# 第13回　関数空間セミナー報告集

（北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）

2004年12月23日（木）〜12月25日（土）

（会場：お茶の水女子大学理学部）

代表者：宮島　静雄（東理大・理）
竹尾富貴子（お茶大・理）
中路　貴彦（北　大・理）

## Seminar on Function Spaces, 2004

## CONTENTS

Chaotic or hypercyclic semigroups and differential operators

Fukiko Takeo (Ochanomizu University)

# 1 Introduction

A Bounded linear operator $T$ on a Banach space $X$ is called to be *hypercyclic* if there exists $x \in X$ such that the set $\{T^n(x)|n = 1, 2, 3, \dots\}$ is dense in $X$. $T$ is called to be *chaotic* if it is hypercyclic and the set of periodic points is dense in $X$.

As for semigroups on Banach spaces the conditions to be hypercyclic or chaotic have been investigated by many people. T. Bermudez et.al [1] showed that every separable infinite dimensional complex Banach space admits a hypercyclic uniformly continuous semigroup and there exist Banach spaces admitting no chaotic strongly continuous semigroups. Desch et.al [2] considered weighted function spaces on $[0, \infty)$ and they gave a necessary and sufficient condition to be hypercyclic for translation semigroups on weighted function spaces. We gave a necessary and sufficient condition to be chaotic [5] and applied these results to partial differential equations [7]. A. Lasota et.al ([3],[4]) investigate the dynamics of a population of cells undergoing simultaneous proliferation and maturation and showed that the solution semigroup of the partial differential equation, consisting of functions on [0,1], is chaotic by using the theory of Wiener process. In this paper, we investigate the solution semigroup of the partial differential equation, consisting of functions on $[0, \infty)$, and apply these results to the function space on [0,1], by considering an admissible weight function on [0,1].

# 2 Translation semigroup on $I = [0, \infty)$

By an *admissible weight function* on $[0, \infty)$ we mean a measurable function $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:
(i) $\rho(x) > 0$ for all $x \in [0, \infty)$;
(ii) there exist constants $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\rho(x) \leq Me^{\omega t}\rho(t + x)$ for all $x \in [0, \infty)$ and $t > 0$.

With an admissible weight function $\rho$, we construct the following function spaces:

$$C_{0,\rho}([0, \infty), \mathbb{C}) = \left\{f : [0, \infty) \to \mathbb{C} \mid f \text{ continuous}, \lim_{x \to \infty} \rho(x)f(x) = 0\right\}$$

$$\text{with } \|f\|_\rho = \sup_{\tau \in [0,\infty)} |f(\tau)\rho(\tau)|,$$

$$L^p_\rho([0, \infty), \mathbb{C}) = \left\{f : [0, \infty) \to \mathbb{C} \mid f \textit{ measurable}, \int_0^\infty |f(\tau)\rho(\tau)|^p \, d\tau < \infty\right\}$$

$$\text{with } \|f\|_{p,\rho} = \left(\int_0^\infty |f(\tau)\rho(\tau)|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1)$$

and consider a (forward) *translation semigroup* $\{\widetilde{T}_t\}$ with parameter $t \geq 0$ such as

$$\widetilde{T}_t f(x) = f(x + t) \qquad \text{for } f \in C_{0,\rho}([0, \infty), \mathbb{C}) \text{ or } L^p_\rho([0, \infty), \mathbb{C}).$$

**Theorem 2.1.** *Let $X$ be $C_0([0,\infty),\mathbb{C})$ or $L^p([0,\infty),\mathbb{C})$. We consider the partial differential equation:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \quad \text{with some } f \in X, \end{cases}$$

*where $h \in C([0,\infty),\mathbb{C})$ is bounded.*

*Then the solution semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ is a strongly continuous semigroup on $X$ and we have*

(1) *$\{T_t\}$ is hypercyclic if and only if*

$$\limsup_{x\to\infty} \int_0^x \Re h(s)ds = \infty;$$

(2) *if $X = C_0([0,\infty),\mathbb{C})$, then $\{T_t\}_{t\geq 0}$ is chaotic if and only if*

$$\int_0^\infty \Re h(s)ds = \infty;$$

(3) *if $X = L^p([0,\infty),\mathbb{C})$ and $h(x) = \dfrac{a}{x+1}$ with $a > \dfrac{1}{p}$, then $\{T_t\}$ is chaotic.*

## 3 Transformation semigroup on $I = [0,1]$

Now we shall consider the case of $I = [0,1]$ and the semigroup $\{T_t\}$ on the function space $C_0([0,1],\mathbb{C}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$ with sup norm or $L^p([0,1],\mathbb{C})$.

By considering the map $\psi : [0,\infty) \to (0,1]$ defined by

$$\psi(x) = e^{\gamma x} \tag{3.1}$$

with $\gamma < 0$, the translation semigroup on $[0,\infty)$ corresponds to the semigroup $\{\widetilde{T}_t g(x) = g(xe^{\gamma t})\}$ on $(0,1]$.

By using an admissible weight function $\tilde{\rho}$ on $[0,\infty)$, we shall consider a measurable function $\rho : (0,1] \to \mathbb{R}$ defined by $\rho(x) = \tilde{\rho}(\psi^{-1}(x))$ for $x \in (0,1]$. Then $\rho$ satisfies the following conditions:

(i) $\rho(x) > 0$ for $x \in (0,1]$;

(ii) there exist constants $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\rho(x) \leq Me^{\omega t}\rho(e^{\gamma t}x)$ for all $x \in (0,1]$ and $t > 0$.

We shall call $\rho$ an *admissible weight function* on $(0,1]$.

With an admissible weight function $\rho$ on $(0,1]$, we construct the following function spaces:

$$C_{0,\rho}((0,1],\mathbb{C}) = \left\{f : (0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ continuous on } (0,1],\ \lim_{x\to 0}\rho(x)f(x) = 0\right\}$$

$$\text{with } \|f\|_\rho = \sup_{\tau\in(0,1]} |f(\tau)\rho(\tau)|,$$

In [2], they defined the space $L^p_\rho([0,\infty))$ by using $\|f\|_\rho = \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^p \rho(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$, instead of $\|f\|_\rho = \left(\int_0^\infty |f(\tau)\rho(\tau)|^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$. However in order to extend the following results in Theorem A to the partial differential equation, the norm $\|f\|_\rho = \left(\int_0^\infty |f(\tau)\rho(\tau)|^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$ is better, since the following (2.2) is obtained by using this norm.

As for the translation semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$, we have obtained the following

**Theorem A** ([2],[6],[5]). *Let $\widetilde{X}$ be $C_{0,\rho}([0,\infty),\mathbb{C})$ or $L^p_\rho([0,\infty),\mathbb{C})$ with an admissible weight function $\rho$. For the translation semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$ on $\widetilde{X}$, we have the following :*

(1) *the translation semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$ is hypercyclic if and only if*

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(t) = 0;$$

(2) *if $\widetilde{X}$ is $C_{0,\rho}([0,\infty),\mathbb{C})$, then $\{\widetilde{T}_t\}$ is chaotic if and only if $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = 0$ ;*

(3) *if $\widetilde{X}$ is $L^p_\rho([0,\infty),\mathbb{C})$, then $\{\widetilde{T}_t\}$ is chaotic if and only if for all $\varepsilon > 0$ and for all $l > 0$, there exists $P > 0$ such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\rho(l+nP))^p < \varepsilon.$$

Let $X$ be the space $C_0([0,\infty),\mathbb{C}) = \{f \in C([0,\infty),\mathbb{C}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ or $L^p([0,\infty),\mathbb{C})$.

The translation semigroup on $X$ is the solution semigroup of the following partial differential equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x) = f(x) \qquad \text{for } f \in X. \end{cases} \tag{2.1}$$

However, the translation semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$ on a weighted function space $\widetilde{X}$ corresponds [8] to the semigroup $\{T_t\}$ on $X$ defined by

$$T_t f(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(x+t)} f(x+t) \tag{2.2}$$

where $\{T_t\}$ is the solution semigroup of the following partial differential equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\rho'(x)}{\rho(x)} u \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

So we have applied the above results to the the following partial differential equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

where $h$ is a bounded continuous function on $[0,\infty)$ and $f \in X$. As a modification of [8, Theorems 2.1, 2.2 and 2.7] and [7, Theorem 4], we have

$$L^p_\rho([0,1],\mathbb{C}) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ measurable}, \int_0^1 |f(\tau)\rho(\tau)|^p \, d\tau < \infty \right\}$$

$$\text{with } \|f\|_{p,\rho} = \left( \int_0^1 |f(\tau)\rho(\tau)|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1).$$

Let $\widetilde{X}$ be $C_{0,\rho}((0,1],\mathbb{C})$ or $L^p_\rho([0,1],\mathbb{C})$ and for $\gamma < 0$, define a linear operator $\left\{\widetilde{T}_t\right\}$ on $\widetilde{X}$ by

$$\widetilde{T}_t g(x) = g(e^{\gamma t}x) \qquad \text{for } g \in \widetilde{X}, \;\; x \in (0,1]. \tag{3.2}$$

Then we have

**Theorem 3.1.** *Let $\rho$ be a continuous admissible weight function on $(0,1]$, $\widetilde{X} = C_{0,\rho}((0,1],\mathbb{C})$ and $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ be defined by* (3.2).

*Then for the semigroup $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ on $\widetilde{X}$ we have*

(1) $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ *is hypercyclic if and only if* $\liminf_{\tau\to 0} \rho(\tau) = 0$;

(2) $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ *is chaotic if and only if* $\lim_{\tau\to 0} \rho(\tau) = 0$.

As for $L^p$ space, consider the operator $\varphi : L^p_\rho([0,1],\mathbb{C}) \to L^p_\rho([0,\infty),\mathbb{C})$ defined by $\varphi \circ g(x) = g(\psi(x))$ for $g \in L^p_\rho([0,1],\mathbb{C})$, where $\psi$ is defined by (3.1). Then for $g \in L^p_\rho([0,1],\mathbb{C})$, $\varphi(g)$ does not necessarily belong to $L^p_\rho([0,\infty),\mathbb{C})$ by the relation:

$$\int_0^\infty |\varphi(g)(\tau)\tilde{\rho}(\tau)|^p \, d\tau = \int_0^1 |g(x)\rho(x)|^p \frac{1}{-\gamma x} dx.$$

So we must investigate in a different way and the next Proposition shows that if $\lim_{\tau\to 0}\rho(\tau)$ exists, then the semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$ is always hypercyclic.

**Proposition B**[8, Proposition 3.3]. *Let $\widetilde{X}$ be $L^p_\rho([0,1],\mathbb{C})$ and $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ on $\widetilde{X}$ be defined by $\widetilde{T}_t g(x) = g(e^{\gamma t}x)$ for $g \in \widetilde{X}$.*

*If $\rho$ is continuous on $(0,1]$ and $\lim_{\tau\to 0}\rho(\tau) = c < \infty$ exists, then $\widetilde{T}_t$ is a bounded linear operator on $\widetilde{X}$ and the semigroup $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ is hypercyclic.*

Let $X$ be the space $C_0([0,1],\mathbb{C}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$ or $L^p([0,1],\mathbb{C})$ with $p \geq 1$. The semigroup $\{T_t\}$ on $X$ by $T_t f(x) = f(e^{\gamma t}x)$ is the solution semigroup of the following partial differential equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \qquad \text{for } f \in X.$$

However, the semigroup $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ expressed by (3.2) on a weighted function space $\widetilde{X}$ corresponds to the semigroup $\{T_t\}$ defined by

$$T_t f(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(e^{\gamma t}x)} f(e^{\gamma t}x). \tag{3.3}$$

By putting $\rho(x) = \left|\exp\left\{\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{h(s)}{s}\, ds\right\}\right|$, we see that $\{T_t\}$ is the solution semigroup of the following partial differential equation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

When we put $\rho(x) = \left|\exp\left\{\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{h(s)}{s} ds\right\}\right|$, we cannot say $|\rho(0)| < \infty$ without $\Re h(0) \geq 0$. Since Theorem 2.1 shows a necessary and sufficient condition for the semigroup $\{\widetilde{T}_t\}$ to be hypercylic or chaotic, we can show only a sufficient condition for the semigroup $\{T_t\}$ to be hypercylic or chaotic. In [7, Theorem 1], we have shown that if $\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\}$ is positive, then the solution semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ on $C_0([0,1],\mathbb{C})$ of (3.4) is chaotic by using the spectral property of its infinitesimal generator. However if we use Theorem 3.1, we get a sufficient condition for $\{T_t\}$ to be chaotic as follows:

**Theorem 3.2.** *Let $X$ be the space $C_0([0,1],\mathbb{C})$. We consider the following initial value problem of a partial differential equation:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

*where $\gamma < 0$, $h \in C([0,1],\mathbb{C})$ and $f \in X$. Then the solution semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ ($T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-r)}x)\, dr\right\} f(e^{\gamma t}x)$) to the partial differential equation is a strongly continuous semigroup on $X$.*

*Moreover if $\Re h(0) > 0$, then $\{T_t\}_{t\geq 0}$ is chaotic.*

As for the space $L^p([0,1],\mathbb{C})$, we have

**Theorem C** [8, Theorems 3.5].

*Let $X$ be the space $L^p([0,1],\mathbb{C})$ with $p \geq 1$. We consider the following initial value problem of a partial differential equation :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

*where* $\gamma < 0$, $h \in C([0,1],\mathbb{C})$ *and* $f \in X$. *Then the solution semigroup* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ $(T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-r)}x)\,dr\right\} f(e^{\gamma t}x))$ *to the partial differential equation is a strongly continuous semigroup on* $X$ *and we have*

(1) *if there exists* $\delta > 0$ *such that* $\Re(h(x)) \geq 0$ *for* $0 \leq \forall x \leq \delta$, *then* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *is hypercyclic* ;

(2) *if* $\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > \dfrac{\gamma}{p}$, *then* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *is chaotic.*

## References


[1] T. Bermudez, A. Bonilla, and A. Martinon, *On the existence of chaotic and Hypercyclic semigroups on Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 2435-2441.

[2] W. Desch, W. Schappacher and G. F. Webb, *Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **17** (1997), 793-819.

[3] A. Lasota and M. C. Mackey, Chaos, Fractals, and Noise, Stochastic Aspect of Dynamics (Applied Math. Sci. **97**), Springer, 1994.

[4] A. Lasota, M. C. Mackey and M. Ważewska-Czyzewska, *Minimizing therapeutically induced anemia,* J. Math. Biology **13** (1981), 149-158.

[5] M.Matsui, M. Yamada and F. Takeo, *Supercyclic and chaotic translation semigroups,* Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3535-3546.

[6] M.Matsui, M. Yamada and F. Takeo, *Erratum to "Supercyclic and chaotic translation semigroups",* Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3751-3752.

[7] M.Matsui and F. Takeo, *Chaotic semigroups generated by certain differential operators of order 1,* SUT Journal of Mathematics. **37** (2001), 51-67.

[8] F. Takeo, *Chaos and hypercyclicity for solution semigroups to some partial differential equations,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, to appear.

# Estimates of $\alpha$-Riesz capacities with respect to the Hausdorff measure in metric spaces

Akane Iwamura

Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University

**ABSTRACT.** We consider a compact metric space $(X, d)$ such that $X$ is a $\beta$-set ($\beta > 0$). In this space, we define $\alpha$-Riesz capacities and investigate the relationships between these capacities and Hausdorff measures.

Let $\mathbf{R}^N$ be the $N$-dimensional Euclidean space. The Bessel capacity is important as a way of characterizing certain small subsets of $\mathbf{R}^N$. The following estimates for the $\alpha$-Bessel capacity $B_{\alpha,p}(B_r)$ of a ball $B_r$ of radius $r$ are well-known (cf. [3], [1]).

**Theorem A.** *Let $1 < p < \infty$ and $\alpha > 0$.*

(i) *If $\alpha p < N$, then there exists a constant $C \geq 1$ such that*

$$C^{-1} r^{N-\alpha p} \leq B_{\alpha,p}(B_r) \leq C r^{N-\alpha p}$$

*for all $B_r$ of radius $r$.*

(ii) *If $\alpha p = N$ and $0 < \bar{r} < 1$, then there exists a constant $C \geq 1$ such that*

$$C^{-1}(\log \frac{1}{r})^{1-p} \leq B_{\alpha,p}(B_r) \leq C(\log \frac{1}{r})^{1-p}$$

*for $0 < r \leq \bar{r}$.*

We also note that the Bessel capacity $B_{\alpha,p}(E)$ with order $\alpha$ is comparable to the Riesz capacity $C_{\alpha,p}(E)$ with order $\alpha$ for a set $E$ in a fixed ball.

In this report we consider a compact metric space $(X, d)$ with $\operatorname{diam} X = R$. Furthermore, suppose that $X$ is a $\beta$-set ($\beta > 0$), i.e., there exist a positive Radon measure $\mu$ on $X$ and positive real numbers $b_1$, $b_2$, $R_0$ such that

$$b_1 r^\beta \leq \mu(B(x,r)) \leq b_2 r^\beta$$

for all point $x \in X$ and all positive real number $r \leq R_0$. Fix a $\beta$-measure $\mu$. We may assume that

$$b_1 r^\beta \leq \mu(B(x,r)) \leq \mu(\overline{B(x,r)}) \leq b_2 r^\beta \tag{1}$$

for all $r \leq 3R$ by choosing different constants $b_1$, $b_2$ if necessarily.

In this space we consider an $\alpha$-Riesz kernel on $X \times X$, i.e.,

$$K_\alpha(x,y) = d(x,y)^{\alpha-\beta} \ (0 < \alpha < \beta)$$

and, for a non-negative, $\mu$-measurable function $f$ and a positive Radon measure $\nu$ on $X$, define $\alpha$-Riesz potentials $K_\alpha f(x)$, and $K_\alpha \nu(x)$ by

$$K_\alpha f(x) = \int_X K_\alpha(x,y) f(y) d\mu(y) \qquad x \in X,$$

$$K_\alpha \nu(x) = \int_X K_\alpha(x,y) d\nu(y) \qquad x \in X.$$

For the kernel $K_\alpha$ on $X \times X$ we also define the $(\alpha, p, \mu)$-Riesz capacity $C_{\alpha,p,\mu}(E)$ of a set $E$.

**Definition .** *Let $1 < p < \infty$ and $E$ be a set. Denote*

$$\mathcal{F}(K_\alpha, p, \mu, E) = \{f \in L^p(\mu) \ : \ f \geq 0, \ K_\alpha f \geq 1 \ on \ E\},$$

*and*

$$C_{\alpha,p,\mu}(E) = \inf\{\int f^p d\mu \ : \ f \in \mathcal{F}(K_\alpha, p, \mu, E)\}.$$

*If $\mathcal{F}(K_\alpha, p, \mu, E)$ is empty, we regard $C_{\alpha,p,\mu}(E)$ as $\infty$.*

Then, by the properties of a $\beta$-set and using distribution functions we obtain following two estimates of $C_{\alpha,p,\mu}(B)$ for a ball $B$ corresponding to the results of [1] or [3].

**Theorem 1.** *Let $0 < \alpha < \beta$ and $1 < p < \frac{\beta}{\alpha}$. Then there exists a constant $C > 1$ such that*

$$C^{-1} r^{\beta-\alpha p} \leq C_{\alpha,p,\mu}(B(x_0, r)) \leq C r^{\beta - \alpha p}$$

*for all $x_0 \in X$ and $0 < r \leq R$.*

**Theorem 2.** *Let $0 < \alpha < \beta$, $1 < p < \infty$, $\alpha p = \beta$ and $b_1$, $b_2$ be numbers in (1). Furthermore put*

$$\eta_1 = e^{\frac{2b_2}{b_1 \beta}}, \quad \eta_2 = e^{\frac{1}{\beta}} \quad and \quad \zeta = \min\{\frac{1}{2\eta_1}, \frac{1}{2\eta_2}, \frac{1}{2e}\}. \tag{2}$$

*Then there exists a constant $C > 1$ such that*

$$C^{-1}(\log \frac{R}{2r})^{1-p} \leq C_{\alpha,p,\mu}(B(x_0, r)) \leq C(\log \frac{R}{2r})^{1-p},$$

*for all $x_0 \in X$ and $0 < r \leq \zeta R$.*

On the other hand the Hausdorff measure provides another approach to investigate small subsets of $\mathbf{R}^N$. Let $h(r)$ $(0 \leq h(r) \leq +\infty)$ be an increasing function, defined for $r \geq 0$, and satisfying $h(0) = 0$. Let $E \subset \mathbf{R}^N$. For any $\delta$, $0 < \delta \leq \infty$, a set function $\Lambda_h^\delta$ is defined by

$$\Lambda_h^\delta(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} h(r_j),$$

where the infimum is taken over all coverings by countable unions of balls $B(x_j, r_j)$ satisfying $r_j \leq \delta$. And the value defined by

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\delta \to 0} \Lambda_h^\delta(E)$$

is the Hausdorff measure of $E$ with respect to the function $h$.

The relationships between the Bessel capacity and the Hausdorff measure have been investigated. The upper estimate for the $\alpha$-Bessel capacity in term of the Hausdorff measure is as follows (cf. [1]).

**Theorem B.** *Let $1 < p < \infty$, $0 < \alpha p \leq N$ and $E \subset \mathbf{R}^N$. Set $h(r) = r^{N-\alpha p}$ for $\alpha p < N$ and $h(r) = (\log_+ \frac{2}{r})^{1-p}$ for $\alpha p = N$. Then there is a constant $C > 0$ independent of $E$ such that*

$$B_{\alpha,p}(E) \leq C \Lambda_h^1(E),$$

*and moreover, $\Lambda_h(E) < \infty$ implies $B_{\alpha,p}(E) = 0$.*

The set function $\Lambda_h^\infty$ is often more useful than the Hausdorff measure itself. It is called the Hausdorff content or the Hausdorff capacity.

The lower estimate for $B_{\alpha,p}$ in term of the Hausdorff content is also stated in Adams and Hedberg [1] as follows;

**Theorem C.** *Let $1 < p < \infty$, $0 < \alpha p \leq N$ and $p' = \frac{p}{p-1}$, and let $h$ be an increasing function on $[0, \infty)$ such that $h(0) = 0$, and*

$$\int_0^1 \left( \frac{h(r)}{r^{N-\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \infty.$$

*Let $E \subset \mathbf{R}^N$ be compact satisfying $\Lambda_h^\infty(E) > 0$ and choose $\delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, so that*

$$h(\delta) \leq \Lambda_h^\infty(E).$$

*Set*

$$H = \int_0^\delta \left( \frac{h(r)}{r^{N-\alpha p}} \right)^{p'-1} \frac{dr}{r} + \Lambda_h^\infty(E)^{p'-1} \int_\delta^1 \left( \frac{1}{r^{N-\alpha p}} \right)^{p'-1} \frac{dr}{r}.$$

*Then there is a constant $C > 0$, independent of $h$ and $E$, such that*

$$\Lambda_h^\infty(E) \leq C H^{p-1} B_{\alpha,p}(E).$$

*In particular $B_{\alpha,p}(E) = 0$ implies $\Lambda_h(E) = 0$.*

Next we define the $s$-Hausdorff measure of a set $E$ $(s \geq 0)$ by

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to \infty} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E),$$

where

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \Lambda^\delta_h(E) \quad for \quad h(r) = r^s.$$

We next consider the upper estimate for the $\alpha$-Riesz capacities in term of the $s$-Hausdorff measure corresponding to Theorem B. The upper estimate is given as follows.

**Theorem 3.** *Let $0 < \alpha < \beta$, $1 < p \leq \frac{\beta}{\alpha}$ and $b_1$ be the number in* (1). *Further, let $E \subset X$ and set $h(r) = r^{\beta - \alpha p}$ for $\alpha p < \beta$ and $h(r) = (\log \frac{R}{2r})^{1-p}$ for $\alpha p = \beta$. Then there exists a constant $C > 0$, depending only on $\alpha$, $\beta$, $p$ and $b_1$, such that*

$$C_{\alpha,p,\mu}(E) \leq C \Lambda^\delta_h(E)$$

*where $\delta = R$ for $\alpha p < \beta$ and $\delta = \zeta R$ with $\zeta$ in* (2) *for $\alpha p = \beta$. Furthermore, if $\alpha p < \beta$ and $\Lambda_h(E) < \infty$, then $C_{\alpha,p,\mu}(E) = 0$.*

We next state the correspondence to Theorem C. Frostman's lemma is usually proved in Euclidean space. But Mattila also has proved by using the Hahn-Banach extension theorem, in a compact metric space, the following result corresponding to Frostman's lemma (cf. [4, 8.17 Theorem]).

**Lemma D.** *Let $0 < \delta \leq \infty$ and $0 \leq s < \infty$. There is a positive Radon measure $\nu$ on $X$ such that $\nu(X) = \lambda^s_\delta(X)$ and*

$$\nu(E) \leq (\operatorname{diam} E)^s \quad for\ all\ E \subset X\ with\ \operatorname{diam} E < \delta. \tag{3}$$

*In particular, if $\mathcal{H}^s(X) > 0$, then there exist $\delta > 0$ and $\nu$ satisfying* (3) *and $\nu(X) > 0$. Here*

$$\lambda^s_\delta(X) = \inf\{\sum_j c_j (\operatorname{diam} E_j)^s \ :\ \sum_j c_j 1_{E_j} \geq 1 \ on\ X,\ c_j > 0,\ (\operatorname{diam} E_j) \leq \delta\}.$$

By using this lemma, we shall prove the following theorem in a metric space.

**Theorem 4.** *Let $1 < p < \infty$, $0 < \alpha p \leq \beta$ and put $k = \beta - \alpha p + \varepsilon$ for $\varepsilon > 0$. Suppose that $E \subset X$ is compact. If $C_{\alpha,p,\mu}(E) = 0$, then $\mathcal{H}^k(E) = 0$.*

In this report we don't state proofs of Theorem 1, 2, 3 and 4. But we wrote this report based on [2], which includes proofs of these theorems.

## References


[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Springer, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1999.

[2] A. Iwamura and C. Imaoka, *$\alpha$-Riesz capacities and Hausdorff measures on a $\beta$-set*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. (to appear).

[3] N. G. Meyers, *A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes*, Math. Scand. **26** (1970), 255-292.

[4] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Univ. Press, 1995.

# Estimates of Maximal Functions by Hausdorff Contents in a Metric Space

**Hisako Watanabe**

Department of Mathematics, Ochanomizu University, Tokyo 112-8610, Japan,(E-mail: watahisa@cc.ocha.ac.jp)

**Abstract**

Let $M$ be the Hardy-Littlewood maximal operator in a quasi-metric space $X$. We give the estimates of $Mf$ with weak type and strong type with respect to the $\alpha$-Hausdorff content. To do these, we use the dyadic balls introduced by E. Sawyer and R. A. Wheeden.

In analysis many operators are dominated by constant multiples of the Hardy-Littlewood maximal operators. In $\mathbf{R}^n$ the maximal function $Mf$ of $f$ is defined by

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{|B|} \int_B |f| dx,$$

where the supremum is taken over all balls $B$ containing $x$ and $|B|$ stands for the $n$-dimensional volume of $B$.

In 1988 D. A. Adams considered the estimates of the maximal functions with respect to the $\alpha$-Hausdorff content $H_\infty^\alpha$ and proved the following strong type inequality (cf. [1]).

**Theorem A.** *Let $0 < \alpha < n$. Then there is a constant $c$ such that*

$$\int Mf dH_\infty^\alpha \leq c \int |f| dH_\infty^\alpha.$$

In this theorem, the integral of a nonnegative function $g$ with respect to $H_\infty^\alpha$ is in the sense of Choquet and is defined by

$$\int g dH_\infty^\alpha := \int_0^\infty H_\infty^\alpha(\{x \in \mathbf{R}^n ; g(x) > t\}) dt.$$

In 1998 J. Orobitg and J. Verdera generalized Theorem A as follows (cf. [3]).

**Theorem B.** *Let $0 < \alpha < n$. Then*

(i)
$$\int (Mf)^p dH_\infty^\alpha \le c \int |f|^p dH_\infty^\alpha, \quad \alpha/n < p,$$

(ii)
$$H_\infty^\alpha(\{x; Mf(x) > t\}) \le ct^{-\alpha/n} \int |f|^{\alpha/n} dH_\infty^\alpha.$$

To prove Theorem A and Theorem B, the authors considered the maximal function and the $\alpha$-Hausdorff content restricted to dyadic cubes. More precisely, let us define $\tilde{M}f$ and $\tilde{H}_\infty^\alpha$ in $\mathbf{R}^n$.

For each $x$
$$\tilde{M}f(x) := \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dy,$$

where the supremum is taken over all dyadic cubes containing $x$ and for a subset $E$ of $\mathbf{R}^n$
$$\tilde{H}_\infty^\alpha(E) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} l(Q_j)^\alpha,$$

where the infimum is taken over all coverings of $E$ by countable families of dyadic cubes and $l(Q_j)$ stands for the side length of $Q_j$.

We see that $Mf$ and $H_\infty^\alpha(E)$ are comparable to $\tilde{M}f$ and $\tilde{H}_\infty^\alpha(E)$, respectively. So they used $\tilde{M}$ and $\tilde{H}_\infty^\alpha$ instead of $M$ and $H_\infty^\alpha$.

In this paper we estimate the Hardy-Littlewood maximal functions by Hausdorff contents in a quasi-metric space.

Recall that $(X, \rho)$ is called a quasi-metric space if the mapping $\rho$ from $X \times X$ to $[0, \infty)$ has the following three properties;

(i) $\rho(x, y) = 0$ if and only if $x = y$,

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ for all $x,\ y \in X$,

(iii) There is a constant $K \ge 1$ such that

$$\rho(x, y) \le K(\rho(x, z) + \rho(z, y)) \quad \text{for all } x,\ y,\ z \in X. \tag{1}$$

In addition, we assume that the diameter of $X$ is finite and set

$$\operatorname{diam} X = R.$$

Let $M$ be the Hardy-Littlewood maximal operator and $H_\infty^\alpha$ be the $\alpha$-dimensional Hausdorff content.

Furthermore we suppose that there are a nonnegative Borel measure $\mu$ in $X$ and a positive number $d$ such that

$$b_1 r^d \leq \mu(B(x,r)) \leq b_2 r^d \tag{2}$$

for all positive $r \leq R$, where

$$B(x,r) := \{y \in X; \rho(x,y) < r\}.$$

In a quasi-metric space there is no dyadic cube. Instead of dyadic cubes E. Sawyer and R. L. Wheeden constructed a family of balls in [4] as follows:

**Proposition C.** *Put $\lambda = K + 2K^2$. Then, for each integer $k$, there exists a sequence $\{B_j^k\}_j$ ($B_j^k = B(x_{jk}, \lambda^k)$) of balls of radius $\lambda^k$ having the following properties:*

(i) *Every ball of radius $\lambda^{k-1}$ is contained in at least one of the balls $B_j^k$,*

(ii) $\sum_j \chi_{B_j^k} \leq M$ *for all $k$ in* $\mathbf{Z}$,

(iii) $\hat{B}_i^k \cap \hat{B}_j^k = \emptyset$ *for $i \neq j$, $k \in \mathbf{Z}$, where* $\hat{B}_j^k = B(x_{jk}, \lambda^{k-1})$.

They call these balls $B_j^k$ dyadic balls. Denote by $\mathcal{B}_d$ the family of all dyadic balls.

Using dyadic balls, we give the estimates of the maximal operator $M$ in a quasi-metric space $X$ by the integral with respect to $H_\infty^\alpha$, corresponding to the results of Orobitg–Verdera.

**Theorem 1.** *Let $(X, \rho)$ be a quasi-metric space with diam $X < \infty$. Suppose that there are a constant d and a Borel measure $\mu$ on $X$ satisfying (2) for every ball $B(x,r) \subset X$. Furthermore, let $0 < \alpha < d$. Then*

$$H_\infty^\alpha(\{x; Mf(x) > t\}) \leq c r^{-\alpha/d} \int |f|^{\alpha/d} dH_\infty^\alpha$$

*for every $t > 0$.*

**Theorem 2.** *Under the same assumptions as Theorem 1*

$$\int (Mf)^p dH_\infty^\alpha \leq c \int |f|^p dH_\infty^\alpha \quad \text{for} \quad \frac{\alpha}{d} < p.$$

*Here $c$ is a constant independent of $f$ and $t$.*

This report is an outline of the paper [5].

## References


[1] D. R. Adams, A note on the Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity, *Lecture Notes in Math.* **1302**, Springer, 1988, 115–124.

[2] R. R Coifman and G. Weiss, Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes, *Lecture Note in Math.* **242**, Springer, 1971.

[3] J. Orobitg and J. Verdera, Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal operator, *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998), 145-150.

[4] E. Sawyer and R. A. Wheeden, Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogenous spaces, *Amer. J. Math.* **114** (1992), 813-874.

[5] H. Watanabe, Estimate of maximal functions by Hausdorff contents in a metric space (Preprint).

# Steady States Solutions to Diffusive Logistic Equation with Constant Yield Harvesting

Kengo Sato (Graduate School of Mathematics, Tokyo University of Science)
Shizuo Miyajima (Dept. of Math., Fac. of Sci., Tokyo University of Science)

## 1 Introduction

収穫項 (harvesting term) をもつ拡散 logistic 方程式については, Oruganti-Shi-Shivaji [6] により多くの興味深い結果が述べられているが, 定理の証明にはいくつかの不完全な点がある. その証明の不備を完全に補い, いくつかの新しい結果を得た. 考える問題は, 次の境界値問題である.

$$\begin{cases} -\Delta u = au - bu^2 - ch(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\Omega$ は $C^2$ 級の境界をもつ $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ の有界領域, $a, b > 0$, $c \geq 0$ は定数, $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ は, 実数値関数で, $h(x) > 0$ $(x \in \Omega)$, $h(x) = 0$ $(x \in \partial\Omega)$, $\|h\|_\infty = 1$ をみたすものとする.

**Biological Background** (1) は, 1つの生物種の群集動態 (population dynamics) から導かれている: $u(t, x)$ を時刻 $t$, 場所 $x$ における生物種の密度とし, (i) 生物種は有界領域 $\Omega$ 内にランダムに拡散しようとする, (ii) 生物種の生殖作用はロジスティック成長に従う, (iii) 境界 $\partial\Omega$ は生物種が生息しない, (iv) 拡散は場所によらない, と仮定する. この仮定の下, $u(t, x)$ は次の反応-拡散方程式を満たす (これを Fisher 方程式という).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = au\Big(1 - \dfrac{u}{K}\Big) & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ u(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $D > 0$ は拡散係数, $a > 0$ は (線型) 生殖比率である.

Oruganti-Shi-Shivaji [6] は, この生態系に「収穫」を考え, 収穫項 (harvesting term) $ch(x)$ を導入した. これを (2) の方程式に加え, 適当な変数変換をすると次の方程式に変形される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = au - bu^2 - ch(x) \tag{3}$$

方程式 (3) に (2) の初期条件・境界条件をつけた, 初期値・境界値問題の定常問題が (1) である.

**Known Results** $c = 0$ の場合 (logistic case) については, 多くの研究結果がすでに知られている. 特に次の定理は本研究の基本となる大変重要な結果である.

**定理 1.1 ([6, Theorem 2.5])** 境界値問題 ((1) で $c=0$ の場合)：

$$\begin{cases} -\Delta u = au - bu^2 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

について次が成り立つ.

(i) $a \leq \lambda_1$ ならば，(4) は正値解をもたない.

(ii) $a > \lambda_1$ ならば，(4) は正値解 $v_a$ を一意にもち，$v_a$ は安定解で，$a$ に関して単調増加である.

ここで $\lambda_1$ は 0-Dirichlet 境界条件つき $-\Delta$ の第 1 固有値である.

