Zeta functions associated to certain families of real symmetric spaces

Hubert Rubenthaler (joint work with Nicole Bopp)

Université Louis Pasteur, Strasbourg

Let $(G_{\mathbf{R}}, V_{\mathbf{R}})$ be a real form of a prehomogeneous vector space of commutative parabolic type. We suppose here that the connected group $G_{\mathbf{R}}$ has been choosen appropriately. Then it is known that the $G_{\mathbf{R}}$-open orbits Ω_i $(i = 1, \ldots, k)$ in $V_{\mathbf{R}}$ are symmetric spaces. This means that the generic isotropy subgroups H_i of representatives of each Ω_i are open subgroups of the fixed point set of an involution σ_i $(i = 1, \ldots, k)$. Suppose that there exists a continuous representation π of $G_{\mathbf{R}}$ on a Hilbert space $\mathcal{H}$ such that π has H_i-invariant vectors for each $i = 1, \ldots, k$. In fact each such vector belongs to the space $(\mathcal{H}^{-\infty})^{H_i}$ of H_i-invariant vector of the space $\mathcal{H}^{-\infty}$, which is the anti-dual of the space $\mathcal{H}^{\infty}$ of C^{∞}-vectors of $\mathcal{H}$.

Suppose that for any function $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbf{R}})$ and for any $v_i \in (\mathcal{H}^{-\infty})^{H_i}$ the following integral converges:

$$\mathbf{Z}_i(f, \pi, v_i) = \int_{\Omega_i} f(x)\pi(x)v_i \, dx \ .$$

This integral is an $\mathcal{H}^{-\infty}$-valued integral which makes sense since the vector v_i is H_i-invariant. For $v = (v_1, \cdots, v_k) \in (\mathcal{H}^{-\infty})^{H_1} \times (\mathcal{H}^{-\infty})^{H_2} \times \ldots \times (\mathcal{H}^{-\infty})^{H_k}$ one can now define

$$\mathbf{Z}(f, \pi, v) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{Z}_i(f, \pi, v_i) \ .$$

Let $\hat{f}$ be the Fourier transform of f. At least for $f \in C_c^{\infty}(\cup_{i=1}^{k}, \Omega_i)$ results by Bruhat indicate that there should be a functional equation of the following type:

$$\mathbf{Z}(\hat{f}, \pi, v) = \mathbf{Z}(f, \pi \otimes \chi^{-m}, A(v)) \, ,$$

where χ is the fundamental character of the PV $(G_{\mathbf{R}}, V_{\mathbf{R}})$ and χ^m is the module of the $G_{\mathbf{R}}$-action and where $A = (A_{ij})$ is a $k \times k$-matrix whose entry A_{ij} belongs to $\mathrm{Hom}((\mathcal{H}^{-\infty})^{H_j}, (\mathcal{H}^{-\infty})^{H_i})$.

Our main theorem asserts that the preceeding fuctional equation is true for f in the Schwartz space of $V_{\mathbf{R}}$ and for generic π in the so-called minimal principal series for the symmetric spaces G/H_i. This series of representations effectively has H_i-invariant vectors for each $i = 1, \ldots, k$. Moreover we have computed the matrix A, which plays the role of a generalized gamma factor, in the canonical bases of the spaces $(\mathcal{H}^{-\infty})^{H_i}$ given by Van den Ban and Oshima.

局在化した摩擦項をもつ波動方程式の解の減衰について

1996年11月20日

九大数理　中尾愼宏

1. <u>問題の説明</u>

波動方程式の初期-境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{and } u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える。ここで Ω は R^N の有界領域, Δ は Laplacian, $a(x)$ は $a(x) \geq 0$ な有界関数。

$u(x,t)$ を解として (1) $\times u_t$ を Ω で積分すると

$$\frac{d}{dt} E(t) + \int_\Omega a(x) |u_t|^2 dx = 0 \tag{2}$$

を得る。ここで,

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \{ \|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \} \quad (\|\cdot\| \text{ は } L^2(\Omega) \text{ ノルム}).$$

よって, 特に $a(x) \equiv 0$ (摩擦項なし) なら $E(t) \equiv E(0) = \text{const}$. 一方, $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ なら (1) $\times u$ を積分した式と (2) を組み合せることにより通常の指数的減衰評価

$$E(t) \leq C E(0) e^{-\lambda t}, \quad {}^\exists \lambda > 0, \tag{3}$$

が得られる。では「$a(x) \geq 0$」(退化型) の場合にはどのような結果が得られるだろうか? 減衰評価が得られるとして, それを用いて非線形方程式の大域解の存在証明に応用出来ないだろうか? これらを問題としたい。

2. <u>「$a(x) \not\equiv 0$ ならば $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$」</u> (N. Iwasaki (1969))

$a(x) \not\equiv 0$ なら $E(t)$ は単調減少である。実は初等的な力学系の理論的考察で上のことが示される。実際, $(u_0, u_1) \in H_2 \cap \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1$ $\left(\overset{dense}{\subset} \mathring{H}_1 \times L^2\right)$ にとると解 $u(t)$ に対して $\|\Delta u(t)\| + \|\nabla u_t(t)\|$: 有界 となるから解軌道 $(u(t), u_t(t))$ は $\mathring{H}_1 \times L^2$ で compact. ω-limit 集合 $\mathcal{W}$ を考える。$(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in \mathcal{W}$ とし, これを初期値とする解 $\tilde{u}(t)$ に対しては $\tilde{E}(t) = \text{const}$. ということから

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 & \Omega \times (-\infty, \infty) \\ \tilde{u}(x,t) = 0 & \text{on } \operatorname{supp} a(x) \times (-\infty, \infty) \end{cases} \tag{4}$$

$(a(x) > 0 \text{ のところ})$

$\tilde{u}(x,t)$ は t について概周期関数になることを用いると, 上より $\tilde{u}(x,t) \equiv 0$. つまり
(一種の一意接続定理)
$\mathcal{W} = \{0\}$.

3. 「$a(x)\ge 0$」の場合の減衰評価

(i) $a(x)>0$ a.e. $x\in\Omega$ かつ $\int_\Omega \frac{1}{|a(x)|^p}dx<\infty$, $\exists\, 0<p<1$,
このとき次が成立

$$E(t)\le C_m(1+t)^{-2mp/N} \qquad (\text{M.N. } 1985) \qquad (5)$$

ただし $m>N/2+1$, $C_m=C(\|u_0\|_{H_{m+1}}+\|u_1\|_{H_m})$. (解の regularity が degeneracy を補う!)

