21 世紀 COE プログラム:

特異性から見た非線形構造の数学

第 2 回 COE 研究員連続講演会
極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張

COE 研究員

有馬 研一郎

2004. 6. 4(金), 6.11(金)

北海道大学理学部 3 号館 402 室

極小モデルプログラムの入門
およびその正標数への拡張

北海道大学大学院理学研究科数学専攻
COE 研究員　有馬研一郎

平成 16 年 6 月 4 日, 11 日

概 要

この講演の目的は，代数幾何学の導入部を学び始めたばかりの学生に，森理論の雰囲気を味わってもらおうというものである．したがって厳密な議論はもちろん不可能であるし，解説にしても直観的な，比喩を用いた話しかできない．その分通常の講義とは異なる，より楽しめる話題を選択し，紹介することになる．

代数多様体の構造を調べる為には，極小モデルプログラム（MMP）を動かすと良い．このプログラムの出だしは以下のようになっている：ある双有理同値類の中からひとつ良いモデルを選べ．そのモデルの性質を調べよ．こうすることで最初の代数多様体の性質も解る．

講演では２次元と３次元のMMPの概要を述べる．２次元の場合は古典的に知られていたが，３次元には多くの困難な問題があった．それらを２次元と比較しつつ紹介する．特異点の分類もそのような問題の一つである．この視点でMMPを見ることも試みる．

もう一つの話題はMMPの拡張である．その中から対数的MMPと，正標数の場合の現状を述べる．最後にそれに関する筆者の結果を紹介する．

〒 060-0810　札幌市北区北 10 条西 8 丁目
北海道大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail address: arima@math.sci.hokudai.ac.jp

目 次

1　代数幾何学とは

この章は序章である．代数幾何学とは，双有理変換によって不変である代数多様体を研究する学問である．厳密な定義はスキーム論を用いて非常に抽象的に行われる．そちらの方はしかるべき教科書等に譲る．ここでは各々の用語を簡単に解説する．

1.1　代数多様体

代数多様体とは，大まかに言うと代数方程式の共通零点で定義された「図形」である．

Definition 1.1. 被約かつ既約で分離的な代数的スキームを代数多様体という．

例（反例）

xy 平面上で $x^2 = 0$ で定義されるスキームは y 軸を 2 重に数えているので被約でない．また，$xy = 0$ は $x = 0$ と $y = 0$ の和集合なので，既約でない．

射影空間に閉部分スキームとして埋め込めるものを射影スキームという．代数多様体であるような射影スキームを射影多様体という．本講義では断らない限りこれが対象である．

分離性については詳細を省略する．直観的には Hausdorff 空間の分離性のスキーム版である．なお，射影的な代数的スキームであれば分離性を持つ．

1.2　幾何学

ユークリッド幾何学は，合同変換，相似変換によって不変である図形の性質を調べる学問といえる．この文脈で言うと，射影幾何学は射影変換によって不変である図形の性質を調べる学問であり，代数幾何学は双有理変換によって不変である図形（代数多様体）の性質を調べようとする学問である．そこでは，双有理変換による同値類，すなわち双有理同値という概念が重要になる．

1.3　双有理同値

双有理変換とは，Zariski 開集合の上の正則写像で 1：1 になっているような変換である．その他の部分では 曲線 ：点 のように，多：1 になっている．「多」といっても有限集合であったり，曲線のように無限集合であったりする．双有理変換で移りあえる多様体同士は双有理同値であるという．双有理同値であれば，例えば関数体が同型になるなどの性質がある．

変換の例

特異点解消，フリップ（§2.8，§3.4 で具体例を挙げる）.

（多重）種数，小平次元，不正則数などは双有理変換を施しても不変である．これを 双有理不変量 という.

1.4　代数幾何学究極の目標

「究極」であり，現実的に可能かは別であるが，やはり代数多様体を完全に分類することが最終目標である.

上述の通り一つの双有理同値類に不変な性質を調べ，また他の双有理同値類とどう違うか調べる.