ここで一般に，

$$\begin{cases} \Delta u + g(x,u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

の解 $u$ が安定であるとは，0-Dirichlet 境界条件つき $-\Delta - g_u(x,u)$ のすべての固有値が正であることをいう．$-\Delta - g_u(x,u)$ の第 1 固有値を $\mu_1(u)$ と表す．0 が $-\Delta - g_u(x,u)$ の固有値であるとき，$u$ を退化解，そうでないとき非退化解という.

## 2 Oruganti-Shi-Shivaji による結果と問題点

ここでは，Oruganti-Shi-Shivaji [6] によるいくつかの結果を列記し，その証明における問題点を挙げる．また，証明における主な手法は優解・劣解の方法 (method of super-sub solutions)，分岐理論 ([2], [4])，および anti-maximum principle([3]) である.

**定理 2.1 ([6, Theorem 3.1])** $a > \lambda_1$ ならば，ある定数 $c_1 = c_1(a,b) > 0$ が存在し，任意の $c \in (0, c_1)$ に対し，(1) は次をみたす正値解 $u_1(x,c)$ をもつ.

$$au_1(x,c) - bu_1(x,c)^2 > ch(x) > 0 \quad (\forall x \in \Omega) \tag{6}$$

この定理の証明において，(6) をみたすように正数 $c$ の範囲を制限するわけであるが，[6] では，(6) をみたすには，$c>0$ を次のようにとればよいと主張している.

$$c \leq \min\left\{ \frac{\lambda_1(a-\lambda_1)}{b},\ \frac{a^2 - (2b\|v_a\|_\infty - a)^2}{4b} \right\} \tag{7}$$

いま $\|v_a\|_\infty \leq \dfrac{a}{b}$ であることは容易に分かる．ところが，もし $\|v_a\|_\infty = \dfrac{a}{b}$ ならば，(7) をみたす $c>0$ をとることができないのだが，それは [6] では検証されていない．そこで，$v_a$ が最大値 $\dfrac{a}{b}$ をとらないことを示し，この不備を補った (定理 3.1，補題 3.2).

**定理 2.2 ([6, Theorem 3.2])** $a > \lambda_1$ ならば，ある定数 $c_2 = c_2(a,b) \geq c_1$ が存在し，次が成り立つ.

(i) $c \in (0, c_2)$ ならば極大正値解 $u_1(x,c)$ をもち，$u_1(x,c)$ は $c$ に関して単調減少である.

(ii) 各 $c \in (0, c_2)$ に対し，$u_1(x,c)$ は安定解であり，$\mu_1(u_1(\cdot,c)) > 0$.

(iii) $c = c_2$ ならば，(1) は正値解をもち，$\mu_1(u_1(\cdot,c_2)) = 0$.

(iv) $c > c_2$ ならば，(1) は正値解をもたない.

**定理 2.3 ([6, Theorem 3.3])** $a > \lambda_1$, $a \notin \sigma(-\Delta)$ ならば，ある定数 $c_3 = c_3(a,b) > 0$ が存在し，$c \in (0, c_3)$ ならば，次が成り立つ.

(i) $u_1(x,c)$ と異なる解 $u_2(x,c)$ が存在する.

(ii) ある $\delta_h > 0$ があって，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_h)$ に対し，$u_2(x,c) > 0$ $(\forall x \in \Omega)$.

解 $u_2(x,c)$ は $F(c,u) = \Delta u + au - bu^2 - ch(x)$ に $(0,0)$ で陰関数定理を適用して得られ，$u_2(x,c) = cw_0(x) + o(c)$ という形に書くことができる．ここで $w_0(x)$ は境界値問題:

$$\begin{cases} \Delta w + aw = h & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

の解であり，anti-maximum principleにより，ある $\delta_h > 0$ があって，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_h)$ に対し，$w_0(x) > 0$ $(\forall x \in \Omega)$, $\partial_n w_0(x) < 0$ $(\forall x \in \partial\Omega)$ であることが分かる.
ところが，このことから $u_2(x,c) > 0$ $(\forall x \in \Omega)$ が従うことの証明は [6] では述べられていない．これを $c > 0$ の範囲を制限して証明し，さらにその範囲では，$u_2(\cdot,c)$ は，$c$ に関して単調増加であることを示した (定理 3.3).

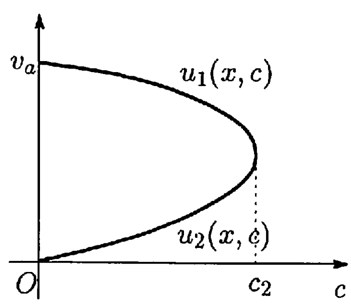
$a$ が $\lambda_1$ に十分近ければ，(1) の完全な分岐図 (bifurcation diagram) を書くことができる.

**定理 2.4 ([6, Theorem 4.1])** ある $\delta_2 > 0$ が存在し，$a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_2)$ ならば，次が成り立つ.

(i) $c \in [0, c_2)$ ならば，(1) は 2 つの正値解 $u_1(x,c), u_2(x,c)$ をもつ.
　$c = c_2$ ならば，(1) は 1 つの解 $u_1(x, c_2)$ をもつ.
　$c > c_2$ ならば，(1) は正値解をもたない.

(ii) $u_1(x, c_2)$ は (1) の退化解で，$\mu_1(u_1(\cdot, c_2)) = 0$. また，$\mu_1(u_2(\cdot, c)) < 0$ $(c \in [0, c_2))$.

(iii) (1) の分岐図は次のようになる.




この定理の証明には，次の 2 つの補題を用いる.

**補題 2.5 ([6, Lemma 4.2])** ある $\delta_3 > 0$ があり，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_3)$ に対して，$\delta_4 > 0$ があって，(1) をみたす $c \geq 0$ と退化解 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) =: X$ の組 $(c,u)$ が，

$$M_0 := \{(c,u) \in \mathbb{R} \times X \mid |c| \leq \delta_4,\ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \delta_4\}$$

の中にただ 1 つ存在する.

**補題 2.6 ([6, Lemma 4.3])** $O_\delta := \{(c,u) \in \mathbb{R} \times X \mid 0 \leq c \leq \delta,\ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \delta\}$ とする．十分小さい任意の $\delta > 0$ に対して，ある $\eta > 0$ があって，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \eta)$ に対し

て，次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $c \geq 0$, $u \geq 0$ が (1) をみたすならば，$(c,u) \in O_\delta$.

(ii) $(c,u) \in O_\delta$ が (1) をみたすならば，$u \geq 0$.

補題 2.5 の [6] の証明では，$F(a,c,u) := \Delta u + au - bu^2 - ch(x)$ とし，$(a,c,u) \in \mathbb{R}^2 \times X$ のとき，$F(a,c,u) \in L^2(\Omega)$ としているが，これには本来，次元の制約 $(N \leq 8)$ が必要である.

さらに，補題 2.6 に関しては，(ii) の証明において，$u = \alpha\phi_1 + v$, $\alpha > 0$, $\phi_1$ は $\lambda_1$ に対応する固有関数 ($\phi_1 > 0$ *in* $\Omega$, $\partial_n \phi_1 < 0$ *on* $\partial\Omega$) であり，さらに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ があって，$0 < a - \lambda_1 < \delta$ ならば $\|v\|_{H^2(\Omega)} < \alpha\varepsilon$ であることが分かるが，このことから $u$ の正値性は従わない.

これらの問題点を楕円型方程式の $L^p$ 理論 ([1, 第 16 章]) を使うことにより解決し，上の 2 つの補題が ($X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ として，$\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ を $\|\cdot\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ におきかえて) 成り立つことを証明し (定理 3.4, 3.5, 補題 3.6)，定理 2.4 の証明を完全なものにした.

## 3 Main Results

以下，得られた結果をまとめておく．まず，定理 2.1 は次により完全になる.

**定理 3.1** $\|v_a\|_\infty < \dfrac{a}{b}$ が成り立つ.

この定理の証明には，次の補題を用いる．補題の証明は [5] と同様にしてできる.

**補題 3.2** (4) の正値解 $v_a$ は $\Omega$ の内部で実解析的である.

次に，定理 2.3 で得られた解 $u_2(x,c)$ について次が成り立つ.

**定理 3.3** ある $c_4 \in (0, c_3]$ と，ある $\delta_h > 0$ があって，任意の $c \in (0, c_4)$, $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_h)$ に対して，(1) の解 $u_2(x,c)$ は正値で，$c$ に関して単調増加である.

補題 2.5，補題 2.6 は次のような主張として正しく示され，定理 2.4 が証明できる．以下，$p$ を十分大きくとり，$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ となるようにする.

**定理 3.4** ある $\delta_3 > 0$ があり，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_3)$ に対して，$\delta_4 > 0$ があって，(1) をみたす $c \geq 0$ と退化解 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) =: X$ の組 $(c,u)$ が，

$$M_0 := \{(c,u) \in \mathbb{R} \times X \mid |c| \leq \delta_4,\ \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \delta_4\}$$

の中にただ 1 つ存在する.

**定理 3.5** $O_\delta := \{(c,u) \in \mathbb{R} \times X \mid 0 \leq c \leq \delta,\ \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \delta\}$ とする．十分小さい任意の $\delta > 0$ に対して，ある $\eta > 0$ があって，任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \eta)$ に対して，次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $c \geq 0$, $u \geq 0$ が (1) をみたすならば, $(c,u) \in O_\delta$.

(ii) $(c,u) \in O_\delta$ が (1) をみたすならば, $u \geq 0$.

定理 3.5 (i) は次の評価式により示される．この補題の証明には，[1, 定理 16.10] (楕円型方程式の解の $W^{m,p}$ ノルム評価) を用いる．

**補題 3.6** $u$ を (1) の非負値解とする．このとき，ある定数 $C_1$, $C_2>0$ が存在し，

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C_1(a-\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + C_2(a-\lambda_1) \tag{9}$$

そして，問題であった (ii) の証明は，次のようにしてできる．
[6] の証明と同様にして，$u = \alpha\phi_1 + v$, $\alpha > 0$, $\phi_1$ は $\lambda_1$ に対応する固有関数 ($\phi_1 > 0$ $in$ $\Omega$, $\partial_n\phi_1 < 0$ $on$ $\partial\Omega$) であり，さらに，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ があって，$0<a-\lambda_1<\delta$ ならば $\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} < \alpha\varepsilon$ であることが分かる ([4])．
ところが，今度は Sobolev の埋め込み定理により，$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} < \alpha\varepsilon$ であることが分かるので，定理 3.3 の $u_2(x,c)$ の正値性を示すときと同様にして，$u \ge 0$ が分かる．

定理 3.5 により，$\eta>0$ を十分小さくとれば，任意の $a\in(\lambda_1,\lambda_1+\eta)$ に対し，(1) の非負値解がすべて $O_\delta$ の中にあり，それ以外の非負値解は存在しないことが分かる．そして定理 3.4 で存在と一意性が主張されている退化解は $u_1(x,c_2)$ のことであることが分かり，このことから $u_1(x,c_2)$ 以外のすべての解は非退化であることが分かる．これが $u_2(\cdot,c)$ の分岐枝を $c_2$ までのばすポイントであり，以降の証明は [6] でなされている．

## 参考文献


[1] 田辺 広城,「関数解析」(下) , 実教出版, 1981.

[2] Ambrosetti, A., Prodi, G., "A Primer of Nonlinear Analysis", Cambridge University Press, 2000.

[3] Clément, Ph., Peletier, L.A., *Anti-maximum principle for second-order elliptic operators*, J.Differential Equations, **34**, no.2 (1979) 218-229.

[4] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., *Bifurcation from Simple Eigenvalue*, Jour. Func. Anal. **8** (1973) 321-340.

[5] K, Kato, *New idea for proof of analyticity of solutions to analytic nonlinear elliptic equations*, SUT Journal of Math. **32**, no.2, (1996) 157-161.

[6] Oruganti, S., Shi, J., Shivaji, R., *Diffusive Logistic Equation with Constant Yield Harvesting. I : Steady States*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, no.9 (2002) 3601-3619.

# Equality conditions for norm inequalities in reproducing kernel Hilbert spaces

Akira Yamada

**Abstract**

We consider norm inequalities arrising from nonlinear mappings between reproducing kernel Hilbert spaces. It is known that, in many cases important for applications, equality for such inequalities occurs only for the reproducing kernels, while this does not hold in general RKHSs. Introducing a new class of RKHSs, we give a fairly general equality condition for norm inequalities. As an application we show that our results allow a unified approach to proofs of the known results concerning equality.

## 1 等号問題

一般に再生核 $K$ をもつ集合 $E$ 上の複素 reproducing kernel Hilbert space (RKHS) を $H_K(E)$ で, またそのノルムや内積をそれぞれ $\|\cdot\|_K$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ で表す. $E$ や $K$ を明記する必要がない場合は $H(E)$ または $H_K$ と略記する. 斉藤氏 [4] にしたがって, 次の形のノルム不等式を考えよう. 二つの整函数

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n,\quad \psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$$

に対して, 1) 任意の $n>0$ に対して $p_n\geq 0$, 及び 2) $p_n=0$ ならば $c_n=0$ を仮定する. $\psi(K)\gg 0$ であるから, $\psi(K)$ を再生核とする $E$ 上の RKHS $H_{\psi(K)}$ が一意的に存在する. $f\in H_K$ に対して $\varphi_\psi(z)=\sum_{p_n>0}\frac{|c_n|^2}{p_n}z^n$ とおくと次のノルム不等式

$$\|\varphi(f)\|_{\psi(K)}^2\leq\varphi_\psi(\|f\|_K^2),\quad \forall f\in H_K \tag{1}$$

が得られる [4, 2]. 特に $\varphi(z)=\psi(z)$ の場合には, 再生核の一般論 [1] より $f=K_q$ $(q\in E)$ のとき不等式 (1) の等号が成り立つことがわかる.

この逆 (等号が核函数に限ること) が多くの応用上重要な場合に成り立つことは, 斉藤氏や J. Burbea 等の研究により知られている. しかしまた, 核函数 $K_q$ 以外の函数が等号を与えるような RKHS の例も容易に構成することができる [3].

表題における「等号問題」とは, 不等式 (1) 等の核函数に由来するノルム不等式の等号が成り立つ場合を調べる問題である. この問題を扱った論文は上記のようにこれ迄多数出版されているが, 対象とする空間の個性に依拠した各論的取り扱いであり, 統一した視点に欠けるように思われる. ここでは, (1) の等号が核函数 $K_q$ のみに限るようなある程度一般的な条件が得られたので報告する.

## 2 Algebra-dense な RKHS

以下において $m$ は 2 以上の整数とする. $H_j = H_{K^{(j)}}(E)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ とおき, $K_x^{(j)}$ を点 $x \in E$ における $H_j$ の再生核とする. $E_d^m$ を $E^m = \prod_{j=1}^m E$ の対角線とする. また $E^m$ 上の RKHS としてのテンソル積 $H = \otimes_{j=1}^m H_j$ に対して, $H_0 = \{f \in H \mid f|E_d^m = 0\}$ とする. $f,\ g \in H$ に対して, 同値関係 $f \sim g$ を $f|E_d^m = g|E_d^m$ で定義する. $\otimes_{j=1}^m \phi_j \in H_0^\perp$ のとき, $\otimes_{j=1}^m \phi_j$ は *extremal* であると言う.

**定義 1.** $H_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ は RKHS で $H = \otimes_{j=1}^m H_j$ とする.
$H$ が**正則** (cf. [3]) $\iff$ $\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in H$ が nonzero extremal ならば点 $q \in E$ が存在して, $\exists c_j \in \mathbb{C}$ s.t. $\phi_j = c_j K_q^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.
$H$ が**弱正則** $\iff$ $\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in H$ が nonzero extremal ならば, 点 $q \in E$ が存在して, 各 $j$ に対して, $q$ は $H_j$ の共通零点かまたは $\exists c_j \in \mathbb{C}$ s.t. $\phi_j = c_j K_q^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

以下, $R$ は通常の和と積が定義された $E$ 上の複素函数からなる $\mathbb{C}$-algebra とする ($R$ の単位元の存在は仮定しない). $R^{-1}H = \{f \in H \mid rf \in H,\ \forall r \in R\}$ とおく.

**補題 1.** $\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in \otimes_{j=1}^m H_j$ が *nonzero extremal* とする. 各 $j$ に対して $R^{-1}H_j$ が $H_j$ で *dense* になるならば, 任意の $j$ と任意の $f \in R$ と任意の $u \in R^{-1}H_j$ に対して

$$\langle fu, \phi_j \rangle = \Lambda_\phi(f) \langle u, \phi_j \rangle \tag{2}$$

をみたすような $\mathbb{C}$-*algebra homomorphism* $\Lambda_\phi \colon R \to \mathbb{C}$ が一意的に存在する.

$R$ の複素線型部分空間 $R_1, R_2$ に対して, $R_1$ の元と $R_2$ の元の積が生成する $R$ の部分空間を $R_1 \cdot R_2$ で表す.

**定義 2.** 次の条件を満たす三つ組 $(H, E, R)$ を *algebra-dense RKHS* であるという. 1) $H$ は集合 $E$ 上の複素 RKHS, 2) $R$ は $E$ 上の函数からなる $\mathbb{C}$-algebra, 3) $R \cdot (R \cap H)$ は $H$ の dense な部分空間である. $(H, E, R)$ が algebra-dense RKHS のとき, 簡単に $H$ は *R-dense* であるともいう.

$H$ が $R$-dense ならば, $R\cdot(R\cap H)\subset R\cap H$ より, $R\cap H$ は $H$ で dense かつ $R$ のイデアルであることに注意する. $1\in R$ の場合, この条件は $H$ が $R$-dense であることと同値である.

**定義 3.** $(H,E,R)$ は algebra-dense RKHS とする. $\mathbb{C}$-algebra homomorphism $\chi\colon R\to\mathbb{C}$ が次の条件

$$\exists C>0 \text{ s.t. } |\chi(f)|\le C\|f\|,\ \forall f\in R\cap H$$

をみたすとき, $\chi$ を $R$ の *bounded homomorphism* と言う. $R$ の nonzero bounded homomorphism 全体の集合を集合 $E$ の *$H$-hull* といい $\hat{E}_H$ で表す.

**定理 1.** *$(H_j,E,R)$ $(j=1,2,\dots,m)$ は algebra-dense RKHS とする. $\phi=\otimes_{j=1}^m\phi_j\in\otimes_{j=1}^m H_j$ が nonzero extremal ならば, (2) をみたす $\Lambda_\phi\in\bigcap_{j=1}^m\hat{E}_{H_j}$ が一意的に存在する. また, 任意の $j$ $(j=1,2,\dots,m)$ について次のいずれかが成り立つ. 1) $\Lambda_\phi|R\cap H_j=0$, または 2) $\exists C_j\neq 0$ s.t. $\forall f\in R\cap H_j$, $\langle f,\phi_j\rangle=C_j\Lambda_\phi(f)$.*

**定義 4.** Algebra-dense な RKHS $(H,E,R)$ は, 任意の $\chi\in\hat{E}_H$ が $E$ の或る点における point evaluation であるとき, *maximal* であるという. このとき, 簡単に $H$ は *$R$-maximal* とも言う.

**例 1.** $\ell^2(E)=\{f\in\mathbb{C}^E\mid\sum_{x\in E}|f(x)|^2<\infty\}$ とする. $f,g\in\ell^2(E)$ の内積を $\langle f,g\rangle=\sum_{x\in E}f(x)\overline{g(x)}$ で定義すると $\ell^2(E)$ は $E$ 上の RKHS になる. $(\ell^2(E),E,\ell^2(E))$ は algebra-dense かつ maximal な RKHS である.

**系 1.** *全ての $(H_j,E,R)$ $(j=1,2,\dots,m)$ が algebra-dense RKHS で, 少くとも一つの $H_j$ が $R$-maximal ならば, テンソル積 RKHS $\otimes_{j=1}^m H_j$ は弱正則である.*

**定理 2.** *$H_K$ は algebra-dense かつ maximal な $E$ 上の RKHS とする. 二つの整函数*

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,\quad \psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

*に対して, 1) 任意の $n>0$ に対して $p_n\ge 0$, 2) $p_n=0$ ならば $c_n=0$, 及び 3) $c_ic_j\neq 0$ かつ $1\le i<j$ となる $i,j$ が存在する, と仮定する. このとき, $f\in H_K$ がノルム不等式 (1) の等号を与える必要十分条件は, ある $q\in E$ と定数 $C$, $C'\in\mathbb{C}$ が存在して $\varphi(Cz)=C'\psi(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ かつ $f=CK_q$ となることである.*

## 3 具体例と応用

具体例を二つ挙げる. 先ず $E$ は $\mathbb{C}^n$ の空でない部分集合で, $R$ は $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]|E$ ($E$ への制限) である場合を考えよう. $H$ が $\mathbb{C}^n$ の部分集合 $E$ 上の RKHS の

とき, $H$ が $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]|E$-dense であれば, $H$ は *polynomially dense* という. このとき, $H$ が maximal である必要十分条件は

$$q\in\mathbb{C}^n \text{かつ} \exists C>0 \text{ s.t. } |f(q)|\leq C\|f\|,\ \forall f\in\mathbb{C}[z]\cap H \implies q\in E$$

が成り立つことである. Polynomially dense な RKHS の例とそれが maximal になるための一つの十分条件を導くことで Burbea の得た結果等を示すことができる.

次に, 閉リーマン面 $S$ の有理型函数環を $\mathcal{M}(S)$ とする. $E$ が $S$ の正則部分領域のとき, $\mathcal{R}_E$ を $\overline{E}$ で正則な函数からなる $\mathcal{M}(S)$ の $\mathbb{C}$-subalgebra とする. $E$ 上の RKHS $H$ が $\mathcal{R}_E$-dense であるとき, $H$ は *meromorphically dense* という. このとき, $H$ が maximal である必要十分条件は

$$q\in\overline{E} \text{かつ} \exists C>0 \text{ s.t. } \forall f\in\mathcal{R}_E\cap H,\ |f(q)|\leq C\|f\| \implies q\in E$$

で与えられる.

リーマン面上の正則関数及び正則微分に関する次のような RKHS のテンソル積の正則性を調べる. 定義域 $E$ は閉リーマン面 $S$ の正則部分領域とする.

(i) $\mathcal{H}_1(E,\rho)$: (Szegö 型空間) $E$ 上の Hardy $H^2$ 空間に $\|f\|^2=\int_{\partial E}|f|^2\rho|dz|$ でノルムを入れた空間. $\rho|dz|$ は $\partial E$ 上の正値連続な計量.

(ii) $\mathcal{H}_2(E,\rho)$: (Dirichlet 型空間) $E$ 上の正則函数 $f$ で $f(a)=0$ $(a\in E)$ かつ有限な Dirichlet ノルムを持つもの. $\|f\|^2=i\iint_E\rho\,df\wedge\overline{df}$, $\rho$ は $\bar{E}$ 上の正値連続函数.

(iii) $\mathcal{H}_3(E,\rho)$: (Bergman 型空間) $E$ 上の Bergman 空間に $\|f\|^2=i\iint_E\rho f\wedge\bar{f}$ でノルムを入れた空間. $\rho$ は $\bar{E}$ 上の正値連続函数.

**定理 3.** 次が成り立つ.

(i) *RKHS* $\mathcal{H}_j(E,\rho)$ $(j=1,2,3)$ は *meromorphically dense* かつ *maximal* である.

(ii) 任意の整数 $n\geq 2$ に対して $\mathcal{H}_j(E,\rho)^{\otimes n}$ $(j=1,3)$ は正則である. $\mathcal{H}_2(E,\rho)^{\otimes n}$ は弱正則である.

(iii) $\Delta$ を単位円 $\{|z|<1\}$, $a=0$ として, $\mathcal{H}_2=\mathcal{H}_2(\Delta,1)$ とおく. $\phi^{\otimes 2}$ が $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ で *extremal* であるための必要十分条件は $\exists c\in\mathbb{C}$ *s.t.* $\phi=ck_q$ $(q\in\Delta\setminus\{0\})$ または $\phi(z)=cz$. ただし, $k_q(z)=-\frac{1}{2\pi}\log(1-\bar{q}z)$ は $\mathcal{H}_2$ の $q$ における再生核である. したがって, $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ は弱正則であるが正則ではない.

## References


[1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[2] J. Burbea, A Dirichlet norm inequality and some inequalities for reproducing kernel spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 279–285.

[3] S. Saitoh, Reproducing kernels of the direct product of two Hilbert spaces, Riazi J. Karachi Math. Assoc. **4** (1982), 1–20.

[4] ——, Natural norm inequalities in nonlinear transforms, in *General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995)*, 39–52, Internat. Ser. Numer. Math., 123, Birkhaüser, Basel, 1997.



Department of Mathematics
Tokyo Gakugei University
Nukuikita-Machi, Koganei-shi
Tokyo 184, Japan
*E-mail address*: yamada@u-gakugei.ac.jp

# 再生核の理論の Tikhonov 正則化法への応用
# (Applications of the theory of reproducing kernels to the Tikhonov regularization)

Saburou Saitoh

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Gunma University,
Kiryu 376-8515 Japan
e-mail: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

## 1 Introduction

Let $E$ be an arbitrary set, and let $H_K$ be a reproducing kernel Hilbert space (RKHS) admitting the reproducing kernel $K(p,q)$ on $E$. For any Hilbert space $\mathcal{H}$ we consider a bounded linear operator $L$ from $H_K$ into $\mathcal{H}$. We shall consider the best approximate problem

$$\inf_{f\in H_K} \|Lf - \mathrm{b}\|_{\mathcal{H}} \tag{1}$$

for a vector b in $\mathcal{H}$. Then, we have

**Proposition 1.1** *([1,9]) For a vector $b$ in $\mathcal{H}$, there exists a function $\tilde{f}$ in $H_K$ such that*

$$\inf_{f\in H_K} \|Lf - b\|_{\mathcal{H}} = \|L\tilde{f} - b\|_{\mathcal{H}} \tag{2}$$

*if and only if, for the RKHS $H_k$ defined by*

$$k(p,q) = (L^*LK(\cdot,q), L^*LK(\cdot,p))_{H_K}, \tag{3}$$

$$L^*b \in H_k. \tag{4}$$

*Furthermore, if the existence of the best approximation $\tilde{f}$ satisfying (2) is guaranted, then there exists a unique extremal function $f_b$ with the minimum norm in $H_K$, and the function $f_b$ is expressible in the form*

$$f_b(p) = (L^*b, L^*LK(\cdot,p))_{H_k} \quad on \quad E. \tag{5}$$

In Proposition 1.1, note that

$$(L^*\mathrm{b})(p) = (L^*\mathrm{b}, K(\cdot,p))_{H_K} = (\mathrm{b}, LK(\cdot,p))_{\mathcal{H}}; \tag{6}$$

that is, $L^*\mathrm{b}$ is expressible in terms of the known $\mathrm{b}, L, K(p,q)$ and $\mathcal{H}$. $f_{\mathrm{b}}$ in (5) is the Moore-Penrose generalized inverse solution $L^\dagger\mathrm{b}$ of the equation $Lf = \mathrm{b}$. Therefore, Proposition 1.1 gives a necessary and sufficient condition for the existence of the Moore-Penrose generalized inverse. See [13] for the details. Proposition 1.1 is rigid and is not practical in practical applications, because, practical data contain noises or errors and the criteria (4) is not suitable, because the structure of the RKHS $H_k$ is, in general, involved. So, we shall use the Tikhonov regularization and we shall establish good relationship between the Tikhonov regularization and the theory of reproducing kernels. For the Tikhonov regularization, see, for example, [2,3].

## 2 Spectral theory

In order to discuss operator equations for general bounded linear operators $L$, following [2] we shall fix the well-established theory among spectral theory, the Moore-Penrose generalized inverse and the Tikhonov regularization. See [3] for the corresponding results for compact operators $L$.

Let $\{E_\lambda\}$ be a spectral family for the self-adjoint operator $L^*L$. If $L^*L$ is continuously invertible, then

$$(L^*L)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda.$$

In this case, the Moore-Penrose generalized inverse (5) can be represented by the Gaussian normal equation

$$f_{\mathrm{b}}(p) = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda L^* \mathrm{b}. \tag{7}$$

If $\mathcal{R}(L)$ is non-closed and $\mathrm{b} \notin \mathcal{D}(L^\dagger)$, i.e. if the equation $Lf = \mathrm{b}$ is ill-posed, then the integral in (7) does not exist. Then, we shall define

$$f_{\mathrm{b},\alpha}(p) = \int \frac{1}{\lambda + \alpha} dE_\lambda L^* \mathrm{b}. \tag{8}$$

By construction, the operator on the right-hand side of (8) acting on b is continuous, so that, for noisy data $\mathrm{b}^\delta$ with $\|\mathrm{b} - \mathrm{b}^\delta\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$, we can bound the error between $f_{\mathrm{b},\alpha}$ and

$$f^\delta_{\mathrm{b},\alpha}(p) = \int \frac{1}{\lambda + \alpha} dE_\lambda L^* \mathrm{b}^\delta \tag{9}$$

as follows:

**Proposition 2.1** *([2], pages 71-73) For any $b \in \mathcal{D}(L^\dagger)$,*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{L^*L + \alpha I} L^* b = \lim_{\alpha \to 0} f_{b,\alpha} = f_b. \tag{10}$$

*Furthermore,*

$$\|Lf_{b,\alpha} - Lf^\delta_{b,\alpha}\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \tag{11}$$

*and*

$$\|f_{b,\alpha} - f^\delta_{b,\alpha}\|_{H_K} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \tag{12}$$

**Proposition 2.2** *([2], pages 117-118) For any $b \in \mathcal{D}(L^\dagger)$ with $\|b - b^\delta\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$, the function $f^\delta_{b,\alpha}$ defined by (9) is the unique minimizer of the Tikhonov functional*

$$\inf_{f \in H_K} \{\alpha \|f\|^2_{H_K} + \|b^\delta - Lf\|^2_{\mathcal{H}}\}. \tag{13}$$

*If $\alpha = \alpha(\delta)$ is such that*

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$$

*and*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0,$$

*then*

$$\lim_{\delta \to 0} f^\delta_{b,\alpha} = f_b = L^\dagger(b). \tag{14}$$

## 3 Representation of the extremal functions in Tikhonov regularization

Our main purpose in this paper is to give an effective representation of the extremal functions $f_{\mathrm{b},\alpha}$ or $f^{\delta}_{\mathrm{b},\alpha}$ in the Tikhonov regularization, since the representation by spectral theory is abstract, in many practical problems.

By the reproducing property of $K(p,q)$ in $H_K$, we obtain

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{b},\alpha}(p) &= (f_{\mathrm{b},\alpha}(\cdot), K(\cdot,p))_{H_K} \\ &= \left(\frac{1}{L^*L+\alpha I}L^*\mathrm{b}, K(\cdot,p)\right)_{H_K} \\ &= \left(\mathrm{b}, L\frac{1}{L^*L+\alpha I}K(\cdot,p)\right)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Here we set

$$K_L(\cdot,p;\alpha) = \frac{1}{L^*L+\alpha I}K(\cdot,p).$$

Then, by introducing the inner product, for any fixed positive $\alpha > 0$

$$(f,g)_{H_K(L;\alpha)} = \alpha(f,g)_{H_K} + (Lf,Lg)_{\mathcal{H}}, \tag{16}$$

we shall construct the Hilbert space $H_K(L;\alpha)$ comprising functions of $H_K$. This space, of course, admits a reproducing kernel. Furthermore, we obtain, directly

**Theorem 3.1** *The extremal function $f_{b,\alpha}(p)$ in the Tikhonov regularization*

$$\inf_{f\in H_K}\{\alpha\|f\|^2_{H_K} + \|b - Lf\|^2_{\mathcal{H}}\} \tag{17}$$

*is represented in terms of the kernel $K_L(p,q;\alpha)$ as follows:*

$$f_{b,\alpha}(p) = (b, LK_L(\cdot,p;\alpha))_{\mathcal{H}} \tag{18}$$

*where the kernel $K_L(p,q;\alpha)$ is the reproducing kernel for the Hilbert space $H_K(L;\alpha)$ and it is determined as the unique solution $\tilde{K}(p,q;\alpha)$ of the equation:*

$$\tilde{K}(p,q;\alpha) + \frac{1}{\alpha}(L\tilde{K}_q, LK_p)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha}K(p,q) \tag{19}$$

*with*

$$\tilde{K}_q = \tilde{K}(\cdot,q;\alpha) \in H_K \quad \text{for} \quad q \in E, \tag{20}$$

*and*

$$K_p = K(\cdot,p) \in H_K \quad \text{for} \quad p \in E.$$

## 4 New algorithm

In several concrete examples, we consider as the reproducing kernel Hilbert space $H_K$ the Sobolev Hilbert spaces on the whole spaces which admit concrete reproducing kernels and as the Hilbert space $\mathcal{H}$ the Hilbert spaces $L_2$ on the whole spaces. Then the related reproducing kernels $K_L(p,q;\alpha)$ and the extremal functions $f_{\mathrm{b},\alpha}$ can be determined concretely in terms of the Fourier integrals from the general equation (19). See, [4-8,10-12]. In this paper, we shall propose a new algorithm to solve numerically the equation (19) which is, in general, an integral equation of Fredholm of the second kind. Our algorithm will give a new type discretization whose effectivity was proved by examples ([8]), since to solve the equation (19) is decisively important to obtain the concrete representation (18).

We take a complete orthonormal system $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ of the Hilbert space $\mathcal{H}$ .

For fixed $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}(\lambda_j > 0)$ , we consider the general extremal problem for (17)

$$\inf_{f\in H_K}\left\{\alpha\|f\|_{H_K}^2+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|(\mathrm{b}-Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2\right\}. \tag{21}$$

That is,

$$\|\mathrm{b}-Lf\|_{\mathcal{H}}^2$$

is replaced by

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|(\mathrm{b},e_j)_{\mathcal{H}}-(Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2.$$

Then, we shall give an algorithm constructing the reproducing kernel $K_{\alpha,\lambda_j}(p,q)$ of the Hilbert space $H_{K_{\alpha,\lambda_j}}$ with the norm square

$$\alpha\|f\|_{H_K}^2+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|(Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2. \tag{22}$$

Here, of course, we assume that (22) converges for $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}(\lambda_j > 0)$. However, in a practical application, of course, we consider only finite terms in (22) and by finite terms we can give a good approximation of (22).

We shall start with the first step. The reproducing kernel $K^{(1)}(p,q)$ of the Hilbert space with the norm square

$$\alpha\|f\|_{H_K}^2+\sum_{j=1}^{1}\lambda_j|(Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2 \tag{23}$$

is given by

$$K^{(1)}(p,q)=K^{(0)}(p,q)-\frac{\lambda_1(e_1,LK_p^{(0)})_{\mathcal{H}}(LK_q^{(0)},e_1)_{\mathcal{H}}}{1+\lambda_1(L(e_1,LK_q^{(0)})_{\mathcal{H}},e_1)_{\mathcal{H}}}; \tag{24}$$

for

$$K^{(0)}(p,q)=\frac{1}{\alpha}K(p,q).$$

For the second step, the reproducing kernel $K^{(2)}(p,q)$ of the Hilbert space with the norm square

$$\alpha\|f\|_{H_K}^2+\sum_{j=1}^{2}\lambda_j|(Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2 \tag{25}$$

is given by

$$K^{(2)}(p,q)=K^{(1)}(p,q)-\frac{\lambda_2(e_2,LK_p^{(1)})_{\mathcal{H}}(LK_q^{(1)},e_2)_{\mathcal{H}}}{1+\lambda_2(L(e_2,LK_q^{(1)})_{\mathcal{H}},e_2)_{\mathcal{H}}}, \tag{26}$$

by using the reproducing kernel $K^{(1)}(p,q)$. In this way, we can obtain the desired representation of $K_{\alpha,\lambda_j}(p,q)=K^{(\infty)}(p,q)$ . Then, we obtain

**Theorem 4.1** *For any $b\in\mathcal{H}$, the extremal function $f_{\alpha,\lambda}$ in the extremal problem (21) is given by*

$$f_{\alpha,\lambda}(p)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(b,e_j)_{\mathcal{H}}(e_j,LK_{\alpha,\lambda_j}(\cdot,p))_{\mathcal{H}}, \tag{27}$$

*where we assume that (22) converges on $E$.*

We consider a general extremal problem in (21) by considering a general weight $\{\lambda_j\}$. This means that for a larger $\lambda_{j_0}$, the speed of the convergence

$$(Lf,e_{j_0})_{\mathcal{H}}\to(\mathrm{b},e_{j_0})_{\mathcal{H}}$$

is higher. This technique is a very important for practical applications. For examples, see [6,8].

