「重力の正準理論の幾何」

大阪市大　橋本義武　'97. 2. 13

重力理論の基本方程式であるEinstein方程式は複雑な非線型方程式系なので、これを解析するために微分同相だけでなくもっと多くの隠れた対称性を見つける必要がある。そこで重力理論を正準形式に書いて正準変換をほどこせるようにする。

重力のように局所対称性を要請した理論においては、Lagrange形式からHamilton形式にうつる際に拘束条件(constraint)が生じる。よってまず拘束系の力学の正準形式の理論を展開しなければならない。

拘束系の力学には二つの側面がある。一つはベクトル場の与えられた多様体の部分空間の話として、もう一つはシンプレクティック多様体の部分空間の話として定式化される。primary / secondary constraint の別は前者に、constraint of first class / second class の別は後者に関わっている。

後者の問題は正しく物理的な相空間を取り出すことにある。これを組織的におこなうのがBatalin-Fradkin-Vilkoviskyの定式化である。これは、元の相空間にoddな変数をつけ加えたsuper相空間上でoddなHamiltonベクトル場として書かれたBRS作用素のコホモロジーをとって物理的な相空間上の関数環を取り出すというものである。

Characterization of right left equivalence of smooth map germs

Takashi NISHIMURA
(Yokohama National University)

For the given two C^∞ map germs $f, g : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$, let us consider the following three conditions.

(i): f and g are right left equivalent.

(ii): There exist a C^∞ diffeomorphic map germ $s : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ and a C^∞ map germ $M : (\mathbf{R}^n, 0) \to (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ such that the following (a), (b) and (c) are satisfied.

(a): $f(x) = M(x)g(s(x))$,

(b): The C^∞ map germ $F : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (0,0)) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ having the form

$$F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$$

is a C^∞ trivial deformation of f,

(c): The C^∞ map germ $G : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (0,0)) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ having the form

$$G(x, \lambda) = g(x) - M^{-1}(s^{-1}(x))\lambda$$

is a C^∞ trivial deformation of g.

(iii): There exist a C^∞ diffeomorphic map germ $s : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ and a C^∞ map germ $M : (\mathbf{R}^n, 0) \to (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ such that (a), (b) of the condition (ii) are satisfied.

In this talk, I will prove the following theorems 1 and 2.

Theorem1. Let $f, g : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ be C^∞ map germs with rank zero. Then, the conditions (i),(ii) and (iii) are equivalent.

We can see easily that in positive rank case the condition (iii) are not necessarily equivalent to the condition (i). However, we have:

Theorem2. The conditions (i) and (ii) are equivalent.

Mather's classification theorem is a corollary of theorem2.

ON Q_p SPACES

Rauno Aualaskar
(University of Joensuu, Finland)

A new class of functions named Q_p has been recently introduced and studied by several mathematicians. In the following we give some notations and define these spaces.

Let $\Delta = \{ z : |z| < 1 \}$ be the unit disk. Let $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ be a M—bius transformation of Δ. By $g(z,a)$ we denote a Green's function $\log \left| \frac{1-\bar{a}z}{z-a} \right|$ of Δ with logarithmic singularity at $a \in \Delta$.

We define the following spaces of functions analytic in Δ: For $p > 0$, we set

$$Q_p = \left\{ f : \sup_{a \in \Delta} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g^p(z,a)\, dx\, dy < \infty \right\}$$

and

$$Q_{p,0} = \left\{ f : \lim_{|a| \to 1} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 g^p(z,a)\, dx\, dy = 0 \right\}.$$

For $p = 1$, we know that $Q_1 = BMOA$ and $Q_{1,0} = VMOA$. If $p > 1$, then $Q_p = \mathcal{B}$ and $Q_{p,0} = \mathcal{B}_0$, where

$$\mathcal{B} = \{ f : B(f) = \sup_{z \in \Delta} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty \}$$

and

$$\mathcal{B}_0 = \{ f : \lim_{|z| \to 1} (1 - |z|^2)|f'(z)| = 0 \}.$$

Now $\mathcal{B}$ is called the space of Bloch functions and $\mathcal{B}_0$ the space of little Bloch functions. It is well known that $BMOA \subset \mathcal{B}$ and $VMOA \subset \mathcal{B}_0$. For parameter values $0 < p < q \leq 1$ the spaces have the nesting property

(i) $Q_p \subset Q_q \subset BMOA$,

(ii) $Q_{p,0} \subset Q_{q,0} \subset VMOA$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

and all inclusions are strict. Also some relations with classical function spaces are known, for example,

$$B_q \subset \bigcap_{1-\frac{2}{q}<p<1} Q_{p,0} \text{ for } 2 \le q < \infty,$$

where (analytic) Besov space B_q is

$$\{f : \iint_{\Delta} |f'(z)|^q (1-|z|^2)^{q-2}\, dxdy < \infty\}.$$

"Elimination of singularities and smooth structures of 4-manifolds

Department of General Education, Kochi National College of Technology
Kazuhiro SAKUMA

1. Introduction

We work in the smooth category. Around 1955, R. Thom provocated a "generalization of Morse theory". This includes one of the standpoints that consider a smooth of manifolds into higher dimensional Euclidean space (more ingeneral manifolds) and study the topological or differentiable structures of the manifolds. In this talk, we will carry out for the special case. From now on, we restrict ourselves to studying generic maps of 4-manifolds into $\mathbb{R}^3$.

Let $f: M \to \mathbb{R}^p$ be a smooth map of a closed n-dimensional manifold M into $\mathbb{R}^p$ $(n \geq p)$ which has only definite fold singularities as its singular points. Such a map is called a special generic map, which was first defined by Burlet and de Rham for $(n, p) = (3, 2)$. Here a definite fold singularity means that if we can choose local coordinates $(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n)$ centered at x in the set of singular points and $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_p)$ centered at $f(x)$, f has the following normal forms:

$$\begin{cases} y_i \circ f = x_i & (1 \leq i \leq p-1) \\ y_p \circ f = x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2 \end{cases}.$$

In this talk, as mentioned above, we study the global topology of such maps for $p = 3$ and give various results, among which are a splitting theorem for manifolds admitting special generic maps into $\mathbb{R}^3$ and a classification theorem of 4- and 5-

dimensional manifolds with mainly free fundamental groups admitting special generic maps into $\mathbb{R}^3$.