例

１次元の代数多様体には次のようなものがあることが知られている．g を種数とする.

g	0	1	≥ 2
名称	有理曲線 $\simeq \mathbb{P}^1$	楕円曲線	超楕円曲線

2　極小モデルプログラムへの準備

ここから本題である．３次元の話に入る前に，関連する話題を紹介する．

これまで述べた通り，代数多様体の性質を調べたい．代数多様体の分類のための大きな武器が極小モデルプログラムである．一般の意味での「プログラム」，各次元での「極小モデル」等を述べ，最後に特異点ついて考察する．

2.1　極小モデル

双有理同値類の中から，何らかの良い性質を持った「代表」を選ぶことを考えよう．代表を調べれば，その双有理同値類のことがわかる．では，どのように「良い性質」を選べばよいか.

例

滑らかな（特異点のない）構造．非特異多様体という．

これは非常によい性質であるし，標数０であれば任意の代数多様体はいずれかの非特異多様体と双有理同値である (§2.8)．非特異多様体を扱うことは代数幾何学の基本と言える．

しかし１次元まではこれで良いが，２次元で既に相当複雑になる上，３次元では不都合が生じる．このことを §2.3 で解説する．

Definition 2.1. 非特異代数曲面上の曲線 C は $\mathbb{P}^1$ に同型で自己交点数が -1 であるとき，<u>第１種例外曲線</u> ((-1)-曲線) という．

例

非特異代数曲面の１点を中心とするブローアップの例外因子は，(-1)-曲線である．

Definition 2.2 (相対的極小モデル). 射影的非特異代数曲面 S は，(-1)-曲線を持たない時，<u>相対的極小モデル</u>という．

Remark 2.3. 上の定義に対し，§3.1，Definition 3.2 による定義は絶対的極小モデルという．

2.2　プログラム

次のような装置を考える．ブラックボックスがあり，何か入れるとそれに応じて何か出てくる．

$$\text{入力} \longrightarrow \boxed{\text{BLACK BOX}} \longrightarrow \text{出力}$$

例えばパソコンは，キー入力をすると画面に出力される．或いはプリンタに出力される．パソコンの内部で，コンピュータのプログラムが作動しているからである．このように何らかの入力に対しそれに応じた出力があるものをまとめて「プログラム」と呼ぶ．もちろん最初はコンピュータ用語であったが，数学にも取り入れられるようになった．

２次元の極小モデルプログラムを上の図式的に書くと次のようになる ([Ma] より)：

$$\begin{array}{ccc} & \text{非特異} & \\ & \text{射影曲面} & \\ & \downarrow & \\ & \boxed{\text{MMP}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{極小曲面} & & \text{線織曲面} \end{array}$$

高次元の場合も基本は同じである．次節でブラックボックス $\boxed{\text{MMP}}$ の中身を見てみよう．

2.3　1 次元，2 次元の場合

序章で見たように，1 次元の場合，全ての代数曲線はそれぞれがいずれかのただ一つの非特異曲線と双有理同値である．特異点解消も正規化で得られる．２次元からやや複雑になってくる．正規曲面でも特異点がある．

正規代数多様体の上の余次元１の部分多様体を素因子という．相異なる素因子の $\mathbb{Z}$ 係数の一次結合を Weil 因子 或いは単に 因子 という．因子が局所方程式を持つとき Cartier 因子 という．

Definition 2.4. 非特異代数多様体 X 上の因子で，標準層に伴うものを標準因子 といい，K_X であらわす．

X が正規多様体なら特異点の集合は余次元２なので，非特異の部分を延長して K_X が定義出来る．

さて，ブラックボックスの中身，２次元の極小モデルプログラムを提示しよう．nef の定義は後述 §3.1 の Definition 3.1 を参照．

Definition 2.5. S_0 を非特異正規射影曲面とする．まず $S := S_0$ を入力とする．

(I) K_S は nef であるか？ そうであれば，極小モデル S を出力する．

(II) K_S が nef でなければ，収縮写像 $\phi : S \longrightarrow T$ をとる．

(i) もし $\dim S > \dim T$ ならば，森ファイバー空間を出力する．

(ii) そうでなければ，T を S の代わりに入力し，(I) へ進む．

このプログラムは，正標数でも機能する．

2.4 特異点とその「悪さ」

ここで，今まで断り無しに用いた特異点について述べておこう．直観的には尖っている点とか紙の折れ目を想像すればよい．超曲面特異点の場合，次のように定義される：

Definition 2.6. $f \in k[x_1, \cdots x_n]$ で定まる超曲面が点 $P = (p_1, \cdots, p_n)$ で特異点 を持つとは

$$f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

であるときをいう．

特異点の「悪さ」を測る方法はいくつかある．その中から，食い違い係数と指数を紹介する．

X は正規多様体，$\Delta = \sum d_i D_i$ は X 上の因子とする．Δ は $0 \leq d_i \leq 1$, $d_i \in \mathbb{Q}$ であるとき $\mathbb{Q}$-境界 という．