**Acknowledgement**

This research is supported in part by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C)(2)(No. 16540137) from the Japan Society for the Promotion Science.

## References

[1] D.-W. Byun and S. Saitoh, Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland (1994), 55–**61**.

[2] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems, Mathematics and Its Applications **376**(2000), Kluwer Academic Publishers.

[3] C. W. Groetsch, Inverse Problems in the Mathematical Sciences, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1993).

[4] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and Numerical Solutions of the Inhomogeneous Wave Equation, Australian J. of Math. Anal. and Appl. **1**(2004), Volume 1, Issue 1, Article 7.

[5] T. Matsuura and S. Saitoh, Numerical Inversion Formulas in the Wave Equation, J. of Computational Mathematics and Optimization, **1**(2005), 1-19.

[6] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and Numerical Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients, J. of Analysis and Applications (to appear).

[7] T. Matsuura, S. Saitoh, and D. D. Trong, Numerical Solutions of the Poisson Equation, Applicable Analysis, **83**(2004), 1037-1051.

[8] T. Matsuura and S. Saitoh, Dirichlet's Principle Using Computers, Applicable Analysis (to appear).

[9] S. Saitoh, Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd (1997), UK. 再生核の理論入門 牧野書店 (2002).

[10] S. Saitoh, Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution, Applicable Analysis, **83**(2004), 727-733.

[11] S. Saitoh, T. Matsuura and M. Asaduzzaman, Operator Equations and Best Approximation Problems in Reproducing Kernel Hilbert Spaces, J. of Analysis and Applications, **1**(2003), 131-142.

[12] S. Saitoh, Constructions by Reproducing Kernels of Approximate Solutions for Linear Differential Equations with $L_2$ Integrable Coefficients, International J. of Math. Sci. **2**(2003), 261-273.

[13] S. Saitoh, Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels, Kodai. Math. J. (to appear).

*Saburou SAITOH*
*Faculty of Enigeering*
*Gunma University*
*Tenjin-cho, 1-5-1*
*Kiryu, 376-8515 JAPAN*

# On the Aluthge transformations of $\infty$-hyponormal operators

Shizuo Miyajima　Tokyo University of Science
Isao Saito　Tokyo University of Science

Abstract. A bounded linear operator $T$ is called $\infty$-hyponormal if $T$ is $p$-hyponormal for every $p > 0$. In this paper $\infty$-hyponormality of the Aluthge transformations of $\infty$-hyponormal operators is investigated. It is shown that the Aluthge transformation of an $\infty$-hyponormal operator is not necessarily $\infty$-hyponormal. It is also shown that the (generalized) Aluthge transformation of an $\infty$-hyponormal operator $T$ is $\infty$-hyponormal provided $|T||T^*| = |T^*||T|$. Moreover we give an example of an $\infty$-hyponormal operator $T$ whose Aluthge transformation $\tilde{T}$ is $\infty$-hyponormal but $|T||T^*| \neq |T^*||T|$.

Hilbert 空間上の有界線形作用素 $T$ が $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ （$p > 0$）をみたすとき $p$-hyponormal であると言い、様々な結果が得られている。いま $p \longrightarrow \infty$ としたときについて考え、次のように定義する。

**Definition**

任意の $p > 0$ に対して $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ となるとき $T$ を **$\infty$-hyponormal operator** という。

具体例としては、unilateral shift, quasi-normal operator, hyponormal weighted shift などがある。そして pure $\infty$-hyponormal operator の性質の 1 つとして、スペクトルの外側の境界が原点に関して circularly symmetic となることがわかっている。([1],[2])

また A. Aluthge は 1990 年に作用素の極分解 $T = U|T|$ に対し Aluthge 変換$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ を定義し、$0 < p \leq 1$ のとき $p$-hyponormal operator $T$ の Aluthge 変換$\tilde{T}$ が $\min\{p + \frac{1}{2}, 1\}$-hyponormal であることを示した。この Aluthge 変換 そして T. Furuta によって 1996 年に導入された generalized Aluthge 変換 $\tilde{T}_{s,t} = |T|^s U|T|^t$ を用いて多くの研究がなされている。

それでは $\infty$-hyponormal operator の Aluthge 変換は常に $\infty$-hyponormal となるのだろうか。

スペクトル分解定理に関する Olson の定理を用いて得られる補題を使い、そうならない例が示せる。([3])

Olson の定理

$A, B$ を positive operator, $A = \int \lambda dP(\lambda)$, $B = \int \lambda dQ(\lambda)$ を $A$, $B$ の spectral resolutions とする。任意の $n \in \mathrm{N}$ にたいして $A^n \geq B^n$ となるための必要十分条件は任意の $\lambda \geq 0$ にたいして $P(\lambda) \leq Q(\lambda)$ となることである。

**Lemma**

$A$, $B$ を positive な $2 \times 2$ 行列、そして $p_1, p_2\,(p_1 \leq p_2)$, $q_1, q_2\,(q_1 \leq q_2)$ を $A$, $B$ の固有値とする。このとき、任意の $n$ に対して $A^n \geq B^n$ となるための必要十分条件は

(i) $q_1 \leq q_2 \leq p_1 \leq p_2$

または

(ii) $q_1 \leq p_1 < q_2 \leq p_2$ かつ $\mathcal{N}(B - q_1) = \mathcal{N}(A - p_1)$ ( $\mathcal{N}(T)$ は $T$ の null space )

が成立することである。

**Example**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ A_1 & 0 & & & & \\ & A_2 & 0 & & & \\ & & A_2 & 0 & & \\ & & & A_2 & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

は $\infty$-hyponormal だが、その Aluthge 変換は $\infty$-hyponormal ではない。

**Proof**

計算により

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & A_2 & & \\ & & & A_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$|T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & A_1 & & & \\ & & A_2 & & \\ & & & A_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となり $A_1$ と $A_2$ の固有値は 0,2 と 2,4 である。上の Lemma より $A_1^n \leq A_2^n$ となる。よって $|T|^n \geq |T^*|^n$ となり $T$ は $\infty$-hyponormal である。

同様に $\tilde{T}^*\tilde{T}, \tilde{T}\tilde{T}^*$ を計算すると$\tilde{T}$ が $\infty$-hyponormal となるための必要十分条件はすべての $n$ にたいして $A_2^{2n} \geq (A_2^{\frac{1}{2}}A_1A_2^{\frac{1}{2}})^n$ となることがわかる。

$A_2^2$ と $A_1^{\frac{1}{2}}A_2A_1^{\frac{1}{2}}$ の固有値は 4,16 と 0,6 で

$$\mathcal{N}(A_2^2-4) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbf{C} \right\} \neq \mathcal{N}(A_1^{\frac{1}{2}}A_2A_1^{\frac{1}{2}}) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}; t \in \mathbf{C} \right\}.$$

よって Lemma から $A_2^n \not\geq A_1^{\frac{1}{2}}A_2A_1^{\frac{1}{2}}$ となる $n$ が存在して$\tilde{T}$ は $\infty$-hyponormal ではない。

しかしながら、上で $\infty$-hyponormal operator の例として挙げたものは、すべて Aluthge 変換が $\infty$-hyponormal となる。これらの例に共通する性質は $|T||T^*| = |T^*||T|$ であり、次の結果が成立する。

**Theorem**

$\infty$-hyponormal operator $T$ が $|T||T^*| = |T^*||T|$ をみたすなら、その Aluthge 変換 $\tilde{T}$ は $\infty$-hyponormal となる。さらに $s, t \geq 0$ に対し generalized Aluthge 変換 $\tilde{T}_{s,t}$ も $\infty$-hyponormal となる。

**Proof**

$T = U|T|$ を $T$ の極分解とするとき、$|T|^pU^*U = U^*U|T|^p = |T|^p$, $|T^*|^pUU^* = UU^*|T^*|^p = |T^*|^p$, $|T^*|^p = U|T|^pU^*$, $U^*|T^*|^pU = |T|^p$ $(p > 0)$ となることが知られている。よって

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_{s,t}|^2 &= \tilde{T}_{s,t}^*\tilde{T}_{s,t} = (|T|^tU^*|T|^s)(|T|^sU|T|^t) = (U^*U)|T|^tU^*|T|^{2s}U|T|^t(U^*U) \\ &= U^*(U|T|^tU^*)|T|^{2s}(U|T|^tU^*)U = U^*|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^tU \end{aligned}$$

$$|\tilde{T}_{s,t}^*|^2 = \tilde{T}_{s,t}\tilde{T}_{s,t}^* = (|T|^sU|T|^t)(|T|^tU^*|T|^s) = |T|^s(U|T|^{2t}U^*)|T|^s = |T|^s|T^*|^{2t}|T|^s$$

となる。$|T|$ と $|T^*|$ が可換より

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_{s,t}|^{2n} &= U^*|T^*|^{nt}|T|^{2ns}|T^*|^{nt}U = U^*(|T^*|^{nt}UU^*)|T|^{2ns}(UU^*|T^*|^{nt})U \\ &= (U^*|T^*|^{nt}U)U^*|T|^{2ns}U(U^*|T^*|^{nt}U) = |T|^{nt}U^*|T|^{2ns}U|T|^{nt} \end{aligned}$$

$$|\tilde{T}_{s,t}^*|^{2n} = |T|^{ns}|T^*|^{2nt}|T|^{ns}$$

となるので$\tilde{T}_{s,t}$ が $\infty$-hyponormal となるための必要十分条件はすべての $n$ にたいして $|T|^{nt}U^*|T|^{2ns}U|T|^{nt} \geq |T|^{ns}|T^*|^{2nt}|T|^{ns}$ となることである。

いま $T$ が $\infty$-hyponormal より 任意の $p > 0$ にたいし $|T|^p \geq |T^*|^p$ となり、

$|T|^p \geq U|T|^pU^*, \quad U^*|T|^pU \geq |T|^p$ となる。これより

$$|T|^{nt}U^*|T|^{2ns}U|T|^{nt} \geq |T|^{nt}|T|^{2ns}|T|^{nt} = |T|^{ns}|T|^{2nt}|T|^{ns} \geq |T|^{ns}|T^*|^{2nt}|T|^{ns}$$

となるので $\tilde{T}_{s,t}$ は $\infty$-hyponormal である。

以上より $|T||T^*| = |T^*||T|$ は $\infty$-hyponormal operator $T$ の Aluthge 変換が $\infty$-hyponormal となるための十分条件である。しかし次の例より、必要条件とはならない。

**Example**

$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ となる有界数列、そして

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & & \\ & U_0 & 0 & & & & & \\ & & U_0 & 0 & & & & \\ \hline & & & U_0 & 0 & & & \\ & & & & U_0 & 0 & & \\ & & & & & U_0 & 0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & A_0 & & & & & & \\ & & A_0 & & & & & \\ & & & A_0 & & & & \\ \hline & & & & A_1 & & & \\ & & & & & A_2 & & \\ & & & & & & A_3 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

は $|T||T^*| \neq |T^*||T|$ となるが、その Aluthge 変換は $\infty$-hyponormal となる。

**Proof**

計算より

$$|T^*| = UAU^* = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & B_0 & & & & & & \\ & & B_0 & & & & & \\ & & & B_0 & & & & \\ \hline & & & & B_0 & & & \\ & & & & & B_1 & & \\ & & & & & & B_2 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

ただし

$$B_n = U_0A_nU_0^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_n + \lambda_{n+1} & \lambda_n - \lambda_{n+1} \\ \lambda_n - \lambda_{n+1} & \lambda_n + \lambda_{n+1} \end{pmatrix}.$$

また $B_0 = A_0$ である。ここで

$$A_{n+1}^k - B_n^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{n+1}^k - \lambda_n^k & \lambda_{n+1}^k - \lambda_n^k \\ \lambda_{n+1}^k - \lambda_n^k & 2\lambda_{n+2}^k - \lambda_{n+1}^k - \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

なので

$$\mathrm{tr}(A_{n+1}^k - B_n^k) = (\lambda_{n+2}^k - \lambda_n^k) \geq 0,$$
$$\det(A_{n+1}^k - B_n^k) = \frac{1}{2}(\lambda_{n+2}^k - \lambda_{n+1}^k)(\lambda_{n+1}^k - \lambda_n^k) \geq 0.$$

よって $A_{n+1}^k - B_n^k \geq 0$ となり $T$ は $\infty$-hyponormal である。また

$$A_{n+1}B_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{n+1}(\lambda_n + \lambda_{n+1}) & \lambda_{n+1}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\ \lambda_{n+2}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) & \lambda_{n+2}(\lambda_n + \lambda_{n+1}) \end{pmatrix},$$

$$B_n A_{n+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{n+1}(\lambda_n + \lambda_{n+1}) & \lambda_{n+2}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \\ \lambda_{n+1}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) & \lambda_{n+2}(\lambda_n + \lambda_{n+1}) \end{pmatrix}$$

となり、仮定$\lambda_{n+1} \neq \lambda_{n+2}$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$ より $B_n A_{n+1} \neq A_{n+1}B_n$ となるので $|T||T^*| \neq |T^*||T|$ となる。

また計算により$\tilde{T}$ が $\infty$-hyponormal となるための必要十分条件は任意の $n$ にたいして $C_n^k \geq D_n^k$ $(n, k \geq 0)$ となることである。ただし、ここで $C_n = A_n^{\frac{1}{2}} U_0^* A_{n+1} U_0 A_n^{\frac{1}{2}}$, $D_n = A_n^{\frac{1}{2}} B_{n-1} A_n^{\frac{1}{2}}$ ( $B_{-1} := B_0 = A_0$ ) とする。

$p_1^{(n)}, p_2^{(n)}$ $(p_1^{(n)} \leq p_2^{(n)})$ を $2C_n$ の固有値、$q_1^{(n)}, q_2^{(n)}$ $(q_1^{(n)} \leq q_2^{(n)})$ を $2D_n$ の固有値とする。

Lemma より $q_2^{(n)} \leq p_1^{(n)}$ がいえれば $C_n^k \geq D_n^k$ $(n, k \geq 0)$ となり$\tilde{T}$ が $\infty$-hyponormal となることが分かる。計算により

$$p_1^{(n)} = \frac{\mathrm{tr}(2C_n) - \sqrt{\mathrm{tr}(2C_n)^2 - 4\det(2C_n)}}{2},$$

$$q_2^{(n)} = \frac{\mathrm{tr}(2D_n) + \sqrt{\mathrm{tr}(2D_n)^2 - 4\det(2D_n)}}{2}$$

となり $q_2^{(n)} \leq p_1^{(n)}$ は次の不等式と同値である。

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\mathrm{tr}(2C_n)^2 - 4\det(2C_n)}\sqrt{\mathrm{tr}(2D_n)^2 - 4\det(2D_n)} \\ \leq\ & (\mathrm{tr}(2C_n) - \mathrm{tr}(2D_n))^2 - \left(\mathrm{tr}(2C_n)^2 - 4\det(2C_n)\right) - \left(\mathrm{tr}(2D_n)^2 - 4\det(2D_n)\right). \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda_{n-1} = a, \quad \lambda_n = a + x, \quad \lambda_{n+1} = a + x + y, \quad \lambda_{n+2} = a + x + y + z$$

と置き換えると $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ の単調増加性より $a, x, y, z \geq 0$.

右辺 $= 16a^2xy + 32ax^2y + 16x^3y + 8a^2y^2 + 36axy^2 + 28x^2y^2 + 8ay^3 + 12xy^3 + 8a^2xz + 16ax^2z + 8x^3z + 16a^2yz + 40axyz + 24x^2yz + 12ay^2z + 14xy^2z \geq 0$

$(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = 192a^4x^2y^2 + 768a^3x^3y^2 + 1152a^2x^4y^2 + 768ax^5y^2 + 192x^6y^2 + 256a^4xy^3 + 1472a^3x^2y^3 + 2880a^2x^3y^3 + 2368ax^4y^3 + 704x^5y^3 + 640a^3xy^4 + 2240a^2x^2y^4 + 2560ax^3y^4 + 960x^4y^4 + 512a^2xy^5 + 1088ax^2y^5 + 576x^3y^5 + 128axy^6 + 128x^2y^6 + 256a^4x^2yz + 1024a^3x^3yz + 1536a^2x^4yz + 1024ax^5yz + 256x^6yz + 640a^4xy^2z + 3072a^3x^2y^2z + 5376a^2x^3y^2z + 4096ax^4y^2z + 1152x^5y^2z + 256a^4y^3z + 2304a^3xy^3z + 5696a^2x^2y^3z + 5504ax^3y^3z + 1856x^4y^3z + 384a^3y^4z + 1984a^2xy^4z + 2880ax^2y^4z + 1280x^3y^4z + 128a^2y^5z + 448axy^5z + 320x^2y^5z + 256a^4xyz^2 + 1024a^3x^2yz^2 + 1536a^2x^3yz^2 + 1024ax^4yz^2 + 256x^5yz^2 + 192a^4y^2z^2 + 1280a^3xy^2z^2 + 2688a^2x^2y^2z^2 + 2304ax^3y^2z^2 + 704x^4y^2z^2 + 320a^3y^3z^2 + 1280a^2xy^3z^2 + 1600ax^2y^3z^2 + 640x^3y^3z^2 + 128a^2y^4z^2 + 320axy^4z^2 + 192x^2y^4z^2 \quad \geq 0.$

よって $\tilde{T}$ は $\infty$-hyponormal である。

## 参考文献


[1] S. Miyajima and I. Saito, *$\infty$-hyponormal operators and their spectral properties*, Acta Sci. Math. (Szeged), **67** (2001), 357–371.

[2] S. Miyajima and I. Saito, *A remark on the spectra of $\infty$-hyponormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **69** (2003), 863–869.

[3] S. Miyajima and I. Saito, *On the Aluthge transformations of $\infty$-hyponormal operators*, to appear in Sci. Math. Jpn.

# On some Nevanlinna-type spaces on the upper half plane

## （上半平面上のある種の Nevanlinna 型空間について）

**岩手医科大学教養部** (Iwate Medical University)

**飯田　安保** (Yasuo IIDA)

**Abstract.** In this paper, we shall define some Nevanlinna-type spaces on the upper half plane and show some properties of these spaces.

### 1. 単位円板上での Nevanlinna 型空間について

**定義 1-1**　$f$ を $U=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|<1\}$ 上の正則関数とする。また、$T=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$ とする。

**1.** $\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta<+\infty$ を満たすとき、$f\in N$ とする。

（注意）　$f\in N$ のとき、$f^*(e^{i\theta}):=\displaystyle\lim_{r\to1^-}f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta}\in T$ で存在する。

**2.** ある $\phi\in L^1(T)\,,\,\phi\geqq0$ に対し $\log^+|f(z)|\leqq Q[\phi](z)\ \ (z\in U)$ を満たすとき、$f\in N_*$ とする。ただし右辺は $U$ 上の Poisson 積分を表す。

**3.** $p>1$ とする。

$\displaystyle\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left(\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta<+\infty$ を満たすとき、$f\in N^p$ とする。

$N$ を Nevanlinna class、$N_*$ を Smirnov class、$N^p\ \ (p>1)$ を Privalov space と呼ぶ。また、$N$ とその部分空間 $N_*\,,\,N^p$ 等を総称して **Nevanlinna 型空間**と呼ぶ。

これらの空間のあいだには、包含関係 $N^p\subset N_*\subset N\ \ (p>1)$ が成り立つ。

**定理 1-2**　$f$ を $U$ 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1)　$f \in N$

(2)　$\displaystyle \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log(1+|f(re^{i\theta})|)d\theta < +\infty$

(3)　$\log^+ |f(z)|$ が $U$ 上 harmonic majorant を持つ。

**定理 1-3**　$f$ を $U$ 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1)　$f \in N_*$

(2)　$f \in N$ かつ $\displaystyle \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})|d\theta$

(3)　ある strongly convex な関数 $\varphi$ に対して

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \varphi(\log^+ |f(re^{i\theta})|)d\theta < +\infty$$

**定理 1-4**　$p > 1$ とし、また $f$ を $U$ 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1)　$f \in N^p$

(2)　$\displaystyle \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \Big(\log(1+|f(re^{i\theta})|)\Big)^p d\theta < +\infty$

(3)　$\Big(\log^+ |f(z)|\Big)^p$ が $U$ 上 harmonic majorant を持つ。

定理 1-2～定理 1-4 の結果のように、単位円板上の Nevanlinna 型空間については定義と同値な条件がいくつか知られており、それぞれの条件を各空間の定義として採用することもある。

しかし、上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ 上の Nevanlinna 型空間を考える場合、上記の単位円板での定義を“そのまま”適用すると、それぞれ異なる空間が生じる。

## 2. 上半平面上での Nevanlinna 型空間について

### ① harmonic majorant による定義

**定義 2-1**([9])　$f$ を $D$ 上の正則関数とする。

1. $\log^+|f(z)|$ が $D$ 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in N_0(D)$ とする。

2. $\varphi$ を strongly convex な関数とする。$\varphi(\log^+|f(z)|)$ が $D$ 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in H_\varphi(D)$ とする。
また $N_{*0}(D) := \bigcup\{\, H_\varphi(D) \,|\, \varphi : strongly\ convex\}$ とする。

3. $p > 1$ とする。$(\log^+|f(z)|)^p$ が $D$ 上 harmonic majorant を持つとき、$f \in N_0^p(D)$ とする。

（注）$H_\varphi(D)$ を Hardy-Orlicz space と呼ぶ。

## ② Krylov（& Iida）による定義

**定義 2-2**([2,5])　$f$ を $D$ 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log^+|f(x+iy)|\, dx < +\infty$ を満たすとき、 $f \in \mathfrak{N}$ とする。

2. ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$ , $\phi \geqq 0$ に対し $\log^+|f(z)| \leqq P[\phi](z) \quad (z \in D)$ を満たすとき、$f \in \mathfrak{N}_*$ とする。ただし右辺は $D$ 上の Poisson 積分を表す。

3. $p > 1$ とする。$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \left(\log^+|f(x+iy)|\right)^p dx < +\infty$ を満たすとき、$f \in \mathfrak{N}^p$ とする。

## ③ Mochizuki（& Iida）による定義

**定義 2-3**([3,8])　$f$ を $D$ 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1+|f(x+iy)|)\, dx < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N(D)$ とする。

2. ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$ , $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1+|f(z)|) \leqq P[\phi](z) \quad (z \in D)$ を満たすとき、$f \in N_*(D)$ とする。ただし右辺は $D$ 上の Poisson 積分を表す。

3. $p > 1$ とする。$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \left(\log(1+|f(x+iy)|)\right)^p dx < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N^p(D)$ とする。

上半平面上の Nevanlinna class の定義に相当する定義2-1 ～定義2-3の1.は互いに同値ではない。同様に、上半平面上の Smirnov class の定義に相当する定義2-1 ～定義2-3の2.も、Privalov space の定義に相当する定義2-1 ～定義2-3の3.もそれぞれ互いに同値ではない。

ここでは、**『① harmonic majorant による定義』**による上半平面上の Nevanlinna 型空間についての結果を報告する。また、他の定義による上半平面上の Nevanlinna 型空間も含めて、未解決問題や考えられる研究内容についても紹介する。

## 3. ①の定義による上半平面上での Nevanlinna 型空間について

$N_0(D)$ , $N_{*0}(D)$ については以下の結果が知られている：

**定理 3-1**([9]) $f$ を $D$ 上の正則関数とする。また、$D$ 上の有界正則関数全体を $H^\infty(D)$ で表す。

(1) $f \in N_0(D) \Longleftrightarrow f = \dfrac{g}{h} \quad (g\,,\, h \in H^\infty(D)\,,\, h \neq 0)$

(2) $f \in N_{*0}(D) \Longleftrightarrow f = \dfrac{g}{h} \quad (g\,,\, h \in H^\infty(D)\,,\, h$ は $D$ での外関数$)$

ここで $h(t) \geqq 0\,,\, \log h \in L^1\left(\mathbf{R}\,,\, (1+t^2)^{-1}dt\right)$ に対し、

$d(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \dfrac{1+tz}{t-z}\dfrac{1}{1+t^2}\log h(t)\,dt\right)$ の形の関数を上半平面 $D$ での外関数とよぶ。

**定理 3-2**([9]) $f$ を $D$ 上の正則関数とする。

(1) $f \in N_0(D) \Longleftrightarrow \displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+|f(x+iy)|}{x^2+(y+1)^2}\,dx < \infty$

(2) $f \in N_{*0}(D) \Longleftrightarrow$ ある strongly convex な関数 $\phi$ に対して

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(\log^+|f(x+iy)|)}{x^2+(y+1)^2}\,dx < \infty$$

定理3-1、定理3-2を $N_0^p(D)$ について考えたのが次の定理である。

**定理 3-3** $f$ を $D$ 上の正則関数とする。また、$D$ 上の有界正則関数全体を $H^\infty(D)$ で表す。

(1) $f \in N_0^p(D)$

$$\iff f = \frac{g}{h} \quad (g\,,\, h \in H^\infty(D)\,,\, h \text{ は } N_0^p(D) \text{ で可逆})$$

(2) $$f \in N_0^p(D) \iff \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\log^+ |f(x+iy)|)^p}{x^2+(y+1)^2}\, dx < \infty$$

また、それぞれの Nevanlinna 型空間に属する関数についての因数分解定理が知られているが、$N_0^p(D)$ では次のようになる：

**定理3-4** $p > 1$ とする。$f \in N_0^p(D)\,,\, f \neq 0$ は $f(z) = ae^{i\alpha z}b(z)d(z)g(z)$ $(z \in D)$ の形に一意に分解される。ここで、

(i) $a \in \mathbf{T}\,,\, \alpha \in \mathbf{R}$.

(ii) $b(z)$ は $f$ の零点から構成される Blaschke 積.

(iii) $$d(z) = \exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z}\frac{1}{1+t^2}\log h(t)\, dt\right),$$

ただし $h(t) \geqq 0\,,\, \log h \in L^1(\mathbf{R}\,,\,(1+t^2)^{-1}dt)$ で、さらに $\log^+ h \in L^p(\mathbf{R}\,,\,(1+t^2)^{-1}dt)$ が成り立つ.

(iv) $$g(z) = \exp\left(\frac{1}{i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z}\, d\mu(t)\right),$$ ただし $\mu$ は $\mathbf{R}$ 上の有限実測度で、Lebesgue 測度に関して特異である.

## 4. 上半平面上での Nevanlinna 型空間に関する問題について

### (1) $N^p(D)$ から $N^p(D)$ への linear isometry を決定せよ

上半平面において $N^p(D)$ 上の距離を

$$d_p(f\,,\,g) = \left\{\int_{\mathbf{R}} (\log(1+|f^*(x)-g^*(x)|))^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in N^p(D))$$

で定義する。ただし $N^1(D) = N_*(D)$ とする。

$N_*(D)$ については Mochizuki が上への linear isometry を決定した [8] が、$N^p(D)$ についてはまだ求められていない。

### (2) 上半平面での $M$ について

単位円板 $U$ 上の正則関数 $f$ が $\int_0^{2\pi} \log(1+Mf(\theta))d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in M$ とする。ここで、$Mf(\theta) = \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|$ とする。

この空間については包含関係 $N^p \subset M \subset N_*$ $(p>1)$ が成り立ち、Kim[4] 等によって研究が行われているが、最近になって Ganzhula が $D$ 上での $M$ を定義し、その諸性質を考察している [1]。

### 3. $N(D)$, $N_*(D)$, $N^p(D)$ 等での composition operator について

今のところ上半平面では Hardy 空間に関する結果 [6,7,10] しかないようであり、他の Nevanlinna 型空間については手つかずの状態のようである。

## 参考文献


[1] L. M. Ganzhula, *On an $F$-algebra of holomorphic functions in the upper half-plane* (Russian), Math. Montisnigri **12** (2000), 33-45.

[2] Y. Iida, *Nevanlinna-type spaces on the upper half plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 113-121.

[3] Y. Iida, *On an $F$-algebra of holomorphic functions on the upper half plane*, submitted.

[4] H. O. Kim, *On closed maximal ideals of $M$*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (9) (1986), 343-346.

[5] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane*, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. **32** (2) (1963), 37-81.

[6] V. Matache, *Composition operators on Hardy spaces of a half-plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (5) (1999), 1483-1491.

[7] V. Matache, *Composition operators on $H^p$ of the upper half-plane*, An. Univ. Timisoara Ser. Stiint. Mat. **119** (1989), 63-66.

[8] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.

[9] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.

[10] S. D. Sharma and R. Kumar, *Compact composition operators and Carleson measure in the upper half-plane*, Extracta Math. **15** (1) (2000), 175-180.

# The integral representation of positive definite functions on a conelike semigroup and the continuity at 0

T. M. Bisgaard (Denmark)
and
N. Sakakibara (Ibaraki University, Japan)

**Abstract**

Ressel proved Bochner's type theorem for bounded positive definite functions on a conelike semigroup in $\mathbf{Q}^k$ ([**R**]). In this talk, we prove Bochner's type theorem for arbitrary positive definite functions on a conelike semigroup in $\mathbf{Q}$, but we show a counterexample to Bochner's type theorem for $(\mathbf{Q}_+ \setminus \{0\})^2 \cup \{(0,0)\}$.

我々は以前に「$\mathbf{R}^k$ の中の conelike 半群において, その上の正定値関数は必ず指標半群上の (広い意味での) モーメント関数の形で一意的に表示できる」(cf. [**BS**]) ということを示した. これは, 離散群における Bochner 型定理に相当する結果と見ることが出来るが, $\mathbf{R}^k$ にユークリッド位相が入っているとみた場合, 正定値関数の連続性がその積分表示にどの程度関与してくるのかを考えるのは自然なことである. この講演では, 1 次元の場合には連続性が有効に働くが, 2 次元では連続性が有効に働かない例が作れてしまうことを報告する.

単位元 0 をもつ可換 $*$ 半群を $S$, $S$ 上の指標全体を $S^*$ とし, $S^*$ に各点収束位相を考える. $S$ 上の関数 $\varphi$ が正定値であるとは, 任意の $n \in \mathbf{N}$, $s_1, \cdots, s_n \in S$, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{C}$ について

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(s_i + s_j^*) \geqq 0$$

が成立するときである. $S$ 上の関数 $\varphi$ がモーメント関数であるというのは,

$$\varphi(s)=\int_{S^*}\rho(s)d\mu(\rho),\quad s\in S$$

をみたす $S^*$ 上のラドン測度 $\mu$ が存在するときをいう. モーメント関数は正定値関数であり, 有界な正定値関数はモーメント関数であるが, 正定値関数は一般にモーメント関数とは限らない. $S$ 上の正定値関数 $\varphi$ が必ず一意的な表現測度をもつモーメントであるとき, $S$ は完全であるという.

$\mathbf{R}^k$ の部分集合 $M$ が conelike であるとは, 任意の $s\in M$ に対して $\alpha(s)\in\mathbf{R}_+$ が存在し, $\alpha\geqq\alpha(s)$ をみたす全ての $\alpha\in\mathbf{R}_+$ について $\alpha s\in M$ が成り立つときをいう. $M$ が $\mathbf{Q}^k$ の部分集合のときは, $\mathbf{R}_+$ を $\mathbf{Q}_+$ で読み替えて, 同じく $M$ が conelike であるということにする. 以下, conelike 半群の $*$ 構造は恒等的とする.

以前にドイツの P.Ressel 教授は, 有界な正定値関数の連続性がその積分表示にどの程度関与してくるのかを述べた次の定理を示した ([**R**]).

**Theorem.** $S$ は $\mathbf{R}^k$ の中の conelike 半群で, $0\in\overline{\widetilde{S}}$ とする. ただし, $\widetilde{S}:=\{s\in S|(\mathbf{R}_+s)\cap\mathrm{int}S\neq\emptyset\}$ である. このとき, $S$ 上の有界な正定値関数 $\varphi$ について 次は同値:

(i) $\varphi$ は 一様連続;

(ii) $\varphi$ は 0 で連続;

(iii) $\widetilde{S}$ のある点列 $\{s_n\}$ が存在し, $s_n\to 0$, $\varphi(s_n)\to\varphi(0)$ をみたす;

(iv) $\varphi$ は $\mathbf{R}^k$ 上のある種の測度 (下の表示で $<v,s>\geqq 0$ となるような範囲で定義された測度) $\mu$ で次の表示をもつ.

$$\varphi(s)=\int e^{-<v,s>}d\mu(v),\quad s\in S$$

この結果は, 正定値関数の有界性の仮定から積分表示出来ることが保証されるので, 表現測度のサポートを解析して導かれるが, 有界性を除いた場合については未解決であった. 先に述べたように, 我々は $\mathbf{Q}^k$ や $\mathbf{R}^k$ の中の conelike 半群は完全であることを示したので, (有界性という仮定なしに) 積分表示するという点はクリアされた. 残る問題は正定値関数の連続性が表現測度のサポートにどの程度関与するかである. 1 次元の場合には次の結果を得た.

**Theorem 1.** $S$ は $\mathbf{Q}$ の中の conelike 半群で, $0\in\overline{\widetilde{S}}$ とする. ただし, $\widetilde{S}:=\{s\in S|(\mathbf{Q}_+s)\cap\mathrm{int}S\neq\emptyset\}$ とし, 閉包は制限位相でとる. このとき, $S$ 上の正定値関数 $\varphi$ について 次は同値:

(i) $\varphi$ は $S$ 上で連続;
(ii) $\varphi$ は 0 で連続;
(iii) $\widetilde{S}$ のある点列 $\{s_n\}$ が存在し, $s_n \to 0$, $\varphi(s_n) \to \varphi(0)$ をみたす;
(iv) $\varphi$ は $\mathbf{R}$ 上のラドン測度 $\mu$ で次の表示をもつ.

$$\varphi(s) = \int_{\mathbf{R}} e^{vs} d\mu(v), \quad s \in S$$

**Corollary.** $S$ は $\mathbf{R}$ の中の conelike 半群で, $0 \in \overline{\widetilde{S}}$ とする. ただし, $\widetilde{S} := \{s \in S | (\mathbf{Q}_+ s) \cap \mathrm{int} S \neq \emptyset\}$ である. このとき次は同値:
(i) $\varphi : S \to \mathbf{R}$ は正定値かつ連続;
(ii) $\varphi$ は $\mathbf{R}$ 上のラドン測度 $\mu$ で次の表示をもつ.

$$\varphi(s) = \int_{\mathbf{R}} e^{vs} d\mu(v), \quad s \in S$$

しかしながら, 2 次元の場合に, $(\mathbf{Q}_+ \setminus \{0\})^2 \cup \{(0,0)\}$ でさえ, Theorem 1 の (iii) $\Longrightarrow$ (iv), (iv) $\Longrightarrow$ (ii) が成立しない. 今後の方向性として, $(\mathbf{Q}_+ \setminus \{0\})^2 \cup \{(0,0)\}$ では (ii) $\Longrightarrow$ (iv) が成立するので, (ii) $\Longrightarrow$ (iv) が示されるより一般的な設定について解析する.

## References


[**BS**] T. M. Bisgaard and N. Sakakibara, Stieltjes perfect semigroups are perfect, Czech. Math. J., to appear.
[**R**] P. Ressel, Bochner's theorem for finite-dimensional conelike semigroups, Math. Ann. **296**(1993), 431–440.