(ii) 指数的減衰 (3) が得られるための条件が Bardos–Lebeau–Rauch (1988–92) によって与えられた.

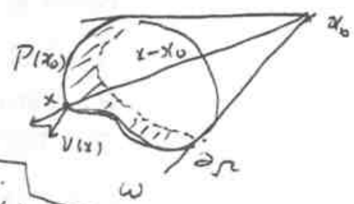
(3) が成立 $\Longleftrightarrow$ $\partial\Omega$ の点から出る幾何光線が一定時間 T 内に必ず $\mathrm{supp}\, a(x)=\{x \mid a(x)>0\}$ を横切る.
(ただし $a\in C^\infty$)

(iii) (ii)の結果程 sharp でないが方法論的に分りやすい結果 (Zuazua 1990)

$P(x_0)=\{x\in\partial\Omega \mid \nu\cdot(x-x_0)\ge 0\}$ とおく. (Lions の条件)

$\exists x_0 \in R^N$, $\exists\omega$: open $\subset\bar\Omega$ s.t. $\omega\supset P(x_0)$, $a(x)\ge\varepsilon_0>0$

このとき, (3) が成立.



Israel J. Math.

(iv) (i)と(iii)の方法を組合せると次が得られる (M.N. 1996)
(iii)の仮定において「$a(x)\ge\varepsilon_0>0$」を「$a(x)>0$ a.e. $x\in\omega$, $\int_\omega \frac{1}{|a(x)|^p}dx<\infty$, $\exists\, 0<p<1$,」におきかえる. このとき (5) が成立する.

(最後の結果について証明の outline を述べる.)

4. quasilinear wave eq. の大域解

$$\begin{cases} u_{tt}-\mathrm{div}\{a(|\nabla u|^2)\nabla u\}+a(x)u_t=0 & \text{in } \Omega\times[0,\infty) \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x) & \text{and } u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

$a(x)\ge\varepsilon_0>0$ のとき, 指数的減衰を利用しての大域解の存在 (初期値小とし) は多くの人によって与えられている. (T. Nishida, A. Matsumura, P. Rabinowitz, Y. Shibata, A. Milani etc.) ここでは, 上の (iv) の仮定の下でなめらかな大域解の存在を示すことが出来ることについて言及したい. (変数係数方程式に対する一意接続定理を必要とする.)

射影空間上の複素力学系と小林計量

京大・総合人間学部 上田哲生

n 次元複素射影空間 P^n から P^n への正則写像 f が与えられたとき，その iterates の列 $\{f^j\}$ の挙動を考察する．ここで f は単射ではない（すなわち射影変換ではない）とする．各点 $p \in P^n$ の近傍での $\{f^j\}$ の挙動によって P^n の点を分類する．1変数の場合にならって，Fatou 集合を

$$\Omega = \{p \in P^n |\ p \text{ のある近傍上で } f^j(j=1,2,\dots) \text{ は正規族をなす}\}$$

によって定義する．Ω は擬凸開集合 $\neq P^n$ で，小林双曲的である．($\Omega = \emptyset$ の場合もある.)

例　$f:[z_0:z_1:z_2] \mapsto [z_0^2:z_1^2:z_2^2]$ の場合，Ω は3つの連結成分からなる．

Fatou 集合の性質について，以下は重要な未解決問題である．

1．Ω は小林計量について完備であるか？
2．Fatou 成分は前周期的か？(あるいは遊走成分が存在するか？)
3．不変 Fatou 成分を分類せよ．

以下では第3の問題について考える．まず，不変 Fatou 成分を recurrent なものと，non-recurrent なものに分けて考える．ここで U が recurrent であるとは，のある部分列が U の内点に収束することをいう．2次元の場合，次の定理が Fornaess-Sibony によって証明された．

定理　正則写像 $f:P^2 \to P^2$ の recurrent Fatou 成分 U は次の3種に限られる：

(1) 吸引不動点 $p_0 \in U$ が存在して，はその直接吸引領域となる．

(2) U の1次元複素部分多様体 S が存在する．S は円板 Δ，穴あき円板 Δ^*，または円環に等角同値．$f^j|U$ の適当な部分列の極限写像 φ で $\varphi(U)=S$ かつ $\varphi|S$ が S の恒等写像となるものがある．

(3) U は rotation domain である．すなわち $f^j|U$ の部分列で U の恒等写像に収束するものがある．

この定理に関して，次を示すことができる．

命題　上の定理の（2）で，S が Δ^*に等角同値となる場合はない．

これを証明する鍵となる Fatou 写像の概念とその小林計量との関連について述べる．

定義　複素多様体 X から P^nへの正則写像 φ が f に関する Fatou 写像であるとは，$\{f^j\}$ が正規族をなすことをいう．

P^n上の Riemann 計量から定まる距離 ρ を固定する．また X の上の小林擬距離を d_X とする．

定理　正則写像 $f: P^n \to P^n$ に対して，次のような定数 $C > 0$ が存在する：$\varphi: X \to P^n$ が Fatou 写像ならば，任意の $a, b \in X$ に対して

$$\rho(\varphi(a), \varphi(b)) \leq C d_X(a, b)$$

が成り立つ．

定理　f に関する Fatou 写像 $\varphi : \Delta^* \to P^n$ は必ず Δから P^n への Fatou 写像に拡張できる．

注　2次元の場合，non-recurrent な成分は次の2種であろうと予想される：

(1) U の境界上に不動点 p_0 が存在して，は定置写像 p_0 に広義一様収束する．

(2) P^2 の（閉でない）1次元複素部分多様体 $S \subset \partial U$ があって，$f^j|U$ の任意の収束部分列の極限写像 φ は$\varphi(U) = S$ を満たす．

参考文献

[1] J. Fornaess and N. Sibony: Classification of recurrent domains for some holomorphic maps, Math.Ann. 301 (1995) 813-820.

[2] T. Ueda: Fatou sets in complex dynamics on projective spaces, J.Math.Soc.Japan, Vol.46 (1994) 545-555.

グレブナー基底は面白い (談話会用アブストラクト)

早大理工: 榍　元

§**1. 問題.**

(1-1) 学部入試レベル???: xyz-空間にある動点 $P(t)=(t,t^2,t^3)$ の描く軌跡をCとする:

$$C := \{(t,t^2,t^3)\in\mathbb{R}^3 | t\in\mathbb{R}\}$$

そして, C の各点 $P(t)$ での接線 L_t を考え, すべての点での接線の和集合を X とする:

$$X := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} L_t$$

このとき, X の x,y,z についての方程式を求めよ. (または, 準同型写像

$$\varphi : \mathbb{R}[x,y,z]\to\mathbb{R}[t,u]; x\mapsto t+u, y\mapsto t^2+2tu, z\mapsto t^3+3t^2u$$

の核, $\mathrm{Ker}\ \varphi\subseteq\mathbb{R}[x,y,z]$ のイデアルとしての生成元を求めよ.)