Definition 2.7. $f : Y \longrightarrow X$ を正規多様体 Y からの固有双有理射とする．

$$K_Y + \Delta' = f^*(K_X + \Delta) + \sum_E a(E, \Delta)E$$

と書く．ここで $\Delta' = f_*^{-1}\Delta$ は $\mathbb{Q}$-境界 Δ の厳密変換である．食い違い係数を

$$\mathrm{discrep}(X, \Delta) := \inf_E \{a(E, \Delta) \mid E \text{ は } X \text{ 上の例外因子 }\}$$

と定める．

Definition 2.8. 組 (X, Δ) は

$$\mathrm{discrep}(S, \Delta) \left\{ \begin{array}{c} > 0 \\ \geq 0 \\ > -1 \\ \geq -1 \end{array} \right\} \text{であるとき} \left\{ \begin{array}{c} \text{端末} \\ \text{標準} \\ \text{純対数的端末} \\ \text{対数的標準} \end{array} \right\} \text{特異点であるという．}$$

Definition 2.9. D を X 上の $\mathbb{Q}$-Cartier 因子とする．D の 指数 とは rD が Cartier 因子になるような最小の整数 r のことである．index D と書く．index $D = 1$ であることと D が Cartier 因子であることは同値．X の指数を index K_X で定める．

Definition 2.10. $(X, 0)$ は 0 において X の指数が r であるとき，r-Gorenstein 特異点 という．特に，1-Gorenstein 特異点のことを単に Gorenstein 特異点 という．

ここでは，食い違い係数で解る特異点を紹介しよう．

Fact 2.11. $(S, 0)$ を体 k 上の２次元正規特異点の芽とする．p を k の標数とする．以下が成り立つことが知られている．

(1) 任意の p について，S が端末特異点を持つ $\Longleftrightarrow$ S は非特異．

(2) 任意の p について，S が標準特異点を持つ $\Longleftrightarrow$ S が有理２重点を持つ．

(3) $p = 0$ のとき，S が対数的端末特異点を持つ $\Longleftrightarrow$ S が商特異点を持つ．$p > 0$ のときはそうとは限らない．

(4) $p = 0$ のとき，S が対数的端末特異点を持つ $\Longleftrightarrow$ S が単純楕円型特異点，カスプ特異点あるいはそれらの商．

2.5 有理２重点

この節と次節 §2.6 までは体 $k = \mathbb{C}$ とする．

２次元では有理２重点は自明でない最初の特異点である．極小モデルとの関連も深く，多くの研究がある．古典的に定義方程式の標準形が知られている：

Fact 2.12. ２次元の有理２重点は，以下の５つの標準形で表される．

A_n : $z^2 + x^2 + y^{n+1} \quad (n \geq 1)$

D_n : $z^2 + x^2 y + y^{n-1} \quad (n \geq 4)$

E_6 : $z^2 + x^3 + y^4$

E_7 : $z^2 + x^3 + xy^3$

E_8 : $z^2 + x^3 + y^5$

Fact 2.13. 以下は同値である．

(1) 有理２重点である．

(2) 標準特異点である．

(3) Gorenstein かつ商特異点である．

(4) $SL(2, \mathbb{C})$ の小型有限部分群による商である．

(5) 単純特異点である．

(6) 最小特異点解消の既約例外因子が全て (-2)-曲線である．

(6) は Du Val による．このため有理２重点を Du Val 特異点 ともいう．上の６つ以外にも多数の特徴付けがある．

2.6　３次元の特異点

ここでは，極小モデルプログラム内で発生する特異点について述べる．

Definition 2.14. $(X,0)$ を３次元正規特異点の芽とする．一般超平面切断 $0 \in H \subset X$ が有理２重点であるとき，X は 複合 Du Val 特異点 (cDV特異点) を持つという．

Fact 2.15. $(X,0)$ を３次元の Gorenstein 特異点とする．以下は同値である．

(1) $(X,0)$ は端末特異点.

(2) $(X,0)$ は孤立 cDV 特異点.

Fact 2.16. $(X,0)$ を３次元 Gorenstein 標準特異点とする．このとき一般超平面切断 $(H,0)$ は以下のいずれかである：

(1) $(H,0)$ は有理２重点.

