



Title	第1回数学総合若手研究集会 : MOTION
Author(s)	Izumiya, Shyuichi
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 89, 1
Issue Date	2005-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/649
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/707
Type	departmental bulletin paper
File Information	shukai.pdf



21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第 1 回 数学総合若手研究集会
COE Conference for Young Researchers
-MOTION-

高橋雅朋, 宮尾忠宏, 奥山 豪, 中野 張, 乾 勝也
COE 運営委員会交流機能代表 泉屋 周一

Sapporo, 2005

当研究集会の経費は
21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
北海道大学大学院理学研究科数学専攻により賄われています。

はじめに

数学総合若手研究集会 - COE Conference for Young Researchers - (略称 CCYR) は、北海道大学 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の交流機能の一事業として、主としてポストドクター、大学院生ら若手研究者により運営される研究集会です。特定のテーマは定めずに、数学の各分野で活躍している若手研究者に講演をして頂きます。

COE 交流機能の一事業として行われる当研究集会は、

* 数学の各分野間の横型の交流

* 基盤研究と応用研究間の縦型の交流

という 2 つの軸に沿った交流を目的としています。

講演者には、最新の研究成果を発表して頂くのはもちろん、入門的な内容- とくに問題の背景、動機 - にも言及されるようお願いしております。

また、当研究集会では若手研究者同士がセミナー室で互いに発表を行う「交流セッション」という時間を設けました。聴講のみの方も含めた参加者全員に自分の研究内容について、簡単に紹介をして頂く予定です。

当研究集会を開催するにあたって次の方々に感謝を申し上げます。

- このような研究集会の機会を与えて下さった COE 運営委員会交流機能代表の泉屋周一先生を始め北大数学科の先生方
- すべての講演者、聴講者の皆さん
- 講演者、聴講者とのメール連絡、アブストラクトの受付、当アブストラクト集の作成、ポスターの作成など全般にわたって準備をして下さった COE 研究推進室の伊川美奈子さん
- 当集会のウェブページの作成をして下さった COE 研究支援室の山田加織さん
- 講演者の旅費手続きをして下さった COE 研究推進室の喜多三奈子さん
- 会場準備などのお手伝いをして下さった山本 卓宏さん、王 盛章さん、長瀬 優子さん、黒田 紘敏さん、寺澤 祐高さん

世話人

高橋雅朋、宮尾忠宏、奥山 豪、中野 張、乾 勝也

第1回 数学総合若手研究集会

COE Conference for Young Researchers
-MOTION-

世話人: 高橋雅朋, 宮尾忠宏, 奥山 豪, 中野 張, 乾 勝也
Organizers: M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano, K. Inui

期間 (Period) : 2005年2月14日 - 2月17日

場所 (Venue) : 北海道大学大学院理学研究科数学教室3号館508号室, 4号館508室
Department of Mathematics, Hokkaido University
Science Building #3 Room 508, #4 Room 508

プログラム (Program) : A会場は4-508, B会場は3-508です。
※以下A会場は(A), B会場は(B)と省略します。

2月14日(月)

- 9:50 開会の挨拶
- 10:00-10:45 (A) 山口 範和 (Norikazu Yamaguchi), 早稲田大学大学院理工学研究科
極性流体方程式系の可解性について
- 11:00-11:45 (A) 佐治 健太郎 (Kentaro Saji), 広島大学大学院理学研究科
 R^3 内の曲面の特異点
- 13:45-14:15 (A) 渡辺 道之 (Michiyuki Watanabe), 北海道大学大学院理学研究科
非線形項を決定する逆問題について
(B) 沼田 泰英 (Yasuhide Numata), 北海道大学大学院理学研究科
ヤング盤の一般化とロビンソン-シェンステッド対応
- 14:30-15:00 (A) 渡部 拓也 (Takuya Watanabe), 東北大学大学院理学研究科
2-level 断熱遷移問題に対する exact WKB 法の応用
(B) 北川 真也 (Shinya Kitagawa), 大阪大学大学院理学研究科
有理曲面の曲線束の Mordell-Weil 格子
- 15:30-16:00 (A) 春井 岳 (Takeshi Harui), 大阪大学大学院理学研究科
曲面上の曲線の gonality について
(B) 佐々木 格 (Itaru Sasaki), 北海道大学大学院理学研究科
Ground-states of the massless Nelson model
- 16:15-16:45 (A) 小林 真平 (Shimpei Kobayashi), 神戸大学大学院自然科学研究科
Complex constant mean curvature surfaces fibered by minimal surfaces
(B) 高市 恭治 (Kyoji Takaichi), 早稲田大学大学院理工学研究科
半線形熱方程式の漸近挙動の分類
- 17:00-17:30 (A) 石井 敦 (Atsushi Ishii), 大阪大学大学院理学研究科
On the LG quantum link invariant
(B) 谷本 龍二 (Ryuji Tanimoto), 京都大学数理解析研究所
ヒルベルトの第14問題に対するフロイデンバーグの反例について

2月15日(火)

- 10:00-10:45 (A) 吉川 周二 (Shuji Yoshikawa), 東北大学大学院理学研究科
三次元形状記憶合金方程式の可解性について
- 11:00-11:45 (A) 宮西 吉久 (Yoshihisa Miyanishi), 東京工業大学
A remark on the equi-distribution of generalized eigenfunctions
- 13:45-14:30 (A) 若狭 徹 (Toru Wakasa), 早稲田大学大学院理工学研究科
Generation of interfaces to Lotka-Volterra competition diffusion system
with large interaction
- 14:45-15:15 (A) **Gengyu Zhang**, 東京工業大学
On Khovanov homology of Knots and links
- (B) 黒田 茂 (Shigeru Kuroda), 京都大学数理解析研究所
ヒルベルトの第14問題とニュートン多面体
- 15:30-16:00 (A) 斎藤 敏夫 (Toshio Saito), 大阪大学
Lens space surgery on knots in the three sphere and Dehn surgery
on $(1, 1)$ -knots in lens spaces
- (B) 中野 張 (Yumiharu Nakamo), 北海道大学大学院理学研究科
Optimal long-term investment in a model with memory
- 16:30- 交流セッション

2月16日(水)

- 10:00-10:45 (A) 笠原 雪夫 (Yukio Kasahara), 東京大学大学院情報理工学系研究科
定常過程の予測問題を明示的に解く方法
- 11:00-11:45 (A) 立谷 洋平 (Yohei Tachiya), 慶応義塾大学理工学研究科
Transcendence of infinite products of several variables
- 13:45-14:30 (A) 加藤 大典 (Daisuke Kato), 慶応義塾大学理工学研究科
超群と G 構造
- 14:45-15:15 (A) 須子 淳一 (Junichi Suko), 学習院大学理学部
広いクラスの摂動に対する Agmon-Kato-Kuroda 定理について
- (B) 伊藤 真吾 (Shingo Ito), 東京理科大学理学研究科
Propagation of Singularities for Nonlinear Wave Equations
- 15:30-16:00 (A) 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori), 神戸大学大学院自然科学研究科
3次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面について
- (B) 大久保 篤志 (Atsushi Ohkubo), 京都大学大学院情報学研究科
ある変数係数楕円型方程式に関する亀裂問題の解の特異性
- 16:30- 交流セッション

2月17日(木)

- 9:30-10:15 (A) 畑 宏明 (Hiroaki Hata), 大阪大学大学院基礎工学研究科
Explicit solutions to optimal long-term investment problems
for certain nonlinear factor models
- 10:30-11:15 (A) 平田 賢太郎 (Kentaro Hirata), 島根大学総合理工学研究科
 n 次元複素空間の単位球上の不変調和関数の境界挙動
- 11:30-12:15 (A) 中井 和香子 (Wakako Nakai), 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
ヤング盤と量子アフィン代数の q -指標
- 12:15 閉会の挨拶

※ 45分講演は Single Session, 30分講演は Parallel Session です。

連絡先 〒060-0810 札幌市北区北10条西8丁目
北海道大学大学院理学研究科数学専攻
COE研究推進室 伊川 美奈子
ホームページ : <http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp/>
E-mail : coe-prom@math.sci.hokudai.ac.jp
TEL/FAX : 011-706-2636

極性流体方程式系の可解性について

山口範和 (早稲田大学大学院理工学研究科)

2005年2月14日

流体力学の基礎方程式系として有名な Navier-Stokes 方程式系は Newton 流体のうちで粘性を有するものの運動を記述する方程式系である。その為、Navier-Stokes 方程式系では非 Newton 流体の運動を扱うことは出来ない。非 Newton 流体の運動を数学的に解析する為には、Navier-Stokes 方程式系を適当な形へ修正・拡張したものを考える必要がある。一般にこの拡張によって流体の運動方程式は数学的にみて非線形性の強い、あるいは対称性の崩れたより複雑なものとなる。

1966年に Eringen [1] によって提唱された極性流体(マイクロポーラ流体)の数学理論は Navier-Stokes 方程式系では記述することの出来ないある種の非 Newton 流体の運動を数学的に解析することを可能にする。例えば、血液、液体結晶、希薄高分子溶液などの運動が該当する。これらは全て流体中に血球やコロイド、鎖状高分子などの微小粒子を含む流体としての共通点がある。Eringen の理論は流体の運動と微小粒子の回転との相互作用を加味するものである。その為、極性流体の方程式系は非対称な応力テンソルを伴う問題となる。より詳しい背景に関しては Eringen [1] や流体力学ハンドブック [10, 23-8] を参照して欲しい。

本講演では簡単の為、 $\Omega \subset R^3$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし、 $\Omega \times (0, \infty)$ における次の非圧縮性極性流体方程式系の初期値・境界値問題について考える：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\nu + \chi)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \pi = \chi \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \gamma \Delta \mathbf{w} - (\alpha + \beta)\nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\chi \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \chi \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0 \quad \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで $\mathbf{u} = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$ は流体の運動速度、 $\pi = \pi(x, t)$ は流体に対して働く圧力、 $\mathbf{w} = (w^1(x, t), w^2(x, t), w^3(x, t))$ は微小粒子の角速度を表わす未知関数； \mathbf{f}, \mathbf{g} は与えられた外力場、 $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0$ はそれぞれ速度場、角速度場に対して与えられた初期状態； ν は動粘性率、 χ は渦粘性率、 α, β, γ はスピン粘性率を表わす定数であり、熱力学第二法則を満たす要請より、これらの粘性率は

$$\min\{\nu, \chi, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\} > 0 \quad (2)$$

をみたすものとする. また (1) において微分の記号は次を用いた.

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{w}, \quad \nabla \pi = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_1}, \frac{\partial \pi}{\partial x_2}, \frac{\partial \pi}{\partial x_3} \right)^t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^j}{\partial x_j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u^3}{\partial x_2} - \frac{\partial u^2}{\partial x_3}, \frac{\partial u^1}{\partial x_3} - \frac{\partial u^3}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \right).$$

本講演では (1) に対し, 強い意味での時間局所的小および時間大域的な可解性について論じる. (1) および (1) と関連する幾つかの問題については局所可解性および大域可解性ともに既に数多くの結果がある ([6], [7], [8] など) がいずれも関数空間のフレームワークとして L^2 空間を用いている. 従って Navier-Stokes 方程式系に対する古典的な結果である Fujita-Kato [3] の結果と同様の理由から初期データに対して幾らかの可微分性を仮定しなければ解の存在を示すことが出来ない (実際に [3] では $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}(A_2^{1/4})$ を課していた. ここで $A_2 = -P_2 \Delta$). 一方で Navier-Stokes 方程式系に対する可解性に関してはより多くの結果が知られており, Giga-Miyakawa [4], Kato [5] では初期速度が L^3 の意味で十分小である場合に関して大域解の存在定理が示されている ([4] や [5] では流体の初期速度に対していかなる可微分性も必要としていないことに注意して欲しい). 従って [4], [5] の観点から (1) を考えれば初期データ $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0)$ が L^3 の意味で十分に小であるならば大域的な可解性が従うことが期待される.

以後, 簡単の為, 外力場を $\mathbf{f}, \mathbf{g} \equiv 0$ として扱う. 外力が入っている場合でも, 外力の属しているクラスが適当なクラスであれば同様の結論を得ることが出来る.

主結果を述べる為に (1) の作用素論的定式化について述べる. (1) では圧力 π は時間発展をしない為, 発展方程式として定式化する為には圧力項 π を消去しなくてはならない. そこで通常非圧縮性流体の扱いと同様に非圧縮部分への射影を用いて \mathbf{u} についてはソレノイダル空間上の発展方程式となるよう問題を書き直す. その為に, 次のベクトル場の Helmholtz 分解を導入する.

$1 < p < \infty$ とする. このとき Banach 空間 $L^p(\Omega)^3$ は Helmholtz 分解:

$$L^p(\Omega)^3 = L_\sigma^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega), \quad \oplus : \text{直和} \quad (3)$$

を許容することが知られている. ここで

$$L_\sigma^p(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}}, \quad G^p(\Omega) = \{\nabla \pi \mid \pi \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)\},$$

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{f} \in C_0^\infty(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \text{ in } \Omega\},$$

$$\dot{W}^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \cap \left\{ \pi \in L^p(\Omega) \mid \int_\Omega \pi \, dx = 0 \right\}.$$

$P = P_p$ を Helmholtz 分解と対応する $L^p(\Omega)^3$ から $L_\sigma^p(\Omega)$ 上への連続的射影とする. 記号を簡略化

する為に $U = (u, w)^t$ とおく. P を用いて作用素 \mathcal{A} を次のように定める.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} u \in W^{2,p}(\Omega)^3 \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap L_\sigma^p(\Omega) \\ w \in W^{2,p}(\Omega)^3 \cap W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right. \right\},$$

$$\mathcal{A}U = \begin{bmatrix} -(\nu + \chi)P\Delta & -\chi \operatorname{rot} \\ -\chi \operatorname{rot} & -\gamma\Delta - (\alpha + \beta)\nabla \operatorname{div} + 2\chi \end{bmatrix} U \quad \text{for } U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

ここで w に対する境界条件から $P \operatorname{rot} w = \operatorname{rot} w$ であることを用いた.

$X^p(\Omega) := L_\sigma^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^3$ とする. \mathcal{A} を用いれば (1) より, $X^p(\Omega)$ における次の抽象的な Cauchy 問題を得る.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{N}(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (4)$$

ここで $U_0 = (u_0, w_0)^t$, $\mathcal{N}(U)$ は次の非線形項を表わす:

$$\mathcal{N}(U) = \begin{bmatrix} -P[(u(t) \cdot \nabla)u(t)] \\ -(u(t) \cdot \nabla)w(t) \end{bmatrix}.$$

主結果を述べる.

定理 1. $-\mathcal{A}$ は $X^p(\Omega)$ 上で解析的半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を生成する.

定理 1 と Duhamel の原理より問題 (4) より次の積分方程式系を得る.

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{N}(U(s)) ds. \quad (5)$$

問題の可解性を示すためには積分方程式系 (5) の可解性について考えればよい. その為に (5) を縮小写像の原理 (逐次代入の方法) によって解くことを考える. その際に本質的な部分是非線形項をコントロールする為の評価である. そこで, Kato [5] と同様に半群 $T(t)$ に対する L^p - L^q 型の評価式を導く. その前段階として半群 $T(t)$ に関し次を得た.

定理 2. $1 < p < \infty$ とする. このとき $\delta_0 > 0$ が存在して $\rho(-\mathcal{A}) \supset \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\delta_0)$ をみだす. ここで $\rho(\cdot)$ は resolvent 集合を表わす. さらに $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ が存在して次の評価が任意の $U \in X^p(\Omega)$ に対して成立する:

$$\|T(t)U\|_{W^{j,p}(\Omega)} \leq C e^{-\delta_1 t} t^{-\frac{j}{2}} \|U\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, 2. \quad (6)$$

定理 2 と Sobolev の埋蔵定理, 補間不等式の理論を用いることで直ちに次の L^p - L^q 型の評価式を得る.

系 3 (L^p - L^q 評価). (i) $1 \leq p \leq q \leq \infty, p \neq \infty, q \neq 1$ とする. このとき $C = C_{p,q} > 0, \delta = \delta_{p,q} > 0$ が存在して次の L^p - L^q 評価が任意の $U \in X^p(\Omega)$ に対して成立する:

$$\|T(t)U\|_{L^q(\Omega)} \leq Ce^{-\delta t} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|U\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0. \quad (7)$$

(ii) $1 < p \leq q < \infty$ とする. このとき $C = C_{p,q} > 0, \delta = \delta_{p,q} > 0$ が存在して次が任意の $U \in X^p(\Omega)$ に対して成立する:

$$\|\nabla T(t)U\|_{L^q(\Omega)} \leq Ce^{-\delta t} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}} \|U\|_{L^p(\Omega)}, \quad t > 0. \quad (8)$$

系 3 を用いて次の大域解の存在定理を得る.

定理 4. $U_0 = (u_0, w_0) \in X^3(\Omega)$ とする. このとき次をみたす $\epsilon > 0$ が存在する. $\|U_0\|_3 \leq \epsilon$ ならば (1) は一意的な強解 $U(t) \in BC([0, \infty); X^3(\Omega))$ をもち, さらに次をみたす:

$$e^{\delta t} t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} U(t) \in BC([0, \infty); X^q(\Omega)), \quad q \geq 3 \quad (9)$$

$$e^{\delta t} t^{\frac{1}{2}} \nabla U(t) \in BC([0, \infty); L^3(\Omega)^{18}). \quad (10)$$

ここで $BC(I; X)$ は X -値 I 上有界連続関数のクラスを表わす. (9) において $q = 3$ の場合を除いて, (9), (10) の全ての値は $t = 0$ において 0 となる. $q = 3$ の場合は $U(0) = U_0 = (u_0, w_0)^t$ となる.

注意 5. 時間局所解の存在を示すには初期データ (u_0, w_0) に対する小ささを必要としない.

最後に証明のアウトラインを述べる. より詳しい証明に関しては [9] を参照して欲しい.

定理 1 および定理 2 を示す部分が本質的な部分である. その為に (1) の線形化問題と対応する次のパラメータ λ を伴う境界値問題 (resolvent 問題):

$$\begin{cases} \lambda u - (\nu + \chi)\Delta u + \nabla \pi - \chi \operatorname{rot} w = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda w - \gamma \Delta w + 2\chi w - (\alpha + \beta)\nabla \operatorname{div} w - \chi \operatorname{rot} u = g & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0, \quad w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

を解析する. ここで λ は複素パラメータ, f, g は与えられた外力場 (線形化問題の初期データと対応する).

λ が sectorial domain $\Sigma_\epsilon = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg z \leq \pi - \epsilon\}, 0 < \epsilon < \pi/2$ に属している時の境界値問題 (11) の解の組 (u, w) に対して標準的な resolvent 評価が得られれば A が半群 $T(t)$ の生成素であることが従い, 解析半群の標準的な理論から定理 2 も従う. より詳しくは $|\lambda|$ がある程度大きな場合は Stokes 方程式系に対する既存の評価 [2] や弾性方程式系に対する既存の評価を用い, 摂動論的に (11) に対する resolvent 評価を導出する. 他方 $|\lambda|$ が小さい場合は作用素の compact 性を利用し, Fredholm の交代定理を用いる標準的な方法で resolvent 集合の決定を行う.

参考文献

- [1] A. C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 16:1–18, 1966.
- [2] R. Farwig and H. Sohr. Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains. *J. Math. Soc. Japan*, 46(4):607–643, 1994.
- [3] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.
- [4] Y. Giga and T. Miyakawa. Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89(3):267–281, 1985.
- [5] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbf{R}^m , with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4):471–480, 1984.
- [6] G. Lukaszewicz. On nonstationary flows of asymmetric fluids. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5)*, 12(1):83–97, 1988.
- [7] E. E. Ortega-Torres and M. A. Rojas-Medar. Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions. *Abstr. Appl. Anal.*, 4(2):109–125, 1999.
- [8] M. A. Rojas-Medar. Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution. *Math. Nachr.*, 188:301–319, 1997.
- [9] N. Yamaguchi. Existence of global solution of micropolar fluid system in a bounded domain. *preprint*.
- [10] 日本流体力学会編. 流体力学ハンドブック. 丸善, 1998.

R^3 内の曲面の特異点

広島大学大学院理学研究科 佐治健太郎¹

E-mail:sajik@hiroshima-u.ac.jp

1 序

R^3 内の曲面とは M を 2 次元多様体として, C^∞ -級写像

$$f: M \rightarrow R^3$$

のことをいう. 通常曲面と言った場合には特異点を持たないものを指すが, ここでは一般に特異点をもつ写像も考え, これを R^3 内の曲面と呼ぶ. 点 $p \in M$ が写像 $f: M \rightarrow R^3$ の特異点であるとは

$$\text{rank}(df)_p < 2$$

であるときである. 特異点とは写像の局所的な概念であるため, 以下で, 写像芽に関する議論を準備する. 写像芽が同値であることを, 定義域と値域の座標変換によって移りあうとき, 同値と定義する. すなわち,

定義 1. 2 つの写像芽 $f_i: (U_i, p_i) \rightarrow (R^3, f_i(p_i))$ ($i = 1, 2$) が同値であるとは微分同相写像 $\phi: R^2 \rightarrow R^2$ と $\Phi: R^3 \rightarrow R^3$ が存在して

$$f_1 \circ \Phi = \phi \circ f_2$$

が成り立つときと定義する.

このように同値関係を定義すると, 写像が特異点を持たないときは陰関数定理から次が成り立つ.

定理 2 (陰関数定理). 写像芽 $f: (U, p) \rightarrow (R^3, f(p))$ が p で特異点を持たないとき f は $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ の原点における写像芽と同値である.

また, 特異点であっても, 微分の階数が一定値であるならば次のように簡単な写像に同値になってしまう.

定理 3 (階数定理). 写像芽 $f : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ の微分の階数 $\text{rank}(df)$ が p のまわりで一定値 1 のとき, f は $(x, y) \mapsto (x, 0, 0)$ の原点における写像芽と同値である.

したがってこのように同値関係を入れた場合, 興味のある (簡単になり過ぎない) 対象は微分の階数が近くで一定でない特異点である. 一般に写像は非常に複雑な特異点を持ちうるが, 本稿で扱う特異点は以下の 4 つの特異点である. これらは比較的振る舞いがいい.

例 4. 写像 $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2)$ の原点での写像芽を交差帽子と呼ぶ. 写像 $(x, y) \mapsto (x^2, x^3, y)$ の原点での写像芽をカスプ角と呼ぶ. 写像 $(x, y) \mapsto (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$ の原点での写像芽をスワローテイルと呼ぶ. 写像 $(x, y) \mapsto (x^2, x^3y, y)$ の原点での写像芽をカスプ的交差帽子と呼ぶ.

図 1 はこれらの特異点の像を描いたものである.

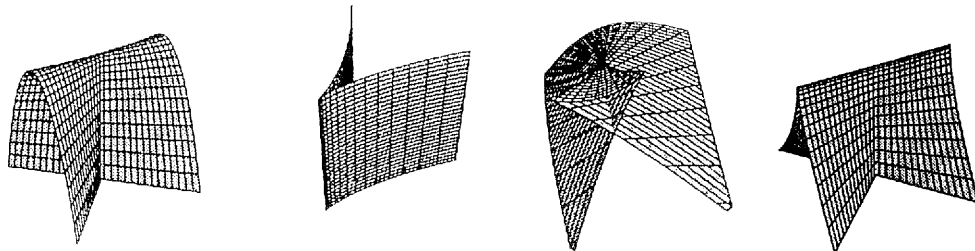


図 1: 左から交差帽子, カスプ角, スワローテイル, カスプ的交差帽子

これらは曲面のあるクラスにジェネリックに現れる特異点で, ある意味, 摂動に対して安定な特異点である.

曲面のクラス	ジェネリックに現れる特異点
曲面	交差帽子
線織面	交差帽子 ([4])
接線曲面	カスプ角, カスプ的交差帽子 ([2])
主法線曲面	交差帽子 ([5])
フロント	カスプ角, スワローテイル ([1])
ダルブー可展開面	カスプ角, スワローテイル, カスプ的交差帽子 ([5])

ジェネリックに現れるとはその特異点しか持たないものがその曲面のクラスの空間の中で開かつ稠密な部分集合になるものをいう。

さまざまな曲面のクラスと、ジェネリックに現れる特異点を調べることは特異点論的にそのクラスを調べる際の第一段階といえ、重要である。

2 特異点の判定法

定義 1 より、2 つの写像芽が同値かどうかを判定するには座標変換を見つけなければならぬので、ある特異点があったときにそれがどんな特異点であるかを判定することは一般には非常に困難である。しかし、上に挙げた特異点たちは以下に示すように便利な判定法を持つ。

定理 5. 原点における写像芽 $f(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して、(1) $f_y(0, 0) = 0$, $\text{rank}(f_x, f_{xy}, f_{yy})(0, 0) = 3$ ならば f は原点において交差帽子に同値である。

(2) ([6]) f はフロントで、原点で非退化な特異点をもつとする (この意味は [6] を参照)。このとき f の特異点の集合 $S(f)$ は曲線 $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = 0$) となる。また $\eta(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbf{R}^2$ を $(df)_{\gamma(t)}(\eta(t)) = 0$ となるベクトルとする。このとき

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) \neq 0$$

と、 f が原点でカスプ角に同値になることは同値である。

(3) ([6]) (2) と同じ記号のもと、

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \right|_{t=0} \neq 0$$

と、 f が原点でスワローテイルに同値になることは同値である。

(4) ([7]) $f_x(0, 0)$ に横断的な \mathbf{R}^3 内の平面の族 π_z と f との交線を $c_z(t)$ ($c_0(0) = 0$) と書く。(i) $c_0(t)$ は $t = 0$ で (t^2, t^5) に同値である。(ii) $(d/dz) \det(c_z''(0), c_z'''(0)) \neq 0$ ならば f は原点においてカスプ的交差帽子に同値である。

ただし、 $f_x = \partial f / \partial x$ などで、 $' = d/dt$ である。

3 判定法の応用

前節の判定法を使えば曲面のいろいろなクラスにジェネリックにあらわれる特異点を調べることができる。ここでは円織面にあらわれる特異点を紹介する。円織面とは R^3 内の円の 1-パラメータ族で、ちょうど線織面の“線”を“円”にした概念である。

定義 6. 円織面 (circular surface) とは

$$V(t, \theta) = V_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, r)}(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$$

であらわされる写像 $V : I \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^3$ のことである。ただし、 $\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^3, r > 0, \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1, \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ で、 I は開区間である。 \cdot は \mathbf{R}^3 の通常の内積である。

γ をベース曲線、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を方向枠という。円 $\theta \mapsto \gamma(t) + r(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$ を母円という。

円織面は $\gamma' \cdot \mathbf{a}_1 \neq 0$ または $\gamma' \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$ のとき非管状と呼ばれるがこの場合、線織面の締活線に対応するものが 2 本、常に母円の直径対点を通るようにあらわれ、特異点は締活線上にあらわれる。締活線上で常に特異点をもつ線織面は接線曲面であったが、締活線上で常に特異点をもつ円織面は次のようなものである。

定理 7. [3] 締活線上のすべての点で特異点を持つ円織面は球面か次の形の曲面のどちらかである。

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos \theta \mathbf{e} + \sin \theta (\cos \varphi(t) \mathbf{n}(t) + \sin \varphi(t) \mathbf{b}(t))). \quad (1)$$

ただし、 γ はある空間曲線で $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ は γ のフルネ枠、 $\varphi(t)$ は γ の捩率 $\tau(t)$ の原始関数である。この曲面をローラーコースター曲面と呼ぶ。

接線曲面はすべての母線が線織面の曲率線になっているがローラーコースター曲面ではすべての母円が曲率線になっていて、逆にそのような性質を持つ円織面は球面か円管面かローラーコースター曲面であるという特徴づけを持つ。定理 5 を

使って、円織面が上で挙げた 4 種類の特異点を持つための条件を具体的に書くことができ、円織面とローラーコースター曲面にジェネリックにあらわれる特異点を次のように決定することができる。

- 円織面にジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子である。
- ローラーコースター曲面にジェネリックにあらわれる特異点はカスパ角とカスプ的交差帽子である。

また、円織面には母円の直径対点に同時にジェネリックに交差帽子とカスパ的交差帽子があわられたりするようなクラスもある。これは線織面ではありえないクラスで、さまざまなクラスの円織面の特異点を研究することは大変興味深い。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*, Birkhäuser (1986).
- [2] J. P. Cleave, *The form of the tangent developable at points of zero torsion an space curves*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88, (1980), 403–407.
- [3] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, preprint.
- [4] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Singularities of ruled surfaces in \mathbf{R}^3* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 130 (2001), 1–11.
- [5] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Geometry of ruled surfaces*, Applicable math. in the golden age (2003) 305–338.
- [6] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, preprint.
- [7] I. R. Porteous, *Geometric differentiation*, Camb. Univ. Press.

非線形項を決定する逆問題について

渡辺道之 (北大・COE 研究員)
佐々木浩宣 (北大・博士課程1年)

1. 逆問題とは

直接見たり触れたりするのが困難な物の性質や正体を知るにはどうしたらよいか？1つの方法は、標的に何らかの刺激を与え、その反応を観測する。この実験を繰り返し得られたデータから標的の正体を予想することである。この事を理論的に説明し、解明しようというのが偏微分方程式の逆問題である。

多くの物理現象は偏微分方程式で記述される。偏微分方程式の通常理論では、方程式の係数、初期条件、境界条件、初期値、境界値は既知量であり、時刻 t 場所 x における方程式の解が求めるべき未知量である。既知量に適切な条件を課すことで、解の一意存在がわかり、その解の漸近挙動などのいろいろな性質を調べることが出来る。このような問題は**順問題**と呼ばれている。

しかし、現実の問題では順問題で既知量と考えているものは、いくつかが未知量である場合が多い。たとえば、方程式に現れる係数は考えている系の物理的特性を現すものであるが、これら全てが既知である場合は少ない。このような場合、順問題とは逆に解についての何らかの情報からこれらの未知量を推定することを**逆問題**と呼んでいる。

ここで偏微分方程式の逆問題の例を1つ挙げておこう。半無限区間 $(0, \infty)$ を熱の伝導体が占めているとしよう。この伝導体の比熱と密度は1、熱伝導率は時間 t のみに依存する函数 $a(t)$ とする。又、伝導体内での熱の発生はないものとする。このとき、温度 $u = u(x, t)$ は偏微分方程式(熱方程式)

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty, 0 < t < \infty)$$

を満たす。初期時刻 $t=0$ での温度分布は0としよう。つまり、

$$(2) \quad u|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

この伝導体の熱伝導率 $a(t)$ を未知量とする逆問題を考えたい。どのように定式化されるだろうか？

境界 $x=0$ での熱の流量を与え(入力)そこでの温度を出力として、時間 $T > 0$ の間観測し続ける。このデータから熱伝導率を決定しよう。このことを数式で表現すると

$$(3) \quad -a(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = g(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad [\text{熱の流量}]$$

$$(4) \quad u|_{x=0} = f(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad [\text{温度}]$$

となる。この場合、逆問題は $\{f(t), g(t)\}$ を既知量とし、それから未知量である $\{a(t), u(x, t)\}$ を決定せよ、という問題になる。

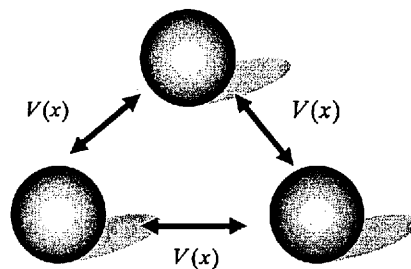
(注意) この問題は非線形である！

実際、少しの計算の結果、問題(1)～(4)は積分方程式

$$\left(\int_0^t \frac{f'(r)}{\left(\int_r^t a(r') dr' \right)^{1/2}} dr \right) a(t) = \sqrt{\pi} g(t)$$

に帰着される。この方程式は $a(t)$ に関して非線形である。

2. 多体粒子系: 同種の粒子が N 個ある体系を考えよう。我々が問題とするのは、粒子間に働く相互作用のポテンシャルを決定することである。多粒子の運動は多体シュレディンガー方程式で記述されるが、これを厳密に解くことはきわめて困難である。古典力学においても、太陽、月、地球を同時に考えた時の問題、すなわち 3 体問題の厳密解が、特殊な場合以外知られていないことからその困難さが想像できるであろう。そこで、多体問題に対する様々な取り組みが行われてきた。その 1 つがハートリー理論である。問題を単純にするために、各粒子に働く相互作用は皆同じ $V(x)$ (ただし遠方で十分早く減衰しているもの) としよう。ハートリー理論に従うと得られる方程式は非線形のシュレディンガー方程式



遠方に散乱された粒子のデータから粒子間に働いている相互作用の力を推定したいのだが...

$$(5) \quad i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\Delta \mathbf{u} + \int_{R^3} V(x-y) U(x, y, t) \overline{\mathbf{u}(y, t)} dy$$

である。ここで $i = \sqrt{-1}$ であり、 Δ はラプラシアン、また $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ であり、 N は粒子の個数を表している。さらに

$$U(x, y, t) = (U_{jk}(x, y, t)) \quad N \times N \text{ 行列}$$

$$U_{jk}(x, y, t) = \begin{cases} u_j(x, y) u_k(y, t) & j \neq k \\ 0 & j = k \end{cases}$$

である。我々はこの非線形方程式に対して、粒子間の相互作用の力を表す $V(x)$ を未知量とし、これを推定する逆問題について取り組んだ。まず問題になるのは『何を既知量とするか?』である。

熱方程式の例でも紹介したとおり、(全ての問題がそうであるとは限らないが) **逆問題は方程式が線形であっても非線形の問題**である。従って、方程式が非線形となると問題はさらに難しくなると想像できるだろう。実際、非線形方程式に対する逆問題は結果も少なく発展途上であるように思う。その中で、1 つの結果として、1974 年ごろ非線形シュレディンガー方程式に対して (5) とは違う方程式であるが)、**散乱作用素なるものから方程式の係数を一意に決定できる**、ということが研究された。(ただし、この結果は単に数学的な興味に限るもので、物理的意味はないようにおもわれる。) 我々もこの結果にあやかり、問題を

『散乱作用素から $V(x)$ を決定せよ』

と設定した。ここで、散乱作用素 S とは粒子の遠方での挙動を表すもので

$$(6) \quad (Sf)(x) = f(x) + \frac{1}{i} \int_{R^3} e^{iH_0 t} \int_{R^3} V(x-y) U(x, y, t) \overline{\mathbf{u}(y, t)} dy dt$$

と定義される。ここで、 $H_0 = -\Delta$ 、 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ である。我々が解こうとしている問題はつまるところ等式(6)において、 $\{(Sf)(x), f(x)\}$ を既知量とし、未知量 $\{V(x), \mathbf{u}(x, t)\}$ を求めよ、ということになる。

3. 結果: 我々が得た結果は、(6)式は V について (適当な条件の下で) 一意に解けるということである。つまり、二つの函数 $V_1(x), V_2(x)$ に対して、対応する散乱作用素を S_1, S_2 とする。

$$S_1 = S_2 \quad \text{ならば} \quad V_1 = V_2$$

である。方程式(5)の散乱問題の解の一意性から $V_1 = V_2$ ならば $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ が自動的に得られる。

証明の方針は、非線形問題(6)式を**線形化**し、背理法で証明する。その際 \mathbf{f} をどう取るかがポイントであり、我々が様々な工夫を凝らした点である。

4. **定理**：我々が得た定理を述べよう。 $V(x)$ は次の仮定を満たすとする。

- ① $V(x)$ は 1 階微分までが有界で連続な関数とし、

$$|V(x)| \leq C|x|^{-\sigma}, \quad 2 \leq \sigma \leq 4$$

を満たす。ここで、 $C > 0$ は定数である。

- ② $V(x)$ の Fourier 変換 $\hat{V}(\xi)$ が連続関数

このとき

定理： $S_1 = S_2$ ならば
 $V_1 = V_2$ in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

5. 参考文献：

- ① K. Mochizuki, On small data scattering with cubic convolution nonlinearity, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), 143-160.
- ② C. S. Morawetz and W. A. Strauss, On a nonlinear scattering operator, Comm. Pure Appl. Math **26** (1973), 47-54.
- ③ R. Weder, Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation, Comm. PDE **22** (1997), 2089-2103.
- ④ R. Weder, $L^p - L^q$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential, J. Func. Anal. **170** (2000), 37-68.
- ⑤ R. Weder, Inverse scattering on the line for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential, J. Math. Anal. Appl. **252** (2000).
- ⑥ R. Weder, Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation II. Reconstruction of the Potential and the Nonlinearity in the multidimensional case, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3637-3645.
- ⑦ R. Weder, Inverse scattering for the non-linear Schrödinger equation: reconstruction of the potential and the non-linearity, Math. Meth. Appl. Sci. **24** (2001), 245-254.
- ⑧ R. Weder, Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential, J. Differential Equations **184** (2002), 62-77.
- ⑨ 阿部龍蔵, 多体問題の理論形式, 「量子物理学の展望 下 - 50年の歴史に立って-」, pp. 449-466. 江沢洋・垣藤敏彦編, 岩波書店.
- ⑩ 田中博, 岡部政之, 鈴木貴, 逆問題, (岩波講座応用数学 [方法 6]), 岩波書店 (1993).

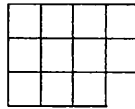
ヤング盤の一般化とロビンソン-シェンステッド対応

沼田 泰英 (NUMATA, YASUhide)
北海道大学大学院理学研究科博士後期課程 1 年

1. INTRODUCTION

非負整数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 非負整数の非減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$) が, $\sum_i \lambda_i = n$ を満しているとき, n の分割であるといい, $\lambda \vdash n$ と書く. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \vdash n$ に対して n の分割 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ と n の分割 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0)$ を同一視する. 0 の分割は (0) ($= (0, 0) = (0, 0, 0) = \dots$) のみであり \emptyset と書くことにする. 分割 λ に対して, $|\lambda|$ を $\sum_i \lambda_i$ で定義する.

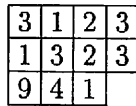
$\lambda \vdash n$ に対して, $D_\lambda := \{(i, j) \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ を λ のヤング図形 (Young diagram) という. $(i, j) \in D_\lambda$ を i 行 j 列目の箱 (box) と呼ぶ. 我々は, D_λ を i 行目に λ_i 個の箱を左に寄せて並べた図形で書き表す. 例えば, $(4, 4, 3) \vdash 11$ は



のようにあらわす. 以下特に断りがない限り分割 λ とそのヤング図形 D_λ とを同一視し両方とも λ で書き表すことにする.

n 箱のヤング図形からなる集合を $\mathbb{Y}_n := \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$, ヤング図形全体からなる集合を $\mathbb{Y} := \bigcup_i \mathbb{Y}_i$ と書く. ヤング図形 D_λ は, 集合であるので, 集合の包含関係を用いて, \mathbb{Y} に半順序集合 (poset) の構造を入れることができる. \mathbb{Y} はこの半順序で束 (lattice) になっておりヤング束 (Young's lattice) と呼ばれる. 0 箱のヤング図形 \emptyset は, ヤング束 \mathbb{Y} の最小元になっている.

n 箱のヤング図形 λ から $\{1, \dots, m\}$ への写像, $T: \lambda \ni (i, j) \mapsto T_{i,j} \in \{1, \dots, m\}$ を, $\{1, \dots, m\}$ を使った λ 上の filling と呼び,



のようにヤング図形 λ の i 行 j 列目の箱に $T_{i,j}$ を書き入れることで filling T を書き表す. filling T に対して, その定義域 λ を T の形 (shape) と呼ぶ.

λ 上の filling T のうちで, $T_{i,j} < T_{i+1,j}$, $T_{i,j} \leq T_{i,j+1}$ を満たすものを, 半標準盤 (semi-standard tableau) と呼ぶ. 形が λ で $\{1, \dots, m\}$ を使った半標準盤の総数を $d_\lambda(m)$ と書く.

Example 1.1. 3 箱のヤング図形上の $\{1, 2\}$ を使った半標準盤は次の 6 つ:

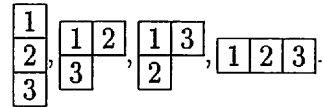
形が (3) のもの: $\boxed{1} \boxed{1} \boxed{1}, \boxed{1} \boxed{1} \boxed{2}, \boxed{1} \boxed{2} \boxed{2}, \boxed{2} \boxed{2} \boxed{2};$

形が $(2, 1)$ のもの: $\boxed{1} \boxed{1}, \boxed{1} \boxed{2};$
 $\boxed{2}, \boxed{2}.$

よって $d_{(3)}(2) = 4$, $d_{(2,1)}(2) = 2$, $d_{(1,1,1)}(2) = 0$ である.

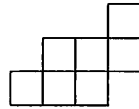
$\lambda \vdash n$ 上の半標準盤 T が, λ から $\{1, \dots, n\}$ への全単射になっているときは標準盤 (standard tableau) と呼ぶ. 形が λ の標準盤の総数を f^λ と書く.

Example 1.2. 3 箱のヤング図形上の半標準盤は次の 4 つ:



$f^{(3)} = 1, f^{(2,1)} = 2, f^{(1,1,1)} = 1$ である.

λ, μ がともにヤング図形であって, $\lambda \subset \mu$ を満たしているときに, $\mu \setminus \lambda$ を歪ヤング図形 (skew Young diagram) といい μ/λ と書く. 例えば, $(4, 4, 3)/(3, 1)$ は



のように書き表す. ヤング図形のとき同様に標準盤などを定義することができて歪標準盤 (skew tableau) などと呼ばれる. ヤング図形 λ は λ/\emptyset だと思えることができる.

我々は標準盤や半標準盤の個数に興味を持っており, 次の対応はよく知られている.

Theorem 1.3 (Robinson 対応). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\left\{ (P, Q) \mid \begin{array}{l} P, Q: \text{形が } \lambda \text{ の標準盤} \\ \lambda \vdash n \end{array} \right\}$ と対称群 S_n の間には全単射が存在する. 特に, $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$.

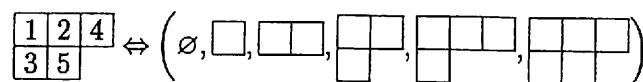
Theorem 1.4 (Robinson-Schensted 対応). 任意の $n, l \in \mathbb{N}$ に対して, $\left\{ (P, Q) \mid \begin{array}{l} P: \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, l\} \text{ を使った半標準盤} \\ Q: \text{形が } \lambda \text{ の標準盤} \\ \lambda \vdash n \end{array} \right\}$ と $\{1, \dots, l\}$ の n 文字の列 $\{1, \dots, l\}^n$ の間には全単射が存在する. 特に, $\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda d_\lambda(m) = m^n$.

Theorem 1.5 (Robinson-Schensted-Knuth 対応). 任意の $n, k, l \in \mathbb{N}$ に対して, $\left\{ (P, Q) \mid \begin{array}{l} P: \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, l\} \text{ を使った半標準盤} \\ Q: \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, k\} \text{ を使った半標準盤} \\ \lambda \vdash n \end{array} \right\}$ と $\left\{ A = (a_{i,j}) \mid \begin{array}{l} A \text{ は } k \times l \text{ 行列} \\ a_{i,j} \in \mathbb{N} \\ \sum_{i,j} a_{i,j} = n \end{array} \right\}$ の間には全単射が存在する.

これらの全単射を構成するアルゴリズムとして bumping と呼ばれるアルゴリズムが知られている.

これらの数え上げに別の解釈を与えるために次の方法でヤング盤をあるヤング図形の列と同一視する.

$\lambda \vdash n$ 上の標準盤 T に対して, 逆像 $T^{-1}(\{0, \dots, l\})$ はヤング図形になっている. さらに, $\lambda^{(i)} = (T^{-1}(\{0, \dots, i\}))$ と置くと, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)})$ は \emptyset から始まり 1 箱ずつ増えていっているヤング図形の列になっていることがわかる. 逆に $(\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda)$ という \emptyset から始まり 1 箱ずつ増えていっているヤング図形の列に対してが与えられたときに, $T: \lambda \ni (i, j) \mapsto l$ (if $(i, j) \in \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$) $\in \{1, \dots, n\}$ は λ 上の標準盤を与える. この対応で標準盤と \emptyset から始まり 1 箱ずつ増えていっているヤング図形の列を同一視する. 例えば,



のように同一視する. また, μ から始まり λ まで 1 箱ずつ増えていっているヤング図形の列は λ/μ 上の歪標準盤と同一視することができる.

$\{1, \dots, m\}$ を用いた $\lambda \vdash n$ 上の半標準盤 T においても, その逆像 $T^{-1}(\{0, \dots, l\})$ はヤング図形になっている. さらに, $T^{-1}(\{0, \dots, l-1\}) \subset T^{-1}(\{0, \dots, l\})$ であ

り, 歪ヤング図形 $T^{-1}(\{0, \dots, l\})/T^{-1}(\{0, \dots, l-1\})$ には各列高々1箱しか含まれていないことがわかる. この様な, 各列高々1箱しか存在しない歪ヤング図形 λ/μ を水平列島 (horizontal strip) と呼んだりもする. $\lambda^{(i)} = T^{-1}(\{0, \dots, i\})$ と置くと, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ は \emptyset から始まり各列高々1箱ずつ増えていっているヤング図形の列になっていることがわかる. 標準盤のときと同様に, \emptyset から始まり各列高々1箱ずつ増えていっているヤング図形の列 ($\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)} = \lambda$) から $T: \lambda \rightarrow \{1, \dots, m\}$ を定義すると半標準盤になり, この対応で, 半標準盤と \emptyset から始まり各列高々1箱ずつ増えていっているヤング図形の列を同一視することができる. 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \left(\emptyset, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right)$$

のように同一視する.

K を標数 0 の体とする. $K\mathbb{Y}$ をヤング図形を基底とするベクトル空間 (即ち, ヤング図形の形式的な有限線形和のなすベクトル空間) とする. $K\mathbb{Y}$ 上の双線形写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle: K\mathbb{Y} \times K\mathbb{Y} \rightarrow K$ を $\left\langle \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} a_{\lambda} \lambda, \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} b_{\mu} \mu \right\rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} a_{\lambda} b_{\lambda}$ で定める.

$K\mathbb{Y}$ 上の線形写像 U, D を, $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して,

$$(1) \quad U\lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ に } 1 \text{ 箱加えて} \\ \text{得られるヤング図形}}} \mu, \quad D\lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ から } 1 \text{ 箱取り除いて} \\ \text{得られるヤング図形}}} \mu$$

となるように定める. このように定めたときに, U と D は

$$(2) \quad DU - UD = I$$

という交換関係を満たしていることが確かめられる.

例えば, $U^n \emptyset$ での $\lambda \vdash n$ の係数は, $(\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda)$ という \emptyset から始まり1箱ずつ増えていっているヤング図形の列の総数に等しいことは定義からわかる. このような列は形が λ の標準盤と同一視することができたので,

$$(3) \quad U^n \emptyset = \sum_{\lambda \vdash n} f^{\lambda} \lambda$$

がわかる.