2. Results

First we give a complete list of 4- and 5-dimensional manifolds with free fundamental groups admitting a special generic map into $\mathbb{R}^3$. Using this result, we will see that the existence of a special generic map on a given manifold is strongly related to the smooth structure especially for 4-dimensional manifolds.

<u>Theorem A.</u>

Let M be a closed n-dimensional with free fundamental group. We suppose that $n = 4$ or 5. Then M admits a special generic map into $\mathbb{R}^3$ if and only if M is diffeomorphic to

$$\#^{r-\varepsilon} S^1 \times S^{n-1} \#^{\varepsilon} S^1 \tilde{\times} S^{n-1} \#^{s} S^2 \times S^{n-2} \#^{\delta} S^2 \hat{\tilde{\times}} S^{n-2} \# \Sigma^n$$

for some $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$ and $s \geq 0$, where r is the rank of the free group $\pi_1(M)$, the connected sum over the empty set is assumed to be the standard n-sphere, $S^1 \tilde{\times} S^{n-1}$ is the nonorientable S^{n-1}-bundle over S^1, $S^2 \hat{\tilde{\times}} S^{n-2}$ is the nontrivial S^{n-2}-bundle over S^2, Σ^n is the standard n-sphere for $n=5$, and $\Sigma^n = \partial(\Delta \times D^2)$ for some compact contractible 3-manifold Δ for $n = 4$.

Remark. Is $\Sigma^4 \# S^1 \times S^3$ diffeomorphic to $S^1 \times S^3$? As is easily seen, this is equivalent to the problem that if Σ^4 is diffeomorphic to S^4.

In the following, we give some examples of pairs of heomeomorphic smooth 4-manifolds (M_1, M_2) with the infinite cyclic fundamental group such that M_1 admits a special generic map into $\mathbb{R}^3$ while M_2 does not.

First we recall the construction of the Akbulut manifold. Let Q^4 be a Cappell-Shaneson's exotic $\mathbb{R}P^4$. Akbulut has found an embedding

$$\varphi : \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow Q^4 \# S^2 \times S^2$$

such that $\pi_1(Q^4 \# S^2 \times S^2 - \varphi(\mathbb{R}P^2)) \cong \mathbb{Z}$ and that the normal bundle of φ is isomorphic to that of a standardly embedded $\mathbb{R}P^2$ in $\mathbb{R}P^4$. Then we set $M = (Q^4 \# S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}\, N) \cup S^1 \tilde{\times} D^3$, where N is a closed tubular neighborhood of $\varphi(\mathbb{R}P^2)$ in $Q^4 \# S^2 \times S^2$ and $S^1 \tilde{\times} D^3$ is the nontrivial D^3-bundle over S^1. This is the so-called Akbulut manifold and it is known to be an exotic $S^1 \tilde{\times} S^3 \# S^2 \times S^2$. Then we have the following.

Theorem 1. Let M be a Akbulut manifold. Then for every non-negative integer k, $M \# k(S^2 \times S^2)$ is homeomorphic to $S^1 \tilde{\times} S^3 \# (k+1) S^2 \times S^2$, while $M \# k(S^2 \times S^2)$ does not admit any special generic map into $\mathbb{R}^3$.

Theorem 2. Let K be a $K3$ surface. Then for every integer r with $r \geq 0$, $S^1 \tilde{\times} S^3 \# K \# r(S^2 \times S^2)$ is homeomorphic to $S^1 \tilde{\times} S^3 \# (r+11)(S^2 \times S^2)$, while $S^1 \tilde{\times} S^3 \# K \# r(S^2 \times S^2)$ does not admit any special generic map into $\mathbb{R}^3$.

Remark. We should note that for the Akbulut manifold M, $M \# S^2 \tilde{\times} S^2$ is diffeomorphic to $S^1 \tilde{\times} S^3 \# S^2 \times S^2 \# S^2 \tilde{\times} S^2$ and hence it admits a special generic map into $\mathbb{R}^3$. Furthermore, the double cover $\hat{M}$ of M is diffeomorphic to $S^1 \times S^3 \# 2(S^2 \times S^2)$ and hence admits a special generic map into $\mathbb{R}^3$.

This is the joint work with Osamu SAEKI.

Isotopy invariants of discriminants of smooth stable mappings :Abstract

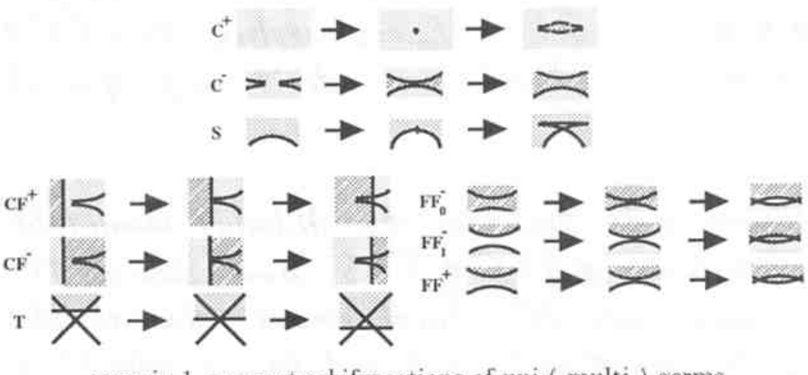
(on Febrary 18, 1997, at Dept. Math., Hokkaido Univ.)

Toru Ohmoto, Kagoshima University

Given a C^∞ mapping f from a closed surface M to 2-plane, we let $D(f)$ denote the descriminant set of f, say *the apparent contour of* f . In this talk we are concerned with the topology of apparent contours and shadows of f.