(2) $(H,0)$ は楕円特異点.

2.7　指数１被覆

前節 §2.6 で述べたとおり，指数が 1 になると，いろいろなことが解る．このために必要な道具が指数１被覆である．

Definition 2.17. $\mathbb{Q}$-分解的な X とその上の境界との対 (X,B) は指数が r とする．$P \in B$ の芽で考える．関数体 $L = k(X)$ の元 φ で $\mathrm{div}\ \varphi = r(K_X + B)$ をみたすものをとる．$L(\sqrt[r]{\varphi})$ の中での正規化写像

$$\pi : \widetilde{X}_\varphi \longrightarrow X$$

を φ に伴う 指数１被覆 という．

Remark 2.18. 標数 0 のときは $\widetilde{X}_\varphi$ は φ の取り方に依らない．このため，単に $\widetilde{X}$ と書く．

標準境界付きについては §5 で具体例を挙げる．

Fact 2.19. 指数１被覆 π について，次が成り立つ．$\widetilde{B}$ は $K_{\widetilde{X}} + \widetilde{B} = \pi^*(K_X + B)$ をみたす $\widetilde{X}$ 上の $\mathbb{Q}$-因子とする．
$(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ が標準特異点 $\Longleftrightarrow$ (X,B) が標準特異点.
$(\widetilde{X}, \widetilde{B})$ が純対数的端末特異点 $\Longleftrightarrow$ (X,B) が純対数的端末特異点.

すなわち指数１被覆は特異点の性質を悪くしない．

2.8 特異点解消定理

$\mathbb{C}$ 上では広中平祐氏の深い結果がある．

特異点解消定理

標数 0 の代数的閉体上の任意の代数多様体は，非特異多様体と双有理同値である．

例（A_1 型有理２重点の特異点解消）

点のブローアップの具体例を計算してみよう．特異点は有理 2 重点 A_1 型である．$X = (x^2 + y^2 + z^2 = 0) \subset \mathbb{A}^3 =: U$ とする．$\mu : V \longrightarrow U$ を $(x_1, y_1, z_1) \mapsto (x = x_1, y = x_1 y_1, z = x_1 z_1)$ と表示すると

$$x_1^2(1 + y_1^2 + z_1^2) = 0 \ \subset \mathbb{A}^3 =: V$$

であるから非特異の $Y := (1 + y_1^2 + z_1^2 = 0)$ が得られる．V 以外のアファイン空間でも全く同様である．

食い違い係数を見てみよう．$Y = \mu_*^{-1} X = \mu^* X - 2E$ と $K_V = \mu^* K_U + 2E$ より

$$K_Y = \mu^* K_X$$

が得られ，食い違い係数は 0 であることがわかる．

3　３次元極小モデルプログラム

この章は３次元を考える．次元があがる分，２次元と比べて修正が必要な点が生じる．例えば入力が非特異でも，プログラムの過程（収縮写像）で特異点が発生する場合がある．他に収縮写像も複雑になったり，フリップが現れたりする．

3.1　３次元極小モデルと特異点

上記の通り特異点に関する問題は，非特異多様体を入力しても，プログラムの過程で特異点が発生する場合があるというところにある．ここで発想の転換が必要であった．完全な非特異は無理なので，比較的たちの良い特異点を持つことを許すというアイディアが出された（M.Reid，森）．それによると極小モデルの定義として以下のようなものが用いられる．

Definition 3.1. K_X が <u>nef</u> (ネフ，numerically effective= 数値的半正) であるとは，任意の X 上の曲線 C との交点数が 0 以上であるときをいう．

Definition 3.2. 射影的代数多様体 X が <u>極小モデル</u> であるとは，X が高々端末特異点を持ち，K_X が nef であるときをいう．

２次元では端末特異点が非特異点と同値であることに注意しよう (§2.5, Fact 2.11)．すなわち上の定義は２次元にも適合する．

3.2　プログラムの内容

Definition 3.3 (３次元極小モデルプログラム). X_0 を３次元非特異正規射影代数多様体とする．まず $X := X_0$ を入力とする．

(I) K_X は nef であるか？ そうであれば，極小モデル X を出力する．

(II) K_X が nef でなければ，基本収縮写像 $\phi : X \longrightarrow Y$ をとる．

- (i) もし $\dim X > \dim Y$ ならば，森ファイバー空間を出力する．
- (ii) ϕ が因子収縮写像であれば，Y を X の代わりに入力し，(I) へ進む．
- (iii) ϕ が小さな収縮写像でそのフリップ $\phi^+ : X^+ \longrightarrow Y$ が存在すれば，X^+ を X の代わりに入力し，(I) へ進む．