同様に, $\lambda \vdash n$ に対して $D^n \lambda$ での \emptyset の係数は, $(\lambda = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \emptyset)$ という λ から始まり \emptyset まで1箱ずつ減っていっているヤング図形の列の総数に等しいことは定義からわかる. このような列の総数は形が λ の標準盤の総数に等しいことがわかり.

$$(4) \quad \langle \emptyset, D^n \lambda \rangle = f^{\lambda}$$

が $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対して成立することがわかる.

さて、ここで $D^n U^n$ について、観察する。式 (3), (4) から、

$$\begin{aligned} \langle D^n U^n \emptyset, \emptyset \rangle &= \left\langle D^n \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \lambda, \emptyset \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \langle D^n \lambda, \emptyset \rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \langle f^\lambda \emptyset, \emptyset \rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \end{aligned}$$

を得る。

さて、一方で D と U は式 (2) つまり $DU - UD = I$ という交換関係を満たしているのので、 $D^n U^n = (UD + n)D^{n-1}U^{n-1} = (UD + n)(UD + n - 1)D^{n-2}U^{n-2} = \dots = (UD + n)(UD + n - 1) \dots (UD + 1)$ と変形することができ、 $D\emptyset = 0$ に注意すると、 $D^n U^n \emptyset = n! \emptyset$ がわかる。よって $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ を得るが、これは、Robinson 対応の別証を与えている。

Stanley によって定義された r -differential poset は \mathbb{Y} と同様に D, U が定義できて $DU - UD = rI$ という交換関係を満たしている poset である。 r -differential poset においても、 D と U の交換関係を用いて同様な数え上げを行うことができる。また、Fomin はこの数え上げを、graph の paths の数え上げだと思ふことで D, U が別の規則に従うある状況に対しても同様の数え上げを行った。また、彼は、交換関係 $DU - UD = rI$ が示唆する local な対応を張り合わせることで、全単射を構成し、これらの数え上げの別証を与えている。さらに彼は、 $D(t)U(t') = a(tt')U(t')D(t)$ という母関数で書かれた交換関係を満たしているときには、Robinson-Schensted-Knuth 対応に相当する全単射を構成できることを示している。

2. 主結果—ROBINSON-SCHENSTED 対応

さて、differential poset の手法を Robinson-Schensted 対応、即ち半標準盤の数え上げに応用することを考える。

$K\mathbb{Y}$ 上の線形作用 E を $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して、

$$(5) \quad E\lambda = \sum_{\mu: \lambda \text{ から各列高々1箱除いて得られるヤング図形}} \mu$$

となるように定義する。

D の時と同様 $\langle E^m \lambda, \emptyset \rangle$ に注目すると、これは、 \emptyset から始まり各列高々1箱ずつ増えているヤング図形の列 ($\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)} = \lambda$) の総数であることが定義からわかる。すなわち、 $\langle E^m \lambda, \emptyset \rangle = d_\lambda(m)$ であることがわかる。また、 E は (1) で定義した U という線形作用素と

$$(6) \quad EU - UE = E$$

という交換関係を満たしている。この交換関係から、 $E^m U^n = (U + mI)^n E^m$ がわかり $\langle E^m U^n \emptyset, \emptyset \rangle = m^n$ を得る。一方で $\langle E^m U^n \emptyset, \emptyset \rangle = \langle E^m \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \lambda, \emptyset \rangle = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \langle E^m \lambda, \emptyset \rangle = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda d_\lambda(m)$ であるので、 $\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda(m) f^\lambda = m^n$ を得る。これは、Robinson-Schensted 対応の別証を与えている。

この事実を次の形で graph の paths の数え上げとして一般化する。

有向グラフが与えられた時, その頂点達 Y を基底とする K -線形空間を KY とおく. 頂点 λ に対して λ を始点 (終点) とする辺達の終点 (始点) の和を対応させる KY 上の K -線形写像を上り (下り) 演算子という.

頂点集合から非負整数への写像 ρ が与えられていて, 任意の辺 e に対し $\rho(\text{start}(e)) = \rho(\text{end}(e)) - 1$ が成立しているときに, *graded* であるという. また, 任意の辺 e に対して $\rho(\text{start}(e)) \leq \rho(\text{end}(e))$ を満たし $\rho(\text{start}(e)) = \rho(\text{end}(e))$ が成立するのは $\text{start}(e) = \text{end}(e)$ の時に限るときに *semi-graded* であるという.

G_1, G_2 を共通の頂点集合をもつ *semi-graded* なグラフの組とし, 特に G_1 は *graded* であるとする. G_1 の上り演算子 U と G_2 の下り演算子 E が, 交換関係 $EU - UE = rE$ を満たしているとする. G_1 の path を歪標準盤の一般化, G_2 の path を歪半標準盤の一般化だと思ふことで, 先ほどと同様な数え上げが G_1, G_2 の paths の数え上げとして行うことができる.

また, Robinson 対応のときと同様に, 交換関係 $EU - UE = rE$ が示唆する local な paths の対応をつなぎ合わせることでより global な paths の対応を構成し, これらの数え上げに対して別証を与えることができる. すなわち次の定理を得る.

Theorem 2.1 (Main Theorem). G_1, G_2 を共通の頂点集合をもつ *semi-graded* なグラフの組とし, 特に G_1 は *graded* であるとする. G_1 の上り演算子 U と G_2 の下り演算子 E が, 交換関係 $EU - UE = rE$ を満たしているとする. このとき, G_1, G_2 の *RS*-対応 Ψ と *skew shape* S に対して, $\{g' : \partial^+ S \rightarrow G, \text{growth}\}$ と $\left\{ (\alpha, g'') \left| \begin{array}{l} \alpha: r\text{-colored generalized word on } C(S), \\ g'' : \partial^- S \rightarrow G, \alpha\text{-compatible growth} \end{array} \right. \right\}$ の間の一対一対応を Ψ -compatible 2-growth $g : S \rightarrow G$ を通して構成することができる.

REFERENCES

- [1] Fomin, S., Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Zar. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155(1986), 156–175, 195 (Russian); English transl., J. Soviet Math. 41(1988), 979–991.
 - [2] Fomin, S., Duality of graded graphs, J. Algebraic Combin. 4(1995), 5–45.
 - [3] Fomin, S., Schensted algorithms for dual graded graphs, J. Algebraic Combin. 4(1995), 5–45.
 - [4] Fomin, S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. of Combinatoric theory, Series A. 72(1995), 277–292.
 - [5] Fulton, W., Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.
 - [6] Gessel, Ira M., Counting paths in Young's lattice, J. Statistical planning and inference. 34(1993), 125–134.
 - [7] Roby, T., Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets, Ph.D. thesis, M.I.T., 1991.
 - [8] Stanley, R., Differential posets, J. American Math. Soc, 1(1988), 919–961.
 - [9] Stanley, R., Variations on differential posets, Invariant theory and tableaux (Stanton, D., ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag, New York, pp. 145–165.
- E-mail address:* nu@math.sci.hokudai.ac.jp

2-level 断熱遷移問題に対する exact WKB 法の応用

東北大学理学研究科 渡部 拓也

1 Landau-Zener の公式

1.1 遷移確率の定義

時間依存する Schrödinger 方程式を考える.

$$ih \frac{d}{dt} \psi(t) = \begin{pmatrix} t & \varepsilon \\ \varepsilon & -t \end{pmatrix} \psi(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

h, ε は正の小さなパラメータとする. このとき以下の漸近挙動をもつ4つの解 $\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^l, \psi_2^l$ が一意的に存在する.

$$\psi_1^r(t) \sim \exp\left\{-\frac{i}{h}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon \log t\right)\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2^r(t) \sim \exp\left\{\frac{i}{h}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon \log t\right)\right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$\psi_1^l(t) \sim \exp\left\{-\frac{i}{h}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon \log |t|\right)\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2^l(t) \sim \exp\left\{\frac{i}{h}\left(\frac{t^2}{2} + \varepsilon \log |t|\right)\right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

これらの解を **Jost 解** と呼ぶ.

定義 1.1. Jost 解から定まる次の行列を **散乱行列** と定義する.

$$(\psi_1^l \psi_2^l) = (\psi_1^r \psi_2^r) S$$

但し $(\psi_1^l \psi_2^l)$ は2つの列ベクトルを並べた行列を表す. また $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ とするとき, $|s_{11}|^2$ を **遷移確率** と呼ぶ.

1.2 Landau-Zener の公式

(1) に対し, 上で定義される遷移確率 P は以下で与えられる.

$$P = |s_{11}|^2 = e^{-\pi\varepsilon^2/h} \quad (2)$$

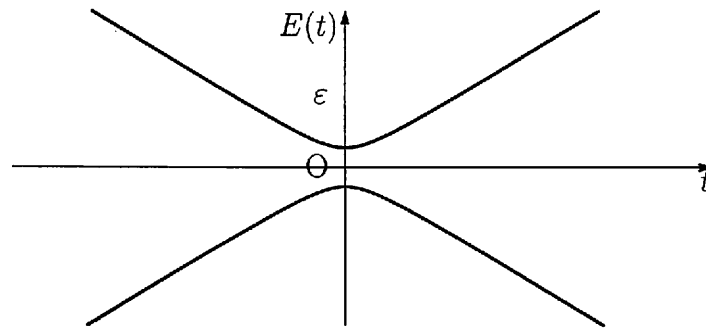
これは1930年代初め, L.Landau と C.Zener によって得られたものである.

1.3 物理的解釈

1.3.1 遷移確率

まず遷移確率とは何を意味するのか説明する. [1]

(1) の右辺の行列の固有値は $E(t) = \pm\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$ である. 横軸に t をとりグラフに描いたものを断熱ポテンシャル曲線と呼ぶが, これは2つの固有状態 (2-level) のエネルギーを表す.



この2曲線が最も近づく原点において, 固有状態が移り変わる現象 (遷移) が起こることが知られている. この遷移がどの程度起こるかを与えるものが先に定義した遷移確率である.

1.3.2 パラメータ ε, h

Landau-Zener の公式 $P = e^{-\pi\varepsilon^2/h}$ から ε, h の物理的解釈を考察する.

ε : $E(t) = \pm\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$ からわかるように, ε は原点でのエネルギーギャップを表す. Landau-Zener の公式において $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $P = 1$ となるが, これはギャップが小さければ小さいほど遷移が起こりやすいということを表している.

h : h を小さくすることは, 物理的に系の時間変化をゆっくりにすることを意味する. 量子力学における断熱定理によれば, 時間変化をゆっくり行うすなわち断熱的に変化させるとき, 固有状態は同じエネルギーレベル上にとどまることが知られている. Landau-Zener の公式において $h \rightarrow 0$ とすると $P = 0$ となるのは, 断熱的に変化するとき固有状態の遷移は起こらないことを意味している.

1.3.3 半古典近似との対応

Schrödinger 方程式に内在する h は Plank 定数と呼ばれる非常に小さな定数であるが, これを小さなパラメータとみなし $h \rightarrow 0$ を考えると, 解や固有値 (エネルギー) の量子力学的描像は古典力学的描像に回帰する. これを N.Bohr の対応原理という. これに対し数学的に解析することを半古典解析といい, exact WKB 法はその手法のひとつである.

上の考察からわかるように半古典パラメータは断熱パラメータとみなすこともできる. 近年半古典解析の数々の手法を断熱近似問題に適用する研究も行われている.

1.4 公式の導出

1 階連立常微分方程式は 2 階単独常微分方程式の一般化であり, 実際方程式 (1) は本質的には Weber の微分方程式である. [2]

$t = h^{1/2}x$, $\varepsilon = h^{1/2}v$ とし, $\psi(h^{1/2}x) = \phi(x)$ とすると, (1) は形式的に v のみを含む式に変形できる.

$$i \frac{d}{dx} \phi(x) = \begin{pmatrix} x & v \\ v & -x \end{pmatrix} \phi(x)$$

$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$ とし, ϕ_2 を消去すると,

$$\frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} + (i + v^2 + x^2) \phi_1(x) = 0$$

ここで $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}x$, $\lambda = \frac{-iv^2}{2}$ なる変数変換を考え, $\phi_1\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}z}{\sqrt{2}}\right) = w(z)$ と書き換えると, Weber の微分方程式

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) w(z) = 0$$

に帰着できる. この Weber の微分方程式の解である放物柱関数 $D_\lambda(z)$, $D_\lambda(-z)$, $D_{-\lambda-1}(iz)$, $D_{-\lambda-1}(-iz)$ の性質を利用する. 放物柱関数 $D_\lambda(z)$ は以下の積分表示と漸近展開をもつ.

$$\begin{aligned} D_\lambda(z) &= \frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-zt - (t^2/2)} t^{-\lambda-1} dt \quad (\operatorname{Re} \lambda < 0) \\ &= \begin{cases} e^{-z^2/4} z^\lambda (1 + O(z^{-2})) & \text{in } |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \\ e^{-z^2/4} z^\lambda (1 + O(z^{-2})) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)} e^{\lambda\pi i + (z^2/4)} z^{-\lambda-1} (1 + O(z^{-2})) & \text{in } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5}{4}\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$|z| \rightarrow \infty$ のとき正の実軸上と負の実軸上に沿って近づくのでは $D_\lambda(z)$ の漸近挙動が異なるのは, $z = \infty$ が Weber の微分方程式の不確定特異点になっているからである. このように $\arg z$ によって解の漸近挙動が不連続的に変化する現象を Stokes 現象と呼ぶ.

Stokes 現象が起こる場合には解の大域的な解析は困難であるが, 放物柱関数には以下の接続公式が知られている.

$$\begin{pmatrix} D_\lambda(-z) \\ D_{-\lambda-1}(iz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda\pi i} & -i \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)} e^{-\lambda\pi i/2} \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda\Gamma(-\lambda)} e^{-\lambda\pi i/2} & -e^{-\lambda\pi i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\lambda(z) \\ D_{-\lambda-1}(-iz) \end{pmatrix}$$

したがって漸近展開から Jost 解となる解を放物柱関数で表現し, 接続公式により散乱行列を求めると,

$$S = \begin{pmatrix} e^{-\lambda\pi i} & \frac{v2^\lambda \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\lambda\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda\pi i/2} \\ \frac{2\sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi}{4}i}}{v2^\lambda \Gamma(\lambda)} e^{-\lambda\pi i/2} & e^{-\lambda\pi i} \end{pmatrix}$$

よって $P = |s_{11}|^2$ で定義される遷移確率は, $\lambda = -\frac{iv^2}{2}$ より,

$$P = |s_{11}|^2 = e^{-\pi v^2} = e^{-\pi \varepsilon^2/h} \quad (3)$$

1.5 問題提起

Landau-Zener の公式は方程式 (1) の右辺の行列の対角成分が t の 1 次式であるおかげで Weber の微分方程式に帰着できた。それでは対角成分を一般の関数 $V(t)$ とするとき、どのように遷移確率を求めればよいか？少なくとも先のように特殊関数は使えない!!

2 Exact WKB 法

この問題のひとつのアプローチとして WKB 解を導入する。WKB 解とは

$$\begin{aligned}\psi(t; h) &= e^{i\phi(t)/h} W(t; h) \\ W(t; h) &\sim \sum_{j \geq 0} w_j(t) h^j \quad (h \rightarrow 0)\end{aligned}\tag{4}$$

なる解である。ここで $\phi(t)$ は Schrödinger 方程式の行列から定まるしかるべき関数であり、このときベクトル $w_j(t)$ は一意的に定まる。WKB 解の特徴は $h \rightarrow 0$ とするとき $\sum_{j \geq 0} w_j(t) h^j$ が発散級数になってしまうことである。しかし和のとり方を変えることで収束させることができ、 $W(t; h)$ として意味をもたせることができる。そうして真の解となるように構成した解 (4) を **exact WKB 解** と呼ぶ。

さらに $\phi(t)$ に対して、相関数 $\phi(t)$ の零点を **turning point** と呼び、 $\text{Re}\phi(t) = 0$ の集合を **Stokes 曲線** と呼ぶ。このとき exact WKB 解は turning point を通る Stokes 曲線上で Stokes 現象を起こす。つまり $h \rightarrow 0$ とするとき turning point が先に述べた Weber の微分方程式でいう不確定特異点に相当する。

今回の研究目的は、この exact WKB 解を用いて Jost 解を表現し、turning point での Stokes 現象に注意して散乱行列・遷移確率を求めることである。

講演では対角成分 $V(t) = t^2$ の場合について述べる予定である。

参考文献

- [1] 高柳和夫: 原子分子物理学, 朝倉物理学大系 11, (2000)
- [2] T.Aoki, T.Kawai, Y.Takei: 線型常微分方程式系に対する接続公式とその応用-完全 WKB 解析を用いた非断熱的遷移確率の計算-, 数理解析研究所講究録 1239, (2001)

有理曲面の曲線束の Mordell-Weil 格子

北川 真也* (Shinya Kitagawa)

大阪大学大学院 理学研究科 博士課程 2 年

コンパクト非特異複素解析曲面 X の有理関数体 $\mathbb{C}(X)$ が \mathbb{C} 上純超越拡大であるとき, X を有理曲面と呼ぶ. 以下しばらく有理曲面の幾何的構成を紹介する. 非負整数 d に対して

$$\Sigma_d := \{(x_0 : x_1 : x_2) \times (y_0 : y_1) \mid x_1 y_1^d = x_2 y_0^d\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

は第二成分への射影の制限 $\pi := \text{pr}_2|_{\Sigma_d} : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{P}^1$ により射影直線束の構造をもち, d 次の Hirzebruch 曲面と呼ばれる. このとき Σ_0 は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に他ならない. 任意の π のファイバー Γ は自己交点数 0 のリーマン球面である. Σ_d 上の曲線 C に対して $\pi|_C : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ が 1 対 1 の写像になるとき C を π の切断曲線とよぶ. 切断曲線 $\Delta := \{x_1 = x_2 = 0\} \subset \Sigma_d$ は $\Delta^2 = -d$ であるが, Δ と異なる切断曲線は自己交点数が d 以上である. X が有理曲面のとき Néron-Severi 群 $\text{NS}(X)$ は $H^2(X, \mathbb{Z})$ に他ならない. $\text{NS}(\Sigma_d) \simeq \mathbb{Z}\Delta \oplus \mathbb{Z}\Gamma$ が成り立つ. 次に特別 $\rho_1 := \text{pr}_1|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ に着目する. $\Delta = \rho_1^{-1}((1 : 0 : 0))$ であり $\rho_1|_{\Sigma_1 \setminus \Delta} : \Sigma_1 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \{(1 : 0 : 0)\}$ は同型である. このようにコンパクト非特異複素解析曲面 S から 1 点を抜いて (-1) -曲線¹をさし入れて曲面 \bar{S} を構成する操作をブローアップと呼ぶ. 逆に \bar{S} 上の (-1) -曲線 E を 1 点につぶしながら $\bar{S} \setminus E$ を維持して曲面 S を構成する立場のときは E の縮約と呼ぶ. このとき $\text{NS}(\bar{S}) \simeq \text{NS}(S) \oplus \mathbb{Z}E$ が成り立つ. 有理曲面は \mathbb{P}^2 または Σ_d の有限回のブローアップで得られる.

非特異有理曲面 X が \mathbb{P}^1 への全射正則写像 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ をもつとする. f の一般ファイバー F が種数 $g \geq 1$ のコンパクトリーマン面であり, どのファイバーも (-1) -曲線を含まないときに, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を種数 g の相対極小な曲線束と呼ぶ.

X は非特異有理曲面で, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は切断曲線をもつ種数 $g \geq 1$ の相対極小な曲線束とする. 塩田氏の [6] 及び [8] にしたがって Mordell-Weil 格子理論の基本的な記号と結果を (この理論自体はより一般の状況で成り立つが) 今回の状況に限定して復習する. $K = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ とおく. F の Jacobi 多様体 J_F の K -有理点のなす群 $J_F(K)$ を f の Mordell-Weil 群と呼ぶ. このとき X は有理曲面なので $J_F(K)$ は有限生成アーベル群となり, $r := \text{rank} J_F(K)$ を f の Mordell-Weil 階数と呼ぶ. F の K -有理点の集合 $F(K)$ と f の切断曲線の集合には 1 対 1 の自然な対応がある. 各 $P \in F(K)$ に対応

*shinya@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

¹自己交点数 -1 のリーマン球面

する切断曲線を (P) で表す. 特に $J_F(K)$ の原点に対応する (O) を零切断とよぶ. 塩田氏の [6] 及び [8] における主要なアイデアは交点形式による自然な内積によって $\text{NS}(X)$ をユークリッド格子とみなす点である.

(O) と f のファイバーのすべての既約成分が生成する $\text{NS}(X)$ の部分格子を T で表し, 自明格子と呼ぶ. 塩田氏による次の結果は理論全体で重要な役割を担う:

定理 1 (cf. [6, 定理 1.3] 及び [8, 定理 1]). 自然な群同型

$$J(K) \simeq \text{NS}(X)/T$$

が存在する.

(O) と F で生成される階数 2 の unimodular 格子 (行列式の絶対値が 1) を U , $R \subset \mathbb{P}^1$ を f によるファイバーが可約となる点全体の集合とおく. 各 $v \in R$ に対して $f^{-1}(v) = \Theta_{v,0} + \sum_{i=1}^{m_v-1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i}$ を既約因子分解とする, ここで $\mu_{v,i} \geq 1$ かつ $(O) \cdot \Theta_{v,0} = 1, i \geq 1$ に対しては $(O) \cdot \Theta_{v,i} = 0$ である. このとき次が成り立つ.

命題 2 (cf. [6, 命題 2.6] 及び [8, 定理 3 と命題 5]). $T = U \oplus \bigoplus_{v \in R} T_v$ と直交分解する, ここで T_v は $\Theta_{v,i}, 1 \leq i \leq m_v - 1$ によって張られる階数 $m_v - 1$ の負定値部分格子である. したがって定理 1 より,

$$(*) \quad r = \rho(X) - 2 - \sum_{v \in R} (m_v - 1),$$

ただし $\rho(X) = \text{rank NS}(X)$ は Picard 数を表す. 特に f のすべてのファイバーが既約ならば $r = \rho(X) - 2$.

定理 1 の群同型写像を $\bar{\varphi}: J_F(K) \rightarrow \text{NS}(X)/T$ で表す事にする.

補題 3 (cf. [6, 補題 8.1,8.2] 及び [8, 補題 6]). 任意の $x \in J_F(K)$ に対して $\varphi(x) \perp T$ かつ $\varphi(x) \bmod T \otimes \mathbb{Q} = \bar{\varphi}(x)$ をみたす群準同型写像

$$\varphi: J_F(K) \rightarrow \text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

が一意的に存在する. このとき特に $P \in F(K)$ に対しては

$$\varphi(P) = (P) - (O) - F + \sum_{v \in R} (\Theta_{v,1}, \dots, \Theta_{v,m_v-1}) (-I_v^{-1}) \begin{pmatrix} (P) \cdot \Theta_{v,1} \\ \vdots \\ (P) \cdot \Theta_{v,m_v-1} \end{pmatrix},$$

ただし $I_v = (\theta_{v,i} \cdot \theta_{v,j})_{1 \leq i, j \leq m_v-1}$ である. さらに $\text{Ker}(\varphi) = J_F(K)_{\text{tor}}$ が成り立つ.

定理 4 (cf. [6, 定理 8.4] 及び [8, 定理 7]). 任意の $P, Q \in J_F(K)$ に対して

$$\langle P, Q \rangle := -\varphi(P) \cdot \varphi(Q)$$

によって $J_F(K)$ 上の対称双線型形式を定義する. このとき \langle, \rangle は $J_F(K)/J_F(K)_{\text{tor}}$ に正定値格子の構造を定義する. これを f の Mordell-Weil 格子とよぶ.

直交補格子 $L := T^\perp \subset \text{NS}(X)$ に対して, その内積を交点形式の (-1) 倍でとりなおした格子を L^- とおく. このとき L^- は正定値整格子となる. 一般に整格子 (M, \langle, \rangle) は内積 \langle, \rangle を自然に $M \otimes \mathbb{Q}$ 上の内積 $\langle, \rangle_{M \otimes \mathbb{Q}}$ に拡張できるが, さらに

$$M^* := \{x \in M \otimes \mathbb{Q} \mid \langle x, y \rangle_{M \otimes \mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}, \forall y \in M\}, \quad \langle, \rangle_{M^*} := \langle, \rangle_{M \otimes \mathbb{Q}} \text{ の } M^* \text{ への制限}$$

とする. このとき $(M^*, \langle, \rangle_{M^*})$ を M の双対格子とよぶ.

定理 5 (cf. [6, 定理 8.9] 及び [8, 定理 9]). f の Mordell-Weil 格子は $(L^-)^*$ に同型である. 特に f のすべてのファイバーが既約ならば $J_F(K)$ は torsion free で $J_F(K) \simeq L^-$, すなわち $J_F(K)$ は階数 $\rho(X) - 2$ の正定値 unimodular 整格子である.

曲線束の一般ファイバー F のクリフォード指数 $\text{Cliff}(F)$ が 1 以下の場合の Mordell-Weil 格子については [5] 及び [2], [1] がある. そこで次には $\text{Cliff}(F) = 2$ の場合が問題になるが, そのうち bi-elliptic 曲線束については [3] の通りである. さらに今野氏との共同研究 [4] で F が $\text{Cliff}(F) = 2$ の一般の曲線の場合にも, 最大階数の曲線束とそれに対応する Mordell-Weil 格子を分類した. 次はその結果の一部である.

$\text{Cliff}(F) = 2$ かつ $g \geq 11$ と仮定する. このとき

$$r \leq 3g + 8 - g/3,$$

(cf. [4, 補題 3.1 (2)]). さらに階数最大の曲線束の構造は次のように決定される:

命題 6 (cf. [4, 補題 3.1]). X は非特異有理曲面とする. $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $\text{Cliff}(F) = 2$ で切断曲線をもつ $g \geq 11$ の相対極小な曲線束とする. さらに $r = 3g + 8 - g/3$ と仮定すると g は 3 の倍数である. このとき $\Phi_{|K_X+F|}$ は X 上のちょうど r 本の互いに交わらない (-1) -切断曲線の縮約であり, $\Phi_{|K_X+F|}(X) \simeq \Sigma_d$ ($0 \leq d \leq g/6$) である. 逆に f は Σ_d ($0 \leq d \leq g/6$) の $|4\Delta + (2d+1+g/3)\Gamma|$ の既約な部分ペンシルの異なる r 点の基点解消で得られる.

定義 7. g は 3 の倍数で $0 \leq d \leq g/6$ とおく. 命題 6 にある Σ_d の既約なペンシルから得られる種数 g の曲線束 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を $(g; 0, d)$ 型の曲線束とよぶ.

定理 5 により対応する Mordell-Weil 格子の構造は次の通りである:

定理 8 (cf. [4, 定理 3.6]). $(g; 0, d)$ 型の曲線束の Mordell-Weil 格子は階数 $8g/3 + 8$ の正定値 unimodular 格子であり, その Dynkin 図形は次で与えられる:

$2d - g/3 \equiv 0 \pmod{4}$ の場合は 図 1,

$2d - g/3 \equiv 1 \pmod{4}$ の場合は 図 2,

$2d - g/3 \equiv 2 \pmod{4}$ の場合は 図 3,

$2d - g/3 \equiv 3 \pmod{4}$ の場合は 図 4.

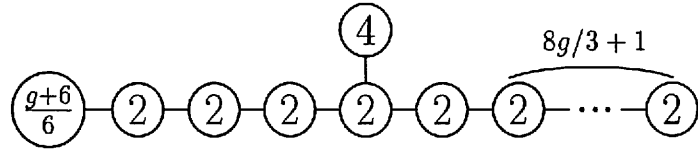


図 1.

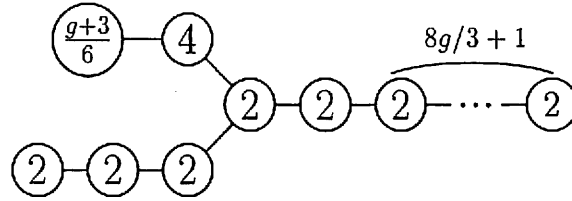


図 2.

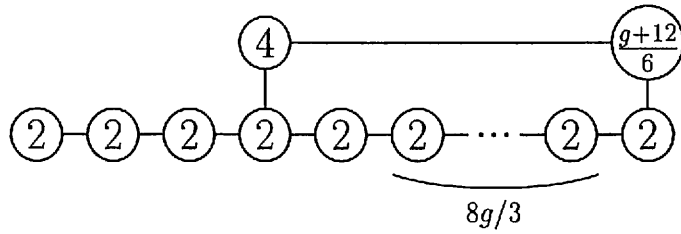


図 3.

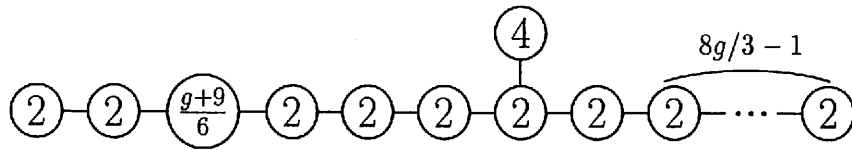


図 4.

$J_F(K)$ は偶格子

$J_F(K)$ は奇格子

$g \bmod 4$	d	Dynkin 図形
0	奇	図 3
1	偶	図 4
2	奇	図 1
3	偶	図 2

$g \bmod 4$	d	Dynkin 図形
0	偶	図 1
1	奇	図 2
2	偶	図 3
3	奇	図 4

表 1.

ここで円の内部の数字は元の自己内積を表し、二つの円を結ぶ直線は対応する二つの元の内積が -1 である事を表している。さらに格子の偶奇²は $g - d + 1$ の偶奇に一致する。特に $J_F(K)$ は $g \bmod 4$ と d の偶奇の組み合わせに依存する (表 1)。そして各 g に対して偶格子と奇格子が両方とも存在する。

以上のように高種数の曲線束に対しても Mordell-Weil 格子の具体的な構造を幾つか得られたが、例えば [7] に観られるような特異点の変形理論と結びつけた深い研究には至っていない。

参考文献

- [1] V. Nguyen Khac and M.-H. Saito, On Mordell-Weil lattices for nonhyperelliptic fibrations of surfaces with zero geometric genus and irregularity, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **66** (2002), 137–154.
- [2] V. Nguyen Khac, On certain Mordell-Weil lattices of hyperelliptic type on rational surfaces. *Algebraic geometry, 10. J. Math. Sci. (New York)*, **102**, (2000), 3938–3977.
- [3] S. Kitagawa, On Mordell-Weil lattices of bielliptic fibrations on rational surfaces, preprint (2003) to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [4] S. Kitagawa and K. Konno, Fibred rational surfaces with extremal Mordell-Weil lattices, preprint (2004) to appear in *Math. Z.*
- [5] M.-H. Saito and K. Sakakibara, On Mordell-Weil lattices of higher genus fibrations on rational surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **34** (1994), 859–871.
- [6] T. Shioda, On the Mordell-Weil lattices, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39** (1990), 211–240.
- [7] T. Shioda, Mordell-Weil lattices of type E_8 and deformation of singularities, *Prospects in complex geometry (Katata and Kyoto, 1989)*, 177–202, *Lecture Notes in Math.*, 1468, Springer, Berlin, 1991.
- [8] T. Shioda, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve, *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 359–373, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

²任意の元の内積が偶数のとき偶格子と呼び、そうでないとき奇格子と呼ばれる。

曲面上の曲線の gonality について

大阪大学大学院理学研究科

春井 岳

1 背景

代数幾何学において代数多様体 X を調べる基本的な方法の一つは、 X 上の因子 (\equiv 余次元 1 の部分代数多様体) の情報から X の性質を知るというものである。因子 D が与えられたとき、大切な情報として例えばそのコホモロジー $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ ($0 \leq i \leq \dim X$) がある。

以下 X は複素数体 \mathbb{C} 上で定義された種数 g の非特異既約な射影的代数曲線とする。 X 上の因子 D に対し、Riemann-Roch の定理

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g$$
$$(h^i(D) := \dim H^i(X, \mathcal{O}_X(D)), \quad \deg D : D \text{ の次数})$$

が成り立つ。したがって 1 次コホモロジーが消えない因子を調べるのが重要となる。このような因子を X の特殊因子という。特殊因子 D に対し $\deg D \leq 2g - 2$ である。特殊因子について最も基本的なのは次の定理である：

Clifford の定理. 代数曲線 X 上の因子 D について、 $0 \leq \deg D \leq 2g$ ならば $2r(D) \leq \deg D$ が成り立つ。ここで $r(D) := h^0(D) - 1$ 。

特殊因子に関し基本的な不変量を二つ挙げる。一つは gonality である。これは曲線 X から射影直線 \mathbb{P}^1 の上への射の最小次数として定義される：

$$\text{gon}(X) := \min\{\deg \varphi \mid \varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1, \varphi \text{ は全射}\}.$$

例. 有理曲線 \mathbb{P}^1 (種数 0) の gonality は 1, 楕円曲線 (種数 1) の gonality は 2 である。また

$$g \geq 2, \text{gon}(X) = 2 \iff X \text{ は超楕円曲線}$$

である。

もう一つの不変量は Clifford 指数と呼ばれる。Clifford の定理により、特殊因子 D に対し $\text{Cliff}(D) := \deg D - 2r(D)$ は非負整数である。そこで $g \geq 4$ のとき、 X の Clifford 指数を

$$\text{Cliff}(X) := \min\{\text{Cliff}(D) \mid h^0(D) \geq 2, h^1(D) \geq 2\}$$

で定める。また $g = 2, 3$ のときは、 X が超楕円曲線ならば $\text{Cliff}(X) = 0$ 、そうでなければ $\text{Cliff}(X) = 1$ と定める。

例. 種数 2 以上の曲線 X について

$$\text{Cliff}(X) = 0 \iff X \text{ は超楕円曲線}$$

$$\text{Cliff}(X) = 1 \iff \text{gon}(X) = 3, \text{ または } X \text{ は非特異平面 5 次曲線と同型}$$

などが成り立つ。

このようにこれら二つの不変量は曲線のある種の複雑さを測る尺度となる。また二つの不変量には

$$\text{Cliff}(X) = \text{gon}(X) - 2, \text{ または } \text{Cliff}(X) = \text{gon}(X) - 3$$

という関係があることが知られている。しかし、与えられた曲線の gonality や Clifford 指数を決定することは一般には非常に難しい。ここでは非特異既約な射影的代数曲線 X がよく知られた曲面 S 上にある場合について考える。以下 X の種数 g は 2 以上とする。

例. (1) $S = \mathbb{P}^2$, 即ち X が非特異平面 d 次曲線するとき。 $d \geq 2$ ならば $\text{gon}(X) = d - 1$, また $d \geq 5$ ならば $\text{Cliff}(X) = d - 4$ である。

(2) $S = \Sigma_n$ (Hirzebruch 曲面, 即ち \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^1 束) で $n \geq 2$ のとき。構造射 $\rho : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して $a := \deg \rho|_X$ とおく。 $a \geq 2$ のとき, $\text{gon}(X) = a$, $\text{Cliff}(X) = a - 2$ である。

上の例以外に明確にわかっている場合は少ないが、 $K3$ 曲面や Del Pezzo 曲面に乗る曲線についての結果などが知られている。

非特異代数曲面 S 上の因子 D, D' が数値的同値であるとは、任意の因子 E に対して $D \cdot E = D' \cdot E$ が成り立つことである。このとき $D \equiv D'$ とかく。曲面 S 上の数値的同値類の集合がなす可換群を Néron-Severi 群とよび、 $\text{NS}(S)$ で表す。上の二つの例では、gonality や Clifford 指数は数値的同値に関して不変であるが、一般にはそうではない。

2 主結果

E を楕円曲線（種数 1 の射影的代数曲線）とし、 $\pi: S \rightarrow E$ を E 上の \mathbb{P}^1 束とする。 π のファイバーはすべて \mathbb{P}^1 に同型である。 π の一般ファイバーを f で表す。 また π の断面のうち自己交点数が最小のものを極小断面と呼び、 C_0 で表す。 $e := -C_0^2 (\geq -1)$ は S の不変量である。 このとき曲面 S の Néron-Severi 群は次のようになる:

$$\text{NS}(S) \simeq \mathbb{Z}[C_0] \oplus \mathbb{Z}[f].$$

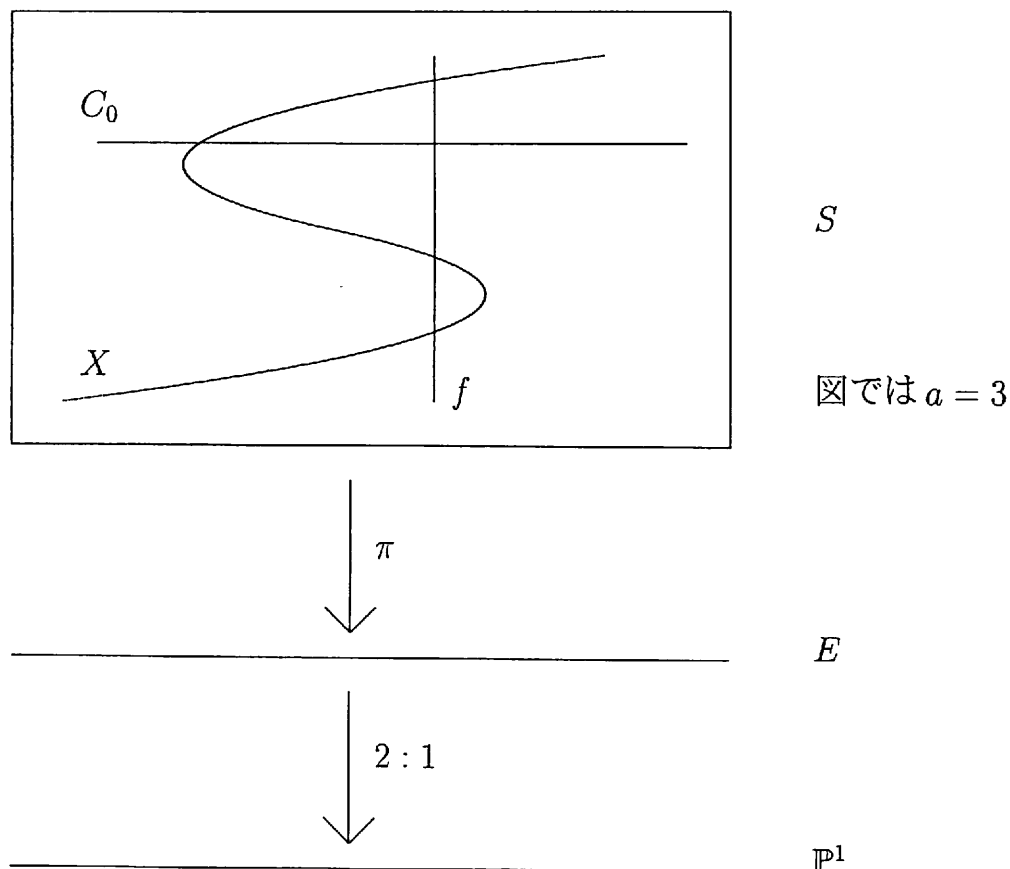
また $C_0 \cdot f = 1, f^2 = 0$ である。 S の標準束 K_S については $K_S \equiv -2C_0 - ef$ が成り立つ。 また、 E 上の因子 a の射 π による S への引き戻しを $a f$ とかく。

目標は S 上の曲線の gonality や Clifford index を決定することである。 簡単のため $e > 0$ の場合を述べるが、 $e = 0, -1$ でも類似の結果が得られる。 以下この節では X は S 上の種数 $g \geq 2$ の非特異既約代数曲線とする。 ある整数 a, b に対して $X \equiv aC_0 + bf$ となる。 このとき

$$a = \deg(\pi|_X : X \rightarrow E) \geq 2, \quad b \geq ae,$$

$$g = (a-1) \left(b - \frac{1}{2}ae \right) + 1$$

が成り立つ。 また写像の合成 $X \xrightarrow{a:1} E \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ を考えることにより $\text{gon}(X) \leq 2a$ であることがわかる。



定理. 曲線 X , 曲面 S などは上の通りとする. 条件

(a) $b > \frac{1}{2}a(e+4)$

(b) e は偶数で $b > \frac{1}{2}a(e+2) + 1$.

のいずれか一つが満たされれば, $\text{gon}(X) = 2a$, $\text{Cliff}(X) = 2a - 2$ が成り立つ. とくに, $e \geq 4$ ならば $\text{gon}(X) = 2a$, $\text{Cliff}(X) = 2a - 2$ となる.

この定理の適用できる範囲では, 先の例と同様, S 上の曲線の gonality や Clifford 指数は数値的同値類のみによって決まっている. しかし不変量 e が小さいときには反例が現われる.

例. $e = 1$ とし, $D := C_0 + ef$ (e は E 上の次数 1 の有効因子) とおく. 線型系 $|D|$ は (唯一つの) 基点 x_0 をもつ. $a = 3, 4$ に対し, 完備線型系 $|aD|$ に属する非特異既約曲線 X をとると

$$\text{gon}(X) = a - 1, \text{Cliff}(X) = a - 3 \quad (X \text{ が } x_0 \text{ を通るとき})$$

$$\text{gon}(X) = a, \text{Cliff}(X) = a - 2 \quad (X \text{ が } x_0 \text{ を通らないとき})$$

となる. とくに, 互いに数値的同値であるが相異なる gonality や Clifford 指数をもつ曲線が S 上に存在する.

参考文献

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris: Geometry of Algebraic Curves Vol. I, Grundlehren 267, Springer-Verlag, 1985.
- [CM] M. Coppens, G. Martens: Secant spaces and Clifford's theorem, Compositio Math. **78**, 193-212 (1991).
- [ELMS] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens, F.-O. Schreyer: The Clifford dimension of a projective curve, Compositio Math. **72**, 173-204 (1989).
- [GL] M. Green, R. Lazarsfeld: Special divisors on curves on a $K3$ surface, Invent. Math. **89**, 357-370 (1987).
- [H] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Ha] T. Harui: The gonality and the Clifford index of curves on an elliptic ruled surface, Arch. Math., to appear.

- [L] R. Lazarsfeld: Lectures on linear series, Complex Algebraic Geometry (J. Kollár ed.), IAS/PARK CITY Mathematics Series Vol. 3, 1997.
- [M1] G. Martens: Über den Clifford-Index algebraischer Kurven, J. Reine Angew. Math. **336**, 83-90 (1982).
- [M2] G. Martens: Eine Charakterisierung glatter ebener Kurven, Arch. Math. **41**, 37-43 (1983).
- [M3] G. Martens: The gonality of curves on a Hirzebruch surface, Arch. Math. **67**, 349-352 (1996).
- [S] F. Serrano: Extension of morphisms defined on a divisor, Math. Ann. **277**, 395-413 (1987).

Ground-states of the massless Nelson model

佐々木 格*

1 導入

Nelson モデルは“量子力学的な粒子”と“量子スカラー（ボース）場”が相互作用している系を記述するモデルのひとつである。物理的には“核”と“中間子”との相互作用を記述するモデルとされている。Nelson モデルのハミルトニアンはほとんどの場合下に有界な自己共役作用素であるが、そのスペクトルの下限が固有値である場合、Nelson モデルは基底状態を持つといい、そうでない場合 Nelson モデルは基底状態を持たないという。Nelson モデルの基底状態の存在の問題は自己共役作用素のスペクトル解析の問題である。ボース粒子が質量を持つ場合を massive Nelson モデル、質量が 0 の場合を massless Nelson モデルという。

粒子が束縛されているような場合^{注1}、C. Gérard [2] は任意の結合定数に対して massless Nelson モデルが基底状態を持つことを証明した。また J. Lörinczi, R. A. Minlos と H. Spohn [4] は粒子が束縛されていて赤外特異性がある場合に Nelson モデルは基底状態を持たないことを証明した。そして A. Arai [1] は赤外特異性があっても生成消滅作用素の非同値表現によってモデルを定義すれば Nelson モデルが基底状態をもちうる場合があることを証明した。

最近、われわれは M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss [3] で開発された方法を Nelson モデルに適用することによって、粒子が 1 つの場合について、粒子のハミルトニアンが負の基底状態を持つという仮定と物理的に自然な仮定だけで massive Nelson モデルと非同値表現の massless Nelson モデルの両方の基底状態の存在を厳密に証明した。われわれの結果は紫外切断、結合定数への制限なく成立する。特別な例として物理的に最も重要な、粒子が Coulomb 引力ポテンシャルの中にある場合、われわれは電荷の大きさにかかわらず非同値表現の massless Nelson モデルが基底状態を持つことを証明した。

2 Nelson モデルの基本的な枠組み

作用素 T について、その定義域、スペクトルをそれぞれ $D(T)$, $\sigma(T)$ と書くことにする。ヒルベルト空間 \mathcal{H} の内積とノルムをそれぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ と書く。内積 $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}$ は f について反線形、 g について線形とする。混乱の恐れのない限り添字 \mathcal{H} を省略して $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\|\cdot\|$ と書く。

粒子はポテンシャル $V: \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の影響下にあるとする。粒子の状態のヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ であり^{注2}、粒子のみのハミルトニアン H_p は $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ 上の自己共役作用素

$$H_p := -\Delta + \hat{V}$$

によって与えられる。ここに Δ は 3 次元の一般化されたラプラシアンであり、 \hat{V} は関数 $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x^3)$

*北海道大学大学院理学研究科 [e-mail] i-sasaki@math.sci.hokudai.ac.jp

注1 粒子のハミルトニアンが離散スペクトルしか持たない場合

注2 ここで登場するすべてのヒルベルト空間の係数体は \mathbb{C} であるとする。

をかける掛け算作用素である。\$H_p\$ の自己共役性は自明ではないが、ある実用的なクラスのポテンシャル \$V\$ に対しては \$H_p\$ の自己共役性は保障されている。

つぎに量子スカラー場（以下、量子場と書く）の状態のヒルベルト空間は \$L^2(\mathbb{R}_k^3)\$ 上のボソン・フォック空間

$$\mathcal{F}_b := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\bigotimes_s^n L^2(\mathbb{R}_k^3) \right]$$

である。ここに \$\oplus\$ はヒルベルト空間の直和、\$\otimes_s^n\$ はヒルベルト空間の \$n\$ 重対称テンソル積をあらわす^{注3}、ただし \$\otimes_s^0 = \mathbb{C}\$ と定義する。\$\otimes_s^n\$ を \$n\$ 粒子空間といい、\$n\$ 個のボソンの状態を記述する。量子場だけのハミルトニアンは以下の \$\mathcal{F}_b\$ 上の自己共役作用素 \$H_f(m)\$ で与えられる：

$$\begin{aligned} H_f(m) &:= 0 \oplus \omega_m \oplus \omega_m^{[2]} \oplus \cdots \oplus \omega_m^{[n]} \oplus \cdots, \\ \omega_m^{[2]} &:= \omega_m \otimes I + I \otimes \omega_m, \\ \omega_m^{[3]} &:= \omega_m \otimes I \otimes I + I \otimes \omega_m \otimes I + I \otimes I \otimes \omega_m, \\ &\dots \end{aligned}$$

ここに \$\omega_m\$ は関数 \$\sqrt{k^2 + m^2} (m \ge 0)\$ をかける \$L^2(\mathbb{R}_k^3)\$ 上の掛け算作用素である。物理的には \$\omega_m\$ は量子場の記述するボソンのハミルトニアン、\$m \ge 0\$ はボソンの質量をあらわす。

粒子と量子場の状態のヒルベルト空間 \$\mathcal{H}\$ は

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_x^3) \otimes \mathcal{F}_b$$

であり、粒子と量子場の相互作用がない系のハミルトニアンは

$$H_p \otimes I + I \otimes H_f(m)$$

である。

各 \$f \in L^2(\mathbb{R}_k^3)\$ に対して \$\mathcal{F}_b\$ 上の作用素 \$a(f)^*\$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} D(a(f)^*) &:= \left\{ \Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|S_{n+1} f \otimes \Psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\} \\ (a(f)^* \Psi)^{(n+1)} &:= \sqrt{n+1} S_{n+1} (f \otimes \Psi^{(n)}). \end{aligned}$$

ここに \$S_n (n = 1, 2, \dots)\$ はヒルベルト空間 \$\otimes^n L^2(\mathbb{R}_k^3)\$ からその部分空間 \$\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}_k^3)\$ への直交射影作用素をである。\$a(f)^*\$ はボソン生成作用素と呼ばれている。\$a(f)^*\$ は閉作用素であることが知られており、その共役作用素 \$a(f) := (a(f)^*)^*\$ はボソン消滅作用素と呼ばれる。\$\mathcal{F}_b\$ 上の作用素

$$\Phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}} (a(f)^* + a(f)) \tag{1}$$

は自己共役であることが知られている。\$\Lambda > 0\$ をひとつ固定する。各 \$x \in \mathbb{R}_x^3\$ に対して \$g(x) \in L^2(\mathbb{R}_y^3)\$ を

$$g(x)(k) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\chi_{\Lambda}(k)}{\sqrt{|k|}} e^{ik \cdot x}, \quad k \in \mathbb{R}_k^3 \tag{2}$$

^{注3} すなわち

$$\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}_k^3) = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}_k^{3n}) \mid \psi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n, x_j \in \mathbb{R}_k^3, j = 1, \dots, n \}.$$

と定義する. ここに $\chi_\Lambda(k)$ は $|k| < \Lambda$ の定義関数をあらわす. この Λ は紫外切断と呼ばれる. 各 $x \in \mathbb{R}_x^3$ に対して \mathcal{F}_b 上の自己共役作用素 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) := \Phi(g(x))$$

によって定義する.