In Singularity Theory C^∞ maps f and g are called $\mathcal{A}$-equivalent if there are a diffeomorphism σ of the source and a diffeomorphism τ of the target such that $g \circ \sigma = \tau \circ f$. We define that f is C^∞ *stable* if all maps which are $\mathcal{A}$-equivalent to f forms an open subset of the mapping space $\mathcal{M}$ endrowed with Whitney topology. Now in our case $\mathcal{M} := C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$, and a C^∞ stable map $f : M \to \mathbb{R}^2$ can be characterized as follows : singularities of f are only of type (1) fold, $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0, (x, y) \mapsto (u, v) = (x^2, y)$, (2) cusp $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0, (x, y) \mapsto (u, v) = (x^3 - yx, y)$ and (3) double fold (bi-germ of fold types whose contours are transverse to each other). Hence the apparent contour of a C^∞ stable map is a set of closed plane curves with finitely many cusp points and transversal double points (that is a generic plane front in the sense of Arnold [3]). We say that two C^∞ stable maps f and g from M to $\mathbb{R}^2$ are *isotopic* if there exist a one parameter family $F_t : M \times [0, 1] \to R^2$ such that (1) F_t is C^∞ stable for each $0 \le t \le 1$, and (2) $F_0 = f$ and $F_1 = g$. Obviously isotopic C^∞ stable maps are $\mathcal{A}$-equivalent to each other. Here we shall consider isotopy invariants of C^∞ stable maps.

Let Γ is the subset of $\mathcal{M}$ consisting of all mappings $M \to \mathbb{R}^2$ which is not C^∞ stable. In particular, Γ can be regarded as an infinite dimensional closed hypersurface in $\mathcal{M}$. Furthermore, the 0-th cohomology group $H^0(\mathcal{M} - \Gamma; \mathbb{Z})$ is nothing but the set of integer valued functions of isotopy classes of C^∞ stable maps. The aim of this talk is to explain how to produce *numerical isotopy invariants of* C^∞ *stable maps* by using a certain stratification of Γ. The essential idea comes from recent works of Vassiliev, Arnold and Goryunov, which are concerned with isotopy classifications of knots, generic plane curves and generic mappings from M into $\mathbb{R}^3$ [1], [2], [3], [4]. In particular, the *local invariants* , which in the present talk we say Vassiliev type of order one, are described in terms of 1-parameter bifurcations of multi-germs from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, whose shadows and apparent contours are depicted bellow (cf. Rieger [5]) . The generators of the submodule of $H^0(\mathcal{M} - \Gamma; \mathbb{Z})$ consisting of all *local invariants* can be determined by some calculation of the coboundary operator of "Vassiliev cochain complex" associated to multi-germs of $\mathcal{A}_e$-codim 1 and 2.



generic 1-parameter bifurcations of uni (multi)-germs

REFERENCES

1. V.A.Vassiliev,, *Cohomology of knot spaces*, Adv. Soviet math., Amer. Math. Soc. **1** (1990), 23–69.

2. V.I.Arnol'd, *The Vassiliev Theory of Discriminats and Knots*, First European Cong. Math., Birkhäuser (1992), 3–29.

3. ———, *Topological invariants of plane curves and caustics*, Univ. Lecture Ser. 5, Amer. Math. Soc. (1994).

4. V.V.Goryunov, *Local invariants of generic mappings from surfaces into 3-space*, preprint.

5. J.H.Rieger, *Family of maps from plane to plane*, Jour. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.

6. T. Ohmoto, *Isotopy invariants for apparent contours of generic maps from surfaces to plane*, in preparation.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

擬フックス群空間の構造

松崎　克彦　（お茶の水女子大学理学部数学）

１９９７年２月２１日

1. クライン多様体

リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ の等角自己同相写像は一次分数変換（向きを保つメビウス変換）であり，これらの写像全体のなす群はリー群として $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})/\pm I$ と同一視される．この離散部分群をクライン群という．以下簡単のためクライン群は有限生成であり，単位元以外に位数有限の元をもたないと仮定する．メビウス変換はもともと複素平面の円または直線に関する反転の合成として定義されるので，この作用は自然に上半空間 $\mathbf{H}^3 = \{(x,y,t) \mid t>0\}$ に拡張する．しかも $\mathbf{H}^3$ に双曲計量 $ds^2 = (dx^2+dy^2+dt^2)/t^2$ をいれて双曲空間の上半空間モデルとすると，メビウス変換は $(\mathbf{H}^3, ds)$ の等長変換となる．

クライン群 Γ は双曲空間の等長変換群として真性不連続に作用するので，商空間 $\mathbf{H}^3/\Gamma$ は双曲多様体となる．また $\hat{\mathbf{C}}$ 上にも Γ の作用が真性不連続となる最大の開集合 $\Omega(\Gamma)$（不連続領域と呼ぶ）を考えると，商空間 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は複素多様体（リーマン面）となる．境界付き多様体 $(\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ は内部に双曲構造，境界に複素構造を持つものとみなし，これをクライン多様体と呼ぶ．

2. クライン群の変形空間

与えられたコンパクト3次元多様体の内部にどれだけの双曲構造が入るか，すなわち，クライン群 Γ で $\mathbf{H}^3/\Gamma$ が $\mathrm{Int}\,M$ と同相になるものがどれだけあるかを考える．Mostow の剛性定理は，M が閉多様体ならば双曲構造は存在すれば一意であること，Thurston の幾何学化定理は，広い範囲の M について双曲構造の存在を主張している．

双曲構造（クライン群）の変形空間を，M の基本群 $\pi_1(M)$ の $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ 表現空間のなかにつくる．いま，$\pi_1(M) = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ とすると，表現 $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ は像 $\rho(g_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ により定まるので，$\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ の基本関係から定義される $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})^n$ の解析的部分集合 $\mathrm{Hom}(\pi_1(M))$ を $\pi_1(M)$ の表現全体とみなすことができる．さらに

$$V(\pi_1(M)) = \{\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M)) \mid \rho(\pi_1(M)) : \mathrm{non-abelian}\}/\mathrm{conjugation}$$