一見して (iii) 以外は２次元の場合とほぼ同じであることがわかる．３次元ではこの部分が大きな問題となる．フリップについては，この後の §3.4 を参照．

3.3 いくつかの重要な定理

３次元の極小モデルプログラムが機能するために必要な定理を，解説無しで並べる．

非消滅定理

(X, D) は正規射影多様体と $\mathbb{R}$ 因子の組で純対数的端末特異点になるものとする．X 上の Cartier 因子 L と正数 m_0 が存在し，任意の $m \geq m_0$ に対し $mL - (K_X + D)$ が nef かつ巨大とする．このとき，正数 m_1 が存在し，任意の整数 $m \geq m_1$ に対し

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mL + \lceil -D \rceil)) \neq 0$$

が成り立つ．

固定点自由化定理

(X, D)，L，m_0，m は上と同じとする．このとき，正数 m_1 が存在し，任意の整数 $m \geq m_1$ に対し $|mL|$ が自由になる．

収縮定理

(X, D) は上と同じとする．$\overline{NE}(X)$ の端錘面を F とする．このとき，以下を満たす全射正則写像 $\phi : X \longrightarrow Y$ が同型を除きただ一つ存在する：

(1)Y は正規射影多様体

(2)ϕ の全てのファイバーは連結

(3) 任意の X 上の曲線 C に対し，$\phi(C)$ が Y 上の１点になるための必要十分条件は $[C] \in F$

錘定理

(X, D) は正規射影多様体と $\mathbb{Q}$ 因子の組で純対数的端末特異点になるものとする．射影的で支配的な射 $f : X \longrightarrow S$ で連結なファイバーを持つものとし，H は f-豊富な Cartier 因子とする．このとき任意の正数 ϵ に対し有限個の端射線 $R_1, \cdots, R_m$ が存在して $\overline{NE}(X/S)$ が

$$\overline{NE}(X/S) = \overline{NE}(X/S)_{K_X + D + \epsilon H \geq 0} + \sum_{j=1}^{m} R_j$$

と書ける．

論理的順序は以下の通りである：

非消滅定理 $\Longrightarrow$ 固定点自由化定理 $\Longrightarrow$ 収縮定理 $\Longrightarrow$ 錘定理

3.4 フリップ

Definition 3.4. $f : X \longrightarrow Y$ を固有双有理射で f の例外集合が X の中で余次元 2 であるとする．K_X は $\mathbb{Q}$-Cartier 因子で $-K_X$ が f-豊富とする．以下を満たすような固有双有理射 $f^+ : X^+ \longrightarrow Y$ と代数多様体 X^+ をフリップという：

(1) K_{X^+} は $\mathbb{Q}$-Cartier 因子

(2) K_{X^+} は f^+-豊富

(3) f^+ の例外集合が X^+ の中で余次元 2

定義からもわかるとおり，3 次元以上ではフリップが現れる．
以下の事実によりフリップによって特異点が悪くなることはない．

Fact 3.5. X が端末特異点のみ持つとき，X^+ も端末特異点のみ持つ．

以下の事実により,（フリップが存在すれば）極小モデルプログラムはきちんと終了することがわかる．

Fact 3.6. フリップの無限列

$$X_1 \xrightarrow{\phi_1} Y_1 \xleftarrow{\phi_1^+} X_2 \xrightarrow{\phi_2} Y_2 \xleftarrow{\phi_2^+} X_3 \longrightarrow \cdots$$

は存在しない．

例（フロップ）

フロップは，フリップの特殊な例である．$U := \mathbb{C}[x, y, z, w]$ とし $X := (xy + zw = 0) \subset U$ を考える．$S_1 = (x = 0, z = 0)$ に沿ってのブローアップを $\mu_1 : X_1 \longrightarrow X$，$S_2 = (x = 0, w = 0)$ に沿ってのブローアップを $\mu_2 : X_2 \longrightarrow X$ とおく．それぞれの例外集合を E_i とすると，これらは $\mathbb{P}^1$ に同型であるから X_i の中で余次元 2 になっている．標準因子について $K_{X_i} = \mu_i^* K_X$ が成り立つ．よって

$$X_1 \xrightarrow{\mu_1} X \xleftarrow{\mu_2} X_2$$

はフロップになっている．

3.5 森氏，川又氏の仕事

川又氏は有理性定理，錘定理などを証明．森氏はフリップの存在を証明し，これにより極小モデルプログラムが機能し，３次元極小モデルが存在することが最終的に示された．この功績により，1990 年にフィールズ賞を受賞した．