ヒルベルト空間 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} \cong \left\{ \Psi \in \text{Map}(\mathbb{R}_x \rightarrow \mathcal{F}_b) \mid \int_{\mathbb{R}_x^3} \|\Psi(x)\|_{\mathcal{F}_b}^2 dx < \infty \right\},$$

と自然に同一視することができる^{注4}. 以後, $\Psi \in \mathcal{H}$ に対して $\Psi(x)$ と書いたときは, この左辺の集合の元の意味で解釈する. \mathcal{H} 上の作用素 $\phi^\oplus(g)$ を次のように定義する:

$$D(\phi^\oplus(g)) := \left\{ \Psi \in \mathcal{H} \mid \Psi(x) \in D(\phi(x)), \int_{\mathbb{R}_x^3} \|\phi(x)\Psi(x)\|_{\mathcal{F}_b}^2 dx < \infty \right\}, \quad (3)$$

$$(\phi^\oplus(g)\Psi)(x) := \phi(x)\Psi(x). \quad (4)$$

$\phi^\oplus(g)$ はヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の自己共役作用素である. さて粒子と量子場が相互作用している系のハミルトニアン (Nelson モデルのハミルトニアン) は

$$H_m^V = H_p \otimes I + I \otimes H_f(m) + \lambda \phi^\oplus(g) \quad (5)$$

によって定義される. ここに $\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数である. $m = 0$ の場合を massless Nelson モデル, $m > 0$ の場合を massive Nelson モデルという. 非同値表現の massless Nelson モデルのハミルトニアンは後で定義する.

[V.1] 関数 $V_1 \in L^2(\mathbb{R}_x^3)$, $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在してポテンシャル V は

$$V = V_1 + V_2$$

と分解できると仮定する.

以下, この仮定 [V.1] が成立しているものとする. Nelson モデルでは, Kato-Rellich の定理によって H_m^V の自己共役性を簡単に証明することができる:

命題 2.1. すべてのボソンの質量 $m \geq 0$, 紫外切断 $\Lambda > 0$ に対してハミルトニアン H_m^V は自己共役である.

H_m^V が自己共役作用素であるとき H_m^V の基底エネルギーを

$$E^V(m) := \inf \sigma(H_m^V) \quad (6)$$

によって定義する. 次の基底エネルギーの不等式は基底状態の存在条件のために必要となる:

定理 2.2. 粒子のハミルトニアン $H_p = -\Delta + \hat{V}$ は負のエネルギーの基底状態を持つと仮定する. すなわち:

$$H_p \psi = -e_0 \psi, \quad \psi \neq 0, \quad e_0 > 0.$$

このとき

$$E^V(m) \geq E^0(m) - e_0$$

が成立する.

^{注4} 正確にはすべての $\Xi \in \mathcal{F}_b$ に対して $(\Xi, \Psi(x))_{\mathcal{F}_b}$ は x の可測関数であるという条件が必要.

注意. V が Coulomb 引力ポテンシャル $\alpha/|x|$, ($\alpha < 0$) の場合, H_p は水素原子のハミルトニアンと同じ形なので負の基底状態を持つことはよく知られている.

次に, 関数 $\theta, \tilde{\theta}$ を次の条件を満足するものとする:

(i) $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^3), \tilde{\theta} \in C^\infty(\mathbb{R}_x^3)$ であり

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta(x), \tilde{\theta}(x) \leq 1, \quad (x \in \mathbb{R}_x^3) \\ \theta(x)^2 + \tilde{\theta}(x)^2 = 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| \geq 2. \end{cases}$$

$R > 0$ に対して関数 $\theta_R, \tilde{\theta}_R$ を

$$\theta_R(x) := \theta(x/R), \quad \tilde{\theta}_R(x) = \tilde{\theta}(x/R)$$

によって定義する. 以下, 仮定 [V.1] に加えてつぎの仮定 [V.2] が成立しているとする:

[V.2] 任意の $\psi \in D(-\Delta)$ に対して

$$-\langle \tilde{\theta}_R \psi, \hat{V} \tilde{\theta}_R \psi \rangle \leq \langle \tilde{\theta}_R \psi, (-\epsilon_R \Delta + \delta_R) \tilde{\theta}_R \psi \rangle$$

となる. ここに ϵ_R, δ_R は

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \epsilon_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \delta_R = 0,$$

となる ψ によらない非負の定数.

3 Massive Nelson モデル

Massive Nelson モデルの基底状態の存在は次の定理によって保証される:

定理 3.1. $m > 0$ に対して $E^V(m) < E^0(m)$ 仮定する. [V.1][V.2] を仮定する. このとき H_m^V は基底状態をもつ.

注意. 粒子のハミルトニアン H_p が負のエネルギーの基底状態を持つとすると Theorem 2.2 より $E^V(m) < E^0(m)$ が成立する. 特に V が Coulomb 引力ポテンシャルの場合, H_m^V は基底状態を持つ.

4 Massless Nelson モデル

各 $m > 0$ に対して \mathcal{H} 上のユニタリ変換 T_m を

$$T_m := \exp[-i\Phi_S(ig(0)/\omega_m)]$$

によって定義する. このとき

$$\begin{aligned} T_m H_f(m) T_m^* &= H_f(m) - \Phi_s(g(0)) + \frac{1}{2} \|g(0)/\omega_m^{1/2}\|^2, \\ T_m \phi(x) T_m^* &= \phi(x) + \text{Im}\langle g(0)/\omega_m, g(x) \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって $m > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{H}_m^V &:= (I \otimes T_m) H_m^V (I \otimes T_m^*) \\ &= H_p \otimes I + I \otimes H_f(m) + \phi^\oplus(G) + \frac{1}{2} \left\| \frac{g(0)}{\omega_m^{1/2}} \right\|^2 + \text{Im} \langle g(0) / \omega_m, g(x) \rangle,\end{aligned}$$

ここに $\phi^\oplus(G)$ は (3), (4) で $g(x)$ の代わりに $G(x) := g(x) - g(0)$ を使って定義した作用素である. この作用素の $m \rightarrow 0$ の極限は

$$\tilde{H}^V := H_p \otimes I + I \otimes H_f + \phi^\oplus(G) + \frac{1}{2} \left\| \frac{g(0)}{\omega^{1/2}} \right\|^2 + \text{Im} \langle g(0) / \omega, g(x) \rangle, \quad (7)$$

である. ここに $H_f = H_f(0)$, $\omega(k) = \omega_0(k) = |k|$. こうして得られた作用素 \tilde{H}^V は H_0^V とは異なる作用素である (下図参照).

$$\begin{array}{ccc} H^V(m) & \begin{array}{c} \xrightarrow{I \otimes T_m} \\ \xleftarrow{I \otimes T_m^*} \end{array} & \tilde{H}^V(m) \\ \downarrow m \\ 0 & & \downarrow m \\ 0 & \neq & 0 \\ H^V(0) & & \tilde{H}^V(0) \end{array}$$

\tilde{H}^V が非同値表現の Nelson ハミルトニアンである.

定理 4.1. 条件 [V.1][V.2] を仮定する. $E^V(0) < E^0(0)$ と仮定する. このとき非同値表現の Nelson ハミルトニアン \tilde{H}^V は基底状態をもつ.

注意. 粒子のハミルトニアン H_p が負の基底状態を持つとき, Theorem 2.2 によって $E^V(0) < E^0(0)$ は成り立つ. 特に V が Coulomb 引力ポテンシャルの場合, 非同値表現の Nelson ハミルトニアンは基底状態を持つ.

References

- [1] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* **9** (2001), 1075-1094.
- [2] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. H. Poincaré* **1** (2000), 433-459.
- [3] M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. math.* **145** (2001), 557-595.
- [4] J. Lörinczi, R. A. Minlos and H. Spohn The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2001), 1-28.

Complex constant mean curvature surfaces fibered by minimal surfaces

神戸大学大学院自然科学研究科 博士課程後期3年 小林 真平

1 はじめに

この研究は、ミュンヘン工科大学 Josef Dorfmeister 教授、マサチューセッツ大学の Franz Pedit 教授との共同研究に基づく。この講演の目的は、平均曲率一定曲面の一般化として考えられる複素曲面の微分幾何学的研究とその複素曲面を通して、元の平均曲率一定曲面とそこから導かれる極小曲面との関連を明らかにする事である。

平均曲率一定曲面は、石鹸膜として実現される曲面であり、古来数学者、物理学者によってよく研究されて来た ([12] やその参考文献を参照)。特に平均曲率が 0 である極小曲面は、非常に盛んに研究されており、深い結果が得られて来た。一方、平均曲率が 0 でない一定の曲面 (以下特に CMC (Constant Mean Curvature から) 曲面と呼ぶ) の研究は、近年までよく研究されて来たとは言えなかった。しかしながら、近年可積分系の理論が CMC 曲面、より広くは調和写像の研究に応用できる事が分かってきた ([9] を参照)。

この様な中で、Dorfmeister-Pedit-Wu ([8]) によって、CMC 曲面を構成する方法が、ループ群、可積分系の方法を使って得られた。これは、極小曲面の Weierstrass の表現公式¹に類似するので一般化された Weierstrass の表現公式と呼ばれる (節 2 を参照)。

この一般化された Weierstrass の表現公式を構成する課程において、CMC 曲面の複素曲面への自然な拡張が導かれる。以下 Dorfmeister-Pedit-Wu による方法の大まかな説明と一つの主要な定理 (定理 2.2) を節 2 で述べる。

¹Weierstrass の表現公式とは

$$(1.1) \quad \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(1-g), \frac{i}{2} f(1+g), fg \, dz \in \mathbb{R}^3,$$

で表される \mathbb{R}^3 内の極小曲面を表す表現公式である。ここで f は正則関数、 g は有理型関数である。局所的には、 \mathbb{R}^3 内の極小曲面は全て Weierstrass の表現公式 (1.1) で表現される。

2 Dorfmeister-Pedit-Wuによる方法

Dorfmeister-Pedit-Wu([8])によって, 単連結領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ から \mathbb{R}^3 への平均曲率一定 (以下 CMC) はめ込みは, 以下の様に 4つのステップによって得られる.

Step1 : 対角成分が $\lambda \in \mathbb{C}^*$ の偶数巾, 非対角成分が $\lambda \in \mathbb{C}^*$ の奇数巾かつ λ に関するフーリエ級数展開が λ^{-1} から始まる 2×2 -行列値正則微分形式 $\eta = A(z, \lambda)dz$ を考える (twisted $sl(2, \mathbb{C})$ ループ代数に値をもつ一形式). さらに $A(z, \lambda)$ をフーリエ級数展開したときの最初の係数行列を A_{-1} としたとき, $\det A_{-1} \neq 0$ であると仮定する.

Step2 : 線型常微分方程式 $dC = C\eta$ を解く. ここで C はループ群に値を持つ.

Step3 : 解 C に対して岩澤分解 $C = FW_+$ を行なう. ここで $F = F(z, \lambda)$ は $z \in \mathcal{D}$, $\lambda \in S^1$ に対して $SU(2)$ の値をとる (extended framing と呼ばれる). さらに W_+ はフーリエ級数展開した時に λ の負巾の係数を持たない.

定理 2.1. ([8]) $\lambda \in S^1$ 上の各点にたいして F はそれぞれある平均曲率一定曲面 $H \neq 0$ の framing である.

Step4 : Sym-Boenko の公式 $\Psi_\lambda(z) = -\frac{1}{2H} \left\{ \left(\frac{d}{dt} F \right) F^{-1} + F \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} F^{-1} \right\}$ に F を代入する. この時 Ψ_λ は \mathcal{D} から $\mathbb{R}^3 \cong su(2)$ への CMC はめ込みを表現する. さらに全ての CMC はめ込みは, 上記の方法によって得られる.

Remark. 正則一形式 η (正則ポテンシャルと呼ぶ) は, CMC はめ込みに対して一意に決まらない. 何故なら, ゲージ変換 $G_+ \in \Lambda_r^+ SL(2, \mathbb{C})_\sigma$ の不定性が存在する, i.e., 微分方程式の解 C に対して CG_+ も岩澤分解を通じて, 同じ CMC はめ込みを定める.

この方法は, 平均曲率一定曲面に対する一般化された Weierstrass の表現公式と呼ばれる (極小曲面の Weierstrass の表現公式の一般化という観点から). 明らかに, 上で示された方法は, ほぼ一意的である. ただ一つの不定性は, 線型常微分方程式の解 C の初期条件の取り方である. もし, CMC はめ込みに対応する η を「正しく」選んだならば, 初期条件を $C(z_0, \lambda) = \text{Id}$, $z_0 \in \mathcal{D}$ と選ぶ事ができる. 然しながら, 一般には η の具体的な選び方は完全には解っていない. 従って, できるだけ「良い」 η を選んで微分方程式の初期条件をうまく選ぶ事によって, 望む性質をもつ CMC はめ込みを構成する事ができる ([5]).

η の選び方は重要である. [8] によって, 単連結領域 \mathcal{D} 上の正則 1 形式 η の代わりに有理型 1 形式 $\xi = \lambda^{-1} \hat{\xi}$ を選ぶ事 (正規ポテンシャル) が出来る事

ポテンシャル	定義される場所と正則性	係数行列の数
正則ポテンシャル, η	M , 正則	一般に ∞
正規ポテンシャル, ξ	\mathcal{D} , 有理型	1
エルミートポテンシャル, ζ	\mathcal{D} , 有理型	3

表 1: 非コンパクトリーマン面 M 上のポテンシャルとその特徴 (\mathcal{D} で M の普遍被覆面を表す). コンパクトの場合は, 正則ポテンシャルの代わりに有理型のポテンシャルになる.

が示されている. ここで $\hat{\xi}$ は z にしかよらない有理型 1 形式である. さらに $C(z_0, \lambda) = \text{Id}$ を選ぶ事によって, \mathcal{D} 上の $\xi = \lambda^{-1}\hat{\xi}$ と CMC はめ込みの一対一の関係が知られている.

最終的な目的は, リーマン面 M からの CMC はめ込みに対応するデータ η 又は ξ が詳細に解る事である. 従って, 特別な性質をもつポテンシャル η を考える事は, CMC はめ込みが普遍被覆面 \mathcal{D} 上からだけでなくリーマン面 M 上からでも定義されるためには少なくとも必要である.

リーマン面 M が非コンパクトの場合, [5] で示された様に, 全ての M から \mathbb{R}^3 への CMC はめ込みは, M 上で定義される正則ポテンシャル η から一般化された Weierstrass の表現公式を経て得られる事が知られている. 一方, コンパクトリーマン面の場合, 正則ポテンシャル η が M 上で定義できるわけではない. (有理型まで広げると M 上で定義される.)

最近 [6] によって新しい有理型のポテンシャル ζ (エルミートポテンシャルと呼ぶ) が発見された. 一般にこのポテンシャル ζ はリーマン面 M で定義されるわけではない (普遍被覆面 \mathcal{D} で定義される). しかしながら, このポテンシャル ζ は基本群の生成元の 1 つに対しては, 必ず不変になる様にとる事ができるが知られている.

この新しいポテンシャルを導入する課程で, 自然に平均曲率一定はめ込みの複素 2 変数への拡張が考えられる (対応する非線形偏微分方程式 sinh-Gordon では, 複素化, 複素 sin-Gordon 方程式に当たる). これによって, 平均曲率一定曲面 (実 2 次元) から複素曲面 (複素 2 次元) への拡張が考えられる.

定理 2.2. $F(z, \bar{z}, \lambda)$ を CMC 曲面に対する *extended framing* とする (Step3 を参照). ここで $z \in \mathcal{D}$, \mathcal{D} は単連結領域とする. この時, $F(z, \bar{z}, \lambda)$ に対して $U(z, w, \lambda)$ となる拡張が存在する. ここで $(z, w) \in \mathcal{D} \times \overline{\mathcal{D}}$ かつ $U(z, w, \lambda)|_{w=\bar{z}} = F(z, \bar{z}, \lambda)$.

参考文献

- [1] A. I. Bobenko, *Constant mean curvature surfaces and integrable equations*, Russian Math. Surveys 46:4, 1-45 (1991).
- [2] M. Bergvelt, M. Guest, *Actions of loop groups on harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 861–886.
- [3] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [4] J. Dorfmeister, G. Haak, *Meromorphic potentials and smooth surfaces of constant mean curvature*, Math. Z., **224** (1997), 603–640.
- [5] J. Dorfmeister, G. Haak, *Construction of non-simply connected CMC surfaces via dressing*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), no. 2, 335–364.
- [6] J. Dorfmeister and S-P. Kobayashi, *Coarse classification of constant mean curvature cylinders*, preprint 2004.
- [7] J. Dorfmeister, S-P. Kobayashi, and F. Pedit, *Complex surfaces of constant mean curvature fibered by minimal surfaces*, in preparation.
- [8] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric sps*, Comm. Anal. Geom. **6(4)** (1998), 633–668.
- [9] M. A. Guest, *Harmonic maps, loop groups, and integrable systems*, London Mathematical Society Student Texts 38, Cambridge University Press 1997.
- [10] R. C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Notes, Princeton University Press 1966.
- [11] L. Kaup, B. Kaup, *Holomorphic functions of several variables*, de Gruyter Studies in Mathematics **3**, Walter de Gruyter & Co. 1983.
- [12] 劍持勝衛, 曲面論講義 平均曲率一定曲面入門, 培風館, 2000.
- [13] M. Kilian, S-P. Kobayashi, W. Rossman, and N. Schmitt, *CMC surfaces in three dimensional space forms*, math. DG/0403366, 2004.
- [14] M. Kilian, S-P. Kobayashi, W. Rossman, and N. Schmitt, *Constant mean curvature surfaces of any positive genus*, J. London Math. Soc., to appear.

- [15] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press 1986.
- [16] E. A. Ruh and J. Vilms, *The tension field of the Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 569–573.
- [17] N. Schmitt, *CMCLab*, <http://www.gang.umass.edu/software>.

半線形熱方程式の解の漸近挙動の分類

早稲田大学大学院理工学研究科
数理科学専攻 高市 恭治

1. Introduction.

次の一相ステファン問題 (P) の大域解の漸近挙動を考える。

$$(P) \begin{cases} (1) & u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = u^p(x, t), (x, t) \in (0, l(t)) \times (0, T), p > 1, \\ (2) & u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, x \in (0, l_0), \\ (3) & u_x(0, t) = 0, u(l(t), t) = 0, t \in [0, \infty), \\ (4) & l'(t) = -u_x(l(t), t), l(0) = l_0 > 0, t \in (0, T) \end{cases}$$

この問題 (P) に対しては、 $p > 1, s_0 > 0, u_0 \in C^1([0, s_0]), u_0 \geq 0$,
with $u(s_0) = u_x(0) = 0$ のとき、 $u \geq 0$ と $l'(t) \geq 0$ を満たす、古典解 (u, s) が一意的に存在する事が知られている。例えば、Souplet & etc.[1][2][3] を見よ。

次の Scale Transformed 関数を考える。

$$v(y, s) := e^{s/(p-1)} u(e^{s/2} y, e^s - 1)$$

すなわち、

$$u(x, t) := (1+t)^{-1/(p-1)} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right)$$

このとき、 $v(y, s)$ は、次の Transformed Problem (TP) を満たす。

$$(TP) \begin{cases} (1)' & v_s(y, s) - v_{yy}(y, s) = v^p(y, s), (y, s) \in (0, \tilde{l}(s)) \times (0, S), p > 1 \\ (2)' & v(y, 0) = u_0(y) \geq 0, y \in (0, l_0), \\ (3)' & v_y(0, s) = 0, v(\tilde{l}(s), s) = 0, s \in (0, S), \\ (4)' & \tilde{l}'(s) = -e^{s(-\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2})} v_y(\tilde{l}(s), s), \tilde{l}(0) = l_0 > 0, s \in (0, S). \end{cases}$$

ここで、 $\tilde{l}(s) := l(e^s - 1)$, $S = e^T - 1$ 。

以下で、(TP)(ただし、 $p > 3$) の解 $v(y, s)$ で、

$C^1([0, S]; L(K)) \cap C([0, S]; H^1(K) \cap L^{p+1}(K))$ のクラスに属するものの漸近挙動を考える。

2. Notation.

$$\cdot K(y) := \exp\left(\frac{|y|^2}{4}\right)$$

- $L^p(K) := \{f; \int_0^{\bar{i}(s)} |f(y)|^p K(y) dy < \infty\}$
- $H^1(K) := \{f \in L^2(K); f_y \in L^2(K)\}$
- $W := \{v \in H^1(K); J(v) < d, j(v) < 0\}$
- $V := \{v \in H^1(K); J(v) < d, j(v) > 0\}$ (汎関数 J, j については後程説明)
- $0 < d = \inf_{u \in H(K)} \max_{\lambda \geq 0} J(\lambda u)$

3. Main Result

定理. 仮定 $p > 3$ のもとに、以下が成立する。

- (1) $u_0 \in W$ ならば、(TP) および (P) について、 H^1 -有界な大域解が存在する。
- (2) $u_0 \in V$ ならば、(TP) および (P) について、 H^1 -有界な大域解は存在しない。

Rem.1 $p < 3$ の場合も全空間コーシー問題と違って、藤田タイプの大域解非存在は成り立たない。

4. Phase Plane.

まず、 $H^1(K)$ 上の汎関数をいくつか導入する。

$$-A(v(s)) := \frac{1}{2} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy - \frac{1}{2(p-1)} \int_0^{\bar{i}(s)} v^2 K dy \Leftarrow H^1(K) \text{ ノルムに相当}$$

(cf.Prop.2)

$$-F(v(s)) := \frac{1}{p+1} \int_0^{\bar{i}(s)} v^{p+1}(s) K dy \Leftarrow L^{p+1}(K) \text{ ノルムに相当}$$

$$-J(v(s)) := A(v(s)) - F(v(s)) \Leftarrow \text{エネルギー汎関数と呼ばれる。 (cf.Prop.4)}$$

$$-j(v(s)) := (p+1)F(v(s)) - 2A(v(s))$$

縦軸を $A(v(s))$ 、横軸を $F(v(s))$ とした、座標平面で、解 $v(s)$ の挙動をこの平面上で解析する。われわれは、この平面の事を Phase Plane と呼んでいる。(図1参照)

Prop.1 (Poincare Inequality)

$$\frac{1}{2} \int_0^{\bar{i}(s)} v^2(s) K dy \leq \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2 K dy \quad \forall v \in H^1(K)$$

Prop.2 $p > 3$ のとき、正定数 C_1 と C_2 が存在して、

$$C_1 \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy \leq \frac{1}{2} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy - \frac{1}{2(p-1)} \int_0^{\bar{i}(s)} v^2 K dy \leq C_2 \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy$$

[証明] $C_2 = \frac{1}{2}$ は明らか。

$$\frac{1}{2} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy - \frac{1}{2(p-1)} \int_0^{\bar{i}(s)} v^2 K dy \geq \frac{1}{2} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy - \frac{1}{p-1} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy = \frac{p-3}{2(p-1)} \int_0^{\bar{i}(s)} v_y^2(s) K dy.$$

従って、 $C_1 = \frac{p-3}{2(p-1)}$ として、OK!!(since $p > 3$)。

Prop.3(Sobolev's Inequality) $p > 1$ のとき、

$$\left(\int_0^{\tilde{l}(s)} v^{p+1}(s) K dy \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq C \left(\int_0^{\tilde{l}(s)} v_y^2(s) K dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Prop.2 と Prop.3 を使う事により、

$$(p+1)F(v)^{\frac{1}{p+1}} \leq \tilde{C}A(v)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ここで、}\tilde{C} = C \times C_1^{-\frac{1}{2}} \text{とすればよい。})$$

従って、 $A(v) \geq C^{-2}(p+1)^{\frac{2}{p+1}}F(v)^{\frac{2}{p+1}}$ となり、Phase plane 上に斜線部のような禁止領域がある事がわかる。(図2参照)

エネルギー等式からの解析

$$((1)', v)_{L^2(K)} \Rightarrow \int_0^{\tilde{l}(s)} v_s^2 K dy + \frac{1}{2} e^{s(\frac{1}{p-1}-1)} \cdot \tilde{l}^3(s) \cdot e^{-\frac{t^2(s)}{4}} = -\frac{d}{ds} J(v(s)) \quad (1)$$

$$((1)', v_s)_{L^2(K)} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^{\tilde{l}(s)} v^2 K dy = j(v(s)) \quad (2)$$

Prop.4(図3参照)

- ・ $J(v(s))$ は単調減少。(エネルギー等式(1)から明らか)
- ・ $j(v(s)) \geq 0$ の領域では、 $|v|_{L^2(K)}$ は単調増加。
- ・ $j(v(s)) < 0$ の領域では、 $|v|_{L^2(K)}$ は単調減少。

STABLE SET と BLOW UP SET の構成

図4参照。

5. Proof of Main Theorem

- (1) $J(u) \searrow$ より明らか。
- (2) Kavian[4]と同様な議論により、 $J(u) < 0$ 領域が BLOW UP は示せる。
次に、 $V \cap \{J(u) \geq 0\}$ はどうか？
Souplet[5]の次の Key lemma を使う。
Key Lemma $p > 1$ のとき、 $T_M = +\infty$ ならば、

$$\exists \{t_n\} \rightarrow \infty \quad \text{s.t.} \quad F(v(t_n)) \rightarrow \frac{2}{p-1} J(v(\infty))$$

上の Key Lemma と解の連続性より、 $v_0 \in V \Rightarrow \text{Blow up!!}$ が従う。
Q.E.D.

Proof of Key Lemma

$$\int_0^{\bar{i}(s)} v^2(s)K dy = f(t) \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(t)-f(s)}{2} &= \frac{1}{2} \int_s^t \frac{d}{d\tau} \int_0^{\bar{i}(\tau)} v^2(\tau)v^2(\tau)K dyd\tau \\ &= \int_s^t \int_0^{\bar{i}(\tau)} v_\tau v K dyd\tau \\ &\leq \left(\int_s^t \int_0^{\bar{i}(\tau)} v_\tau^2 K dyd\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \int_0^{\bar{i}(\tau)} v^2 K dyd\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (E(v(s)) - E(v(\infty)))^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^t f(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(最後の不等式は、エネルギー等式 (1) と $E(v(s))$ が単調減少であり、かつ、下に有界である事より、従う。)

この評価から、

$$f(t) = o(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

一方、エネルギー等式 (2) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\bar{i}(t)} v^2 K &= - \int_0^{\bar{i}(t)} v_y^2 K + \int_0^{\bar{i}(t)} v^{p+1} K + \frac{1}{p-1} \int_0^{\bar{i}(t)} v^2 K \\ &= -2E(v(t)) - \frac{2}{p+1} \int_0^{\bar{i}(t)} v^{p+1} K \\ &= \frac{p-1}{p+1} \int_0^{\bar{i}(t)} v^{p+1} K - 2E(v(t)) \end{aligned}$$

両辺を時刻 1 から $T+1$ まで積分する事により、

$$\frac{1}{2} (f(T+1) - f(1)) = \frac{p-1}{p+1} \int_1^{T+1} \int_0^{\bar{i}(s)} v^{p+1}(s)K ds - 2 \int_1^{T+1} E(v(t)) dt$$

次に、右辺、左辺を変形して、

$$\frac{1}{T} \int_1^{T+1} \int_0^{\bar{i}(s)} v^{p+1}(s)K ds = \frac{p+1}{p-1} \left(\frac{f(T+1) - f(1)}{2T} + \frac{2}{T} \int_1^{T+1} E(v(t)) dt \right)$$

従って、 $f(t) = o(t)$ と $E(v(t)) \searrow E(v(\infty))$ である事より、次のような求める時刻の部分点列 $\{t_n\}$ を選ぶ事ができる。

$$\int_0^{\bar{i}(t)} v^{p+1} K \rightarrow \frac{2(p+1)}{p-1} E(v(\infty))$$

Q.E.D.

註：図 1-4 は発表時に、OHP にてお見せする予定です。

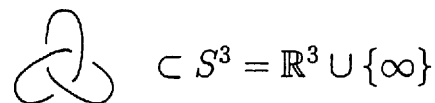
参考文献

- [1] Fila,M. and Souplet,P.: *Existence of global solutions with slow decay and unbounded free boundary for a sublinear Stefan problem.*,*Interfaces Free Bound.*,3(2001), no.3, 337-344
- [2] Ghidouche,H., Souplet,P. and Tarzia,D.: *Decay of global solutions, stability and blowup for a reaction-diffusion problem with free boundary.*,*Proc.Amer.Math.Soc.*,129(2001), no.3, 781-792
- [3] Souplet,P.: *Stability and continuous dependence of solutions of one-phase Stefan problems for semilinear parabolic equations.*, *Port.Math.(N.S.)*,59(2002), no.3, 315-323
- [4] Kavian,O.: *Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation.*, *Ann.Inst.Henri Poincaré*,4(1987), no.5, 423-452
- [5] Souplet,P., *Sur l'asymptotique des solutions globales pour une équation de la chaleur semi-linéaire dans des domaines non bornés.*, *C.R.Acad.Sci.Paris*, 323(1996), Série 1, 877-882.

On the LG quantum link invariant

Atsushi Ishii

LG 多項式 (The Links-Gould invariant) は絡み目の 2 変数多項式不変量である。ここで絡み目とはいくつかの円周の S^3 への埋め込みのことで、次の図は成分数が 1 の絡み目 (結び目) を表している。



絡み目は紐を動かして行って同じ形に変形できるとき同じ絡み目とみなす。したがって一つの絡み目に対してその表示 (絡み目ダイアグラム) は無限にあるが、この複雑さにアプローチする方法として LG 多項式と呼ばれる絡み目の不変量を用いる。例えば

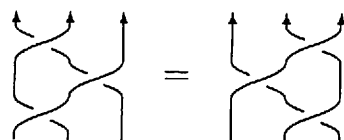
$$LG \left(\text{trefoil} \right) = -t_0^2 t_1 - t_0 t_1^2 + t_0^2 + 2t_0 t_1 + t_1^2 - t_0 - t_1 + 1 \quad (1)$$

であり、この値は絡み目の表示によらずに決まる。

LG 多項式は量子スーパー代数 $U_q[gl(2|1)]$ の 4 次元表現の 1 変数族を用いて構成される [6]。この表現を用いて定義されるいくつかの線形写像を絡み目ダイアグラムを分解してできる各ピースに対応させることにより LG 多項式を求めることができる。例えば、交点には R 行列と呼ばれる次の Yang-Baxter 方程式の解を対応させる:

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R),$$

ここで V はベクトル空間を表し、 id_V でその恒等写像とする。Yang-Baxter 方程式は次のダイアグラムに対応している:



このダイアグラムのように紐が絡まって開いたままの状態のものをタンゲルと呼ぶ. 絡み目やタンゲルには紐に矢印を付けることによって向きを考えることができる. 特に LG 多項式は向き付けられた絡み目の不変量である.

LG 多項式の場合, R 行列のサイズは 16×16 と大きく, その計算には労力を要した. 次の命題にあるスケイン関係式を用いることでこの困難を軽減することができる.

Proposition 1 ([3]). LG 多項式は次の二つのスケイン関係式を満たす. スケイン関係式 (i):

$$\begin{aligned} LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + t_0 t_1 LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \\ = (t_0 + t_1 - t_0 t_1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + (t_0 + t_1 - 1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right), \end{aligned}$$

スケイン関係式 (ii):

$$\begin{aligned} LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) - LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \\ = (t_0 t_1 - t_0 - t_1 + 2) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \right) - (t_0 t_1 - t_0 - t_1 + 2) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right). \end{aligned}$$

スケイン関係式とはいくつかの絡み目の間の関係式のことである. この絡み目たちは一部を除いて一致するようなダイアグラムを持っている. スケイン関係式を用いる例として, 分離可能絡み目 (二つの部分に分離するようなダイアグラムを持つ絡み目) の LG 多項式の値が 0 になることを見ていく. スケイン関係式 (i) から (ii) を引くことによって次のスケイン関係式が得られる:

$$\begin{aligned} t_0 t_1 LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \\ = -2(t_0 - 1)(t_1 - 1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + (t_0 t_1 + 1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right). \end{aligned}$$

このスケイン関係式を用いることで次の四つの絡み目に対し LG 多項式間の関係式が得られる:

$$\begin{aligned} t_0 t_1 LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \\ = -2(t_0 - 1)(t_1 - 1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \right) + (t_0 t_1 + 1) LG \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right), \end{aligned}$$

ここで $\begin{array}{c} \uparrow \\ \curvearrowright \\ \uparrow \end{array}$, $\begin{array}{c} \uparrow \\ \curvearrowleft \\ \uparrow \end{array}$ はこの形の任意のタンゲルを表し, その中に複雑さを包含している. 1, 2, 4 項目に同じ絡み目が現れていることに注意すると, 残

る項が0になることがわかる. したがって分離可能絡み目のLG多項式の値は0である.

この例のようにスケイン関係式を用いることでLG多項式の様々な性質を明らかにすることができる. 絡み目のLG多項式の値を求める場合にもスケイン関係式は有用で, 特に(1)の値もスケイン関係式(i),(ii)を用いて求めることができる. スケイン関係式の発見によってLG多項式の扱いやすさは大幅に改善されてきたのである.

De Wit, Kauffman, Links [2]はLG多項式のR行列を明示的に与え, いくつかの計算によってこの不変量が強力であることを示唆していた. さらにLG多項式は次の二つの類を完全に分類することがわかっている: 10交点までの素な結び目 [1], 他のいくつかの不変量では区別できない結び目を無限に含んだ金信結び目と呼ばれる族 [4]. この様にLG多項式は強力な不変量であるが, 最近の研究ではその強力さよりもいくつかの興味深い性質に焦点が当てられている.

スケイン関係式(i),(ii)を観察することで2変数 t_0 と t_1 の間の対称性に気づくことができる. このことは次の等式が成り立つことを示唆している:

$$LG_L(t_0, t_1) = LG_L(t_1, t_0), \quad (2)$$

ここで $LG_L(t_0, t_1)$ は絡み目 L のLG多項式を表している. この対称性はアレクサンダー多項式の視点から見るのが面白い. アレクサンダー多項式 $\Delta_L(t)$ は絡み目 L の多項式不変量であり, R行列を用いた定義以外にも様々な方法で定義される古典的な不変量である. LG多項式はアレクサンダー多項式の2変数一般化の一つであり次の定理が成り立つ.

Theorem 2 ([5]). 任意の絡み目 L に対して次の等号が成り立つ:

$$LG_L(t, -t^{-1}) = \Delta_L(t^2).$$

この定理よりLG多項式の対称性(2)はアレクサンダー多項式のある対称性を導く. つまり任意の結び目 K に対して次の等号が成り立つ:

$$\Delta_K(t^2) = LG_K(t, -t^{-1}) = LG_K(-t^{-1}, t) = \Delta_K(t^{-2}).$$

最初と最後の等号はTheorem 2から, 真中の等号はLG多項式の対称性(2)から導かれる. この等式は多項式をべきの順に整理したときの係数の対称性を表すが, アレクサンダー多項式の係数が左右対称になることはよ

く知られた事実である. この性質の他にも変数に 1 を代入したときの性質は重要である. アレクサンダー多項式の場合, 変数 t に 1 を代入すると絡み目の成分数によって異なる定数をとる:

$$\Delta_L(1) = \begin{cases} 1 & L \text{ が結び目のとき,} \\ 0 & \text{それ以外の場合.} \end{cases} \quad (3)$$

この性質に対応して LG 多項式の場合には次の命題が成り立つ.

Proposition 3 ([5]). 次の公式が成り立つ:

$$LG_L(t_0, 1) = LG_L(1, t_1) = \begin{cases} 1 & L \text{ が結び目のとき,} \\ 0 & \text{それ以外の場合.} \end{cases}$$

この公式においてもう一方の変数に -1 を代入すると, Theorem 2 より, アレクサンダー多項式の性質 (3) が復元されることに注意する.

変数に 1 を代入したときに 1 になる. 多項式の係数が対称的に現れる. この二つの性質は結び目のアレクサンダー多項式を特徴づけている. つまり $A(1) = 1$ と $A(t) = A(t^{-1})$ を満たす任意の多項式 $A(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して, ある結び目 K が存在して $\Delta_K(t) = A(t)$ となるのである. 例えば [7] 参照のこと. アレクサンダー多項式の二つの性質をそれぞれ対応する LG 多項式の性質に置き換えることで, 自然に次の問題を考えることができる.

Problem. $A(t_0, t_1) \in \mathbb{Z}[t_0^{\pm 1}, t_1^{\pm 1}]$ を $A(t_0, 1) = A(1, t_1) = 1$ と $A(t_0, t_1) = A(t_1, t_0)$ を満たす 2 変数多項式とする. このとき $LG_K(t_0, t_1) = A(t_0, t_1)$ を満たす結び目 K は存在するか?

可逆的もろて型結び目のアレクサンダー多項式の性質についても考察する. 可逆的結び目とは向きを逆にしたときに得られる結び目が元の結び目と同じものになる結び目のことである. またもろて型結び目とは結び目とその鏡像が同じものになる結び目のことである. K を可逆的もろて型結び目とすると, その結び目に対してある多項式 $\Delta_*(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ が存在して $\Delta_K(t^2) = \Delta_*(t)\Delta_*(t^{-1})$ と因数分解される. この性質に対応して LG 多項式の場合にも, 結び目を 2 橋結び目と呼ばれる結び目に制限した次の命題が証明されている.

Proposition 4. K を可逆的もろて型 2 橋結び目とすると $LG_*(t_0, t_1) \in \mathbb{Z}[t_0^{\pm 1}, t_1^{\pm 1}]$ が存在して $LG_K(t_0, t_1) = LG_*(t_0, t_1)LG_*(t_0^{-1}, t_1^{-1})$ が成り立つ.

アレクサンダー多項式は幾何的な方法を含む様々な方法で定義されるが、一方のLG多項式には代数的な定義しか知られていない。上に見てきたように、LG多項式はアレクサンダー多項式の単なる2変数一般化というだけではなく、いくつかの性質は2変数一般化される際にアレクサンダー多項式からLG多項式に遺伝してきている。このことはLG多項式の幾何的意味づけの可能性を示唆しているように思える。

参考文献

- [1] D. De Wit, *Automatic evaluation of the Links-Gould invariant for all prime knots of up to 10 crossings*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000) 311–339.
- [2] D. De Wit, L. H. Kauffman and J. R. Links, *On the Links-Gould invariant of links*, J. Knot Theory Ramifications 8 (1999) 165–199.
- [3] A. Ishii, *Algebraic links and skein relations of the Links-Gould invariant*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 3741–3749.
- [4] A. Ishii, *The Links-Gould invariants of the Kanenobu knots*, Kobe J. Math. 20 (2003) 53–61.
- [5] A. Ishii, *The LG polynomial as a generalization of the Alexander-Conway polynomial* (under consideration).
- [6] J. R. Links and M. D. Gould, *Two variable link polynomials from quantum supergroups*, Letters in Mathematical Physics 26 (1992) 187–198.
- [7] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley (1976).

ヒルベルトの第14問題に対する フロイデンバーグの反例について

谷本 龍二

はじめに

体 k 上の代数群 G の忠実な線型表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ があたえられたとする. すると, G は n 変数多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ へ自然に作用する. このとき, 不変式環 $k[x_1, \dots, x_n]^G$ は k 代数として有限生成であるか, という問題は不変式論における基本的問題である.

この問題 (本来のヒルベルトの第14問題と呼ばれている) には, 反例があたえられていて否定的に解決されている. 現在では, そのような反例を導く無限生成な不変式環についての解析が, さまざまな角度からおこなわれている ([5, 6, 7, 11] を参照せよ).

以下, ヒルベルトの第14問題入門をかねて, フロイデンバーグの反例が発見されるまでの道のりを簡単に振り返ってみよう.

19世紀後半, 上記の問題に対する肯定的な部分的結果が半不変式環の有限生成性との関連で知られていた. このような肯定的結果をもとに, ヒルベルトは, 上記の問題を次のように一般化し解決しようとしていた. 本来のヒルベルトの第14問題において, $k[x_1, \dots, x_n]^G$ の商体を K とすれば, K は, k 上の n 変数有理関数体 $k(x_1, \dots, x_n)$ の部分体であり, k を含む. さらに, $k[x_1, \dots, x_n]^G = k[x_1, \dots, x_n] \cap K$ が成立している. 次の問題が, 1900年の国際数学会議においてヒルベルト [4] により提出された.

ヒルベルトの第14問題. 体 k 上の n 変数有理関数体 $k(x_1, \dots, x_n)$ の部分体 K で k を含むものに対し, k 代数 $k[x_1, \dots, x_n] \cap K$ は有限生成である.

この問題の提出以降, さらにこの問題の肯定的解決を期待させる結果があたえられた. 1932年ヴァイツェンヴェック [12] により, 標数0の体 k の加法群 $G_a = (k, +)$ が多項式環へ線型に作用しているとき, 本来のヒルベルトの第14問題は肯定的なことが示された.

このような肯定的経緯に反し、1958年永田 [8] により、本来のヒルベルトの第14問題に対する反例が突然発見された。その反例は、 \mathbb{G}_a^{13} の忠実な32次線型表現の形であたえられていて、ヒルベルトの第14問題に対する反例でもある。以降一時期、ヒルベルトの第14問題は否定的に解決されたとみなされ顧みられなくなった。

そのようななか、1990年ロバーツ [9] により、ヒルベルトの第14問題に対する次の新しい反例が発見された。その反例は7変数多項式環へ \mathbb{G}_a が非線形に作用する形であたえられた。以降、小さな反例を構成するという視点から、変数の個数の少ない多項式環とそこへの非線形な \mathbb{G}_a 作用で、それによる不変式環が無限生成になるものの構成が考察された。6変数多項式環へのある \mathbb{G}_a 作用の形の反例をフロイデンバーグ [3] は構成した。また、この反例を利用して、5変数多項式環へのある \mathbb{G}_a 作用の形の反例をデイグルとフロイデンバーグ [2] は構成した。以上が20世紀末までのヒルベルトの第14問題についてのおおまかな動向である。

フロイデンバーグの反例について

フロイデンバーグ [3] は、ヒルベルトの第14問題に対する次のような反例を構成した。

k を標数0の体とし、 $R := k[x, y, s, t, u, v]$ を k 上の6変数多項式環とする。 R における局所べき零微分 D を

$$D := x^3 \frac{\partial}{\partial s} + y^3 s \frac{\partial}{\partial t} + y^3 t \frac{\partial}{\partial u} + x^2 y^2 \frac{\partial}{\partial v} \in \text{Der}_k(R)$$

で定める。このとき、 D の核 R^D は k 代数として無限生成である。

ここで、次のことに注意しておく。 D により \mathbb{G}_a の R への作用 $\mathbb{G}_a \times R \rightarrow R$ が

$$t \cdot f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n(f)}{n!} t^n \quad (t \in \mathbb{G}_a, f \in R)$$

で定まり、さらに、この \mathbb{G}_a 作用による不変式環 $R^{\mathbb{G}_a}$ は R^D と一致する。

本稿の目的は、次の問題に解答をあたえることである。

問題. 無限生成 k 代数 R^D の生成系を記述せよ。

解答の方針は、無数の不変式を構成し、それらが生成系になることを示すことである。

はじめに、 R^D の元 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 を

$$f_1 := x,$$

$$f_2 := y,$$

$$f_3 := 2x^3t - y^3s^2,$$

$$f_4 := 3x^6u - 3x^3y^3st + y^6s^3,$$

$$f_5 := 9x^6u^2 - 18x^3y^3stu + 6y^6s^3u + 8x^3y^3t^3 - 3y^6s^2t^2$$

とおく。 v 次数が 0 の R^D の元は f_i ($1 \leq i \leq 5$) の多項式としてあらわせることが簡単な計算からわかる。

v 次数が 1 以上の R^D の生成元を構成する手がかりは次の補題にある。

補題 1. k 代数の間の準同型 $\pi_v : R \rightarrow R_{xy}$ を

$$\pi_v(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n(f)}{n!} \left(-\frac{v}{x^2y^2} \right)^n$$

で定める。 A における列 $\{b_m\}_{m \geq 0}$ が、

$$(*) \quad \begin{cases} b_0 \in A^\Delta, \\ \Delta(b_m) = x^2y^2b_{m-1} \quad (\forall m \geq 1) \end{cases}$$

を満たせば、各 $m \geq 0$ に対して $\pi_v(b_m) \in R^D$ が成り立つ。さらに、 $\pi_v(b_m)$ を v 次数について展開すると、

$$\pi_v(b_m) = \frac{(-1)^m}{m!} b_0 v^m + (v \text{ 次数について低次の項})$$

がえられる。

上記の補題をふまえ、フロイデンバーグ [3] は以下の定理を示した。

定理 2. $A := k[x, y, s, t, u]$ とおき、 $\Delta := D|_A$ とおく。このとき、ある A における列 $\{b_m^{(1)}\}_{m \geq 0}$ で次の条件 (1), (2), (3) を満たすものが存在する。

$$(1) \quad b_0^{(1)} = f_1.$$

$$(2) \quad \Delta(b_m^{(1)}) = x^2y^2b_{m-1}^{(1)} \quad (\forall m \geq 1).$$

(3) $b_m^{(1)} \in xA$ ($\forall m \geq 2$).