として，$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ による共役な表現を同一視してパラメーター空間を設定する．このなかで忠実な離散表現全体を $\mathcal{D}$ とし，クライン群の変形空間と考える．ちょうど二次多項式のパラメーター空間の Mandelbrot 集合に相当するものをクライン群に対しても考えたいが，それがこの $\mathcal{D}$ であるとするのである．

問題は $\mathcal{D}$ の形はどのようなものかということである．しかし，与えられた生成元から群が離散かどうかを判定することは一般には困難なので，勝手にとった点が $\mathcal{D}$ に属するかいなかをいうことはできない．ある忠実な離散表現 $\rho_0(\pi_1(M)) = \Gamma_0$ から出発して，それの幾何学的に変形を通して $\mathcal{D}$ の形をみていくしかない．

3. 擬等角変形

複素平面の領域 D から$\mathbf{C}$ への向きを保つ同相写像 f が擬等角写像であるとは，超関数の意味での偏導関数 f_z, $f_{\bar{z}}$ が存在し，

$$\mu_f(z) := \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$$

と置くとき，ess.sup$|\mu_f(z)| =: k < 1$ をみたすことである．この μ_f は歪曲係数といわれ，等角写像からの離れ具合いを計る指標となる．逆に与えられた μ に対してそれを歪曲係数としてもつ擬等角写像の存在（と一意性）が Ahlfors-Bers による可測リーマン写像定理である．

クライン群 Γ が Γ_0 の擬等角変形であるとは，$\hat{\mathbf{C}}$ の擬等角自己同相写像 f による共役で $\Gamma = \rho(\Gamma_0) = f\Gamma_0 f^{-1}$ となるときをいう．f が Γ_0 の擬等角変形をあたえるための条件を歪曲係数に関する条件に書き換えると，$\mu = \mu_f$ が $(-1,1)$ 型の保型形式になること，すなわち

$$\mu(\gamma(z))\frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu(z) \quad \cdots (*)$$

がすべての $\gamma \in \Gamma_0$ について成り立つことである．そこで

$$B(\Gamma_0) = \{\mu \in L^\infty(\mathbf{C}) \mid \|\mu\|_\infty < 1,\ (*)\}$$

とおくと，$B(\Gamma_0)$ は複素バナッハ空間の単位球であり，$\mu \in B(\Gamma_0)$ に対して擬等角変形の共役類 $[\rho] \in V(\pi_1(M))$ を対応させると，正則写像 $\tilde{\Psi} : B(\Gamma_0) \to V(\pi_1(M))$ が定義される．$\tilde{\Psi}$ の像を Γ_0 の擬等角変形空間といい，$\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ と書く．$\mathcal{D}$ の各成分について中心 Γ_0 を選び，その擬等角変形空間の閉包が $\mathcal{D}$ となる という予想が未解決の難問である．

$B(\Gamma_0)$ の元はリーマン面 $\Omega(\Gamma_0)/\Gamma_0$ の複素構造の変形も与えているが，互いにホモトープな変形を同一視することにより，タイヒミュラー空間 $T(\Omega(\Gamma_0)/\Gamma_0)$ への射影 $\Phi : B(\Gamma_0) \to T(\Omega(\Gamma_0)/\Gamma_0)$ が得られる．このとき，Φ が正則で，$B(\Gamma_0)$ の各点を通る局所正則切断が存在するような 複素構造が一意に $T(\Omega(\Gamma_0)/\Gamma_0)$ に入る．また，$\tilde{\Psi}$ は Ψ により正則な immersion $\Psi : T(\Omega(\Gamma_0)/\Gamma_0) \to \mathrm{QH}(\Gamma_0) \subset V(\pi_1(M))$ に分解される．さらに像 $\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ は $V(\pi_1(M))$ の正規複素部分多様体になることも証明できる．

4. 擬フックス群空間

M が種数 $g \geq 2$ の閉曲面 S と閉区間 I の直積の場合に，より精密な $\mathcal{D}$ の構造の研究が始まっている．この場合，パラメーター空間 $V(\pi_1(S))$ は $6g-6$ 次元の複素多様体になる．S に双曲構造をあたえるフックス群 Γ_0 をとり $\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ を考えると，これは $T(S) \times T(S)$ と双正則同値な $6g-6$ 次元の $V(\pi_1(S))$ の部分領域である．最近，McMullen は $\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ の境界が局所連結ではないことを証明した．方法は次にあげるモノドロミー写像の性質を効果的に用いている．

閉曲面 S に入る射影構造とは，リーマン球面とその等角自己同相（メビウス変換）群をモデルとする幾何構造である．その全体 $P(S)$ は，タイヒミュラー空間 $T(S)$ の(正則) 余接バンドルと同一視され，底空間への射影 $P(S) \to T(S)$ は射影構造の定める複素構造への対応である．各点 $t \in T(S)$ 上のファイバーは，リーマン面 S_t 上の正則 2 次微分のなす $3g-3$ 次元の複素ベクトル空間とみなされる．射影構造 $(t,\varphi) \in P(S)$ に対して，その展開射像 $f_{t,\varphi} : \tilde{S} \to \hat{\mathbf{C}}$（$\tilde{S}$ は S の普遍被覆）が誘導するモノドロミー準同型 $\rho_{t,\varphi} : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をとると，対応 $(t,\varphi) \mapsto [\rho_{t,\varphi}]$ により モノドロミー写像 $m : P(S) \to V(\pi_1(S))$ が定義される．m は局所同相な正則写像であるが，単射でも proper でもない．

$P(S)$ の各ファイバーのモノドロミー写像による像を力学系的にとらえる．像は何度も $\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ を通過するが，その横切りかたを調べることにより，$\mathrm{QH}(\Gamma_0)$ の形状を解析するのが今後の課題となるだろう．

Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
小薗　英雄

Abstract

Let Ω be a domain in $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$, not necessarily bounded, with smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the Navier-Stokes equations in $\Omega \times (0,T)$ with $0 < T < \infty$:

$$
\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & \text{in } x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = a, \end{cases}
$$

where $u = u(x,t) = (u^1(x,t), \cdots, u^n(x,t))$ and $p = p(x,t)$ denote the unknown velocity vector and pressure of the fluid at the point $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, while $a = a(x) = (a^1(x), \cdots, a^n(x))$ is the given initial velocity vector field. For simplicity, we assume that the external force has a scalar potential and it is included into the pressure gradient.