# Remarks on strong random Clarkson inequality

Yasutaka Yamada (Kitakyushu College of Technology)
Yasuji Takahashi (Okayama Prefectural University)
Mikio Kato (Kyushu Institute of Technology)

A. Tonge [12] proved random Clarkson inequality in $L_p$. Kato-Persson-Takahashi [5] characterized the Banach spaces in which random Clarkson inequality holds as those of type $p$. Recently the present authors [13] considered strong random Clarkson inequality with a weight constant $K$ and proved that strong random Clarkson inequality holds in a Banach space $X$ if and only if $X$ has strong type $p$, where the best value of $K$ does not coincide with the strong type $p$ constant $ST_{p(p')}(X)$. We shall extend the strong random Clarkson inequality to show that the best constant $K$ in the resulting inequality coincides with $ST_{p(p')}(X)$.

**1. Theorem (Clarkson inequalities)** Let $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$. Then

$$\left(\frac{\|x+y\|^{p'} + \|x-y\|^{p'}}{2}\right)^{1/p'} \le \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{1/p} \qquad \forall x, y \in L_p \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\|x+y\|^{p} + \|x-y\|^{p}}{2}\right)^{1/p} \le \left(\|x\|^{p'} + \|y\|^{p'}\right)^{1/p'} \qquad \forall x, y \in L_{p'} \qquad (2)$$

実際 (1),(2) は同値であり, Clarkson が証明した 8 つの不等式の中で, 上の 2 つが本質的である. (1) を $(p, p')$-Clarkson 不等式と呼ぶ. 一般に $(p, p')$-Clarkson 不等式が成立するような Banach 空間は次のように type $p$ の空間として特徴づけられる.

**2. Definition (type $p$ inequality)** Let $1 \le p \le 2$. A Banach space $X$ is called of *type p* if there exists $M > 0$ such that with some $1 \le s < \infty$

$$\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|^s\right)^{1/s} \le M \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{1/p} \qquad (3)$$

holds for all $x_1, \cdots, x_n \in X$, where $\{\epsilon_j\}$ is a Rademacher sequence and $\mathbf{E}$ denotes the mathematical expectation. The smallest value of $K$ is denoted by $T_{p(s)}(X)$.

**3. Theorem** (Kato-Takahashi [6]) Let $1 < p \leq 2$ and $1/p + 1/p' = 1$. Then $(p, p')$-Clarkson inequality holds in $X$ if and only if $X$ is of type $p$ and $T_{p(p')}(X) = 1$.

Clarkson 不等式は Boas [2], Koskela [7], Kato [4], Maligranda-Persson [8] らによってパラメータの一般化，多元化が行われた．A. Tonge は $L_p$ で random Clarkson 不等式が成立することを示した．この不等式には未知の絶対定数 $K$ が含まれているが, Takahashi-Kato ([10]; cf. [5]) らはこの定数が1であり，もっと一般に，$(p, p')$-Clarkson 不等式が成立する Banach 空間では $K = 1$ とした random Clarkson 不等式が成立することを示した．

**4. Theorem (random Clarkson inequality)** (Takahashi-Kato [5]; cf. [5]) Let $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq r, s \leq \infty$. If $(p, p')$-Clarkson inequality holds in $X$. Then for all $x_1, \cdots, x_n \in X$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_{ij}x_j\right\|^s\right)^{1/s} \leq n^{c(r,s;p)}\left(\sum_{j=2}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r} \tag{4}$$

holds, where $\{\epsilon_{ij}\}$ are stochastic matrices and $c(r, s; p) = \max\{1/r' + 1/s - 1/p',\ 1/s,\ 1/r'\}$.

この逆は成立しない．ただし $n = 2, s = 1$ として，$(p, 1)$-Clarkson 不等式は成立する．

**5. Definition ($p$-uniform smoothness)** A Banach space $X$ is called *$p$-uniformly smooth* $(1 < p \leq 2)$ if there exists $K > 0$ such that $\rho_X(\tau) \leq K\tau^p$ for all $\tau > 0$, where $\rho_X(\tau)$ is the modulus of smoothness of $X$, i.e.

$$\rho_X(\tau) = \sup\{(\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|)/2 - 1\,;\ \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

**6. Theorem ($p$-uniform smoothness inequality)** (Takahashi-Hashimoto-Kato [9]) Let $1 < p \leq 2$. Then $X$ is $p$-uniformly smooth if and only if for any (resp., some) $1 \leq s < \infty$ there exists a constant $K > 0$ such that

$$\left(\frac{\|x + y\|^s + \|x - y\|^s}{2}\right)^{1/s} \leq (\|x\|^p + \|Ky\|^p)^{1/p} \quad \text{for all } x, y \in X. \tag{5}$$

The smallest value of $K$ in (5) is denoted by $US_{p(s)}(X)$.

$p$ uniform smoothness は Clarkson 型不等式 (5) によって特徴づけられる．Clarkson 不等式を type, cotype と関連付けたように，Clarkson 型不等式も type, cotype

型の概念を入れることにより特徴付けることができる.

**7. Definition (strong type $p$)** A Banach space $X$ is called *of strong type $p$* $(1 \leq p \leq 2)$ provided there exists a constant $K > 0$ and $1 \leq s < \infty$ such that

$$\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|^s\right)^{1/s} \leq \left(\|x_1\|^p + \sum_{j=2}^{n} \|Kx_j\|^p\right)^{1/p} \tag{6}$$

holds for all finite systems $x_1, \cdots, x_n$ in $X$, where $\{\epsilon_j\}$ is a Rademacher sequence. The smallest value of $K$ in (6) is denoted by $ST_{p(s)}(X)$.

(6) $\Rightarrow$ (5) は明らかであり, したがって $US_{p(s)}(X) \leq ST_{p(s)}(X)$ である. (5) $\Rightarrow$ (6) も $K$ の値は保存されないが成立する. こうして Banach 空間の一様 $p$ 平滑性と strong type $p$ であることは同値であり ([9]), さらにはより強い random Clarkson 型不等式の成立も保証される.

**8. Theorem** ([9], [13]) Let $X$ be a Banach space and let $1 < p \leq 2$. Then the following are equivalent.

(i) $X$ is $p$-uniformly smooth.

(ii) $X$ is of strong type $p$.

(iii) (**Strong random Clarkson inequality**) For any $1 \leq r, s \leq \infty$ and for all $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} x_j\right\|^s\right)^{1/s} \leq n^{c(r,s;p)}\left(\|x_1\|^r + \sum_{j=2}^{n} \|Kx_j\|^r\right)^{1/r} \tag{7}$$

holds in $X$ with some constant $K$ independent of $n$, $r$ and $s$, where $(\epsilon_{ij})$ is an $n \times n$ matrix whose coefficients are independent identically distributed random variables taking the values $\pm 1$ with equal probability $1/2$ and $c(r, s; p) = \max\{1/r' + 1/s - 1/p',\ 1/r',\ 1/s\}$, $1/p + 1/p' = 1/r + 1/r' = 1$.

Further, let $K_p(X)$ denote the smallest value of $K$ in (7). Then

$$ST_{p(1)}(X) \leq K_p(X) \leq ST_{p(p')}(X) = US_{p(p')}(X). \tag{8}$$

Strong random Clarkson 不等式の最良重み定数 $K_p(X)$ と $(p, p')$-uniform smoothness 不等式の最良定数 $US_{p(p')}(X)$ の関係は (8) で与えられるが, strong random Clarkson 不等式を拡張した不等式を導入することによって, その最良定数 $\tilde{K}_p(X)$ について $\tilde{K}_p(X) = ST_{p(p')}(X)$ を得る.

**9. Theorem** Let $X$ be a Banach space. Let $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$ and $1 \leq K < \infty$. Then the following are equivalent.

(i) $X$ is $p$-uniformly smooth and

$$\left(\frac{\|x+y\|^{p'}+\|x-y\|^{p'}}{2}\right)^{1/p'} \leq (\|x\|^p + \|Ky\|^p)^{1/p} \tag{9}$$

holds for any $x, y \in X$.

(ii) $X$ is of strong type $p$ and

$$\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\|x_1\|^p + \sum_{j=2}^{n} \|Kx_j\|^p\right)^{1/p} \tag{10}$$

holds for all finite system $\{x_j\}$ in $X$.

(iii) (**Extended strong random Clarkson inequality**) For any $1 \leq r, s, t \leq \infty$ and for any $n$

$$\left\{\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} x_j\right\|^s\right)^{t/s}\right\}^{1/t} \leq n^{c(r,s,t;p)}\left(\|x_1\|^r + \sum_{j=2}^{n} \|Kx_j\|^r\right)^{1/r} \tag{11}$$

holds in $X$, where $c(r,s,t;p) = \max\{1/r' + 1/s - 1/p',\ 1/r',\ 1/s,\ \ 1/r' + 1/s - 1/t\},\ 1/r + 1/r' = 1$. Further let $\tilde{K}_p(X)$ denote the smallest value of $K$ in (11). Then

$$\tilde{K}_p(X) = ST_{p(p')}(X) = US_{p(p')}(X). \tag{12}$$

**10. Theorem** Let $1 < p \leq 2,\ p \leq r \leq p'$. Then the extended strong random Clarkson inequality holds in $X$ if and only if it holds in $L_r(X)$. Moreover $\tilde{K}_p(X) = \tilde{K}(L_r(X))$.

**11. Example**

(i) $\tilde{K}_p(L_p) = 1 \quad (1 < p \leq 2)$

(ii) $\tilde{K}_2(L_p) = \sqrt{p-1} \quad (2 \leq p < \infty)$

(iii) $\tilde{K}_2(L_u(L_v)) = \max\left\{\sqrt{u-1},\ \sqrt{v-1}\right\} \quad (2 \leq u, v < \infty)$

$L_p$ $(1 < p \leq 2)$ は$p$-uniformly smooth であり $(p, p')$-Clarkson 不等式が成立する. したがって Theorem 3 より $ST_{p(p')}(L_p) = 1$ となる. $L_p$ $(2 \leq p < \infty)$ は 2-uniformly smooth であり, Ball-Carlen-Lieb [1] によって $US_{2(2)}(L_p) = \sqrt{p-1}$ $(2 \leq p < \infty)$ とした optical な 2-uniform smoothness 不等式が得られている.

## 参考文献

[1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463-482.

[2] R. P. Boas, Some uniformly convex spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 304-311.

[3] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[4] M. Kato, generalized Clarkson's inequalities and the norms of the Littlewoodmatrices, Math. Nachr. **114** (1983), 163-170.

[5] M. Kato, L. E. Persson and Y. Takahashi, Clarkson type inequalities and their relations to the concepts of type and cotype, Collect. Math. **51** (2000), 327-346.

[6] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr. **186** (1997), 187-196.

[7] M. Koskela, Some generalizations of Clarkson's inequalities, Univ. Beograd. Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 634-677 (1979), 89-93.

[8] L. Maligranda and L. E. Persson, On Clarkson's inequalities and interpolation, Math. Nachr. **155** (1992), 187-197.

[9] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities, J. Nonlinear. Convex Anal. **3** (2002), 267-281.

[10] Y. Takahashi and M. Kato, On random Clarkson inequalities, Hiroshima Math. J. **26** (1996), 295-300.

[11] Y. Takahashi and M. Kato, Clarkson and random Clarkson inequalities for $L_r(X)$, Math. Nachr. **188** (1997), 341-348.

[12] A. Tonge, Random Clarkson inequalities and $L_p$-version of Grothendieck's inequality, Math. Nachr. **131** (1987), 335-343.

[13] Y. Yamada, M. Kato and Y. Takahashi, On strong random Clarkson inequality and strong Rademacher type, Bull Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. **51** (2004), 1-15.

*Kitakyushu College of Technology*
*Kitakyushu 802-0985, Japan*
*e-mail: yamada@kct.ac.jp*

*Department of System Engineering*
*Okayama Prefectural University*
*Soja 719-1197, Japan*
*e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp*

*Department of Mathematics*
*Kyushu Institute of Technology*
*Kitakyushu 804-8550, Japan*
*e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp*

# Numerical range of an operator on a 3-dimensional Krein space

Hiroshi Nakazato

Linear operators on a 3-dimensional Krein space are investigated by using the $J,C$-numerical range of an operator. Especially the boundary of $J,C$-numerical range of an operator $A$ is characterized for $J$-unitarily diagonalizable operators $C$, $A$.

## 1. Krein 空間における線形作用素

複素線形空間 $H$において不定内積 indefinite inner product $\langle \cdot,\cdot \rangle$ とは、$H \times H$ から C への汎関数であって (i) $\langle \xi_1+\xi_2,\eta \rangle = \langle \xi_1,\eta \rangle + \langle \xi_2,\eta \rangle$, $\langle \xi,\eta_1+\eta_2 \rangle = \langle \xi,\eta_1 \rangle + \langle \xi,\eta_2 \rangle$ および$\alpha\langle \xi,\eta \rangle = \langle \alpha\xi,\eta \rangle = \langle \xi,\overline{\alpha}\eta \rangle$ $\xi,\xi_1,\xi_2,\eta,\eta_1,\eta_2 \in H$, $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して成り立つもので、(ii) $\langle \xi,\eta \rangle = \overline{\langle \eta,\xi \rangle}$ が、$\xi,\eta \in H$ に対して成り立ち、(iii) $\langle \xi,\eta \rangle = 0$ が、任意の$\eta \in H$ に対して成り立てば $\xi = 0$ となりようなものを言う。不定計量を導入した空間は、完備性を前提として、Krein 空間と呼ばれる。 Krein 空間 $H$には、 複素 Hilbert 空間としての構造も仮定する。 Sylvester の慣性法則に対応する形で、 正定値の内積 $(\cdot,\cdot)$ と不定内積

$$\langle \cdot,\cdot \rangle$$

が、 ユニタリーかつエルミットである線形作用素 $J = J^* = J^{-1}$により、

$$\langle \xi,\eta \rangle = (J\xi,\eta)$$

という関係で結ばれていると仮定する。Krein 空間 $H$は、

$$H = H_+ \oplus H_-,\quad H_+ = \{\xi \in H : J\xi = \xi\},\quad H_- = \{\xi \in H : J\xi = -\xi\},$$

と分解される。$H_+$または、$H_-$の次元が有限次元である場合、Krein 空間を、Pontryagin 空間と呼ぶこともある。Krein 空間における線形作用素について述べた著作としては、Bognár の [Bo] が有名であるが、場の量子力学とも結び ついて、[An], [Ar], [To], [Ng], [Nn] など、きわめて多数の研究がある。

ここで、問題にするのは、$H_+, H_-$ ともに有限次元の場合で、$H = H_+ \oplus H_-$における線形作用素 $A$ (行列) の数域や一般化された数域である。このような研究でおくらく、もっとも古いのは、[GLR] (1983 年) である。2004 年 7 月にポルトガルの研究集会に出席して、その後このテーマにつき、Coimbra 大学の Bebiano, J. da Providência と共同研究を行ったその成果につきここで述べる (cf. [BPN])。

## 2. 不定計量空間における作用素の $C$-数域

有限次元 Krein 空間 $H$において、$r = \dim(H_+)$, $s = \dim(H_-)$ とし、この空間の不定内積を保存する (複素) 線形作用素 (行列) の全体を、$U(r, s)$ とする：

$$U(r,s) = \{U \in M_{r+s}(\mathbf{C}) : U\,JU^*J = JU^*J\,U = I_{r+s}\}.$$

このとき、$U(r,s)$ は、連結リー群となる。Krein 空間 $H$における 2 つの線形作用素 $C, A$ に対して、

$$W_C^J(A) = \{\mathrm{tr}(CU\,AU^{-1}) : U \in U(r,s)\}$$

と定め、この集合 $W_C^J(A) \subset \mathbf{C}$ を、Krein 空間における作用素 $A$ の $C$-数域と言う。$U(r,s)$ の連結性により、$W_C^J(A)$ は、複素数平面の連結集合となる。しかし、この集合は、一般には凸集合でも、閉集合でもない。例えば、$n = 2, r = s = 1$ であって、$C, A$ がともに階数 1 の作用素であって、

$$C\xi = \langle \xi, \eta \rangle \zeta, \quad A\xi = \langle \xi, \kappa \rangle \tau,$$

とするとき、

$$W_C^J(A) = \{\langle U\zeta, \kappa \rangle \overline{\langle U\eta, \tau \rangle} : U \in SU(1,1)\}$$

が成り立つ。ここで、$\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$とするとき、

$$\overline{\langle U\eta, \tau \rangle} = \langle U(-\overline{\eta_2}, -\overline{\eta_1})^T, (\overline{\tau_2}, \overline{\tau_1})^T \rangle$$

が $U \in SU(1,1)$ に対して成り立つ。これより

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して $W_C^J(A) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geq 1\}$ でありこれは凸集合でも単連結でもない。また、

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して、$W_C^J(A)=\{z\in\mathbf{C}:z\neq 0\}$ であり、

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

に対して、$W_C^J(A)=\{z\in\mathbf{C}:\Re(z)>1/2\}$ である。これらは $\mathbf{C}$ の開集合ではあるが、閉集合ではない。$C$が $J$-エルミットではあるが対角化可能ではないもので、$W_C^J(A)$ が閉凸集合となる例として

$$C=A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

のとき $W_C^J(A)=[0,\infty)$,

$$C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

のとき $W_C^J(A)=i\mathbf{R}$ という例があげられる。

特に、$C=\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0)$ とした場合の $W_C^J(A)$ を、$W_+^J(A)$ また、$C=\mathrm{diag}(0,0,\ldots,1)$ とした場合の $W_C^J(A)$ を、$W_-^J(A)$ とする。Li らにより、$W_+^J(A)$, $W_-^J(A)$ が凸となることが示された ([LTU], [LR 1-3])。ここで、$A$ のスペクトル $\sigma(A)$ に対して

$$\sigma_+(A)=\{\lambda\in\sigma(A):A\xi=\lambda\xi,\text{for some}\,\xi\in\mathbf{C}^n\text{ with }\langle\xi,\xi\rangle>0\},$$
$$\sigma_-(A)=\{\lambda\in\sigma(A):A\xi=\lambda\xi,\text{for some}\,\xi\in\mathbf{C}^n\text{ with }\langle\xi,\xi\rangle<0\},$$
$$\sigma_0(A)=\{\lambda\in\sigma(A):A\xi=\lambda\xi,\text{for some}\,\xi\in\mathbf{C}^n\text{ with}\,\xi\neq 0,\langle\xi,\xi\rangle=0\},$$

と定めれば、$\sigma(A)=\sigma_+(A)\cup\sigma_-(A)\cup\sigma_0(A)$ であって、$\sigma_+(A)\subset W_+(A)$, $\sigma_-(A)\subset W_-(A)$ が成り立つ。また、集合

$$W_J(A)=W_+^J(A)\cup W_-^J(A)=\{\frac{\langle A\xi,\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle}:\xi\in\mathbf{C}^{r+s},\langle\xi,\xi\rangle\neq 0\}$$
$$=\{\frac{(JA\xi,\xi)}{(J\xi,\xi)}:\xi\in\mathbf{C}^{r+s},(J\xi,\xi)\neq 0\}$$

を別方法で特徴づける。$J=I_r\oplus(-I_s)$ であるから、$\xi\in\mathbf{C}^{r+s}$, $\xi\neq 0$ で、$(J\xi,\xi)=0$ となるものが存在するが、このようなベクトルで同時に $(JA\xi,\xi)=0$ となるものがないときは、

$$W_J(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:0\in W(J\lambda-JA)\}$$

が成り立ち、$W_J(A)$ は、複素数平面の閉集合である。上記の条件を取り去ると例えば $J=I_1\oplus(-I_1)$ とし、

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

とするとき、

$$W_J(A) = \{\frac{|\xi_1 - \xi_2|^2}{|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2} : (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{C}^2, |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \neq 0\}$$
$$= \mathbf{R}\backslash\{0\}$$

となる。ここで、$W_+^J(A) = (0, \infty)$ となる。この場合 $W_J(A), W_+^J(A)$ は、C の開集合でも閉集合でもない。ここで、$(JA\xi, \xi) = 0, (J\xi, \xi) = 0$ となる $\xi \in \mathbf{C}^{r+s}, \xi \neq 0$ はないと仮定しよう。このとき、閉集合 $W_J(A)$ の境界は代数曲線となる。その接線を、実数 $a, b$ を使って、 $a\,\Re(z) + b\,\Im(z) + 1 = 0$ という方程式で表すとき、このような対 $a, b$ は、方程式

$$\det(J + a\,(JA + A^*J)/2 - i\,b(JA - A^*J)/2) = 0$$

を満たすことが、Psarrakos によって示されている ([Ps])。この公式は次の事実の類似している。数域 $W(A)$ の境界の接線を、$a\,\Re(z) + b\,\Im(z) + 1 = 0$ という方程式で表すとき、このような実数の対 $a, b$ は、方程式

$$\det(I + a\,(A + A^*)/2 - i\,b(A - A^*)/2) = 0$$

を満たす。

正定値の通常の内積をともなう空間における、エルミット（自己共役）作用素、ユニタリー作用素、正規作用素に対応する、不定計量空間における作用素は、それぞれ条件、$JT^*J = T$, $T\,JT^*J = I, T\,JT^*J = JT^*J\,T$ を満たす作用素であると考えられるが、このうちの最初のもの $J$-Hermite 作用素は、一般には、対角化可能（半単純）ではなく、巾零となることもある。ただし、$J$-Hermite ならば、その固有値は、実数直線に関して対称で、$\lambda$ が固有値ならば、$\overline{\lambda}$が固有値になるなど エルミット作用素に近い性質もある。

定理 1([BPN]). $r + s = n$, $J = I_r \oplus (-I_s) = \mathrm{diag}(j_1, \ldots, j_n)$ とし、

$$C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n), \quad A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

を複素対角行列とする。条件

$$\Re((c_i - c_n)(a_\ell - a_n)j_i\,j_\ell e^{-\theta}) > 0$$

( $i, \ell = 1, 2, \ldots, n-1$) が、或る $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して成り立つならば、領域 $W_C^J(A)$ は閉領域であって、半平面 $\Re(ze^{-\theta}) \geq 0$ に含まれる。

定理 2([BPN]). $J = \mathrm{diag}(1, 1, -1), C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3), A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ とし、$c_1, c_2, c_3$ が実数ならば、$W_C^J(A)$ は閉凸集合となる。

ここで$\tilde{C} = \mathrm{diag}(c_1 - c_3, c_2 - c_3, 0)$, $\tilde{A} = \mathrm{diag}(a_1 - a_3, a_2 - a_3, 0)$ と置くとき、

$$W_C^J(A) = W_C^J(\tilde{A}) + c_3\mathrm{tr}(A) + a_3\mathrm{tr}(C) - 3c_3\,a_3$$

が成り立つ。このことより、$c_3=0,\ a_3=0$ と仮定できる。

命題 ([BPN]) 定理 2 の条件の下で、さらに、$a_1, a_2, a_3$ も実数ならば、$W_C^J(A)$ は、実数直線上の連結閉集合となる。ここで、$c_3=a_3=0$ であって $c_1\neq 0$ または $c_2\neq 0$ また $a_1\neq 0$ または $a_2\neq 0$ と仮定する。(i) $c_1a_1\geq 0,\ c_1a_2\geq 0,\ c_2a_1\geq 0,\ c_2a_2\geq 0$ ならば、

$$W_C^J(A)=[\min\{c_1a_1+c_2a_2, c_1a_2+c_2a_1\}, +\infty),$$

(ii) $c_1a_1\leq 0,\ c_1a_2\leq 0,\ c_2a_1\leq 0,\ c_2a_2\leq 0$ ならば、

$$W_C^J(A)=(-\infty, \max\{c_1a_1+c_2a_2, c_1a_2+c_2a_1\}],$$

(iii) 次の 5 つ

$$c_1^2a_1a_2<0, c_2^2a_1a_2<0, c_1c_2a_1^2<0, c_1c_2a_2^2<0, c_1c_2a_1a_2<0$$

のうちのどれかが成り立つならば、$W_C^J(A)=\mathbf{R}$ が成り立つ。

また、$c_1, c_2, c_3$ が実数であって、$a_1, a_2, a_3$ が同一直線上にないとき、アフィン変換等により, $c_3=0,\ a_3=0$ , $a_1=1,\ a_2=i,\ c_1=1,\ -1\leq c_2\leq 1$ の場合に帰着される。

命題 ([BPN]) $J=\mathrm{diag}(1,1,-1),\ C=\mathrm{diag}(1,c_2,0),\ A=\mathrm{diag}(1,i,0)$ と仮定する。(i) $0\leq c_2\leq 1$ ならば、

$$W_C^J(A)=\{x+iy:(x,y)\in\mathbf{R}^2, c_2\leq x, c_2\leq y, 1+c_2\leq x+y\},$$

であり、(ii) $-1\leq c_2<0$ ならば、$W_C^J(A)=\mathbf{C}$ となる。

定理 3. $J=\mathrm{diag}(1,1,-1), C=\mathrm{diag}(c_1,c_2,c_3), A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)$ とし、3 つ組 $c_1, c_2, c_3$ と 3 つ組 $a_1, a_2, a_3$のどちらも 3 数が複素数平面で同一直線上にないとき、領域 $W_C^J(A)$ をもとめる問題は、アフィン変換により $|c_1|=|c_2|=|c_3|=1,\ |a_1|=|a_2|=|a_3|=1$ かつ $c_1c_2c_3=1,\ a_1a_2a_3=1$ であって、$a_i\neq a_j,\ c_i\neq c_j$ ( $i\neq j$) の場合に帰着される。この仮定の下で、領域 $W_C(A)$ は閉領域であって、その境界点は、デルトイド曲線

$$\Delta=\{2\exp(i\theta)+\exp(-2i\theta):0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

または、線分

$$L_0=\{t(c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3)+(1-t)(c_1a_2+c_2a_1+c_3a_3):0\leq t\leq 1\}$$

または、 4 つの半直線

$$L_1=\{c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+t(c_1-c_3)(a_1-a_3):t\geq 0\},$$

$$L_2=\{c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+t(c_2-c_3)(a_2-a_3):t\geq 0\},$$

$$L_3 = \{c_1a_2 + c_2a_1 + c_3a_3 + t(c_1 - c_3)(a_2 - a_3) : t \geq 0\},$$
$$L_4 = \{c_1a_2 + c_2a_1 + c_3a_3 + t(c_2 - c_3)(a_1 - a_3) : t \geq 0\}.$$

の上にある。ここで、$L_0$ と、$L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$は、閉領域 $W_C^J(A)$ に含まれる。

**References**


[An] T. Ando : "Linear operators on Krein spaces", Mimeeographed note, Hokkaido Univ., 1979.

[Ar] H. Araki : Indecomposable representations with invariant inner product -a theory of the Gupta-Bleuler triplet -, Commun. Math. Phys., 97(1985), 149-159.

[Bo] J. Bognár :"Indefinite inner product spaces", Springer-Verlag, 1974, Berlin, New York.

[BPN] N. Bebiano, J. da Providência and H. Nakazato : J-orthostochastic matrices of size $3 \times 3$ and numerical ranges of Krein space operators. preprint 2004.

[BLPS] N. Bebiano , R. Lemos , J. da Providência and G. Soares : On generalized numerical ranges of operators on an indefinite inner product space, Linear and Multilinear Algebra 52(2004), 203-233.

[GLR] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, "Matrices and indefinite scalar products", Birkh"auser Verlag, 1983, Basel, Boston, Stuttgart.

[LR1] C. K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 15(1994), 1256-1265.

[LR2] C. K. Li and L. Rodman, Shapes and comupter generation of numerical ranges of Krein space operators, Electr. J. Linear Alg. 3 (1998), 31-47.

[LR3] C. K. Li and L. Rodman, Remarks of numerical ranges of operators in space with an indefinite inner product, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 973-982.

[LTU] C. K. Li, N. K. Tsing and F. Uhlig, Numerical range of an operator on an indefinite inner product space, Elect. J. Linear Alg. 1 (1996), 1-17.

[Ng] Y. Nakagami : Tomita's spectral analysis in Krein spaces, Publ. R.I.M.S, Kyoto Univ. 22(1986), 637-658.

[Nn] N. Nakanishi : Indefinite-metric quantum field theory, Prog. Theoret. Phys. Suppl. 51 (1972), 1-95.

[Ps] P. Psarrakos : Numerical range of linear pencils,

# Butler-Rassias type functional equation and its Hyers-Ulam stability

**Sin-Ei Takahasi, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi**

Abstract. In 2003, S. Butler posed the following problem: Show that for $d < -1$ there are exactly two solutions $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ of the functional equation $f(x+y) - f(x)f(y) = d \sin x \sin y$. In the next year, M. Rassias excellentlly answered this problem. Recently, S.- M. Jung shows the Hyers-Ulam stability of the above functional equation following an idea by M. Rassias. We consider more general functional equation $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = g(x, y)$. We give a solution of the equation. Moreover, we prove the Hyers-Ulam stability of the equation. Our results generalize those of Rassias and Jung.

## I. Butler-Rassias type functional equation

$0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$ 及び $\boldsymbol{R}^2$ 上の複素数値関数 $g \neq 0$ が与えられたとき, 次のような関数方程式の解関数 $f$ を考察する：

(#) $$f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = g(x, y) \quad (x, y \in \boldsymbol{R}).$$

先ず Rassias の idea から次のような基本的補題を示す。

Lemma 1. Let $a, b \in \boldsymbol{R}$ be such that $g(a, b) \neq 0$. If the equation (# has a solution, then it must be of form:

$$f(x) = \frac{f(a)}{g(a, b)} g(x, b) + \frac{1}{\lambda g(a, b)} g(x, a+b) - \frac{1}{\lambda g(a, b)} g(x+b, a) \quad (x \in \boldsymbol{R}).$$

In particular, if there exists a solution of (#) which vanishes at $a$, then such a solution is unique.

Proof. Replacing $x$ by $x+z$ in (#), we have

(1) $$f(x+y+z) + \lambda f(x+z)f(y) = g(x+z, y)$$

for all $x, y, z \in \boldsymbol{R}$. Similarly, replacing $y$ by $y+z$ in (#), we have

(2) $$f(x+y+z) + \lambda f(x)f(y+z) = g(x, y+z)$$

for all $x, y, z \in \boldsymbol{R}$. By (1) and (2), we have

(3) $$\lambda\Big(f(x+z)f(y) - f(x)f(y+z)\Big) = g(x+z, y) - g(x, y+z)$$

for all $x, y, z \in \boldsymbol{R}$. Also we have from (#) and (3) that

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x)g(y, z) - g(x, y+z) - \lambda f(y)g(x, z) + g(x+z, y) \\
&= \lambda\Big(f(x)g(y, z) - f(y)g(x, z)\Big) - g(x, y+z) + g(x+z, y) \\
&= \lambda\Big(f(x)(f(y+z) + \lambda f(y)f(z)) - f(y)(f(x+z) + \lambda f(x)f(z))\Big) - g(x, y+z) + g(x+z, y) \\
&= \lambda\Big(f(x)f(y+z) - f(y)f(x+z)\Big) - g(x, y+z) + g(x+z, y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

and hence

(4) $$\lambda f(x)g(y, z) - g(x, y+z) = \lambda f(y)g(x, z) - g(x+z, y)$$

for all $x, y, z \in \boldsymbol{R}$. In particular, putting $y = a$ and $z = b$ in (4), we obtain the desired result.

□

Remark 1. If two functions $f$ and $g$ satisfy (#), then $g$ must be symmetric.

次の補題は割りと reasonable であろう。

Lemma 2. Let $0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$ and $\varphi$ be a nozero complex-valued continuous function on $\boldsymbol{R}$ such that $\varphi(x+y) + \lambda\varphi(x)\varphi(y) = 0$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$. Then there exists a complex number $\alpha$ such that $\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{\alpha x}$ for all $x \in \boldsymbol{R}$.

さて上の補題を拠り所に, 特別な $g$ について関数方程式 (#) の解関数を与える。

(A) $g(x, y) = h(x)h(y)$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ の場合：

Lemma 1 及び Lemma 2 から次のような解関数に関する結果を導くことができる。

Theorem 1. Let $0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$, $h$ a complex-valued continuous functions on $\boldsymbol{R}$ with $h(0) \neq 0$ and $f$ a complex-valued function on $\boldsymbol{R}$. If $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = h(x)h(y)$ holds for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then there exist two complex numbers and $\alpha$ and $B$ with $B(\lambda B^2 - 1) \neq 0$ such that $h(x) = \dfrac{B}{1-\lambda B^2}e^{\alpha x}$ and $f(x) = \dfrac{B^2}{1-\lambda B^2}e^{\alpha x}$ for all $x \in \boldsymbol{R}$.
Conversely, for any complex numbers $\alpha$ and $B$ with $B(\lambda B^2 - 1) \neq 0$, the functions $h$ and $f$ defined by

$$h(x) = \frac{B}{1-\lambda B^2}e^{\alpha x} \text{ and } f(x) = \frac{B^2}{1-\lambda B^2}e^{\alpha x} \ (x \in \boldsymbol{R})$$

satisfy the functional equation : $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = h(x)h(y)$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$.

上の定理は次の系を生む。

Corollary 2. Let $\alpha, \rho, \lambda \in \boldsymbol{C}$ with $\lambda\rho \neq 0$. Then the functional equation

$$f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = \rho e^{\alpha(x+y)} \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$$

has exactly two solutions $f(x) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda\rho}}{2\lambda}e^{\alpha x}$ when $\lambda\rho \neq -\dfrac{1}{4}$, and it has a unique solution $f(x) = -\dfrac{1}{2\lambda}e^{\alpha x}$ when $\lambda\rho = -\dfrac{1}{4}$.

上では $h(0) \neq 0$ の場合について考察したが, そうでない場合は, Lemma 1 から次のような解関数に関する結果を導くことができる。

Theorem 3. Give a complex-valued function $h$ on $\boldsymbol{R}$ and $a \in \boldsymbol{R}$ such that $h(0) = 0$, $h(a) \neq 0$ and

$$(*) \qquad h(a)h(x+y) = h(x)h(y+a) + h(y)h(x+a)$$

for all $x, y \in \boldsymbol{R}$. Let $0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$ and $k(x) = h(x+a), x \in \boldsymbol{R}$. Then the functional equation $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = h(x)h(y)$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ for a complex-valued function $f$ on $\boldsymbol{R}$ has exactly two solutions $f = \pm Ah - \dfrac{1}{\lambda h(a)}k$ when $h(3a) + \lambda h(a)^3 \neq 0$, where

$$A = \frac{\sqrt{\dfrac{h(3a)}{h(a)} + \lambda h(a)^2}}{\lambda h(a)}.$$

Also it has a unique solution $f = -\dfrac{1}{\lambda h(a)}k$ when $h(3a) + \lambda h(a)^3 = 0$.

次に $a\in \boldsymbol{R}$, $\alpha, \beta, \rho \in \boldsymbol{C}$ : $\rho \neq 0$ and $e^{\alpha a}+e^{\beta a}=0$ を与えたとき, 次で定義される $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $h$ を考える：

$$h(x)=\sqrt{\rho}(e^{\alpha x}-e^{\beta x}) \ \ (x\in \boldsymbol{R}).$$

このとき $h(0)=0$ かつ $h(a)\neq 0$ であり, $h$ は条件 (*) を満たす。それ故 Theorem 3 を適用することができ, 次の系が導かれる。

Corollary 4. Let $\alpha, \beta, \rho \in \boldsymbol{C}$ such that $\rho \neq 0$ and $e^{\alpha a}+e^{\beta a}=0$ for some $a\in \boldsymbol{R}$. Then the functional equation

$$f(x+y)+\lambda f(x)f(y)=\rho(e^{\alpha x}-e^{\beta x})(e^{\alpha y}-e^{\beta y}) \ \ (x, y\in \boldsymbol{R})$$

for a complex-valued function $f$ on $\boldsymbol{R}$ has exactly two solutions

$$f(x)=\pm \frac{\sqrt{1+4\lambda\rho}}{2\lambda}(e^{\alpha x}-e^{\beta x})-\frac{1}{2\lambda}(e^{\alpha x}+e^{\beta x}) \ \ (x\in \boldsymbol{R})$$

when $\rho \neq -\frac{1}{4\lambda}$, and it has a unique solution

$$f(x)=-\frac{1}{2\lambda}(e^{\alpha x}+e^{\beta x}) \ \ (x\in \boldsymbol{R})$$

when $\rho=-\frac{1}{4\lambda}$.