したがって、各 $m \geq 1$ に対し

$$f_1 v^m + (v \text{ 次数について低次の項})$$

の形の R^D の元が存在する.

A における列 $\{b_m^{(2)}\}_{m \geq 0}$ と $\{b_m^{(3)}\}_{m \geq 0}$ を

$$b_m^{(2)} := \begin{cases} f_2 f_3 & m = 0 \text{ のとき} \\ x^2(3x^3 u - y^3 s t) & m = 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{x}(b_1^{(2)} b_{m-1}^{(1)} - (m-1)b_0^{(2)} b_m^{(1)}) & m \geq 2 \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$b_m^{(3)} := \begin{cases} f_4 & m = 0 \text{ のとき} \\ x^2 y^2 (3x^3 s u + y^3 s^2 t - 4x^3 t^2) & m = 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{x}(b_1^{(3)} b_{m-1}^{(1)} - (m-1)b_0^{(3)} b_m^{(1)}) & m \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく. すると、次が成り立つ.

補題 3. 各 $i = 2, 3$ に対し, $\{b_m^{(i)}\}_{m \geq 0}$ は補題 1 の条件 (*) を満たす. したがって、各 $m \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} & f_2 f_3 v^m + (v \text{ 次数について低次の項}), \\ & f_4 v^m + (v \text{ 次数について低次の項}) \end{aligned}$$

の形の R^D の元が存在する.

上記で構成した R^D の元 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \pi_v(b_m^{(i)})$ ($i = 1, 2, 3, m \geq 1$) の集合を S とおく. 本稿の主定理は次である.

定理 4. $R^D = k[S]$.

参考文献

- [1] A. A'Campo-Neuen, Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts, *Indag. Math. (N. S.)* **5**, 253-257 (1994).
- [2] D. Daigle, G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra* **221**, 528-535 (1999).
- [3] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension six, *Transformation Groups* **5**, 61-71 (2000).
- [4] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, *Archiv der Math. und Physik* **1** (1901), 44-63, 213-237.
- [5] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), 501-522.
- [6] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem for the 3-Dimensional Additive Group, *RIMS preprint*, **1343** (2001).
- [7] S. Mukai, Geometric realization of T -shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, 123-129, *Encyclopaedia Math. Sci.*, 132, Springer, Berlin, 2004.
- [8] M. Nagata, *On the Fourteenth Problem of Hilbert*, *Proc. I.C.M. 1958*, Cambridge University Press, 1960, 459-462.
- [9] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra* **132**, 461-473 (1990).
- [10] R. Tanimoto, Linear counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Algebra* **275**, 331-338 (2004).
- [11] R. Tanimoto, On Freudenburg's counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, preprint.
- [12] R. Weitzenböck, Über die invarianten von linearen Gruppen, *Acta Math.* **58** (1932), 231-293.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

電子メール: tanimoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

三次元形状記憶合金方程式の可解性について

吉川周二 東北大学大学院理学研究科

形状記憶合金は医療機器やメガネなど多くの用途で用いられる素材である。この合金は、形状記憶効果と呼ばれる「変形させても熱を加えることで元の形に戻る」性質をもつ。形状記憶効果は温度によって合金の金属格子を変える相転移現象によって生じることが知られている。相転移現象は物理変数が不連続に変化する現象であり、数学的には現在も盛んに研究されている。ここでは Falk-Konopka によって提唱された、三次元の形状記憶合金の相転移現象を記述する方程式系について取り扱う。それは以下のような方程式系である。

$$(3FV) \begin{cases} u_{tt} + QQ u - \nu Q u_t = \nabla \cdot F/\epsilon(\epsilon, \theta), \\ c_v \theta_t - \Delta \theta = \theta F/\theta \epsilon(\epsilon, \theta) : \epsilon_t + \nu(A \epsilon_t) : \epsilon_t & \text{in } (0, T) \times \Omega = Q_T, \\ u = Q u = \nabla \theta \cdot n = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial \Omega = S_T, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ただし、 $u \in \mathbb{R}^3$ は合金の変位、 $\theta \geq 0$ は合金の絶対温度、 $F \in \mathbb{R}$ は合金の弾性エネルギー密度、 $\epsilon = \{\epsilon_{ij}\} = \frac{1}{2}(u_{i/j} + u_{j/i})$ は歪みを表している。 c_v と ν はそれぞれ比熱、粘性係数を表す正定数とする。 $u_{i/j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ と定義する。また $F/\epsilon = \{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}}\}$, $F/\theta \epsilon = \{\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \epsilon_{ij}}\}$, $\epsilon : \tilde{\epsilon} = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}$ である。 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は C^2 境界を持つ有界領域で、 n は $\partial \Omega$ の外向き単位法線ベクトルとする。 A は Hooke の法則を表現する四階テンソルで

$$A = (A_{ijkl}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

とし、これに対応して弾性作用素 Q は

$$\begin{aligned} Qu &= \nabla \cdot (\epsilon(u)A) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) \\ &= \left\{ \mu \sum_{j=1}^3 u_{i/jj} + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 u_{j/ji} \right\}, \end{aligned}$$

と書ける。ただし、Lamé 定数 λ, μ は $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0$ なる条件を満たすものとする。弾性エネルギー密度 $F(\epsilon, \theta) = F_1(\epsilon, \theta) + F_2(\epsilon)$ は次の形のものを考える：

(a) $F_1(\epsilon, \theta)$ and $F_2(\epsilon) \in C^3$ であり、かつ $\theta \geq \theta_l$ (θ_l はある定数) に対して、

$$\begin{aligned} |F_{1/\epsilon \epsilon}| &\leq C \theta^r |\epsilon|^{q-1}, & |F_{2/\epsilon \epsilon}| &\leq C |\epsilon|^{\bar{q}-1}, \\ |F_{1/\epsilon \theta}| &\leq C \theta^{r-1} |\epsilon|^q, & |F_{1/\theta \theta}| &\leq C \theta^{r-2} |\epsilon|^{q+1}, \\ c |\epsilon|^{\bar{q}+1} - C &\leq F_2(\epsilon). \end{aligned}$$

上の条件から $F(\epsilon, \theta)$ は次の増大条件を満たすことがわかる,

$$|F_1(\epsilon, \theta)| \leq C + C\theta^r |\epsilon|^{q+1}, \quad |F_2(\epsilon)| \leq C + C|\epsilon|^{\bar{q}+1}.$$

(b) F_1 は $[0, \theta_i]$ で線形.

Falk と Konopka([1]) は形状記憶合金の性質をよく表現する弾性エネルギー密度として

$$F(\epsilon, \theta) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 (\theta - \theta_c) J_i^2(\epsilon) + \sum_{i=1}^5 \alpha_i^4 (\theta - \theta_c) J_i^4(\epsilon) + \sum_{i=1}^2 \alpha_i^6 J_i^6(\epsilon),$$

という形のものを提案した. ただし α_i^k, θ_c は定数で, J_i^k は $\{\epsilon_{ij}\}$ についての k 次多項式. この弾性エネルギー密度は上の (a), (b) において $r = 1, q = 3, \bar{q} = 5$ の場合に当たる. Pawlow-Zochowski([2]) は, 以下の仮定,

(PZ1) $\nu > 2$ (粘性が大きい),

(PZ2) $0 < r < 1/2, \quad 1 \leq q \leq (\bar{q} + 1) \left(\frac{1}{2} - r\right), \quad 1 \leq \bar{q} \leq \frac{5}{2},$

のもとでの時間大域解 (u, θ) の存在を示した. しかし, 実験データから粘性は小さいことが知られているため (PZ1) の条件は不自然である. また (PZ2) の非線形項は Falk-Konopka の非線形項を含まない. この研究では, この仮定を少し緩めることができた, 即ち,

(A1) $\nu > 0,$

(A2) $0 < r < 1/2, \quad 1 \leq q \leq (\bar{q} + 1) \left(\frac{1}{2} - r\right), \quad 1 \leq \bar{q} < 5,$

のもとで時間大域解の一意存在を示すことができる. しかし残念なことに, この結果も $\bar{q} = 5, r = 1$ と取れないことから Falk-Konopka の非線形項は含んでいないことがわかる.

以下, 主結果を述べる前にいくつか関数空間を導入する. $L^p(Q_T) = L_T^p L_x^p = L^p(0, T; L^p(\Omega))$ は Lebesgue 空間, W_p^j はノルム $\|u\|_{W_p^j(\Omega)} := \sum_{k=0}^j \|D_x^k u\|_{L^p(\Omega)}$ から定義される Sobolev 空間で, 特に $H^j(\Omega) := W_2^j(\Omega)$ と書く. ただし $D_x^s = \prod_{s=s_1+s_2+s_3} D_i^{s_i}, D_i := i \frac{\partial}{\partial x_i}$. また $W_p^{2l,l}(Q_T)$ はノルム $\|u\|_{W_p^{2l,l}(Q_T)} := \sum_{j=0}^{2l} \sum_{2r+s=j} \|i \frac{\partial}{\partial t}^r D_x^s u\|_{L^q(Q_T)}$, から定義される Sobolev 空間とする.

定理 1. $p > 4$ にとる. F が仮定 (A1), (A2) を満たすとする. この時, 任意の $(u_0, u_1, \theta_0) \in U(p) := W_p^{3-\frac{2}{p}} \times W_p^{1-\frac{2}{p}} \times W_{\frac{p}{2}}^{2-\frac{4}{p}}$ に対して, $(\epsilon, \theta) \in V_T(p) := W_p^{2,1}(Q_T) \times W_{\frac{p}{2}}^{2,1}(Q_T)$ を満たす (3FV) の解 (u, θ) が唯一つ存在する.

この結果は, 単に仮定を弱めているだけでなく, データと解の属すクラスも [2] と若干異なる. 実際, [2] においてはデータが $W_p^{4-2/p} \times W_p^{2-2/p} \times W_p^{2-2/p}$ で $W_p^4 \times W_p^2$ に属す解を $p > 5$ で求めている. この結果も解の微分可能な階数が方程式の階数にあっていう意味で自然ではあるが, 物理的な意味は持たない. 本研究においては方程式系のエネルギーに焦点をおいて自然なクラスを考える. 方程式を考える上で, そのエネルギーから自然に定義される空間 (エネルギークラス) は

非常に重要な役割を果たすことが知られている。例えば Schrödinger 方程式における H^1 のようにである。(3FV) のエネルギークラスは $H^2 \times L^2 \times L^1$ であることが知られている。ここで形式的に $p = 2$ ととると $U(2) = H^2 \times L^2 \times L^1$ となりエネルギークラスに一致する。その意味で、データの属す空間 $U(p)$ は物理的に自然な空間と考えられる。しかし、解の属す空間の微分可能な階数は方程式の微分階数より少ないことからわかるように、定理 1 の解は弱解である。[2] の結果に対応した強解のクラスでも解くことができる、

系 2. $p > 5/2, p' > 5/2$ は次を満たすようにとる:

$$\begin{cases} p' \in \left(\frac{5}{2}, \frac{5p}{2(5-p)} \right] & \text{if } p \in (5/2, 5), \\ p' \in \left[\frac{p}{2}, \infty \right) & \text{if } p \in [5, \infty). \end{cases}$$

F が仮定 (A1), (A2) を満たすとする。この時、任意の $(u_0, u_1, \theta_0) \in \tilde{U}(p, p') := W_p^{4-\frac{2}{p}} \times W_p^{1-\frac{2}{p}} \times W_{p'}^{2-\frac{2}{p}}$ に対して、 $(u, \theta) \in \tilde{V}_T(p, p') := W_p^{4,2}(Q_T) \times W_{p'}^{2,1}(Q_T)$ なる (3FV) の解が唯一つ存在する。

この結果は $p = p'$ ととることによって、Pawlow-Zochowski の結果を含んでいることがわかる。証明の鍵となる評価は、調和解析とも密接な関わりをもつ最大正則性と呼ばれる評価である。

注. (i) これらの結果は実はより広いクラスのデータに対しても解けることもわかっている。すなわち、Besov 空間と呼ばれる空間 $B_{p,q}^s$ を用いて、定理 1 の $U(p)$ 及び系 2 の $\tilde{U}(p, p')$ をそれぞれ、 $U'(p) = B_{p,p}^{3-\frac{2}{p}} \times B_{p,p}^{1-\frac{2}{p}} \times B_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}^{2-\frac{4}{p}}$, $\tilde{U}'(p, p') := B_{p,p}^{4-\frac{2}{p}} \times B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}} \times B_{p',p'}^{2-\frac{2}{p}}$ としても同様の結果が得られる。Besov 空間については詳述しないが、 $p \geq 2$ であれば $W_p^s \subset B_{p,p}^s$ が成り立つ。

(ii) 指数の制限 (A2) もまた方程式系のエネルギーとも関わりがある。実は、きちんと方程式を導くと $c_v = c_v(\epsilon, \theta) = \bar{c}_v - \theta F_{\theta\theta}(\epsilon, \theta)$ となる、すなわち方程式 (3FV) は準線形方程式になる。しかし取り扱いの困難さから [2] と同様に半線形方程式 ($c_v = \bar{c}_v = \text{定数}$) として問題を考えた。これにより解の存在証明は取り扱いやすくなる。しかしエネルギー保存則を失うことになり、これが結果としていくつかの指数の仮定をつける原因にもなってしまう。最近 Pawlow-Zacjakowski により (更にいくつかの条件を課すことにより) 準線形の問題 ($c_v = c_v(\epsilon, \theta)$) についても解の存在と一意性が示された ([3])。

参考文献

- [1] F. Falk and P. Konopka, *Three-dimensional Landau theory describing the martensitic phase transformation of shape memory alloys*. J. Phys.: Condensed Matter, **2** (1990), 61-77.
- [2] I. Pawlow and A. Zochowski, *Existence and uniqueness of solutions for a three-dimensional thermoelastic system* Dissert. Math., **406** (2002), 1-46.
- [3] I. Pawlow and W. M. Zajaczkowski, *Global existence to a three-dimensional nonlinear thermoelasticity system arising in shape memory materials*. to appear in Math. Meth. Appl. Sci.

A REMARK ON THE EQUI-DISTRIBUTION OF GENERALIZED EIGENFUNCTIONS

(一般化固有関数の一様分布性について)

東京工業大学 宮西 吉久 (YOSHIHISA MIYANISI)

Department of Mathematics, Faculty of Science
Tokyo Institute of Technology

2-12-1 Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan

概要. この論文では, 一般化固有関数の量子エルゴード性を紹介する.

Abstract. In this note, we shall introduce the notion of quantum ergodicity for generalized eigenfunctions.

1. 序

ここでは, 楕円型偏微分作用素の (一般化) 固有関数の性質と, ハミルトン力学系の関係を述べたいと思う. 大雑把に言えば, (無限遠) 測地流がエルゴード的である場合に, (無限遠) 密度関数が漸近的に一様分布することを述べるのが目的である (主定理 p.5). ただし, 密度関数とは固有関数の 2 乗である.

具体的には, Melrose が導入した 散乱的計量 (参考文献 [Me1], [Me2]) の範疇で, ラプラシアン密度関数を扱い, 測地流がエルゴード的である場合に, 散乱波の一様分布を導出する.

ちなみにこの理論は, コンパクトな多様体上のラプラシアン密度関数の類似である. 実際, 測地流がエルゴード的である場合に, 密度関数は漸近的に一様分布していることが指摘されてきた (参考文献 [Co], [Sc], [Ze1]). この性質は量子エルゴード性と呼ばれ, ラプラシアンに限らず, シュレディンガー作用素, 量子 cat map, 量子接触変換, ランダム多項式, spin 系などについても, 数々の研究がされ, 類似の結果を得るに至っている (例えば [Bo-Bo-Le], [Bo-Gl-Ke], [Es-Gr-Is], [He-Ma-Ro], [Ku-Ru1], [Ku-Ru2], [Sc-Ta], [Sh-Ze], [Va], [Ze2] など).

さらに近年になって, ラプラシアンの一般化固有関数である Eisenstein 級数についても, 量子エルゴード性があることが分かってきた (参考文献 [Ja1], [Ko], [Lu-Sa], [Sa]). しかしながらまだまだ, 測地流との関係が, 明確に見えているわけではない. そこで, この論文では, ユークリッド的散乱的計量 (参考 §3, [Me1], [Me2]) を持つ場合に, 一般化固有関数と測地流との関係を調べてみようという訳である.

論文の内容は, 以下の通りである.

§2 では, 問題のイメージを見るために, コンパクトな多様体の場合に, 代表的な定理や古典的な例について紹介する. 具体的には, ラプラシアンの密度関数と測地流の関係を中心に述べる.

§3 では, ユークリッド的散乱計量を導入し, 一般化固有関数に対して量子エルゴード性を述べる (主定理 p.5). さらに, この結果は, modular surface 上の場合における, 一般化固有関数 (Eisenstein 級数) のアナロジーとなっていることを説明する.

2. コンパクトな多様体上のラプラス固有関数.

この章では, コンパクトな多様体上のラプラス固有関数の密度関数について述べる. そこで, 次のように設定する.

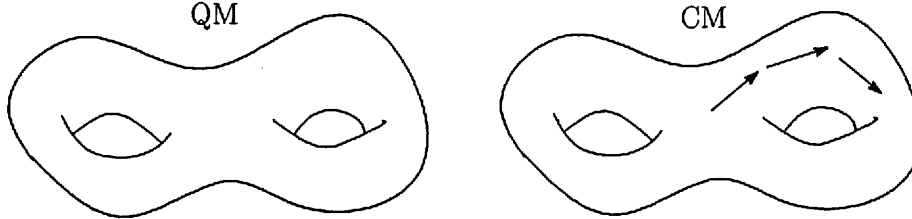
$$(QM) \begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{in } M, \\ \{u_n, \lambda_n\}; \text{固有関数展開 (in } L^2(M)), \end{cases} \quad (CM) \begin{cases} X_H \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{-\partial H}{\partial x}\right), \\ \exp(tX_H) : S^*M \rightarrow S^*M; \text{測地流.} \end{cases}$$

この論文を書くにあたって, 私の質問に丁寧に答えて頂いた, 多久和 英樹 氏に感謝します.

ただし, (M, g) は, 滑らかな コンパクトリーマン多様体とし, X_H は, $H(x, p) = \sqrt{g_x(p, p)}$ をハミルトニアンとするハミルトン ベクトル場である.

参考までに物理学では, (QM) は量子力学 (Quantum Mechanics) を記述し, (CM) は古典力学 (Classical Mechanics) を記述すると考えられている.

少し詳しく言うと, $\|u_n(x)\|_{L^2} = 1$ であるから, $|u_n(x)|^2$ は, 確率密度関数¹になり, これは粒子の存在確率を表すと考えられている. また, $\exp(tX_H)$ は, 速さ 1 の測地流である (下图).



$|u_n(x)|^2$ は, M 上の確率密度関数.

$\exp(tX_H)$ は, 速さ 1 の測地流.

ここで繰り返しになるが, 我々の扱いたい問題は, 粒子の確率密度関数と測地流の関係である. 直感的には, 粒子の確率密度関数は, 測地線に沿って分布すると思われるだろう.

そこで 2 章では, このことについて, いくつかの例について見てみたいと思う.

まず, 最初の例は, 閉測地線に集中する密度関数の列が存在する例である.

例 1. (M, g) を二次元球面とし, γ を閉測地線 (大円) とする. そのとき, ある固有関数展開 $\{u_n, \lambda_n\}$ と, ある固有関数展開の部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在して, 次を満たす.

$$|u_{n_k}|^2 dvol_M \rightarrow \delta_\gamma \text{ weakly.}$$

証明は, 球面調和関数の計算を行えばよい. 実際, 大円 γ の赤道からの傾きを θ とすると, $|Y_l^m|^2 dvol_M \rightarrow \delta_\gamma$ as $\frac{m}{l} \rightarrow \cos \theta, l \rightarrow \infty$ となっている. また, 球面上の測地流は可積分系に分類されることも知られていて, 一般に, 可積分系と呼ばれる系において, 同様の性質が証明されている場合がある ([Ze3], [Ja-Ze]).

一方, 次の例は, 負曲率な多様体のように, 測地流がエルゴードと呼ばれる場合である. ここでは, もう少し詳しく, コンパクトな多様体の場合に, Classical ergodicity (古典エルゴード性) 及び Quantum ergodicity (量子エルゴード性) の定義を述べ, その関係を見る. おおざっぱに言うと, 古典力学 (CM), 量子力学 (QM), それぞれに対応するエルゴード性, すなわち, 測地流, もしくは密度関数に対する, S^*M 上の一様分布性を定義する.

定義 1 ((Classical ergodicity)(古典エルゴード性)). (CM) が classical ergodic であるとは, 次を満たす時をいう.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\exp(tX_H)(x, p)) dt = \frac{1}{vol(S^*M)} \int_{S^*M} f(x, p) dvol_{S^*M}$$

for $\forall f(x, p) \in L^\infty(S^*M)$.

この定義 1 は良く知られている様に, 時間平均と空間平均が等しい事を意味しており, また Birkoff の定理によって左辺の収束は保証されている.

定義 2 ((Quantum ergodicity)(量子エルゴード性)). (QM) が, quantum ergodic であるとは, ある部分列 $\{u_{n_k}, \lambda_{n_k}\}$ が存在して, 次を満たす時を言う.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{条件 1. } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{k} = 1, \\ \text{and} \\ \text{条件 2. } \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Op(a)u_{n_k}, u_{n_k} \rangle_{L^2} = \frac{1}{vol(S^*M)} \int_{S^*M} a(x, p) dvol_{S^*M} \\ \text{for } \forall a(x, p) \in S^0(S^*M). \end{array} \right.$$

¹解析学では, quantum measure とか, defect measure と呼ぶこともある (参考文献 [He-Ta], [Ge]).

ただし $Op(a)$ は, $a(x, p) \in S^0(S^*M)$ を symbol(表象) とする order 0 の擬微分作用素とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ は, 多様体 M 上の L^2 内積を意味する.

定義 2 の意味は, 多様体上の固有関数が漸近的に L^2 norm の意味で一様分布する所にある. また, 条件 1. によって, 例外的な部分列を除けば, すなわち殆どすべての部分列に対し, 一様分布の性質を持つ.

注意として以上をまとめると,

注意 1. (QM) が quantum ergodic とする. その時, ある固有関数展開の部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在して, 次を満たす.

$$\begin{cases} 1. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{k} = 1, \\ \text{and} \\ 2. |u_{n_k}|^2 dvol_M \rightarrow \frac{dvol_M}{vol(M)} \text{ weakly.} \end{cases}$$

Proof. $\phi(x) \in C^\infty(M)$ とし, 擬微分作用素の symbol として, 次の様にする.

$$a(x, p) \equiv \pi^* \phi(x)$$

ただし, $\pi: S^*M \rightarrow M$ は natural projection とする.

そこで, 定義 2 の条件 2 に, 今定義した symbol を代入すると,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \phi(x) |u_{n_k}|^2 dvol_M &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \phi(x) u_{n_k}, u_{n_k} \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Op(a) u_{n_k}, u_{n_k} \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{vol(S^*M)} \int_{S^*M} a(x, p) dvol_{S^*M} \\ &= \frac{1}{vol(S^n) vol(M)} \int_{S^n} \int_M \pi a(x, p) dvol_M dvol_{S^n} \\ &= \frac{1}{vol(M)} \int_M \pi a(x, p) dvol_M \\ &= \frac{1}{vol(M)} \int_M \phi(x) dvol_M. \end{aligned}$$

すなわち, $|u_{n_k}|^2 dvol_M \rightarrow \frac{dvol_M}{vol(M)}$ となった. \square

次に挙げる定理は, 古典エルゴード性から量子エルゴード性が導かれることを示している.

定理 1 ((Schnirelman)(参考文献 [Sc])). (CM) が *classical ergodic* \implies 任意の固有関数展開に対し, (QM) は *quantum ergodic*.²

それでは, 量子エルゴード性を持つ多様体の例を見てみよう.

例 2. (M, g) を, いたるところ負曲率 ($K < 0$) なコンパクト多様体とすると, (CM) は *classical ergodic*. よって, Schnirelman の定理より (QM) は, *quantum ergodic*.

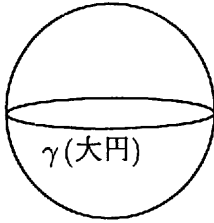
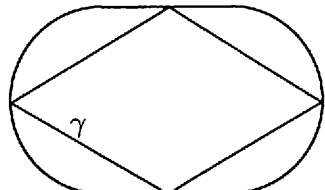
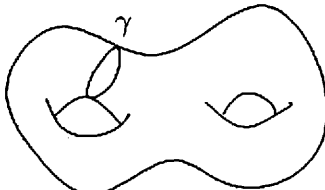
例 3. $M = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (一次元の円) とすれば, $u_n = e^{2\pi i n x}$ となって, (QM) は *quantum ergodic* になることが, 直接確かめられる.³

上に挙げた例や定理は, 代表的なものである. 実は, 密度関数については, 非常に多くのことが知られ, 予想されている. そこで, かなり部分的で簡略なものだが, 2次元多様体の例でまとめておきたい. 密度関数のイメージがつかめると思う.

²逆についても, 「(QM) が quantum ergodic \implies (CM) は classical ergodic」となることも予想されており, 部分的に解決されている (参考文献 [Su]).

³一次元多様体はつねに (CM) が classical ergodic であるから, Schnirelman の定理を用いても良い. また, 部分列を取らなくても, 収束している (quantum unique ergodicity).

次の表において, γ は, それぞれの多様体における閉測地線 (境界のある場合は, billiard flow)⁴ の様子である.

多様体	(CM)	(QM)
球面 	可積分系	$ u_{n_k} ^2 dvol_M \rightarrow \delta_\gamma$ (球面では, 固有値に縮退があるので, 固有関数展開を取り替えると, quantum ergodic になることもある!)[[Ze4], [Va)].
...
Bunimovitch stadium 	ergodic	$\begin{cases} \exists u_{n_k} ^2 dvol_M \rightarrow \frac{dvol_M}{vol(M)} \text{ (quantum ergodic)} \\ \exists u_{n_k} ^2 dvol_M \rightarrow \mu_s + \mu_r \text{ (scar?)} \end{cases}$
負曲率な多様体 	ergodic	$ u_n ^2 dvol_M \rightarrow \frac{dvol_M}{vol(M)}$ (quantum unique ergodicity ?)

表の補足として, 少しだけ述べておく.

可積分系には, トーラスのようなものもある. この場合, 固有関数は閉測地線に集中することはないが, S^*M 内において不変トーラスに集中する (参考文献 [Bo], [Ja2]).

また, 量子エルゴード性において, 部分列を取るか取らないかは, 多様体の構造に依存すると予想されている. 上の stadium の例では, $\mu_s + \mu_r$ (ただし, μ_s は特異な測度, μ_r は絶対連続な測度) に収束する非常に例外的な部分列が存在すると予想されている (参考文献 [Ba-Sc-St], [Ch-Hu], [He1], [He2], [Bu-Zw1], [Bu-Zw2], [Bu-Zw3], [Ze5] など). この問題は, scar ([和訳] 傷跡) の問題と呼ばれている.

また, いたるところ負曲率 ($K < 0$) な多様体とすると, 部分列を取ることなく, 量子エルゴード性が導けると予想されている (参考文献 [Do], [Li], [Ru-Sa], [Sa] など). この問題は, quantum unique ergodicity の問題と呼ぶ.

2章では, ごく一部の文献や性質しか述べなかったが, 他にも非常に沢山の問題と予想があることを, 最後に指摘しておきたい.

3. 散乱的計量と一般化固有関数

3章では, 2章で述べた量子エルゴード性のアナロジーを, 一般化固有関数の密度関数に対して考えたい. そこで, Melrose (参考文献 [Me1], [Me2]) に従い, 散乱問題を次のように設定する.

M を境界 ∂M 付きのコンパクトな多様体とし, 多様体上で, 散乱的計量を

$$g_{sc} = \frac{dx^2}{x^4} + \frac{\bar{h}}{x^2}$$

⁴境界がある場合には, (CM) は, billiard flow を考えることとなる. classical ergodicity については, 良く知られている (参考文献 [Bu], [Ha]). また, 色々な境界条件のもと, quantum ergodicity も分かっている. (参考文献 [Ge-Le], [Zw-Ze]).

とする。ただし、 $x \in C^\infty(M)$ は滑らかな境界定義関数である。つまり境界上で、 $x = 0$ となるものである。また、 \tilde{h} は、滑らかな 2-共変テンソルで、境界に制限すると非退化になるようなものである。

代表的な散乱的計量は、立体射影により、ユークリッド空間 \mathbf{R}^n を半球コンパクト化したときに得られる計量 $\frac{dx^2}{x^4} + \frac{d\omega^2}{x^2}$ である。($d\omega$ は、 $n-1$ 次元球面の標準的な計量)。 g_{sc} は、一般化であるので、(ユークリッド的) 散乱計量と呼ばれている。

ちなみに双曲幾何では、上半平面の計量を $\frac{dx^2}{y^2} + \frac{dy^2}{y^2}$ としている。この場合には、 y が境界定義関数になっていて、双曲的計量と呼ばれている。散乱的計量とは指数が違っているが、類似とみれるであろう。

そこで、我々の考えたい問題は、一般化固有関数の空間である。つまり、0 でない λ に対して、

$$\text{null}(\Delta_{sc} - \lambda^2) = \{u \in H_{sc}^{\infty, -\infty}(M) ; (\Delta_{sc} - \lambda^2)u = 0\}$$

を考えたいのである。ここで、 $H_{sc}^{\infty, -\infty}(M)$ は、境界で超関数になり、内部では、滑らかな関数になるものである。

さらに次の(構造)定理によって、滑らかな(入射波)境界値 f に対して、一般化固有関数が一意に定まることがわかっている(参考文献 [Me1], [Me2])。

補題 . $f \in C^\infty(\partial M)$ とする。そのとき、一意に $u \in \text{null}(\Delta_{sc} - \lambda^2)$ が存在して、

$$u = e^{i\lambda/x} x^{\frac{n-1}{2}} f' + e^{-i\lambda/x} x^{\frac{n-1}{2}} f'' + u' \quad u' \in H_{sc}^{0,0}(M),$$

と書ける。ただし、 $f', f'' \in C^\infty(M)$ であり $f'|_{\partial M} = f$ 。

さらに、Christiansen に倣って、入射波 f' を境界のラプラス固有関数として、一般化固有関数をパラメータ付けしておく(参考文献 [Ch])。実際、 ∂M はコンパクト多様体で、 \tilde{h} の制限を h とすれば、自然に境界上で Δ_h を考えることができ、固有関数展開を使うことが出来る。そこで、次のように定義する。

定義 3 (パラメータ付けされた一般化固有関数). v_j を L^2 正規化された境界上のラプラス固有関数とすると、一般化固有関数 u_j を次の式で定義する。

$$u_j = e^{i\lambda/x} x^{\frac{n-1}{2}} f' + e^{-i\lambda/x} x^{\frac{n-1}{2}} f'' + u' \quad u' \in H_{sc}^{0,0}(X),$$

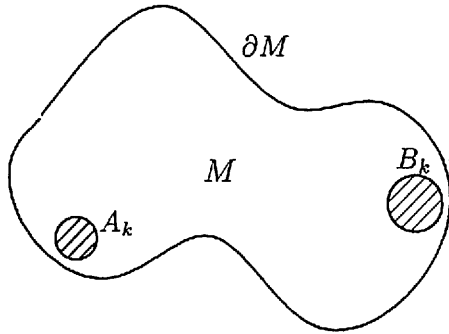
ただし、 $f', f'' \in C^\infty(M)$ であり $f'|_{\partial M} = v_j$ とする。

我々の主張は、次の定理である。

主定理 [境界近傍(無限遠近傍)における量子エルゴード性] 境界上の測地流 $\exp(\pi X_{\sqrt{h}})$ が classical ergodic であるとする。そのとき、ある部分列 u_{j_k} と 0 に収束する数列 $\delta_k > 0$ が存在して、

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j_k}{k} = 1 \\ \text{and} \\ 2. \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\|u_{j_k}\|_{L_w^2(B_k)}}{\|u_{j_k}\|_{L_w^2(A_k)}} - \frac{\text{Vol}(B_k)}{\text{Vol}(A_k)} \right| = 0 \end{array} \right.$$

ただし、 A_k, B_k は、境界の δ_k 近傍(無限遠近傍)に含まれる滑らかな領域とし、 k によらない正の値 c, C によって $c < \text{Vol}(B_k) < C, c < \text{Vol}(A_k) < C$ となるものとする。また、 L_w^2 は、重み付き L^2 ノルムである。すなわち、 $\|f\|_{L_w^2(A)} = \int_A x^{-n+1} |f|^2 d\text{vol}_M$ である。



A_k と B_k は、境界 (無限遠) 近傍の有界領域.

この主張は、無限遠近傍では、散乱波が一様分布する様子を表現したものである。一般の散乱的計量では、多様体の内部で局在波が存在しうるので、無限遠近傍の主張になるわけである。

また、 $\exp(\pi X_{\sqrt{h}})$ は離散的だが、これについても classical ergodicity を定義することが出来る。つまり、任意の $f \in L^\infty(S^*\partial M)$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\exp(k\pi X_H)(x, p)) = \frac{1}{\text{vol}(S^*\partial M)} \int_{S^*\partial M} f(x, p) d\text{vol}_{S^*\partial M}$$

を満たすときに、classical ergodic と呼ぶことにする。また、 $\exp(\pi X_{\sqrt{h}})$ は、実は、連続的な測地流 $\exp(tX_{\sqrt{h}})$ に置き換えても、同様のことが示せる。一応、絶対散乱行列⁵が、 $\exp(\pi X_{\sqrt{h}})$ を canonical relation にもつ、0階の Fourier integral operator となること (参考文献 [Me-Zw]) を強調して書いただけのことである。

系 $\dim M = 2$ とする。そのとき、0 に収束する数列 $\delta_k > 0$ が存在して、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\|u_k\|_{L^2_\omega(B_k)}}{\|u_k\|_{L^2_\omega(A_k)}} - \frac{\text{Vol}(B_k)}{\text{Vol}(A_k)} \right| = 0.$$

上の系では、部分列を選ぶことはしていない。これは、以下の Luo と Sarnack の定理のアナロジーとして見る事が出来るだろう。

定理 2 (Luo and Sarnack(参考文献 [Lu-Sa])). *Modular surface* $M = \text{PSL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}^2$ 上において、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\|E(z, \frac{1}{2} + it)\|_{L^2(B)}}{\|E(z, \frac{1}{2} + it)\|_{L^2(A)}} - \frac{\text{Vol}(B)}{\text{Vol}(A)} \right| = 0$$

ただし、 A, B は M のコンパクト ジョルダン可測集合。 $E(z, \frac{1}{2} + it)$ は、Eisenstein 級数⁶である。

最後に、今回述べた主張は、まだまだ不満である。まだ、問題を提起し、注意した段階にすぎない。密度関数の量子エルゴード性をみたいのであるから、本来は、極限の取り方も λ に対するものにするべきであろう。そのためには最低限、以下のことを考えるべきであると思っている。

まずは、境界値の問題である。もし、Eisenstein 級数のアナロジーを考えるならば、境界値が超関数になる場合についても、考えておかななくてはならない。境界値を滑らかな関数とすれば、双曲的計量の場合であっても、重み付きの L^2 ノルムを扱うことになることが見えている ([Ge2])。

さらに、絶対散乱行列 $A(\lambda)$ の固有 (超) 関数が境界値になるときを、調べるべきであると思っている。一応、絶対散乱行列の弱い quasi-mode と呼べるものではあるものの、mode を取るほうが、より自然である。

⁵絶対散乱行列とは、 $L^2(\partial M)$ 上のユニタリ作用素 $A(\lambda) : f'|_{\partial M} \rightarrow f''|_{\partial M}$ のことである (P.5 の補題参照)。

⁶Eisenstein 級数は、 $-\Delta E(z, \frac{1}{2} + it) = (\frac{1}{4} + t^2)E(z, \frac{1}{2} + it)$ を満たしている。

そのためにも知りたいのは、絶対散乱行列の量子エルゴード性である。量子 cat map や量子接触変換の理論 ([Es-Gr-Is], [Ku-Ru1], [Ku-Ru2], [Ze2]) と同様の結果を、絶対散乱行列に対して言いたいという訳である。このためには、Szegő 型の跡公式を見なければならぬが、まだ、私は理解に至っていない。

現在この問題では、以上の点を、より自然な形で理解することを目的にしている。

REFERENCES

- [Ba-Sc-St] A.BÄCKER, R.SCHUBERT, AND P.STIFTER, *On the number of bouncing ball modes in billiards*, J.Phys.A: Math.Gen. **30**, (1997), 6783-6795
- [Bo] J.BOURGAIN *Eigenfunction bounds for the Laplacian on the n -torus*, Intern. Math. Res. Notices **3** (1993), 61-66.
- [Bo-Bo-Le] E.BOGOMOLNY, O.BOIGAS, AND P.LEBOEUF, *Quantum chaotic dynamics and random polynomials*, J.Stat.Phys **85**, (1996), 639-679
- [Bo-Gl-Ke] J.BOLTE, R.GLASER, AND S.KEPPELER, *Quantum and classical ergodicity of spinning particles*, Annals of Phys. **293**, (2001),1-14
- [Bu] L.A.BUNIMOVITCH, *On the ergodic properties of nowhere dispersive billiards*, Commun.Math.Phys. **65**, (1979), 295-312
- [Bu-Zw1] N.BURQ AND M.ZWORSKI, *Bouncing ball modes and quantum chaos*, preprint
- [Bu-Zw2] N.BURQ AND M.ZWORSKI, *Control in the presence of a black box*, math.AP/0304184, Journal of A.M.S., to appear.
- [Bu-Zw3] N.BURQ AND M.ZWORSKI, *Eigenfunctions for partially rectangular billiards*, math.AP/0312098, preprint
- [Ch-Hu] P.A.CHINNERY AND V.F.HUMPHREY, *Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity*, Phys.Rev.E **53**, (1996), 272-276
- [Ch] T.CHRISTIANSEN *Scattering theory for manifolds with cylindrical ends*, J. Funct. Anal. **131**, (1995), 499-530.
- [Co] COLIN DE VERDIERE, *Ergodicite et fonctions propres du Laplacien*, Commun.Math.Phys. **102**, (1985), 497-502.
- [Do] H.DONNELLY, *Quantum unique ergodicity*, Proc.Amer.Math.Soc. **131**, (2003), 2945-2951
- [Es-Gr-Is] D.ESPOSTI, M.GRAFFI, AND S.ISOLA *Classical limit of the quantized hyperbolic toral automorphisms*, Commun.Math.Phys. **167**, (1995) no.3, 471-507
- [Ge] P.GÉRARD, *Microlocal defect measures*, Commun.P.D.E. **16**, (1991), 1761-1794
- [Ge2] C.GÉRARD, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull.Soc.Math.France **116**, (1998)
- [Ge-Le] P.GÉRARD AND E.LEICHTNAM *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke.Math.J. **71**, (1993), 559-607
- [Ha] B.HALPERN, *Strange billiards table*, Trans.Amer.Math.Soc. **232**, (1977), 297-305
- [Hel1] E.J.HELLER, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems: scars of periodic orbits*, Phys.Rev.Lett. **53**, (1984), 1515-1518
- [He2] E.HELLER, [http : //www.ericjhellergallery.com](http://www.ericjhellergallery.com).
- [He-Ma-Ro] B.HELFFER, A.MARTINEZ, D.ROBERT *Ergodicite et limite semiclassique*, Commun.Math.Phys. **109**, (1987), 313-326
- [He-Ta] W.HELTON AND M.TABOR, *On the classical support of quantum mechanical wavefunctions*, Phys.D. **14**, (1985), 409-415
- [Ja1] D.JACOBSON, *Quantum unique ergodicity for Eisenstein series on $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash PSL_2(\mathbb{R})$* , Ann.Inst.Fourier, Grenoble **44**, (1994), 1477-1504
- [Ja2] D.JACOBSON *Quantum limits on flat tori*, Annal.Math. **145**, (1997), 235-266
- [Ja-Ze] D.JACOBSON-S.ZELDITCH, *Classical limits of eigenfunctions for some completely systems*, in IMA volume 109 "Emerging applications of number theory", 329-354
- [Ko] S.KOYAMA, *Quantum ergodicity of Eisenstein series for Arithmetic 3-Manifolds*, Keio Univ. Research Report, KSTS/RR-00/003
- [Ku-Ru1] P.KURLBERG AND Z.RUDNIK, *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus*, Duke.Math.J. **103**, (2000), 44-77
- [Ku-Ru2] P.KURLBERG AND Z.RUDNIK *On quantum ergodicity for linear maps of the torus*, Commun.Math.Phys. **222**, (2001), 201-227
- [Li] E.LINDENSTRAUSS, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Annal.Math. , to appear
- [Lu-Sa] W.LUO AND P.SARNACK *Quantum ergodicity of eigenfunctions on $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$* , Publ.IHES. (to appear)
- [Me1] R.B.MELROSE, *Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidean spaces*, Spectral and scattering theory (M.Ikawa,ed.), Marcel Dekker, 1994.
- [Me2] R.B.MELROSE *Geometric Scatteing Theory*, Cambridge University Press, 1995, To appear.

- [Me-Zw] R.B.MELROSE AND M.ZWOLSKI, *Scattering metrics and geodesic flow at infinity*, Invent.Math. **124**, (1996), 389-436.
- [Ru-Sa] Z.RUDNIK AND P.SARNACK, *The behavior of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifold*, Commun.Math.Phys. **161**, (1994), 195-213
- [Sa] P.SARNACK, *Arithmetic quantum chaos*. In *The Schur lectures (1992)(Tel Aviv)*, volume 8 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 183-236. Bar-Iran Univ.,Ramat Gan, 1995.
- [Sc] A.I.SCHNIRELMAN, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp.Math.Nauk **29**, (1974), 181-182.
- [Sc-Ta] R.SCHRADER AND M.TAYLOR, *Semi-classical asymptotics, gauge fields and quantum chaos*, J.Funct.Anal. **83**, (1989), 258-316
- [Sh-Ze] B.SHIFFMAN AND S.ZELDITCH, *Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles* (preprint, 1998)
- [Su] T.SUNADA, *Quantum ergodicity*, Progress in inverse spectral geometry, 175-196, Trends Math., Birkhauser, Basel, 1997
- [Va] J.M.VANDERKAM, *L^∞ norms and quantum ergodicity on the sphere*, Int.Math.Res.Notices **3**, (1997), 329-347
- [Ze1] S.ZELDITCH, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke.Math.J. **55**, (1987), 919-941.
- [Ze2] S.ZELDITCH, *Index and dynamics of quantized contact transforms*, Ann.Inst.Fourier, Grenoble **47**, (1997), 305-363
- [Ze3] S.ZELDITCH *Quantum transition amplitudes for ergodic and for completely integrable systems*, J.Funct.Anal. **94**, (1990), 415-436
- [Ze4] S.ZELDITCH, *Quantum ergodicity on the sphere*, Commun.Math.Phys. **146**, (1992), 61-71
- [Ze5] S.ZELDITCH, *A note on quantum unique ergodicity*, Proc.Amer.Math.Soc, (2004), to appear
- [Ze-Zw] S.ZELDITCH AND M.ZWOLSKI *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun.Math.Phys. **175**, (1996), 673-682
- E-mail address:* miyanisi@math.titech.ac.jp

Generation of interfaces to Lotka-Volterra competition diffusion system with large interaction ¹

若狭 徹 (早稲田大学大学院理工学研究科)

1 Introduction

次の Lotka-Volterra 競合拡散系について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(a - u) - \frac{b}{\epsilon^3} uv & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = D\Delta v + v(d - v) - \frac{c}{\epsilon^3} uv & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, v(x, 0) = v_0(x) > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{P})$$

ここで $a, b, c, d, D, \epsilon > 0$ であり, Ω は \mathbf{R}^N の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトルとする. (P) は空間領域 Ω 上での 2 種類の生物の密度分布の時間変化を記述する反応-拡散型モデルの 1 つとしてよく知られており, 未知関数 $u = u(x, t)$ 及び $v = v(x, t)$ は 2 種の競合する生物の個体数密度を表す正の関数とする.

本講演では $0 < \epsilon \ll 1$, すなわち 2 つの相互作用項 uv の係数が非常に大きい場合における解の挙動について考える. 数理生態学の観点からは, このような場合は 2 種の個体数 (密度) の変化において種族間競争が他の要因 (空間内の移動, 繁殖) と比べて極端に支配的であるような状況を表しており, これらの競合種の個体数 (密度) は以下のように変化していくと考えられる.

第 1 段階. 競合による個体数の減少が進み, 短時間の間にそれぞれの種の存在領域 (縄張り) が形成される (2 種間の棲み分けが生じる).

第 2 段階. 棲み分けが生じた後, 存在領域の境界上での競合により境界及びそれに伴う存在領域が時間と共に変動する.

これによれば各段階でのプロセスは解の縦方向への変化と横方向への変化を表すと捉えることができる. 第 1 段階以降では解は自身の存在領域においては $O(1)$ の正の値, 他方では 0 に近い値を取る. このときこれらの異なる形状を境界近傍で繋いでいる部分は界面 (interface) と呼ばれる. 本講演では (P) の適当な初期値に対する解において界面が生じることの正当化を目的とし, 第 1 段階について考えることとする. なお第 2 段階に関する結果として [1] では H^1 -位相において $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの極限問題が次のある自由境界問題の解に収束すること, [2] では特別な初期値 (界面形成後) に対する (P) の古典解の挙動が自由境界問題に従うことが得られている.