(1-2) 大学院入試レベル: 次で与えられる準同型写像

$$\psi : \mathbb{R}[x,y,z]\to\mathbb{R}[t]$$

の核, $\mathrm{Ker}\ \psi$ の生成元を求めよ.

(初級) $x\mapsto t, y\mapsto t^2, z\mapsto t^3$

(中級) $x\mapsto t^2, y\mapsto t^3, z\mapsto t^4$

(上級) $x\mapsto t^3, y\mapsto t^4, z\mapsto t^5$

(1-3) (1-1) の $\mathrm{Ker}\ \varphi$ を Mathematica で求めるには,

In[1]:=

```
F = {t + u - x, t^2 + 2 t u - y, t^3 + 3 t^2 u - z};
M = {t, u, x, y, z};
GroebnerBasis[F, M]
```

Out[3]:=

$\{-3x^2y^2+4y^3+4x^3z-6xyz+z^2, 2uy^3+xy^3-4x^2yz+5y^2z-2uz^2-2xz^2, -2uy^2-xy^2+2uxz+2x^2z-yz, uxy-x^2y+2y^2-uz-xz, 2ux^2-2x^3-2uy+3xy-z, u^2-x^2+y, t+u-x\}$

(1-4) 解説: $\mathbb{R}[t,u,x,y,z]$ のイデアル $I=\langle t+u-x, t^2+2tu-y, t^3+3t^2u-z\rangle$ の, $t>u>x>y>z$ として定めた辞書式順序に関するグレブナー基底が出力され, 変数を x,y,z しか含まない, 一番初めの多項式が求めるものである.

§**2. 単項式順序.**

(2-1) 体 k 上の多項式環 $k[x_1,\dots,x_n]$ の単項式の全体と$\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とは, 変数に順序を付けるごとに 全単射対応がある. たとえば, $x_1>\cdots>x_n$ とすると,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\leftrightarrow\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

(2-2) 単項式順序の定義: $k[x_1,\dots,x_n]$上の単項式順序とは, 単項式 $x^\alpha,\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ の全体の集合上の関係 $>$, または同値なこととして, $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上の関係であって, 次を満たすものを言う:

(1) $>$ は $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上の全順序 (線型順序) である. すなわち, 任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して, $\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, または, $\alpha>\beta$ のいずれかひとつが成り立つ.

(2) $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して, $\alpha>\beta\Rightarrow\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ となる.

(3) $>$ は a well-ordering on $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. すなわち, $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ の空ではない任意の部分集合は $>$ に関して, 最小元を持つ.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(2-3) (3) は降鎖律と同値である. また, (1, 2)の下, (3) $\Leftrightarrow \alpha \geq 0 (\forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ となる.
(2-4) 辞書式順序 (lexicographic order): $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して,

$$\alpha >_{lex} \beta \Leftrightarrow \text{ある } 1 \leq i \leq n \text{ が存在して}, \alpha_i > \beta_i \text{ かつ任意の } j < i \text{ に対して } \alpha_j = \beta_j$$

で定まる順序 $>_{lex}$ を辞書式順序という. これは単項式順序となる.
(2-5) 他の単項式順序の例として, 次数付辞書式順序, 次数付逆辞書式順序, ... などがある.
(2-6) leading term の定義: 単項式順序をひとつ固定する. ゼロではない多項式 $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \dots, x_n]$ に対して, $\alpha_0 := \max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} | a_\alpha \neq 0\}$ を f の multidegree とよび, その項, $a_{\alpha_0} x^{\alpha_0}$ を f の leading term とよんで LT (f) と書く.

§3. グレブナー基底.
(3-1) $I \neq \{0\}$ なるイデアル $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ に対して, I の leading term 全体のなす集合を LT (I) と書く:

$$\mathrm{LT}\ (I) := \{\mathrm{LT}\ (f) | f \in I\}$$

LT (I) の元で生成されるイデアルを $\langle \mathrm{LT}\ (I) \rangle$ と書く.
(3-2) グレブナー基底の定義: ひとつ単項式順序を固定する. イデアル I の有限部分集合 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ が I の グレブナー基底であるとは, 次を満たすときを言う:

$$\langle \mathrm{LT}\ (g_1), \dots, \mathrm{LT}\ (g_t) \rangle = \langle \mathrm{LT}\ (I) \rangle$$

(3-3) グレブナー基底ではない例: $f_1 = x^3 - 2xy, f_2 = x^2y - 2y^2 + x$ とすると, lex order with $x > y$ に関してこの f_1, f_2 は $\langle f_1, f_2 \rangle$ のグレブナー基底ではない. というのは, $I \ni -y \cdot (x^3 - 2xy) + x \cdot (x^2y - 2y^2 + x) = x^2$ だから, $x^2 \in \mathrm{LT}\ (I) \subseteq \langle \mathrm{LT}\ (I) \rangle$ だが, $\mathrm{LT}\ (f_1) = x^3, \mathrm{LT}\ (f_2) = x^2y$ なので, 次数をみれば $x^2 \notin \langle \mathrm{LT}\ (f_1), \mathrm{LT}\ (f_2) \rangle$ がわかる.
(3-4) 基本定理: ゼロではないすべてのイデアル $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ は, グレブナー基底 G を持つ. また, グレブナー基底はそのイデアルを生成する: $I = \langle G \rangle$. □
(3-5) 実際にはどのようにして求めるか? その答えのひとつを与えるのが, Buchberger's Algorithm: 非常に具体的に計算できる.
(3-6) 被約グレブナー基底の定義: 多項式イデアルIのグレブナー基底G が被約であるとは, 次の2条件を満たすときを言う.

(1) 任意の $p \in G$ に対して, p の leading term の係数は 1
(2) 任意の $p \in G$ に対して, p のどの項も $\langle \mathrm{LT}\ (G - \{p\}) \rangle$ には含まれない.

(3-7) 被約グレブナー基底についての定理: $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ をゼロではないイデアルとする. このとき, 与えられた単項式順序に関する被約グレブナー基底が唯一つ存在する
(3-8) 計算機での多くの数学プログラムでは, グレブナー基底の計算では, 被約グレブナー基底を求めている.
(3-9) 被約グレブナー基底の応用: 生成元の与えられた2つのイデアルが等しいかどうか知るには, それぞれの被約グレブナー基底を求めて, それらが等しいかどうかをみればよい.