We impose the following assumption on the domain Ω.

Assumption 1. (i) Ω is the whole space $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$;

(ii) Ω is the half space $\boldsymbol{R}^n_+ (n \geq 3)$;

(iii) Ω is a bounded domain in $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$ with $C^{2+\mu} (\mu > 0)$-boundary $\partial\Omega$;

(iv) Ω is an exterior domain in $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$, i.e., a domain having a compact complement $\boldsymbol{R}^n \backslash \Omega$ with $C^{2+\mu} (\mu > 0)$-boundary $\partial\Omega$.

Assumption 2. The initial data $a = a(x)$ is in L^2_σ.

Our theorem now reads:

Theorem 1. *Let the Assumptions 1 and 2 hold. There exists a positive constant* ε_0 *such that if* u *is a weak solution of (N-S) in* $L^\infty(0,T;L^n)$ *with the property*

$$
\limsup_{t \to t_* - 0} \|u(t)\|_n^n \leq \|u(t_*)\|_n^n + \varepsilon_0 \quad \text{for } t_* \in (0,T), \tag{0.1}
$$

then u *is in* $C^2(\bar{\Omega} \times (t_* - \mu, t_* + \mu))$ *for some* $\mu > 0$.

Corollary 1. *Let the Assumptions 1 and 2 hold. Every weak solution u of (N-S) in $L^\infty(0,T;L^n)$ with the property (0.1) for all $t_* \in (0,T)$ belongs to $C^2(\bar{\Omega} \times (0,T))$.*

Corollary 2. *Let the Assumptions 1 and 2 hold. Suppose that u is a weak solution of (N-S) in $L^\infty(0,T;L^n)$. If the left-hand limit $u(t_* - 0) \equiv \lim_{t \to t_* - 0} u(t)$ exists in L^n for every $t_* \in (0,T)$, then $u \in C^2(\bar{\Omega} \times (0,T))$.*

Let us consider another class of weak solutions. We denote by $BV(0,T;L^n)$ the set of all functions of *bounded variation* on $(0,T)$ with values in L^n. More precisely, $u \in BV(0,T;L^n)$ if there is a constant M such that the estimate

$$\sum_{j=1}^{m} \|u(t_j) - u(t_{j-1})\|_n \leq M$$

holds for all partitions $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{m-1} \leq t_m = T$ of $(0,T)$. Then we have

Corollary 3. *Let the Assumptions 1 and 2 hold. If u is a weak solution of (N-S) in $BV(0,T;L^n)$, then $u \in C^2(\bar{\Omega} \times (0,T))$.*

We shall next investigate how the L^n-norm controls the breakdown of smoothness of solutions. It was shown by Giga-Maiayaka and Kato that for every $a \in L^n_\sigma$, there exist $T > 0$ and a smooth solution u of (N-S) in the class

$$u \in C([0,T);L^n). \tag{0.2}$$

It is also proved by Giga and von Wahl that every weak solution u of (N-S) in the class (0.2) is regular.

Our characterization of singular time now reads:

Theorem 2. *Let the Assumptions 1 and 2 hold. Let u be a weak solution of (N-S) on $\Omega \times (0,T_*)$ in the class (0.2). Suppose that T_* is maximal, i.e., u cannot be extended to any weak solution of (N-S) in $C([0,T');L^n)$ for $T' > T_*$. Then we have the following alternative:*

(i) $\limsup_{t \to T_* - 0} \|u(t)\|_n = +\infty;$

or

(ii) There exists the weak limit $w\text{-}\lim_{t \to T_* - 0} u(t) \equiv u_{T_*}$ in L^n_σ and $u(t) - u_{T_*}$ oscillates as $t \to T_* - 0$ with amplitude greater than ε_0, i.e. there holds

$$\limsup_{t \to T_* - 0} \|u(t)\|_n^n - \|u_{T_*}\|_n^n > \varepsilon_0,$$

where ε_0 is the same constant as in (0.1).

Existence and Behavior of Solutions for a Weakly Coupled System of Reaction-Diffusion Equations

Kiyoshi Mochizuki and Qing Huang

Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University,
Hachioji, Tokyo 192-03, Japan

We consider nonnegative solutions of the initial value problem for a weakly coupled system

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |x|^{\sigma_1} v^p, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ v_t = \Delta v + |x|^{\sigma_2} u^q, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

where $N \geq 1$, p, $q \geq 1$ with $pq > 1$ and $0 \leq \sigma_1 < N(p-1)$, $0 \leq \sigma_2 < N(q-1)$. For given initial values (u_0, v_0), let $T^* = T^*(u_0, v_0)$ be the maximal existence time of solutions. If $T^* = \infty$ the solutions are global. We put

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1}, \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1}, \delta_1 = \frac{\sigma_2 p + \sigma_1}{pq-1}, \delta_2 = \frac{\sigma_1 q + \sigma_2}{pq-1},$$

$$I^a = \left\{ \xi \in BC; \xi(x) \geq 0 \text{ and } \limsup_{|x| \to \infty} |x|^a \xi(x) < \infty \right\},$$

$$I_a = \left\{ \xi \in BC; \xi(x) \geq 0 \text{ and } \liminf_{|x| \to \infty} |x|^a \xi(x) > 0 \right\},$$

and let $S(t)\xi$ represent the solution of the heat equation with initial value $\xi(x)$:

$$S(t)\xi(x) = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|x-y|^2/4t} \xi(y) dy.$$

In the following we require

$$(u_0(x), v_0(x)) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}. \tag{2}$$

Then problem (1) has a unique, nonnegative solution $(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ at least locally in time.

We can show the following four theorems.

Theorem 1 *Assume* $\max\{\alpha + \delta_1, \beta + \delta_2\} \geq N$. *Then* $T^* < \infty$ *for every nontrivial solution* $(u(t), v(t))$.