¹本講演は東京海洋大学海洋科学部の中島主恵先生との共同研究に基づくものである.

2 Formal analysis

§1でも述べたように、第1段階は ϵ に依存した極めて短い時間スケールで生じる。このような短い時間スケールにおいて何が生じているかを見るために元の時間 t に対する速い時間スケール $\tau := \frac{t}{\epsilon^3}$ を導入する。このとき問題(P)の2つの方程式は次のように書き換えられる:

$$u_\tau = \epsilon^3(\Delta u + u(a - u)) - buv, \quad v_\tau = \epsilon^3(D\Delta v + v(d - v)) - cuv,$$

(ここでは改めて $u = u(x, \tau)$, $v = v(x, \tau)$ と表している)。ここで2つの関数 $\phi(\tau; \xi, \eta)$, $\psi(\tau; \xi, \eta)$ を次の常微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -b\phi\psi, & \phi(0) = \xi > 0, \\ \dot{\psi} = -c\phi\psi, & \psi(0) = \eta > 0. \end{cases} \quad (\text{ODEs.})$$

の解として定義するとき、問題(P)の解 (u, v) は十分小さい時間内においては

$$\Phi_0(x, t) := \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right), \quad \Psi_0(x, t) := \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)$$

により近似されることが期待される。以下では (Φ_0, Ψ_0) を解の第1近似と考えることにする。ここで $\phi(\tau; \xi, \eta)$, $\psi(\tau; \xi, \eta)$ については

$$A(\xi, \eta) := c\xi - b\eta \quad (\xi > 0, \eta > 0)$$

とすると $A(\phi(\tau), \psi(\tau))$ は保存量となることがわかる。これより

$$\phi(\tau; \xi, \eta) = \frac{\xi Ae^{A\tau}}{A + c\xi(e^{A\tau} - 1)}, \quad \psi(\tau; \xi, \eta) = \frac{\eta Ae^{-A\tau}}{A + b\eta(1 - e^{-A\tau})},$$

及び

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi(\tau; \xi, \eta) = \max\left\{\frac{A(\xi, \eta)}{c}, 0\right\}, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi(\tau; \xi, \eta) = \max\left\{0, -\frac{A(\xi, \eta)}{b}\right\}.$$

が得られる。このとき

$$\omega(x) := cu_0(x) - bv_0(x)$$

とおくと、 $\Phi_0(x, t)$, $\Psi_0(x, t)$ に対しては

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_0(x, t) = \max\left\{\frac{\omega(x)}{c}, 0\right\}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_0(x, t) = \max\left\{0, -\frac{\omega(x)}{b}\right\}.$$

となり、特に $t = \epsilon^2$ ($\tau = \frac{1}{\epsilon}$)において、

$$\Gamma := \{x \in \Omega \mid \omega(x) = 0\}$$

の近傍で界面が形成され、 $\omega(x)$ の符号に応じて棲み分けに対応したグラフの形状が得られる。従って第1近似解 (Φ_0, Ψ_0) による近似時間が $O(\epsilon^2)$ 程度まで有効であれば解自身の界面形成が得られる。

3 Main Result

次の定理により (P) の広い初期値に対する古典解における界面の形成が正当化される.

Theorem 1. u_0, v_0 は C^2 -級で次の条件を満たすとする:

$$(A1) \quad u_0, v_0 > 0 \text{ in } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

$$(A2) \quad \Gamma \neq \emptyset, \quad \inf_{x \in \Gamma} |c\nabla u_0 - b\nabla v_0(x)| > 0.$$

このとき $\epsilon_0 > 0, C_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) が存在して $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ に対して次が成立する:

$$(i) \quad |u(x, t) - \Phi_0(x, t)| < C_1\epsilon, \quad |v(x, t) - \Psi_0(x, t)| < C_2\epsilon, \quad \text{for } (x, t) \in \Omega \times (0, \epsilon^2).$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \left| u(x, \epsilon^2) - \max \left\{ \frac{\omega(x)}{c}, 0 \right\} \right| < C_3\epsilon, & \text{for } x \in \Omega, \\ \left| v(x, \epsilon^2) - \max \left\{ 0, -\frac{\omega(x)}{b} \right\} \right| < C_4\epsilon, & \text{for } x \in \Omega. \end{cases}$$

さらに $u \sim 0$, 及び $v \sim 0$ の部分に対しては以下のより詳細な評価を得る.

Theorem 2. 仮定 (A1), (A2) の下でさらに $d_1, d_2, C_5, C_6 > 0$ が存在して次が成立する:

$$\begin{cases} |u(x, \epsilon^2)| < C_5\epsilon^5, & \text{for } x \in \{x \in \Omega | \omega(x) < 0, \text{dist}(x, \Gamma) > d_1\epsilon |\log \epsilon|\}, \\ |v(x, \epsilon^2)| < C_6\epsilon^5, & \text{for } x \in \{x \in \Omega | \omega(x) > 0, \text{dist}(x, \Gamma) > d_2\epsilon |\log \epsilon|\}. \end{cases}$$

Theorem 1 (ii) 及び Theorem 2 によって第 2 段階に関する [2] の結果と合わせることでより (P) の古典解における第 1 段階から第 2 段階までの一連のプロセスが理解される.

4 Sketch of proof

ここでは Theorem 1 の証明の概略について述べる. Theorem 1 の証明は真の解を上下から近似する関数 (比較関数) を構成することにより行われる. このような方法はある種の放物型方程式系に対する比較定理に基づいている. 以下簡単のため $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を次で定める:

$$\mathcal{L}_1(u, v) := u_t - \Delta u - u(a - u) - \frac{b}{\epsilon^3}uv, \quad \mathcal{L}_2(u, v) := v_t - D\Delta v - v(d - v) - \frac{c}{\epsilon^3}uv.$$

Definition (upper-lower solution). 問題 (P) において $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) \in C^2(\Omega \times (0, T); U)$ が (P) の upper-solution であるとは

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0, \quad \mathcal{L}_2(\bar{u}, \bar{v}) \leq 0, & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \geq 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} \leq 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

を満たすときである. $(\underline{u}, \underline{v})$ が (P) の lower-solution であることは上の条件において不等号を逆にした条件により定義される.

Proposition 3 (Order preserving property). 問題 (P) において $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$ 及び $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$ は (P) の upper-solution, 及び lower-solution であるとする. このとき,

$$\underline{u}(x, 0) \leq u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0), \quad \underline{v}(x, 0) \geq v_0(x) \geq \bar{v}(x, 0)$$

ならば

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad \underline{v}(x, t) \geq v(x, t) \geq \bar{v}(x, t) \quad \text{for } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Proposition 3 は単独の半線形放物型方程式の比較定理を利用して証明される. これにより Theorem 1 の証明は第 1 近似解を modify した次の形の関数

$$\begin{cases} \Phi(x, t) := \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x) - s_2(t, \epsilon)\right), \\ \Psi(x, t) := \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x) - s_2(t, \epsilon)\right). \end{cases}$$

を考え, これらが upper-solution, lower-solution となるような s_1, s_2 の条件を調べることに帰着される. 次の補題が成立することからこれによって Theorem 1 が証明される.

Lemma 1. $s_1(t, \epsilon), s_2(t, \epsilon)$ を

$$s_1(t, \epsilon) := M_1 \epsilon \exp \frac{t^2}{\epsilon^3}, \quad s_2(t, \epsilon) = M_2 \epsilon \exp \frac{t^2}{\epsilon^3}$$

で定めるとき ($M_1, M_2 > 0$), (Φ, Ψ) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の upper-solution となる. 同様に

$$s_1(t, \epsilon) := -M_1 \epsilon \exp \frac{t^2}{\epsilon^3}, \quad s_2(t, \epsilon) = -M_2 \epsilon \exp \frac{t^2}{\epsilon^3}$$

とおくとき (Φ, Ψ) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の lower-solution となる.

参考文献

- [1] Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier, European J. Appl. Math., **10** (1999), 97-115.
- [2] Iida-Karali-Mimura-Nakashima-Yanagida, in preparation.

ON KHOVANOV HOMOLOGY OF KNOTS AND LINKS

GENGYU ZHANG

1. INTRODUCTION

Throughout this paper we work in the piecewise linear category. We can imagine a *knot* as a tangled rope in space whose ends are glued together. A *link* can be imagined as several tangled ropes (that may also be tangled with each other) each of which has its ends glued together. Much more precisely, we give the definition as follows:

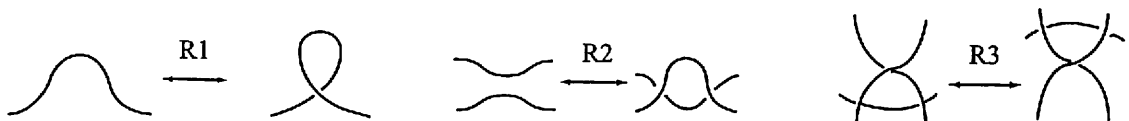
Definition 1.1 (see, for example, [7]). A link L of m components is a subset of S^3 , or of \mathbf{R}^3 , that consists of m disjoint, piecewise linear, simple closed curves. A link of one component is a knot.

With respect to the standard projection $p: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, each line segment of L projects to a line segment in \mathbf{R}^2 , the projections of two such segments intersect in at most point which for disjoint segments is not an end point, also no point belongs to the projections of three segments. Given such a situation, the image of L in \mathbf{R}^2 together with “over and under” information at the crossings is called a *link diagram* of L . Here, a crossing is a point of intersection of the projections of two line segments of L ; the “over and under” information refers to the relative heights above \mathbf{R}^2 of the two inverse images of a crossing.

Definition 1.2 (see, for example, [7]). Links L_1 and L_2 are equivalent if there is an orientation-preserving piecewise linear homeomorphism $h: S^3 \rightarrow S^3$ such that $h(L_1) = L_2$.

Theorem 1.3 (see, for example, [11]). *Two link diagrams correspond to equivalent links if and only if one can be obtained from the other by a finite sequence of Reidemeister moves and plane isotopies.*

The Reidemeister moves are of three types, shown below.

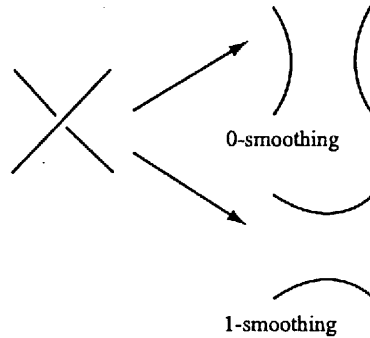


Date: January 9th, 2005.

2. KHOVANOV HOMOLOGY REFORMULATED BY VIRO

In 1999 Khovanov [3] introduced an invariant of knots and links, now widely known as Khovanov homology. This invariant takes the form of a graded homology theory $Kh(L)$, whose graded Euler characteristic is the unnormalized Jones polynomial of L . The original definition is algebraically complicated, while Viro in [14] simplified it and gave a version much more easily to access.

2.1. Kauffman's states of a link diagram. Let D be a diagram of a link L in S^3 . By smoothing each crossing of the diagram in either way of the following two, shown below, a diagram with only disjoint circles can be obtained, which is called a *Kauffman state* of D .



Let s be a state of D . After assigning a sign $-$ or $+$ to each of circle in s , we have an *enhanced Kauffman state*, denoted by S . Now assume that the link is oriented, and we label all the crossings of the diagram D with $1, 2, \dots, n$.

Definition 2.1. Put $w(D) := \#\{\text{positive crossing}\} - \#\{\text{negative crossing}\}$ and $\sigma(s) := \#\{0\text{-smoothing}\} - \#\{1\text{-smoothing}\}$. Denote by $\tau(S)$ the difference between the numbers of $+$ and $-$ assigned to the circles of S . Put

$$i(S) = \frac{w(D) - \sigma(s)}{2}, \quad j(S) = -\frac{\sigma(s) + 2\tau(S) - 3w(D)}{2}.$$

2.2. Khovanov chain complexes. Denote the free abelian group generated by enhanced Kauffman states of a link diagram D by $C(D)$. Denote by $C^i(D)$ the subgroup of $C(D)$ generated by enhanced Kauffman states S of D with $i(S) = i$. Denote by $C^{i,j}(D)$ the subgroup of $C^i(D)$ generated by enhanced Kauffman states S with $j(S) = j$.

The Khovanov chain complex is defined as $(C(D), d)$ where $d = \{d^{i,j}\}$ and the differential $d^{i,j} : C^{i,j} \rightarrow C^{i+1,j}$ satisfies $d(S) = \sum_{S'} (-1)^{t(S,S')} [S : S'] S'$ with S an enhanced Kauffman state generating $C^{i,j}(D)$, S' generating $C^{i+1,j}(D)$ and $[S : S']$ 0 or 1. $[S : S'] = 1$ if and only if the smoothing ways to get S and S' differ exactly at one crossing, and all

the circles of S and S' not touching the crossing get the same sign. The signs $(-1)^{t(S,S')}$ are chosen in some certain way such that $d^{i+1,j} \circ d^{i,j} = 0$.

Remark 2.2. Khovanov in [3] proves that the homology of $C(D)$ (a bigraded group) is an invariant of the underlying link L .

Definition 2.3. Let L be an oriented link in S^3 and D a diagram of L . The isomorphism class of $H^{i,j}(D)(:= \text{Ker } d^{i,j} / \text{Im } d^{i-1,j})$ is called the *Khovanov (co)homology* and denoted by $H^{i,j}(L)$. The polynomial

$$Kh(L)(t, q) = \sum_{i,j} t^i q^j \text{rank } H^{i,j}(D)$$

is called the *Khovanov polynomial*.

Theorem 2.4 ([3]). $Kh(L)(-1, q) = \hat{J}(L)(q)$ where \hat{J} is a version of Jones polynomial with $\hat{J}(U) = 1$ (here U is the unknot).

3. APPLICATIONS

3.1. Khovanov Homology and the Slice Genus. Let K be an oriented knot. Lee in [6] showed that $Kh(K)$ is naturally viewed as the E_2 term of a spectral sequence which converges to $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$. Rasmussen [12] used this spectral sequence to define a knot invariant $s(K)$.

Theorem 3.1 ([12]).

$$|s(K)| \leq 2g^*(K),$$

where $g^*(K)$ denotes the slice genus.

Definition 3.2 ([1]). The slice genus $g^*(K)$, also known as 4-ball genus or 4-genus, of a knot in $S^3 (= \partial B^4)$ is the minimum genus of orientable surfaces in B^4 bounded by K .

Theorem 3.3 ([12]). The map s induces a homomorphism from $\text{Conc}(S^3)$ to \mathbf{Z} , where $\text{Conc}(S^3)$ denotes the concordance group of knots in S^3 .

Definition 3.4 (see [2], [13]). Two knots in S^3 are *concordant* if there is a locally flat topological embedding of the annulus $S^3 \times [0, 1]$ whose restriction to the boundary components gives the knots. The abelian group of the concordance classes of the knot in S^3 is called the *knot concordance group*.

The slice genus $g^*(K)$ is known as a knot concordance invariant.

Theorem 3.5 ([12]). If K is an alternating knot, then $s(K)$ is equal to the knot signature $\sigma(K)$.

Definition 3.6 (see, for example, [7]). A knot is called *alternating* if it has such a diagram that the ‘over’ or ‘under’ nature of the crossings alternates as one travels along the knot. If K is a knot in S^3 with Seifert matrix V , define the *signature* of K to be $\sigma(K) = \sigma(V + V^T)$ where $\sigma(\cdot)$ is the difference between the number of positive eigenvalues and that of negative eigenvalues.

Definition 3.7 (see, for example, [13]). A *seifert surface* for an oriented knot K in S^3 is a connected, bicollared, compact 2-manifold M in S^3 with $\partial M = K$. Associated to the Seifert surface M for K is the *Seifert form* $f : H_1(M) \times H_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}$ defined by $f(x, y) = lk(x, y^+)$, where $M \times [0, 1]$ is a bicollar in $S^3 - K$, $x, y \in H_1(M)$ are 1-cycles in M and y^+ is the homology cycle carried by $y \times 1$ in the bicollar. Choose a basis e_1, e_2, \dots, e_{2g} for $H_1(M)$ as a \mathbf{Z} -module, then define the associated *Seifert matrix* $V = (v_{i,j})$ to be the $2g$ by $2g$ integral matrix with entries $v_{i,j} = lk(e_i, e_j^+)$.

Theorem 3.8 ([12]). *If K is a positive knot,*

$$s(K) = 2g^*(K) = 2g(K),$$

where $g(K)$ is the ordinary genus of K .

Definition 3.9 (see, for example, [7]). A knot, with a knot diagram all of whose crossings are positive, is called a *positive knot*. The genus $g(K)$ of a knot K is defined by

$$g(K) = \min\{\text{genus}(F) : F \text{ is a Seifert surface for } K\}.$$

As a corollary, Rasmussen gave a purely combinatorial proof of the Thom conjecture, which was first proved by Kronheimer and Mrowka using gauge theory [4, 5]:

Corollary 3.10 ([12]). *The slice genus of the (p, q) torus knot is $(p - 1)(q - 1)/2$.*

The (p, q) torus knot $T_{p,q}$ with $(p, q) = 1$ is the knot which wraps around the standard solid torus T in the longitudinal direction p times and in the meridional direction q times. The torus knot $T_{p,q}$ can be obtained from the intersection in \mathbf{C}^2 of $x^p + y^q = 0$ and a small 3-sphere centered at the origin.

3.2. Relation with Floer Homology. Ozsvath and Szabo in [10] define a certain topological invariant for closed oriented 3-manifolds, well known as the Heegaard Floer Homology. They in [8] derive a spectral sequence whose E^2 term is some form of Khovanov homology for the

link L , converging to the Heegaard Floer homology of the branched double cover $\Sigma(L)$, branched over L , of S^3 .

In [9] they use the knot filtration on the Heegaard Floer complex to define an integer invariant $\tau(K)$ for knots. The theorems above still hold after replacing $s(K)$ with $2\tau(K)$ (refer to [9]). The natural similarity between Floer and Khovanov homology triggers much research interests.

REFERENCES

- [1] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 120–167.
- [2] R. H. Fox and J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267.
- [3] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426.
- [4] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces. I.*, Topology **32** (1993), no. 4, 773–826.
- [5] ———, *Gauge theory for embedded surfaces. II.*, Topology **34** (1995), no. 1, 37–97.
- [6] E. S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, arXiv:math.GT/0210213.
- [7] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [8] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On the Heegaard Floer homology of branched double-covers*, arXiv:math.GT/0309170.
- [9] ———, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geom. Topol. **7** (2003), 615–639.
- [10] ———, *Holomorphic disks and knot invariants.*, Adv. Math. **186** (2004), no. 1, 58–116.
- [11] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 154, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [12] J. A. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, arXiv:math.GT/0402131.
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, vol. 7, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990.
- [14] O. Viro, *Remarks on definition of Khovanov homology*, arXiv:math.GT/0202199.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, TOKYO 152-8551, JAPAN

E-mail address: zhang@math.titech.ac.jp

ヒルベルトの第14問題とニュートン多面体

京都大学数理解析研究所

黒田 茂

1 ヒルベルトの第14問題

n を自然数とし, 体 K 上の変数 X_1, \dots, X_n についての有理関数体を $K(X)$ とする. K を含む $K(X)$ の部分体 L について考える. 一般に, 有限個の元 $f_1, \dots, f_t \in L$ が存在し, L の任意の元は K 上の f_1, \dots, f_t についての有理式の形に表せることが知られている. 逆に, $K(X)$ の元 f_1, \dots, f_t が与えられたとき, K 上の f_1, \dots, f_t についての有理式全体 $K(f_1, \dots, f_t)$ は, K を含む $K(X)$ の部分体になる. 従って, K を含む $K(X)$ の部分体を与えることと, $K(X)$ の有限個の元を与えることは同じである.

次に, L と K 上の X_1, \dots, X_n についての多項式環 $K[X]$ の交わり $L \cap K[X]$ について考える. $L \cap K[X]$ は, 和と積および K の元を掛ける作用について閉じており, $K[X]$ の K 部分代数となる. 一般に, 可換な K 代数 A は, 有限個の元 $g_1, \dots, g_s \in A$ が存在して A の任意の元が K 上の g_1, \dots, g_s についての多項式の形に表せるとき, 有限生成であるという. ヒルベルトの第14問題とは, K を含む $K(X)$ の部分体 L に対し, $L \cap K[X]$ が有限生成かを問うものである.

2 肯定的な結果

L の任意の元が $k(f_1, \dots, f_t)$ に係数を持つ代数方程式の根になるような有限部分集合 $\{f_1, \dots, f_t\} \subset L$ 全体を \mathcal{L} とおく. L の任意の元は L に係数を持つ1次方程式の根になるので, 初めに述べたことから \mathcal{L} は空でない. さらに, 包含関係に関する \mathcal{L} の極小元は, どれも同じ個数の元を含むことが知られている. その個数を L の K 上の超越次数と呼ぶ. ザリスキ [11] は, L の K 上の超越次数が2以下ならば $L \cap K[X]$ は有限生成であることを示した. 特に, $n \leq 2$ のときは L の K 上の超越次数は常に2以下になる

ので、ヒルベルトの第 14 問題の答えは肯定的である。

3 反例

ヒルベルトの第 14 問題に対する最初の反例は、1958 年に永田雅宜 [9] が $n = 32$ の場合に、 K 上の超越次数が 4 の L として与えた。このことから、32 以上のどの n においても反例が存在することが直ちに従う。実際、 $n \geq 32$ ならば L は自然に $K(X)$ の部分体とみなせ、 $L \cap K[X] = L \cap K[X_1, \dots, X_{32}]$ が成り立つ。同様に、4 以上の各自然数 t に対し、 K 上の超越次数が t である反例の存在も容易に従う。そこで、どれだけ小さな n における反例が、またどれだけ小さな超越次数を持つ反例が存在するかが次に問題となる。ザリスキ [11] より、 n が 2 以下の場合には反例は存在せず、また K 上の超越次数が 2 以下の L が反例になることもない。 n については、様々な数学者の努力により少しずつ最小記録が更新され、これまでに $n = 5$ の場合まで反例が構成されていた (cf. [1], [2], [10])。一方、 K 上の超越次数については、永田による 4 という記録を塗り替える反例はこれまで見つかっていなかった。しかし最近、筆者 [6] が $n = 3$ の場合に K 上の超越次数が 3 の反例を与え、この問題は最終的に決着した。例えば、 $n \geq 3$ で K の標数が零のとき、

$$K \left(\frac{X_1^4}{X_2} - \frac{X_2^4}{X_1}, 2X_1^3X_2^3 - \frac{X_2^8}{X_1^2}, X_3 - \frac{X_2^4}{X_1} \right) \cap K[X] \quad (3.1)$$

は有限生成でない。

4 微分の核

次に、ヒルベルトの第 14 問題の特別な場合について考える。一般に可換な K 代数 A に対し、 K 上の線形写像 $D: A \rightarrow A$ は、任意の $a, b \in A$ に対して $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ が成り立つとき、 A における微分であるという。 B を A の K 部分代数とする。このとき、

$$B^D = \{a \in B \mid D(a) = 0\}$$

は B の K 部分ベクトル空間だが、さらに積に関しても閉じていて部分代数となる。実際、 $a, b \in B^D$ に対し $D(ab) = D(a)b + aD(b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0$ が成り立つ。また、 B が体ならば B^D は B の部分体になる。

$K[X]$ における微分 D について考える. 任意の非負整数 t_1, \dots, t_n に対し,

$$D(X_1^{t_1} \cdots X_n^{t_n}) = \sum_{i=1}^n t_i X_1^{t_1} \cdots X_n^{t_n} X_i^{-1} D(X_i) \quad (4.1)$$

が成り立つので, D は X_1, \dots, X_n の像 $D(X_1), \dots, D(X_n)$ から一意的に定まる. 逆に, $K[X]$ の任意の n 個の元 f_1, \dots, f_n に対し, $D(X_i) = f_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす $K[X]$ の微分が (4.1) から定まる. 従って, $K[X]$ の微分 D を与えることと, $D(X_1), \dots, D(X_n)$ に対応する $K[X]$ の n 個の元を与えることは同値である. $K[X]$ の微分 D に対し, $K(X)$ の微分 D' が

$$D' \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2} \quad (f, g \in K[X], g \neq 0)$$

により定まる. このとき, $K[X]^D = K(X)^{D'} \cap K[X]$ が成り立つ. $K(X)^{D'}$ は K を含む $K(X)$ の部分体なので, D の核 $K[X]^D$ の有限生成性の問題は, ヒルベルトの第 14 問題の特別な場合である.

ザリスキ [11] から, $n \leq 3$ ならば $K[X]$ の任意の微分 D の核 $K[X]^D$ は有限生成であることが導ける. 一方, 5 以上の各自然数 n に対し, $K[X]^D$ が有限生成でないような $K[X]$ の微分 D の存在がこれまでに分かっていた (cf. [1]). 唯一未解決だった $n = 4$ の場合にも, $K[X]^D$ が有限生成でないような D の存在が筆者 [5] および [7] により示された. 例えば, K の標数が零で r が 3 以上の自然数のとき,

$$\begin{aligned} D(X_1) &= rX_1X_3^{r+1} + rX_1X_2^{r+1} + (1-r)X_1^{r+2}, \\ D(X_2) &= rX_2X_1^{r+1} + rX_2X_3^{r+1} + (1-r)X_2^{r+2}, \\ D(X_3) &= rX_3X_2^{r+1} + rX_3X_1^{r+1} + (1-r)X_3^{r+2}, \\ D(X_4) &= (2r^2 + r - 1)X_1^r X_2^r X_3^r \end{aligned} \quad (4.2)$$

から定まる $K[X]$ の微分 D の核 $K[X]^D$ は有限生成でない.

5 ニュートン多面体

ヒルベルトの第 14 問題の反例を構成するための筆者による理論は, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [10] などを範疇に収めるだけでなく, それ以外にも様々な種類の反例を自在に与え, 詳細に分析することが可能である. この理論では, 以下のようにして反例を構成する. まず, $K[X]$ と別の多項式環 $K[Y]$ を用意し, $K[Y]$ の微分 D および K 代数としての準同型 $\Phi: K[Y] \rightarrow K(X)$ を指定する. このとき, $\Phi(K[Y]^D)$ の商体 $L(D, \Phi)$ は K

を含む $K(X)$ の部分体になる. 筆者の理論は, $L(D, \Phi)$ がヒルベルトの第 14 問題の反例となるための D と Φ に関する様々な十分条件を与えるものである. その際, ニュートン多面体の概念が重要な役割を果たす.

K 上の変数 Y_1, \dots, Y_m のローラン多項式

$$f = \sum_{t_1, \dots, t_m} c_{t_1, \dots, t_m} Y_1^{t_1} \cdots Y_m^{t_m} \quad (c_{t_1, \dots, t_m} \in K, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Z})$$

に対し, \mathbb{Z}^m の部分集合

$$\text{supp}(f) = \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}^m \mid c_{t_1, \dots, t_m} \neq 0\}$$

を f の台と呼び, $\text{supp}(f)$ の \mathbb{R}^m における凸包を f のニュートン多面体と呼ぶ. これらの概念の類似は, K 上の Y_1, \dots, Y_m についての多項式環 $K[Y]$ の微分 D に対しても定義できる. すなわち, D の台を

$$\text{supp}(D) = \bigcup_{i=1}^m \text{supp}(Y_i^{-1} D(Y_i))$$

により定め, D のニュートン多面体を $\text{supp}(D)$ の \mathbb{R}^m における凸包と定義する. 例えば, 定義式 (4.2) の X_1, \dots, X_4 をそれぞれ Y_1, \dots, Y_4 と取り替えることで定めた $K[Y]$ の微分 D の場合,

$$\begin{aligned} Y_1^{-1} D(Y_1) &= rY_3^{r+1} + rY_2^{r+1} + (1-r)Y_1^{r+1} \\ Y_2^{-1} D(Y_2) &= rY_1^{r+1} + rY_3^{r+1} + (1-r)Y_2^{r+1} \\ Y_3^{-1} D(Y_3) &= rY_2^{r+1} + rY_1^{r+1} + (1-r)Y_3^{r+1} \\ Y_4^{-1} D(Y_4) &= (2r^2 + r - 1)Y_1^r Y_2^r Y_3^r Y_4^{-1} \end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\text{supp}(D) = \{(r+1, 0, 0, 0), (0, r+1, 0, 0), (0, 0, r+1, 0), (r, r, r, -1)\}$$

であり, D のニュートン多面体は四面体である.

台やニュートン多面体の概念を使うことで, $K[Y]$ の微分やその核の代数的な構造の分析に, \mathbb{R}^m 内の図形の組合せ論を利用できるようになる. ヒルベルトの第 14 問題の研究に, 台やニュートン多面体の概念を持ち出す例はこれまであまりなかった. しかし, ある種類の反例たちを研究する場合には, むしろ台やニュートン多面体を考えることによってこそ本質が明らかになる. ヒルベルトの第 14 問題の他にも, 多項式環を巡る問題には難しいものが数多くある. そうした問題にも, 台やニュートン多面体の概念を活用する手法の応用を試みたいと考えている.

参考文献

- [1] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra* **221** (1999), 528–535.
- [2] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension six, *Transform. Groups* **5** (2000), 61–71.
- [3] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 277–292.
- [4] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 501–522.
- [5] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension four, *J. Algebra* **279** (2004), 126–134.
- [6] S. Kuroda, A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three, to appear in *Michigan Math. J.*
- [7] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, preprint.
- [8] S. Kuroda, The fourteenth problem of Hilbert and Newton polytopes, in preparation.
- [9] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958*, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.
- [10] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra* **132** (1990), 461–473.
- [11] O. Zariski, Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, *Bull. Sci. Math.* **78** (1954), 155–168.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町

京都大学数理解析研究所

E-mail address: kuroda@kurims.kyoto-u.ac.jp

LENS SPACE SURGERY ON KNOTS IN THE THREE SPHERE AND DEHN SURGERY ON (1,1)-KNOTS IN LENS SPACES

TOSHIO SAITO

1. BACKGROUNDS

Throughout this paper, we work in the piecewise linear category. For the definition of standard terms in three-dimensional topology and knot theory, we refer to [19] and [29]. Let X be a submanifold of a manifold Y . The notation $N(X; Y)$ is a regular neighborhood of X in Y . By $E(X; Y)$, we mean the *exterior* of X in Y , i.e., $E(X; Y) = \text{cl}(Y \setminus N(X; Y))$. We always let M be a closed connected orientable 3-manifold.

1.1. Dehn surgery. A *link* is a disjoint union of simple loops properly embedded in M . In particular, a link is called a *knot* if it consists of a single loop. Let L be a link in M . *Dehn surgery* on L is the operation of removing the interior of $N(L; M)$ from M and attaching solid tori along $\partial E(L; M)$, where ∂ means the boundary. The following is proved by Lickorish [23] and Wallace [34] independently in the 1960s.

Theorem 1.1 (Lickorish, Wallace). *Any closed connected orientable 3-manifold is obtained by Dehn surgery on a link in the three sphere S^3 .*

We remark that this theorem implies that there is close relationship between knot theory and 3-manifold theory.

1.2. Heegaard splittings. A triplet $(V_1, V_2; S)$ is called a *genus g Heegaard splitting* of M if V_i ($i = 1$ and 2) are genus g handlebodies with $M = V_1 \cup V_2$ and $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 \cap \partial V_2 = S$. The surface S is called a *Heegaard surface* of M . It is considered that the concept of Heegaard splittings is introduced by Heegaard in 1898. Moreover, it is proved by Moise [24] that any compact connected orientable 3-manifold admits a triangulation. Hence we have the following.

Theorem 1.2 (Moise). *Every closed connected orientable 3-manifold has a Heegaard splitting.*

EXAMPLE 1.3. (1) Set $M = S^3$. It follows from a generalized Schönflies theorem that every 2-sphere in S^3 separates it into two 3-balls B_1 and B_2 (*cf.* Section 2.F.5 of [29]). Hence $(B_1, B_2; S)$ is a genus 0 Heegaard splitting of S^3 , where $S = \partial B_1 = \partial B_2$.

(2) Let W_1 be a standard solid torus in S^3 . We note that $\text{cl}(S^3 \setminus W_1)$ is also a solid torus. Let m be a meridian loop of W_1 and ℓ an essential loop in ∂W_1 which bounds a disk in $\text{cl}(S^3 \setminus W_1)$. Then $[m]$ and $[\ell]$ are a basis of $H_1(\partial W_1; \mathbb{Z})$. Let W_2 be a solid torus and m' a meridian loop of W_2 . Let N be a 3-manifold obtained from S^3 by removing $\text{cl}(S^3 \setminus W_1)$ and then glueing W_2 so that $[m'] = p[\ell] + q[m]$ in $H_1(\partial W_1; \mathbb{Z})$, where p and q are a coprime pair of integers. Such a 3-manifold N is called a *lens space* of type (p, q) and denoted by $L(p, q)$. Then $(W_1, W_2; S)$ is a genus 1 Heegaard splitting of $N = L(p, q)$, where $S = \partial W_1 = \partial W_2$.

REMARK 1.4. In this paper, S^3 and $S^2 \times S^1$ are regarded as lens spaces. We note that S^3 is homeomorphic to $L(1, q)$ for any integer q and that $S^2 \times S^1$ is homeomorphic to $L(0, 1)$.

1.3. **Exceptional surgeries.** We now focus Dehn surgery on knots in S^3 . To this end, we recall some terminologies. A knot $K \subset S^3$ is called a *torus knot* if K is isotopic onto a genus 1 Heegaard surface of S^3 . A knot $K \subset S^3$ is called a *satellite knot* if $E(K; S^3)$ contains an essential torus. A knot $K \subset S^3$ is a *hyperbolic knot* if $S^3 \setminus K$ admits a Riemannian metric of constant sectional curvature -1 which is complete and of finite volume. The following is a corollary of Thurston's hyperbolization theorem of Haken manifolds (see for example [20]).

Theorem 1.5 (Thurston). *Let K be a knot in S^3 . Then exactly one of the following holds: (1) K is a torus knot, (2) K is a satellite knot and (3) K is a hyperbolic knot.*

We remark that Dehn surgery on the torus knots in S^3 is completely classified by Moser [26]. The following is called the hyperbolic Dehn surgery theorem due to Thurston [33].

Theorem 1.6 (Thurston). *Dehn surgery on a hyperbolic knot in S^3 yields a hyperbolic manifold except for finitely many cases.*

An *exceptional surgery* is Dehn surgery on a hyperbolic knot in S^3 yielding a non-hyperbolic manifold. There is a conjecture on exceptional surgeries in [21].

CONJECTURE 1.7 (Kirby). For every hyperbolic knot in S^3 , the number of exceptional surgeries would be at most ten. Moreover, if a knot admits ten exceptional surgeries, then it would be the figure-eight knot in S^3 .

We remark that supporting evidences for Conjecture 1.7 are found by Agol [1], Ichihara [18] and Lackenby [22].

2. LENS SPACE SURGERY

In this section, we will consider Dehn surgery on knots in S^3 which yields lens spaces. Such Dehn surgery is called *lens space surgery*.

PROBLEM 2.1. Which knots in S^3 admit lens space surgery?

This is one of the unsolved problems on study of exceptional surgeries. It is well known that non-trivial surgery on a non-trivial knot cannot yield S^3 [15] and that $S^2 \times S^1$ never comes from Dehn surgery on a non-trivial knot [10]. We recall that Dehn surgery on the torus knots in S^3 is characterized by Moser [26]. We note that lens space surgery on satellite knots in S^3 is completely classified by Bleiler-Litherland [3], Wang [35] and Wu [36] independently. Therefore it follows from Theorem 1.5 that we only have to consider lens space surgery on hyperbolic knots in S^3 . We now recall a remarkable result, called the cyclic surgery theorem, due to Casson-Gordon-Luecke-Sharlen [6]. Dehn surgery on a knot $K \subset M$ is said to be *integral* if a meridian loop of the filling solid torus intersects a meridian of K in $\partial E(K; M)$ in a single point.

Theorem 2.2 (Casson-Gordon-Luecke-Sharlen). *Let K be a knot in S^3 such that $E(K; S^3)$ is not a Seifert fibered space. Let M' be a 3-manifold obtained from Dehn surgery on K . If $\pi_1(M')$ is cyclic, then the surgery is integral.*

Since $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, we see that lens space surgery on a knot $K \subset S^3$ is integral unless K is a torus knot.

On the other hand, Berge [2] introduced the concept of doubly primitive knots.

DEFINITION 2.3 (Berge). Let $(V_1, V_2; S)$ be a genus 2 Heegaard splitting of S^3 and K a simple loop on S . The knot K is said to be *doubly primitive* if K represents a free generator of both $\pi_1(V_1)$ and $\pi_1(V_2)$.

Theorem 2.4 (Berge). *Any doubly primitive knot in S^3 admits integral surgery yielding a lens space.*

He also gave a list of doubly primitive knots in S^3 [2]. There are many conjectures on lens space surgery. The following are some of them.

CONJECTURE 2.5 (Gordon [14]). Any knot in S^3 with lens space surgery would be doubly primitive.

CONJECTURE 2.6 (Bleiler-Litherland [3]). It would be impossible to obtain a lens space $L(p, q)$ with $|p| < 18$ by Dehn surgery on a non-torus knot.

We remark that Fintushel-Stern showed [9] that a certain surgery on the $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot yields $L(18, 5)$.

CONJECTURE 2.7 (Goda-Teragaito [13]). Let K be a hyperbolic knot in S^3 and $g(K)$ the genus of K . Suppose that a lens space $L(p, q)$ comes from Dehn surgery on K . Then the following would hold.

- (1) $2g(K) + 8 \leq |p| \leq 4g(K) - 1$.
- (2) K is a fibered knot.

It is confirmed by Goda-Teragaito that Conjectures 2.6 and 2.7 are true for knots in Berge's list.

We note that Rasumussen [28] proved that if a lens space $L(p, q)$ comes from Dehn surgery on a non-trivial knot $K \subset S^3$, then $|p| \leq 4g(K) + 3$, where $g(K)$ is the genus of K .

We also remark that Ozváth-Szabó [27] studied lens space surgery by using knot Floer homology.

3. DUAL KNOTS

Let K be a knot in M and M' a 3-manifold obtained from Dehn surgery on K . We recall that Dehn surgery on K is the operation of removing the interior of $N(K; M)$ from M and attaching a solid torus V along $\partial E(K; M)$. Then a core loop of the filling solid torus V , say K^* , is called the *dual knot* of K in M' . We remark that $E(K^*; M')$ is homeomorphic to $E(K; M)$ and hence K^* admits Dehn surgery yielding M . In particular, if M' is obtained by integral surgery on $K \subset M$, then M is also obtained by integral surgery on $K^* \subset M'$. Then Problem 2.1 corresponds to the following.

PROBLEM 3.1. Which knots in lens spaces admit Dehn surgery yielding S^3 ?

Let K be a doubly primitive knot in S^3 . Suppose that a lens space $L(p, q)$ is obtained by integral surgery on K . Let K^* be the dual knot of K in $L(p, q)$. It is proved by Berge [2] that K^* as above is obtained by the following construction.

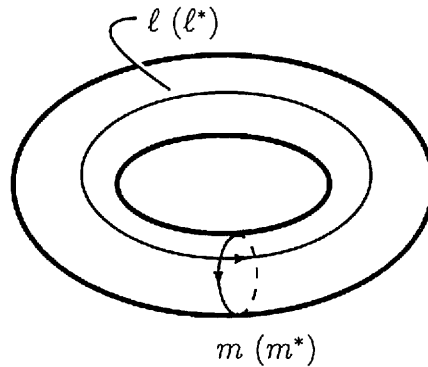


FIGURE 1

DEFINITION 3.2. Let W_1, W_2, m, ℓ and m' as in (2) of Example 1.3. Let D_1 (D_2 resp.) be a disk in W_1 (W_2 resp.) with $\partial D_1 = m$ ($\partial D_2 = m'$ resp.). We fix an orientation of m and ℓ as illustrated in Figure 1. By attaching a solid torus W_2 to W_1 so that $[m'] = p[\ell] + q[m]$ in $H_1(\partial W_1; \mathbb{Z})$, we obtain a lens space $L(p, q)$. The intersection points of m and m' are labelled P_0, \dots, P_{p-1} successively along the positive direction of m . Let t_i^k ($i = 1, 2$) be simple arcs in D_i joining P_0 to P_k ($k = 1, 2, \dots, p-1$). Then the notation $K(L(p, q); k)$ denotes the knot $t_1^k \cup t_2^k$ in $L(p, q)$.

It is easy to see that $K(L(p, q); k)$ is a $(1, 1)$ -knot. Here, a knot $K \subset M$ is called a $(1, 1)$ -knot if $(M, K) = (W_1, t_1) \cup_P (W_2, t_2)$, where $(W_1, W_2; P)$ is a genus 1 Heegaard splitting of M and t_1 (t_2 resp.) is a trivial arc in W_1 (W_2 resp.). (An arc t properly embedded in a solid torus W is said to be *trivial* if there is a disk D in W with $t \subset \partial D$ and $\partial D \setminus t \subset \partial W$.) Hence Berge's result implies that $(1, 1)$ -knots form an important class of knots. In fact, $(1, 1)$ -knots are studied in various contexts. (See, for example, [4], [5], [8], [11], [12], [16], [17], [30], [37] and [38].)

We remark that it is not necessary for any knot represented by $K(L(p, q); k)$ for some integers p, q and k to admit integral surgery yielding S^3 . It is proved that there is a necessary condition for $K(L(p, q); k)$ to admit integral surgery yielding S^3 .

Theorem 3.3 (Corollary 1.2 of [31]). *If integral surgery on $K(L(p, q); k)$ yields S^3 , then $k^2 \equiv \pm q \pmod{p}$.*

As an application, we give a partial answer on Conjecture 2.6.

Theorem 3.4. *If Dehn surgery on a non-torus doubly primitive knot in S^3 yields a lens space $L(p, q)$, then $|p| \geq 18$.*

We remark that there are some papers on Problem 3.1. For recent papers, see [7] and [32].

REFERENCES

- [1] I. Agol, Bounds on exceptional Dehn filling, *Geom. Topol.* **4** (2000), 431–449.
- [2] J. Berge, Some knots with surgeries yielding lens spaces, unpublished manuscript.
- [3] S. Bleiler and R. Litherland, Lens spaces and Dehn surgery, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), 1127–1131.
- [4] A. Cattabriga and M. Mulazzani, $(1, 1)$ -knots via the mapping class group of the twice punctured torus, *Adv. Geom.* **4** (2004), 263–277.
- [5] D. H. Choi and K. H. Ko, Parametrizations of 1-bridge torus knots, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003), 463–491.