§4. 消去定理.
(4-1) 消去イデアルの定義: イデアル$I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ に対して, $k[x_{k+1}, \dots, x_n]$ のイデアル,

$$I_k := I \cap k[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

を I の第 k 消去イデアルとよぶ.
(4-2) 消去定理: $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ をイデアルとし, G を lex order with $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ に関する I のグレブナー基底とする. このとき, $0 \leq k \leq n$ なる任意の k に対して,

$$G_k := G \cap k[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

とおくと, G_k は, I の第 k 消去イデアル, $I_k = I \cap k[x_{k+1}, \dots, x_n]$ のグレブナー基底となる.
(4-3) (1-3) の結果に適用すると, lex with $t > u > x > y > z$ に関して, I の第2消去イデアル $I_2 = I \cap \mathbb{R}[x, y, z]$ は $G_2 = \{-3x^2y^2 + 4y^3 + 4x^3z - 6xyz + z^2\}$ をグレブナー基底にもつ.

§5. 参考文献.

[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer U.T.M. , 1992
[2] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Springer G.T.M. **52**, 1977

以　上

線 叢 の 幾 何

神戸大学・理　　佐々木　武

1. Line congruence. We call a 2-parameter family of lines in 3-dimensional projective space P^3 a *line congruence* (線叢). A familiar example is the normal congruence consisting of normal lines to a surface in 3-dimensional Euclidean space.

Practically, a line congruence is given by a pair of surfaces $\{x(u,v), y(u,v)\}$ with common surface-parameter u and v. For each parameter, we associate the line $\overline{xy}$ joining two points $x(u,v)$, $y(u,v)$, and thus obtain a line congruence.

To study line congruence, it is customarily useful to choose two distingushied surfaces called *focal surfaces*. Instead of recalling the definition, we give a system of differential equations on two unknowns x and y:

$$\begin{aligned} x_v &= my \qquad & x_{uu} &= ax + by + cx_u + dy_v \\ y_u &= ny \qquad & y_{vv} &= a'x + b'y + c'x_u + d'y_v. \end{aligned}$$

The two equations on the left say that the tangent line to the surface x along v-curve is passing the point y and that to the surface y along u-curve is passing the point x. This property is equivalent to that the surfaces x and y are focal surfaces to the line congruence $\overline{xy}$.

The study of line congruence looking at this system was begun by E.J. Wilczynski in 1920s.

2. Examples. In this talk I explained my interest in line congruence in conection with affine and/or projective differential geometry and hypergeometric systems. Let me give two examples:

Example 1. Let $f : M^2 \to \mathbf{R}^3$ be an immersion of a surface M into the affine space $\mathbf{R}^3$. The second fundamental form h in Euclidean sense is a conformal invariant in affine sense. Assume that h is nondegenerate and choose affine coordinates so that $|\det(h)| = 1$. Then $\xi = (\Delta_h f)/n$, Δ_h being the Laplacian relative to h, is called the *affine normal* and its differential in $\mathbf{R}^3$, $D_X\xi = -SX$ for any tangent vector field X, defines an operator S of T_xM at each point x. The mean of its trace $H = \operatorname{tr} S/n$ is called the *affine mean curvature* and the immersion for which $H = 0$ is said to be *affine minimal*.

Like for minimal surfaces in Euclidean space, we have an integral formula, the affine Weierstrass formula, describing affine minimal surfaces. Assume that h is definite and let z be conformal coordinates relative to h; then, for each affine minimal surface, there exists a holomorphic function w such that

$$f(z) = -\frac{i}{4}\left\{ w \wedge \overline{w} + \int^z (w \wedge dw - \overline{w} \wedge d\overline{w}) \right\}.$$

Then a rotation $\check{w} = iw$ defines another affine minimal surface:

$$\check{f}(z) = -\frac{i}{4}\left\{w \wedge \overline{w} - \int^{z} (w \wedge dw - \overline{w} \wedge d\overline{w})\right\}.$$

Tow surfaces f and $\check{f}$ are focal surfaces of the line congruence $\overline{f(z)\check{f}(z)}$. Moreover, the affine normals ξ for f and $\check{\xi}$ for $\check{f}$ are parallel and the conformal structures of both surfaces are the same. The case where h is indefinite is similarly treated. Conversely, due to S.S. Chern and C.L. Terng, certain converse statement does hold.

Example 2. The following system of differential equations is called Appell's system E_2:

$$\theta_x(\theta_x + \gamma - 1)z - x(\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_x + \beta)z = 0,$$
$$\theta_y(\theta_y + \gamma' - 1)z - y(\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_y + \beta')z = 0,$$

where $\theta_x = x\partial/\partial x$, $\theta_y = y\partial/\partial y$ and α, β, β', γ, and γ' are complex parameters. The number of independent solutions is 4. Choose a fundamental set of solutions; say, $z^1, \dots, z^4$. Then the mapping $(x, y) \to z = [z^1, \dots, z^4]$ into projective 3-space defines an immersion of the surface parametrized by (x, y). Symbolically, let us write this surface by $z(A)$, where A denotes the set $(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma')$. Let us now vary A to A' by adding integer values to each component. We get a new surface $z(A')$. Thus we obtains a line congruence $\overline{z(A)z(A')}$. This congruence reflects the symmetry of the system E_2 and it is called contiguity relations on one hand and it provides on the other hand concrete examples of Laplace transformation of surfaces. The latter was given by K. Okamoto and Y. Kametaka about ten years ago.

3. Now we need to know how to solve equivalence problem of line congruences, which principally is due to Y. Se-ashi; namely, how to give fundamental invariants of line congruence in connection with classical results. Next we reformulate Laplace transformation in a form desirable for line congruence. The theory of projectively minimal surfaces and line congruence is promising for further study; several works by Su Buchin are important and stimulating in this respect.

For details, refer to my notes: "On Line Congruence and Laplace Transformation."

