(\forall \omega \in \partial G)$. Here ∂G denotes the topological boundary of G in $[0, 1]$.

Korovkin 型近似論の研究に関しては，最近出版された Altomare-Campiti [1] の本が良い教科書となろう。

我が国ではこの方面の研究は外国に比べて必ずしも活発とは言い難いが，最近新潟大の泉池敬司氏をはじめ何人かの人達が活躍しておられることは心強いことである。

参考文献

1. F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1994.
2. H. Bauer, Theorems of Korovkin type for adapted spaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) , 23(1973), 245-260.
3. H. Bohman, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat. 2(1952), 43-56.
4. H. Choda and M. Echigo, On theorem of Korovkin, Proc. Japan Acad., 39(1963), 107-108.
5. K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential BKW-operators and function algebras, J. Approx. Theory, 85(1996), 185-200.
6. K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential Korovkin type theorems and weighted composition operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 62(1996), 161-174.
7. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval and the sequence spaces, J. Approx. Theory, 87(1996), 159-169.
8. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval, to appear in Rend. Circ. Mat. Palermo.
9. P. P. Korovkin, On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S) 90(1953), 961-964.
10. P. P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960.
11. C. A. Micchelli, Convergence of positive linear operators on C(X), J. Approx. Theory, 13(1975), 305-315.
12. R. Nakamoto and M. Nakamura, On theorem of Korovkin, Proc. Japan Acad., 41(1965),
13. T. Nishishiraho, Convergence of positive linear approximation processes, Tohoku Math. J., 35(1983), 441-458.
14. R. Sato and S.-E. Tahahasi, A discrete Korovkin theorem and BKW-operators, J. Approx. Theory, 84(1996), 351-366.
15. S.-E. Takahasi, BKW-operators on function spaces, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 33(1993), 479-488.
16. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces, J. Approx. Theory, 72(1993), 174-184.
17. S.-E. Takahasi, (T, E)-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators, J. Approx. Theory, 82(1995), 340-351.
18. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators from a function space into a commutative C*-algebra for special test functions, Tohoku Math. J., 48(1996), 139-148.
19. D. E. Wulbert, Convergence of operators and Korovkin's theorem, J. Approx. Theory, 1(1968), 381-390.

Spherical functions and local densities on hermitian forms [1]

広中由美子（信州大学理学部）

k を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，$*$ を k の involution とする．$v=(v_{ij})\in M_{mn}(k)$ に対して $v^*=(v_{ji}^*)\in M_{nm}(k)$ とおく．$G=G_n=GL_n(k)$, $K=GL_n(\mathcal{O}_k)$ とおく．

我々の考える hermitian forms の空間とは

$$X=X_n=\{x\in G_n \mid x^*=x\}$$

で，ここには G が $g\cdot x=gxg^*$ によって作用している．

我々の目的は次のように述べられる．

(1) X 上の球関数 (spherical function)，つまり $\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数を決定すること．ここで，$\Psi\in\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ が $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数であるとは

$f*\Psi=\omega(f)\Psi\quad(\forall f\in\mathcal{H}(G,K))$ をみたす $\mathbb{C}$-algebra map $\omega:\mathcal{H}(G,K)\longrightarrow\mathbb{C}$ が存在するときに言う．

(2) (1) を用いて X 上の調和解析をすること．

(3) 応用として，表現の局所密度 (local density) の公式を明示すること．

以下，k は $k_0=\{x\in k \mid x^*=x\}$ 上不分岐と仮定する．$\pi\in k_0$ を k の素元とし，$|\ |$ を正規化した k 上の付値とし，便宜上 $|0|=0$ としておく．dk で 正規化した K 上の Haar 測度を表し，$\mathrm{d}_i(x)$ で $x\in X$ の左上の i 次小行列式を表す．

ティピカルな $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数として次が考えられる:

$$w(x;s)=\int_K\prod_{i=1}^{n}|\mathrm{d}_i(k\cdot x)|^{s_i}\,dk.\quad(x\in X,\ s=(s_1,...,s_n)\in\mathbb{C}^n).$$