- [6] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. Sharlen, Dehn surgery on knots, *Ann. Math.* **125** (1987), 237–300.
- [7] A. Deruelle and D. Matignon, Thin presentation of knots and lens spaces, *Geom. Topol.* **3** (2003), 677–707.
- [8] H. Doll, A generalized bridge number for links in 3-manifolds, *Math. Ann.* **294** (1992), 701–717.
- [9] R. Fintushel and R. Stern, Constructing lens spaces by surgery on knots, *Math. Z.* **175** (1980), 33–51.
- [10] D. Gabai, Foliations and topology of 3-manifolds III, *J. Diff. Geom.* **26** (1987), 479–536.
- [11] D. Gabai, 1-bridge braids in solid tori, *Topology Appl.* **37** (1990), 221–235.
- [12] H. Goda and C. Hayashi and N. Yoshida, Genus two Heegaard splittings of exteriors of knots and the disjoint curve property, *Kobe J. Math.* **18** (2001), 79–114.
- [13] H. Goda and M. Teragaito, Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **129** (2000), 501–515.
- [14] C. McA. Gordon, Dehn filling: a survey. *Knot theory*, (Banach Center Publ., **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1988), 631–642.
- [15] C. McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 371–415.
- [16] C. Hayashi, Genus one 1-bridge positions for the trivial knot and torus knots, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **125** (1999), 53–65.
- [17] C. Hayashi, Satellite knots in 1-genus 1-bridge positions, *Osaka J. Math.* **36** (1999), 711–729.
- [18] K. Ichihara, Integral non-hyperbolike surgeries, preprint
- [19] W. Jaco, Lectures on three manifold topology, *Conference board of Math. No.43* (1980).
- [20] M. Kapovich, *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, *Progress in Math.* **183**, Birkhäuser (2001).
- [21] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 2.2, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 35–473, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997).
- [22] M. Lackenby, Word hyperbolic Dehn surgery, *Invent. Math.* **140** (2000), 243–282.
- [23] W. B. R. Lickorish, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. Math.* **76** (1962), 531–540.
- [24] E. Moise, Affine structures in 3-manifolds whose homeomorphism classes of Heegaard splittings have polynomial growth, *Ann. Math.* **55** (1952), 96–114.
- [25] K. Morimoto and M. Sakuma, On unknotting tunnels for knots, *Math. Ann.* **289** (1991), 143–167.
- [26] L. Moser, Elementary surgery along a torus knot, *Pacific J. Math.* **38** (1971), 734–745.
- [27] P. S. Ozsváth and Z. Szabó, On knot Floer homology and lens space surgeries, *Topology* (to appear).
- [28] J. Rasumussen, Lens space surgeries and a conjecture of Goda and Teragaito, *Geom. Topol.* **8** (2004), 1013–1031.
- [29] D. Rolfsen, *Knots and links*, *Math. Lect. Note Series 7*, Publish or Perish Inc. (1976).
- [30] T. Saito, Genus one 1-bridge knots as viewed from the curve complex, *Osaka. J. Math.* **41** (2004) 427–454.
- [31] T. Saito, Dehn surgery and (1,1)-knots in lens spaces, preprint.
- [32] T. Saito, The dual knots of doubly primitive knots, preprint.
- [33] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, *Lecture notes*, Princeton University, (1978).
- [34] A. H. Wallace, Modifications and Cobounding Manifolds, *Canad. J. Math.* **12** (1960), 503–552.
- [35] S. Wang, Cyclic surgery on knots, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), 1091–1094.
- [36] Y. Q. Wu, Cyclic surgery and satellite knots, *Topology Appl.* **36** (1990), 205–208.
- [37] Y. Q. Wu, ∂ -reducing Dehn surgeries and 1-bridge knots, *Math. Ann.* **295** (1992), 319–331.
- [38] Y. Q. Wu., Incompressible surfaces and Dehn surgery on 1-bridge knots in handlebodies, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **120** (1996), 687–696.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University,
Machikaneyama 1-16, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
e-mail: saito@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

Optimal long-term investment in a model with memory

井上昭彦・中野張（北海道大学大学院理学研究科）

我々は一種類の株式と一種類の安全証券から成る金融市場モデルを考える。時刻 $t \in [0, \infty)$ における安全証券の価格 $S_0(t)$ の時間発展は次の常微分方程式で記述されるとする：

$$\begin{cases} dS_0(t) = rS_0(t)dt & (t \in [0, \infty)), \\ S_0(0) = 1. \end{cases}$$

一方、時刻 $t \in [0, \infty)$ における株価 $S(t)$ の時間発展は次の確率微分方程式で記述されるとする：

$$(1) \quad dS(t) = S(t) \{m dt + \sigma dY(t)\} \quad (t \in [0, \infty)),$$

ここで $S(0), \sigma \in (0, \infty)$, $r, m \in \mathbf{R}$ とし、driving noise $Y(t)$ は次で与えられる定常増分ガウス過程とする：

$$(2) \quad Y(t) = W(t) - \int_0^t \left(\int_{-\infty}^s p e^{-(q+p)(s-u)} dW(u) \right) ds \quad (t \in \mathbf{R}).$$

(2) において、 p, q は $Y(\cdot)$ の記憶を記述するパラメータで

$$0 < q < \infty, \quad -q < p < \infty$$

を満たすとし、 $(W(t))_{t \in \mathbf{R}}$ はある確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の1次元ブラウン運動で $W(0) = 0$ を満たすとする。特に、 $p = 0$ のとき $Y(\cdot) = W(\cdot)$ 。後で見るように、 $(Y(t))_{t \geq 0}$ は自身の生成するフィルトレーションに関してセミマルチンゲールである。従って、確率微分方程式 (1) は通常の意味で解釈される。

実際の市場は、ブラック・ショールズモデルに代表されるマルコフ過程よりも非マルコフ過程に従うと考えるのが自然である。株価モデル (1) は、この点を考慮し、市場における記憶の効果を記述するモデルとして Anh-井上 [1] によって導入されている。これはブラック・ショールズモデルのそれに比べ、 p, q という（わずかに）二つだけ余分なパラメータを含んだモデルである。近年の実証研究においては、市場における記憶の効果の存在だけでなく、株価の収益率が非ガウス

分布であることや、株価過程がジャンプを持つ不連続過程であるという報告例があり、これらの現象を記述する様々なモデルが提示されている。しかし、ブラック・ショールズモデルがその simple さゆえに依然として実務でよく用いられるモデルであることも事実であり、また、モデルを精緻にすればするほど、それだけ数学的な解析が困難になる。我々のモデル (1) は、このようなトレードオフを考慮したモデルと位置づけることができる。

[2] では、このモデルの解析の基本的な手段となる $Y(\cdot)$ のセミマルチンゲール表現が求められ、期待対数効用最大化問題に応用されている。また、[3] では、現実のデータに対してパラメータ p, q の推定が行われている。[10] では、このモデルの二項近似を構成している。さらに、[9] では、上の $Y(\cdot)$ に対するフィルタリングの理論を展開し、類似のモデルに対する部分観測下での期待対数効用最大化問題に応用している。

以下、フィルトレーションとしては、 $(Y(t))_{t \geq 0}$ で生成されるフィルトレーションの P -augmentation $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \geq 0}$ を取る。

各 $T \in (0, \infty)$ に対して、 \mathcal{A}_T を実数値発展的可測過程 $(\pi(t))_{0 \leq t \leq T}$ で $\int_0^T \pi^2(t) dt < \infty$ a.s. を満たすもの全体とし、

$$\mathcal{A} = \{(\pi(t))_{t \geq 0} : (\pi(t))_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{A}_T \text{ for every } T \in (0, \infty)\}$$

とおく。

初期資産 $x \in (0, \infty)$ およびポートフォリオ $\pi \in \mathcal{A}_T, T \in (0, \infty)$ に対して、その価値過程 $(X^{x, \pi}(t))_{t \geq 0}$ を以下で定義する：

$$\begin{cases} \frac{dX^{x, \pi}(t)}{X^{x, \pi}(t)} = (1 - \pi(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi(t) \frac{dS(t)}{S(t)}, \\ X^{x, \pi}(0) = x. \end{cases}$$

$\alpha \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty)$ とする。我々は次のような最適ポートフォリオ問題を考える：

$$(3) \quad \max I(\alpha, \pi) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha T} \log E[(X^{x, \pi}(T))^\alpha] \quad \text{subject to } \pi \in \mathcal{A}.$$

$I(\alpha, \pi)$ の x に関する同次性により、一般性を失うことなく $x = 1$ と仮定できる。 $\pi \in \mathcal{A}_T, T \in (0, \infty)$ に対して、 $X^\pi(t) = X^{1, \pi}(t), 0 \leq t \leq T$ とおく。問題 (3) は通常の期待べき効用最大化問題

$$(4) \quad \begin{aligned} \max F(T, \alpha, \pi) &:= \frac{1}{\alpha} E[(X^\pi(T))^\alpha] \\ \text{subject to } &\pi \in \mathcal{A}_T \end{aligned}$$

の infinite time horizon version とみなせる。実際、 $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{A}$ に対して、十分大きな T_0 が存在して、 $F(T, \alpha, \pi_1) \leq F(T, \alpha, \pi_2), T \geq T_0$ が成り立つならば $I(\alpha, \pi_1) \leq$

$I(\alpha, \pi_2)$ である. (3) のような無限期間の問題を考える利点として, 極限をとることにより計算結果が簡単になることが期待できることや, time horizon T の数値を設定する問題を回避できることがある. 関連する研究として, [4], [5], [6], [7], [8], [12], [14] およびこれらの引用文献を見よ.

$$I(\alpha) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} I(\alpha, \pi), \quad F(T, \alpha) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} F(T, \alpha, \pi) \quad (T \in (0, \infty)),$$

$$J(\alpha) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha T} \log(\alpha F(T, \alpha))$$

とおく. このとき, 次のことが容易に示せる:

補題 1. $I(\alpha) \leq J(\alpha)$.

次に, $Y(\cdot)$ のセミマルチンゲール表現について説明する.

$$l(t) = p \left\{ 1 - \frac{2pq}{(2q+p)^2 e^{2qt} - p^2} \right\} \quad (t \geq 0)$$

とおくとき, 次が成り立つ:

定理 2 ([9]). 確率過程 $(Y(t))_{t \geq 0}$ は次の形の $\mathcal{F}(t)$ -セミマルチンゲールである:

$$Y(t) = B(t) - \int_0^t \int_0^s e^{-(q+p)(s-u)} l(u) dB(u) ds.$$

ここで $(B(t))_{t \geq 0}$ は次を満たす 1 次元ブラウン運動である:

$$\sigma(B(s) : 0 \leq s \leq t) = \sigma(Y(s) : 0 \leq s \leq t) \quad (t \geq 0).$$

問題 (3) を解くために, 我々はまず, 問題 (4) の最適解の明示的表現を求める. そのために,

$$\theta_0 = \frac{m-r}{\sigma}, \quad \theta(t) = \theta_0 - \int_0^t e^{-(q+p)(t-s)} l(s) dB(s) \quad (t \geq 0)$$

とおき, β を $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$ を満たす実数とする. すなわち, $\beta = \alpha/(\alpha-1)$ とする. このとき $\beta \in (0, 1)$ である. さらに,

$$a = (p+q)\theta_0, \quad b(t) = -(p+q) + \beta l(t) \quad (t \geq 0)$$

とおき, $\Gamma(t) \equiv \Gamma(t; T)$ と $\xi(t) \equiv \xi(t; T)$ を次の常微分方程式の解とする:

$$(5) \quad \dot{\Gamma}(t) = \beta(1-\beta) - 2b(t)\Gamma(t) - l^2(t)\Gamma^2(t), \quad \Gamma(T) = 0,$$

$$(6) \quad \dot{\xi}(t) = -(b(t) + l^2(t)\Gamma(t))\xi(t) - a\Gamma(t), \quad \xi(T) = 0.$$

$\beta(1-\beta) > 0$ より Riccati 方程式 (5) の解の存在と一意性が保証されている (cf. [13]).

次が分かる:

定理 3. 各 $T \in (0, \infty)$ に対して, 問題 (4) の最適ポートフォリオ過程 $(\hat{\pi}(t))_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{A}_T$ が一意に存在して, 次で与えられる:

$$(7) \quad \hat{\pi}(t) = \frac{1}{\sigma} \{(1 - \beta - \Gamma(t)l(t))\theta(t) - \xi(t)l(t)\}.$$

さらに,

$$F(T, \alpha) = \frac{1}{\alpha} S_0(T)^\alpha \Lambda(0; T)^{1-\alpha},$$

ここで

$$\begin{aligned} & \Lambda(0; T) \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ \Gamma(0)\theta_0^2 + 2\xi(0)\theta_0 + \int_0^T (l^2(s)\Gamma(s) + 2a\xi(s) + l^2(s)\xi^2(s)) ds \right\} \right]. \end{aligned}$$

$\bar{b} = -(1 - \beta)p - q (< 0)$ とおき, $\bar{\Gamma}$ を 2 次方程式 $p^2\bar{\Gamma}^2 + 2\bar{b}\bar{\Gamma} = \beta(1 - \beta)$ の非負解とする. すなわち,

$$\bar{\Gamma} = \frac{-\bar{b} - \sqrt{\bar{b}^2 + p^2\beta(1 - \beta)}}{p^2}$$

とする. また,

$$\bar{\xi} = \frac{-a\bar{\Gamma}}{\bar{b} + p^2\bar{\Gamma}}, \quad \eta(p, q, \alpha) = p^2\bar{\Gamma} + 2a\bar{\xi} + p^2\bar{\xi}^2$$

とおく. 我々は (5) と (6) の解の漸近挙動に関する次の結果を必要とする:

命題 4. 次が成り立つ:

$$\lim_{T \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty} \Gamma(t; T) = \bar{\Gamma}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty} \xi(t; T) = \bar{\xi}.$$

さらに,

$$J(\alpha) = r + \frac{1 - \alpha}{2\alpha} \eta(p, q, \alpha).$$

確率過程 $(\bar{\pi}(t))_{t \geq 0}$ を

$$(8) \quad \bar{\pi}(t) = \frac{1}{\sigma} \{(1 - \beta - p\bar{\Gamma})\theta(t) - p\bar{\xi}\}$$

と定義する ((7) と比較せよ). $\bar{\pi} \in \mathcal{A}$ である. $\bar{\alpha}$ を次のように定める:

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{if } -q < p \leq 2q, \\ -3 - \frac{8q}{p - 2q} & \text{if } \infty > p > 2q. \end{cases}$$

次が我々の主結果である.

定理 5. $\bar{\alpha} < \alpha < 0$ とする. このとき, (8) で定義される $\bar{\pi}$ が問題 (3) の最適ポートフォリオ過程である. さらに,

$$I(\alpha) = J(\alpha)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] V. Anh and A. Inoue, Financial markets with memory I: Dynamic models. *Stochastic Anal. Appl.*, to appear.
- [2] V. Anh, V., A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization. *Stochastic Anal. Appl.*, to appear.
- [3] V. Anh, A. Inoue and C. Pese, Incorporation of memory into the Black-Scholes-Merton theory and estimation of volatility, submitted.
- [4] T. R. Bielecki and S. R. Pliska, Risk sensitive dynamic asset management, *J. Appl. Math. Optim.* **39** (1999), 337–360.
- [5] W. H. Fleming and S. J. Sheu, Optimal long term growth rate of expected utility of wealth, *Ann. Appl. Probab.* **9** (1999), 871–903.
- [6] W. H. Fleming and S. J. Sheu, Risk-sensitive control and an optimal investment model, *Math. Finance* **10** (2000), 197–213.
- [7] W. H. Fleming and S. J. Sheu, Risk-sensitive control and an optimal investment model (II), *Ann. Appl. Probab.* **12** (2000), 730–767.
- [8] H. Hata and Y. Iida, A risk-sensitive stochastic control approach to an optimal investment problem with partial information, preprint.
- [9] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory, submitted.
- [10] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Binary market models with memory, submitted.
- [11] A. Inoue and Y. Nakano, Optimal long-term investment in a model with memory, in preparation.
- [12] K. Kuroda and H. Nagai, Risk sensitive portfolio optimization on infinite time horizon, *Stochastics and Stochastics Reports* **73** (2002), 309–331.
- [13] R. S. Liptser and A. N. Shiriyayev, *Statistics of random processes. I. General theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [14] H. Nagai and S. Peng, Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon, *Ann. Appl. Probab.* **12** (2002), 173–195.

定常過程の予測問題を明示的に解く方法

笠原雪夫 (東京大学大学院情報理工学系研究科)

§1. 定常過程の予測と重み付き三角近似

定常過程の予測の問題は、重み付き L^2 -空間における三角多項式近似の問題に帰着される。この節では、そのことを踏まえながら問題を定式化する。

$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$ を実 Gauss 過程とする。 \mathbf{X} が定常であるとは、平均が時間 t について一定で、自己共分散が時間の差 $t - s$ のみの関数である、即ち、 $E[\mathbf{X}(t)] = m$ 、 $E[(\mathbf{X}(t) - m)(\mathbf{X}(s) - m)] = R(t - s)$ がすべての t, s について成り立つことである。以下、 $E[\mathbf{X}(t)] = 0$ (平均 0)、 $\lim_{s \rightarrow t} E[|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^2] = 0$ (平均二乗の意味の連続性) を満たす実定常 Gauss 過程 \mathbf{X} を考える。

\mathbf{X} の自己共分散関数 $R(t) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)]$ は、非負定符号性を満たす連続な遇関数だから、 \mathbb{R} 上の有限な遇測度 (或は、有界な非減少奇関数) Δ が存在して、

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} d\Delta(\xi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表される (Bochner の定理); この Δ はスペクトル測度 (関数) と呼ばれる。そこで内積 $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(\xi)^* d\Delta(\xi)$ を持つ Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R}, d\Delta(\xi))$ を導入する。ただし、 $*$ は複素共役を意味する。このとき、 H の元 $X(t) = X(t, \xi) = e^{-it\xi}$ (確率変数 $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t, \omega)$ は ω の関数) は

$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(s)] = R(t - s) = (X(t), X(s)) \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

を満たし、また、有限線形結合 $\sum c_k X(t_k)$ ($c_k \in \mathbb{C}, t_k \in \mathbb{R}$) の全体は H で稠密である。従って、 H は、 $\mathbf{X}(t) \mapsto X(t)$ なる対応を自然に拡張した線形写像により、 $\sum c_k \mathbf{X}(t_k)$ ($c_k \in \mathbb{C}, t_k \in \mathbb{R}$) 全体の $\sqrt{E[|f|^2]}$ に関する閉包として得られる、内積 $E[fg^*]$ を持つ Hilbert 空間 \mathbf{H} と同一視される。また、この意味で、 H における系 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ は、定常過程 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$ の類似になっている。

さて、 \mathbf{X} は時間と共にランダムに変動するので、その予測では条件付き平均を考える。即ち、 $I \subset \mathbb{R}$ として、 $E[\mathbf{X}(t)|\mathbf{X}(s) : s \in I]$ は、観測値 $\{\mathbf{X}(s)|s \in I\}$ に基づく $\mathbf{X}(t)$ の最良予測と見なされる。例えば、現時点を時刻 0 として、過去の観測データ $\{\mathbf{X}(s)|-\infty < s \leq 0\}$ から、未来の時刻 $t > 0$ における $\mathbf{X}(t)$ の値を予測する問題は、 $E[\mathbf{X}(t)|\mathbf{X}(s) : -\infty < s \leq 0]$ を求める問題に他ならない。一方、有限線形結合 $g = \sum c_k \mathbf{X}(s_k)$ ($c_k \in \mathbb{C}, s_k \in I$) を用いて $E[|\mathbf{X}(t) - g|^2]$ を最小にするという、いわゆる線形最小二乗法による予測問題も考えられる。この問題の解は、 \mathbf{H} における g 全体の閉包 \mathbf{H}_I の元 f で $E[|\mathbf{X}(t) - f|^2]$ を最小にするもの、即ち、 $\mathbf{X}(t)$ の \mathbf{H}_I への直交射影 $\mathbf{P}_I \mathbf{X}(t)$ である。ただし、 \mathbf{P}_I は \mathbf{H} から \mathbf{H}_I への直交射影作用素。実は、平均 0 の Gauss 系では「独立性」と「直交性」が同値で

あるため、 $E[X(t)|X(s) : s \in I] = P_I X(t)$ が成り立つ。つまり、今の設定では、上に述べた二つの予測問題は同等である。

ここで、Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R}, d\Delta(\xi))$ に戻って、 $I \subset \mathbb{R}$ に対して、 H_I を $\{X(t), t \in I\}$ で生成される H の閉部分空間、また、 P_I を H から H_I への直交射影作用素とする。この枠組では、Fourier 解析などの技術を用いながら、上で述べた予測問題の類似、即ち、 $f \in H$ の射影 $P_I f$ を求める問題を考えることができる。例えば、 $P_{(-\infty, 0]} f$ を求める問題では、 $\sum c_k e^{it_k}$ ($c_k \in \mathbb{C}, t_k \geq 0$) の極限 (ラフに言えば $\int_0^\infty c(t) e^{it} dt$) を扱うので、上半平面における Hardy 族の理論が強力な武器になる。要するに、解析手段が豊富な H で議論し、得られた結果を H の言葉に翻訳すれば、本来の予測問題の解が得られるという仕組みである。

尚、定常時系列に関する予測問題も同様に扱える。実際、平均 0 の実定常 Gauss 過程 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ の共分散関数 $R_n = E[x_n x_0]$ は、単位円上の有限な測度 Δ によるスペクトル分解 $R_n = \int_{-\pi}^\pi e^{-in\theta} d\Delta(\theta)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を持つので (Herglotz の定理)、この Δ で定まる Hilbert 空間 $H = L^2([-\pi, \pi], d\Delta(\theta))$ で $x_n = x_n(\theta) = e^{-in\theta}$ を考えれば、上と並行の議論ができる。

§2. 無限の過去を用いた予測

この節では、Kolmogorov、Kreĭn、Wiener、Karhunen 達によって研究された、無限の過去を用いた予測問題に対する二つのアプローチについて復習する。

簡単のため、純非決定性 $\cap_t H_{(-\infty, t]} = \{0\}$ を仮定する。この場合、

$$(1) \quad H_{(-\infty, t]} = \left\{ \int_{-\infty}^t f(t-u) dB(u) \mid f \in L^2([0, \infty), du) \right\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

を満たす Brown 運動 $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ が存在して、 X は移動平均表現

$$(2) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t C(t-u) dB(u) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を持つことが知られている。ここで、基本事項を確認しよう。Brown 運動 B は

$$(3) \quad E[B(t)B(s)] = |t \wedge s| \quad (t, s \text{ が同符号}), \quad = 0 \quad (t, s \text{ が異符号})$$

を満たす平均 0 の Gauss 過程で、この性質から $E[|B(t) - B(s)|^2] = t - s$ ($s < t$)、 $E\{B(t_1) - B(s_1)\} \{B(t_2) - B(s_2)\} = 0$ ($s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$) が従う。特に、 B は独立 (直交) 増分を持つ。確率積分 $\int_{-\infty}^\infty f(u) dB(u)$ は $f \in L^2(\mathbb{R}, du)$ に対して定義されるが、まず、階段関数 $f = \sum_{k=1}^n c_k 1_{(t_{k-1}, t_k]}$ ($-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$) に対して、 $\int_{-\infty}^\infty f(u) dB(u) = \sum_{k=1}^n c_k \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}$ とおく。このとき、上に述べた性質によって、 $E[\int_{-\infty}^\infty f(u) dB(u)]^2 = \int_{-\infty}^\infty |f(u)|^2 du$ が得られる。一般の f に対しては、 $\int_{-\infty}^\infty |f_n(u) - f(u)|^2 du \rightarrow 0$ となる階段関数列 $\{f_n\}$ に対する積分

列を考えるが、それは $\{f_n\}$ の取り方に依らない極限を持つので、その極限を $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)dB(u)$ とする。勿論、 $E[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)dB(u)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du$ が従う。

さて、(1) で重要なことは、 B が独立増分を持つということである。例えば、現時点を時刻 0 とすれば、未来における B の増分 $B(t) - B(s)$ ($0 \leq s < t$) は X の過去の履歴 $\{X(u) : -\infty < u \leq 0\}$ と独立である。従って、そのような増分から定義される確率積分 $\int_0^{\infty} f(u)dB(u)$ もそうである。よって、(2) から直ちに、無限の過去を用いた予測問題の解

$$E[X(t)|X(s) : -\infty < s \leq 0] = \int_{-\infty}^0 C(t-u)dB(u) \quad (t > 0)$$

が得られる。これが一つ目のアプローチである。この B は X の innovation と呼ばれるが、これは、ラフに言えば、各時刻 t において $X(t)$ が新たに獲得する (過去の履歴とは独立な) 「情報」が、 $B(t)$ の瞬間的な増分、或は、白色雑音 $\dot{B}(t)$ (形式的な微分) によつて的確に捉えられることを意味する。

上の事実は、 $H = L^2(\mathbb{R}, d\Delta(\xi))$ における議論によつて導かれる。純非決定性の条件は、 $\cap_t H_{(-\infty, t]} = \{0\}$ と同値であり、それが成り立つための必要十分条件は、スペクトル測度 Δ が Lebesgue 測度に対して絶対連続で、その Radon-Nikodým 導関数 Δ' が $\int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2 + 1)^{-1} \log \Delta'(\xi) d\xi > -\infty$ を満たすことである。このとき、

$$(4) \quad h(\zeta) = \sqrt{2\pi} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\zeta + 1}{\xi - \zeta} \frac{\log \Delta'(\xi)}{\xi^2 + 1} d\xi \right] \quad (\Im \zeta > 0)$$

により上半平面の解析関数 $h(\zeta)$ が定義されて、更に、 $h(\xi) = \lim_{\eta \searrow 0} h(\xi + i\eta)$ が \mathbb{R} 上殆んど至るところ存在して $|h(\xi)|^2 = 2\pi\Delta'(\xi)$ (a.e.) が成り立つ。そこで、 $h(\xi) \neq 0$ (a.e.) に注意して、 $B(t) = B(t, \xi) = h(\xi)^{-1} \int_0^t e^{-i\xi u} du$ とおけば、

$$(B(t), B(s)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-i\xi u} du \right) \left(\int_0^s e^{-i\xi u} du \right)^* d\xi \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

となり、右辺は、 t, s が同符号ならば $|t| \wedge |s|$ 、そうでない場合は 0 だから、この $B(t)$ は (3) と同等の性質を持つ。つまり、 $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ は Brown 運動の類似になっている。従って、上と同じ手順により、 $f \in L^2(\mathbb{R}, du)$ に対する積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)dB(u)$ が定義されるが、それは H の元として $h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\xi u} du$ と同一視される。一方、(4) で定まる $h \in L^2(\mathbb{R}, d\xi)$ は上半平面の Hardy 族 H^2 に属する outer function で、有限線形結合 $\sum c_k e^{it_k} h$ ($c_k \in \mathbb{C}, t_k \geq 0$) の全体は $\{\int_0^{\infty} f(u)e^{i\xi u} du | f \in L^2([0, \infty), du)\}$ で稠密になる (Lax の定理)。ここから (1) の類似 (H を H 、 B を B で置き換えたもの) が得られ、結局、 $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ は $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ ($X(t) = e^{-it}$) の innovation と見なされる。(2) の積分核 C は $C(u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi u} h(\xi) d\xi$ で与えられる。実際、 $h = \int_0^{\infty} C(u)e^{i\xi u} du$ だから

$e^{-it} = h^{-1} \int_{-\infty}^t C(t-u)e^{-iu} du$ であり、これは、 $X(t) = \int_{-\infty}^t C(t-u)dB(u)$ 、従って、(2) を意味する。

もう一つのアプローチは、 $E[X(t)|X(s) : -\infty < s \leq 0] (t > 0)$ を観測データ $\{X(s) | -\infty < s \leq 0\}$ で直接書き下す方法である。そこでは、ラフに言えば、

$$E[X(t)|X(s) : -\infty < s \leq 0] = \int_0^{\infty} K_t(s)X(-s)ds$$

を満たす積分核 K_t を見つけることが問題となる。これもやはり、 H の中で議論した方がよい。実際、 $P_{(-\infty, 0]}X(t) = \int_{-\infty}^0 C(t-u)dB(u) = h^{-1} \int_0^{\infty} C(t+u)e^{iu} du$ だから、問題は、 $\int_0^{\infty} K_t(s)e^{is\xi} ds = h(\xi)^{-1} \int_0^{\infty} C(t+u)e^{iu\xi} du$ を満たす K_t は存在するか？ 積分 $\int_0^{\infty} K_t(s)X(-s)ds$ は H で収束するか？ ということである。一般には、そのような積分核が存在するとは限らないが、 h が「よい性質」を持っているときは、このアプローチで明示的な予測公式が導かれる。

定常時系列も同様に扱える。純非決定性 $\cap_n H_{(-\infty, n]} = \{0\}$ の必要十分条件は、 Δ が Lebesgue 測度に対して絶対連続、かつ、 $\int_{-\pi}^{\pi} \log \Delta'(\theta) d\theta > -\infty$ が成り立つことであり、単位円上の outer Hardy function h を

$$h(z) = \sqrt{2\pi} \exp \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \Delta'(\theta) d\theta \right] \quad (|z| < 1)$$

で導入すれば、上と並行の議論ができる。連続時間の場合と比べて、問題がより簡単になる部分もある。例えば、innovation は、Schmidt の直交化法を用いて、簡単に構成できる： $e_n = x_n - E[x_n | x_k : -\infty < k < n]$ 、 $w_n = e_n / \sqrt{E[|e_n|^2]}$ とおくだけで、白色雑音 $\{w_n : n \in \mathbb{Z}\}$ が得られる。また、二つ目のアプローチで $E[x_n | x_k : -\infty < k \leq 0]$ を $\sum_{k=0}^{\infty} k_{n,k} x_{-k}$ の形で求める問題は、かなり扱い易い。

§3. 有限の過去を用いた予測

有限の過去の履歴 $\{X(s) | -t \leq s \leq 0\} (t > 0)$ から、未来の $X(T) (T > 0)$ に対する予測を求める問題は、無限の過去を用いた場合と比べて、遥かに難しい。この問題は、 H の中で $P_{[-t, 0]}X(T)$ を求める問題として、Kreĭn、Dym、McKean 達により原理的に解決されているが、それについては、例えば、[6] を参照して頂きたい。ここでは、[7] の結果を例に挙げて、それとは別の方法を紹介する。

$(0, \infty)$ 上の有限 Borel 測度 $\sigma (\neq 0)$ を用いて $R(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} d\sigma(\lambda) (t \in \mathbb{R})$ と表現される共分散関数 R を持つ定常過程 X を考える；この性質は、 T -正值性、又は、鏡映正值性と呼ばれる。この X は純非決定性の条件を満たすので、(4) を使って outer function $h \in H^2$ を定義できるが、そのとき、

$$\frac{1}{h(\zeta)} = -i\zeta a + b - i\zeta \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} A(s) ds \right) e^{-i\zeta t} dt \quad (\Im \zeta > 0)$$

を満たす非負定数 a, b と非負関数 A が存在する；特に $\int_t^\infty A(s)ds < \infty$ ($t > 0$)。これは、前節で述べた二つ目のアプローチを適用可能にする h の「よい性質」の好例になっている。実際、 C を X の移動平均表現 (2) の積分核として、

$$P_{(-\infty,0]}X(u) = aC(u)X(0) + \int_0^\infty \left(\int_0^u A(s+v)C(u-v)dv \right) X(-s)ds$$

が、任意の $u > 0$ について成り立つ；右辺の積分は H で絶対収束する。また、(未来からの予測) $P_{[-t,\infty)}X(-t-u)$ に対しても、同様の表現が得られる。

さて、これらの予測公式を交互に使って $\{P_{[-t,\infty)}P_{(-\infty,0]}\}^n X(T)$ ($T > 0$) の $n \rightarrow \infty$ での極限を求めると、 $P_{[-t,0]}X(T)$ に対する次のような表現が導かれる：

$$P_{[-t,0]}X(T) = a\Phi_{T,t}[0]X(0) + \int_0^t \Phi_{T,t}(s)X(-s)ds + a\Phi_{T,t}[t]X(-t).$$

特に、重み関数 $\Phi_{T,t}[0]$ 、 $\Phi_{T,t}(s)$ 、 $\Phi_{T,t}[t]$ は、 A, C で明確に構成される。一般に、 $\{P_{[-t,\infty)}P_{(-\infty,0]}\}^n X(T)$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $X(T)$ の $H_{(-\infty,0]} \cap H_{[-t,\infty)}$ への直交射影に収束する (Von Neumann の定理)。従って、この方法がうまく行く場合は、背後に $H_{[-t,0]} = H_{(-\infty,0]} \cap H_{[-t,\infty)}$ という (必ずしも自明ではない) 関係がある。

予測が明示的に得られるという利点を持つこの方法は、上の様な「よい性質」を備えた outer Hardy function h を持つ定常 (又は、定常増分) 過程に適用される；例えば [1-5] を参照されたい ([3] では、この方法が定常時系列に適用される)。

最後に、ここには述べないが、講演では $\{X(t), t \geq 0\}$ (X の右半分) に対する innovation の構成法など、[7,8] の他の結果も紹介する予定である。

References

- [1] V. Anh and A. Inoue, Prediction of fractional Brownian motion with Hurst index less than 1/2, Bull. Austral. Math. Soc., to appear.
- [2] V. Anh and A. Inoue, Prediction of fractional Brownian motion-type processes with long-range dependence, submitted.
- [3] V. Anh and A. Inoue, Prediction of fractional Brownian motion-type processes: the case $0 < H < 1/2$, submitted.
- [4] V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, Stochastic Anal. Appl., to appear.
- [5] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, submitted.
- [6] Y. Kasahara, Canonical representations of stationary or stationary-increments Gaussian processes, submitted.
- [7] Y. Kasahara, Finite prediction for a stationary process I: Infinitesimal prediction errors, submitted.
- [8] Y. Kasahara, Finite prediction for a stationary process II: Innovation and partial correlation function, submitted.

Transcendence of infinite products of several variables

慶応義塾大学・理工学研究科 立谷 洋平 (Yohei Tachiya)
Department of Mathematics, Keio University

1 Introduction

A complex number α is said to be algebraic if it is root of a non-zero integer polynomial $P(x)$. If an algebraic number α satisfies some monic polynomial equation with rational integer coefficients, we say that α is an algebraic integer. For an algebraic number α , we denote by $|\overline{\alpha}|$ the maximum of the absolute values of its conjugates and by $\text{den}(\alpha)$ the least positive integer such that $\text{den}(\alpha)\alpha$ is an algebraic integer, and define $\|\alpha\| = \max\{|\overline{\alpha}|, \text{den}(\alpha)\}$. Then we have the fundamental inequalities

$$|\alpha| \geq \|\alpha\|^{-2[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]} \quad (1)$$

for a nonzero algebraic α . A complex number that is not algebraic is called transcendental. In 1844, Liouville gave the first example of transcendental number, which was $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$. In the case of infinite products, we have the following;

Theorem 1. *Let α be an algebraic number with $0 < |\alpha| < 1$ and $\{e_k\}_{k \geq 1}$ be a sequence of positive integers satisfying $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_1 + \dots + e_k}{e_{k+1}} = 0$. Then $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha^{e_k})$ is transcendental.*

Theorem 1 can be proved by using the inequality (1). Applying Theorem 1, we see that the numbers $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha^{k!})$, $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha^{2k^2})$, and $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha^{k^k})$ are transcendental for an algebraic number α with $0 < |\alpha| < 1$. On the other hand, Mahler [4] proved the following theorem.

Theorem 2. *Let $r \geq 2$ be a rational integer and α be an algebraic number with $0 < |\alpha| < 1$. Then $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha^{r^k})$ is algebraic if and only if $r = 2$.*

The author [8] generalized Theorem 2 as follows;

Theorem 3. *Let K be an algebraic number field, $r \geq 2$ be an integer, and*

$$\Phi(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k x^{r^k}),$$

where $a_k \in K$ for every k and $\log \|a_k\| = o(r^k)$. Let α be an algebraic number satisfying $0 < |\alpha| < 1$ and $1 + a_k \alpha^{r^k} \neq 0$ ($k \geq 0$). Then $\Phi(\alpha)$ is algebraic if and only if at least one

of the following conditions holds:

(i) $a_n = 0$ for every large n .

(ii) $r = 2$ and there exists a root of unity ω such that $a_n = \omega^{2^n}$ for every large n .

Nishioka [5] proved that the numbers $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha^{r^k})$, $r = 2, 3, 4, \dots$ are algebraically independent for any fixed algebraic number α with $0 < |\alpha| < 1$. Furthermore, Tanaka [7] proved the algebraic independence of the numbers $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha_i^{a_k})$, $i = 1, 2, \dots, n$, for a linear recurrence $\{a_k\}_{k \geq 0}$ and algebraic numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ under some suitable conditions.

Duverney [1] introduced an inductive method to prove the transcendence of the number

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2^k} + b_k},$$

where a ($|a| \geq 2$) is an integer, $\{b_k\}_{k \geq 1}$ is a sequence of integers satisfying $\log|b_k| = o(2^k)$, and $a^{2^k} + b_k \neq 0$ for every $k \geq 1$. Recently, Duverney and Nishioka [2] developed this method and gave a transcendence criterion for general series. As applications, they established necessary and sufficient conditions for transcendence of the following numbers

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{F_{r^k} + b_k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{L_{r^k} + b_k},$$

where $\{a_k\}_{k \geq 0}$ and $\{b_k\}_{k \geq 0}$ are suitable sequences of algebraic numbers, and F_n and L_n are Fibonacci numbers and Lucas numbers defined by $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 0$), $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ ($n \geq 0$), $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, respectively. Recently, Kurosawa [3] generalized Theorem 2 in [2] to several variables case and deduced arithmetical properties of $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{R_{cr^k+d}}$, where $c \geq 1$, d , and $r \geq 2$ are integers and $\{R_n\}_{n \geq 0}$ is binary linear recurrence of integers which has real characteristic roots. Under the same conditions on c , d , and r , the author [8] gave necessary and sufficient conditions for transcendence of the following numbers;

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_k}{F_{cr^k+d}}\right), \quad \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_k}{L_{cr^k+d}}\right),$$

where $\{a_n\}_{n \geq 0}$ is sequence of algebraic numbers with $\log ||a_k|| = o(r^k)$.

2 Theorems

Let K be an algebraic number field, O_K be the ring of integers in K . Let $r \geq 2$ and $L \geq 1$ be integers and $K[z] = K[z_1, \dots, z_m]$ be the polynomial ring in m variables z_1, \dots, z_m with coefficients in K . We define a transformation $\Omega_n z = (z_1^{r^n}, \dots, z_m^{r^n})$ for $z = (z_1, \dots, z_m)$

and $z^\lambda = \prod_{i=1}^m z_i^{\lambda_i}$, $|\lambda| = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ for $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ with nonnegative integer entries. Let

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(\Omega_k z)}{F_k(\Omega_k z)},$$

where

$$E_k(z) = 1 + \sum_{1 \leq |\lambda| \leq L} a_{k\lambda} z^\lambda, \quad F_k(z) = 1 + \sum_{1 \leq |\lambda| \leq L} b_{k\lambda} z^\lambda \in K[z]$$

with $\log \|a_{k\lambda}\|, \log \|b_{k\lambda}\| = o(r^k)$, $1 \leq |\lambda| \leq L$. Suppose that $r(\sqrt[m]{2} - 1) > 1$ and there exists a positive integer D with $DF_k(z) \in O_K[z]$ ($k \geq 0$). Then for an algebraic point $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (K^\times)^m$ such that the absolute values $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_m|$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) are multiplicatively independent, we prove the following;

Theorem 4. $\Phi_0(\alpha)$ is algebraic if and only if $\Phi_0(z)$ is a rational function with coefficient in K , provided that $E_k(\Omega_k \alpha)F_k(\Omega_k \alpha) \neq 0$ ($k \geq 0$).

As applications, we obtain the following results. We denote by \mathbb{Q} and $\overline{\mathbb{Q}}$ the field of rational and algebraic numbers, respectively.

Theorem 5. Let $r \geq 2$ and $m \geq 1$ be integers with $r(\sqrt[m]{2} - 1) > 1$ and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (K^\times)^m$ be an algebraic point such that $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_m|$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) are multiplicatively independent. Let $\{a_{ki}\}_{k \geq 0}$ and $\{b_{ki}\}_{k \geq 0}$ be sequences in K and in O_K , respectively, satisfying $\log \|a_{ki}\|, \log \|b_{ki}\| = o(r^k)$ ($1 \leq i \leq m$) and let

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + a_{k1}z_1^{r^k} + \dots + a_{km}z_m^{r^k}}{1 + b_{k1}z_1^{r^k} + \dots + b_{km}z_m^{r^k}} \right),$$

where $\sum_{i=1}^m a_{ki}\alpha_i^{r^k}, \sum_{i=1}^m b_{ki}\alpha_i^{r^k} \neq -1$ ($k \geq 0$). Then $\Phi_0(\alpha)$ is algebraic if and only if at least one of the following cases is satisfied:

- (i) $a_{ni} = b_{ni}$ ($1 \leq i \leq m$) for every large n .
- (ii) $m = 1$, $r = 2$, and there exist roots of unity ω_1, ω_2 such that $a_{n1}, b_{n1} \in \{0, \omega_1^{2^n}, \omega_2^{2^n}\}$ for every large n .

Corollary 1. Let $r \geq 3$, a , and b be integers such that $|a|$ and $|b|$ are multiplicatively independent. Let $\{a_k\}_{k \geq 0}$ and $\{b_k\}_{k \geq 0}$ be sequences of integers satisfying $\log |a_k|, \log |b_k| = o(r^k)$ and $b_k b^{r^k}, a_k + b_k b^{r^k} \neq -a^{r^k}$ ($k \geq 0$). Then

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_k}{a^{r^k} + b_k b^{r^k}} \right)$$

is algebraic if and only if $a_k = 0$ for every large k .

Corollary 1 can be proved easily by applying Theorem 5.

Let a , b , and $c \neq \pm 1$ be integers such that the polynomial $f(x) = x^3 - ax^2 - bx - c$ is irreducible over \mathbb{Q} and has a positive discriminant. We consider the linear recurrence sequence $\{R_n\}_{n \geq 0}$ satisfying

$$R_{n+3} = aR_{n+2} + bR_{n+1} + cR_n, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

where R_0 , R_1 , and R_2 are rational numbers, not all zero.

Theorem 6. *Let $\{R_n\}_{n \geq 0}$ be as in (2), $r \geq 4$ be an integer, and $\{a_k\}_{k \geq 0}$ be a sequence in a fixed algebraic number field K satisfying $a_k \neq -R_{r^k}$ ($k \geq 0$) and $\log ||a_k|| = o(r^k)$. Then*

$$\prod_{\substack{k=0 \\ R_{r^k} \neq 0}}^{\infty} \left(1 + \frac{a_k}{R_{r^k}} \right)$$

is algebraic if and only if $a_n = 0$ for every large n .

Since the polynomial $f(x) = x^3 - x^2 - 2px + p$ with a prime number p is irreducible over \mathbb{Q} and the discriminant $D(f) = p(32p^2 + 13p + 4)$ is positive, we can apply Theorem 6 and obtain

Corollary 2. *Let $p \geq 2$ be a prime number and $\{R_n\}_{n \geq 0}$ be a linear recurrence sequence satisfying*

$$R_{n+3} = R_{n+2} + 2pR_{n+1} - pR_n, \quad n \geq 0$$

with arbitrary given rational numbers R_0 , R_1 , and R_2 , not all zero. Let $r \geq 4$ be an integer and $\{a_k\}_{k \geq 0}$ be as in Theorem 6 satisfying $a_k \neq 0$ for infinitely many k . Then

$$\prod_{\substack{k=0 \\ R_{r^k} \neq 0}}^{\infty} \left(1 + \frac{a_k}{R_{r^k}} \right) \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

References

- [1] D. Duverney, Transcendence of a fast converging series of rational numbers, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **130** (2001), 193–207.
- [2] D. Duverney and K. Nishioka, An inductive method for proving the transcendence of certain series, *ACTA ARITH.* **110.4** (2003), 305–330.
- [3] T. Kurosawa, Arithmetic properties of reciprocal sums of binary recurrence, submitted.

- [4] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* 101 (1929), 342–366.
- [5] K. Nishioka, Algebraic independence by Mahler’s method and S -unit equations, *Compositio Math.* 92 (1994), 87–110.
- [6] K. Nishioka, Mahler Functions and Transcendence, *Lecture Notes in Math.* 1631, Springer, 1996.
- [7] T. Tanaka, Algebraic independence results related to linear recurrences, *Osaka J. Math.* 36 (1999), 203–227.
- [8] Y. Tachiya, Transcendence of certain infinite products, submitted.

超リー群と G 構造

慶應義塾大学 D2 加藤 大典

1 超リー代数と超リー群

超リー代数はリー代数の一般化であると同時に場の量子論、特に超対称性と深い関連を持つが、Kac ([4]) は超リー代数の純代数的研究を始め、有限次元単純超リー代数の完全な分類を行った。それによれば、有限次元単純超リー代数は $A, B, C, D, F, G, P, Q, W, S, \tilde{S}, H$ の 12 の型に分類され、リー代数よりもはるかに豊かな構造を持つ。加えて、超リー代数は「単純であっても Killing 形式が非退化であるとは限らない」という、通常のリー代数にはない性質を持つことも Kac により証明されている。

有限次元リー代数は Lie 対応によって Lie 群論と結びつけられ、それゆえに微分幾何学の発展の大きな原動力となったが、それと対比して、このような豊かな構造を持つ超リー代数に対応するような幾何学はどのようなものであるかということは素朴な疑問であるといつてよいであろう。

それでは、まず超リー代数の定義を述べる。 \mathbb{Z}_2 次数付きベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え、 $v \in V$ に付与された次数を \bar{v} で表すことにする (super vector space)。このような V に対して、次を満たす双線形写像 $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ が与えられているとき、 V を超リー代数と呼ぶ。

$$[v, w] = -(-1)^{\bar{v}\bar{w}}[w, v] \quad v, w \in V \quad (\text{super anti-commutativity})$$

$$[u, [v, w]] + (-1)^{(\bar{u}+\bar{v})\bar{w}}[w, [u, v]] + (-1)^{\bar{u}(\bar{v}+\bar{w})}[v, [w, u]] = 0 \quad u, v, w \in V \quad (\text{super Jacobi Identity})$$

一言、物理的な意義を述べるとするならば、 V_0 の元はボソン、 V_1 の元はフェルミオンと物理で呼ばれるものに対応している。事実、 V_0 の部分だけを取り出すならば、これは通常のリー代数に他ならない。物理で超対称性と呼ばれるものは、数学的には V_0 の元と V_1 の元の括弧積によって定められる対称性と解釈する見方も可能であるように感じられる。

このような超リー代数をリー群の話に持っていくには、リー代数の場合と同様に指数写像を考えればよいが、ここで一つ問題がある。リー代数を交換子積を一般化した概念であるにとらえれば、リー積を考えるということは、一般に可換とは限らない代数の「可換との差」を考えているという見方ができる。超リー代数は V_0 に限れば反可換、 V_1 に限れば可換な代数であるので、これはこのような見方のもとでは V_0 では可換の度合いを、 V_1 では反可換の度合いを計っているということである。

このような考察を正当化するために、超リー代数の対応物である超リー群は、可換な座標と同時に、反可換な座標も持つ非可換多様体として実現される方が望ましいという考え方が出てくる。このような非可換多様体は超多様体と呼ばれるが、まずは(超)可換な超リー代数に対応するものはどのような空間であるかということから始める。 $m|n$ 次元超リー代数 F で、 F の任意の 2 つの元に対してその括弧積が 0 となるものを考える。 $F = F_0 \oplus F_1$ はベクトル空間の直和であるので、 e_1, \dots, e_m が F_0 の基底、 f_1, \dots, f_n が F_1 の基底であるように F の基底 $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$ がとれる。これらの括弧積は全て 0 であることから、 F の対称性が実現されるような「空間」は、次のようなもの

であることを期待したい. すなわち, e_1, \dots, e_m に対応する座標 u_1, \dots, u_m は互いに可換であり, f_1, \dots, f_n に対応する座標 ξ_1, \dots, ξ_n は互いに反可換であり, さらに u_i と ξ_j は可換であることを要請する. このような空間は現時点ではまだ定義されていないのであるが, 以下の記述を簡単にするためにこの仮想的な空間を「 $\mathbb{R}^{m|n}$ 」と呼ぶことにする.

ここで, このような空間上の「関数」としてはどのようなものを考えればよいかということをお考えたいのであるが, 状況を簡単にするために, まずは関数 f が多項式環の場合を考える. \mathbb{R}^{m+n} 上の多項式全体がなす可換 \mathbb{R} 代数 $C^{alg}(\mathbb{R}^{m+n})$ は, 互いに可換な生成子 x_1, \dots, x_{m+n} によって生成される可換 \mathbb{R} 代数 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{m+n}]$ に同型である. 従って, $\mathbb{R}^{m|n}$ の関数環は, 上の交換性を満たす $u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n$ によって生成される非可換 \mathbb{R} 代数 $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n]$ であるとしてもそれほど不自然ではないと考えられる. 反可換性より $(\xi_j)^2 = 0 (j = 1, \dots, n)$ であるため,

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n] \cong \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m] \otimes_{\mathbb{R}} \wedge \mathbb{R}^n$$

である.

以上は多項式環に対する議論であるが, これを C^∞ 関数に拡張するためには $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m] \otimes \wedge \mathbb{R}^n$ に代えて $C^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes \wedge \mathbb{R}^n$ を考えればよいと思われる (反可換な変数に関してはどのみち 2 乗が 0 となるため). そこで, $C^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes \wedge \mathbb{R}^n$ を, $\mathbb{R}^{m|n}$ 上の C^∞ 関数のなす環という気分を込めて $C^\infty(\mathbb{R}^{m|n})$ とかく. また, u_1, \dots, u_m を \mathbb{R}^m の標準座標に関する座標関数, ξ_1, \dots, ξ_n を \mathbb{R}^n の標準基底とすれば, $(u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n)$ は元々の要請を満たすが, このうち u_1, \dots, u_m をボソン座標, ξ_1, \dots, ξ_n をフェルミオン座標と呼ぶ. また, $\mathbb{R}^{m|n}$ は $m|n$ 次元超空間と呼ばれる.

次に非アーベルな超リー代数についての議論であるが, ここでは簡単のために $\mathfrak{sl}(1|1)$ のみを扱う. 同様の方法は殆どの有限次元超リー代数に対し, (計算の困難さを度外視すれば) 特に問題無く適用可能だと思われる.