上の系で $\alpha=i, \beta=-i$, $\rho=-\frac{d}{4}$ and $a=\frac{\pi}{2}$ とすると, 次の系が導かれる。

Corollary 5. Let $\lambda, d\in \boldsymbol{C}$ with $\lambda \neq 0$. Then the functional equation

$$f(x+y)+\lambda f(x)f(y)=d\sin x\sin y \ \ (x, y\in \boldsymbol{R})$$

for a complex-valued function $f$ on $\boldsymbol{R}$ has exactly two solutions

$$f(x)=\pm \frac{\sqrt{\lambda d-1}}{\lambda}\sin x-\frac{1}{\lambda}\cos x \ \ (x\in \boldsymbol{R})$$

when $\lambda d\neq 1$, and it has a unique solution $f(x)=-\frac{1}{\lambda}\cos x$ ($x\in \boldsymbol{R}$) when $\lambda d=1$.

特に $\lambda=-1$ とおくと, M. Rassias による次の定理が導かれる。

Theorem A ([4]). Let $d\in \boldsymbol{R}$ with $d<-1$. Then the functional equation

$$f(x+y)-f(x)f(y)=d\sin x\sin y \ \ (x, y\in \boldsymbol{R})$$

for a real-valued function $f$ on $\boldsymbol{R}$ has exactly two solutions $f(x)=\pm\sqrt{-d-1}\sin x+\cos x$.

注意。上の定理は, S. Bulter [1] による次のような問題に答えたものである：
Problem (Steven Butler). Show that for $d<-1$ there are exactly two solutions $f:\boldsymbol{R}\rightarrow \boldsymbol{R}$ of the functional eaquation $f(x+y)-f(x)f(y)=d\sin x\sin y$.

(B) $g(x, y)=h(x+y)$ $(x, y\in \boldsymbol{R})$ の場合：

Lemma 2 から次のような解関数に関する結果を導くことができる。

Theoerm 6. Let $0\neq \lambda \in \boldsymbol{C}$, $h$ a nonzero complex-valued continuous function on $\boldsymbol{R}$ and $f$ a complex-valued function on $\boldsymbol{R}$. If $f(x+y)+\lambda f(x)f(y)=h(x+y)$ holds for all $x, y\in \boldsymbol{R}$, then $f(x)=Ae^{\alpha x}$ and $h(x)=A\left(1+\lambda A\right)e^{\alpha x}$ for all $x\in \boldsymbol{R}$ and some $A, \alpha \in \boldsymbol{C}$ with $A\neq -\frac{1}{\lambda}, 0$. Conversely, for any complex numbers $\alpha$ and $A$ with $A\neq -\frac{1}{\lambda}, 0$, the functions $h$ and $f$ defined by

$$h(x) = A(1 + \lambda A)e^{\alpha x} \text{ and } f(x) = Ae^{\alpha x} \ (x \in \boldsymbol{R})$$
satisfy the functional equation : $f(x + y) + \lambda f(x)f(y) = h(x + y)$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$.

注意。$A$ に関する方程式 $A(1 + \lambda A) = \rho$ を解くことによって, Theorem 6 は Corollary 2 を導く。

## II. Hyers-Ulam stability of the Butler-Rassias type functional equation

$0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}$ 及び $\boldsymbol{R}^2$ 上の複素数値関数 $g \neq 0$ が与えられたとき, Butler-Rassias 型関数方程式 (#) の Hyers-Ulam stability を考察する。
先ず Rassias の idea から次のような基本的補題を示すことができる。

Lemma 7. Let $\varepsilon \geq 0$ be arbitrary. If $\left| f(x + y) + \lambda f(x)f(y) - g(x, y) \right| \leq \varepsilon$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left| \lambda f(x)g(y, z) - g(x, y + z) - \lambda f(y)g(x, z) + g(x + z, y) \right| \leq \left(2 + |\lambda|(|f(x)| + |f(y)|)\right)\varepsilon$ for all $x, y, z \in \boldsymbol{R}$.

さて $\boldsymbol{R}^2$ 上の複素数値関数 $g \neq 0$ を与え, $g(a, b) \neq 0$ なる $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して, 次で定義される関数 $f_{a,b}(x)$ を考える :
$$f_{a,b}(x) = \frac{f(a)}{g(a, b)} g(x, b) + \frac{1}{\lambda g(a, b)} g(x, a + b) - \frac{1}{\lambda g(a, b)} g(x + b, a)$$
for all $x \in \boldsymbol{R}$.

このとき, Lemma 7 から次の補題が導かれる。

Lemma 8. Let $\varepsilon \geq 0$ be arbitrary. If $\left| f(x + y) + \lambda f(x)f(y) - g(x, y) \right| \leq \varepsilon$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left| f(x) - f_{a,b}(x) \right| \leq \dfrac{\left(2 + |\lambda|(|f(x)| + |f(a)|)\right)}{|\lambda g(a, b)|} \varepsilon$ for all $x \in \boldsymbol{R}$.

さて上の補題を拠り所に, 特別な $g$ について Butler-Rassias 型関数方程式 (#) の Hyers-Ulam stability を考察する。

(C) $g(x, y) = \rho e^{i\theta(x+y)}$ $(x, y) \in \boldsymbol{R})$ の場合 :

Lemma 8 及び Corollary 2 から次のような Hyers-Ulam stability に関する結果を導くことができる。

Theorem 9. Let $\theta \in \boldsymbol{R}$ and $\rho, \lambda \in \boldsymbol{C}$ with $\lambda\rho \neq 0$. For a functional equation $f(x + y) + \lambda f(x)f(y) = \rho e^{i\theta(x+y)}$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, there exists a constant $K = K(\lambda, \rho) \geq 0$ such that if $0 \leq \varepsilon < |\rho|$ and if a function $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ satisfies the functional ineqaulity $\left| f(x + y) + \lambda f(x)f(y) - \rho e^{i\theta(x+y)} \right| \leq \varepsilon$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left| f(x) - f_0(x) \right| \leq K(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon})$ holds for all $x \in \boldsymbol{R}$ and for some solution function $f_0$.

(D) $g(x, y) = h(x)h(y)$ $(x, y) \in \boldsymbol{R})$, $h(0) = 0$ の場合：

Lemma 8 及び Theorem 3 から次のような Hyers-Ulam stability に関する結果を導くことができる。

Theorem 10. Let $a \in \boldsymbol{R}$ and $h$ a complex-valued bouded function on $\boldsymbol{R}$ such that $h(0) = 0$, $h(a) \neq 0$ and $h(a)h(x+y) = h(x)h(y+a) + h(y)h(x+a)$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$. For a functional equation $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = h(x)h(y)$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, there exists a constant $K = K(\lambda, h) \geq 0$ such that if $0 \leq \varepsilon < \left|h(a)\right|^2$ and if a function $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ satisfies the functional ineqaulity $\left|f(x+y) + \lambda f(x)f(y) - h(x)h(y)\right| \leq \varepsilon$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left|f(x) - f_0(x)\right| \leq K\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\right)$ holds for all $x \in \boldsymbol{R}$ and for some solution function $f_0$.

特に, Theorem 10 と Corollary 4 から次の系が導かれる。

Corollary 11. Let $a \in \boldsymbol{R}$ and let $\alpha, \beta, \rho \in \boldsymbol{C}$ be such that $\rho \neq 0$ and $e^{\alpha a} + e^{\beta a} = 0$. For a functional equation $f(x+y) + \lambda f(x)f(y) = \rho(e^{\alpha x} - e^{\beta x})(e^{\alpha y} - e^{\beta y})$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, there exists a constant $K = K(\lambda, \alpha, \beta, \rho) \geq 0$ such that if $0 \leq \varepsilon < \left|\rho\right|\left|e^{\alpha a} - e^{\beta a}\right|^2$ and if a function $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ satisfies the functional ineqaulity

$$\left|f(x+y) + \lambda f(x)f(y) - \rho(e^{\alpha x} - e^{\beta x})(e^{\alpha y} - e^{\beta y})y)\right| \leq \varepsilon$$

for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left|f(x) - f_0(x)\right| \leq K\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\right)$ holds for all $x \in \boldsymbol{R}$ and for some solution function $f_0$.

S.-M. Jung [3] は, $\boldsymbol{R}$ 上の実数値関数 $f$ に関する Butler-Rassias functional equation

$$f(x+y) - f(x)f(y) = d \sin x \sin y \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$$

に対する次のような Hyers-Ulam stability を示した。

Theorem B (S.-M. Jung). Let $d < -1$ be a constant. Then there exists a constant $K = K(d) \geq 0$ such that if $0 < \varepsilon < \left|d\right|$ and if a function $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ satisfies the functional inequality $\left|f(x+y) - f(x)f(y) - d \sin x \sin y\right| \leq \varepsilon$ for all $x, y \in \boldsymbol{R}$, then $\left|f(x) - f_0(x)\right| \leq K\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\right)$ holds for all $x \in \boldsymbol{R}$ and for some solution function $f_0$ of the Butler-Rassias functional eqaution.

我々は上の定理が Collrollary 11 の特別な場合であることを容易に観察することができる。

## References


1. S. Butler, Problem no. 11030, Amer. math. Monthly, 110(2003), 637.
2. D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 27(1941), 222-224.
3. S.-M. Jung, Hyers-Ulam stability of Butler-Rassias functional equation, submmited.
4. Michael Th. Rassias, Solution of a functional equation problem of Steven Butler, to appear in Octogon Math. Mag (April Issue, 2004).

5. S. M. Ulam, Problem in Modern Mathematics, Chapter VI, Science Editions, Wiley, New York, 1964.

Sin-Ei takahasi
Department of Basic Technology
Applied Mathematics and Physics
Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japan
E-mail: sin-ei@emperor.y.z.yamagata-u.ac.jp

Takeshi Miura
Department of Basic Technology
Applied Mathematics and Physics
Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japane
E-mail: miura@y.z.yamagata-u.ac.jp

Hiroyuki Takagi
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Science, Shinshu University
Matsumoto 390-8621, Japan
E-mail: takagi@math.shinshu-u.ac.jp

# A note on Hua-type inequalities

## Hua 不等式と人間の思考過程

Hiroyuki Takagi[1] 髙木 啓行 (信州大・理)
Takeshi Miura[2] 三浦 毅 (山形大・工)
Sin-Ei Takahasi[3] 髙橋 眞映 (山形大・工)

**Abstract.** We give some applications of our generalization ([2]) of Hua's inequality. As a consequence, we improve the Pearce-Pečarić inequality ([1]) and the inequalities obtained in [3].

### §1. これまでの経過

[2] で, われわれは, Hua の不等式の抽象化を行い, その中で 次の不等式を得た.

**定理 O** ([2] Corollary 2.7). $X$ を ノルム空間とし, $X^*$ を その共役空間とする. $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha>0$, $\delta$ : スカラー, $x \in X$, $f \in X^*$ のとき,

$$|\delta - f(x)|^p + \alpha^{p-1}\|x\|^p \geq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\|f\|^q}\right)^{p-1}|\delta|^p \tag{1}$$

が成り立つ. $f \neq 0$ の場合, 等号成立条件は, $f(x)=\dfrac{\delta\|f\|^q}{\alpha+\|f\|^q}$ かつ $|f(x)| = \|f\|\,\|x\|$.

この定理から, 既存の Hua 型不等式を いくつか みちびくことができた. しかし, その他の応用面に思い至らず, もの足りなさが残った.

〜〜〜〜〜〜〜

定理 O と関連づけると, 妙な不等式があった. Pearce-Pečarić の不等式 ([1] Theorem 2.2) だ. われわれは, その不等式を改訂・拡張して, 次の 2 つの不等式を示した.

**定理 A** ([3] Theorem 4). $X$ を ノルム空間とし, $X^*$ を その共役空間とする. $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha>0$, $\delta$ : スカラー, $x \in X$, $f, g \in X^*$, $f \neq 0$ のとき,

$$|\delta - f(x)|^p + \alpha\left(\|f-g\|\,\|x\|^p + |g(x)|^p\right) \geq \frac{|\delta|^p}{\left(1+\alpha^{1-q}(1+\|f-g\|)\right)^{p-1}} \tag{2}$$

が成り立つ. ここで, 等号成立条件は,

$$f(x) = (1+\|f-g\|)\,g(x), \quad g(x) = \frac{\delta}{\alpha^{q-1}+1+\|f-g\|}, \quad |g(x)| = \|x\|.$$

1. Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University, Matsumoto 390–8621, Japan. / 2 & 3. Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa 992–8510, Japan. // *E-mail:* 1. takagi@math.shinshu-u.ac.jp / 2. miura@yz.yamagata-u.ac.jp / 3. sin-ei@emperor.yz.yamagata-u.ac.jp

**定理 B** ([3] Theorem 2). $\alpha>0$, $\delta, a_1,\cdots,a_n, z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C}$ $(n\geq 2)$ で $(a_1,\cdots,a_n)\neq(0,\cdots,0)$ のとき,

$$(3)\quad \left|\delta-\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|^2\right)\geq\frac{\alpha\,|\delta|^2}{2\alpha+\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}+\sqrt{\alpha n}\right)^2}$$

が成り立つ. 2つのベクトル $(a_1,\cdots,a_n),(1,\cdots,1)\in\mathbb{C}^n$ が一次独立な場合, (3) の等号成立条件は, $\delta=z_1=\cdots=z_n=0$.

不等式 (2), (3) には, なんとなく満足がいかなかった. (2) については, 左辺の $\|x\|^p$ に係数 $\|f-g\|$ がつくので, Pearce-Pečarić の不等式とズレがあって 不満であった. (3) については, "左辺を最小にする右辺の評価が ゆるいのではないか" という印象があった.

〜〜〜〜〜〜〜〜

あるとき,

定理 O の観点から, 定理 A, B をみてみよう

と思った. その辺のいきさつを, 以下に述べたい.

## §2. 定理 A について

定理 O の観点から 定理 A をみて, ノルム空間 $X$ に 新しいノルム

$$|||x|||=\left(\|f-g\|\,\|x\|^p+|g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(x\in X)$$

を導入することにしよう. ここで, $p$ $(q)$ や $f$, $g$ は, もちろん 定理 A で述べられているものである. $f\neq g$ のとき, $|||\ |||$ が ノルムの公理をみたすことは, 容易に確認できる (三角不等式は, Minkowski の不等式

$$\left(k\,(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(k\,a_1^p+a_2^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(k\,b_1^p+b_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(k,a_1,a_2,b_1,b_2\geq 0)$$

を用いて示される). また,

$$\|f-g\|^{\frac{1}{p}}\|x\|\leq|||x|||\leq\left(\|f-g\|+\|g\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\|x\|\qquad(x\in X)$$

がいえるので,

もとのノルム空間 $(X,\|\ \|)$ の共役空間 と 新しいノルム空間 $(X,|||\ |||)$ の共役空間

は, 集合として等しい. よって, どちらも ひとつの記号 $X^*$ で表してさしつかえない. いま, $f\in X^*$ に対して,

$$|||f|||=\sup\left\{\,|f(x)|:|||x|||\leq 1\,\right\}$$

とかこう.

定理 O において, $X$ を 新しいノルム空間 $(X,|||\ |||)$ と考え, $\alpha$ を $\alpha^{\frac{1}{p-1}}$ $(=\alpha^{q-1})$ におきかえると, 次の定理が即座に得られる.

**定理 1.** $X$を ノルム空間とし, $X^*$を その共役空間とする. $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha > 0$, $\delta$ :スカラー, $x \in X$, $f, g \in X^*$, $f \neq g$ のとき,

$$|\delta - f(x)|^p + \alpha\left(\|f-g\|\,\|x\|^p + |g(x)|^p\right) \geq \frac{|\delta|^p}{\left(1+\alpha^{1-q}\|f\|^q\right)^{p-1}} \tag{4}$$

が成り立つ. ここで, $f \neq 0$のとき, 等号成立条件は,

$$f(x) = \frac{\delta\,\|f\|^q}{\alpha^{q-1}+\|f\|^q} \quad \text{かつ} \quad |f(x)| = \|f\|\,\|x\|.$$

定理Aの不等式(2)と 定理1の不等式(4)を比較しよう. 異なる項について,

$$\|f\|^q \leq 1 + \|f-g\| \tag{5}$$

が成り立つ.

**(5)の証明.** 関数 $\varphi(t) = t^p$ $(t \geq 0)$ が凸であることから, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\left(\frac{\|f-g\|\,\|x\| + |g(x)|}{\|f-g\|+1}\right)^p \leq \frac{\|f-g\|\,\|x\|^p + |g(x)|^p}{\|f-g\|+1}$$

つまり,

$$\left(\|f-g\|\,\|x\| + |g(x)|\right)^p \leq \left(\|f-g\|+1\right)^{p-1}\|x\|^p$$

なので,

$$|f(x)| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)| \leq \|f-g\|\,\|x\| + |g(x)| \leq \left(1+\|f-g\|\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|$$

となる. ゆえに, $\|f\| \leq \left(1+\|f-g\|\right)^{1/q}$ となり, (5)を得る. □

不等式(5)においては, 真の不等号が成立するケースがいくらでも考えられる. よって, 不等式**(4)**は, 不等式**(2)**よりよい評価になったいえる.

定理1からは, 次の系がみちびかれる.

**系.** $\alpha > 0$, $\delta, a_1, \cdots, a_n; z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ で, $(a_1, \cdots, a_n) \neq (1, \cdots, 1)$ のとき,

$$\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i - 1|^2}, \qquad c = \frac{1}{\lambda+n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

とおくと,

$$\left|\delta - \sum_{i=1}^{n}a_i z_i\right|^2 + \frac{\alpha}{2}\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|^2\right) \geq \frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha + 2\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|a_i - c|^2 + |c|^2\right)} \tag{6}$$

が成り立つ. ここで, 等号成立条件は,

$$z_i = \frac{2\delta}{\lambda\alpha + 2\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j - c|^2 + \lambda|c|^2\right)}(\overline{a}_i - \overline{c}) \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

不等式(6)は, Pearce-Pečarićの不等式や, [2]のTheorem 1の不等式を, 改良している.

**証明.** $(a_1, \cdots, a_n) = (0, \cdots, 0)$ のとき, 系の主張は ほとんど明らかだから, 以下では, $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ と仮定する.

定理1において, $X$を, $n$次元複素Euclid空間$\mathbb{C}^n$と考える. また, $p = q = 2$とし, $\alpha$を$\frac{\alpha}{2}$におきかえ, $\delta \in \mathbb{C}$, $x = z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ とする. さらに, $(\mathbb{C}^n)^*$の元 $f, g$を,

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n}a_i z_i, \qquad g(z) = \sum_{i=1}^{n}z_i \qquad (z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$$

と定める．このとき，$\|f-g\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - 1|^2} = \lambda$ である．よって，(4) の左辺は (6) の左辺になる．あとは，

$$(*) \qquad \|f\| = \sqrt{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} |a_i - c|^2 + |c|^2}$$

を示せば，(4) の右辺も (6) の右辺になり，(6) が証明できたことになる．

$(*)$ を示そう．$\mathbb{C}^n$ の 2 元 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，$w=(w_1,\cdots,w_n)$ に対して，

$$\langle\langle z, w\rangle\rangle = \lambda\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i + \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\Big)\overline{\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i\Big)}$$

とおく．$\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ が内積の公理をみたすことは，容易に確認でき，この内積で，$\mathbb{C}^n$ は内積空間（実は Hilbert 空間）になる．この内積空間 $\mathbb{C}^n$ において，元 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ のノルムは，

$$\sqrt{\langle\langle z, z\rangle\rangle} = \sqrt{\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\Big|^2} = \Big(\|f-g\|\,\|z\|^2 + |g(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|z\|$$

である．だから，いま定義した内積空間 $\mathbb{C}^n$ は，この節のはじめに述べたノルム空間 $(X, \|\ \|)$ なのである．さて，

$$b_i = \frac{1}{\lambda}\big(\overline{a}_i - \overline{c}\big) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

とし，$b=(b_1,\cdots,b_n)$ とおこう．すると，

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{b}_i + \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\Big)\overline{\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)} = \langle\langle z, b\rangle\rangle \quad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n)$$

だから，

$$\|f\| = \|b\| = \sqrt{\lambda\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 + \Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\Big|^2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|a_i - c|^2 + |c|^2}$$

となり，$(*)$ が示せた．

等号成立条件を確かめよう．定理 1 の (4) の等号成立条件から，(6) の等号成立条件は，

$$(\star) \qquad \langle\langle z, b\rangle\rangle = \frac{\delta\,\|b\|^2}{\frac{\alpha}{2} + \|b\|^2} \quad かつ \quad \big|\langle\langle z, b\rangle\rangle\big| = \|b\|\,\|z\|$$

となる．この第 2 式は，Cauchy-Schwarz の不等式で等号が成立している場合だから，$z=\kappa b$ をみたす複素数 $\kappa$ が存在する．$z=\kappa b$ を第 1 式に代入すれば，$\kappa = \dfrac{2\delta}{\alpha + 2\|b\|^2}$ がわかる．よって，$z = \dfrac{2\delta}{\alpha + 2\|b\|^2}b$ となり，(7) が得られる．反対に，(7) から $(\star)$ が簡単にみちびける．ゆえに，(6) の等号成立条件は (7) である． □

## §3. 定理 B について

定理 O の観点から，定理 B をみてみよう．定理 O において，$X=\mathbb{C}^n$ とおき，$X=\mathbb{C}^n$ のノルムは，ふつうの Euclid ノルムではなく，

$$\|z\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\Big|^2} \qquad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n)$$

と定める．また，$p=q=2$ とし，$X^* = (\mathbb{C}^n)^*$ の元 $f$ を，

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \qquad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n)$$

とする．そうすると，(1) の左辺は (3) の左辺になり，(3) の左辺が評価できる．この発想にもとづいて考察すると，次の定理が得られる．

**定理 2.** $\alpha>0$, $\delta, a_1, \cdots, a_n, z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ のとき, $c=\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n a_i$ とおくと,

$$(8)\qquad \left|\delta-\sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2\right) \geq \frac{\alpha|\delta|^2}{\alpha+2\left(\sum_{i=1}^n |a_i-c|^2+|c|^2\right)}$$

が成り立つ. ここで, 等号成立条件は,

$$(9)\qquad z_i=\frac{2\delta}{\alpha+2\left(\sum_{j=1}^n |a_j-c|^2+|c|^2\right)}(\overline{a}_i-\overline{c}) \qquad (i=1,\cdots n).$$

証明. $\mathbb{C}^n$ の 2 元 $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $w=(w_1,\cdots,w_n)$ に対して,

$$\langle\!\langle z,w\rangle\!\rangle=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n z_i\overline{w}_i+\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)}\right)$$

とおく. $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ が 内積の公理をみたすことは, 容易に確認でき, この内積で, $\mathbb{C}^n$ は 内積空間 (実は Hilbert 空間) になる. この内積空間 $\mathbb{C}^n$ において, 元 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ のノルムを,

$$\|z\|=\sqrt{\langle\!\langle z,z\rangle\!\rangle}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2+\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2}$$

とかこう. そして, 定理 O において, $X$ を, このノルム空間 $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$ と考える. また, $p=q=2$, $\alpha>0$, $\delta\in\mathbb{C}$, $x=z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ とする. さらに, $(\mathbb{C}^n)^*$ の元 $f$ を,

$$f(z)=\sum_{i=1}^n a_i z_i \qquad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n)$$

と定める. いま,

$$b_i=2(\overline{a}_i-\overline{c}) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

とし, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ とおくと,

$$f(z)=\sum_{i=1}^n a_i z_i=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n z_i\overline{b}_i+\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)}\right)=\langle\!\langle z,b\rangle\!\rangle \quad (z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n)$$

となるから,

$$\|f\|=\|b\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2+\left|\sum_{i=1}^n b_i\right|^2}=\sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i-c|^2+|c|^2}$$

である. よって, 定理 O の (1) から, (8) が得られる.

(8) の等号成立条件を確かめよう. $(a_1,\cdots,a_n)=(0,\cdots,0)$ のとき, (8) の等号成立条件は $z_1=\cdots=z_n=0$ であり, これは (9) と同値である. $(a_1,\cdots,a_n)\neq(0,\cdots,0)$ の場合を考えよう. このとき, $f\neq 0$ だから, 定理 O の (1) の等号成立条件から, (8) の等号成立条件は,

$$(\diamond)\qquad \langle\!\langle z,b\rangle\!\rangle=\frac{\delta\|b\|^2}{\alpha+\|b\|^2} \quad \text{かつ} \quad |\langle\!\langle z,b\rangle\!\rangle|=\|b\|\,\|z\|$$

となる. この第 2 式は, Cauchy-Schwarz の不等式で 等号が成立している場合だから, $z=\kappa b$ をみたす複素数 $\kappa$ が 存在する. $z=\kappa b$ を 第 1 式に代入すれば, $\kappa=\dfrac{\delta}{\alpha+\|b\|^2}$ がわかる. よって, $z=\dfrac{\delta}{\alpha+\|b\|^2}b$ となり, (9) を得る. 反対に, (9) から $(\diamond)$ が簡単にみちびける. ゆえに, (8) の等号成立条件は (9) である. □

定理 B の不等式 (3) と 定理 2 の不等式 (8) で, 右辺について,

$$(10)\qquad \alpha+2\left(\sum_{i=1}^n |a_i-c|^2+|c|^2\right) < 2\alpha+\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^n |a_i|^2}+\sqrt{\alpha n}\right)^2$$

が成り立つ.

**(10) の証明.** 定理 2 の証明と同じ記号を用いる. 任意の $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して, ふつうの Euclid ノルム $\|z\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$ と 先のノルム $|\!|\!|z|\!|\!|$ を比較すると,

$$|\!|\!|z|\!|\!| \le 1 \implies \|z\| \le \sqrt{2}$$

がいえる. よって,

$$\begin{aligned}
2\left(\sum_{i=1}^n |a_i-c|^2+|c|^2\right) &= |\!|\!|f|\!|\!|^2 = \left(\sup\left\{|f(z)| : |\!|\!|z|\!|\!| \le 1\right\}\right)^2 \\
&\le \left(\sup\left\{\,|f(z)| : \|z\| \le \sqrt{2}\,\right\}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\sup\left\{|f(z)| : \|z\| \le 1\right\}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{2}\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n a_i z_i\right| : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \le 1\right\}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}\right)^2 \\
&< \alpha + \left(\sqrt{2\sum_{i=1}^n |a_i|^2} + \sqrt{\alpha n}\right)^2
\end{aligned}$$

となる. この両端辺に $\alpha$ を加えれば, (10) になる. □

(10) より, 不等式 **(8)** は, 不等式 **(3)** よりよい評価になったいえる. また, (8) は Pearce-Pečarić の不等式の改良でもある.

定理 0 は, 応用面に なかなか 思い至らなかったのだが, §2, 3 のような応用ができた. そのよろこびを伝えたく, 今回 報告させていただいた. 応用の結果として得られた不等式 (4), (6), (8) について, その意味づけや利用面などは まだ考えていない. 今後の課題にしたい.

## 参考文献

[1] C.E.M. Pearce and J.E. Pečarić, *On Hua's inequality for complex numbers*, Tamkang J. Math., **28** (1997), 193–199.

[2] H. Takagi, T. Miura, T. Kanzo and S.-E. Takahasi, *A reconsideration of Hua's inequality*, *to appear in* J. Inequal. Appl.

[3] H. Takagi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *A note on the Pearce-Pečarić inequalities*, Sci. Math. Japon. Online, e-**2004**, 125–133.

# ものの考え方（Hua 不等式を例にとって）

A way of thinking (Taking Hua's inequality as an example)

**Sin-Ei Takahasi, Hiroyuki Takagi and Takeshi Miura**

Abstract. We consider the best possibility of coefficients in Hua's inequality by inquiring into the general principles of common characteristics.

## 1．刑事コロンボにみる

ある族の全てに共通するものを発見することは
重要であり且つ嬉しいものである。

最近、新刑事コロンボをテレビでみていて妙に納得してしまった。ある日金回りの悪い甥っ子が叔父に相談にきた。甥っ子は３千万ドルの宝くじに当たり，離婚前の妻に半分とられるのが悔しかったからである。結局その甥っ子は叔父に殺され，３千万ドルは叔父のものになるのである。

ある日仮装パーティーから抜け出した叔父は甥っ子のアパートに行き，事故を装い彼を殺すのであるが，担当のコロンボ警部は叔父に不信感を持つ。コロンボ警部は殺された甥っ子がかわいがっていたチンパンジーに目をつけ，チンパンジーを写した何枚かの写真はみな指輪，腕時計，イヤリング等々にさわっていることを発見する。共通項が「光るもの」と知ったコロンボ警部は、結局貴族の仮装をしていた叔父の首飾りのペンダントにチンパンジーの指紋が残っていたことをつきとめ，彼を逮捕するのである。

## 2．Hua 不等式と問題

L. Keng Hua という偉い中国の数学者がいた。東大で講演中に亡くなったそうであるが，１９６５年彼は所謂 Hua の不等式と呼ばれる次のような不等式：

$$(\delta-\sum_{k=1}^{n}x_k)^2+\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k^2\geq\frac{\lambda\delta^2}{n+\lambda}\quad(\delta,\lambda>0,x_1,\ldots,x_n\in\boldsymbol{R}).$$

を発見した。これは Number Theory の発展に寄与した重要な不等式と言われているが，我々はこの不等式を数年来考えている。これはある種の "conjugate method" により次のように拡張された (cf. [2, Corollary 3])：

Theorem A ([2]). Let $X$ be a real or complex normed space with dual $X^*$ and $p>1$. Then

$$(\#)\qquad\left|\delta-f(x)\right|^p+\lambda^{p-1}\|x\|^p\geq\left(\frac{\lambda}{\lambda+\|f\|^{p/(p-1)}}\right)^{p-1}\delta^p\quad(\delta,\lambda>0,x\in X,f\in X^*)$$

holds.

さてここに現れる係数 $\lambda^{p-1}$ 及び $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\|f\|^{p/(p-1)}}\right)^{p-1}$ は best possible なのであろうかという素朴な疑問が生ずる。　そこでこれを上の共通項に関する哲学に沿って解決し, 同時にこの不等式の意味するところも知ってみようと言うわけである。

## 3．一般化への道

不等式 (#) を良く観察しよう。先ず両辺を $\delta^p$ で割り, $x/\delta$ を改めて $x$ と思い、これをパラメータと考える。次に $A_x=\left|1-f(x)\right|, B_x=\|x\|\ (x\in X)$ と置くと, 座標平面の第 1 象限に一つの領域 $D=\{(A_x, B_x): x\in X\}$ が現れる。ここで大事なことは, $a=1$, $b=\|f\|$ と置くと, $D$ は領域 $\{(A, B)\in \boldsymbol{R}^2 \colon A, B\geq 0, aA+bB\geq 1\}$ に含まれているということである。また (#) は両辺を $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\|f\|^{p/(p-1)}}\right)^{p-1}$ で割ることにより、

$\alpha A_x^p+\beta B_x^p\geq 1$, $\alpha, \beta>0$ なる形をしている。そこでこれを $D$ の元をパラメータとする領域群：

$$\Delta_{(A,B)}=\{(\alpha, \beta)\in \boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R}^+ : \alpha A^p+\beta B^p\geq 1\}\quad ((A, B)\in D)$$

と考える。このとき、この領域群の全ての共通部分：

$$\Delta=\bigcap_{(A,B)\in D}\Delta_{(A,B)}$$

が決定できれば, 我々の疑問に答えることができ、同時に不等式 (#) の意味するところを知ろう。

## 4．一般的理論

正数 $a, b, p>0$ 及び $AB$-座標平面の第 1 象限内の領域 $D$ を与え, $D$ は直線：$aA+bB=1$ の上側に位置すると仮定しよう：

$$D\subseteq\{(A, B)\in \boldsymbol{R}^2 : A, B\geq 0, aA+bB\geq 1\}.$$

次に領域：

$$K^+(p, D)=\{(\alpha, \beta)\in \boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R}^+ \colon \alpha A^p+\beta B^p\geq 1 \text{ for all } (A, B)\in D\}$$

を考える。勿論 $K^+(p, D)$ は共に $\boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R}^+$ 内の閉凸集合であるが, これを決定しようと言うわけである。勿論 $D$ が勝手な領域ではコンピュータ的決定以外は無理としたもので, $D$ にある程度の条件がいる。次にこれを見て見よう。

その為, 我々は包絡線法を採用する。先ず次のことに気を付ける：

$$K^+(p, D)=\bigcap_{(A,B)\in D}\Delta^+(p\,;A, B),$$

where $\Delta^+(p; A, B)=\{(\alpha, \beta)\in \boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R}^+ : \alpha A^p+\beta B^p\geq 1\}$.

更に領域：

$$K^+(p, a, b)=\bigcap_{(A,B)\in L(a,b)}\Delta^+(p\,;A, B),$$

where $L(a, b)=\{(A, B)\in \boldsymbol{R}^2 : aA+bB=1, 0\leq A\leq 1/a\}$ を考える。

このとき次の事柄が成り立つ。

$$L(a, b)\subseteq \bar{D}\Rightarrow K^+(p; D)=K^+(p; a, b)$$

そこで直線群：$\{\alpha A^p+\beta B^p=1 : (A, B)\in L(a, b)\}$ の包絡線 $C_{p,a,b}$ を決定しよう。それには,

$$F(\alpha, \beta, A)=\alpha A^p+\frac{\beta}{b^p}(1-aA)^p-1\quad (0<A<\tfrac{1}{a})$$

と置いて, 連立方程式 $F(\alpha, \beta, A)=0, \dfrac{\partial}{\partial A}F(\alpha, \beta, A)=0$ から $A$ を消去すれば良い。計算すると, 包絡線 $C_{p,a,b}$ は曲線：

$$\beta = h_{p,a,b}(\alpha) := \frac{b^p \alpha}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - a^{p'}\right)^{p-1}} \ (\alpha > a^p) \text{ when } p > 1$$

and

$$\beta = h_{p,a,b}(\alpha) := \frac{b^p \alpha}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - a^{p'}\right)^{p-1}} \ (0 < \alpha < a^p) \text{ when } 0 < p < 1$$

であることがわかる。

注意. If $p > 1$, then $h_{p,a,b}(\alpha)$ $(\alpha > a^p)$ is a hyperbolic function. If $0 < p < 1$, then $h_{p,a,b}(\alpha)$ $(0 < \alpha < a^p$ is a hyperelliptic function. In fact, if $p = 2$, then $\beta = h_{2,a,b}(\alpha) = b^2 + \dfrac{a^2b^2}{\alpha - a^2}$ $(\alpha > a^2)$, and if $p = 1/2$, then $\beta = h_{2,a,b}(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{a} + \dfrac{\beta^2}{b}$ $(0 < \alpha < a^2)$.

