21 世紀 COE プログラム:
特異性から見た非線形構造の数学

第 4 回 COE 研究員連続講演会
反応-拡散方程式の大域解と爆発解について

COE 研究員
梅田 典晃

2004. 7. 7(水), 7.14(水), 7.21(水)

北海道大学理学部 3 号館 512 室

反応-拡散方程式の大域解と爆発解について

梅田典晃

1　はじめに

講演者は反応-拡散方程式及び反応-拡散系の初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t,u), & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, u \in \mathbf{R}^N, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \tag{IVP}$$

の非負の解について研究してきた。反応-拡散方程式の解の挙動は、化学反応における物質の温度変化や、数理生態学における個体数の変動など、さまざまな反応-拡散現象を表す。初期値問題 (IVP) は上記の反応-拡散方程式を初期値問題でとして表現するものであり、そこで、有限時間での解の爆発（爆発の定義については、2. の方で記述する）や時間大域解の存在などが研究されてきた。この分野の研究は 1966 年の Fujita[6] の研究から始まり、今まで多くの人々によって様々な研究が行われており、現在でも盛んに研究されている。(IVP) において、解 $u(x,t)$ は場所 x、時間 t における、物質の温度や、生物の集団の個体数などを表現する。また、u_t は解の時間変化率、Δu は、方程式の拡散項、$u_0(x)$ は方程式の初期値、非線形項 $f(x,t,u)$ は方程式の反応項という。また、次元数 $d \geq 1$ とする。

また、複数の物質等の相互作用を考察する時に、解などをベクトルの形にして、方程式 (IVP) が連立方程式の形で表現されるとき、(IVP) は反応-拡散系と呼ぶ。ここで、$N \geq 1$ は、物質等の種類の数として表現される。この時、解、初期値、非線形項は当然ベクトル $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t) \dots u_N(x,t))$、$u_0(x,t) = (u_{1,0}(x,t), u_{2_0}(x,t) \dots u_{N_0}(x,t))$、$f(x,t,u) = (f_1(x,t,u), f_2(x,t,u), \dots f_N(x,t,u))$ のような形で表される。また、u、u_0、f は任意の整数 i に対して、

$$u_{N+i} = u_i, \quad u_{N+i,0} = u_{i,0}, \quad f_{N+i} = f_i$$

を満たすものとする。

特に講演者は非線形項が $f_i(u) = u_{i+1}^{p_i}$ で、解が非負の場合において研究を行ってきた。方程式 (IVP) はこの場合

$$\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i + u_{i+1}^{p_i}, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, i \in N^* = \{1, 2, \dots N\}, \\ u_i(x,0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbf{R}^d, i \in N^*, \end{cases} \tag{IVP2}$$

と表される。ここで、非線形項の指数 $p_i > 0$、初期値 $(u_i)_0$ を非負の有界連続関数とする。当然、非線形項の指数 p_i に対して、$p_{N+i} = p_i$ が成り立つとする。

問題 (IVP2) は少なくとも時間に対して局所的に非負で有界な解を持っている。与えられる初期値 u_0 に対して、$T^* = T^*(u_0)$ を解の存在時間とする。もし、$T^* = \infty$ ならば解は大域的という。もう一方で、$T^* < \infty$ とし、$\limsup_{t \to T^*} \|u_i(t)\|_\infty = \infty$ となるような $i \in N^*$ が存在するならば、解は有限時間で爆発するという。

また、α_i を

$$\alpha_i = \frac{2(1 + p_i + p_i p_{i+1} + \ldots + p_i p_{i+1} \ldots p_{i+M-2})}{p_1 p_2 \ldots p_N - 1}$$

のようにおく。この α_i は $N = 2$ のとき、

$$\alpha_1 = \frac{2(1+p_1)}{p_1 p_2 - 1}, \qquad \alpha_2 = \frac{2(1+p_2)}{p_1 p_2 - 1},$$