$\mathfrak{sl}(1|1)$ は超行列を用いれば,

$$\mathfrak{sl}(1|1) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & a \end{array} \right); a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義され, その基底の 1 つとして, $\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\}$ があるが, この基底を用いて対応

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & u \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc} 0 & \xi_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \xi_2 & 0 \end{array} \right)$$

を考えれば, $\mathfrak{sl}(1|1)$ に対応する行列は $\begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix}$ となる (u, ξ_1, ξ_2 は $\mathbb{R}^{1|2}$ の座標). このような対応のさせ方は勿論基底の取り方によるが, その違いはリー代数を考えた上では本質的ではない ([2]).

この $\begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix}$ に対して, $\exp \begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix}$ を

$$\exp \begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix}^k$$

で定義する. この級数は収束して,

$$\exp \begin{pmatrix} u & \xi_1 \\ \xi_2 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u + \frac{e^u}{2} \xi_1 \xi_2 & e^u \xi_1 \\ e^u \xi_2 & e^u - \frac{e^u}{2} \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

となるが、ここで

$$v_1 = e^u + \frac{e^u}{2} \xi_1 \xi_2 \quad v_2 = e^u - \frac{e^u}{2} \xi_1 \xi_2 \quad \eta_1 = e^u \xi_1 \quad \eta_2 = e^u \xi_2$$

とおけば、これは $\mathbb{R}^{1|2}$ の座標 (u, ξ_1, ξ_2) と $\mathbb{R}^{2|2}$ の座標 $(v_1, v_2, \eta_1, \eta_2)$ とを対応付けているとみることができ、従って \exp は $\mathbb{R}^{1|2}$ から $\mathbb{R}^{2|2}$ への「写像」とみることができる。

式 (1) は $\mathbb{R}^{1|2}$ から $\mathbb{R}^{2|2}$ への「写像」を与えるが、 $\mathbb{R}^{2|2}$ を $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{0|2}$ に制限すれば、(1) は u, ξ_1, ξ_2 について解けて \exp の逆変換を与える。但し、 \mathbb{R}^2 を制限するとき v_1 方向を残すか v_2 方向を残すか 2通りの方法があり、(本当はもっとあるが) それによって式の形が違うのであるが、これはどちらも \exp の逆変換であるので、この違いは座標変換に他ならない。

\exp^{-1} は、座標系 (v_1, η_1, η_2) のもとで

$$u = \log(v_1) - \frac{1}{2v_1^2} \eta_1 \eta_2 \quad \xi_1 = \frac{1}{v_1} \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{1}{v_1} \eta_2,$$

座標系 (v_2, η_1, η_2) のもとで

$$u = \log(v_2) + \frac{1}{2v_2^2} \eta_1 \eta_2 \quad \xi_1 = \frac{1}{v_2} \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{1}{v_2} \eta_2$$

であり、したがって座標変換は

$$v_2 = v_1 - \frac{1}{v_1} \eta_1 \eta_2 \quad \bar{\eta}_1 = \frac{1}{v_1} \eta_1 \quad \bar{\eta}_2 = \frac{1}{v_1} \eta_2 \quad (2)$$

である。ここで、 η_1, η_2 と $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ は、指数写像を $\mathbb{R}^{1|2}$ から $\mathbb{R}^{2|2}$ へのはめ込みとみる立場からは同じ座標であるが、超多様体の座標変換としては異なる座標とみている。すなわち (2) は、座標系 (v_1, η_1, η_2) から座標系 $(v_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ への座標変換を書き下したものである。

このように超空間を座標変換を用いて貼り合わせたものが超多様体である。ここで構成された超多様体は、超リー代数 $\mathfrak{sl}(1|1)$ からリー対応を考えることによって得られた超多様体という意味を込めて $SL(1|1)$ と呼ぶ。

注 1 正確には超多様体は実多様体上の環付き空間として定義される ([2], [5]) が、これは代数幾何学における variety の考え方を、多項式の変数として反可換なものを含めるという形で一般化するという発想の延長線上にあるととらえることができる。上で述べた「写像」は従って実際は環付き空間の間の射として定義され厳密には写像ではないが、通常が多様体論における可微分写像と同様の役割を果たすという気分を出すためにあえて「写像」とかいた。

超リー群をリー群の一般化と主張するためには、超リー群に積にあたるような概念が定義されていなければならない。この例では指数写像を用いて座標変換を決めているため、当然「積」としては行列の積として与えられるものを考えなければならない。 $SL(1|1)$ の「積」公式は、座標 (v_1, η_1, η_2) 、 (v'_1, η'_1, η'_2) を用いて (v'_1, η'_1, η'_2) はそれぞれ v_1, η_1, η_2 のコピー)。

$$\begin{aligned} \Delta(v_1) &= v_1 v'_1 + \eta_1 \eta'_2 \\ \Delta(\eta_1) &= v_1 \eta'_1 + \eta_1 v'_1 - \frac{1}{v_1} \eta_1 \eta'_1 \eta'_2 \quad \Delta(\eta_2) = \eta_2 v'_1 + v_1 \eta'_2 - \frac{1}{v_1} \eta_1 \eta_2 \eta'_2 \end{aligned}$$

とかける。但し、

$$(v_1, \eta_1, \eta_2) \times (v'_1, \eta'_1, \eta'_2) = (\Delta(v_1), \Delta(\eta_1), \Delta(\eta_2)) \quad (3)$$

という記法を用いている。

注 2 (3) では簡明を期すために模式的な書き方を採ったが、実際は $C^\infty(SL(1|1))$ が代数として与えられており点集合上の関数という「実質」を持たないために、超リー群の「積」は群の積としては定義できない。そのために厳密な定式化にあたっては積の双対概念であるところの「余積」を用いる。詳しくは [2] を参照されたい。

超リー群と超リー代数との間にもリー対応が成り立つことは Berezin-Kac ([3]) によって証明されたが、具体的な計算が行われたのは筆者の知る限り今回の例が初めてであると思われる。

2 Maurer-Cartan 形式

多様体の接続を定義する 1 つの方法として、主束上の 1 形式として定義するやり方があるが、超多様体上でこのようなものを考えるためには「微分形式」の概念が定義されている必要がある。ここでも引き続き $SL(1|1)$ の場合を主に扱う。

$C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ 上の「1 形式」は形式的な生成子 $dv_1, d\eta_1, d\eta_2$ が生成する自由 $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ 加群 $\Omega^{1|0}(\mathbb{R}^{1|2})$ の元として定義される。座標変換から誘導される 1 形式の変換は通常の場合と同様に、

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial v_2} dv_2 + \frac{\partial v_1}{\partial \eta_1} d\eta_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \eta_2} d\eta_2$$

($d\bar{\eta}_1, d\bar{\eta}_2$ についても同様) などと定める。ここでボソン座標による微分 $\frac{\partial}{\partial v_2}$ は通常の微分を考えればよいが (但し η_1, η_2 は無視する)、フェルミオン座標による微分 $\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_2}$ には注意が必要である。可換な場合の素朴な一般化として、 $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ たちにも η_i とぶつかると 1 になるように要求するのであるが、 $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ は非可換代数であるので、どこでぶつかって 1 になるかによって不定性が出てくる。そこでここでは、微分 $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ は、各項の一番左側にある状態の η_i とぶつかって 1 になるという定義を採用する。(ぶつかるべき η_i が無ければ 0 になると定義する。) このような微分を左微分ということもある。

これで微分が定義できたので、 $SL(1|1)$ について 1 形式の変換を計算すると

$$dv_2 = dv_1 + \frac{1}{v_1} \eta_2 d\eta_1 - \frac{1}{v_1} \eta_1 d\eta_2 \quad d\bar{\eta}_1 = -\frac{1}{v_1^2} \eta_1 dv_1 + \frac{1}{v_1} d\eta_1 \quad d\bar{\eta}_2 = -\frac{1}{v_1^2} \eta_2 dv_1 + \frac{1}{v_1} d\eta_2$$

となる。

ここで、元の指数写像の定義に戻れば、 $SL(1|1)$ は $C^\infty(\mathbb{R}^{1|2})$ 係数の 2 次正方行列とみることが出来る。この行列を X として、行列値の 1 形式 $\alpha := X^{-1} \cdot dX$ を考えれば、

$$\alpha = \begin{pmatrix} du - \frac{1}{2} \xi_2 d\xi_1 - \frac{1}{2} \xi_1 d\xi_2 & d\xi_1 \\ d\xi_2 & du - \frac{1}{2} \xi_2 d\xi_1 - \frac{1}{2} \xi_1 d\xi_2 \end{pmatrix}$$

これは $SL(1|1)$ の Maurer-Cartan 形式に対応するものと考えて問題はないように思われる。これを座標系 (v_1, η_1, η_2) または座標系 $(v_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ を用いた表式に書き換えることは容易である。

3 これからの展望

任意の超多様体はその基礎多様体の上のベクトル束の構造を持つことが Batchelor([1]) により証明されており、そのため超多様体論はベクトル束の幾何学と解釈することもできる。このような解釈のもとでは、超リー群を考えるということは、「リー群より広い、しかしある意味で結合性と可逆性のようなものを持った対称性」を持つベクトル束を扱うという立場も取ることができる。このような立

場からみた具体的な応用例は未だ知られていないようであるが、第1節で少し述べたように、超リー代数は超対称性と深い関係を持つ代数であるために、そこから誘導される対称性を持つ超リー群を研究することは「超対称性」という概念の数学的意味を考察する上でも重要であるように感ぜられる。そのような観点のもとでは、超リー群の多様体や超多様体への作用や、等質空間の「超多様体版」の構造は興味深い問題であるように思われる。

一方、カルタン幾何の考え方をを用い、一般の超多様体について曲率などの微分不変量を定義することが出来るが、これは次に述べるような意味でも興味深い不変量であると思われる。通常の多様体 M に対してその微分構造から決まるベクトル・バンドル（例えば接バンドルなど）を考えれば、その外積バンドルに超多様体の構造を持たせることが出来る。この超多様体としての曲率は、超多様体としての微分不変量であると同時に、 M を通常の多様体としてみたときの不変量ともなっている。このような不変量が通常の超多様体論からみたときに意味のある不変量であるかどうかは未知数であるが、超多様体の特質により、こうして定義された曲率は多様体 M に関して通常の曲率より高階の微分を含むため、より多くの情報を持つ不変量であるということが期待される。

参考文献

- [1] M. Batchelor, The structure of supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **253** (1979) 329–338.
- [2] F. A. Berezin, *Introduction to superanalysis*, Mathematical Physics and Applied Mathematics **9**, Reidel, 1987.
- [3] F. A. Berezin, G. I. Kac, Lie groups with commuting and anticommuting parameters (Russian), *Mat. Sbornik (Novaya Seriya)* **82** (1970) 343–359.
- [4] V. G. Kac, Lie superalgebras, *Adv. Math.*, **26** (1977) 8–96.
- [5] D. A. Leites, Introduction to the theory of supermanifolds, *Russ. Math. Surveys* **35** (1980) 3–64.

広いクラスの摂動に対する Agmon-Kato-Kuroda 定理について

学習院大学理学部数学科
須子淳一

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 H_0, H を $H_0 := -\Delta, H := H_0 + L$ とおく. ここで $\Delta := \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. どのような摂動 L に対して波動作用素 $s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$ が存在し完全となるかという問題について Ionescu and Schlag[2] の結果 (定理 4) を紹介する.

波動作用素が完全とは $Range(W_{\mp}) = Range(P_{ac}(H))$ となること. ここで $Range(W_{\mp})$ は W_{\mp} の値域, $P_{ac}(H)$ は H の絶対連続部分空間 $L^2(\mathbb{R}^d)_{ac}(H)$ への射影作用素とした. 絶対連続部分空間とは $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ を H のスペクトル分解とし, 測度 ρ_u を \mathbb{R} のボレル集合 B に対して $\rho_u(B) = (E(B)u, u)$ と定義すると,

$$L^2(\mathbb{R}^d)_{ac}(H) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \rho_u \text{ は Lebesgue 測度に関して絶対連続}\}$$

のこと. また特異連続部分空間 $L^2(\mathbb{R}^d)_{sc}(H)$ を

$$L^2(\mathbb{R}^d)_{sc}(H) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \rho_u \text{ は Lebesgue 測度に関して特異連続}\}$$

と定義すると $L^2(\mathbb{R}^d)_{ac}(H), L^2(\mathbb{R}^d)_{sc}(H)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間になる. また H の絶対連続スペクトル $\sigma_{ac}(H)$, 特異連続スペクトル $\sigma_{sc}(H)$ を

$$\sigma_{ac}(H) := \sigma(H \upharpoonright L^2(\mathbb{R}^d)_{ac}(H))$$

$$\sigma_{sc}(H) := \sigma(H \upharpoonright L^2(\mathbb{R}^d)_{sc}(H))$$

と定義する. ここで $\sigma(H)$ は H のスペクトルとした. $H \upharpoonright A$ は H の A への制限とした. 波動作用素の存在と完全性については次の Agmon[1] の結果 (定理 1) が 1970 年に示されている.

定理 1. $H = -\Delta + V$ とする. $V(x) = (1+x^2)^{-1/2-\epsilon} W(x)$ であり W は H_0 に対して相対コンパクトとすると波動作用素 $s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$ は存在して完全.

ここで $L^{p,\sigma}(\mathbb{R}) := \{f : \|f\|_{L^{p,\sigma}} := \|(1+x)^\sigma f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \infty\}$. W が H_0 に相対的にコンパクトであるとは $Domain(W) \supset Domain(H_0)$ であり, $u_n \in Domain(H_0)$ かつ $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{H_0 u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば $\{W u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束部分列を持つという条件を満たすこと. 定理 1 はつぎの極限吸収原理

定理 2. $\lambda_0 > 0, \sigma > 1/2$

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0, \epsilon > 0} \|(H - (\lambda + i\epsilon))^{-1}\|_{L^{2,\sigma} \rightarrow L^{2,-\sigma}} \leq C(V, \lambda_0)$$

に帰着される. この極限吸収原理は trace-lemma

定理 3. $\sigma > 1/2$ に対して

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C \|f\|_{L^{2,\sigma}(\mathbb{R}^d)}$$

を使って証明される. ここで $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$.

2004年に Ionescu and Schlag[2] は admissible perturbation と呼ばれるより広いクラスの摂動に対して波動作用素の存在と完全性を示した (定理 4) .

$$D_j = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [2^{j-1}, 2^j]\}, j \geq 1, D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [0, 1]\},$$

とおき, バナッハ空間 B, B^* を

$$B := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_B := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} \|f\|_{L^2(D_j)} < \infty\},$$

$$B^* := \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|u\|_{B^*} := \sup_{j \geq 0} 2^{-j/2} \|u\|_{L^2(D_j)}\},$$

と定義する.

ソボレフ空間 $W^{\alpha,p}$ を

$$S_\alpha : S'(\mathbb{R}^d) \rightarrow S'(\mathbb{R}^d), S_\alpha = (1 - \Delta)^{\alpha/2},$$

$$W^{\alpha,p} := \{u \in S'(\mathbb{R}^d) : S_\alpha u \in L^p\}, \|u\|_{W^{\alpha,p}} := \|S_\alpha u\|_{L^p},$$

と定義する. $S'(\mathbb{R}^d)$ は \mathbb{R}^d 上の急減少関数の空間.

$p_d := (2d+2)/(d+3), p'_d := (2d+2)/(d-1)$ とおき, 極限吸収原理 (定理 4(d)) で扱うバナッハ空間 X, X^* を

$$X := W^{-1/(d+1), p_d} + S_1(B), \|f\|_X := \inf_{f_1+f_2=f} (\|S_{-1/(d+1)} f_1\|_{L^2} + \|S_{-1} f_2\|_B),$$

$$X^* := W^{1/(d+1), p'_d} \cap S_{-1}(B^*), \|u\|_{X^*} := \max(\|S_{-1/(d+1)} u\|_{L^{p'_d}}, \|S_{-1} u\|_{B^*}),$$

と定義する.

定義 1. L が admissible perturbation であるとは以下の条件を満たすこと.

(1) $\mathcal{L}(X^*, X)$ を X から X^* への有界線型作用素のなす空間とすると $L \in \mathcal{L}(X^*, X)$ であり任意の $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \overline{\langle L\psi, \phi \rangle}.$$

(2) 任意の $\epsilon > 0, N \geq 0$ に対して $A_{N,\epsilon}, R_{N,\epsilon} \in [1, \infty)$ が存在し $u \in X^*, \gamma \in (0, 1]$

$$\|\mu_{N,\gamma} Lu\|_X \leq \epsilon \|\mu_{N,\gamma} u\|_{X^*} + A_{N,\epsilon} \|u \mathbf{1}_{\{|x| \leq R_{N,\epsilon}\}}\|_{L^2}$$

ここで $\mu_{N,\gamma}(x) = \frac{(1+|x|^2)^N}{(1+\gamma|x|^2)^N}, \mathbf{1}_E$ は E の定義関数とする.

(3) 任意の整数 $J \geq 1$ に対して $A_j, B_j \in \mathcal{L}(X^*, L^2)$, $1 \leq j \leq J$ が存在して

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \sum_{j=1}^J \langle B_j\phi, A_j\psi \rangle$$

となる. さらに任意の $1 \leq j \leq J$ に対し A_j, B_j は L^2 上の非有界作用素と考えると

$$\text{Domain}(A_j) \supset W^{1,2}(\mathbb{R}^d), \text{Domain}(B_j) \supset W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$$

となる定義域上の閉作用素となっている.

定理 4. L を *admissible perturbation*, $H = -\Delta + L$ とする.

(a) H は

$$\text{Domain}(H) = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) : Hu \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

上の自己共役作用素となる.

(b) σ_{pp} は H の固有値とする. 非零固有値 $\mathcal{E} = \sigma_{pp} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ の離散集合. さらに非零固有値の重複度は有限.

(c) H の 0 以外の固有値に対する固有ベクトル u について任意の整数 $N \geq 0$ に対して

$$(1 + |x|^2)^N \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$$

(d) $I \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \mathcal{E}$ はコンパクトとすると

$$\sup_{|\lambda| \in I, \epsilon \in [-1, 1] \setminus \{0\}} \|(H - (\lambda + i\epsilon))^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C(L, I) < \infty$$

(e) H の特異連続スペクトル $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$. H の絶対連続スペクトル $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$

(f) 波動作用素 $s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$ は存在して完全.

Ionescu and Schlag は新しい極限吸収原理 (定理 4(d)) を使って波動作用素の存在と完全性を証明した. この極限吸収原理は Stein-Tomas 制限定理

定理 5. $p_d = (2d + 2)/(d + 3)$, $d \geq 2$ に対して

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C \|f\|_{L^{p_d}(\mathbb{R}^d)}$$

に関係した調和解析の技法 [3] を使って証明される.

参考文献

- [1] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci(4)2(1975), 151-218
- [2] A.D. Ionescu and W. Schlag, Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations, Preprint(2004).
- [3] E.M. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Mathematical Series, 71, Princeton, NJ(1993).

Propagation of Singularities for Non-linear Wave Equations

Shingo Ito

(Science University of Tokyo D1)

We consider the propagation of singularities for the following semilinear wave equation,

$$\square u = f(u)\{(\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2\} + g(u)\partial_t u + \sum_{j=1}^{n-1} g_j(u)\partial_j u + h(u), \quad (1)$$

where

$$(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}, \quad \square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$f, g, g_i, h \in C^\infty \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Here, right hand side satisfies the null condition(Def 1.4). We first introduce some notation.

Definition 1.1 We say that a subset K of $\mathbf{R}_x^n \times (\mathbf{R}_\xi^n \setminus \{0\})$ is a conic set if $(x, \xi) \in K$ implies that $(x, t\xi) \in K$ for any $t > 0$. We call u is in $H_{ml}^r(x_0, \xi_0)$ if there exists a smooth function $\phi(x)$ supported near x_0 with $\phi(x_0) = 1$ and a conic neighborhood K of ξ_0 in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ such that

$$\langle \xi \rangle^\tau \chi_K(\xi) |\widehat{\phi u}(\xi)| \in L^2(\mathbf{R}^n) \quad (2)$$

where $\chi_K(\xi)$ is the characteristic function of K and $\langle \xi \rangle = (1 + \sum \xi_i^2)^{1/2}$.

If Γ is a closed conic set in $\mathbf{R}_x^n \times (\mathbf{R}_\xi^n \setminus \{0\})$ (that is, conic in the ξ variables), we shall say that $u \in H_{ml}^r(\Gamma)$ if $u \in H_{ml}^r(x, \xi)$ for all $(x, \xi) \in \Gamma$.

Definition 1.2 Let $p(x, \xi)$ is a characteristic polynomial of differential operator P . The curves $x(s), \xi(s)$ are bicharacteristics if

$$\frac{dx_j}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x(s), \xi(s)), \quad \frac{d\xi_j}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}(x(s), \xi(s)) \quad (j = 1, \dots, n.) \quad (3)$$

Since $\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) p = 0$ we see that p is constant on each of these curves

; one on which p vanishes is called a null-bicharacteristic of p .

example 1.3 We consider the null bicharacteristic of \square , with symbol $\tau^2 - \xi^2$. The null bicharacteristic through the point $(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ with $|\tau_0| = \pm |\xi_0| \neq 0$ is the straight line

$$\Gamma = \{(t, x, \tau_0, \xi_0) : x = x_0 - (\xi_0/\tau_0)t\}. \quad (4)$$

Definition 1.4 Let $F(u, v, w)$ a real valued function in the variables

$$(u, v, w) = (u, v_1, \dots, v_n, w_{1,1}, \dots, w_{i,j}, \dots, w_{n,n})$$

with $i \leq j$ running from 1 to n , smoothly defined in a neighborhood of origin in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$. We say that $F(u, u', u'')$ (where u', u'' denote the first and second partial derivatives of u) satisfies the null condition if, for any $X = (X_1, \dots, X_n)$ such that $X_1^2 - \sum_{i=2}^n X_i^2 = 0$, the following identities hold

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j} X_i X_j = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ j \leq k}}^n \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial w_{i,j}} X_i X_j X_k = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \leq j, k \leq l}}^n \frac{\partial^2 F}{\partial w_{i,j} \partial w_{k,l}} X_i X_j X_k X_l = 0. \quad (7)$$

In [2] Beals proved that following theorem for propagation of singularities in the sense of micro local Sobolev spaces.

Theorem 1.5 (Beals) Suppose that U is an neighborhood of x_0 , f is C^∞ , and that $u \in H^s(U)$, $s > n/2$, satisfies

$$\square u = f(u). \quad (8)$$

Let Γ denote a null bicharacteristic for \square and suppose that $u \in H^s \cap H_{ml}^r(x_0, \xi_0)$ for some (x_0, ξ_0) on Γ . Then $u \in H^s \cap H_{ml}^r(\Gamma)$ if $r < 3s - n + 1$.

This proof is a bootstrap argument which uses Hormander's propagation of singularities theorem for the linear operator \square . Moreover in [2] Beals proved that following theorem about $\square u = f(u, Du)$.

Theorem 1.6 (Beals) Suppose that U is an neighborhood of x_0 , f is C^∞ , and that $u \in H^s(U)$, $s > n/2 + 1$, satisfies

$$\square u = f(u, Du). \quad (9)$$

Let Γ denote a null bicharacteristic for \square and suppose that

$$u \in H^s \cap H_{ml}^r(x_0, \xi_0) \text{ for some point } (x_0, \xi_0) \text{ on } \Gamma.$$

Then $u \in H^s \cap H_{ml}^r(\Gamma)$ for $r < 3s - n - 2$.

In section 2, we give an improvement of theorem 1.6 about condition of s , r for the equation (1).

2. Propagation of singularities for (1)

Theorem 2.1 Suppose that U is an neighborhood of x_0 and f, g is C^∞ . Suppose that $u \in H^s(U)$, $s > n/2$, satisfies

$$\square u = f(u)\{(\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2\} + g(u)\partial_t u + \sum_{j=1}^{n-1} g_j(u)\partial_j u + h(u),$$

Let Γ denote a null bicharacteristic for \square and suppose that

$$u \in H_{ml}^r(x_0, \xi_0) \text{ for some point } (x_0, \xi_0) \text{ on } \Gamma,$$

then $u \in H_{ml}^r(\Gamma)$ for $n/2 < s \leq r \leq 2s - n/2$.

Remark When $n/2 < s \leq n/2 + 2$ this theorem is better than theorem 1. about condition of s, r .

References

- [1] M. Beals, and M. Reed, *Propagation of singularities for hyperbolic pseudodifferential operators with non-smooth coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. 35, 1982, pp. 169-184.

- [2] M. Beals, *Propagation of Smoothness for Nonlinear Second-Order Strictly Hyperbolic Differential Equations*, Proc. Symp. Pure. Math. 43, 1985, pp. 21-44.
- [3] J.M.Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlineaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 14, 1981, pp. 209-246
- [4] L. Hörmander, *On the Existence and the Regularity of Solutions of Linear Pseudo-Differential Equations*, Enseignement Math. 17, 1971, pp. 99-163.
- [5] _____, *Linear differential operators*, Actes. Congr. Inter. Math. Nice 1, 1970, 121-133.
- [6] S.Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Non-linear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1, 293-326, Lectures in Appl. Math., 23.
- [7] Y. Meyer, *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Sem. Bourbaki, no.560, 1979-1980
- [8] L. Nirenberg, *Lectures on Linear Partial Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser.in Math.17, Amer. Math. Soc. Providence, RT.I.1973
- [9] J. Rauch, *Singularities of solutions to semilinear wave equations*, J. Math. Pures et Appl.58,1979, pp. 299–308
- [10] J. Rauch, and M. Reed, *Propagation of singularities for semilinear hyperbolic systems in one space variable*, Ann. of. Math. (2), 1980, pp. 531-552.
- [11] M. Reed, *Propagation of Singularities for Nonlinear Wave Equations in One Dimension*, Comm. P.D.E, (3), 1978, pp. 153-199.
- [12] M.Taylor, *Pseudo-Differential Operators*, Lecture Notes in Math, Vol.416, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.

3 次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面について

神戸大学大学院自然科学研究科 D2 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
Department of Mathematics, Kobe University

$M \subset \mathbb{C}$ を単連結 Riemann 面, $z_0 \in M$ とする. M 上の有理型関数 g と M 上の正則 1 次微分形式 ω に対して, g の極と ω の零点が一致し, ω の零点の位数が対応する g の極の位数の 2 倍に等しいとする. このとき, $F = (F_{jk}) : M \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ を

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすはめ込みとすると, $\hat{f} := FF^* : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は 3 次元双曲空間 \mathbb{H}^3 内の平均曲率 1 (CMC 1) のはめ込みになる (Bryant の表現公式 [B, UY1]). ただし $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3(-1) \cong \{AA^* ; A \in SL(2, \mathbb{C})\}$ とみなす. 一方, M の各点 z で $|g(z)| > 1$ とし,

$$f := FeF^* : M \rightarrow \mathbb{S}_1^3, \quad e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと, f は 3 次元 de Sitter 空間 \mathbb{S}_1^3 内の空間的 CMC 1 はめ込みになる (相山・芥川の表現公式 [AA]). ただし $\mathbb{S}_1^3 = \mathbb{S}_1^3(1) \cong \{AeA^* ; A \in SL(2, \mathbb{C})\}$ とみなす.

f, \hat{f} による誘導計量 $ds^2, d\hat{s}^2$ はそれぞれ

$$ds^2 = f^* \left(ds_{\mathbb{S}_1^3}^2 \right) = (1 - g\bar{g})^2 \omega\bar{\omega}, \quad d\hat{s}^2 = \hat{f}^* \left(ds_{\mathbb{H}^3}^2 \right) = (1 + g\bar{g})^2 \omega\bar{\omega}$$

で与えられる. また, f, \hat{f} の Hopf 微分 Q , 双曲的 Gauss 写像 G はともに

$$Q = \omega dg, \quad G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}$$

で与えられる. 対 (g, ω) は Weierstrass data, g は第 2 Gauss 写像と呼ばれる.

\mathbb{H}^3 内の CMC 1 はめ込みは, 上述の Bryant の表現公式を用いて, 梅原雅顕氏, 山田光太郎氏らを中心として多くの研究者によって研究されてきた. 特に完備かつ有限全曲率を持つ曲面に関しては, その大域的な性質についても調べられている. 大域的な性質のうち重要なものの 1 つとして, Osserman 型の不等式

$$2 \deg(G) \geq -\chi(M) + (\text{エンドの数})$$

が成り立つ [UY2] ([UY2] ではさらに, 等号が成り立つことと, G が各エンドに有理型に拡張され, かつ各エンドが自己交叉しないことが同値であることも示されている. [UY1] も参照).

一方, \mathbb{S}_1^3 内の完備な空間的 CMC 1 はめ込みは平坦かつ全臍的なものに限られることが知られている [Ak, R]. そこで, ある種の特異点を許容した新しい曲面のクラスを考える.

本講演の内容は, Wayne Rossman 氏 (神戸大学), 梅原雅顕氏 (大阪大学), 山田光太郎氏 (九州大学), Seong-Deog Yang 氏 (Korea University) との共同研究の成果による.

まず, 以下の定義を与える ([UY3, F] 参照).

定義 1. M を 2 次元多様体, $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ を滑らかな写像とする. $ds^2 = f^*(ds_{\mathbb{S}_1^3}^2)$ とおく. 次の (1)-(3) を満たす f を *CMC 1 face* と呼ぶ.

- (1) 稠密な開集合 $W \subset M$ が存在して, $f|_W: W \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ は CMC 1 はめ込み,
- (2) C^1 級関数 $\beta: W \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在して, βds^2 は M 上の C^1 級 Riemann 計量に拡張される,
- (3) M の各点 p で $df(p) \neq 0$.

CMC 1 face $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ は, はめ込みではないから, f による誘導計量から M に複素構造を入れることはできない. しかし, 次の命題が成り立つ:

命題 2. ([F]) M を向き付け可能な 2 次元多様体とする. $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ を CMC 1 face とし, $W \subset M$ を $f|_W$ が CMC 1 はめ込みとなるような稠密な開集合とする. このとき, 次の (1)-(2) を満たす M 上の複素構造 J が存在する:

- (1) $f|_W$ は J に関して共形的である,
- (2) J に関して正則なはめ込み $F: \widetilde{M} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ が存在して

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega \quad \text{かつ} \quad f \circ \varrho = Fe_3F^*,$$

を満たす. 但し, g は \widetilde{M} 上の有理型関数 ($|g| \neq 1$), ω は \widetilde{M} 上の正則 1 次微分形式, $\varrho: \widetilde{M} \rightarrow M$ は M の普遍被覆とする (この F は f の正則零持ち上げと呼ばれる).

この命題により, CMC 1 face $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ の M は常に複素構造を持つことがわかる. 以下本稿では, この命題によって誘導される複素構造を用いることで, M を Riemann 面とみなすことにする.

特異点は, $|g| = 1$ を満たす点に対応する.

定義 3. 写像

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$$

による u 軸の像を *cuspidal edge* という. また, 写像

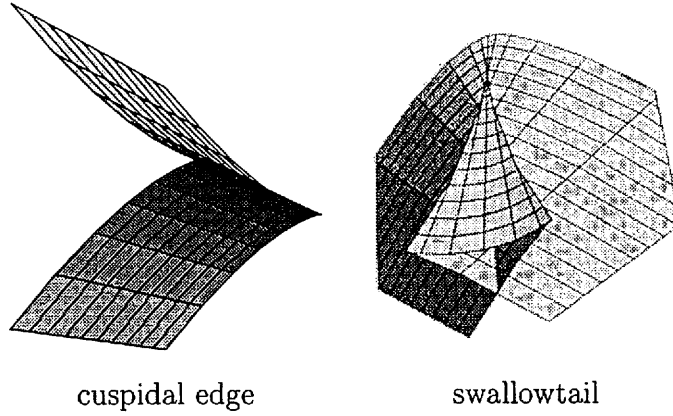
$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v) \in \mathbb{R}^3$$

による原点の像を *swallowtail* と呼ぶ.

CMC 1 face の特異点の形状に関して, 以下の結果を得た.

定理 4. ([FRUY]) $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ を CMC 1 face とし, $(g, \omega = \hat{\omega}dz)$ をその Weierstrass data とする. $\hat{\theta} := g^2\hat{\omega}$ とおく. このとき, 次の (1)-(3) が成り立つ:

- (1) $z \in M$ が特異点となるための必要十分条件は $|\hat{\omega}(z)| = |\hat{\theta}(z)|$ が成り立つことである.



- (2) 特異点 z の近傍の像が cuspidal edge と局所微分同相であるための必要十分条件は, 点 z において

$$\hat{\omega}'\hat{\theta} - \hat{\theta}'\hat{\omega} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{Im} \left(\frac{(\hat{\theta}'/\hat{\theta}) - (\hat{\omega}'/\hat{\omega})}{\sqrt{\hat{\omega}\hat{\theta}}} \right) \neq 0$$

が成り立つことである. 但し, $' = d/dz$ とする.

- (3) 特異点 z の近傍の像が swallowtail と局所微分同相であるための必要十分条件は, 点 z において

$$\hat{\omega}'\hat{\theta} - \hat{\theta}'\hat{\omega} \neq 0, \quad \text{Im} \left(\frac{(\hat{\theta}'/\hat{\theta}) - (\hat{\omega}'/\hat{\omega})}{\sqrt{\hat{\omega}\hat{\theta}}} \right) = 0, \quad \text{Re} \left(\frac{s(\hat{\theta}) - s(\hat{\omega})}{\hat{\omega}\hat{\theta}} \right) \neq 0$$

が成り立つことである. 但し, $s(\hat{\omega}) = (\hat{\omega}'/\hat{\omega})' - (\hat{\omega}'/\hat{\omega})^2/2$ とする.

証明の概略 まず, f の第 2 Gauss 写像 g の微分 dg が特異点において零でなければ, その特異点の近傍で f はフロント (即ち, f はある Legendre はめ込み $L: M \rightarrow P(T^*S_1^3)$ の S_1^3 への射影) となることを, 具体的に L を構成することにより示す. そして [KRSUY, Proposition 1.3] を適用する ([UY3, Theorem 3.1] の証明も参照). \square

系 5. CMC 1 face の特異点は, ジェネリックには cuspidal edge か swallowtail になる.

次に CMC 1 face の大域的な性質を調べるため, 以下の定義を与える ([KUY, UY3, F] 参照).

定義 6. CMC 1 face $f: M \rightarrow S_1^3$ が完備である (resp. 有限型である) とは, コンパクト集合 $C \subset M$ と M 上の対称な $(0,2)$ テンソル T が存在して, $M \setminus C$ 上 T は恒等的に 0 かつ $ds^2 + T$ が M の完備 (resp. 有限全曲率を持つ) Riemann 計量になっていることである.

以下, $f: M \rightarrow S_1^3$ は完備な CMC 1 face とする. このとき, CMC 1 face の Gauss 曲率の非負性に注意すると, [H] より M はコンパクト Riemann 面 \bar{M} から有限個の

点 p_1, \dots, p_n を除いたものと双正則となることが導かれる. 除いた点 p_1, \dots, p_n は CMC 1 face のエンドに対応している.

$F\widetilde{M} \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ を f の正則零持ち上げとする. $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を M 上の閉曲線とする. τ を \widetilde{M} の γ に関するデッキ変換とする. このとき, F のモノドロミー Φ_γ は

$$F \circ \tau = F \Phi_\gamma$$

で与えられる. 今, $f = Fe_3F^*$ は M 上 well-defined であるから, 任意の閉曲線 γ に対して $\Phi_\gamma \in SU(1, 1)$ が成り立つ. 故に Φ_γ は次のいずれか 1 つと相似である:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \pm \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

但し $\theta \in [0, 2\pi)$ かつ $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

定義 7. $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とし, F をその正則零持ち上げとする. f のエンドは, そのエンドのモノドロミーが \mathcal{E} と相似のとき **楕円型エンド**, \mathcal{H} と相似のとき **双曲型エンド**, \mathcal{P} と相似のとき **放物型エンド**と呼ばれる.

注意 8. $SU(1, 1)$ の任意の行列

$$X = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in SU(1, 1)$$

は, 対応 $\mathbb{H}^2 \ni w \mapsto (pw + q)/(\bar{q}w + \bar{p}) \in \mathbb{H}^2$ によって Poincaré 円盤 $\mathbb{H}^2 = (\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}, ds_{\mathbb{H}^2}^2 = 4dw d\bar{w}/(1 - |w|^2)^2)$ に等長的に作用する. X による固定点が, \mathbb{H}^2 内に 1 点のみあるとき X は楕円型, \mathbb{H}^2 内には無く $\partial\mathbb{H}^2$ 上に 2 点あるとき双曲型, \mathbb{H}^2 内には無く $\partial\mathbb{H}^2$ 上に 1 点あるとき放物型と呼ばれている. 定義 7 の用語はこのことに由来している.

エンドの挙動について調べたところ, 双曲型や放物型のエンドは, 特異点のエンドに集積することが分かった. 即ち, 完備な CMC 1 face に関して以下の定理を得た:

定理 9. ([FRUY]) 完備な CMC 1 face のエンドは全て楕円型である.

この結果を [F, Theorem 3.9] に適用すると, 次の命題を得る.

命題 10. (Osserman 型不等式 [F]) $f: M = \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ を完備かつ有限型の CMC 1 face とする. G を f の双曲的 Gauss 写像とする. このとき,

$$2 \deg(G) \geq -\chi(M) + n$$

が成り立つ. さらに, 等号が成り立つための必要十分条件は, G が各エンドに有理型に拡張され, かつ各エンドが自己交叉しないことである.

参考文献

- [AA] R. Aiyama and K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $H^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$* , Ann. Global Anal. Geom. **17** (1998), 49–75.
- [Ak] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, **196** (1987), 13–19.
- [BF] Ch. Blanc and F. Fiala, *Le type d'une surface et sa courbure totale* (French), Comment. Math. Helv. **14**, (1942). 230–233.
- [B] R. Bryant, *Surfaces of Mean Curvature One in Hyperbolic Space*, Astérisque **154-155** (1987), 321–347.
- [F] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space*, preprint, arXiv:math.DG/0408036.
- [FRUY] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umeharara, K. Yamada and S.-D. Yang, in preparation.
- [H] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.
- [JM] L. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, **22** (1983), 203–221.
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umeharara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, to appear in Pacific J. Math.
- [KUY] M. Kokubu, M. Umeharara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **216** (2004), 149–175.
- [L] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. **92** (1970), 335–374.
- [LY] S. Lee and S.-D. Yang, *A spinor representation for spacelike surfaces of constant mean curvature -1 in de Sitter three-space*, preprint.
- [O] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. of Math. **80** (1964), 340–364.
- [P] B. Palmer, *Spacelike constant mean curvature surfaces in pseudo-Riemannian space forms*, Ann. Global Anal. Geom. **8** (1990), 217–226.
- [R] J. Ramanathan, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 349–359.
- [RUY1] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 21–56.
- [RUY2] ———, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature II*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 375–395.
- [UY1] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.
- [UY2] ———, *A duality on CMC-1 surfaces in hyperbolic space, and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.
- [UY3] ———, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, to appear in Hokkaido Math. J.

E-mail address: fujimori@math.kobe-u.ac.jp

ある変数係数楕円型方程式に関する 亀裂問題の解の特異性

京都大学大学院情報学研究科
複雑系科学専攻
大久保 篤志

1 序

本論文の目的は、亀裂を含む2次元有界領域における変数係数楕円型方程式 $Lu := -\nabla \cdot (a\nabla u) = f$ の解が亀裂端点において有する特異性の解析である。領域中に亀裂が存在する場合、一般には、楕円型方程式に対する解の正則性定理が成立せず、境界条件として滑らかなデータを与えた場合でも解は亀裂先端において特異性を有することがある。この解の特異性は物理的には応力集中や電荷集中として知られている現象に対応するものである。弾性問題では、亀裂端点での解の漸近展開において、特異性を有する項の係数は応力拡大係数と呼ばれている。本論文では便宜上、一般の楕円型方程式に対しても、この用語を用いる。

応力拡大係数について簡単に説明するために次の問題を考える。2次元平面 \mathbb{R}^2 において原点を端点とする亀裂 $\Sigma = \{x_1 < 0, x_2 = 0\}$ を考え、

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Sigma^\pm, \end{cases}$$

を満たす u を考える。ただし、原点の近傍で $f = 0$ とする。また、 Σ^+, Σ^- はそれぞれ Σ の上面、下面を表す。ここで、極座標を入れて上の問題を書き直すと、

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 & (\theta = \pm\pi), \end{cases}$$

となる。変数分離解のうち、1階の導関数が原点近傍で2乗可積分となる(物理的にはエネルギーが有限となることに対応する)ものとして

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_k = r^k \cos(k\theta), \quad \phi_{(2k-1)/2} = r^{(2k-1)/2} \sin((2k-1)\theta/2), \quad k = 1, 2, \dots$$

が得られる。このうち、 $\phi_0 = 1, \phi_k (k = 1, 2, \dots)$ は亀裂を跨いで滑らかな関数であるが、 $\phi_{(2k-1)/2} (k = 1, 2, \dots)$ は亀裂の上下で値が異なり、この種の問題に特有の解である。形式的な解の級数展開は、

$$\begin{aligned} u = & k_0 + k_{1/2} r^{1/2} \sin \theta/2 + k_{3/2} r^{3/2} \sin 3\theta/2 + \dots \\ & + k_1 r^1 \cos \theta + k_2 r^2 \cos 2\theta + \dots \end{aligned}$$

である。これを弾性論の用語を流用して説明すれば、応力成分は変位の1階導関数により与えられ、応力成分の内 $\phi_{1/2}$ に由来する部分は原点において $r^{-1/2}$ の特異性を有し、それ以外は原点の近傍で有界にとどまる。すなわち、 $\phi_{1/2}$ に由来する部分が原点近傍での応力状態を支配的に定めることになる。この意味で $\phi_{1/2}$ を特異項と呼び、 $\phi_{1/2}$ の係数を応力拡大係数と呼ぶ。

破壊力学において応力拡大係数は破壊評価基準となる重要なパラメータの一つであり、Irwin([3])によって導入されたものであるが、Irwinによる考察は数学的には形式的なものであった。定数係数の場合の直線亀裂問題の解の特異性に関する数学解析の結果は Grisvard([1])などに与えられているが、曲線亀裂の場合については、若野([5])により、2001年によく数学的な証明が与えられた。

本研究の目的は、若野による手法を変数係数の方程式に拡張し、亀裂端点での解の特異性を特定することである。変数係数作用素が現われるのは、概ね、次の二つの場合である。第一は、物質係数が位置に依存する場合、すなわち、電気伝導率や弾性係数などが位置の関数となる場合であり、第二は、曲線座標を用いた変数変換による場合である。本研究は前者よりも、むしろ後者の理由によって動機づけられた。その背景は数学的に未解決の3次元曲面亀裂問題の解の特異性の解析にある。

滑らかな境界 Γ を持つ、 \mathbb{R}^2 の有界領域 Ω を考える。亀裂 Σ は C^∞ 級の Jordan 開曲線 $\gamma : (0, L) \ni s \mapsto \gamma(s) \in \Omega$ で表現され、ある C^∞ 級 Jordan 閉曲線 $S \subset \Omega$ に含まれ、 $\bar{\Sigma} \neq S$ であることを仮定する。ここで、 s は弧長パラメータとする。このとき、 L は亀裂 Σ の長さを表している。以後、亀裂先端 $\gamma(0), \gamma(L)$ をそれぞれ $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}$ と表す。また、考える領域は Ω から亀裂 Σ とその両端を除いた領域 $\Omega_\Sigma := \Omega \setminus \bar{\Sigma}$ とする。さらに、 Ω^- を S に囲まれた領域とし、 $\Omega^+ := \Omega \setminus \bar{\Omega}^-$ とする。 Γ_D, Γ_N を Γ の空でない連結な開部分集合とし、 $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \Gamma$ を満たすものとする (図1)。

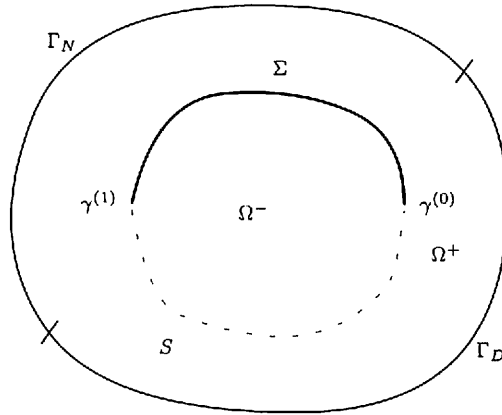


図1: 領域と亀裂

本論文では、変数係数楕円型作用素 $L := -\nabla \cdot a(x)\nabla$ を考え、境界値問題

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{in } \Omega_\Sigma \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ B_\nu u = g & \text{on } \Gamma_N \\ B_\nu^\pm u = 0 & \text{on } \Sigma \end{cases} \quad (1)$$

を考える。ここで、関数 a は $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ であり、ある正の定数 c が存在して、 $c^{-1} \leq a(x) \leq c, \forall x \in \mathbb{R}^2$ を満たすものとする。また、 ν を、 Γ および S の外向き単位法線とし、 $B_\nu u = a(x)\partial u/\partial \nu|_\Gamma$ 、 $B_\nu^+ u = a(x)\partial u/\partial \nu|_{S^+}$ 、及び $B_\nu^- u = a(x)\partial u/\partial \nu|_{S^-}$ とする。

一般に作用素 L に対しては、大域的な基本解の存在は保証されないので、局所的な基本解を用いて単層ポテンシャルと重層ポテンシャルを構成し、亀裂端点の近傍において解のポテンシャル表示を導いた後、解の特異性について考察を行う。

2 亀裂問題の解の存在と一意性

まず, 境界値問題 (1) の一意可解性について論じる. 後の便宜のため, 境界値問題 (1) をやや一般化して, 境界値問題

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{in } \Omega_\Sigma \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ \mathcal{B}_\nu u = g & \text{on } \Gamma_N \\ \mathcal{B}_\nu^\pm u = h & \text{on } \Sigma \end{cases} \quad (2)$$

を変分問題として扱う枠組みを構成し, 境界値問題 (2) の一意可解性について議論を行う.