ここでひとつの物語を紹介しよう．出典は講談社ブルーバックス「数学・まだこんなことがわからない」吉永良正著である．

むかし，あるところに未開のジャングルがありました．ジャングルには色々面白い動物たちがいるらしいのですが，さっぱりわからず，探検家たちは途方に暮れていました．ジャングルには伝説がありました．奥地へ行けば，ジャングルのあらゆる動物を飼っている村があるらしい，と．その村へ行けば，ジャングルの動物がわかる．しかし本当にそんな夢のような村があるのか？あったとしても探検隊はそこへ到達出来るのか？　長いことわからないままでした．

あるとき，ついに報告されました.「村は確かにある．到達出来る」と．

今ではいろいろな探検家が村の動物たちに会えます．

ジャングルの動物……３次元代数多様体，村の動物……極小モデル,「村はある」報告……フリップの存在証明，村への行き方……極小モデルプログラム，探検家たち……代数幾何学者

4　極小モデルプログラムの拡張

３次元で $\mathbb{C}$ 上の場合は解決された．プログラムが機能してくれることで３次元代数多様体の研究は飛躍的に向上した．続いてはプログラムの拡張を考えることになる．ここで紹介する以外にも相対化，解析的多様体用など様々ある．

4.1　対数的極小モデルプログラム

既に幾度か出てきたが，代数多様体とその上の因子との組 (X, D) を考える．因子の条件は $D = \sum d_i D_i$ と書いた時 $0 \leq d_i \leq 1$，$d_i \in \mathbb{R}$ である ($\mathbb{R}$-境界という)．フリップの定義 (§3.4，Definition 3.4) のところの K_X を $K_X + D$ におきかえて議論が出来る．すなわち (X, D) が対数的端末特異点のみ持つとし，対数的極小モデルプログラムを走らせることが出来る．

4.2　半安定極小モデルプログラム

３次元の多様体を，曲線上の曲面族と見なす．半安定とは曲面の退化が複雑すぎないという条件である．これによりいくつかの議論がより明瞭になる．例えば錘定理は２次元の対数的組の結果を用いて容易に示せる．

Fact 4.1 ([KM], Corolary 7.42). (X, B) は３次元 klt 対とし，B は有効とする．$f : X \longrightarrow Y$ は $K_X + B$ に関するフリップ収縮とする．非特異曲線への平坦射 $s : Y \longrightarrow C$ をうまくとって $s \circ f$ により対数的端末特異点になったとする．このとき，f はフリップを持つ．

半安定フリップは特殊なクラスではあるが，多くの状況で自然に現れ，かついくつかの応用ではこれで十分である．また，３次元フリップの分類の結果（Kollár，森 1992），ほとんど全てのフリップが半安定であることが知られている．

4.3　高次元への拡張

３次元の次は４次元ということになるが，やはり最後の問題はフリップの存在である．森氏による３次元フリップの存在証明には，特異点の分類が関わってくる．これは４次元以上では非常に困難であり，従ってそのままの手法での高次元化は行き詰まる．そこへ特異点の分類に依らない別証明が 1992 年，V.V.Shokurov 氏によって与えられた．厳密に言うとこの証明は３次元対数的フリップの存在証明 (§4.1) である．それを境界のない場合に帰着させることで別証明になっている．

2000年，やはり Shokurov 氏によって4次元のフリップの存在が証明された．これにより今後の代数多様体の研究は，大きく高次元へと向かうことになる．

4.4 正標数への拡張

先に述べたとおり，2次元までは標数に依らない議論である．正標数3次元以上でも極小モデルプログラムは機能すると信じられている．これまで固定点自由化定理やある種の収縮定理などが知られている．しかし，フリップなどはほとんど未解明である．小平消滅定理に反例があり，また4次元以上では特異点解消がいまだ得られていないなど困難が多いため，標数0に比べ遅れている．

現在では川又氏による標数5以上の3次元半安定極小モデルプログラムのみ知られている．以下は [Ka2] の引き写しである．

A を Dedekind 環，$B =\mathrm{Spec}A$ とする．$f : X \longrightarrow B$ を3次元の正規スキーム X からの準射影的平坦射あるいはそのような射の完備化とする．f は次の条件が満たされる時 半安定 であるという：

(1) 一般ファイバー X_η が非特異.