Theorem 2 *Assume* $\max\{\alpha+\delta_1, \beta+\delta_2\} < N$. *Suppose also one of the following two conditions:*

(i) $u_0 \in I_a$ *with* $a < \alpha + \delta_1$ *or* $v_0 \in I_b$ *with* $b < \beta + \delta_2$;

(ii) $u_0(x)$ *or* $v_0(x) \geq Ce^{-\nu_0|x|^2}$ *for some* $\nu_0 > 0$ *and some* $C > 0$ *large enough.*

Then $T^* < \infty$ *for every solution* $(u(t), v(t))$.

Under the condition $\max\{\alpha+\delta_1, \beta+\delta_2\} < N$, we have $p > 1 + (2+\sigma_1)/N$ or $q > 1 + (2+\sigma_2)/N$. In the following two theorems we only consider the case $q > 1 + (2+\sigma_2)/N$. Similar results are also obtained when $p > 1 + (2+\sigma_1)/N$.

Theorem 3 *Assume* $\max\{\alpha+\delta_1, \beta+\delta_2\} < N$ *and* $q > 1 + (2+\sigma_2)/N$. *Let*

$$(u_0, v_0) \in I^a \times I^b \quad with \quad a > \alpha + \delta_1,\ b > \beta + \delta_2. \tag{3}$$

If $\|u_0\|_{\infty,a} + \|v_0\|_{\infty,b}$ *is small enough, then* $T^* = \infty$ *and we have*

$$u(x,t) \leq CS(t) < x >^{-\tilde{a}}, \quad v(x,t) \leq CS(t) < x >^{-\tilde{b}} \tag{4}$$

in $\mathbf{R}^N \times (0,\infty)$, *where* $\tilde{a} \leq a$ *and* $\tilde{b} \leq b$ *are chosen to satisfy*

$$\alpha + \delta_1 < \tilde{a} < \min\{N, Np - 2 - \sigma_1\}, \ \frac{\tilde{a} + 2 + \sigma_1}{p} < \tilde{b} < \tilde{a}q - 2 - \sigma_1. \tag{5}$$

Theorem 4 *Let* $(u(t), v(t))$ *be the above global solution of* (1).

(i) *If we can choose* $\tilde{a} = a$ [*or* $\tilde{b} = b < N$] *in* (4) *and if*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^a u_0(x) = A > 0 \ \left[or \ \lim_{|x|\to\infty} |x|^b v_0(x) = B > 0\right], \tag{6}$$

then

$$t^{a/2}|u(x,t) - AS(t)|x|^{-a}| \to 0 \ \left[or \ t^{b/2}|v(x,t) - BS(t)|x|^{-b}| \to 0\right] \tag{7}$$

as $t \to \infty$ *uniformly in* $\mathbf{R}^N$.

(ii) *If we can choose* $\tilde{b} > N$ *in* (4), *then*

$$t^{N/2}\left|v(x,t) - M(4\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/4t}\right| \to 0 \ \ as\ t \to \infty \tag{8}$$

uniformly on the set $\{x \in \mathbf{R}^N; |x| \leq Rt^{1/2}\}$ $(R > 0)$, *where*

$$M = \int_{\mathbf{R}^N} v_0(x)dx + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^N} |x|^{\sigma_2} u(x,t)^q dx dt < \infty. \tag{9}$$

As for details, see Mochizuki-Huang: Preprint of the same title.

不定値行列多項式の因数分解と圧電体の方程式への応用

伊東 裕也*

1997年2月26日

§1 Introduction

Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^n_+) = H^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{C}^m)$ $(n \geq 2,\ m \geq 1)$ 上の2次形式

$$\mathfrak{a}[u] = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} \left\langle A^{jk}\partial_{x_k} u, \partial_{x_j} u\right\rangle_{\mathbb{C}^m} dx$$

を考える．係数 $A^{jk} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$（$m$ 次実正方行列）は定数で，$(A^{jk})^{\mathrm{T}} = A^{kj}$ $(1 \leq \forall j, k \leq n)$ なる対称性をもち，$\mathbb{C}^m$ の部分空間 $\mathrm{V}_1 := \mathbb{C}^{m_1} \subset \mathbb{C}^m$, $\mathrm{V}_2 := \mathrm{V}_1^{\perp} \cong \mathbb{C}^{m_2}$ $(0 \leq m_1 \leq m = m_1 + m_2)$ に対して

$$\text{(A.1)} \qquad \mathfrak{a}[J_1 u] \geq c_1\|\nabla J_1 u\|^2, \quad \mathfrak{a}[J_2 u] \leq -c_2\|\nabla J_2 u\|^2 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$$

を満たすものとする．ここで，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n_+$ 上の L^2 ノルム，c_1, c_2 は正定数を表し，$J_1 = I_{\mathrm{V}_1} \oplus O_{\mathrm{V}_2}$, $J_2 = O_{\mathrm{V}_1} \oplus I_{\mathrm{V}_2}$．この2次形式は，次のシンボルで与えられる境界値問題 $\{A(D_x), B(D_x)\}$ を定める：

$$A(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} A^{jk}\xi_k\xi_j, \quad B(\xi) = -\sum_{k=1}^{n} A^{nk}\, i\xi_k \quad \text{for } \xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n.$$

このとき，(A.1) より次の条件が導かれる：

$$\text{(A.0)} \qquad A(\xi)\big|_{\mathrm{V}_1} \geq c_1|\xi|^2 I_{\mathrm{V}_1}, \quad A(\xi)\big|_{\mathrm{V}_2} \leq -c_2|\xi|^2 I_{\mathrm{V}_2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

尚，実際のモデルとしては，$n = 3$ として，$m = m_1 = 3$ の場合が弾性体の方程式に対応し，$(m_1, m_2) = (3, 1)$ の場合が圧電体の方程式に対応する．

さて，シンボル $\{A(\xi), B(\xi)\}$ は，$\xi = (\eta, \zeta)$ により $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ をパラメータとする ζ の行列多項式とみなすことにより次の形に書かれる：

$$L(\zeta) = C^{11} + (C^{12} + C^{12})\zeta + C^{22}\zeta^2, \quad N(\zeta) = -i(C^{21} + C^{22}\zeta),$$