となる。ここで、講演者は、過去に次のような結果を出した。

1. $p_1 p_2 \ldots p_N \leq 1$ のとき解は大域的である。しかし、自明でない ($u_i \not\equiv 0$) 解は有界ではない。
2. 任意の i に対して、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i\} \geq d$ の時、(1) の任意の自明で無い解は有限時間で爆発する。
3. 任意の i に対して、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i\} < d$ の時、(1) において大域的でない解と大域的な解の両方が存在する。特に $p_i \geq 1$ の時、次のように分かれる。
   (a) ある i が存在し、$a_i > \alpha_i$ になるような a_i に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\liminf_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} < 0$ を満たすならば、任意の (1) の解は有限時間で爆発する。
   (b) 任意の i に対し、$a_i < \alpha_i$ になるような a_i に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\limsup_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} > \infty$ を満たすならば、初期値の大きさによって解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合に分かれる。特に、解が大域的になるとき、解は有界である場合しか分かっていない。
4. 任意の i に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ の時、解は一意的である。
5. 任意の i に対して、$p_i < 1$ (当然, $p_1 p_2 \ldots p_N < 1$) で、$u_0 \not\equiv$ の時、解は一意的である。
6. $p_1 p_2 \ldots p_N < 1$ で、$u_0 \equiv 0$ の時、解は一意的ではない。

さらに、(IVP2) の非線形項を拡張した方程式

$$\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i + |x|^{\sigma_i} u_{i+1}^{p_i}, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, i \in N^*, \\ u_i(x,0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbf{R}^d, i \in N^*, \end{cases} \qquad \text{(IVP3)}$$

も扱っている。σ_i は $0 \leq \sigma_i < d(p_i - 1)$ ($i \in N^*$) とする。ただし、$p_i = 1$ のときは $\sigma_i = 0$ とする。当然、整数 i に対して $\sigma_{N+i} = \sigma_i$ とする。

また、α_i を前頁で定義したもの、δ_i を

$$\delta_i = \frac{\sigma_i + p_i \sigma_{i+1} + p_i p_{i+1} \sigma_{i+2} + \ldots + p_i p_{i+1} \ldots p_{i+N-2} \sigma_{i+N-1}}{p_1 p_2 \ldots p_N - 1}$$

と置く。なお、$N = 2$ のとき δ_i は

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1 + p_1 \sigma_2}{p_1 p_2 - 1}, \qquad \delta_2 = \frac{\sigma_2 + p_2 \sigma_1}{p_1 p_2 - 1},$$

となる。ここで、講演者は次の結果を出した。

1. 任意の i に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i + \delta_i\} \geq d$ の時、(1) の任意の自明で無い解は、有限時間で爆発する。

2. 任意の i に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i + \delta_i\} < d$ の時、(1) において大域的でない解と大域的な解の両方が存在し、次のように分かれる。

   (a) ある i が存在し、$a_i < \alpha_i + \delta_i$ になるような a_i に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\liminf_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} > 0$ を満たすならば、任意の (1) の解は有限時間で爆発する。

   (b) 任意の i に対し、$a_i > \alpha_i + \delta_i$ になるような a_i に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\limsup_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} < \infty$ を満たすならば、初期値の大きさによって解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合に分かれる。特に、解が大域的になるとき、解は有界である場合しか分かっていない。

2 歴史

先に述べたとおり、この分野の研究は 1966 年の Fujita の研究から始まっている。ここでは、先に述べた講演者の結果に即して紹介する。p_i ($N = 1$ の場合は p と表す。) は先ほど述べた通り、非線形項の指数である。

始めに $p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ の場合を述べる。$N = 1$ の場合は、$p > 1$ とする。

この研究の始まりとして、$N = 1$ の場合において 1966 年の Fujita は

1. $1 < p < 1 + 2/d$ の時、非自明な解 ($u \not\equiv 0$ となる解) は有限時間で爆発する。

2. $p > 1 + 2/d$ の時、指数減衰し、最大値が十分小さい初期値に対して、解は時間大域的に存在する。

ということを証明した。その後、Hayakawa[8](1973)、Kobayashi-Sirano-Tanaka[11](1977)、Weissler[22](1978) らの研究によって、$p = 1 + 2/d$ においても、非自明な解が有限時間で爆発することが証明されている。ここで、この $p = 1 + 2/d$ を "Fujita exponent" または "first cutoff" と呼ぶことにする。その後、1992 年に、Lee-Ni[12] によって、$p > 1 + 2/d$ における、解の爆発と大域解の存在に対する、初期値の条件について研究した。そこで、彼らは下記の結果を出している。

1. もし、ある $\nu_0 > 0$ と 十分に大きい $C = C(p, \nu_0) > 0$ に対して、初期値が $u_0(x) \geq Ce^{-\nu_0 |x|^2}$ を満たすとき、(IVP2) の任意の解は有限時間で爆発する。

2. もし、$a < 2/(p-1)$ を満たす a に対して、$\|(1 + x^2)^{a/2} u_0\|_\infty < 0$ を満たすならば、(IVP2) の任意の解は有限時間で爆発する。