(2) X は正則で，閉点 $s \in B$ のファイバー X_s は幾何学的被約な正規交差因子.

(3) 任意の閉ファイバー X_s の既約成分は幾何学的既約で非特異.

なお，以下の条件を仮定する.

Assumption

(1) 一般ファイバー X_η は非特異.

(2) 閉点 $s \in B$ のファイバー X_s は幾何学的被約で， 条件 (S_2) を満たす. ここで (S_t) は $\mathrm{depth}(\mathcal{O}_x) \geq \min\ (t, \dim\ (\mathcal{O}_x))$ が全ての点 x で成り立つという条件である.

(3) 任意の閉ファイバー X_s の既約成分 S_i は幾何学的既約で，幾何学的に正規な X 上の $\mathbb{Q}$-Cartier 因子.

(4) $X\backslash\Sigma$ が正則で X が Σ でたかだか端末特異点を持つような X の閉点の有限集合 Σ が存在.

(5) 任意の閉ファイバー X_s は $X\backslash\Sigma$ 上の正規交差因子で，組 (X, X_s) は Σ でたかだか端末特異点を持つ.

(6) 任意の整数 m に対し $\omega_{X/B}^{[m]} = \mathcal{O}_X(mK_{X/B})$ は条件 (S_3) を満たす.

条件 (6) は標数０では自然に成り立つが，正標数では知られていない．

この条件のもとで川又氏は錘定理を証明した．更にある種の弱消滅定理を用いて収縮定理を証明した．

残るはフリップの問題である．ここでの <u>フリップ</u> とは図式

$$X \xrightarrow{\phi} Z \xleftarrow{\phi^+} X^+$$

で以下を満たすものである：

(1) $\phi : X \longrightarrow Z$ と $\phi^+ : X^+ \longrightarrow Z$ は射影的双有理射.

(2) Z は平坦準射影的射 $g : Z \longrightarrow B$ を伴う正規スキーム，あるいはそのようなスキームの完備化から得られるものとし，これらによる射 $f : X \longrightarrow B$ と $f^+ : X^+ \longrightarrow B$ は上記 Assumption の条件を満たす.

(3) $\phi_\eta : X_\eta \longrightarrow Z_\eta$ と $\phi^+_\eta : X^+_\eta \longrightarrow Z_\eta$ は同型.

(4) ϕ (resp.ϕ^+) は f (resp.f^+) の閉ファイバー上の有限個の曲線のみ収縮する.

(5) $-K_{X/B}$ は ϕ-豊富で $K_{X^+/B}$ は ϕ^+-豊富.

標数が５以上の時上記のフリップが存在することが川又氏自身によって証明され，３次元半安定極小モデルプログラムが機能することが示された.

Fact 4.2 ([Ka2], Theorem 5.5). 標数 p が 5 以上の時，上の条件を満たす ϕ のフリップが存在する.

標数が 2 または 3 の場合，２次元の指数１被覆がうまく機能しない（川又氏が反例を構成している）．正標数の指数１被覆は，$\mathbb{C}$ 上に比べて非常に奇妙な振る舞いをする．これによりプログラム内で発生する特異点の分類が出来ず，フリップの存在が言えない．従って３次元半安定極小モデルプログラムは標数が 2 または 3 の場合は未解決である.

なお，一見非常に抽象的な正標数の代数幾何学でも役に立つらしい．極小モデル理論ではないが有限体上の代数曲線論は符号理論への応用があり，ネット社会での暗号化という重要な場面で貢献している．数学は，どの分野がいつどのように役に立つかは全く見当が付かないことが多い.

4.5　正標数の特異点

標数 0 との違いを，２次元の例でみる．例えば，標数３の有理２重点の定義方程式は次のようになる.