これはもしかしたら楕円と双曲線を結ぶ（?）新しいパラメータかも知れない？

以上を纏めると, 次の結果を得る。

定理１。正数 $a, b > 0, p > 1$ 及び $AB$-座標平面の第１象限内の領域 $D$ を与え、$D$ は直線：$aA + bB = 1$ の上側に位置し、$\{(A, B) \in \boldsymbol{R}^2 : aA + bB = 1, 0 \leq A \leq 1/a\} \subseteq \bar{D}$ を満たすとする。
このとき、

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ : \alpha A^p + \beta B^p \geq 1 \text{ for all } (A, B) \in D\}$$
$$= \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ : \alpha > a^p, \beta \geq h_{p,a,b}(\alpha)\}$$

が成り立つ。ただし、$h_{p,a,b}(\alpha) = \dfrac{b^p \alpha}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - a^{p'}\right)^{p-1}}$ $(\alpha > a^p)$.

全く同様の議論をすると、次の結果を得る。

定理２。正数 $a, b > 0, 0 < p < 1$ 及び $AB$-座標平面の第１象限内の領域 $D$ を与え, $D$ は直線：$aA + bB = 1$ の下側に位置し, $\{(A, B) \in \boldsymbol{R}^2 : aA + bB = 1, 0 \leq A \leq 1/a\} \subseteq \bar{D}$ を満たすとする。このとき,

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ : \alpha A^p + \beta B^p \leq 1 \text{ for all } (A, B) \in D\}$$
$$= \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ : 0 < \alpha < a^p, \beta \leq h_{p,a,b}(\alpha)\}$$

が成り立つ。ただし, $h_{p,a,b}(\alpha) = \dfrac{b^p \alpha}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - a^{p'}\right)^{p-1}}$ $(0 < \alpha < a^p)$.

## 5. Hua の不等式に関する問題解決

Let $p > 1$ and $X$ be a real or complex Banach space with dual $X^*$. Let $f$ be a nonzero functional in $X^*$ and set $a = 1$ and $b = \|f\|$. Also let

$$D = \{(A, B) : A = \left|1 - f(x)\right|, B = \|x\|, x \in X\}.$$

Then $D \subseteq L(a, b) \equiv \{(A, B) \in \boldsymbol{R}^2 : A, B \geq 0, aA + bB \geq 1\}$. Note also that $L(a, b) \subseteq \bar{D}$. In fact, let $(A_0, B_0) \in L(a, b)$ and $\varepsilon > 0$. Choose a unit element $e \in X$ such that $f(e) \geq 0$ and $\|f\| < f(e) + \frac{\varepsilon}{B_0}$. Set $x = B_0 e$, $A = \left|1 - f(x)\right|$ and $B = \|x\|$, so that $(A, B) \in D$. Since $f(x) = B_0 f(e) \leq B_0 \|f\| = 1 - A_0 \leq 1$, it follows that

$$\left|A - A_0\right| \le \left|1 - f(x) - A_0\right| = \left|1 - B_0 f(e) + \|f\| B_0 - 1\right| = B_0\left(\|f\| - f(e)\right) < \varepsilon .$$

Note also that $B = B_0$ and hence we conclude $L(a, b) \subseteq \bar{D}$. Therefore we have from 定理 1 that

$$\alpha\left|1 - f(x)\right|^p + \frac{\alpha\|f\|^p\|x\|^p}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - 1\right)^{p-1}} \ge 1 \ \ (\forall x \in X, \forall \alpha > 1, \forall f \in X^*)$$

and the constant $\dfrac{\alpha\|f\|^p}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - 1\right)^{p-1}}$ is best possible for each $\alpha > 1$ and $0 \ne f \in X^*$.

Let $\delta > 0$ and replace $x$ by $\frac{x}{\delta}$ in the above inequality. Then

$$\left|\delta - f(x)\right|^p + \frac{\|f\|^p\|x\|^p}{\left(\alpha^{1/(p-1)} - 1\right)^{p-1}} \ge \frac{1}{\alpha}\delta^p \ \ (\forall x \in X, \forall \alpha > 1, \forall \delta > 0, \forall f \in X^*).$$

Let $\lambda > 0$ and replace $\alpha$ by $\left(\dfrac{\|f\|^{p'}}{\lambda} + 1\right)^{p-1}$ in the above inequality. Then

$$\left|\delta - f(x)\right|^p + \lambda^{p-1}\|x\|^p \ge \left(\frac{\lambda}{\lambda + \|f\|^{p'}}\right)^{p-1}\delta^p \ \ (\forall x \in X, \forall \lambda > 0, \forall \delta > 0, \forall f \in X^*)$$

which is an extented Hua's inequality (#).

Also the constants $\lambda^{p-1}$ and $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda + \|f\|^{p'}}\right)^{p-1}$ are best possible for each $\lambda > 0, \delta > 0$ and $0 \ne f \in X^*$.

また係数の作る曲線：

$$x = \lambda^{p-1}, y = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \|f\|^{p'}}\right)^{p-1} \ \ (\lambda > 0)$$

は不等式 (#)を成り立たせる領域群の包絡線（ある種の変換を伴うが）を表していることがわかる。

## 6. 発　展

$D$ を $AB$-座標平面の第 1 象限に位置する領域で，境界 $\partial\bar{D}$ は 2 直線 $A = A_0$, $B = B_0$ に接しているとする。そして左下の境界を表す曲線の方程式が $f(A, B) = 0$ とする。このとき. 次の問題を考える：領域

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ : \alpha\varphi(A, B) + \beta\psi(A, B) \ge 1 \text{ for all } (A, B) \in D\}$$

を決定せよ。上の問題は結局、直線群：

$$\{\alpha\varphi(A, B) + \beta\psi(A, B) = 1 \text{ for all } (A, B) \in \bar{D} \text{ such that } f(A, B) = 0\}$$

の包絡線を求めることで決定されることが多い！今まで見てきた例は, $p > 1$ で

$$\varphi(A, B) = A^p, \psi(A, B) = B^p, f(A, B) = aA + bB - 1$$

の場合であるが, 一般に $(p, q) \ne (1, 1)$ で,

$$\varphi(A, B) = A^p, \psi(A, B) = B^q$$

のときは計算すると、

$$\alpha = \frac{aq}{A^{p-1}(Aa(q-p) + p)}, \beta = \frac{b^q p}{(1 - aA)^{q-1}(Aa(q-p) + p)} \ \ (0 < A < \tfrac{1}{a})$$

である。このとき, $\beta$ が $\alpha$ の関数となるための必要十分条件は $(p-1)(q-1) \ge 0$ であることがわかる。

ところでパラメータ $A$ は紛らわしいので, $t$ に変える。$\beta$ が $\alpha$ の凸関数であれば, 上の理論から

$$\frac{aq}{t^{p-1}(ta(q-p)+p)}A^p + \frac{b^q p}{(1-at)^{q-1}(ta(q-p)+p)}B^q \geq 1 \quad (0<t<\tfrac{1}{a}, (A,B)\in D)$$

を得る。そして係数は勿論 best possible となっている。ここで

$$a=1, b=\|f\|, A=|1-f(x)|, B=\|x\|$$

とすると,

$$\alpha=\frac{q}{t^{p-1}(t(q-p)+p)}, \beta=\frac{\|f\|^q p}{(1-t)^{q-1}(t(q-p)+p)} \quad (0<t<1)$$

となるが, このとき $\beta$ が $\alpha$ の凸関数であれば,

$$\frac{q}{t^{p-1}(t(q-p)+p)}|1-f(x)|^p + \frac{\|f\|^q p}{(1-t)^{q-1}(t(q-p)+p)}\|x\|^q \geq 1$$
$$(0<t<1, x\in X, f\in X^*)$$

つまり,

(##)
$$q(1-t)^{q-1}|1-f(x)|^p + pt^{p-1}\|f\|^q\|x\|^q \geq t^{p-1}(1-t)^{q-1}(t(q-p)+p)$$
$$(0<t<1, x\in X, f\in X^*)$$

となる。

特に, $p=q>1$ とすると, $\beta$ は $\alpha$ の凸関数となり, $\lambda, \delta>0$ として, $t=\dfrac{\lambda}{\lambda+\|f\|^{p'}}$, $x\to\frac{x}{\delta}$ なる変換をすると, 上式は拡張された Hua 不等式 (#) となる。

また $p=1, q=2$ の場合は計算して見ると,

$$\beta=\frac{b^2}{4a}\alpha+\frac{b^2}{4}+\frac{ab^2/4}{\alpha-a} \quad (a<\alpha<2a)$$

となり, これは双曲線, 従って凸関数であるから, 上式は不等式

$$4(t-1)t|1-f(x)|+t^2\|x\|^2\|f\|^2 \geq 4(t-1) \quad (1<t<2, x\in X, f\in X^*)$$

を生み, 係数は最良である。

特に, $t=\dfrac{4\lambda}{4\lambda-\|f\|^2}$ $(\lambda>\|f\|^2/2)$, $x\to\frac{x}{\delta}$ なる変換によって上式は Hua 型不等式

$$\delta|\delta-f(x)|+\lambda\|x\|^2 \geq \frac{4\lambda-\|f\|^2}{4\lambda}\delta^2 \quad (\delta>0, \lambda>\|f\|^2/2, x\in X, f\in X^*)$$

を生む。しかしまだ良く解明してない。

## References


1. L. K. Hua, Additive theory of prime numbers (Translated by N. B. Ng) in *Translations of Math. Monographs*, Vol. 13, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1965.

2. H. Takagi, T. Miura, T. Kanzo and S.-E. Takahasi, A reconsideration of Hua's inequality, to appear in J. Inequal. Appl.



Sin-Ei takahasi
Department of Basic Technology
Applied Mathematics and Physics
Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japan
E-mail: sin-ei@emperor.y.z.yamagata-u.ac.jp

Hiroyuki Takagi
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Science, Shinshu University
Matsumoto 390-8621, Japan
E-mail: takagi@math.shinshu-u.ac.jp

Takeshi Miura
Department of Basic Technology
Applied Mathematics and Physics
Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japane
E-mail: miura@y.z.yamagata-u.ac.jp

# JENSEN INEQUALITY IS A COMPLEMENT OF KANTOROVICH INEQUALITY

MASATOSHI FUJII AND MASAHIRO NAKAMURA

ABSTRACT. Usually the celebrated Kantorovich inequality is regarded as a complementary inequality of the Jensen inequality. In this note, we point out that "monotonicity and linearity" of integral imply the Kantorovich inequality. As a consequence, the Jensen inequality is complementary to the Kantorovich inequality in this sense.

**1.** We first cite the following inequalities: Let $0 < m < M$. Then

$$\int_I t d\mu(t) \cdot \int_I \frac{1}{t} d\mu(t) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \tag{1}$$

for all probability measures $\mu$ on $I = [m, M]$, and

$$(Ax, x)(A^{-1}x, x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \tag{2}$$

for all positive invertible operators $A$ on a Hilbert space $H$ with $0 < m \leq A \leq M$ and unit vectors $x \in H$. Many authors gave proofs of the inequality, among them we here cite early papers [8] and [14], for example. Note that (1) and (2) are equivalent and (2) is called the Kantorovich inequality. Usually they are regarded as complementary inequalities of

$$1 \leq \int_I t d\mu(t) \cdot \int_I \frac{1}{t} d\mu(t) \quad \text{and} \quad 1 \leq (Ax, x)(A^{-1}x, x) \tag{3}$$

respectively, where $\mu$ (resp. $A$ and $x$) is as in (1) (resp. (2)).

By the way, (3) is a special case of the Jensen inequality, i.e., if $f$ is a real-valued continuous convex function on $I$, then

$$f((Ax, x)) \leq (f(A)x, x) \tag{4}$$

for all selfadjoint operators $A$ on a Hilbert space $H$ whose spectra are included in $I$ and unit vectors $x \in H$. From the veiwpoint of (4), Mond-Pečarić and Ando considered, as generalizations of the Kantorovich inequality, complementary inequalities of the Jensen inequality, see [11] and also [13]. We here cite Furuta's textbook [5] as a pertinent reference to Kantorovich inequalities.

Reviewing the Kantorovich inequality, we shall point out in this note that the Jensen inequality is complementary to the Kantorovich inequality. To do this, we shall set up two elementary and simple axioms "monotonicity and linearity", by which we approach to the Kantorovich inequality and its generalizations. Incidentally such an idea can be seen in the discussion of [16] by Takahasi, Tsukada, Tanahashi and Ogiwara.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A63 and 47B15.

*Key words and phrases.* Kantorovich inequality, Jensen inequality and Mond-Pecaric method in operator inequality.

**2.** At the beginning of this section, we cite two simple properties on integral used below. Let $C(I)$ be the algebra of all real-valued continuous functions on $I = [m, M]$ and $\mu$ a probability measure on $I$. Then

(E1) *If $f \le g$ for $f, g \in C(I)$, then* $\int_I f(t)d\mu(t) \le \int_I g(t)d\mu(t)$.

(E2) *If $g$ is linear, i.e., $g(t) = at + b$ for some $a, b \in \mathbb{R}$ and $\int_I t d\mu(t) = s$, then* $\int_I g(t)d\mu(t) = g(s)$.

It is clear that (E1) and (E2) are satisfied. In addition, they are true for a unital positive linear functional on $C(I)$, $E[f] = E_{A,x}[f] = (f(A)x, x)$ for $f \in C(I)$, where $A$ and $x$ are as in (2). That is, $E[f]$ satisfies

(E1) *If $f \le g$ for $f, g \in C(I)$, then* $E[f] \le E[g]$, and

(E2) *If $g$ is linear, i.e., $g(t) = at + b$ for some $a, b \in \mathbb{R}$ and $E[t] = s$, then $E[g] = g(s)$.*

Anyway, (E1) and (E2) are quite trivial, but essential.

We here apply them to the Kantorovich inequality (1): Let $h$ be the function corresponding to the segment connecting the points $(m, \frac{1}{m})$ and $(M, \frac{1}{M})$ and $s_0 = \int_I t d\mu(t)$. Then we have $\frac{1}{t} \le h(t)$ for $t \in [m, M]$ and $s_0 \in I$. Hence (E1) and (E2) imply

$$\int_I t d\mu(t) \cdot \int_I \frac{1}{t} d\mu(t) \le \int_I t d\mu(t) \cdot \int_I h(t) d\mu(t) = h(s_0)s_0.$$

Since $h(m)m = h(M)M = 1$, the quodratic polynomial $h(s)s$ attains its maximum at $s = \frac{M+m}{2}$, so that

$$\max_{s\in[m,M]} h(s)s = h(\frac{M+m}{2})\frac{M+m}{2} = \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

so that we obtain (1).

In the above proof of (1), (E1) and (E2) worked under the following facts:

(i) $f(t) \le h(t)$ *for all* $t \in I$, and

(ii) $f(m)m = f(M)M$.

The latter (ii) says that the function $h(s)s$ has the same value at $s = m$, $M$. As a consequence, we have the following estimation which is a generalization of (2).

**Theorem 1.** *If $f \in C(I)$ satisfies (i) and (ii) cited above and $f(m) > f(M)$, then*

$$(f(A)x, x)(Ax, x) \le \frac{(f(M) + f(m))(M + m)}{4}$$

*for all selfadjoint operators $A$ on a Hilbert space $H$ with $m \le A \le M$ and unit vectors $x \in H$.*

*Proof.* Let $h$ be the function corresponding to the segment connecting the points $(m, f(m))$ and $(M, f(M))$ and $s_0 = (Ax, x)$. Since $s_0 \in [m, M]$ and $E[f] = (f(A)x, x) \le E[h] = h(s_0)$ by (E2) , it follows from the assumption (ii) that

$$(f(A)x, x)(Ax, x) \le h(s_0)s_0 \le \max_{s\in[m,M]} h(s)s$$

$$= h(\frac{M+m}{2})\frac{M+m}{2} = \frac{(f(M) + f(m))(M + m)}{4}.$$

3. Next we apply them to generalized Kantorovich inequalities due to Furuta [4] and [7], cf. also [2] and [1]. Following him [6], we denote by $K(m,M,p)$ the generalized Kantorovich constant for $m<M$ and $p\in\mathbb{R}$:

$$K(m,M,p)=\frac{mM^p-Mm^p}{(p-1)(M-m)}\left\{\frac{(p-1)(M^p-m^p)}{p(mM^p-Mm^p)}\right\}^p.$$

**Theorem 2.** *Let $A$ be a positive operator on a Hilbert space $H$ with $0<m\le A\le M$, and let $x$ a unit vector in $H$. If $p\notin[0,1)$, then*

$$(A^px,x)\le K(m,M,p)(Ax,x)^p.$$

*On the other hand, if $p\in(0,1)$, then*

$$(A^px,x)\ge K(m,M,p)(Ax,x)^p.$$

*Proof.* It is similar to that of the Kantorovich inequality. We put $E[f]=(f(A)x,x)$ for $f\in C(I)$. Then it satisfies (E1) and (E2) and in particular $E[t]=(Ax,x)$. Let $h$ be the function corresponding to the segment connecting the points $(m,m^p)$ and $(M,M^p)$, precisely, $h(t)=\mu_pt+\nu_p$ where $\mu_p=\frac{M^p-m^p}{M-m}$ and $\nu_p=\frac{M^pm-m^pM}{M-m}$.

If $p\notin[0,1)$, then we have $t^p\le h(t)$ for $t\in[m,M]$ and so

$$E[t^p]E[t]^{-p}\le E[h]E[t]^{-p}=h(s_0)s_0^{-p}$$

for $s_0=E[t]\in[m,M]$ by (E1) and (E2). Since $\frac{p\nu_p}{(1-p)\mu_p}\in[m,M]$ and so

$$\max_{s\in[m,M]}h(s)s^{-p}=h(\frac{p\nu_p}{(1-p)\mu_p})(\frac{(1-p)\mu_p}{p\nu_p})^p=K(m,M,p),$$

we obtain the former.

Next, if $p\in(0,1)$, then

$$E[t^p]E[t]^{-p}\ge E[h]E[t]^{-p}=h(s_0)s_0^{-p}$$

for $s_0=E[t]\in[m,M]$ by (E1) and (E2). Since

$$\min_{s\in[m,M]}h(s)s^{-p}=K(m,M,p),$$

we obtain the latter.

4. The following theorem is proposed in [10] as a generalization of the Mond-Pečarić inequality [11] which is a typical application of the Mond-Pečarić method.

**Theorem 3.** *Let $A_j$ be positive operators on a Hilbert space $H$ with $0<m\le A_j\le M$ $(j=1,2,\cdots,k)$ and $x_1,\cdots,x_k$ vectors in $H$ with $\sum\|x_j\|^2=1$. Let $f$ and $g$ be in $C(I)$ where $I=[m,M]$, and $U$ and $V$ intervals such that $U\supseteq f(I)$ and $V\supseteq g(I)$. If $f$ is convex and a real-valued function $F(u,v)$ on $U\times V$ is non-decreasing in $u$, then*

$$F(\sum(f(A_j)x_j,x_j),g(\sum(A_jx_j,x_j)))\le\max_{t\in I}F(\mu_f(t-m)+f(m),g(t)),$$

*where $\mu_f=\frac{f(M)-f(m)}{M-m}$.*

*Proof.* Let $h$ be the function corresponding to the segment connecting the points $(m,f(m))$ and $(M,f(M))$, that is, $h(t)=\mu_ft+\nu_f$ where $\nu_f=\frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}$. Since

$E[f] = \sum(f(A_j)x_j, x_j)$ satisfies (E1) and (E2), we have $E[f] \le E[h] = h(s_0) = \mu_f s_0 + \nu_f$ where $s_0 = E[t] = \sum(A_j x_j, x_j) \in I$. Therefore it follows that

$$\begin{aligned} F(\textstyle\sum(f(A_j)x_j, x_j), g(\sum(A_j x_j, x_j))) &= F(E[f], g(E[t]) \\ &\le F(\mu_f s_0 + \nu_f, g(s_0)) \le \max_{t\in I} F(\mu_f(t-m) + f(m), g(t)), \end{aligned}$$

because $\mu_f s_0 + \nu_f = \mu_f(s_0 - m) + f(m)$.

**Remark 4.** *In Theorem 2, If $F(u, v)$ is non-increasing, then we have the following inequality with reverse order to the above,* [10]*:*

$$F(\textstyle\sum(f(A_j)x_j, x_j), g(\sum(A_j x_j, x_j))) \ge \min_{t\in I} F(\mu_f(t-m) + f(m), g(t)).$$

**5.** It is known that the Kantorovich inequality (2) is generalized as follows: If $\Phi$ is a unital positive linear map between $C^*$-algebras, then

$$\Phi(A^{-1}) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\Phi(A)^{-1} \tag{5}$$

for all positive invertible elements $A$ with $0 < m \le A \le M$, see [12] and also [13]. Incidentally we note that it follows from (2) and (3) for states, i.e.,

$$1 \le \phi(A)\phi(A^{-1}) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm} \tag{6}$$

for all positive invertible operators $A$ with $0 < m \le A \le M$ and states $\phi$ on the $C^*$-algebra generated by $A$, see [13]. Defining $\phi(X) = \psi(\Phi(X))$ for an arbitrary state $\psi$, it follows from (6) that

$$\begin{aligned} \psi(\Phi(A^{-1})) = \phi(A^{-1}) &\le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\phi(A)^{-1} = \frac{(M+m)^2}{4Mm}\psi(\Phi(A))^{-1} \\ &\le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\psi(\Phi(A)^{-1}), \end{aligned}$$

so that (5) is proved.

In addition, we point out that (5) implies the result [12; Theorem 1] which is a variant of (5): If $\Phi$ is a unital positive linear map betwee $C^*$-algebras, then

$$\Phi(A) \sharp \Phi(A^{-1}) \le \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}}$$

for all positive invertible elements $A$ with $0 < m \le A \le M$, where $\sharp$ is the geometric mean in the sense of Kubo-Ando [9], i.e., for positive invertible operators $A$ and $B$,

$$A \sharp B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.$$

As a matter of fact, the monotonicity of the geometric mean implies that

$$\Phi(A) \sharp \Phi(A^{-1}) \le \Phi(A) \sharp \frac{(M+m)^2}{4Mm}\Phi(A)^{-1} = \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}}$$

because $\Phi(A)$ and $\Phi(A)^{-1}$ commute.

As well-known, the geometric mean $\sharp$ is generalized to the $\alpha$-geometric mean $\sharp_\alpha$; for positive invertible operators $A$ and $B$

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\alpha}A^{\frac{1}{2}}.$$

We now point out that our previous result [2;Theorem 4] is a corollary of Theorem 2. As a matter of fact, it can be expressed by the following simpler form, by which it could be understood as a noncommutative version of the Pólya-Szegö inequality, see Greub-Rheinboldt [8, Theorem 2] and also [3, Theorem 3]:

**Theorem 5.** *Let $A$ and $B$ be positive operators on a Hilbert space $H$ with $0 < m_1 \le A \le M_1$ and $0 < m_2 \le B \le M_2$. Then for $\alpha \in [0,1]$ and $x \in H$*

$$((B \natural_\alpha A)x, x) \le (Ax,x)^\alpha (Bx,x)^{1-\alpha} \le K^\alpha ((B \natural_\alpha A)x, x),$$

*where $K = K((\frac{m_1}{M_2})^\alpha, (\frac{M_1}{m_2})^\alpha, \frac{1}{\alpha})$.*

To prove this, we have to modify Theorem 2: If $0 < m \le X \le M$ and $p > 1$, then

$$(Xy,y) \le (X^p y, y)^{\frac{1}{p}} \|y\|^{2(1-\frac{1}{p})} \le K(m,M,p)^{\frac{1}{p}} (Xy,y)$$

for all $y \in H$. We apply it by taking $X = (B^{\frac{-1}{2}} A B^{\frac{-1}{2}})^\alpha$, $y = B^{\frac{1}{2}} x$ and $\alpha = \frac{1}{p}$. Then

$$(X^p y, y) = (Ax, x), \ \ \|y\|^2 = (Bx, x) \text{ and } (Xy, y) = ((B \natural_\alpha A)x, x)$$

Finally the constant $K = K((\frac{m_1}{M_2})^\alpha, (\frac{M_1}{m_2})^\alpha, \frac{1}{\alpha})$ follows from

$$\frac{m_1}{M_2} \le m_1 B^{-1} \le B^{\frac{-1}{2}} A B^{\frac{-1}{2}} \le M_1 B^{-1} \le \frac{M_1}{m_2}.$$

**6.** Related to (5), we recall a conditional expectation introduced by Umegaki [17] and [18], which is an important tool to study von Neumann algebras. One of its simple examples is the diagonalization due to von Neumann. Let $D$ be the diagonalization of the matrix algebra $M_2(\mathbb{C})$ of all $2 \times 2$ matrices onto the diagonal subalgebra. Then $D[A]D[A^{-1}]$ is a scalar multiple of the identity matrix, say a scalar simply. Thus we may consider the extremal case $D[A]D[A^{-1}] = \frac{(M+m)^2}{4Mm}$, where $\{m, \ M\}$ are propervalues of $A$. Namely we have the following.

**Remark 6.** *Let $A \in M_2(\mathbb{C})$ be a positive invertible matrix with the propervalues $\{m, \ M\}$. Then $D[A]$ is a scalar if and only if*

$$D[A]D[A^{-1}] = \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \tag{7}$$

In fact, let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ where $a, \ c > 0$ and $|A| = ac - |b|^2 > 0$. Then

$$D[A]D[A^{-1}] = \frac{ac}{|A|} \quad \text{and} \quad \frac{(M+m)^2}{4Mm} = \frac{(a+c)^2}{4|A|}.$$

Therefore (7) holds if and only if

$$\frac{ac}{|A|} = \frac{(a+c)^2}{4|A|},$$

i.e., $a = c$ by $|A| > 0$, or equivalently, $D[A] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

More precisely, such a matrix $A$ can be expressed as

$$A = \begin{pmatrix} \frac{M+m}{2} & \frac{M-m}{2} e^{i\theta} \\ \frac{M-m}{2} e^{-i\theta} & \frac{M+m}{2} \end{pmatrix}$$

for some $\theta \in \mathbb{R}$. As a matter of fact, since $|A| = Mm$ and $(2a)^2 = (M+m)^2$, we have $a = c = \frac{M+m}{2}$. Moreover $|b| = \frac{M-m}{2}$ follows from $(\frac{M+m}{2})^2 - |b|^2 = a^2 - |b|^2 = |A| = Mm$.

**7.** Finally we pose a proof along with Rennie [15] to the fact: If $0 < m \le A \le M$, then

$$\phi(A^2) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\phi(A)^2$$

for any states $\phi$ of a $C^*$-algebra containing $A$. Actually, since $0 \ge (A-m)(A-M)$, we have $(M+m)A \ge A^2 + Mm$, so that

$$\frac{M+m}{2}\phi(A) \ge \frac{\phi(A^2)+Mm}{2} \ge [\phi(A^2)Mm]^{\frac{1}{2}}.$$

Hence we have the conclusion.

## REFERENCES


[1] J.I.FUJII, M.FUJII, Y.SEO AND M.TOMINAGA, *On generalized Kantorovich inequalities*, Banach and Function Spaces, Edited by M.Kato and L.Maligranda, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, 205-213.

[2] M.FUJII, S.IZUMINO, R.NAKAMOTO AND Y.SEO, *Operator inequalities related to Cauthy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities*, Nihonkai Math. J., 8(1997), 117-122.

[3] M.FUJII, E.KAMEI AND A.MATSUMOTO, *Parameterized Kantorovich inequality for pssitive operators*, Nihonkai Math. J., 6(1995), 129-134.

[4] T.FURUTA *Operator inequalities asociated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities* , J. Inequal. Appl., 2(1998), 137-148.

[5] T.FURUTA *Invitation to Linear Operators*, Taylor and Francis, London and New York, 2001.

[6] T.FURUTA *Specht ratio $S(1)$ can be expressed by Kantorovich constant $K(p)$: $S(1) = \exp[K'(1)]$ and its application*, Math. Inequal. Appl., 6(2003), 521-530.

[7] T.FURUTA *Basic properties of the generalized Kantorovich constant $K(h,p) = \frac{(h^p-h)}{(p-1)(h-1)}(\frac{(p-1)}{p}\frac{(h^p-1)}{(h^p-h)})^p$ and its application*, Acta Sci. Math. Szeged, 70(2004), 319-337.

[8] W.GREUB AND W.RHEINBOLDT, *On a generalization of an inequality of L.V.Kantorovich*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 407-415.

[9] F.KUBO AND T.ANDO, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

[10] J.MICIC, Y.SEO, S.-E. TAKAHASI AND M.TOMINAGA, *Inequalities of Furuta and Mond-Pecaric*, Math. Inequal. Appl., 2(1999), 83-111.

[11] B.MOND AND J.E.PEČARIĆ, *Convex inequalities in Hilbert space*, Houston J. Math., 19(1993), 405-420.

[12] B.MOND AND J.E.PEČARIĆ, *Bounds for Jensen's inequality for several operators*, Houston J. Math., 20(1994), 645-651.

[13] R.NAKAMOTO AND M.NAKAMURA, *Operator mean and Kantorovich inequality*, Math. Japon., 44(1996), 495-498.

[14] M.NAKAMURA, *A remark on a paper of Greub and Reinboldt*, Proc. Japan Acad., 36(1960), 198-199.

[15] B.RENNIE, *An inequality which includes that of Kantorovich*, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 982.

[16] S.-E.TAKAHASI, M.TSUKADA, K.TANAHASHI AND T.OGIWARA, *An inverse type of Jensen's inequality*, Math. Japon., 50(1999), 85-91.

[17] H.UMEGAKI, *Conditional expectation in an operator algebra, II*, Tohoku Math. J., 8(1956), 86-100.

[18] H.UMEGAKI, *Conditional expectation in an operator algebra, III*, Kodai Math. Sem. Rep., 11(1959), 51-64.



DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, ASAHIGAOKA, KASHIWARA, OSAKA 582-8582, JAPAN.

*E-mail address*: mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

# CONVERGENCE THEOREMS FOR PROXIMAL POINT ALGORITHMS IN BANACH SPACES

FUMIAKI KOHSAKA (高阪 史明)

ABSTRACT. In this paper, we deal with the problem of finding solutions of maximal monotone operators in Banach spaces. We state weak and strong convergence theorems for proximal-type algorithms recently obtained by Kamimura-Kohsaka-Takahashi and Kohsaka-Takahashi. Using these results, we study the problem of finding minimizers of convex functions in Banach spaces.

## 1. 序

1975 年に Baillon は次の非線形エルゴード定理を証明した: $C$ を Hilbert 空間 $H$ の空でない有界閉凸集合とし, $T : C \to C$ を非拡大写像とする. このとき, 各 $x \in C$ に対して

$$\frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x) \tag{1}$$

は $T$ の不動点に弱収束する. ここで, $T$ が非拡大であるとは $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ がすべての $x, y \in C$ について成り立つことをいう. $T$ が縮小写像ならば, $\{T^n x\}$ は $T$ の一意の不動点に強収束するが, 非拡大写像の場合は $\{T^n x\}$ は一般には収束しない. 1975 年以後, 非拡大写像やその族に対する非線形エルゴード定理は様々な形で発展している (例えば [2, 4, 9, 17, 23, 29, 30, 31, 33, 34] 等を参照のこと). これらと関連して, 近年, 非拡大写像に対する不動点近似法がさかんに研究されている. その中に Mann 型 [19] 及び Halpern 型 [8] 近似法がある. これらは, 点列 $\{x_n\}$ をそれぞれ初期点 $x_1 = x \in C$ から

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

で定義する点列的不動点近似法である. ただし $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ とする. 一般に, 点列 (2) は $T$ の不動点に弱収束することが知られている. 一方, 点列 (3) は初期点 $x$ から最短距離にある $T$ の不動点に強収束することが知られている (例えば, [31, 33] やその参考文献を参照のこと).

非拡大写像に対する不動点問題は, 極大単調作用素 $T : H \to 2^H$ に対する非線形方程式

$$0 \in Tz \tag{4}$$

の解法と関連する. この問題は最適化理論における多くの問題を含んでいる. 例えば, $f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とするとき, $f$ の劣微分 $\partial f : H \to 2^H$ は極大単調作用素となり [25, 33], 方程式 (4) は $f(z) = \min_{y \in H} f(y)$ と同値である. この問題の解の近似法として広く知られているのが, Martinet [20] によって考案

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47H05, 47J25.
*Key words and phrases*. Convex minimization problem, maximal monotone operator, proximal point algorithm, resolvent, uniformly convex Banach space.