ここで，$C^{jk} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $(j, k = 1, 2)$ は $(C^{jk})^{\mathrm{T}} = C^{kj}$ を満たす．また，上の (A.1)，(A.0) に対応する条件はそれぞれ

$$\text{(H.1)} \qquad \mathfrak{l}[J_1 u] \geq \tilde{c}_1\left(\|J_1 u\|^2 + \|\nabla J_1 u\|^2\right), \quad \mathfrak{l}[J_2 u] \leq -\tilde{c}_2\left(\|J_2 u\|^2 + \|\nabla J_2 u\|^2\right) \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}_+)$$

$$\text{with } \mathfrak{l}[u] = \int_0^\infty \left\{\left\langle (C^{11} + C^{12}D)u,\ u\right\rangle + \left\langle (C^{21} + C^{22}D)u,\ Du\right\rangle\right\} dz \quad \left(D = \frac{1}{i}\frac{d}{dz}\right);$$

$$\text{(H.0)} \qquad C^{22}\big|_{\mathrm{V}_1} > O, \ C^{22}\big|_{\mathrm{V}_2} < O, \ L(\zeta)\big|_{\mathrm{V}_1} > O, \ L(\zeta)\big|_{\mathrm{V}_2} < O \ \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

となる．一方，行列多項式の理論によれば，上の $L(\zeta)$ に対して次の因数分解定理が知られている：$C^{22} > O$, $L(\zeta) \geq O\ \forall \zeta \in \mathbb{R}$ ならば，

$$L(\zeta) = (I\zeta - \Lambda^*)C^{22}(I\zeta - \Lambda) \ (\ \zeta \text{ の多項式として}), \quad \sigma(\Lambda) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$$

を満たす $\Lambda \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ の一意的に存在する．この因数分解定理を条件 (H.0) あるいは (H.1) を含む場合にまで拡張し，それを圧電体の方程式（ここでは圧電体型波動方程式の自由表面波）に応用したい．

*電気通信大学，E-mail: ito@cocktail.cas.uec.ac.jp

§2　不定値行列多項式の対称な因数分解

(H.0) を仮定する．

$\forall\zeta\in\mathbb{R}$

(i) $P \geq O$ $(P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ に対して $\{\kappa\in\mathbb{R};\ \det(L(\zeta)-\kappa P)\neq 0\}$ の 0 を含む連結成分を K_P $(\neq\varnothing)$ とする．このとき，$\forall\kappa\in\overline{K_P}$ に対して，次を満たす $\Lambda_\kappa\in\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ がただ一つ存在する：

$$L(\zeta)-\kappa P=(I\zeta-\Lambda_\kappa^*)C^{22}(I\zeta-\Lambda_\kappa),\quad \sigma(\Lambda_\kappa)\subset\overline{\mathbb{C}_+}.$$

更に，Λ_κ は κ について，K_P 上で実解析的，$\overline{K_P}$ 上で連続となる．

(ii) $\kappa\in\overline{K_P}$ に対して

$$T_\kappa:=-i\left(C^{21}+C^{22}\Lambda_\kappa\right),\quad H_\kappa:=\operatorname{Re}T_\kappa$$

と定めれば，T_κ はエルミート行列，H_κ は実対称行列となる．$\kappa\in K_P$ ならば，H_κ は（重複度を込めて）m_1 個の正の固有値と m_2 個の負の固有値をもつ．更に (H.1) を仮定すれば T_0 は（重複度を込めて）m_1 個の正の固有値と m_2 個の負の固有値をもつ．

§3　圧電体型波動方程式の自由表面波への応用

(A.1) を仮定し，$\{A(D_x),B(D_x)\}$ および $\{A(D_x),J_1B(D_x)+J_2\}$ に対する圧電体型波動方程式の自由表面波（= Rayleigh 波）について考察を行う．上の因数分解定理を用いれば Rayleigh 波の表現式も得られるが，ここではその「個数」のみに注目する．以下簡単のため

$$B_{\mathrm{I}}(D_x)=B(D_x),\qquad B_{\mathrm{II}}(D_x)=J_1B(D_x)+J_2$$

とおき，それぞれ type I, II と呼ぶことにする．(圧電体の方程式ではどちらの境界条件も応用上重要.)

$\forall\eta\in\mathbb{S}^{n-2}\subset\partial\mathbb{R}^n_+$ を固定し，$u=u(t,x)$ が $\partial\mathbb{R}^n_+$ に沿って η 方向に伝播する圧電体型 **Rayleigh 波**（波数 $k>0$）であるとは，$u(t,x)=e^{ik(\eta\cdot x'-ct)}f(kx_n)$ $(f\not\equiv 0,\ f(+\infty)=0,\ c>0:$ 伝播速度) なる形をもち，

$$(J_1\partial_t^2+A(D_x))u=0\quad\text{in }\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+,\quad B_\epsilon(D_x)u=0\quad\text{on }\ \mathbb{R}\times\partial\mathbb{R}^n_+\quad(\epsilon=\mathrm{I}\text{ or }\mathrm{II})$$

の解となっているときをいう．このとき $\{c,f\}$ の組（k には依らない）を η 方向の type ϵ の Rayleigh pair と呼ぶ．η 方向の限界速度 $c_{\mathrm{L}}(\eta)$ を $L(\zeta)=A(\eta,\zeta)$ とみたときの $\sup K_{J_1}>0$ の正の平方根で定め，$0<c<c_{\mathrm{L}}(\eta)$（亜音速域）において Rayleigh 波が何種類あるかを下の $\mathcal{N}_\epsilon(\eta;c)$ を用いて述べよう．

$$\mathcal{N}_\epsilon(\eta;c):=\dim\{f;\ f\equiv 0\ \text{または}\ \{c,f\}\ \text{が}\ \eta\ \text{方向の type}\ \epsilon\ \text{の Rayleigh pair}\},$$

$$T_{\mathrm{I}}(\eta;c):=[\ L(\zeta)=A(\eta,\zeta),\ P=J_1\ \text{に対する §2 の}\ T_{c^2}\ ]\equiv\begin{array}{c}\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}\\T_{21}&T_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}]\,m_1\\]\,m_2\end{array},$$

$$T_{\mathrm{II}}(\eta;c):=\begin{pmatrix}T_{11}-T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}&iT_{12}T_{22}^{-1}\\-iT_{22}^{-1}T_{21}&-T_{22}^{-1}\end{pmatrix},\quad \tilde{T}_{\mathrm{I}}(\eta;c):=T_{11}-T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}$$