右辺は $\mathrm{Re}(s_1),...,\mathrm{Re}(s_{n-1})\geq 0$ ならば絶対収束し，$q^{2s_1},...,q^{2s_n}$ の有理関数に解析接続される (但し $q^2=\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$ とする)．

X の K-軌道の代表系は

$$\left\{\pi^\lambda=\begin{pmatrix}\pi^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n}\end{pmatrix}\ \middle|\ \lambda\in\Lambda_n\right\},$$

但し

$$\Lambda_n=\left\{\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\ \middle|\ \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda\right\}$$

[1] 北海道大学理学部数学教室における談話会 (1996.11.11.) の記録

で与えられる．$\omega(x;s)$ は K-不変な関数であるから，この明示式を得るには $\omega(\pi^\lambda;s)$ を λ の言葉で具体的に書き下せば良く，実際それができる．

さらに，$\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数は $\omega(x;s)$ を用いてパラメトライズすることができる．各 $\mathcal{H}(G,K)$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-algebra map に対して，対応する球関数たちは 2^n 次元のベクトル空間をなす．

X 上の K 不変な急減少関数のなす空間 $\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上に，$\omega(x;s)$ を核関数とする積分変換 (球フーリエ変換) が定義され，$\mathcal{S}(K\backslash X)$ の $\mathcal{H}(G,K)$-加群としての構造がわかる。階数 2^n の $\mathcal{H}(G,K)$-自由加群となる。球フーリエ変換の逆変換，プランシュレル公式も具体的に与えられる．

局所密度は，次のように定義される．

$x\in X_n(\mathcal{O}), y\in X_m(\mathcal{O})$ $(n\geq m)$ とする．y の x による局所密度 $\mu(y,x)$ と 原始的局所密度 $\mu^{pr}(y,x)$ は

$$\mu(y,x)=\lim_{d\to\infty}\frac{N_d(y,x)}{q^{dm(2n-m)}},\qquad \mu^{pr}(y,x)=\lim_{d\to\infty}\frac{N_d^{pr}(y,x)}{q^{dm(2n-m)}},$$

但し

$$N_d(y,x)=\#\left\{v\in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d)\;\middle|\; vxv^*\equiv y(\mathrm{mod}\mathfrak{p}^d)\right\},$$

$$N_d^{pr}(y,x)=\#\left\{v\in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d)\;\middle|\; v=\begin{pmatrix}1_m & 0\end{pmatrix}\tilde{v}\ (\exists\tilde{v}\in K_n),\quad vxv^*\equiv y(\mathrm{mod}\mathfrak{p}^d)\right\}$$

と定義される．

局所密度 $\mu^{(pr)}(y,x)$ が，x の K_n-軌道，y の K_m-軌道にしか依らないことは定義から明らかである．従って，明示式は $\mu^{(pr)}(\pi^\lambda,\pi^\xi)$, $(\xi\in\Lambda_n^+,\lambda\in\Lambda_m^+)$ を ξ,λ の言葉で与えられればよい．

一方，球関数 $\omega(x;s)$ は (原始的) 局所密度の生成関数と考えられるので，球関数の明示式から，(原始的) 局所密度の具体的表示式を引き出すことができる．

正確な叙述は下記を参考にしてください：

Y. Hironaka: Spherical functions and local densities on hermitian forms (preprint, Oct.1996).

Zeta functions of prehomogeneous vector spaces and parabolic subgroup action

佐藤　文広（立教大学理学部）

1996.11.12

概均質ベクトル空間のゼータ関数の定義においてベクトル空間の構造は何の役割も果たしていないことに注意すると、一般に有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上定義された概均質多様体に対して、（少なくとも形式的には）ゼータ関数の系を定義することができる。すなわち、$\boldsymbol{Q}$ 上定義された連結線形代数群 P, $\boldsymbol{Q}$ 上定義された P-多様体 X, P の数論的部分群 Γ_P, $X(\boldsymbol{Q})$ の Γ_P-不変な部分集合 L に対して、