された近接点法 (proximal point algorithm) である．これは，初期点 $x_1 = x \in H$ から点列 $\{x_n\}$ を

(5) $$x_n \in x_{n+1} + r_n T x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する方法である．ここで $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ とする．1976 年，Rockafellar [27] は (4) の解集合 $T^{-1}0$ が空でなく $\underline{\lim}_n r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は (4) の解に弱収束することを証明した．漸化式 (5) は $T$ の resolvent $J_r = (I + rT)^{-1}$ $(r > 0)$ を用いると，

(6) $$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる．$J_r$ は非拡大写像となり，その不動点集合 $F(J_r)$ が $T^{-1}0$ と一致することがよく知られている．Rockafellar による研究以降，近接点法に関する研究がさかんになされてきた (例えば，[3, 7, 11, 12, 13, 14, 18, 21, 22, 24, 28] 等を参照せよ)．特に，上村 - 高橋 [11] は Halpern 型及び Mann 型の近似法に動機づけられて，以下の 2 つの近接点法を導入した:

(7) $$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(8) $$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

彼らは，点列 (7) が $Px$ に強収束することを示した．さらに，点列 (8) が $z = \lim_n Px_n$ に弱収束することを証明した．前者は強収束定理であり，後者は Rockafellar の定理の拡張定理である．ここで，$P$ は $T^{-1}0$ 上への距離射影である．

Banach 空間における有用な集合値写像として，増大作用素 (accretive operator) と単調作用素 (monotone operator) がある．Hilbert 空間では両者は同じ概念であるが，Banach 空間では全く異なる概念となりそれらの応用範囲や研究の手法も異なる．前者は，非線形発展方程式や非拡大写像と関連し，後者は凸最小化問題，変分不等式問題，ミニマックス問題等と関連する．また，増大作用素の resolvent は非拡大写像であるのに対し，単調作用素の resolvent は一般に非拡大ではない，という理論上の相違点がある．上村 - 高橋 [12, 13] は，Hilbert 空間における彼らの定理を Banach 空間上の増大作用素に対して拡張する定理を得た．より最近になり，上村 - 高橋 [14] は Hilbert 空間における Solodov-Svaiter の強収束定理 [28] を Banach 空間上の極大単調作用素に対して拡張するに至った (大沢 - 高橋 [21] によるもう一つの拡張定理も参照せよ)．そこで，高橋 [32] は以下の問題を提起した:

**問題 1.1** ([32])．上村 - 高橋 [11] による強収束定理と弱収束定理が一様に滑らかで一様凸な Banach 空間上の極大単調作用素に対して成り立つか?

本稿では，この問題に関して得られた強収束定理 (高阪 - 高橋 [15]) と弱収束定理 (上村 - 高阪 - 高橋 [10]) 及びそれらの応用について報告する．

## 2. 準備

実数全体の集合と自然数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ で表す．$E$ を (実)Banach 空間とし，$E^*$ をその双対空間とする．$E$ から $E^*$ への双対写像 $J$ は，すべての $x \in E$ に対し

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される集合値写像である．ここで，$\langle x, x^* \rangle$ は $x^*(x)$ を表す．写像 $T : E \to 2^{E^*}$ が単調であるとは，$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ がすべての $(x, x^*), (y, y^*) \in G(T)$ について成り立つことをいう．ここで，$G(T) = \{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in Tx\}$ は $T$ のグラフを表す．このような $T$ が極大単調であるとは，$T$ のグラフを真に含む単調作用素が存在しないことをいう．一方，関数 $f : E \to (-\infty, \infty]$ が proper であるとは，$f(x) \in \mathbb{R}$ となる $x \in E$ が存在することをいう．また，$f$ が下半連続であるとは，任意の $r \in \mathbb{R}$

に対して $\{z \in E : f(z) \leq r\}$ が $E$ の閉集合となることをいい，$f$ が凸であるとは，任意の $x, y \in E$ と $\alpha \in (0,1)$ に対し

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

が成り立つことをいう．Rockafellar の定理 [25] により，$f$ の劣微分 $\partial f : E \to 2^*$ は極大単調作用素となる．ここで，$\partial f$ はすべての $x \in E$ に対し

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) \quad (\forall y \in E)\}$$

で定義される．

$S(E)$ で $E$ の単位球面 $\{z \in E : \|z\| = 1\}$ を表す．Banach 空間 $E$ が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon \in (0,2]$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して $x, y \in S(E)$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つことをいう．また，$E$ が滑らかであるとは，任意の $x, y \in S(E)$ に対し

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{9}$$

が存在することをいう．さらに，$E$ が一様に滑らかであるとは，(9) が $x, y \in S(E)$ について一様収束することをいう．例えば，$\ell^p$ や $L^p$ $(1 < p < \infty)$ は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間である．一様凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている．また，$E$ が滑らかで一様凸ならば，双対写像 $J : E \to E^*$ は一価の全単射写像となる．$E$ が一様に滑らかならば，$J$ は $E$ の任意の有界集合上でノルムの意味で一様連続となる．$E$ を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とするとき，$E$ から $E^*$ への双対写像 $J$ が点列的に弱連続であるとは，任意の $E$ の弱収束点列 $\{z_n\}$ とその弱収束極限 $z$ に対し，$\{Jz_n\}$ が $Jz$ に汎弱収束することをいう．詳しくは，[6, 34] を参照せよ．

滑らかで一様凸な Banach 空間 $E$ の空でない閉凸集合 $C$ に対し，$E$ から $C$ 上への generalized projection [1, 14] とよばれる射影 $P$ が導入されている．これは，各 $x \in E$ に対し $C$ の点

$$P(x) = \arg\min_{y \in C} \phi(y, x) \tag{10}$$

を対応させる射影である．ここで，$\phi(y,x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2$ $(x, y \in E)$ である．もし $E$ が Hilbert 空間ならば，双対写像 $J$ は恒等写像 $I$ となるため $\phi(y,x) = \|y - x\|^2$ $(x, y \in E)$ となる．よって，この場合は $P$ は距離射影と一致する．

$E$ を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とするとき，各 $r > 0$ と $x \in E$ に対して方程式

$$Jx \in Jz + rTz$$

は一意解 $z$ をもつ ([26, 33])．$T$ の resolvent は $J_r x = z$ で定義される $E$ から $E$ の定義域 $D(T)$ 上への一価写像である．言い換えれば，$J_r = (J + rT)^{-1} J$ である．Hilbert 空間では $J_r = (I + rT)^{-1}$ となり，$J_r$ は非拡大性をもつが，Banach 空間では

$$\phi(u, J_r x) + \phi(J_r x, x) \leq \phi(u, x) \tag{11}$$

がすべての $u \in T^{-1}0$ と $x \in E$ について成り立つ (例えば [15] を参照せよ)．

## 3. Banach 空間における近接点法とその応用

2004 年，Censor-Reich [5] に動機づけられて，高阪 - 高橋 [15] と上村 - 高阪 - 高橋 [10] はそれぞれ以下の近接点法を導入した: $x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n) J(J_{r_n} x_n)) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n) J(J_{r_n} x_n)) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

とする．ここで，$J: E \to E^*$ は双対写像とする．$E$ が Hilbert 空間ならば，$J = I$ となるので (12) と (13) はそれぞれ点列 (7) と (8) に一致する．

2004 年に得られた次の強収束定理により，上村 - 高橋の強収束定理 [11] がより一般の Banach 空間上の極大単調作用素に対しても成立することが分かった:

**定理 3.1** ([15]). $E$ を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T: E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素で $T^{-1}0$ が空でないものとする．$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とし，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n)J(J_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_n \alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\lim_n r_n = \infty$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P(x)$ に強収束する．ここで，$P$ は $E$ から $T^{-1}0$ 上への generalized projection である．

点列 (13) に関しては，上村 - 高阪 - 高橋 [10] により，次の弱収束定理が得られた．この定理により，Rockafellar の弱収束定理 [27] や上村 - 高橋の弱収束定理 [11] がより一般の Banach 空間上の極大単調作用素に対しても成立することが分かった:

**定理 3.2** ([10]). $E$ を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$E$ から $E^*$ への双対写像 $J$ が点列的に弱連続であるとする．$T: E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素で $T^{-1}0$ が空でないものとする．$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とし，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(J_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\overline{\lim}_n \alpha_n < 1$ と $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $z = \lim_n P(x_n)$ に弱収束する．ここで，$P$ は $E$ から $T^{-1}0$ 上への generalized projection である．

定理 3.2 の直接的な結果として以下の Rockafellar 型の近接点法に対する収束定理を得る:

**定理 3.3** ([10]). $E$ を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$E$ から $E^*$ への双対写像 $J$ が点列的に弱連続であるとする．$T: E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素で $T^{-1}0$ が空でないものとする．$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とし，$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = J_{r_n}x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ここで $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $z = \lim_n P(x_n)$ に弱収束する．ここで，$P$ は $E$ から $T^{-1}0$ 上への generalized projection である．

定理 3.2 の証明には，以下の強収束定理が用いられた:

**定理 3.4** ([10]). $E$ を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$T: E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素で $T^{-1}0$ が空でないものとする．$P$ を $E$ から $T^{-1}0$ 上への generalized projection とし，$J_r = (J + rT)^{-1}J$ $(r > 0)$ とする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(J_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ とする．このとき，$\{Px_n\}$ は $T^{-1}0$ の点 $z$ に強収束する．さらに，$z$ は

$$\lim_{n\to\infty} \phi(z, x_n) \min_{y \in T^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \phi(y, x_n)$$

を満たす $T^{-1}0$ の点である．

定理 3.1 と定理 3.2 を用いると，Banach 空間上の凸関数の最小点を求める近似法を得ることができる:

**定理 3.5** ([15]). $E$ を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数で $(\partial f)^{-1}(0)$ が空でないものとする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$\begin{cases} y_n = \arg\min_{y \in E}\{f(y) + (2r_n)^{-1}\|y\|^2 - (r_n)^{-1}\langle y, Jx_n\rangle\} \\ x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n)Jy_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_n \alpha_n = 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\lim_n r_n = \infty$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P(x)$ に強収束する．ここで，$P$ は $E$ から $(\partial f)^{-1}(0)$ 上への generalized projection である．

**定理 3.6** ([10]). $E$ を一様に滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$E$ から $E^*$ への双対写像 $J$ が点列的に弱連続であるとする．$f : E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数で $(\partial f)^{-1}(0)$ が空でないものとする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$\begin{cases} y_n = \arg\min_{y \in E}\{f(y) + (2r_n)^{-1}\|y\|^2 - (r_n)^{-1}\langle y, Jx_n\rangle\} \\ x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)Jy_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\overline{\lim}_n \alpha_n < 1$ と $\underline{\lim}_n r_n > 0$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $z = \lim_n P(x_n)$ に弱収束する．ここで，$P$ は $E$ から $(\partial f)^{-1}(0)$ 上への generalized projection である．

定理3.1 と定理3.2 を用いると，変分不等式やミニマックスの問題の解への収束定理も得ることができる (詳しくは，[10, 15, 16] を参照のこと)．

## 4. 今後の課題

今回用いた方法は，Mann 型近似法 (2) や Halpern 型近似法 (3) の様に凸結合を用いるのではなく，双対写像 $J$ を用いて点列を構成する方法であった．こうすることで，これまで得られていた定理が Banach 空間でも成立することが分かった．しかし，$J$ を用いず通常の凸結合を用いて定義した場合にも $\{x_n\}$ が収束するかどうかは分かっていない．また，定理3.2 が $J$ の点列的弱連続性がなくても成り立つか，という問題も未解決である．

## References

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: Properties and Applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York 1996, pp. 15–50.

[2] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[3] H. Brézis and P. L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[4] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107–116.

[5] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[6] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces -selected topics*, Lecture Notes in Mathematics, 485. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).

[7] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[8] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[9] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.

[10] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107–115.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds., Tokyo, 2003), 203–216, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.

[17] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 62–75.

[18] P. L. Lions, *Une méthode itérative de résolution d'une inéquation variationnelle*, Israel J. Math. **31** (1978), 204–208.

[19] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[20] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.

[21] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[22] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

[23] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[24] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York 1996, pp. 313–318.

[25] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.

[26] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[27] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[28] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[29] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[30] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283–1293.

[31] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[32] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, Proceedings of the Second International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds., Hirosaki, 2001), Yokohama Publishers, Yokohama, 2003, pp. 471–481,

[33] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000) (Japanese).

[34] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

(Fumiaki Kohsaka) DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, OH-OKAYAMA, MEGURO-KU, TOKYO, 152-8552, JAPAN

*E-mail address*: kohsaka9@is.titech.ac.jp

# Mixed Arithmetic and Geometric Means, and Related Inequalities

TAKASHI ITO

<u>**Summary of results**</u> Let $x_1, \cdots, x_n \geqq 0$ be any $n$ many non-negative numbers with $n \geqq 3$. For any subset $Y$ of $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, we denote the arithmetic mean and the geometric mean of $Y$ by $A(Y)$ and $G(Y)$. According to Carlson, Meany and Nelson [3], we define <u>mixed arithmetic and geometric means</u> of $x_1, \cdots, x_n$, of order $k$ with $1 \leqq k \leqq n$ as follows, denoted by $(G \circ A)_k(x_1, \cdots, x_n)$ and $(A \circ G)_k(x_1, \cdots, x_n)$.

$$\prod_{Y \subset X,\, \overline{\overline{Y}}=k} A(Y)^{\frac{1}{\binom{n}{k}}} = (G \circ A)_k(x_1, \cdots, x_n)$$

and

$$\sum_{Y \subset X,\, \overline{\overline{Y}}=k} \frac{1}{\binom{n}{k}} G(Y) = (A \circ G)_k(x_1, \cdots, x_n)$$

where $\overline{\overline{Y}}$ denotes the number of elements of $Y$.

Next, <u>elementary symmetric means</u> of $x_1, \cdots, x_n$, of order $k$ with $1 \leqq k \leqq n$, is defined as follows, denoted by $p_k(x_1, \cdots, x_n)$ (for instance, see [4], Chapter 2)

$$\sum_{Y \subset X,\, \overline{\overline{Y}}=k} \frac{1}{\binom{n}{k}} P(Y) = p_k(x_1, \cdots, x_n)$$

where $P(Y)$ is the product of all elements of $Y$.

We prove the following inequality (D).

<u>Theorem 1</u> For any $x_1, \cdots, x_n \geqq 0$ and for any $k, l$ of $1 \leqq k, l \leqq n$ and $n+1 \leqq k+l$, we have

$$\text{(D)} \qquad p_l(x_1, \cdots, x_n)^{\frac{1}{l}} \leqq (G \circ A)_k(x_1, \cdots, x_n).$$

If $(k, l) = (1, n)$ or $(n, 1)$, our (D) is an identity as $G(X) = G(X)$ or $A(X) = A(X)$. Otherwise, the equality of (D) holds if and only if $x_1 = \cdots = x_n$ or $k$ many elements at least of $x_1, \cdots, x_n$ are zero.

As a corollary of this theorem we have the following inequality (C) due to Carlson, Meany and Nelson [3].

<u>Corollary</u> Under the same assumption of $k$ and $l$ as in Theorem 1, we have

$$\text{(C)} \qquad (A \circ G)_l(x_1, \cdots, x_n) \leqq (G \circ A)_k(x_1, \cdots, x_n).$$

Our next concern is the following types of inequalities.

(A) $\quad A(x_1\cdots x_n)^{\frac{k-1}{n-1}}\cdot G(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{n-k}{n-1}} \leqq (G\circ A)_k(x_1,\cdots,x_n)$, and

(B) $\quad (A\circ G)_k(x_1,\cdots,x_n) \leqq \frac{n-k}{n-1}A(x_1,\cdots,x_n)+\frac{k-1}{n-1}G(x_1,\cdots,x_n)$.

We generalize these to inequalities having general weights. First, the notion of mixed arithmetic and geometric means can be extended to means having weights. Namely, for any given weights ; $t_1,\cdots,t_n>0$ with $t_1+\cdots+t_n=1$, let denote the arithmetic mean and the geometric mean of $Y$ with respect weights $t_i$ $(1\le i\le n)$ by $A_t(Y)$ and $G_t(Y)$. For example, $A_t(Y)=\sum_{j=1}^{k} t_{i_j}x_{i_j}\Big/\sum_{j=1}^{k}t_{i_j}$ and $G_t(Y)=\left(\prod_{j=1}^{k} x_{i_j}^{\,t_{i_j}}\right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}t_{i_j}}}$ for $Y=\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}\subset X=\{x_1,\cdots,x_n\}$.

We define mixed arithmetic and geometric means of $x_1,\cdots,x_n$, of order $k$ with $1\le k\le n$ and with weights $t_1,\cdots,t_n>0$, denoted by $(G\circ A)_{k,t}(x_1,\cdots x_n)$ and $(A\circ G)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)$, as follows

$$\prod_{Y\subset X,\ \bar{\bar{Y}}=k} A_t(Y)^{\alpha_Y} = (G\circ A)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\sum_{Y\subset X,\ \bar{\bar{Y}}=k} \alpha_Y\, G_t(Y) = (A\circ G)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)$$

where $\alpha_Y = \sum_{j=1}^{k} t_{i_j}\Big/\binom{n-1}{k-1}$ for $Y=\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}\subset X=\{x_1,\cdots,x_n\}$. It is noticed that $\sum_{Y\subset X,\ \bar{\bar{Y}}=k}\alpha_Y=1$, and $\alpha_Y=1\Big/\binom{n}{k}$ for equal weights ; $t_1=\cdots=t_n=\frac{1}{n}$.

<u>Theorem</u> 2 For any $x_1,\cdots,x_n\ge 0$ and $1\leqq k\leqq n$, we have

(A) $\quad A_t(x_1\cdots x_n)^{\frac{k-1}{n-1}}\cdot G_t(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{n-k}{n-1}} \leqq (G\circ A)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)$, and

(B) $\quad (A\circ G)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n) \leqq \frac{n-k}{n-1}A_t(x_1,\cdots x_n)+\frac{k-1}{n-1}G_t(x_1,\cdots,x_n)$

If $k=1$ or $n$, our (A) and (B) are identities as $G_t(X)=G_t(X)$ or $A_t(X)=A_t(X)$. Otherwise, the equality of (A) and (B) holds if and only if $x_1=\cdots=x_n$ or at least $k$ many elements of $x_1,\cdots,x_n$ are zero in case of (A), and one element of $x_1,\cdots,x_n$ is zero and the others are identical in case of (B).

<u>Corollary</u> Our (A) and (B) are generalizations of Burkill's inequalities in [1] where some equivalent forms of (A) and (B) are proved for the case of $n=3$ and $k=2$.

**1. 3変数の場合**　Summaryで述べた4つの不等式(A)〜(D)について，3変数の場合を少し詳しく説明する．任意の3数 $x, y, z \geqq 0$ に対して，二つづつの相加平均として，$\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}$ の3数が得られ，この3数の相乗平均を取ると $\left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{1/3}$ となる．次に，この相加平均と相乗平均を取る processを逆にする．まず二つづつの相乗平均として，$\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx}$ が得られ，この3数の相加平均は $\frac{1}{3}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$ となる．$\left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ と $\frac{1}{3}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$ とが3数 $x, y, z$ の mixed arithmetic and geometric mean（単に，混合平均）と呼ばれるものである．

Carlson, Meany and Nelson [2]は次の意外(?)な不等式の成立を示した

(C)　$\frac{1}{3}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}) \leqq \left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{1/3}$

彼等がこの不等式の成立を問題とした動機についても[2]で簡単にふれている．

これら二つの混合平均は，それぞれ別々に，文献上でもいろいろの所に出ているものと思われる．ここでは，特に，この混合平均に関連した次のtypeの不等式の成立を問題とする．

(A)　$\sqrt{\frac{x+y+z}{3}(xyz)^{1/3}} \leqq \left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(B)　$\frac{1}{3}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}) \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{x+y+z}{3}+(xyz)^{\frac{1}{3}}\right]$

(D)　$\sqrt{\frac{1}{3}(xy+yz+zx)} \leqq \left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

これらの不等式について，次のことを注意する．

(1)　(D)は(C)より強い不等式である．しかし

(2)　(A), (B), (D)は互に独立な不等式である．すなわち一方が他方より強いと云うことはない．

(3)　(A)と(B)とは既知で，Burkillの不等式(1974)の特別な場合である（Summaryの最後のcorollaryを参照）

(4)　(A)と(D)とは変換；$(x, y, z) \longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ で互に入れかわる．（勿論 $x, y, z$ を正の範囲に限った場合である）

(5)　(A)と(D)とは三角形にかんする既知の不等式と関連がある．このことについては次の節で改めて説明する．

**2. (A), (D) と geometric inequalities との関連**　この節で，(A), (D)は前節で述べた3変数の不等式を意味し，かつ3変数 $x, y, z$ は常に正とする

以下で三角形にかんする通常の記号を用いる. 任意の$\triangle ABC$について, 三辺の長さを$a, b, c$, semiperimeter (半周) を$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $s_a=s-a$, $s_b=s-b$, $s_c=s-c$とし, 三角形の面積を$S$, 傍接円の半径を$r_a, r_b, r_c$とする. $r_a$は角$A$内の傍接円の半径である.
三角形を表示するparameterの代表的なものは勿論三辺の長さ$(a, b, c)$であるが, それ以外にも色々なものが考えられる. 例えば, 三頂点からの高さ$(h_a, h_b, h_c)$とか三中線の長さ$(m_a, m_b, m_c)$等々. これら多くのparameterの中で$(s_a, s_b, s_c)$と$(r_a, r_b, r_c)$は次に述べるやや特別な性質を持っている.

1) 任意の3正数$x, y, z$に対して, $\triangle ABC$が一意的に決まって$x=s_a$, $y=s_b$, $z=s_c$となる. $r_a, r_b, r_c$についても同様なことが成立する.

∵) 前者はよく知られたことであり, 殆んど自明である. すなわち, 与えられた$x, y, z>0$に対して, $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$とおけば, この$a, b, c$は三角形の三辺を形成し, この三角形に対して$s_a=x$, $s_b=y$, $s_c=z$となる. 後者については, $x, y, z>0$に対して

$$a=x(y+z)/\Delta, \quad b=y(z+x)/\Delta, \quad c=z(x+y)/\Delta, \quad \Delta=(xy+yz+zx)^{1/2}$$

とおくと, $a, b, c$は三角形の三辺を形成し, この三角形に対して$r_a=x$, $r_b=y$, $r_c=z$となる.

三角形を表示するparameterで, 上の1)の性質を持つものを仮りにfree parameterと呼ぶことにする. free parameterを一つ固定したとき, 次のような「原則」を一応考えることが出来る. 「このfree parameterを媒介として, 3正数$x, y, z$にかんする不等式は三角形にかんする不等式に変換され, 逆もまた可能である」(変換されたものが幾何的に意味があるかどうかは別の問題となる). これを次のように図示することにする.

$$x, y, z>0 \text{にかんする不等式} \overset{\text{free parameter}}{\rightleftarrows} \text{三角形にかんする不等式}$$

我々の不等式(A)をfree parameter $(s_a, s_b, s_c)$で変換すると, 次のようになる

2) $$\text{不等式 (A)} \overset{(s_a, s_b, s_c)}{\rightleftarrows} S \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{abc}{a+b+c}$$

$S=r_ar_br_c$に注意すれば $S\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{abc}{a+b+c}$ は $r_ar_br_c\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3abc$と同値な不等式であることは直ちにわかる. $r_ar_br_c\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)abc$をfree parameter $(r_a, r_b, r_c)$で変換すると, 我々の不等式(D)が得られる.

3) $$r_ar_br_c\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3abc \overset{(r_a\, r_b\, r_c)}{\rightleftarrows} \text{不等式 (D)}$$

2)と3)を同時に図示すると

(*) $$\text{不等式(A)} \overset{(s_a, s_b, s_c)}{\rightleftarrows} S\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{abc}{a+b+c} \Leftrightarrow r_ar_br_c\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3abc \overset{(r_a\, r_b\, r_c)}{\rightleftarrows} \text{不等式(D)}$$

$S\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{abc}{a+b+c}$と$r_ar_br_c\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3abc$は既知の不等式である. 前者はCurry (1966), 後者はLeuenberger (1961)による. 上の(*)の両端の同値関係が(A)と(D)との間の$(x, y, z)\to\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$による変換である.

## 3. Theorems 1と2との証明方法

$k$次混合平均 $(G\circ A)_k(x_1,\cdots,x_n)$, $(A\circ G)_k(x_1,\cdots,x_n)$ 及び $k$次 elementary symmetric mean $p_k(x_1,\cdots,x_n)$ の定義については Summary を参照してほしい。$k$次混合平均と $l$次 elementary symmetric mean の間に次の関係がある。

**Theorem 1** $1\leqq k, l\leqq n$ かつ $n+1\leqq k+l$ のとき，任意の $x_1,\cdots,x_n\geqq 0$ に対して，

$$(D)\qquad p_l(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{1}{l}}\leqq (G\circ A)_k(x_1,\cdots,x_n)$$

が成立する。

等号条件は省略する（Summary 参照）

$k$次混合平均は重みの付いた $k$次混合平均 $(G\circ A)_{k,t}(x_1\cdots x_n)$ 及び $(A\circ G)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)$ に拡張される（Summary 参照）。それについて，

**Theorem 2** 任意の $x_1,\cdots,x_n\geqq 0$ と重み；$t_1,\cdots,t_n>0$, $t_1+\cdots+t_n=1$ と $1\leqq k\leqq n$ に対して，

$$(A)\qquad A_t(x_1,\cdots x_n)^{\frac{k-1}{n-1}}\cdot G_t(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{n-k}{n-1}}\leqq (G\circ A)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)\ \text{と}$$

$$(B)\qquad (A\circ G)_{k,t}(x_1,\cdots,x_n)\leqq \frac{n-k}{n-1}A_t(x_1,\cdots,x_n)+\frac{k-1}{n-1}G_t(x_1,\cdots,x_n)$$

が成立する。等号条件は省略する（Summary 参照）

両定理とも，変数の範囲を正；$x_1,\cdots,x_n>0$ にしたときの不等式の成立とその等号条件（等号条件は $x_1=\cdots=x_n$ となる）を証明することが証明の主要部分となる。その後，不等式の成立範囲を non-negative；$x_1,\cdots,x_n\geqq 0$ まで拡張出来ることは自明である。ただその時，等号条件については改めて調べる必要がある。とくに（D）の場合，等号条件を示すのはそれほど自明なことではないように思う。しかし，以下の説明では，変数の範囲を正；$x_1,\cdots,x_n>0$ の場合だけに限ることにする。

（D）の証明方法　$p_l(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{1}{l}}$ $(1\leqq l\leqq n)$ が $l$ について減少列であることが Maclaurin (1729) によって証明されている。この事の証明を Hardy, Littlewood and Pólya [4] は二通りの方法で与えている。その一つが我々の証明方法に関連がある。[4] における方法の概略は次のようになる。任意の $a_1,\cdots,a_n>0$ に対して，$p_l(a_1,\cdots,a_n)^{\frac{1}{l}}=\alpha$ とおく。このとき，点 $(a_1,\cdots,a_n)$ を含む有界閉集合 $D_a\subset R^n$ を適当に取るとき，$D_a$ 上で $p_l(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{1}{l}}$ の値は一定値 $\alpha$ に保たれが，$D_a$ 上の $p_{l-1}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{1}{l-1}}$ の最小値が $\alpha$ であることを示すことによって，$p_{l-1}(a_1,\cdots,a_n)^{\frac{1}{l-1}}\geqq p_l(a_1,\cdots,a_n)^{\frac{1}{l}}$ の成立を示している。我々の場合，$p_{l-1}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{1}{l-1}}$ を全く異なる $(G\circ A)_k(x_1,\cdots,x_n)$ にかえても，この考え方が有効であることも示すことが出来る。この際，定理1における仮定 $n+1\leqq k+l$ は $n$ 個のものの中から任意の $k$ 個，任意の $l$ 個を取り出したとき，必ず重なりがあること（そのことだけ）に利用される。

(A)の証明方法　両辺の比を考える；$\mathcal{L}(x_1,\cdots,x_n)=$(A)の右辺/(A)の左辺 とする. 任意の $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ に対して, 有界閉集合 $D_\varepsilon=[\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}]^n\subset R^n$ 上での $\mathcal{L}(x_1,\cdots x_n)$ の最小値が 1 であることを示せばよい. 最小値を与える点を $(a_1,\cdots,a_n)$とする. このとき, $(a_1,\cdots,a_n)$が identical point; $a_1=a_2=\cdots=a_n$ であることを示せば最小値は 1 となる. 何故なら identical point に対する $\mathcal{L}$ の値は 1 であるからである. もし $(a_1,\cdots,a_n)$ が identical point でないとすると, 例えば, $a_1=\mathrm{Min}\,a_i<a_2=\mathrm{Max}\,a_i$ とし, $\bar{a}=t_1a_1+t_2a_2/t_1+t_2$ に対して, 点 $(a_1,\cdots,a_n)$ と点 $(\bar{a},\bar{a},a_3\cdots a_n)$ とを結ぶ $D_\varepsilon$ 内の線分; $\varphi(\lambda)=(a_1(\lambda),a_2(\lambda),a_3\cdots a_n)$ (ここに $a_1(\lambda)=(1-\lambda)a_1+\lambda\bar{a}$, $a_2(\lambda)=(1-\lambda)a_2+\lambda\bar{a}$, $0\leqq\lambda\leqq 1$) を考える. このとき, この線分に沿って $\mathcal{L}$ の値は $\lambda=0$ の近傍で狭義減少であることが証明出来る. このことは $(a_1,\cdots,a_n)$ が $D_\varepsilon$ 上での $\mathcal{L}$ の最小値を与える点であることに矛盾する.

(B)の証明方法　両辺の差を考える；$\mathcal{L}(x_1\cdots,x_n)=$(B)の右辺−(B)の左辺とする. このとき, $\mathcal{L}(x_1,\cdots,x_n)$について, 上の(A)と類似な議論が可能である. すなわち, $\mathcal{L}(x_1,\cdots,x_n)$ の $D_\varepsilon$ 上での最小値を与える点は identical point に限ること, したがって最小値は 0 であることが示される. 概略は次のようになる. $D_\varepsilon$ 内の任意の点 $(a_1,\cdots,a_n)$ に対して, もし $(a_1,\cdots,a_n)$ が identical point でないならば, 例えば, $a_1=\mathrm{Min}\,a_i<a_2=\mathrm{Max}\,a_i$ とする. このとき, $\hat{a}=(a_1^{t_1}a_2^{t_2})^{\frac{1}{t_1+t_2}}$ に対して, 点 $(a_1,\cdots,a_n)$ と点 $(\hat{a},\hat{a},a_3\cdots a_n)$ を結ぶ $D_\varepsilon$ 内の曲線; $\varphi(\lambda)=(a_1(\lambda),a_2(\lambda),a_3\cdots a_n)$, $0\leqq\lambda\leqq 1$ (ここに $a_1(\lambda)=a_1^{1-\lambda}\hat{a}^{\lambda}$, $a_2(\lambda)=a_2^{1-\lambda}\hat{a}^{\lambda}$, $0\leqq\lambda\leqq 1$) に沿って $\mathcal{L}$ の値は $\lambda=0$ の近傍で狭義減少であることが証明出来る. したがって, $D_\varepsilon$ 上で $\mathcal{L}$ の最小値を与える点は identical point に限ることがわかる.

以上

## References


[1] J. C. Burkill ; The concavity of discrepancies in inequalities of the means and of Hölder, J. London Math. Soc. (2), 7 (1974).

[2] B. C. Carlson ; An inequality of mixed arithmetic and geometric means, (Problem 70-10), SIAM Rev. 13 (1971), 253-255.

[3] B. C. Carlson, R. K. Meany, S. A. Nelson ; Mixed arithmetic and geometric means, Pacific J. of Math., 38 (1971), 343-347.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya ; Inequalities, 2nd ed. Cambridge (1952)

# Integration Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces

Rikio Yoneda (Aichi University of Education)

## §1. Introduction

Let $D$ denote the open unit disk in complex plane $C$. For $z, w \in D$, $\varphi_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}$ and let $\rho(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$. The Bloch space $\mathcal{B}$ of $D$ is defined to be the space of analytic functions $f$ on $D$ such that

$$\| f \|_{\mathcal{B}} := |f(0)| + \| f \|_{B} < +\infty ,$$

where $\| f \|_{B} := \sup_{z \in D} (1-|z|^2)\,|f'(z)|$. The space $\mathcal{B}_\alpha$ of $D$ is defined to be the space of analytic functions $f$ on $D$ such that

$$\| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} := |f(0)| + \| f \|_{B_\alpha} < +\infty ,$$

where $\| f \|_{B_\alpha} := \sup_{z \in D} (1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)|$. Note that $\mathcal{B}_1$ is the Bloch space .
The little Bloch space $\mathcal{B}_0$ of $D$ is defined to be the space of analytic functions $f$ on $D$ such that

$$(1-|z|^2)\,|f'(z)| \to 0 \qquad (|z| \to 1^-).$$

The space $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ of $D$ is defined to be the space of analytic functions $f$ on $D$ such that

$$(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)| \to 0 \qquad (|z| \to 1^-).$$

Note that $\mathcal{B}_{1,0}$ is the little Bloch space .

Let $X$ be Banach spaces and let $T$ be a linear operator from $X$ into $X$. Then $T$ is called to be bounded below on $X$ if $\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

For $g$ analytic on $D$, the operators $I_g$ , $J_g$ are defined on the weighted Bloch space by the following:

$$I_g(f)(z) := \int_0^z g(\zeta) f'(\zeta) d\zeta + f(0) \ , \ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta + f(0) \ , \ M_g(f)(z) := g(z) f(z) \ .$$

If $g(z) = z$, then $J_g$ is the integration operator. If $g(z) = \log \frac{1}{1-z}$, then $J_g$ is the Cesáro operator.

In [6], we also proved the following results :

**Theorem 1.1.** The operator $J_g$ is bounded on $\mathcal{B}$ if and only if

$$\sup_{z \in D} (1-|z|^2) \left( \log \frac{1}{1-|z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty,$$

and the operator $J_g$ is compact on $\mathcal{B}$ if and only if

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)\left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)|=0.$$

And let $\alpha > 1$. Then the operator $J_g$ is bounded on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if $g \in \mathcal{B}$ . And the operator $J_g$ is compact on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|g'(z)|=0, \qquad i.e. \quad g\in\mathcal{B}_0.$$

And let $0 < \alpha < 1$. Then the operator $J_g$ is bounded on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if $g \in \mathcal{B}_\alpha$ . And the operator $J_g$ is compact on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|g'(z)|=0, \qquad i.e. \quad g\in\mathcal{B}_{\alpha,0}.$$

In [7], we also proved the following results :

Theorem 1.2. *Let $\alpha > 0$. Then the operator $I_g$ is bounded on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if*

$$g \in H^\infty.$$

*And the operator $I_g$ is compact on $\mathcal{B}_\alpha$ if and only if*

$$g \equiv 0 .$$

## §2. Integration operators $I_g$, $J_g$ on the space $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}_\alpha$

In this section, we study the integration operators on the space $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}_\alpha$. We show the following results :

Lemma 2.1. *Let $\alpha > 0$. Let $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Then there exist constants $\gamma_1 > 0$ ( independent of $f$) such that*

$$\left|(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)|-(1-|w|^2)^\alpha\,|f'(w)|\right| \le \left|(1-|z|^2)^\alpha f'(z)-(1-|w|^2)^\alpha f'(w)\right| \le \gamma_1\rho(z,w)\parallel f\parallel_{\mathcal{B}_\alpha}$$

*for all $z, w \in D$ with $\rho(z,w) \le \frac{1}{2}$*

Theorem 2.2. *Let $\alpha > 0$. Let $g$ be an analytic function on $D$. If for some positive constants $r$ with $r(\le \frac{1}{2})$ and some constants $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there exists a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|g(z_w)| > \epsilon$,* then *$I_g$ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$.*

Theorem 2.3. *Let $\alpha > 0$. Let $g$ be an analytic function on $D$. Suppose that $I_g$ is bounded on $\mathcal{B}_\alpha$. If $I_g$ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$, then for some positive constants $r$ with $r(< 1)$*

*and some constants $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there exists a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|g(z_w)| > \epsilon$.*

Lemma 2.4. *Let $\alpha > 1$. Let $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Then there exist constants $\gamma_3 > 0$ ( independent of $f$) such that*

$$\left|\frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)^{1-\alpha}} - \frac{|f(w)|}{(1-|w|^2)^{1-\alpha}}\right| \leq \left|\frac{f(z)}{(1-|z|^2)^{1-\alpha}} - \frac{f(w)}{(1-|w|^2)^{1-\alpha}}\right| \leq \gamma_3 \rho(z,w) \parallel f \parallel_{\mathcal{B}_\alpha}$$

*for all $z, w \in D$ with $\rho(z,w) \leq \frac{1}{2}$*

In [9], K.Zhu proved the following results :

Lemma 2.5.([9, Proposition 7]) *Let $\alpha > 1$. For $f \in \mathcal{B}_\alpha$, the norm*

$$\parallel f \parallel_{\mathcal{B}_\alpha} := |f(0)| + \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|$$

*is equivalent to the norm*

$$\parallel f \parallel := \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1} |f(z)| .$$

*i.e. for some constant $C_1 > 0$ ( independent of $f \in \mathcal{B}_\alpha$ ),*

$$\frac{1}{C_1} \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1} |f(z)| \leq |f(0)| + \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \leq C_1 \sup_{z \in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1} |f(z)| .$$

Theorem 2.6. *Let $\alpha > 1$. Let $g$ be an analytic function on $D$. If for some positive constants $r$ with $r(\leq \frac{1}{2})$ and some constants $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there exists a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|1 - \overline{w} z_w||g'(z_w)| > \epsilon$,* then *$J_g$ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$.*

Theorem 2.7. *Let $\alpha > 1$. Let $g$ be an analytic function on $D$. Suppose that $\sup_{z \in D} |1 - \overline{w} z||g'(z)| < \infty$ for any $w \in D$. If $J_g$ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$, then for some positive constants $r$ with $r(< 1)$ and some constants $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there exists a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|1 - \overline{w} z_w||g'(z_w)| > \epsilon$.*

Lemma 2.8. *Let $0 < \alpha < 1$. Let $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Then there exist constants $\gamma_5 > 0$ ( independent of $f$) such that*

$$||f(z)| - |f(w)|| \leq |f(z) - f(w)| \leq \gamma_5 (1-|z|^2)^{1-\alpha} \rho(z,w) \parallel f \parallel_{\mathcal{B}_\alpha}$$

*for all $z, w \in D$ with $\rho(z,w) \leq \frac{1}{2}$*

Theorem 2.9. *Let* $0 < \alpha < 1$. *Let* $g$ *be an analytic function on* $D$. *If for some positive constants* $r$ *with* $r(\leq \frac{1}{2})$ *and some constants* $\epsilon > 0$, *for each* $w \in D$, *there exists a point* $z_w \in D$ *such that* $\rho(z_w, w) < r$ *and* $|1 - \overline{w}z_w||g'(z_w)| > \epsilon$, then $J_g$ *is bounded below on* $\mathcal{B}_\alpha$.