ここで, いくつかの記号の定義をする. $v \in H^1(\Omega_\Sigma)$ に対して, $\gamma_{S^+}, \gamma_{S^-}$ をそれぞれ S の外側, 内側からのトレース作用素とし, γ_Γ を Γ へのトレース作用素とする. このとき

$$[v] := \gamma_{S^+} v - \gamma_{S^-} v, \quad [v]_\Sigma := [v]|_\Sigma$$

と定める. また, $H^1(\Omega_\Sigma), H^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(S)$ の部分空間 $V, H^{-1/2}(\Gamma_N), H^{-1/2}(\Sigma)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} V &:= \{u \in H^1(\Omega_\Sigma) \mid \gamma_\Gamma u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \\ H^{-1/2}(\Gamma_N) &:= \{G|_{\Gamma_N} \mid G \in H^{-1/2}(\Gamma)\}, \\ H^{-1/2}(\Sigma) &:= \{G|_\Sigma \mid G \in H^{-1/2}(S)\} \end{aligned}$$

と定義する. $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ は $H^{-1/2}(\Gamma)$ の Γ_N への制限であり,

$$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) := \{\psi \in L^2(\Gamma_N) \mid \tilde{\psi} \in H^{1/2}(\Gamma)\}$$

の双対空間と一致する ([4]). $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ の $\psi \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ での値は $\langle g, \psi \rangle_{\Gamma_N} := \langle G, \tilde{\psi} \rangle_\Gamma, \forall \psi \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ と定められる. ただし, $G|_{\Gamma_N} = g$ であり, $\tilde{\psi}$ は ψ の 0-拡張である. $H^{-1/2}(\Sigma)$ と $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma) := \{\varphi \in L^2(\Sigma) \mid \tilde{\varphi} \in H^{1/2}(S)\}$ の関係も同様である.

亀裂を含む領域 Ω_Σ においても, $u \in H^1(\Omega_\Sigma), f \in L^2(\Omega_\Sigma)$ が $Lu = f$ を満たすとき, Green の公式 ([6])

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\Sigma} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega_\Sigma} f v dx + \langle \mathcal{B}_\nu \Gamma u, \gamma_\Gamma v \rangle_\Gamma \\ &\quad + \langle \mathcal{B}_\nu, S^- u, \gamma_{S^-} v \rangle_S - \langle \mathcal{B}_\nu, S^+ u, \gamma_{S^+} v \rangle_S, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\Sigma) \end{aligned}$$

が成立し, 境界値問題 (2) は変分問題

$$\int_{\Omega_\Sigma} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_\Sigma} f v dx + \langle g, \gamma_\Gamma v \rangle_{\Gamma_N} - \langle h, [v]_\Sigma \rangle_\Sigma, \quad \forall v \in V \quad (3)$$

と同値であることが示される ([6]).

更に, $u \in H^1(\Omega_\Sigma)$ に対して

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\Sigma)^2} := \left(\int_{\Omega_\Sigma} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

とおくと, $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\Sigma)^2}$ は V における $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\Sigma)}$ と同値なノルムであることに注意すると ([6]), 係数 a の有界性と正値性, およびノルム $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\Sigma)}$ と $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\Sigma)^2}$ の同値性から次の評価を得る:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\Sigma} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx \right| &\leq c \|u\|_{H^1(\Omega_\Sigma)} \|v\|_{H^1(\Omega_\Sigma)}, \quad \forall u, v \in V, \\ \int_{\Omega_\Sigma} a(x) \nabla u \cdot \nabla u dx &\geq c \|u\|_{H^1(\Omega_\Sigma)}^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

したがって、変分問題 (3) に対して Lax-Milgram の定理を適用することにより、境界値問題 (2) の一意可解性を得る。

亀裂端点における解の特異性を特定するために、境界値問題 (1) を次の二つの問題に分解する。亀裂のない領域 Ω における境界値問題

$$\begin{cases} L(u_0) = f & \text{in } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \mathcal{B}_\nu u_0 = g & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4)$$

は一意的な解 $u_0 \in H^1(\Omega)$ を持つ。さらに、 Ω の任意のコンパクト部分集合 Ω_c に対して、 $u_0|_{\Omega_c} \in H^2(\Omega_c)$ である。 $u_0 \in H^2(\Omega_c)$ なので、 $h := -\mathcal{B}_\nu u_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ である。そこで、次の問題を考える。

$$\begin{cases} L(u_c) = 0 & \text{in } \Omega_\Sigma, \\ u_c = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \mathcal{B}_\nu u_c = 0 & \text{on } \Gamma_N, \\ \mathcal{B}_\nu^\pm u_c = h & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (5)$$

前述のとおり、境界値問題 (1) と (5) は一意可解である。故に、 $u = u_0 + u_c$ は境界値問題 (1) の解であり、 u の亀裂端点における特異性は u_c のみに含まれる。したがって、以後境界値問題 (5) の解を考察の対象とする。

3 解の亀裂端点における特異性

解の亀裂端点における解の特異性を考察するために、解のポテンシャル表示を考える。しかしながら、一般に変数係数作用素 $L = -\nabla \cdot a(x)\nabla$ に対しては大域的な基本解は保証されず、局所的な基本解を用いて亀裂端点の近傍におけるポテンシャル表示に甘んじざるを得ない。ここで、局所的な基本解とは次の作用素 E のことである：

作用素 L に対して、以下の性質を満たす $\gamma^{(0)}$ の近傍 $B \subset \mathbb{R}^2$ と線型作用素 $E : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ が存在する ([2]:Theorem13.3.3):

$$\begin{aligned} LEf &= f & \text{in } B & \text{if } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2), \\ ELu &= u & \text{in } B & \text{if } u \in \mathcal{E}'(B). \end{aligned}$$

この作用素を用いて、通常の基本解と同様にして、曲線 C 上の単層ポテンシャル、重層ポテンシャルを定義し、それぞれ SL_C, DL_C で表す ([4])。このとき、境界値問題 (5) の解は亀裂端点 $\gamma^{(0)}$ の近傍で次のようにポテンシャル表示される ([6]):

$$u = -DL_{\Sigma_{2\delta}}([u]_{\Sigma_{2\delta}}) + DL_{\partial B_{2\delta}}(\gamma_{\partial B_{2\delta}} u) - SL_{\partial B_{2\delta}}(\mathcal{B}_{\nu, \partial B_{2\delta}} u) \quad (6)$$

ポテンシャル表示 (6) において、第 2 項と第 3 項は亀裂端点の近傍で滑らかな関数を定義するので、特異性の考察においては、第 1 項のみを考えればよい。

ここで、第 1 項の密度関数 φ について次の仮定を設けることにする：

定数 $c^{(0)}$ が存在して、

$$\varphi - c^{(0)} \mathcal{S}^{(0)} \in H^{3/2}(B_{\Sigma, \delta}) \quad (7)$$

を満たす。ここで、 $\mathcal{S}^{(0)} = s^{1/2} \chi(s)$ であり、 χ は $\gamma^{(0)}$ の近傍で 1 の値を取り、 $\gamma^{(1)}$ の近傍で 0 の値を取る cut-off 関数である。

定理の主張を述べるために、亀裂先端 $\gamma^{(0)}$ を原点とする座標系 (x_1, x_2) を次のように定める:

$$\begin{cases} \gamma^{(0)} \text{において } x_1\text{-軸と}\Sigma \text{が接する,} \\ \gamma^{(0)} \text{の近傍 } B^{(0)} \text{が存在して } \Sigma \cap B^{(0)} \subset \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0\}. \end{cases}$$

また、 $\gamma^{(0)}$ を中心とする極座標系を (r, θ) で表す。ここで、角 θ については x_1 -軸の正の部分が $\theta = 0$ となるように定める (図 2)。また、 B_δ を原点を中心とする半径 δ の円板とし、 $B_{\Sigma, \delta} := B_\delta \setminus \bar{\Sigma}$ とおく。

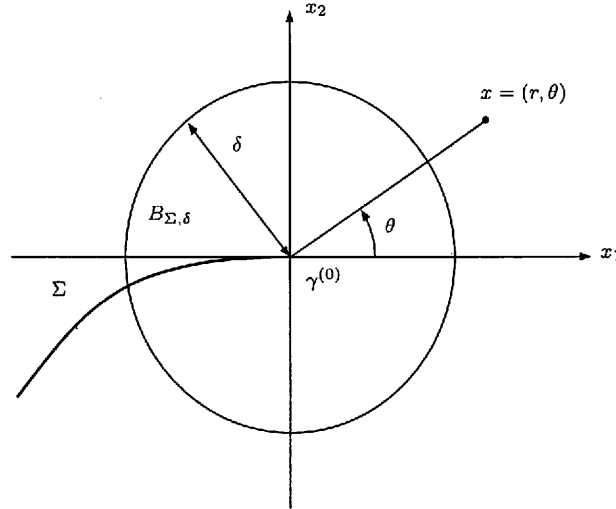


図 2: $\gamma^{(0)}$ の近傍の局所座標系

この座標系において、仮定 (7) の下で前節で示した亀裂端点におけるポテンシャル表示 (6) を用ると、 u の特異性に関する次の定理が成り立つ。

定理 1 $u \in H^1(\Omega_\Sigma)$ を境界値問題 (1) の解とし、 $\varphi = [u]_{\Sigma_{2\delta}}$ に対して、(7) を仮定する。このとき、十分小さな $\delta > 0$ に対して、定数 C と $u^{(0)} \in H^2(B_{\Sigma, \delta})$ が存在して、 u は亀裂先端 $\gamma^{(0)}$ の近傍 $B_{\Sigma, \delta}$ において

$$Cr^{1/2} \sin(\theta/2) + u^{(0)}$$

と表わせる。

条件 (7) の検証が今後の研究の課題の一つである。

参考文献

- [1] P.Grisvard, Singularities in Boundary Value Problems, Springer-Verlag, 1992.
- [2] L.Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer-Verlag, 1983.
- [3] G.R.Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J.Appl.Mech., 24(1957), 361-364.
- [4] W.McLean, Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge University Press, 2000.
- [5] WAKANO Isao, Analysis for Stress Intensity Factors With a Curved Crack in Two-dimensional Elasticity, 京都大学博士学位論文, 2001.
- [6] 大久保篤志, ある変数係数楕円型方程式に関する亀裂問題の解の特異性, 京都大学修士学位論文, 2004.

Explicit solutions to optimal long-term investment problems for certain nonlinear factor models

畑 宏明 関根 順 (大阪大学大学院基礎工学研究科)

本講演で考える市場は次からなるものとする。

1. 一個のリスクのない資産 (安全資産)、例えば債券など。時刻 t におけるこの資産の価値を B_t とする。
2. 一個のリスクを伴う資産 (危険資産)、例えば株など。時刻 t での株価を S_t とする。

資産 B_t に「リスクがない」とは、数学的には、その時間発展がブラウン運動などによって表される不確定性に依存しないことを意味しており、利子率 r が与えられたとき、 B_t は次の常微分方程式を満たす。

$$(0.1) \quad dB_t = B_t r(Y_t) dt, \quad B_0 = 1$$

危険資産 S_t は次の確率微分方程式

$$(0.2) \quad dS_t = S_t \{ \mu(t, Y_t) dt + \sigma_t e' dw(t) \}, \quad S_0 > 0.$$

をみます。ただし、 $w = (w_1, w_2)'$ はフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ 上で定義された2次元ブラウン運動で、 $e := (\sqrt{1-\rho^2}, \rho)' \in \mathbb{R}^2$, $\rho \in [-1, 1]$, σ は \mathcal{F}_t -発展的可測過程である。 μ は瞬間平均収益率、 σ はボラティリティで市場における不確定性を表すものである。ここで、 μ を次のように仮定する。

$$\mu(t, y) = r(y) + \sigma_t \lambda(y)$$

ただし、 λ はリスク・プレミアム過程といい、瞬間平均収益率 μ が r によって表される金利をどれだけ上回るかを、ボラティリティを単位として表している。 r, μ, λ は Y の影響を受けているのだが、この Y は経済的要因 (たとえば、失業率、物価上昇率など) (以下ファクターとする) で次の確率微分方程式を満たす。

$$(0.3) \quad dY_t = b(Y_t) dt + c dw_2(t)$$

ただし、 $c > 0$ である。

投資家が時刻 t で持つ債券、株の保有量をそれぞれ $h^0(t), h(t)$ とすると、資産価値過程 X_t は $X_t = h^0(t)B(t) + h(t)S(t)$ である。債券、株への投資比率 (投資戦略) をそれぞれ π_t^0, π_t とすると、

$$\pi_t^0 = \frac{h^0(t)B(t)}{X(t)}, \quad \pi_t = \frac{h(t)S(t)}{X(t)}$$

で表される。本講演では π を \mathcal{F}_t -可測としている。つまり、投資家が危険資産とファクター過程の過去の全ての情報を用いて投資戦略 π を選択する場合を考えている。

Remark. 実際、ファクター過程の過去の全ての情報を用いることは必ずしも現実的ではない。よってより現実的な状況として、投資家が危険資産の過去の全ての情報のみを用いて投資戦略を選択する部分情報下の場合を扱っている研究がある。(cf. [6], [9], [10])

π を与えたとき、自己ファイナンスの条件を仮定すると、 $X_t = X_t^\pi$ は次の確率微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{X_t} = \pi_t^0 \frac{dB_t}{B_t} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t} \\ = (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t} \\ = r(Y_t) + \pi_t \lambda(Y_t) dt + \pi_t e' dw_t \\ X_0^\pi = 1. \end{cases}$$

ここで、自己ファイナンスとは、資産 X の変化に際して外部との間に資本のやり取りがない場合をいう。

我々が興味を持っている問題は次の3種類の最適投資問題である。

(1) 有限時間範囲の問題、すなわち **Merton terminal wealth problems** とよばれる未来のある時刻 $T > 0$ での資産の期待効用を危険資産への投資戦略 π によって最大にする最適投資問題：

$$(0.4) \quad \sup_{\pi} E \frac{1}{\gamma} (X_T^\pi)^\gamma \quad \gamma \neq 0, \gamma < 1$$

効用関数 $U(x)$ は $(0, \infty)$ 上の狭義単調増加、狭義凹関数とされるが、本講演では効用関数として、HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 型の中のべき型効用 (Power utility) 関数 $U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$, $\gamma \neq 0, \gamma < 1$ を用いている。 γ を HARA パラメーターという。 $\frac{1}{\gamma} x^\gamma = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma \log x}$ なので、(1) の問題 $E \frac{1}{\gamma} (X_T^\pi)^\gamma$ を最大化する問題は

$$(0.5) \quad \frac{1}{\gamma} E[e^{\gamma \log X_T^\pi}]$$

を最大化する問題とみなすことができ、本講演ではこの問題を投資戦略 π を制御、 Y をシステム過程と見て評価関数を (0.5) とする完全可観測リスク鋭感的確率制御問題と捉えて考察する。

(2) 無限時間範囲の問題、すなわち期待効用の長期間成長率を最大にする問題：

$$(0.6) \quad \Gamma(\gamma) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma T} \log E (X_T^\pi)^\gamma \quad \gamma \neq 0, \gamma < 1$$

本講演ではこの問題をファクター過程 Y のエルゴード性に関する条件の下でエルゴード型リスク鋭感的確率制御問題として考察する。

Remark. (1), (2) の問題に関する研究結果として、[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] などがある。

(3) 大偏差制御問題: $0 < \gamma < 1$ に対して、漸近的な資産の優位成長確率を最大にする問題：

$$(0.7) \quad \Pi(k) := \sup_{\pi} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P (X_T^\pi \geq e^{kT})$$

この問題は、 $0 < \gamma < 1$ に対する (2) の問題と密接に関係している。

大偏差原理：

$$P(X_T^\pi \geq e^{kT}) \simeq \exp(-I(c, \pi)T) \text{ as } T \rightarrow \infty$$

が成り立つ条件の下で、Fenchel-Legendre 変換より、rate function $I(k, \pi)$ と moment generating function $\Psi(\gamma, \pi) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E[e^{\gamma \log X_T^\pi}] = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E[(X_T^\pi)^\gamma]$ との関係は

$$I(k, \pi) = \sup_{\gamma > 0} [\gamma k - \Psi(\gamma, \pi)]$$

で表される。大偏差確率 $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P(X_T^\pi \geq e^{kT})$ を最大にする問題は $I(k, \pi)$ を最小にする問題であると期待できるので、 $\inf_{\pi} I(k, \pi) = \inf_{\pi} \sup_{\gamma > 0} [\gamma k - \Psi(\gamma, \pi)]$ を考える。この等式で \inf と \sup の入れ替えが可能であると仮定すると、 $\Psi(\gamma) = \sup_{\pi} \Psi(\gamma, \pi)$ とすると、 $\inf_{\pi} I(k, \pi) = \sup_{\gamma > 0} [\gamma k - \Psi(\gamma)]$ となる。(2) の問題は (3) の問題の双対問題であると見なせ、大偏差制御問題の最適戦略と最適値は無限時間範囲の問題の最適戦略と最適値から得られることが期待できる。ここで $\Psi(\gamma) = \gamma \Gamma(\gamma)$ に注意する。実際、Pham [11, 12] の結果で、ある $\bar{\gamma} \in (0, \infty)$ があって各 $\gamma \in [0, \bar{\gamma}]$ に対して、(0.6) の最適戦略 $\hat{\pi}^{(\infty)}$ があるとき、 $\Psi(\gamma)$ が連続的に微分可能で、 $\lim_{\gamma \rightarrow \bar{\gamma}} \Psi'(\gamma) = +\infty$ ならば、

$$\Pi(k) = - \sup_{\gamma \in (0, \bar{\gamma})} \{\gamma k - \Psi(\gamma)\}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

さらに $\gamma(d) \in (0, \bar{\gamma})$ を $\gamma(\Psi'(d)) = d \in (\Psi'(0+), \infty)$ となるものであるとすると、

$$\hat{\pi}_t^{[k, n]} := \begin{cases} \hat{\pi}_t^{(\infty)}(\gamma(k + \frac{1}{n})), & \text{if } k > \Psi'(0), \\ \hat{\pi}_t^{(\infty)}(\gamma(\Psi'(0) + \frac{1}{n})), & \text{if } k \leq \Psi'(0), \end{cases}$$

で定義される制御の列 $(\hat{\pi}^{[k, n]})_{n \in \mathbb{N}}$ は nearly optimal、すなわち次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P(X_T^{\hat{\pi}^{[k, n]}} \geq e^{kT}) = \Pi(k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

ということが示されている。この結果から、大偏差制御問題の最適戦略と最適値は無限時間範囲の問題の最適戦略と最適値から得られる。ここで、 $0 < \gamma < 1$ に対する (2) の問題の最適値 $\Gamma(\gamma)$ の定義域が (3) の問題を解くためには必要であり、特に定義域の右側境界 $\bar{\gamma}$ を調べることが重要であるということに注意しておく。

Remark. (3) の問題を検証できているのは、今のところ安全資産、危険資産、ファクター過程がそれぞれ一個ずつとした、線形 Gauss 型モデルの場合のみである ([11])。また、同様のモデルでこの問題の部分情報下の場合として [6] の結果がある。

本講演では次の 2 種類のモデルを扱う。

(A) Gaussian factor つまり、 $b(y) = b_0 + b_1y$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ の場合。 $Y_0 \in \mathbb{R}$ で r, λ の形をそれぞれ次のものとする。

$$r(y) = r_0 + r_1y + r_2y^2 \quad r_2 \geq 0, r_0, r_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(y) = \begin{cases} p_0 + p_1y, & \text{when } \rho = 0, \\ g\left(-\frac{y}{\rho c}\right) + \frac{\rho}{c}(b_0 + b_1y), & \text{when } \rho \neq 0, \end{cases}$$

ただし g は $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ として、次の Riccati 方程式

$$(0.8) \quad g'(y) + g^2(y) = p_0 + p_1y + p_2y^2$$

の解である。

Remark. (A) のようにファクターが線形 Gauss 型である場合で、さらに r, μ が y の線形である場合のモデルで上の最適投資問題を扱った研究がいくつかある (cf. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [11])。本講演では μ に非線形の項 g (Riccati 方程式 (0.8) の解) が含まれている場合を扱う。

(B) Bessel with linear drift factor (Heston/CIR type factor) すなわち、 $b(y) = \frac{b_{-1}}{y} + b_1y$, $b_{-1}, b_1 \in \mathbb{R}, 2b_{-1} \geq c^2$ の場合。 $Y_0 > 0$ で r, λ の形をそれぞれ次のものとする。

$$r(y) = \frac{r_{-2}}{y^2} + r_0y + r_2y^2 \quad r_{-2}, r_2 \geq 0, r_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(y) = \frac{\lambda_{-1}}{y} + \lambda_1y \quad \lambda_{-1}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

特に、 $r(Y_t) = r_2Y_t^2$ の場合は Cox-Ingersol-Ross's interest rate model と呼ばれる。

本講演では、上の (A) と (B) のそれぞれのモデルの場合に (1)~(3) の問題の最適戦略の明示的に構成し、最適値を具体的に表現し、大偏差制御問題を考えるのに重要な意味を持つ $\bar{\gamma}$ を明示的に与える。

REFERENCES

- [1] BIELECKI, T.R. AND S.R. PLISKA (1999). Risk sensitive dynamic asset management. *J. Appl. Math. Optimization* **39**, 337–360.
- [2] BIELECKI, T.R. AND S.R. PLISKA, AND M. SHERRIS (2000). Risk sensitive asset allocation. *J. Economic Dynamics & Control* **24**, 1145–1177.
- [3] FLEMING, W.H. AND S.J. SHEU (1999). Optimal long term growth rate of expected utility of wealth. *Ann. Appl. Probab.* **9**(3), 871–903.
- [4] FLEMING, W.H. AND S.J. SHEU (1999). Risk-sensitive control and an optimal investment model. *Mathematical Finance* **10**, 197–213.
- [5] FLEMING, W.H. AND S.J. SHEU (2002). Risk-sensitive control and an optimal investment model. II. *Ann. Appl. Probab.* **12**(2), 730–767.
- [6] HATA, H. AND Y. IIDA (2004). A risk-sensitive stochastic control approach to an optimal investment problem with partial information. preprint.
- [7] KURODA, K. AND H. NAGAI (2002). Risk sensitive portfolio optimization infinite time horizon. *Stochastics and Stochastics Reports*, **73**, 309–331.
- [8] NAGAI, H. (2003) Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models. *SIAM J. Cont. Optim.* **41** 1779–1800.

- [9] NAGAI, H. (2004) Risk-sensitive portfolio optimization with full and partial information. "Stochastic Analysis and Related Topics", Advanced Studies in Pure Mathematics 41 257–278.
- [10] NAGAI, H. AND S. PENG (2002). Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon. *Ann. Appl. Probab.* 12(1), 173–195.
- [11] PHAM, H. (2003). A large deviations approach to optimal long term investment. *Finance and Stochastics*, 7, 169–195.
- [12] PHAM, H. (2003). A risk-sensitive control dual approach to a large deviations control problem. *Systems and Control Letters*, 49, 295–309.
- [13] ZARIPHOPULOU, T. (2001). A Solution Approach to Valuation with Unhedgeable Risks , *Finance and Stochastics*, 5 (1),

n 次元複素空間の単位球上の不変調和関数の境界挙動

平田賢太郎*

島根大学総合理工学研究科D3

1 記号と動機

\mathbb{C}^n を n 次元複素空間 (内積 $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$, ノルム $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$) とし, B を単位球, S を単位球面とする. また, σ を S 上の正規化した球面測度とする.

B 上の Bergman 計量に関する Laplace-Beltrami 作用素は

$$\tilde{\Delta} = \frac{4}{n+1} (1 - |z|^2) \sum_{j,k=1}^n (\delta_{j,k} - \bar{z}_j z_k) \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}$$

で定義され, $\tilde{\Delta}h = 0$ を満たす C^2 級関数 h を B 上の不変調和関数という.

注意. $n = 1$ のときは, $\tilde{\Delta} = 2(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ より, 不変調和関数は通常の調和関数である.

境界挙動に関する研究は偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題に関係している. 境界関数が連続のときは Schwarz により次が示された.

Schwarz (1872)

$f \in C(S)$ ならば, $h \in C^2(B)$ で

$$(1.1) \quad \begin{cases} \tilde{\Delta}h = 0 & \text{in } B \\ \lim_{z \rightarrow \xi, z \in B} h(z) = f(\xi) & \text{for } \xi \in S \end{cases}$$

を満たすものが唯一つある. 更に,

$$h(z) = \int_S \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{2n}} f(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

と表される.

境界関数が不連続ならば, (1.1) の意味で境界条件を満たす解は存在しない.

問題 不連続な境界関数に対して, 境界条件はどう解釈されるか?

*E-mail address: hirata@math.shimane-u.ac.jp

一般に, $f \in L^1(S)$ に対して,

$$\mathcal{P}[f](z) = \int_S \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{2n}} f(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

は定義され, f の Poisson-Szegö 積分と呼ぶ. 従って, 上記の問題に関しては Poisson-Szegö 積分の境界挙動を調べればよい. つまり, どのような接近領域を考えると境界極限をもつか?, またその接近領域は最良か?ということが研究対象である. まず, 1次元の場合の歴史的背景を述べ, 高次元の場合を解説する.

2 $n = 1$ の場合

- **存在性** 単位円板上の Poisson 積分の境界極限の存在を保証する為に Fatou は次の接近領域を考えた: 各 $\alpha > 1$ と $\xi \in S$ に対して,

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \left\{ z \in B : |z - \xi| < \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \right\}$$

これは点 ξ において単位円周に接しない領域である.

Fatou (1906)

$f \in L^1(S)$ ならば, 各 $\alpha > 1$ に対して

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in \Gamma_\alpha(\xi)} \mathcal{P}[f](z) = f(\xi) \quad \text{a.e. } \xi \in S$$

- **最良性** 非接な接近領域の最良性は最初に Littlewood により次の意味で示された.

Littlewood (1927)

γ を点 $z = 1$ で単位円周に接する曲線とし, γ_θ を γ を原点周り θ だけ回転させた曲線とする. このとき, $f \in L^\infty(S)$ が存在して

$$\lim_{r \rightarrow 1} \mathcal{P}[f](re^{i\theta}) < \limsup_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in \gamma_\theta} \mathcal{P}[f](z) \quad \text{a.e. } \theta \in [0, 2\pi)$$

Blaschke 積の構成による簡単な方法が Zygmund により与えられた.

Zygmund (1949)

g は $(0, 1]$ 上の連続関数で

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = +\infty$$

を満たすとし,

$$Z_g(\xi) = \{ z \in B : |z - \xi| < g(1 - |z|)(1 - |z|^2) \}$$

とする. このとき, B 上の有界正則関数 h が存在して

$$\liminf_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in Z_g(e^{i\theta})} |h(z)| = 0 < 1 = \lim_{r \rightarrow 1} |h(re^{i\theta})| \quad \text{a.e. } \theta \in [0, 2\pi)$$

Aikawa は“全ての点”で振動する関数を構成した。

Aikawa (1990)

γ_θ は Littlewood の定理と同様とする。このとき、 $f \in L^\infty(S)$ が存在して

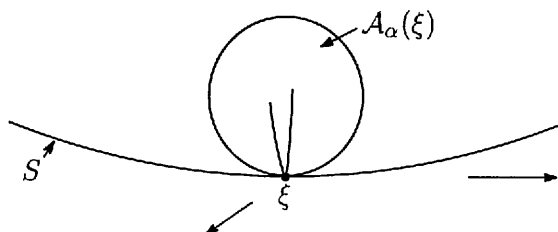
$$\liminf_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in \gamma_\theta} \mathcal{P}[f](z) \neq \limsup_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in \gamma_\theta} \mathcal{P}[f](z) \quad \text{all } \theta \in [0, 2\pi)$$

3 $n \geq 2$ の場合

- **存在性** 1次元の場合の境界極限の存在に関する Fatou の定理の高次元への拡張は Korányi により成された。接近領域は次の様である：各 $\alpha > 1$ と $\xi \in S$ に対して、

$$A_\alpha(\xi) = \left\{ z \in B : |1 - \langle z, \xi \rangle| < \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \right\}$$

この領域は一実方向には非接であるが、複素接方向では S に接している。



Korányi (1969)

$f \in L^1(S)$ ならば、各 $\alpha > 1$ に対して

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in A_\alpha(\xi)} \mathcal{P}[f](z) = f(\xi) \quad \text{a.e. } \xi \in S$$

- **最良性** Hakim & Sibony は高次元版の Blaschke 積を考えることにより Korányi の接近領域の最良性を次の意味で示した。

Hakim & Sibony (1983)

$\alpha > 1$ とし、 $g: (0, 1] \rightarrow [\alpha, \infty)$ は単調減少で

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = +\infty$$

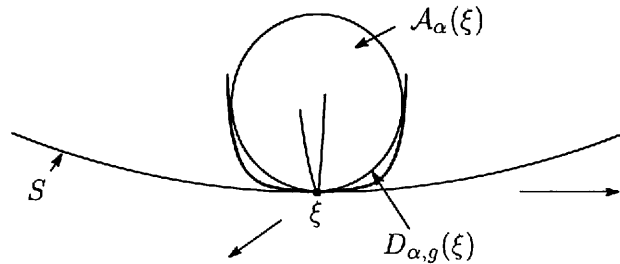
を満たすとする。各 $\xi \in S$ に対して、

$$D_{\alpha, g}(\xi) = \left\{ z \in B : \begin{array}{l} |1 - \langle z, \xi \rangle| < \frac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \\ |1 - \langle z, \xi \rangle| < \frac{g(|1 - \langle z, \xi \rangle|)}{2}(1 - |z|^2) \end{array} \right\}$$

とする。このとき、 B 上の有界正則関数 h が存在して

$$\liminf_{z \rightarrow \xi, z \in D_{\alpha, g}(\xi)} |h(z)| = 0 < \limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D_{\alpha, g}(\xi)} |h(z)| \quad \text{a.e. } \xi \in S$$

$D_{\alpha,g}(\xi)$ は一実方向においては非接であるが、複素接方向においては $A_{\alpha}(\xi)$ より広がっている。



Hakim & Sibony よりもっと強力に Aikawa の意味 (接曲線に沿って非存在) で最良性を示すことができる. $e = (1, 0, \dots, 0)$ とし, U は \mathbb{C}^n 上のユニタリ変換群を表す.

K.H (2004)

γ を点 e で終わる B 内の曲線で

$$(3.1) \quad \lim_{z \rightarrow e, z \in \gamma} \frac{|1 - \langle z, e \rangle|}{1 - |z|^2} = +\infty$$

を満たすとする. このとき, $f \in L^\infty(S)$ が存在して

$$\liminf_{|z| \rightarrow 1, z \in U\gamma} \mathcal{P}[f](z) \neq \limsup_{|z| \rightarrow 1, z \in U\gamma} \mathcal{P}[f](z) \quad \text{all } U \in \mathcal{U}$$

注意. (i) U は S 上推移的 (任意の $\xi \in S$ に対して $\xi = U_\xi e$ なる $U_\xi \in U$ が存在する) であるから,

$$\liminf_{z \rightarrow \xi, z \in U_\xi \gamma} \mathcal{P}[f](z) \neq \limsup_{z \rightarrow \xi, z \in U_\xi \gamma} \mathcal{P}[f](z) \quad \text{all } \xi \in S$$

(ii) 条件 (3.1) を上極限に置き換えることはできない. つまり,

$$\limsup_{z \rightarrow e, z \in \gamma} \frac{|1 - \langle z, e \rangle|}{1 - |z|^2} = +\infty$$

を満たすが, 全ての Poisson-Szegö 積分が $U_\xi \gamma$ に沿って殆ど至る点で境界極限をもつような曲線 γ が存在する. (Nagel & Stein (1984) と Sueiro (1986) 参照)

参考文献

- [1] H. Aikawa, *Harmonic functions having no tangential limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), no. 2, 457–464.
- [2] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. **30**, 1906.
- [3] M. Hakim and N. Sibony, *Fonctions holomorphes bornées et limites tangentielles*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 133–141.
- [4] K. Hirata, *Sharpness of the Korányi approach region*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
- [5] A. Korányi, *Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space*, Trans. Amer. Math. Soc. **135** (1969), 507–516.

- [6] J. E. Littlewood, *On a theorem of Fatou*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 172–176.
- [7] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.
- [8] M. Stoll, *Invariant potential theory in the unit ball of C^n* , London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [9] J. Sueiro, *On maximal functions and Poisson-Szegö integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), no. 2, 653–669.
- [10] A. Zygmund, *On a theorem of Littlewood*, Summa Brasil. Math. **2** (1949), no. 5, 51–57.

ヤング盤と量子アフィン代数の q -指標

中井 和香子
名古屋大学大学院多元数理学研究科

(本講演内容は、中西知樹氏との共同研究 [NN] に基づいている.)

カツ・ムーディー・リー代数 \mathfrak{g} の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の q -類似として、量子群と呼ばれる代数 $U_q(\mathfrak{g})$ がある。講演内容は、量子アフィン代数と呼ばれる量子群の有限次元表現の構造をあらわす q -指標の記述に関するものである。

\mathfrak{g} を \mathbb{C} 上のランク n の単純リー代数とし、 $\hat{\mathfrak{g}}$ をそのアフィン・リー代数とする。量子アフィン代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ とは、 $x_i^\pm, k_i^{\pm 1}$ ($i = 0, \dots, n$) で生成され、以下の基本関係式によって定義される \mathbb{C} 上のある結合代数である:

$$\begin{aligned} k_i k_i^{-1} &= k_i^{-1} k_i = 1, & k_i k_j &= k_j k_i, \\ k_i x_j^\pm k_i^{-1} &= q^{\pm B_{ij}} x_j^\pm, \\ x_i^+ x_j^- - x_j^- x_i^+ &= \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ \sum_{r=0}^{1-C_{ij}} \begin{bmatrix} 1-C_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^\pm)^r x_j^\pm (x_i^\pm)^{1-C_{ij}-r} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

ここで、 $C = (C_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ のカルタン行列で、 $B = (B_{ij}) = DC$ が対称行列となるような $D = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ が存在する。 $r_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ は互いに素とし、 $q_i = q^{r_i}$ とする。また、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}_q &:= \frac{[s]_q!}{[t]_q! [s-t]_q!}, \\ [s]_q! &:= [s]_q [s-1]_q \cdots [1]_q, & [s]_q &:= \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の $q \rightarrow 1$ の極限を考える。形式的に

$$\begin{aligned} q &= \exp(\hbar) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!}, \\ h_i &= \exp(\hbar k_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k k_i^k}{k!}, \quad e_i = x_i^+, \quad f_i = x_i^- \end{aligned}$$

とおいて $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\hat{\mathfrak{g}}'$ の普遍包絡代数 $U(\hat{\mathfrak{g}}')$ になることから、 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は $U(\hat{\mathfrak{g}}')$ の q -類似であるとみなされる。ここで、 $\hat{\mathfrak{g}}'$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分代数 $\hat{\mathfrak{g}}' := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ (c は中心) である。

$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の既約な有限次元表現は、Drinfel'd 多項式 $\mathbf{P}(u) = (P_j(u))_{j=1, \dots, n}$ と一対一に対応する。ここでは、分割 (またはヤング図) λ と spectral parameter $a \in \mathbb{C}$ によって定まるような Drinfel'd 多項式 (以下の $\mathbf{P}_a^\lambda(u)$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ が $A_n^{(1)}$ の場合)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a^\lambda(u) &= \prod_{j=1}^{l(\lambda')} \mathbf{P}_{\lambda'_j - \mu'_j, a_j}(u), \\ \mathbf{P}_{r, a}(u) &= (P_j(u))_{j=1, \dots, n}, \quad P_j(u) = \begin{cases} 1 - uq^a, & \text{if } j = r, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

に対する表現 $V(\lambda, a)$ について考える. このとき, $V(\lambda, a)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の表現とみなすと最高ウェイト λ の最高ウェイト表現である.

次に q -指標を定義する. $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ を $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ の有限次元表現のカテゴリの Grothendieck 環とする. $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の q -指標 とは, 以下のように定められる環準同型写像である:

$$\chi_q : \text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\hat{\mathfrak{h}})[[u]]. \quad (1)$$

$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現 (π_V, V) に対し, $\chi_q(V)$ は “universal” transfer matrix

$$t_V(u) := \text{Tr}_V(\pi_V(u) \otimes \text{id})(\mathcal{R}) \in U_q(\hat{\mathfrak{h}})[[u]]$$

($\mathcal{R} \in U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は Yang-Baxter 方程式 $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$ を満たす元) を $U_q(\hat{\mathfrak{h}})[[u]]$ に射影したものである [FR]. ここで言う “universal” とは, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現 (π_W, W) で写すことにより, transfer matrix

$$t_V(u; u_1, \dots, u_p) := \text{Tr}_V(R_{V,W}(u - u_1) \dots R_{V,W}(u - u_p))$$

($R_{V,W}(u) \in \text{End}(V \otimes W)$ は Yang-Baxter 方程式 $R_{V,V'}(u)R_{V,V''}(u+u')R_{V',V''}(u') = R_{V',V''}(u')R_{V,V''}(u+u')R_{V,V'}(u)$ を満たす元) が得られるという意味である.

$\chi_q(V)$ は $Y_{1,a}, \dots, Y_{n,a} \in U_q(\hat{\mathfrak{h}})[[u]]$ ($a \in \mathbb{C}$) を変数とする \mathbb{Z} -係数の多項式として記述される. $Y_{i,a}$ を \mathfrak{g} の基本ウェイト ω_i に対応する形式的べき級数 e^{ω_i} に置き換えることで spectral parameter $a \in \mathbb{C}$ を取り除くと, $\chi_q(V)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ (および \mathfrak{g}) の指標になるという意味で, q -指標は $U_q(\mathfrak{g})$ の指標のアフィン化とみなせる.

$\chi_q(V)$ を記述する事と本質的に同値な問題として, V に作用する vertex 模型の transfer matrix を記述する問題があるが, 既に [BR, KOS, KS] などにより, $V(\lambda, a)$ に対する transfer matrix が, shape λ のヤング盤 (ヤング図 λ の各マス目に番号を打ったもの) を用いて記述されている. そこで, これらの結果を元に, ヤング盤を用いて q -指標を記述したい.

まずはじめに, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の第 1 基本表現 $V = V_{\omega_1}(a) = V((1), a)$ に対する q -指標を shape $\lambda = (1)$, すなわち 1 マスのヤング図の (spectral parameter a の付いた) ヤング盤を用いて次のように記述する:

$$\chi_q(V_{\omega_1}(a)) = \sum_{i=1}^{n+1} z_{i,a} = \sum_{i=1}^{n+1} \boxed{i}_a \quad (2)$$

他の基本表現 $V_{\omega_r}(a) = V((1^r), a)$ は (spin 表現を除いて) $V_{\omega_1}(a)$ のテンソル積の subquotient として得られることから, (spin 表現でない) $V_{\omega_{r_1}}(a_1), \dots, V_{\omega_{r_k}}(a_k)$ のテンソル積の subquotient V に対し, q -指標は

$$\chi_q(V) = \sum_{i_1, \dots, i_m} \prod_{l=1}^m \boxed{i_l}_{b_l}, \quad m = \sum_{j=1}^k r_j \quad (3)$$

のような形で記述される. このとき, $\chi_q(V)$ の各項を, (i_1, \dots, i_m) を成分とする (shape λ の) ヤング盤を用いて記述することが原理的には可能である.

例えば $\hat{\mathfrak{g}}$ が $A_n^{(1)}$ 型の場合, 基本表現 $V((1^r), a)$ 及び対称テンソル積表現 $V((r), a)$ に対する q -指標 $h_{r,a}$ 及び $e_{r,a}$ は次のように与えられる:

$$E_a(z, X) := (1 + z_{1,a}X)(1 + z_{2,a}X) \cdots (1 + z_{n+1,a}X) = \sum_{r=0}^{n+1} e_{r,a}X^r,$$

$$H_a(z, X) := (1 - z_{n+1,a}X)^{-1} \cdots (1 - z_{2,a}X)^{-1}(1 - z_{1,a}X)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} h_{r,a}X^r,$$

(ただし, $Xz_{i,a} = z_{i,a-2}X$) すなわち

$$e_{r,a} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n+1} \prod_{l=1}^r z_{i_l, a+2(1-l)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n+1} \begin{array}{c} \boxed{i_1} \\ \boxed{i_2} \\ \vdots \\ \boxed{i_r} \end{array} \begin{array}{l} a \\ a-2 \\ \vdots \\ a-2r+2 \end{array},$$

$$h_{r,a+2r-2} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n+1} \prod_{l=1}^r z_{i_l, a+2(l-r)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n+1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ \hline a & a+2 & & a+2r-2 \\ \hline \end{array}$$

$e_{r,a}$ と $h_{r,a}$ は, spectral parameter $a \in \mathbb{C}$ を取り除くと, それぞれ \mathfrak{g} (または $U_q(\mathfrak{g})$) の自然表現の r 階交代テンソル積表現及び r 階対称テンソル積表現に対する指標となる.

次に $V(\lambda, a)$ に対する q -指標を考える. $h_{i,a}$ と $e_{i,a}$ の母関数は, 以下の等式を満たすことが直ちにわかる.

$$H_a(z, \pm X) E_a(z, \mp X) = E_a(z, \mp X) H_a(z, \pm X) = 1.$$

これより, ヤング図 λ と spectral parameter $a \in \mathbb{C}$ に対し, 以下のような Jacobi-Trudi 型の行列式を得る:

$$\det(h_{\lambda_i, -i+j, a+2(\lambda_i-i)})_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} = \det(e_{\lambda'_i, -i+j, a-2(j-1)})_{1 \leq i, j \leq l(\lambda')}. \quad (4)$$

この行列式を $\chi_{\lambda, a}$ と書くことにする. この時, 1 行からなるヤング図 $\lambda = (r)$ に対しては $\chi_{\lambda, a} = h_{r, a}$ となり, また, 1 列からなるヤング図 $\lambda = (1^r)$ に対しては $\chi_{\lambda, a} = e_{r, a}$ となる. ((4) 式から spectral parameter を取り除いたものは Schur 多項式の Jacobi-Trudi の公式である.)

一般のヤング図 λ に対し, 次が予想される:

予想 (Jacobi-Trudi 型の公式). $\hat{\mathfrak{g}}$ が $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ 型るとき, 次が成り立つ:

$$\chi_q(V(\lambda, a)) = \chi_{\lambda, a}. \quad (5)$$

この予想に基づき, $V(\lambda, a)$ に関する q -指標のヤング盤による記述

$$\chi_{\lambda, a} = \sum_{T \in \text{Tab}(\lambda)} z_a^T, \quad z_a^T := \prod_{(i, j) \in \lambda} z_{T(i, j), a+2(j-i)} \quad (6)$$

($\text{Tab}(\lambda)$ はヤング盤の集合) を与えたい.

$\hat{\mathfrak{g}}$ が $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ 型の場合においては, 一般のヤング図 λ に関して $\chi_{\lambda, a}$ のヤング盤による記述 (6) が与えられている [BR, KOS]. 例えば, $A_n^{(1)}$ 型の場合, (6) の $\text{Tab}(\lambda)$ は, shape λ のヤング盤で各マス目の番号が $1, \dots, n+1$ のどれかであり, かつ隣り合うマス目内の番号が次の規則を満たすようなもの (このようなヤング盤を semistandard tableau という) 全体の集合である [BR]:

$$\text{horizontal rule } \begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline \end{array} \Rightarrow i \leq i', \quad \text{及び} \quad \text{vertical rule } \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline i' \\ \hline \end{array} \Rightarrow i < i'.$$

$B_n^{(1)}$ においても, $A_n^{(1)}$ と同様に horizontal rule と vertical rule で記述される [KOS]. しかし一方, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ 型の場合は [KS] による基本的なヤング図の例を除いて, 一般の場合における記述がまだ得られていない.

講演では, $\hat{\mathfrak{g}}$ が $C_n^{(1)}$ 型の場合における q -指標のヤング盤による記述 (6) を与えたい.

行列式 (4) を展開するのに Gessel と Viennot の “path” による方法がある. この方法で, [BR, KOS] による $A_n^{(1)}$ 型及び $B_n^{(1)}$ 型のヤング盤が直ちに再現することができる. $C_n^{(1)}$ 型においては, 同様の方法を用いると, $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ 型の場合のような horizontal rule 及び vertical rule だけでは記述されない. しかし, $z_{i,a}$ たちの関係式を使うことで, (6) のような式が得られる. 結果として, $C_n^{(1)}$ 型のヤング盤の記述には, 例えば次の定理にあるように “extra” rule が加わり, $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ 型よりも複雑になる:

定理 1 ([NN]). $\hat{\mathfrak{g}}$ が $C_n^{(1)}$ 型で, λ の長さが 2 以下のとき, (6) の $\text{Tab}(\lambda)$ は, 各成分が $1, \dots, n, \bar{n}, \dots, \bar{1}$ で shape λ のヤング盤 T であり, “horizontal”, “vertical” 及び “extra” rule を満たすもの全体の集合である. ここで, horizontal (resp. vertical) rule は,

$$1 < 2 < \dots < n < \bar{n} < \dots < \bar{2} < \bar{1}$$

という順序のもと, T の中で横に (resp. 縦に) 並んだ 2 つの成分に関する次のような規則である.

(horizontal) $\begin{array}{|c|c|} \hline i & i' \\ \hline \end{array} \Rightarrow i \leq i'$ 又は $(i, i') = (\bar{n}, n)$, 但し $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{n} & \bar{n} & n \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \bar{n} & n & n \\ \hline \end{array}$ は不可

(vertical) $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline i' \\ \hline \end{array} \Rightarrow i < i'$. 但し $\begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \bar{n} \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|} \hline \bar{n} \\ \hline n \\ \hline \end{array}$ は可

また, extra rule は, T が以下のような配列

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & n & \cdots & n \\ \hline \bar{n} & \bar{n} & \cdots & \bar{n} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} c \\ b \end{array}$$

をもつ場合に適用される, b と c に関する次のような条件である:

- 少なくとも次のどちらか一方が成立する: 1. b が存在して, かつ $b = n$.
2. c が存在して, かつ $c = \bar{n}$.

講演では, 定理 1 の他にも, λ の長さが 3 の場合に関するヤング盤の規則も紹介したい. なお, 一般のヤング図 λ の場合においては, 残念ながら現時点ではそのヤング盤を記述する規則を述べることができていないが, λ の長さが 3 の場合と類似した形で述べられると考えられる.

REFERENCES

- [BR] V. V. Bazhanov, N. Reshetikhin, *Restricted solid-on-solid models connected with simply laced algebras and conformal field theory*. J. Phys. A **23** (1990), no. 9, 1477–1492.
[FR] E. Frenkel, N. Reshetikhin, *The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of \mathcal{W} -algebras*, Contemp. Math. **248**, 163–205.
[KOS] A. Kuniba, Y. Ohta, J. Suzuki, *Quantum Jacobi-Trudi and Giambelli formulae for $U_q(B_r^{(1)})$ from the analytic Bethe ansatz*. J. Phys. A **28** (1995), no. 21, 6211–6226.
[KS] A. Kuniba, J. Suzuki, *Analytic Bethe ansatz for fundamental representations of Yangians*. Comm. Math. Phys. **173** (1995), no. 2, 225–264.
[NN] W. Nakai, T. Nakanishi, *Paths, tableaux and q -characters of quantum affine algebras*, in preparation.