3. もし、$a > 2/(p-1)$ を満たす a に対して、$\|(1 + x^2)^{a/2} u_0\|_\infty$ が十分に小さければ、(IVP2) の任意の解は時間大域的になる。

次に $N=2$ の場合を紹介する。1991 年に Escobedo-Herrero[3] によって、"first cutoff" の結果が出ている。彼らの結果を下記に記す。この場合、α_1、α_2 は

$$\alpha_1 = \frac{p_1+1}{p_1p_2-1}, \quad \alpha_2 = \frac{p_2+1}{p_1p_2-1}$$

と表される。

1. $\min\{\alpha_1\alpha_2\} \geq d/2$ の時、非自明な解 ($u \neq 0$ となる解) は有限時間で爆発する。
2. $\min\{\alpha_1\alpha_2\} < d/2$ の時、指数減衰し、最大値が十分小さい初期値に対して、解は時間大域的に存在する。

さらに、1998 年に Mochizuki[13] によって、"second cutoff" の結果が出ている。また、$N \geq 3$ の場合について見てみると、Renclawowicz(1998)[15] ($N=3$)、[16] ($N \geq 4$) が Escobedo-Herrero の結果の拡張を行っている。また、講演者 (Umeda)[19] によって、Mochizuki の結果を $N \geq 3$ の場合に拡張している。

次に $p_1p_2\ldots p_N \leq 2$ の場合を述べる。こちらは最初、1986〜87 年に Aguire-Escobede[1] によって、$N=1$ の場合で解の時間大域性、一意性、非一意性を証明している。その後、1991 年に Escobedo-Herrero が $N=2$ の場合で これらの結果を拡張している。さらに 1998 年、2000 年に Renclawowicz 前述と同じ論文で、$N \geq 3$ の場合で解の大域性を証明している。2003 年に、講演者 [20] が、同じ $N \geq 3$ で Renclawowicz と違う方法で解の大域性を証明し、さらに解の一意性、非一意性を証明している。

最後に、非線形項 f が x や t にも従属する場合等、上記の場合で表せない場合で研究している論文を紹介する。ここでは、非線形項の形と、該当する論文だけを紹介する。$N=1$ で $f(x,t,u) = |x|^\sigma$ の場合に、Bandle-Levine[2] (1989)、Hamada[7] (1995)、Pinsky[14] (1997) らによって研究を行われてきた。また $N=2$ の場合に Uda[18] (1995) が $f_i(x,t,u) = t^{q_i}u_{i+1}^{p_i}$、Huang-Mochizuki[9] (1998) が $f_i(x,t,u) = |x|^{\sigma_i}u_{i+1}^{p_i}$、Kirane-Qafsaoui[10] (2002) が $f_i(x,t,u) = |x|^{\sigma_i}t^{q_i}u_{i+1}^{p_i}$ の場合で行っていた。さらに $N \geq 3$ の場合に講演者 [21] が $f_i(x,t,u) = |x|^{\sigma_i}u_{i+1}^{p_i}$ の場合に行っている。また、非線形項が解の掛け算の形 ($f_i(u) = u_1^{p_{i,1}}u_2^{p_{i,2}}\ldots p_N^{p_{i,N}}$) になっている場合として、Escobedo-Levine[5] (1995) が $N=2$ の場合で、Renclawowicz(2000)[17] が $N \geq 3$ の場合で、first cutoff についての研究を行っていた。

3 既知の結果

この講演では、一番やさしい場合 ($f(x,t,u) = u^p$、$N=1$) について考える。方程式は

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t,u), & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, u \in \mathbf{R}^N, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \qquad (*)$$

とする。ここで、非線形項の指数は $p > 0$ で、初期値は非負の有界連続関数とする。この方程式 $(*)$ の解の時間大域性や爆発について、次のことが分かっている。

定理 1. $p \leq 1$ の時、$(*)$ の解は時間大域的である。但し、有界ではない。

定理 2. $1 < p \leq 1 + 2/d$ の時、$(*)$ の解は有限時間で爆発する。

定理 3. $p > 1 + 2/d$ の時、$(*)$ の解は初期値の形によって次のように分かれる。

(a) もし、初期値がある $\nu_0 > 0$ と、十分に大きい $C = C(p, \nu_0) > 0$ に対して $u_0(x) \geq Ce^{-\nu_0|x|^2}$ を満たしているならば、$(*)$ の任意の解は有限時間で爆発する。