と定めれば，上述の因数分解定理を利用することにより，次の主張を示すことができる．

(i)　$\mathcal{N}_\epsilon(\eta;c)=\dim\ker T_\epsilon(\eta;c)\quad\text{for }\ 0<c<c_{\mathrm{L}}(\eta),\quad \epsilon=\mathrm{I},\ \mathrm{II}.$

(ii)　$$\sum_{0<c<c_{\mathrm{L}}(\eta)}\mathcal{N}_\epsilon(\eta;c)=\begin{cases}\tilde{T}_{\mathrm{I}}(\eta;c_{\mathrm{L}}(\eta))\ \text{の負の固有値の個数}\ \leq\lfloor m_1/2\rfloor & \text{if }\epsilon=\mathrm{I},\\ T_{\mathrm{II}}(\eta;c_{\mathrm{L}}(\eta))\ \text{の負の固有値の個数}\ \leq\min\{\lfloor m/2\rfloor,\ m_1\} & \text{if }\epsilon=\mathrm{II}.\end{cases}$$

参考文献

[1] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, Matrix Polynomials, Academic Press, 1982.

[2] H. Ito, Symmetric factorization of quadratic nonnegative matrix polynomials (to appear).

[3] J. Lothe and D.M. Barnett, Further development of the theory for surface waves in piezoelectric crystals, Physica Norvegica 8 (1977), 239–254.

談話会講演要旨　　1997年3月5日　4時30分

ムーンシャイン加群の既約分解の母函数について

$V = V^{\natural} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ をムーンシャイン加群として

$V_n = \sum_{k=1}^{194} c_{nk}\chi_k$ をモンスターの既約表現への分解とせよ。

$t_k(q) = q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_{nk}q^n$ と c_{nk} の母函数を作ると指標の直交関係を使うと

$t_k(q) = \frac{1}{|M|}\sum_{g\in M} t_g(q)\chi_k(g)$ となる。M はモンスター単純群であり，194個の共役類をもつ。$t_g(q)$ はムーンシャイン予想の基になっている McKay-Thompson 級数である。各 $g\in M$ に対して $t_g(q)$, $q=e^{2\pi i\tau}$, $\tau\in\mathcal{H}$ 上半平面，は種数0の不連続群に対応しているモデュラー函数である。

$t_k(q)$ もモデュラー函数で対応する不連続群 Γ_k も決定でき，すべて $\Gamma_k = \Gamma_0(N_k)$ の形をしている。N_k は大きい数となり $1\le k\le 194$ で N_k の最小は 4032 である。

$V^{\natural} = V$ は頂点作用素代数なのでコンフォーマルベクトル ω

が存在し　その頂点作用素　$Y(\omega, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(n) z^{-n-2}$ から　$Vir = \langle L(n) \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$ ヴィラソロ代数ができる。

モンスター M と ω は可換なので　M と Vir は可換となり $V^{\natural}$ を　$M \times Vir$ の作用での既約成分への分解が考えられる。　その母函数を

$$G^k(q) = \sum_{h=0}^{\infty} S_h^k q^h$$

とすると　（$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i)$ をデデキント函数とし）

<u>定理</u>　$q^{-23/24} G^k(q)$, $1 \le k \le 194$, $q = e^{2\pi i \tau}$, $\tau \in H$, は重さ $\frac{1}{2}$, レベル N_k の有理型モデュラー形式になる。

<u>系</u>. $q^{-23/24} G^k(q) \eta(q)^{23}$ は重さ 12, レベル N_χ の正則なモデュラー形式となる。

証明は　$q^{-23/24} G^k(q) = \deg \chi_k \cdot t_k(q) \eta(q)$ をいうのである。
（注. Lang と共著）

Geoffrey Mason は次のことを"発見"した（私の論文をみて）

h	12	14	16	18	20	22	24	26	27	28	29	30
S_{h1}	1	0	1	1	1	1	3	2	1	4	2	6
#	1	0	1	1	1	1	2	1	0	2	0	2

ここで # は $SL_2(\mathbb{Z})$ の重さ h の cusp form 空間の次元である。S_{h1} の 1 は単位表現を示す。これも不思議である。

原田耕一郎

行列アンサンブルにあらわれる汎函数に対するある極限定理について

名古屋大学(多元数理) 千代延大造

任意の $f\in L^1(\mathbb{T})$ に対し $\hat{f}_k$ を f の Fourier係数とする，
即ち $\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta$ とする。 このとき f に関する N次テープリッツ行列式 (Toeplitz determinant) を

$$D_N[f] \equiv \det(\hat{f}_{j-k})_{0\le j,k\le N-1}$$

と定義する。 それは，容易に

$$D_N[f] = \int_{\mathbb{T}^N}\prod_{j=1}^{N} f(\theta_j)\cdot\Delta(\theta)^2\, d^N\theta ,$$

ただし

$$\Delta(\theta) = \prod_{1\le j<k\le N}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|$$

とあらわされる事がわかる。 さて セゲ(Szegö)の有名な極限公式は，次のように述べられる： もし $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|\cdot|\hat{h}_k|^2<\infty$ ならば

$$D_N[e^h] = \exp\left(N\cdot\hat{h}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\hat{h}_k\cdot\hat{h}_{-k} + o(1)\right),\quad N\to\infty$$

今回，GUE, GOE, GSE を含む行列アンサンブルに対し この Szegöの定理の analogue を提示し，それが古典的確率論の極限定理(大数の法則や中心極限定理)から導かれる事を示したい。