(1997.1.29)

Subvarieties of Tori

S. Kobayashi

複素トーラスTの(一般には特異点をもつ)複素部分多様体Xの構造を微分幾何的な手段で調べると いうのがこの話の目的です。

Xに特異点のない場合は松島、Howard、長野、Smythなど Notre Dame の人達により微分幾何の方法で研究されました。

また、代数幾何的な方法では上野の Classification of Algebraic Varieties (Springer Notes) に詳しく述べられています。

ここで、特異点のある場合も含めて考えたい理由は次の Bloch-Ochiai の定理の証明に使いたいからです。いま、Mをn次元非特異代数的多様体、その irregularity $q = \dim H^0(M, \Omega^1_M)$ がnより大きいとすると、すべての正則写像 $f: \mathbb{C} \to M$ が代数的に退化する(すなわち、$f(\mathbb{C})$はMの proper な subvariety に含まれる)というのが Bloch-Ochiai の定理です。この定理を証明するにあたって Albanese map $\alpha_M : M \to \mathrm{Alb}(M)$ を考え、その像 $X = \alpha_M(M)$ の構造を知る必要があります。そのとき、Mが非特異であってもXには特異点があるかもしれないからです。

さて、$X \subset T$ の構造定理は次のように述べられます。Xを不変にするようなTの元全体のつくる群の identity component をT'とすると、fibering $X \to X/T'$ の base space X/T' は general type の多様体になる、すなわち、その Kodaira 次元 $\kappa(X/T')$ は X/T' の次元と一致する。

これは、いわゆる Iitaka fibration の特別な場合で、上に述べ

た上野の Notes では、そのような立場から説明されています。

ここでは、この fibration を、relative nullity space によって定義される maximal integral submanifolds による fibration としてとらえ、relative nullity space をいろいろな見方から定義することにより幾何学的意味をはっきりさせると共に Bloch-Ochiai の定理に必要な lemma も同時に得ようというわけです。

配置空間いじり　　29-01-1997

九大・数理　吉田正章

配置空間と聞いて人々は何を思い浮べるかというと

- 殆んどの人は初めて聞く言葉なので何も思いようがない，
- 射影部分多様体の族，ヒルベルトスキーム，…（相当数います）
- K-理論，polylogarithmic 関数，…（最近増えてます）
- 超幾何関数，一意化，保型形式，…（私の仲間，極小数派）
- 双曲構造，Thurston，…（こういう人々の存在を1ヶ月前に知った）。

以下では点の配置空間のみを扱う．別に点でなくとも面白いことはいくらでもあると思うが，私は点だけでも十分忙がしい．

先礼とは存じますが，まず中学校でやる数学の復習をする．平面 E 上に運動群 G が働いている状況を考える．同一直線上にない E 上の3点（三角形ともいう）の全体に自然に G が働く．その商空間を考える．式で書けば

$$G\backslash(E\times E\times E-\Delta)=:X$$

とでもなりましょうか．そもそも商空間というものは抽象的で分りにくいものですから，この空間の実現と申しましょうか，何かよく知ってるつもりの空間への埋め込みと申しましょうか，そんなものを作って，少しでも分ったつもりになりたい．即ち，$E\times E\times E-\Delta$ 上の G-不変式の完全系を求めたい．驚くべきことに，このことが中学校で既になされているのであります．

<u>定理</u>（三辺合同）

$$E\times E\times E\ni(a,b,c)\longmapsto(|a-b|,|b-c|,|c-d|)\in\mathbb{R}^3$$

は X と $\{(x,y,z)\mid x,y,z>0,\ x+y>z,\ y+z>x,\ z+x>y\}$ の同型を与える．

完全系の取り方が一意でないことは、二辺挟角、二角挟辺でも同様のことが成り立つことで分る。我々は中学で何と高級な定理を習ったのであろうか！

今から、中学数学を卒業して研究レベル（生活のかかった）の話をする。何のことはない、唯、下のように少し変えるだけ：

$E \rightsquigarrow \mathbb{P}^{k-1}$（射影空間），$G \rightsquigarrow PGL(k)$，$3 \rightsquigarrow n$．

商空間

$$X(k,n) := G \backslash (\overbrace{\mathbb{P}^{k-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{k-1}}^{n\text{個}} - \Delta)$$

を $\mathbb{P}^{k-1}$ 内の n 点配置空間と称する。こんな、一見簡単にみえるものもずい分まじめに研究されているのです。今世紀初頭の代数幾何学者に始まり、今も続いております。しかし、各々の配置空間がどの位深く研究されているかと申しますと、

<u>悲しい現状</u>：$(k,n)=(2,n)$，$n \leq 8$，$(3,6)$ 以外の場合は殆んど何も分っていない。

<u>大学生レベルの話</u>：$\mathbb{P}^1$上の相異る3点は一次分数変換で$\{0,1,\infty\}$にもってこれる，即 $X(2,3)=$一点．これは函数論のどんな教科書にも最初の10頁以内に出てくる。そこには次のことも書いてある。$\mathbb{P}^1$上の相異る4点を $x_1,\cdots,x_4$ とすると，一次分数変換で，$x_1 \mapsto 0$, $x_2 \mapsto 1$, $x_3 \mapsto \infty$ としたとき x_4 は $(x_4-x_1)(x_2-x_3)/(x_4-x_3)(x_2-x_1)$ にうつる，即 $X(2,4) \cong \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$，（4点の複比）．

(注) 以上の議論は任意の体で通用する．

(注) ここまでで，山田裕史談話会委員の「非専門家にも理解できる…」なる要求に答えたと思うので，次に進む．

<u>生活のかかった話</u>：$X(2,5)$，$X(2,6)$ 等の最新の成果．

(注) 山田委員は講演要旨を1〜2ページ，しかも手書きで結構といっているので，ここでおしまいとする．

粒子系におけるハリス法と相関不等式

今野紀雄（横浜国大・工・応用数学）

発表内容構成：

§１．Basic Contact Process (BCP)　§２．Dual Process for BCP　§３．Harris Lemma

§４．Katori-Konno Method　§５．相関不等式 I

§６．Holley-Liggett Method　§７．相関不等式 II　§８．まとめ

要旨：本講演では、無限粒子系、特に１次元 Basic Contact Process (BCP) の Harris Lemma を用いたハリス法から得られる結果と、それに対応する相関不等式から得られる結果との関係について話をした。但し、詳しくは講演中に指摘するしたように、内容によっては一般のモデルに拡張可能である。

§１と§２において、ＢＣＰの定義、簡単な性質、及びその生存確率（秩序パラメータ）と臨界値について述べた。§３ではＢＣＰの生存確率と臨界値の上限と下限を統一的に求める方法の基礎になる Harris Lemma を紹介した。背景になる議論、他のモデルへの拡張に関しては例えば参考文献の[1,2]を参照のこと。

§４では上記 Harris Lemma を用い、生存確率の上限と臨界値の下限を求める Katori-Konno (K-K) 法について述べた。§５では K-K法によって得られた結果が、実はＦＫＧ不等式をある意味で精密化した、新しいタイプの相関不等式を仮定することにより、導かれる議論を紹介した。あわせて、最近この相関不等式が証明されたことも報告した[3]。