Theorem 2.10. *Let* $0 < \alpha < 1$. *Let* $g$ *be an analytic function on* $D$. *Suppose that* $\sup_{z\in D} |1 - \overline{w}z||g'(z)| < \infty$ *for any* $w \in D$. *If* $J_g$ *is bounded below on* $\mathcal{B}_\alpha$, *then for some positive constants* $r$ *with* $r(< 1)$ *and some constants* $\epsilon > 0$, *for each* $w \in D$, *there exists a point* $z_w \in D$ *such that* $\rho(z_w, w) < r$ *and* $|1 - \overline{w}z_w||g'(z_w)| > \epsilon$.

Lemma 2.11. *Let* $f \in \mathcal{B}$. *Then there exist constants* $\gamma_4 > 0$ *( independent of* $f$*) such that*

$$\left| \frac{|f(z)|}{\log \frac{2}{1-|z|^2}} - \frac{|f(w)|}{\log \frac{2}{1-|w|^2}} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{\log \frac{2}{1-|z|^2}} - \frac{f(w)}{\log \frac{2}{1-|w|^2}} \right| \leq \gamma_4 \rho(z, w) \frac{\| f \|_{\mathcal{B}}}{\log \frac{2}{1-|z|^2}}$$

*for all* $z, w \in D$ *with* $\rho(z, w) \leq \frac{1}{2}$.

Theorem 2.12. *Let* $g$ *be an analytic function on* $D$. *If for some positive constants* $r$ *with* $r(\leq \frac{1}{2})$ *and some constants* $\epsilon > 0$, *for each* $w \in D$, *there exists a point* $z_w \in D$ *such that* $\rho(z_w, w) < r$ *and* $|1 - \overline{w}z_w||g'(z_w)| > \epsilon$, then $J_g$ *is bounded below on* $\mathcal{B}$.

Theorem 2.13. *Let* $g$ *be an analytic function on* $D$. *Suppose that* $\sup_{z\in D} |1 - \overline{w}z|^\alpha |g'(z)| < \infty$ *for any* $w \in D$. *If* $J_g$ *is bounded below on* $\mathcal{B}_\alpha$, *then for some positive constants* $r$ *with* $r(< 1)$ *and some constants* $\epsilon > 0$, *for each* $w \in D$, *there exists a point* $z_w \in D$ *such that* $\rho(z_w, w) < r$ *and* $|1 - \overline{w}z_w||g'(z_w)| > \epsilon$.

## References


[1] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] J.Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Ghatage and J.Yan and D.Zheng, Composition operators with closed range on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.129,7(2000), 2039-2044.

[4] K.Madigan and A.Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans.Amer. Math.Soc. 347 (1995), 2679-2687.

[5] J.H.Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] R.Yoneda, Integration Operators On Weighted Bloch Spaces, Nipponkai Math.Journal (2001)Vol.12,No.2, 1-11.
[7] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.
[8] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.
[9] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.

Department of Mathematics
Aichi University of Education
Igaya-cho,Kariya-shi, 448-8542 ,Japan

ryoneda@auecc.aichi-edu.ac.jp

# Invariant Subspaces And Hankel Type Operators On A Bergman Space

Takahiko Nakazi

(Hokkaido University)

Tomoko Osawa

(Asahikawa National College of Technology)

**Abstract**

Let $L^2 = L^2(D, rdrd\theta/\pi)$ be the Lebesgue space on the open unit disc $D$ and let $L_a^2 = L^2 \cap Hol(D)$ be a Bergman space on $D$. In this paper, we are interested in a closed subspace $\mathcal{M}$ of $L^2$ which is invariant under the multiplication by the coordinate function $z$, and a Hankel type operator from $L_a^2$ to $\mathcal{M}^\perp$. In particular, we study an invariant subspace $\mathcal{M}$ such that there does not exist a finite rank Hankel type operator except a zero operator.

$D$を$\mathbb{C}$における開円板，$Hol(D)$を$D$上の正則な関数から成る集合とする．$d\mu = rdrd\theta/\pi$とし，$L^2 = L^2(D, d\mu)$はルベーグ空間である．$D$上のバーグマン空間$L_a^2$とは，$L_a^2 = L^2 \cap Hol(D)$と定義される．$L_a^2$は$L^2$の閉部分空間である．$\mathcal{M}$を$L^2$の閉部分空間，かつ，$z\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$を満たすとき，$\mathcal{M}$は不変部分空間と呼ばれる．$\varphi \in L^\infty = L^\infty(D, d\mu)$に対して，ハンケルタイプ作用素とは，

$$H_\varphi^{\mathcal{M}} f = \left(I - P^{\mathcal{M}}\right)(\varphi f) \qquad \left(f \in L_a^2\right)$$

と定義する．$P^{\mathcal{M}}$は，$L^2$から$\mathcal{M}$への正射影である．$\mathcal{M} = L_a^2$のとき，$H_\varphi^{\mathcal{M}}$はBigハンケル作用素，$\mathcal{M} = \left(\overline{zL_a^2}\right)^\perp$のとき，$H_\varphi^{\mathcal{M}}$はSmallハンケル作用素と呼ばれる．そして，$L_a^2 \subseteq \mathcal{M} \subseteq \left(\overline{zL_a^2}\right)^\perp$のとき，$H_\varphi^{\mathcal{M}}$は中間ハンケル作用素と呼ばれる．

我々の論文 [4] では, 0 を除く有限階 Big ハンケル作用素が存在しないことと，0 でない有限階 Small ハンケル作用素がたくさん存在することを注意した．[4, *Theorem* 3.2] では, 0 を除く有限階中間ハンケル作用素が存在しない必要かつ十分条件も導いた．本講演（参照 [5]）で

は，0 を除く有限階ハンケルタイプ作用素が存在しない必要かつ十分条件を，$\mathscr{M}$ のことばで与える．すなわち，$\mathscr{M}$ が weakly divisible であることを示している．

**定義** $\mathscr{M}$ を $L^2$ における不変部分空間とする. $f \in \mathscr{M}$ と，ある $a \in D$ とある $\gamma \geq 0$ に対して $|f(z)| \leq \gamma |z-a|$ ならば $f(z) = (z-a)g(z)$ で $g \in \mathscr{M}$ となるとき，$\mathscr{M}$ が *weakly divisible* であるという.

**定理 1** $\mathscr{M}$ を $L^2$ における不変部分空間とする. *0* を除く有限階ハンケルタイプ作用素が存在しない必要かつ十分条件は，$\mathscr{M}$ が *weakly divisible* となることである.

定理 1 より，weakly divisible な不変部分空間を研究することは興味あることである.

$f \in L_a^2$ に対して, $Z(f) = \{a \in D; f(a) = 0\}$ とする．また，$G \subseteq L_a^2$ に対して，$Z(G) = \cap\{Z(f); f \in G\}$ とする．$1 \leq p \leq \infty$ に対して, $E$ が $D$ における開集合のとき, $H_E^p$ は，$E$ で正則となる $L^p$ に属する関数の全体とする.

**定理 2** $\mathscr{M}$ を $L^2$ における不変部分空間とする.

(1) $\mathscr{M} \cap L^\infty \subseteq H^\infty$ かつ $Z(\mathscr{M} \cap L^\infty) = \emptyset$ ならば，$\mathscr{M}$ は *weakly divisible* である.

(2) ある開集合 $E$ に対して，$\mathscr{M} \cap L^\infty = H_E^\infty$ ならば，$\mathscr{M}$ は *weakly divisible* である.

(3) $\mathscr{M} \cap L^\infty = \langle 0 \rangle$ ならば，$\mathscr{M}$ は *weakly divisible* である.

**系 1** $\mathscr{M}$ を $L_a^2$ における不変部分空間とする. $\mathscr{M}$ が *weakly divisible* である必要かつ十分条件は，$\mathscr{M} \cap L^\infty = \langle 0 \rangle$ または $Z(\mathscr{M} \cap L^\infty) = \emptyset$ となることである.

**系 2** $\mathscr{M}$ を $L^2$ における不変部分空間とする.

(1) $\mathscr{M} \subsetneq L_a^2$ と $\dim L_a^2/\mathscr{M} < \infty$ ならば，$\mathscr{M}$ は *weakly divisible* ではない.

(2) $\mathscr{M} \supseteq L_a^2$ と $\dim \mathscr{M}/L_a^2 < \infty$ ならば，$\mathscr{M}$ は *weakly divisible* である.

系 2 の（2）で $\mathscr{M} \supseteq L_a^2$ かつ $\dim \mathscr{M}/L_a^2 < \infty$ ならば，実際は $\mathscr{M} = L_a^2$ となる.

定理1で有限階・ハンケルタイプ作用素を，コンパクト・ハンケルタイプ作用素とすることはできない．何故なら，零でないコンパクト・ハンケルタイプ作用素がたとえ $\mathscr{M} = L_a^2$（即ちBigハンケル作用素）でも存在するからである．

我々は全てのweakly divisibleな不変部分空間を決定できなかった．よってweakly divisibleな不変部分空間を全て描くことが今後の課題である．

$L_a^2$ に含まれる不変部分空間の研究の進歩は著しく，多くの重要な結果が知られる様になった．しかし $L_a^2$ に含まれないものについてはHardy空間 $H^2$ の場合とは異なり，ほとんど知られていない．この研究はその最初のものとなる事を期待して始められた．

本講演の内容はReference[5]の一部である．

## References


[1] S. Axler and P. Bourdon, *Finite-codimensional invariant subspaces of Bergman spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 306(1988), 805-817.

[2] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta. Math. 81(1948), 239-255.

[3] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate texts in mathematics; 199(2000), Springer.

[4] T. Nakazi and T. Osawa, *Finite-rank intermediate Hankel operators on the Bergman space*, Internat. J. Math. and Math. Sci. 25(2001), 19-31.

[5] T. Nakazi and T. Osawa, *Invariant subspaces and Hankel operators on a Bergman space*, to appear in Proc. Edinburgh. Math. Soc.

# On weight functions and norms of some singular integral operators

Takanori Yamamoto
(Hokkai-Gakuen University)

**Abstract.** In the previous paper, for $L^\infty$ functions $a, b$ and a positive $L^1$ function $w$, we gave the necessary and sufficient condition of the boundedness of singular integral operators $aP_+ + bP_-$ in the weighted norm of $L^2(w)$, where $P_+$ is an analytic projection and $P_-$ is a co-analytic projection. In this paper, we show that if $a\bar{b}$ is an inner function, then there are many weight functions $w$ such that $aP_+ + bP_-$ is an unbounded operator which is bounded below in the weighted norm of $L^2(w)$.

## 序 文

$m$ は単位円周 $\mathbf{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ とする。$a, b \in L^\infty = L^\infty(m)$ は $|a-b| > 0$ a.e. を満たしているとする。荷重関数 $w$ は $w \in L^1 = L^1(m)$ であり，$w > 0$ a.e. を満たしているとする。特異積分作用素 $S$ を Cauchy の主値積分により

$$(Sf)(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz,$$

と定義する。ただし，$\zeta \in \mathbf{T}$ とし，$f \in L^1$ とする。Riesz 射影 $P_+$ と $P_-$ を $P_+ = \frac{I+S}{2}$, $P_- = \frac{I-S}{2}$ と定義する。また，$f$ の共役調和関数 $\tilde{f}$ を $\tilde{f} = -i(Sf - \hat{f}(0))$ と定義する。ただし，$\hat{f}(0)$ は $f$ の 0 番目の Fourier 係数を表す。$L^2(w)$ ノルムを

$$\|f\|_w = \|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_{\mathbf{T}} |f|^2 w dm\right)^{1/2}.$$

と定義する。$w$ が Muckenhoupt の $(A_2)$ 条件を満たすことと，実数値関数 $u, v \in L^\infty$, $\|v\|_\infty < \pi/2$ が存在して $w = \exp(u + \tilde{v})$ と書けることは同値であることが知られている ([1], p.39)。このような $w$ の表示を Helson-Szegő 型の表示と呼ぶことにする。正の数 $M, N$ について，荷重関数 $w$ の集合：

$$B_M(a,b) = \left\{ w \in L^1 \ ; \ w > 0 \text{ a.e.}, \sup_{\|f\|_w = 1} \|(aP_+ + bP_-)f\|_w \le M \right\},$$

$$C_N(a,b) = \left\{ w \in L^1 \ ; \ w > 0 \text{ a.e.}, \inf_{\|f\|_w = 1} \|(aP_+ + bP_-)f\|_w \ge N \right\}$$

を考える。$B_M(a,b)$ が空集合でないときは，$\max(|a|, |b|) \le M$ a.e. が成り立ち，$C_N(a,b)$ が空集合でないときは，$\min(|a|, |b|) \ge N$ a.e. が成り立つ。しかし，逆が成り立つとは限らない。

$B_M(a,b)$ を調べることにより，$aP_+ + bP_-$ が $L^2(w)$ 上の有界作用素になるような $w$ を作用素ノルム $\|aP_+ + bP_-\|$ を用いて表すことができる。また，$C_N(a,b)$ を調べることにより，$aP_+ + bP_-$ が $L^2(w)$ 上の有界作用素であり，かつ有界な逆作用素 $(aP_+ + bP_-)^{-1}$ をもつような $w$ を作用素ノルム $\|(aP_+ + bP_-)^{-1}\|$ を用いて表すことができる。そのときは，$\inf_{\|f\|_w=1}\|(aP_+ + bP_-)f\|_w = \|(aP_+ + bP_-)^{-1}\|^{-1}$ が成り立つ。Widom-Devinatz の定理より，$|a| = 1$ a.e. のき，$C_N(a,1)$ が定数を含むような $0 < N < 1$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{dist}(a, H^\infty) < 1$ である。$w$ が $(A_2)$ 条件を満たすとき，Hunt-Muckenhoupt の定理より，$P_+, P_-$ は $L^2(w)$ 上の有界作用素になるから，$aP_+ + bP_-$ も有界作用素になる。このとき，$aP_+ + P_-$ の $L^2(w)$ における可逆性と Toeplitz 作用素 $T_a$ の $H^2(w)$ における可逆性は同値であり，そのような関数 $a$ と $w$ の条件は，Rochberg-Simonenko の定理として知られている（[1], p.216, [4], [8]）。

Nakazi [4] により，$w$ が $(A_2)$ 条件を満たすとき，$aP_+ + bP_-$ の $L^2(w)$ における下への有界性については知られている。以下の問題 1，2 においては，$w$ が $(A_2)$ 条件を満たすという条件は付いていない。以下の定理 1.A, 1.B と定理 2.A, 2.B は 2 つの集合 $B_M(a,b), C_N(a,b)$ の似ているところを表しているが，定理 1.C と定理 2.C は 2 つの集合の異なっているところを表している。Cotlar-Sadosky [2] は $M \geq 1$ のとき，次の (1) ~ (3) が同値であることを示した。

(1) $w \in B_M(1,-1)$.

(2) $h \in H^1$ が存在して $|w-h|^2 \leq \left(1 - \left(\frac{2M}{M^2+1}\right)^2\right) w^2$ a.e.

(3) 実数値関数 $v, u \in L^\infty$ が存在して $w = \exp(u + \tilde{v} + const.)$, $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2M}{M^2+1}\right)$, $|u| \leq \cosh^{-1}\left(\frac{M^2+1}{2M}\cos v\right)$ a.e. ただし，

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

$a\bar{b}$ が定数であり $|ab| = 1$ を満たすときは，$B_M(a,b) = C_{1/M}(a,b)$ が成り立つから，次は同値である。

$$(1) \qquad \|(aP_+ + bP_-)f\|_w \leq M\|f\|_w, \text{ (for all } f).$$

$$(2) \qquad \|(aP_+ + bP_-)f\|_w \geq \frac{1}{M}\|f\|_w, \text{ (for all } f).$$

よって，$a\bar{b}$ が定数であり $|ab| = 1$ を満たすときは，$aP_+ + bP_-$ の $L^2(w)$ における片側有界性と両側有界性は同値になる。定理 2.C により，$aP_+ + bP_-$ が両側有界にならない $w$ もたくさんあることがわかる。$aP_+ + bP_-$ が $L^2(w)$ で下に有界であるが，上には有界でない例として，$w(z) = |z-1|^2$ は $(A_2)$ 条件を満たさないが，次のように $zP_+ + P_-$ は $L^2(w)$ で下に有界である：

$$\|(zP_+ + P_-)f\|_w \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_w, \text{ (for all } f),$$

すなわち，$w \in C_{1/\sqrt{2}}(z,1)$.

証明： $\|(zP_+ + P_-)f\|_w^2 = \|P_+f\|_w^2 + \|P_-f\|_w^2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_w^2.$

もう一つの例として，$0<N<1$ のとき，

$$w(z)=\left|\frac{z-1}{z-N^2}\right|^2$$

は $(A_2)$ 条件を満たさないが，次のように $zP_+ + P_-$ は $L^2(w)$ で下に有界である：

$$\|(zP_+ + P_-)f\|_w \geq N\|f\|_w, \text{ (for all } f),$$

すなわち，$w \in C_N(z,1)$.
証明：　$\|(zP_+ + P_-)f\|_w^2 - N^2\|f\|_w^2 = \|P_+f\|^2_{(1-N^2)w} + \|P_-f\|^2_{(1-N^2)w} \geq 0.$
最初の等号を示すために，次を使う。

$$(z-N^2)w = (z-N^2)\left|\frac{z-1}{z-N^2}\right|^2 = \frac{-(1-z)^2}{1-N^2 z} \in H^1.$$

2 つの例において，$w^{-1} \notin L^1$ であるから，定理 2.C の証明と同様に，上には有界でないことが示される。定理 2.C は，2 番目の例の一般化になっている。

## 問 題 1

与えられた正の数 $M$ と関数 $a, b \in L^\infty$ に対し，$w \in B_M(a,b)$ の Helson-Szegő 型の表示を求める問題を考える。

$$d_M(a,b) = \left|\frac{(a-b)M}{a\bar{b}-M^2}\right|$$

と定める。$B_M(a,b) \neq \emptyset$ のときは，$\max(|a|,|b|) \leq M$ a.e. が成り立つから，$|d_M(a,b)| \leq 1$ a.e. が成り立つ。以下の定理 1.A は [5] による。定理 1.B は後の定理 2.B と同様に [9] の結果を使うと簡単に導かれる。定理 1.C ([6]) は簡単に証明できる事実であるが，定理 2.C (主定理) と比較するために書いておく。

**定理 1.A** ([5])　$|a-b|>0$ a.e., $\max(|a|,|b|) \leq M$ a.e., $|a\bar{b}-M^2|>0$ a.e. とする。実数値 $L^\infty$ 関数 $s$ が存在して，

$$|a\bar{b}-M^2|w\exp(\tilde{s}) \in L^1, \quad \exp(is) = \frac{a\bar{b}-M^2}{|a\bar{b}-M^2|} \text{ a.e.}$$

が成り立っているとする。このとき，$w \in B_M(a,b)$ となるための必要十分条件は，実数値関数 $v \in L^\infty, u$ が存在して

$$w = \frac{1}{|a-b|}\exp(u+\tilde{v}-\tilde{s}+const.) \text{ a.e.},$$

$|v| \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin d$ a.e.,　$|u| \leq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。ただし，$d = d_M(a,b)$ とする。

$\boxed{\textbf{定理 1.B}}$ ([9]) $|a-b|>0$ a.e., $\max(|a|,|b|)\le M$ a.e., $|a\bar{b}-M^2|>0$ a.e. とする。このとき，$w\in B_M(a,b)$ となるための必要十分条件は，inner 関数 $Q$ と実数値関数 $t\in L^1, v\in L^\infty, u$ が存在して

$$w=\frac{1}{|a-b|}\exp(u+\tilde{v}+t)\ \text{a.e.},\quad \frac{a\bar{b}-M^2}{|a\bar{b}-M^2|}=Q\exp(i\tilde{t})\ \text{a.e.},$$

$|v|\le\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\le\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。ただし，$d=d_M(a,b)$ とする。

$\boxed{\textbf{定理 1.C}}$ ([6]) $|a-b|>0$ a.e., $\max(|a|,|b|)\le M$ a.e. とし，$a\bar{b}\in H^\infty$, $a\bar{b}\ne M^2$ とする。このとき，次の (1) ～ (3) は同値である。ただし，$d=d_M(a,b)$ とする。

(1) $w\in B_M(a,b)$.

(2) $k\in H^1$ が存在して $|w-k|^2\le(1-d^2)w^2$ a.e.

(3) 実数値関数 $v\in L^\infty, u$ が存在して $w=d^{-1}\exp(u+\tilde{v}+const.)$ a.e.,
$|v|\le\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\le\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e.

## 問 題 2

次に，与えられた正の数 $N$ と関数 $a,b\in L^\infty$ に対し，$w\in C_N(a,b)$ の Helson-Szegő 型の表示を求める問題を考える。

$$d_N(a,b)=\left|\frac{(a-b)N}{a\bar{b}-N^2}\right|$$

と定める。$C_N(a,b)\ne\emptyset$ のときは，$\min(|a|,|b|)\ge N$ a.e. が成り立つから，$|d_N(a,b)|\le 1$ a.e. が成り立つ。以下の定理 2.A は 定理 1.A と同様に証明できる。定理 2.B は [9] の結果を使うと簡単に導かれる。定理 2.C が主定理である。

(1) $a\bar{b}=N^2$ のときは，任意の $w\in L^1$, $w>0$ a.e. について $w\in C_N(a,b)$ となる。

(2) $a\bar{b}$ が $N^2$ とは異なる定数のとき，$w\in C_N(a,b)$ となるための必要十分条件は，実数値関数 $v\in L^\infty$, $u$ が存在して

$$w=\frac{1}{|a-b|}\exp(u+\tilde{v}+const.)\ \text{a.e.},$$

$|v|\le\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\le\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。 ただし，$d=d_N(a,b)$ とする。このことは，以下の定理 2.A または 2.B を用いて証明できるが，直接証明することもできる。

(1) と (2) より，$a\bar{b}$ が定数のときは，Helson-Szegő 型の表示は簡単であることがわかった。$a\bar{b}$ が定数でなくても，$a\bar{b}$ が inner 関数であり，

$$\left|\frac{a\bar{b}-N^2}{a\bar{b}-1}\right|^2 w\in L^1$$

ならば，Helson-Szegő 型の表示は以下の定理 2.C (主定理) のように簡単になる。

$\boxed{\textbf{定理 2.A}}$ $N>0$, $|a-b|>0$ a.e., $\min(|a|,|b|)\geq N$ a.e., $|a\bar{b}-N^2|>0$ a.e. とし，実数値関数 $s\in L^\infty$ が存在して，

$$|a\bar{b}-N^2|w\exp(\tilde{s})\in L^1,\quad \exp(is)=\frac{a\bar{b}-N^2}{|a\bar{b}-N^2|}\text{ a.e.}$$

が成り立っているとする。このとき，$w\in C_N(a,b)$ となるための必要十分条件は，実数値関数 $v\in L^\infty, u$ が存在して

$$w=\frac{1}{|a-b|}\exp(u+\tilde{v}-\tilde{s}+const.)\text{ a.e.,}$$

$|v|\leq\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\leq\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。ただし，$d=d_N(a,b)$ とする。

$\boxed{\textbf{定理 2.B}}$ $N>0$, $|a-b|>0$ a.e., $\min(|a|,|b|)\geq N$ a.e., $|a\bar{b}-N^2|>0$ a.e. とする。このとき，$w\in C_N(a,b)$ となるための必要十分条件は，inner 関数 $Q$ と実数値関数 $t\in L^1, v\in L^\infty, u$ が存在して

$$w=\frac{1}{|a-b|}\exp(u+\tilde{v}+t)\text{ a.e.,}\quad \frac{a\bar{b}-N^2}{|a\bar{b}-N^2|}=Q\exp(i\tilde{t})\text{ a.e.,}$$

$|v|\leq\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\leq\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。ただし，$d=d_N(a,b)$ とする。

証明. [9] と同様に，$w\in C_N(a,b)$ の必要十分条件は inner 関数 $Q$ と実数値関数 $t_0\in L^1, v\in L^\infty, u_0\in L^1$ が存在して

$$w=\frac{1}{|a\bar{b}-N^2|}\exp(u_0+\tilde{v}+t_0)\text{ a.e.,}\quad \frac{a\bar{b}-N^2}{|a\bar{b}-N^2|}=Q\exp(i\tilde{t_0})\text{ a.e.,}$$

$|v|\leq\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e. , $d^2e^{u_0}+e^{-u_0}\leq 2\cos v$ a.e. を満たすことである。この事実を使うと，容易に証明できる。

$\boxed{\textbf{定理 2.C}}$ (主定理) $0<N\leq 1$, $|a-b|>0$ a.e., $\min(|a|,|b|)\geq N$ a.e. とする。$a\bar{b}$ は定数でない inner 関数とし，$w_N$ を

$$w_N=\left|\frac{a\bar{b}-N^2}{a\bar{b}-1}\right|^2 w$$

と定め，$w_N\in L^1$ とする。このとき，もし $N\neq 1$ ならば $w^{-1}\notin L^1$ であり，$aP_++bP_-$ は $L^2(w)$ 上の非有界作用素である。更に，このような条件を満たす $w$ について，次の (1) ~ (3) は同値である。ただし，$d=d_N(a,b)$ とする。

(1) $w\in C_N(a,b)$.

(2) $k\in H^1$ が存在して $|w_N-k|^2\leq(1-d^2)w_N^2$ a.e.

(3) 実数値関数 $v\in L^\infty, u$ が存在して

$$w=\frac{|a\bar{b}-1|^2}{|a-b|\cdot|a\bar{b}-N^2|}\exp(u+\tilde{v}+const.)\text{ a.e.,}$$

$|v|\leq\frac{\pi}{2}-\arcsin d$ a.e., $|u|\leq\cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{d}\right)$ a.e. である。

証明.　$0 < N < 1$ のとき $aP_+ + bP_-$ は $L^2(w)$ 上の有界作用素であると仮定する。よって，$(aP_+ + bP_-) - bI = (a-b)P_+$ も有界作用素となる。よって，ある正の数 $M$ が存在して

$$\|(a-b)P_+f\|_w \le M\|f\|_w, \text{ (for all } f).$$

$|a-b|^2 w > 0$ a.e. であるから，Koosis の定理 [3] より，$w^{-1} \in L^1$ となる。よって，

$$(1-N^2)\int_{\mathbf{T}} \frac{1}{|a\bar{b}-1|}dm \le \int_{\mathbf{T}} \left|\frac{a\bar{b}-N^2}{a\bar{b}-1}\right| dm \le \left\{\int_{\mathbf{T}} \left|\frac{a\bar{b}-N^2}{a\bar{b}-1}\right|^2 wdm\right\}^{1/2} \left\{\int_{\mathbf{T}} \frac{1}{w}dm\right\}^{1/2} < \infty.$$

$0 < N < 1$ より，$|a\bar{b}-1|^{-1} \in L^1$. これは $a\bar{b}$ が定数でない inner 関数という前提条件に矛盾する。(1) ～ (3) の同値性は Cotlar-Sadosky のリフティング定理を用いて証明できる。

# 参考文献


[1] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Akademie -Verlag, Berlin, and Springer-Verlag, 1990.

[2] M. Cotlar, C. Sadosky, On the Helson-Szegő theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, pp.383-407, *Harmonic analysis in Euclidean spaces* (Williamstown, MA, 1978), Part 1, eds. G.Weiss and S.Wainger, Proc. Symp. Pure Math. 35, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.

[3] P.Koosis, Moyennes quadratiques pondérées de functions périodiques et de leurs conjugées harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), 255-257.

[4] T.Nakazi, Toeplitz operators and weighted norm inequalities, Acta Sci. Math. (Szeged) 58 (1993), 443-452.

[5] T. Nakazi, T. Yamamoto, Some singular integral operators and Helson-Szegő measures, *J. Funct. Analysis* **88** (1990), 366-384.

[6] T. Nakazi, T. Yamamoto, Weighted norm inequalities for some singular integral operators, *J. Funct. Analysis* **148** (1997), 279-295.

[7] N.K. Nikolski, *Operators, functions, and systems*, Vol.1 and 2, Math. Surveys and Monographs 92 and 93, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[8] R. Rochberg, Toeplitz operators on weighted $H^p$ spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 291-298.

[9] T. Yamamoto, Boundedness of some singular integral operators in weighted $L^2$ spaces, *J. Operator Theory* **32** (1994), 243-254.

Interpolation Problem For $\ell^1$ And An $F$-space

By

Takahiko Nakazi (Hokkaido University)

**Abstract**. Let $B$ be an $F$-space and $B_1^*$ the unit ball of the dual space. A sequence $(\phi_n)$ in $B_1^*$ is called $\ell^1$-interpolating if for every sequence $(w_n)$ in $\ell^1$ there exists an element $f$ in $B$ such that $\phi_n(f) = w_n$ for all $n$. In order to study an interpolation problem for $\ell^1$, we introduce two quantities $\rho_n$ and $\prod_{k\neq n}\sigma(\phi_n, \phi_k)$. For arbitrary Banach space, we show that $(\phi_n)$ is an $\ell^1$-interpolating sequence if and only if $\inf_n \rho_n > 0$. When $(\phi_n)$ is embeded in the open unit disc in the complex plane, we show that $(\phi_n)$ is an $\ell^1$-interpolating sequence if and only if $\inf_n \prod_{k\neq n}\sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$, for a Hardy space $H^p(D)(1 \leq p \leq \infty)$ and the Smirnov class $N_+(D)$.

$B$ は invariant metric $d$ をもつ $F$-space とする。即ち、$d$ は $d(f+h, g+h) = d(f, g)$ を満たす metric である。$(\phi_n)$ は $B_1^* = \{\phi \in B^* ;\ \| \phi \| \leq 1\}$ の distinct points の infinite sequence とする。$\ell$ は $\mathbb{C}^\infty$ の部分集合で、$F$-space とする。

$f \in B$ に対して $Tf = (\phi_n(f))$ と定義すると、$T$ は $B$ から $\mathbb{C}^\infty$ の中への線形写像である。我々は、$TB \supset \ell$ となる $(\phi_n)$ はどんな $B_1^*$ の sequence かに興味がある。このとき、$(\phi_n)$ は $\ell$-interpolation sequence と呼ばれる。これは、任意の $(w_n) \in \ell$ に対して、$\phi_n(f) = w_n$ $(n \geq 1)$ となる $f \in B$ が存在することを意味する。

与えられた $B$ について、自然な $\ell$ が存在すると思われるが、この講演では主として $\ell^1$ を考える。

$$
\begin{aligned}
J &= \{f \in B \ ;\ f = 0 \ \text{ on } \ (\phi_n)\}、\\
J_k &= \{f \in B \ ;\ f = 0 \ \text{ on } \ (\phi_n)_{n\neq k}\}、\\
\rho_k &= \sup\{| \phi_k(f) | \ ;\ f \in J_k,\ d(f, 0) \leq 1\}
\end{aligned}
$$

とすると、$\rho_k > 0 \Longleftrightarrow J_k \subsetneq J \Longleftrightarrow^{\exists} f_k \in B \ s.t.\ \phi_n(f_k) = \delta_{nk}$ 。$\phi, \psi \in B_1^*$ に対して

$$\sigma(\phi, \psi) = \sup\{| \phi(f) | \ ;\ \psi(f) = 0,\ f \in B\}$$

とするとき、$\inf_n \prod_{k\neq n}\sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$ のとき $(\phi_n)$ は uniformly separated sequence と呼ばれる。

問題IIについても、$0 < p < 1$ のときの $H^p(D)$ と $L_a^p(D)$ に対して解くことができなかったが、$H^p(D)$ については、$\ell^p$-interpolating sequence である必要十分条件は $\inf_n \prod_{k \neq n} \sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$ であることを $(\phi_n) \subset D$ のときに示すことができた。これは V.Kabaila の結果の別証明を与えている。また $1 \leq p < \infty$ に対する $L_a^p(D)$ について、$(\phi_n) \subset D$ のときに、もし $\inf_n \prod_{k \neq n} \sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$ ならば $\ell^1$-interpolating sequence となることを示すことができた。逆に $\ell^1$-interpolating sequence ならば $\inf_n \prod_{k \neq n} \sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$ となることを示すことができた。

考えてきた様々の空間について、次の包含関係がある。

$H^\infty \subset H^2 \subset H^1 \subset H^p \ (0 < p < 1) \subset N_+$ かつ $H^p \subset L_a^p \ (0 < p \leq \infty)$

である。

## 参考文献


1. L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80(1958), 921-930.

2. O. Hatori, The shapiro-Shields theorem on finite connected domains, Surikaisekikenkyūsho Kōkyūroku 1049(1998), 21-29 (in Japanese)

3. V. Kabaila, Interpolation sequnces for the $H_p$ classes in the case $p < 1$. Litovsk. Mat. Sb. 3(1963), no.1, 141-147 (in Russian)

4. T. Nakazi, Interpolation problem for $\ell^1$ and a uniform algebra, J. Austral. Math. Soc. 72(2002), 1-11.

5. H. S. Shapiro and A. L. Shields, On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math. 83(1961), 513-532.

6. A. K. Snyder, Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math. 83(1961), 513-532.

## 問題

$(\phi_n) \subset B_1^*$ に対して、次の２つの問題は自然である。

（Ｉ）　$\ell^1$-interpolation sequence である必要十分条件は $\inf_n \ \rho_n > 0$ であることを示せ。

（Ⅱ）　$\ell^1$-interpolation sequence である必要十分条件は uniformly separated sequence, 即ち、$\inf_n \prod_{k \neq n} \sigma(\phi_n, \phi_k) > 0$ であることを示せ。

## 歴史

問題Ｉ を、 T.Nakazi [4] は２００２年に、 $B$ が関数環かつ $(\phi_n)$ が $B$ の極大イデアル空間に属するとき、解いた。

問題Ⅱについては、Hardy 空間 $H^p(D)$ のとき、$(\phi_n)$ が次の場合に解かれている。ここで、$D$ は単位円板、$(a_n) \subset D$、$\phi_n(f) = f(a_n)/\gamma(a_n)$ かつ $\gamma(a_n) = \sup\{| f(a_n) | \ ; \ f \in B, \ d(f, 0) \leq 1\}$ である。 $p = 1$ のとき、H.S.Shapiro と A.L.Shields [5] が１９６１年に解いた。$p = \infty$ のときは、１９７１年に A.K.Snyder が、$1 < p < \infty$ のときは、１９９８年に O.Hatori [2] がそれぞれ解いた。このとき、

$$\rho_n = \prod_{k \neq n} \left| \frac{a_n - a_k}{1 - \bar{a}_k a_n} \right| = \prod_{k \neq n} \sigma(\phi_n, \phi_k)$$

(L.Carleson による) が知られているので、問題Ｉ も自動的に解いている。

## 解答

問題Ｉについて、我々は任意の Banach 空間で解くことができる。また Smirnov class $N_+(D)$ のとき、$(\phi_n) \subset D$ のとき、Banach 空間ではないが解くことができる。

問題Ⅱについて、Hardy 空間 $H^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は Banach 空間であるから、問題Ｉが解けているので、歴史 の所で注意した L.Carleson の結果から明らかである。Smirov class $N_+(D)$ についても問題Ｉを用いて解くことができる。

$H^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ については問題Ⅱの解答は知られていたわけだが、問題Ｉの解答 (全く一般的な抽象的な定理) から、L.Carleson の結果から直ちに導けたことは少し意味があると思う。$N_+(D)$ は $H^p(D)$ $(0 < p \leq \infty)$ と異なり、補間問題は未解決であるから、$\ell^1$ についての補間問題であるが完全に解けたことは意味があると思われる。

## 課題

問題Ｉについて、$0 < p < 1$ のときの Hardy 空間 $H^p(D)$ と Bergman 空間 $L_a^p(D)$ は $F$-空間であるが、Banach 空間ではないので解くことができなかった。しかし、我々は $\ell^p$-interpolating sequence である必要十分条件は $\inf_n \rho_n > 0$ を一般の $(\phi_n)$ について示すことができた。