1. X は Zariski-位相に関して稠密かつ開である P-軌道 Ω が存在する、
2. 任意の $x \in L$ に対して $P_x = \{p \in P \,|\, p \cdot x = x\}$ の単位限連結成分は $\boldsymbol{Q}$ 上定義された非自明な有理指標を持たない，

という仮定を満たすとき、l 変数のゼータ関数（$l = \boldsymbol{Q} - \mathrm{rank}(P)$）が構成される。

問題は、このようにして構成されたゼータ関数がよい解析的性質（解析接続、関数等式の存在など）を持つためには (P, X, Γ_P, L) をどのようにとればよいか，ということである。

すでによいゼータ関数が得られている例としては，次のようなものがある：

- 概均質ベクトル空間：X がアフィン空間で P は X に線形に作用しているとき、L として $\boldsymbol{Q}$-ベクトル空間 $X(\boldsymbol{Q})$ 内の格子をとるならば、（若干の付加的仮定の下で）ゼータ関数はよい性質を持つ。
- G を $\boldsymbol{Q}$ 上定義された reductive 代数群、P を G の放物型部分群，K を $G(\boldsymbol{R})$ の極大コンパクト部分群 $K(\boldsymbol{R})$ の複素化，$X = G/K$ とする。G の数論的部分群 Γ をとり、$\Gamma_P = \Gamma \cap P$ とおく。さらに $x \in G(\boldsymbol{R})/K(\boldsymbol{R}) \subset X(\boldsymbol{R})$ に対して $L = \Gamma \cdot x$ とする。このとき、対応するゼータ関数は Langlands Eisenstein 級数であり，よい性質を持つ。

我々は、この後者の例の拡張を考え、次の予想に到達した：

予想. G を $\boldsymbol{Q}$ 上定義された reductive 代数群、P を G の放物型部分群，H を G の $\boldsymbol{Q}$ 上定義された閉部分群とし、$X = G/H$ とする。G の数論的部分群 Γ をとり、$\Gamma_P = \Gamma \cap P$ とおく。さらに $x \subset X(\boldsymbol{Q})$ に対して $L = \Gamma \cdot x$ とする。このとき、対応するゼータ関数はよい性質を持つ。

この予想は、G が一般線形群（の何個かの直積）の場合には、概均質ベクトル空間の理論を応用することでかなりの程度解決できる。すなわち、次の定理が証明できる。

定理. $G = GL(n)$, $\Gamma = GL(n, \boldsymbol{Z})$ とする。$\mathcal{X}(P)$ を P の $\boldsymbol{Q}$- 有理指標のなす群とし、$\boldsymbol{a}^*_{P,\boldsymbol{C}} = \mathcal{X}(P) \otimes \boldsymbol{C}$ とおく。H は連結で、非自明な $\boldsymbol{Q}$-有理指標は持たないとする。

(1) $P_1 = [P, P]$ とし、$P_{1,x} = \{p \in P_1 \,|p \cdot x = x\}$ とおく。x が Zariski-開軌道 Ω の元のとき、$P_{1,x}$ は連結半単純、又は $\{1\}$ だとする。このとき、対応するゼータ関数は $\boldsymbol{a}^*_{P,\boldsymbol{C}}$ 内のある開凸錘のρ-shift の上で絶対収束する。

(2) さらに、H が reductive ならば、ゼータ関数は $\boldsymbol{a}^*_{P,\boldsymbol{C}}$ の全体に有理型関数として解析接続される。

(3) G の Weyl 群のある部分集合が定義されて、その作用の下でゼータ関数は関数等式を満たす。

関数等式の詳細は，このスペースでは述べきれないので、Preprint

"Eisenstein series on weakly spherical homogeneous spaces of $GL(n)$"

を参照してください。