§６では§４同様、Harris Lemma を用い、生存確率の下限と臨界値の上限を求める Holley-Liggett (H-L) 法について述べた。§７では §５と同じようにH-L法によって得られた結果が、じつは新しいタイプの相関不等式（但し§５とは違うタイプ）を仮定することにより導かれる議論を紹介した。現在この相関不等式の証明を試みているところである。

最後の§８において、本講演の内容をまとめ、今後の展望について述べた。

また、多少タイトルと内容はずれるが、ロトカ－ボルテラ・タイプの３状態無限粒子系に関する平均場近似、ペア近似の研究についても述べた。特に、安定性の問題、直接効果と間接効果の問題、さらには状態数の偶奇性の問題など、様々な問題が数学的に未解決のままであり、興味深い。今後の研究が期待される分野である。

参考文献：

[1] N.Konno: *Lecture Notes on Harris Lemma and Particle Systems* (Universidade de Sao Paulo, 1996)

[2] N.Konno: *Phase Transitions of Interacting Particle Systems* (World Scientific, Singapore, 1994)

[3] V.Belitsky, P.A.Ferrari, N.Konno and T.M.Liggett: A strong correlation inequality for contact processes and oriented percolation, to appear in Stochastic Process. Appl. (1997)

無限粒子系に対応するディリクレ形式の一意性

種村 秀紀 (千葉大学 理学部)

無限粒子系を表す確率過程を構成する方法には様々なものがあるが、ディリクレ形式によるものはその一つである。粒子の配置空間上で定義された滑らかな局所関数の集合上に双線型形式を導入し、この双線型形式が可閉であり、閉包が準正則ディリクレ形式になる事が示されれば、ディリクレ形式の一般論によりこの準正則ディリクレ形式に対応する確率過程が構成できる。相互作用を持つ無限個のブラウン粒子系の場合には、長田 [O] が、かなり一般な相互作用に対してディリクレ形式による拡散過程の構成が出来る事を示した。

ところで、一般には双線型形式のディリクレ拡大は一意ではなく、それぞれに異なる確率過程が対応する可能性がある。ここでは、ディリクレ拡大の一意性を論じる。我々が扱うのは、粒子間の相互作用がハードコアペアポテンシャルΦ_r;

$$\Phi_r(x,y)=\begin{cases}0, & if\ |x-y|\geq r,\\ \infty & otherwise.\end{cases} \tag{0.1}$$

で与えられている場合に限る。この時、粒子系は粒子の位置を剛体球の中心と看倣すことより多次元ユークリッド空間 R^d 内の直径が$r\in(0,\infty)$である無限個の剛体球の系となる。この系において、各剛体球はブラウン運動に従って動くが、複数の剛体球が衝突した場合には互いに反発する。

(番号付されていない)剛体球の配置空間 X

$$\mathrm{X}=\left\{\eta=\{x_i\}\subset R^d:|x_i-x_j|\geq r, i\neq j\right\} \tag{0.2}$$

で定義される。Xは、漠位相によりコムパクト距離空間となる。B(X) と $\mathrm{B}_K(\mathrm{X})$ を次で定義されたσ 加法族とする;

$$\mathrm{B}(\mathrm{X})=\sigma(N_A;A\in\mathrm{B}(R^d)),\ \mathrm{B}_K(\mathrm{X})=\sigma(N_A;A\in\mathrm{B}(R^d),A\subset K).$$

自然数nに対して$(R^d)^n$の部分集合D_nを$D_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in(R^d)^n:|x_i-x_j|>r, i\neq j\right\}$で定義する。閉包$\overline{D_n}$はn個の剛体球の配置空間となる。$\mathrm{B}_{K_l}(\mathrm{X})$可測関数fに対して、$\overline{D_n}$上の置換不変な可測関数$\hat{f}$で

$$f(\xi)=\hat{f}(x_1,\cdots,x_{n_l}),\qquad \text{if}\quad \xi\cap\mathrm{K}_l=\left\{x_1,\cdots,x_{n_l}\right\}\cap\mathrm{K}_l,$$

が成立するものが存在する。ここで、 $\mathrm{K}_l=[-l,l]^d, n_l=\max_{\xi\in\mathrm{X}}\left\{N_{\mathrm{K}_l}(\xi)\right\}$である。ある自然数$l$に対して$\mathrm{B}_{K_l}(\mathrm{X})$ 可測である関数fを局所関数と呼び, さらに $\hat{f}$が滑かなとき、滑かな局所関数であると呼ぶ。滑かな局所関数全体の集合をD_∞^{loc}と書く。D_∞^{loc}は、X上の実数値関数全体の集合$C(\mathrm{X})$の稠密な部分集合である。滑かな局所関数f, gに対して、自然数lを十分大きく取れば、$\overline{D_k}$上の置換不変な滑かな関数 $\hat{f}_k, \hat{g}_k$ $(k=0,1,\cdots n_l)$ を

$$f(\xi)=\hat{f}_k(x_k),\qquad g(\xi)=\hat{g}_k(x_k),\qquad \text{if } \xi\cap K_l=\left\{x_1,\cdots x_k\right\},$$

が成立する様に選ぶ事ができる。ハードコアポテンシャルΦ_rに対応する Gibbs 分布をμと書き、D_∞^{loc}上の双線型形式$\tilde{\mathrm{E}}$、D_∞^{loc}を次の様に定義する:

$$\tilde{\mathrm{E}}(f,g)=\frac{1}{2}\int_{\eta(K_l)=0}\mu(d\eta)\sum_{k=1}^{n_l}\frac{z^k}{k!}\int_{K_l^k}dx_k\chi(x_k\,|\,\eta)\nabla\hat{f}_k(x_k)\bullet\nabla\hat{g}_k(x_k)$$

長田 [O] は、この双線型形式が可閉であり、閉包$(\bar{\mathrm{E}},\bar{D})$が正則ディリクレ形式になる事を示した。さて$f\in DL$の時、ほとんど全ての$\eta$に対して$f(x\bullet\eta)$ はxの滑かな関数となり

$$\nabla_x f(x\bullet\eta)=(\frac{\partial f(x\bullet\eta)}{\partial x^1},\cdots\frac{\partial f(x\bullet\eta)}{\partial x^d}),\ \Delta_x f(x\bullet\eta)=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 f(x\bullet\eta)}{\partial^2 x^k}$$