(b) もし、初期値が $a < 2/(p-1)$ をみたす a に対して、$\liminf_{|x|\to\infty} ||x|^a u_0(x)| > 0$ を満たすとき、$(*)$ の任意の解は有限時間で爆発する。

(c) もし、初期値が $a > 2/(p-1)$ をみたす a に対して、$\sup |(x^2+1)^{a/2} u_0(x)|$ が十分小さい時、$(*)$ の任意の解は時間大域的に存在し、かつ有界になる。

本講演では、これらの定理の証明を行なった。但し、先に述べた論文を参照すれば証明が書いてあるので、ここでは省略する。

4 レポート問題

以下の問題は、講演後のレポート問題として出したものである。

初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, \\ v_t = \Delta v + u^q, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}^d, \end{cases} \qquad \text{(R)}$$

の非負の解を考える。ここで、d を次元数、初期値 u_0、v_0 は非負の有界連続関数、非線形項の指数を $p > 0$、$q > 0$ とする。この時 $d = 1$ としたとき、pq-平面 (但し、p と q は正の部分だけとする) 上に次の 3 つの場所を図示せよ。

1. (R) の解は大域的であるが、自明でない解は有界ではない。
2. (R) の任意の自明で無い解は、有限時間で爆発する。
3. (R) の任意の自明で無い解は、初期値によって解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合に分かれる。

参考文献

[1] J. Aguirre and M. Escobedo, *A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$ with $0 < p < 1$. Asymptotic behavior of solutions.,* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **8** (1986-87), 175-203.

[2] C. Bandle and H. A. Levine, *On the existence and nonexistence of global solution of reaction-diffusion equation in sectrial domains*, Trans. Amer. Math. Sec. **316** (1989), 595-622.

[3] M. Escobedo and M. A. Herrero, *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system,* J. Differential Equations **89** (1991), 176-202.

[4] M. Escobedo and M. A. Herrero, *A uniqueness result for a semilinear reaction-diffusion system,* Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 175-185.

[5] M. Escobedo and H. A. Levine, *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), no. 1, 47–100.

[6] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t - \Delta u = u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I **13** (1966), 65-79.

[7] T. Hamada, *Non existence of global solutions of parabolic equations in conical domains,* Tukuba J. Math. **19** (1995), 15-25.

[8] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solution of some semilinear parabolic equations,* Proc. Japan. Acad. **49** (1973), 503-505.

[9] Q. Huang and K. Mochizuki, *Existence and behavior of solution for a weakly coupled system of reaction-diffusion equation,* Methods and Application of Analysis **5** (2) (1998), 109-129.

[10] M. Kirane and M. Qafsaoui, *Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems.* J. Math. Anal. Appl. **268** (2002), no. 1, 217–243.

[11] K. Kobayashi, T Sirao and H. Tanaka, *On glowing up problem for semilinear hert equations*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 407-424.

[12] T. Y. Lee and W.-M. Ni, *Global existence, large time behavior and lifespan on solution of a semilinear Cauchy problem,* Tran. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 365-378.

[13] K. Mochizuki, *Blow-up, life span and large time behavior of solution of weakly coupled system of reaction-diffusion equation,* Advance in Nonlinear Partial Differential Equation and Stochastics, 175-197, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[14] R. G. Pinsky, *Existence and nonexistence of global solution for* $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ *in* R^d, J. Differential Equations, **133** (1997), 152-177.

[15] J. Rencławowicz, *Global existence and blow up of solutions for a completely coupled Fujita type system of reaction-diffusion equations,* Appl. Math. **25** (1998), 313-326.

[16] J. Rencławowicz, *Global existence and blow up for a completely coupled Fujita type system,* Appl. Math. **27** (2000), 203-218.

[17] J. Rencławowicz, *Blow up, global existence and growth rate estimates in nonlinear parabolic systems.* Colloq. Math. **86** (2000), no. 1, 43-66.

[18] Y. Uda, *The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations.* Z. Angew. Math. Phys. **46** (1995), no. 3, 366-383.

[19] N. Umeda, *Blow-up and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Tsukuba J. Math., **27** (2003), 31-46.

[20] N. Umeda, *Large Time Behavior and Uniqueness of Solutions of a Weakly Coupled System of Reaction-Diffusion Equations*, Tokyo Journal of Math., **26** (2003), 347-372.

[21] N. Umeda, *Existence, Nonexistence of global solution and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations* (preprint).

[22] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), 29-40.