は定義できる。DLのある部分集合T(X)上の作用素L_0を

$$L_0 g(\eta)=\sum_{x\in\eta}\Delta_x g(\eta)\qquad (g\in \mathrm{T(X)}),$$

で定義すると、関係式

$$\tilde{\mathrm{E}}(f,g)=(f,-L_0 g)_\mu,\qquad f,g\in \mathrm{T(X)}$$

が成立する事は容易に分かる。作用素L_0のある自己共役マルコフ拡大Lにより

$$\tilde{\mathrm{E}}(f,g)=(\sqrt{-L}f,\sqrt{-L}g)_\mu,\ f,g\in D=Dom(\sqrt{-L})$$

と表現できるディィリクレ形式(E,D)全体の集合をA_Mと書くことにする。ディリクレ形式$(\bar{\mathrm{E}},\bar{D})$は$A_M$の最小元である。

主定理は次の結果である。

主定理.
$A_M=\{(\bar{\mathrm{E}},\bar{D})\}$である。

[O] H. Osada,
Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes,
Commun. Math. Phys. 176 (1996) 117--131.
[T] H.Tanemura,
A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in R^d,
Probab. Theory Relat. Fields 104 (1996) 399--426.
[Tk] M.Takeda,
The maximum Markovian self adjoint extensions of generalized
Schrödinger operators,
J. Math. Soc. Japan 44 (1992) 113--129.

講演要旨

タイトル：On Exponetial Tails of Total Occupation Times for Symmetric Markov processes
講演者：竹田雅好(阪大基礎工)

(B_t, P^W_x)を R^d 上のブラウン運動とし, μ を加藤クラス κ に属するR^d上の正のラドン測度とする. ここで, μ が加藤クラスκに属するとは,

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}(\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|<\alpha}\mu(dy)/|x-y|^{d-2})=0 \quad (d\geq 3)$$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}(\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|<\alpha}\mu(dy)/\log(|x-y|))=0 \quad (d=2)$$

$$\sup_{x\in R^d}\int_{|x-y|\leq 1}\mu(dy)/<\infty \quad (d=1).$$

を満たすこととする. 加藤クラスに属する測度は, 容量零の集合に測度を持たないため, Revus 対応により一意的に連続で正の加法的汎関数が対応する. そこで, $\mu\in\kappa$ に対応する加法的汎関数を A^μ_t とかくとき、次の定理が示せる.

定理
領域Gは正則, すなわち, $P^W_x(\tau_G=0)=1\ (x\in\partial G)$とし, 次元が1または2のときは, さらに, グリーン有界,すなわち,

$$\sup_{x\in G}E^W_x(\tau_G)<\infty$$

を仮定する. そのとき、全ての$x\in G$に対して、

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log P_x(A^\mu_{\tau_G}>\beta)=-\inf\left\{D(u,u);u\in C^\infty_0(G),\int_G u^2d\mu=1\right\}$$

ここで、Dはディィリクレ積分, $D(u,v)=\int_{R^d}\nabla u\bullet\nabla v d\mu$ とする.

この定理は, $G=R^d$, $d\mu(x)$ が $1_K(x)dx$(Kは コンパクト集合)のとき, Kac [2] によって固有関数展開をもちいて証明されたが, 生存時間有限な対称マルコフ過程にまでDonsker-Varadhan 型大偏差原理を拡張しておけば, A^μ_t によるブラウン運動の時間変更過程にそれを応用して示せる.

講演では十分触れる時間がなかったが、基本的には同じアイデアで次が示せる. Iを加算集合とし,$Q=(q_{ij})$をI×I -行列で、全ての$i\in I$に対して、

$$q_{ij}\geq 0(i\neq j)、\qquad \sum_{k\neq i}q_{ik}\leq -q_{ii}<\infty$$

かつ $m_iq_{ij}=m_jq_{ji}$ を満たすもので, $\{m_i\}_{i\in I}$は正の数列とする.
$M=(P_j,X_t,\zeta)$ を最小な m-対称 Q-過程 とし既約性を仮定する. その時、

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log P_j(\int_0^J I_{\{a\}}(X_s)ds>\beta)=-\left\{Cap(\{a\})/m_a+\sum_{j\in G}q_{aj}P_j(\sigma_a<\infty)\right\}$$

が示せる. ここに, $J=\inf\{t>0:(X_{t-},X_t)\in\{a\}\times G\}(G\subset I)$ で Capは
M の生成する $L^2(I;m)$上の Dirichlet 形式が定義する 0-order の容量.
Mが再帰的なときは, $Cap(\{a\})=0$ で $P_j(\sigma_a<\infty)=1$であるから, (2)は q_{ij} の確率論的意味付けを与える (cf [2]).

References

[1] Freedman, D.: Approximating Countable Markov Chains, Holden-Day (1972).

[2] Kac, M.: On some connections between probability theory and differential equations, Proc. 2nd Berk. Symp. Math. Statist. Probability, 189-215 (1950).

北海道大学理学部 数学教室 談話会(特別講演)

報告書：

講師： 上野喜三雄 (早大・理工・数学)

題目： $|q|=1$ における q 超幾何差分方程式の積分解について

要旨： q 超幾何差分方程式の解析的な解の構造は，$|q|<1$ (特に，$0<q<1$) の場合には十分深く理解されており，また，量子群 $SU_q(2)$，$SU_q(1,1)$ のユニタリー表現への応用も知られている．しかし，量子群 $SL_q(2,\mathbb{R})$ のユニタリー表現の立場からは，$|q|=1$ (ただし，1の巾根の場合を除外) での性質が重要である．

q 差分方程式は $|q|<1$ と $|q|=1$ では全く性質が異なり，$|q|=1$ での q 差分方程式の研究は未開の分野に等しい．

本講演においては，$|q|=1$ での q 超幾何差分方程式の解析的な解として2種類の積分解を提示した。ひとつは，超幾何級数に対する Barnes の積分表示の類似であり

もうひとつの積分解は，Eulerの積分表示の類似とみなせる．(ただし，積分路は非有界) このように積分解をつくることには成功したのだが，これらの解の漸近的挙動，接続公式，あるいは(線型)独立性といった，ごく基本的な事も分らない状態である．

これらの問題点の解明も含めて，$|q|=1$ におけるq-差分方程式の研究は今後も継続されねばならない．

On a relation among minimal models

Daisuke Matsushita

For the study of singularity, it is important to construct "nice" resolution. Every kind of surface singularity has the special unique resolution called minimal resolution, and it is very useful for the studying of surface singularity. There exists many attempt to enlarge this notion for higher dimensional singularity. and Minimal Model Program is proposed.

DEFINITION. Let X be a germ of singularity. We call X is terminal singularity if there exists a birational morphism $\pi : Y \to X$ which satisfies the following conditions:

(1) Y is smooth.

(2) $K_Y \sim \pi^* K_X + \sum a_i E_i \quad a_i > 0$.

Note that two dimensional terminal singularity is smooth.

DEFINITION. Let X be a germ of singularity. A minimal terminalization of X is a projective birational morphism $\pi : Y \to X$ which satisfies the following conditions:

(1) Y has only terminal singularities.

(2) $K_Y \sim \pi^* K_X$.

Minimal Model Program says that every kind of singularity has a minimal terminalization, and it is proved for three dimensional singularity and toric singularity. A minimal terminalization has same nice property of a minimal resolution of surface singularity, but there exist many minimal terminalizations. In this note, we describe a relation among minimal terminalizations of toric singularity.

THEOREM 1 *Let X be an affine toric variety which has only Gorenstein singularities. Then there exists a toric variety $S \subset \mathrm{Hilb}\mathbf{P}^n$ and an one-to-one correspondence between a minimal terminalization $\pi_\lambda : Y_\lambda \to X$ and a closed orbit of $s_\lambda \in S$ such that the fibre $\phi^{-1}(s_\lambda)$ of the universal family $\phi : Z \to S$ is not contained coordinate hyperplanes $x_i = 0$ of $\mathbf{P}^n(x_0, \cdots, x_n)$.*

We construct S as follows. From the assumption, we can write

$$X = \mathrm{Spec}\mathbf{C}[\sigma \cap \mathbf{Z}^{d+1}] \quad \sigma = \mathbf{R}_{\Delta \times \{1\}}$$

where $\Delta \subset \mathbf{R}^d$ is an integral polytope. Then we define

$$\mathbf{P}_\Delta := \mathrm{Proj} \oplus_{m \geq 0} \mathbf{C}[m\Delta \cap \mathbf{Z}^d]].$$

Assume that $n + 1 = \#(\Delta \cap \mathbf{Z}^d)$. There is a natural embedding $\mathbf{P}_\Delta \to \mathbf{P}^n$. We consider a diagonal action of $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$ on $\mathbf{P}^n$. and define

$$S := \{\text{closure of } \cup_{t \in (\mathbf{C}^*)^{n+1}} [t\mathbf{P}_\Delta] \text{ in } \mathrm{Hilb}\mathbf{P}^n\}.$$

On singularities of isotropic submanifolds

S. Janeczko

Let

$$\mathcal{P} = (T^\star X \times T^\star R^N, \pi_2^\star \omega_{R^N} - \pi_1^\star \omega_X)$$

be the product symplectic manifold. Let $L \subset \mathcal{P}$ be a Lagrangian submanifold transversal to the fibers of $T^\star(X \times R^N) \to X \times R^N$. Let S be a subset of $T^\star X$ we define the symplectic image of S

$$L(S) = \{\bar{\mu} \in T^\star R^N : \exists_{\bar{p} \in S}(\bar{p}, \bar{\mu}) \in L\}.$$

Now instead of L we consider the proper isotropic submanifold $I_{(L,\Lambda)} = L \cap \Lambda$, where $\Lambda = \{(\bar{p}, \bar{\mu}) : f(q, \lambda) = 0\} \subset \mathcal{P}$, and $f : X \times R^N \to R^k$. If L is generated by $(q, \lambda) \to G(q, \lambda)$ and R^N is zero section of $T^\star R^N$ the the pair (G, f) defines an isotropic variety

$$I^t_{(L,\Lambda)}(R^N)$$

Any isotropic submanifold of $T^\star X$ locally can be obtained in the above way. This implies an appropriate equivalence relation in the pairs (G, f). Classification of singularities of the isotropic projections is going by the standard procedure.

Equivalences: (G_1, f_1) and (G_2, f_2) are called $I-$equivalent iff

$$G_1 \circ \Xi - G_2 \in J^2(G_2, f_2) + \mathcal{E}_q, \quad f_1 \circ \Xi - f_2 \in (J(G_2, f_2))^k,$$

where $J(G, f) =< \frac{\partial G}{\partial x_j}, f > \mathcal{E}_{q,x}$

Example 0.1 *A_2- type isotropic varieties* ·

$$G(q, \beta, \lambda) = F(q, \lambda) + \beta det(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(q, \lambda).$$

These are sub-Lagrangian cone-like isotropic varieties with singularity set codimension ≥ 2. Normal form of A_2D_5 isotropic variety in $T^\star R^4$

$$G = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^4 + q_1\lambda_2^3 + q_2\lambda_2^2 - q_3\lambda_1 - q_4\lambda_2 + \beta(6\lambda_2^3 + 3q_1\lambda_2^2 + q_2\lambda_2 - 2\lambda_1^2).$$

Example 0.2 *$C-$ Lagrangian manifolds.*

Consider I^n isotropic, $I^n \equiv R^n \subset (C^{2n}, \omega)$, we have

$$T_p^c I = T_p I \cap (iT_p I) = (T_p I) \cap (T_p I)^{\perp}.$$

Any real (i.e. $T_p^c I = 0$) isotropic ($C-$Lagrangian) submanifold $I^n \subset (C^{2n}, \omega)$ is locally generated by $F : C^n \times R^n \times C^k \to C$.

$$F(q, \beta, \lambda) = f(q, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i(q, \lambda),$$

where f is holomorphic and g_i are real analytic, moreover $\{g_i = 0\}$ form a real hypersurface in the critical set $\Sigma = \{\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}(q, \lambda) = 0\}$.

Assume $rank(\frac{\partial f}{\partial \mu}) = k$, then in new variables

$$I = \{(p, q) \in T^{\star}X : \exists_{\lambda \in R^N}, p = \frac{\partial G}{\partial q}(q, 0, \lambda), \frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, 0, \lambda) = 0 = \frac{\partial G}{\partial \beta}(q, 0, \lambda)\}.$$

Any smooth isotropic submanifold-germ $I \subset T^{\star}X$ is expressed in the above form for some smooth generating family G. We call G, $I-$ Morse family if the smooth map

$$X \times R^N \ni (q, \lambda) \to (\frac{\partial G}{\partial \beta}(q, 0, \lambda), \frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, 0, \lambda)) \in R^k \times R^N$$

is nonsingular on the stationary set $\Sigma_G^I = \{(q, \lambda) : \frac{\partial G}{\partial \beta}(q, 0, \lambda) = 0 = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(q, 0, \lambda)\}$. Quasicaustic $Q(I) = \pi_X(I)$ of G is defined as

$$Q(I) = \{q : G(q, \bullet) \text{has a critical point on } \{0\} \times R^N\}.$$