$\mathrm{A}_n:\ z^2+x^2+y^{n+1}\quad (n\geq 1)$

$\mathrm{D}_n:\ z^2+x^2y+y^{n-1}\quad (n\geq 4)$

$\mathrm{E}_6^0:\ z^2+x^3+y^4$

$\mathrm{E}_6^1:\ z^2+x^3+y^4+x^2y^2$

$\mathrm{E}_7^0:\ z^2+x^3+xy^3$

$\mathrm{E}_7^1:\ z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$

$\mathrm{E}_8^0:\ z^2+x^3+y^5$

$\mathrm{E}_8^1:\ z^2+x^3+y^5+x^2y^3$

$\mathrm{E}_8^2:\ z^2+x^3+y^5+x^2y^2$

正標数では特異点解消定理が４次元以上では未解決である．他にも２次元の商特異点や対数的標準特異点など，標数０では古典的な事実でも，正標数では詳しく知られていないことが多い．

なお，§2.4, Fact 2.11 で述べたとおり，２次元であれば正標数でも標準特異点と有理２重点は同値である．

5　正標数の指数１被覆

ここでは筆者の結果を紹介する．出典は

On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic
(正標数における２次元純対数的端末特異点の指数１被覆について)

Mathematische Zeitshrift 247 に採録された論文 ([A1]) である．

5.1　２次元標準境界付指数１被覆

指数１被覆をとることでどのくらい性質が良くなるか？　これも正標数ではあまり多くのことは知られていない．この点についての一つの定理を証明した．設定は２次元である．§2.4，Definition 2.6 のとおり特異点は性質の良い方から端末特異点，標準特異点，対数的端末特異点，対数的標準特異点と分類されている．(S,Δ) が指数 r の純対数的端末特異点のとき，指数１被覆をとると，標数が 3 以上ならば標準特異点にできるが，標数が 2 の場合，より悪い特異点も出る．しかしそうなるものは完全に分類出来る，というのが概要である．

k を代数的閉体，p をその標数とする．S を k 上の正規曲面，$\Delta=\sum d_iD_i$ を標準境界，すなわち任意の i について $d_i=1-1/b_i,\ b_i=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ と書けるものする．以下 (S,Δ) の芽で考える．(S,Δ) の指数を r する．L を S 上の関数体，φ を L の元で $\operatorname{div}(\varphi)=r(K_S+\Delta)$ を満たすものとする．拡大体 $L(\sqrt[r]{\varphi})$ における正規化 $\pi:\widetilde{S}_\varphi\longrightarrow S$ を φ に伴う指数１被覆とする．$\lfloor\Delta\rfloor$ を Δ の被約部分とする．

Question 5.1. k と S を上記のとおりとする．Δ を標準境界で (S,Δ) が指数 r の純対数的端末特異点であるものとする．φ を上と同じとする．φ を充分一般に選び，$(\widetilde{S}_\varphi,\pi^*\lfloor\Delta\rfloor)$ を標準特異点にすることができるか．そうでないならば，反例を分類せよ．

具体的に計算して例を挙げてみよう．標数は２とする．

例

$R=k\{x,y\}$ を $k[x,y]_{(x,y)}$ の Hensel 化，$S=$Spec R, $\Delta=\dfrac{1}{2}\mathrm{div}\ (x^2+y^3)$ とする (このとき (S,Δ) は 指数が２で，純対数的端末特異点になっている)．$L=k(S)$ とすると $\mathrm{div}\varphi=2(K_S+\Delta)$ で，$L(\sqrt{\varphi})=L\bigl(\sqrt{u\theta^2(x^2+y^3)}\bigr)$, $\mathrm{div}\ \theta=K_S$, $u\in k\{x,y\}^\times$ と書ける．よって $\widetilde{S}_\varphi$ は $z^2=u(x^2+y^3)$ の正規化となる．

Case 1. $u = 1 + x$

$z^2 = (1+x)(x^2+y^3)$ で，$z^2 + x^2 = x^3 + (1+x)y^3$ と $z^2 + x^2 = (z+x)^2$ により，$z^2 = x^3 + y^3$ と書ける．$z^2 = x^3 + xy^2$ と変形でき，有理 2 重点の D_4^0 型である．

Case 2. $u = 1 + x^2$

$u = (1+x)^2$ なので $\sqrt{u}$ が存在する．$\dfrac{z}{\sqrt{u}} \mapsto z$ により $z^2 = x^3$ を得る．これを正規化すると非特異である．平方根が存在すれば全く同じ計算になる．すなわち，この例は標数が 2 以外では全て非特異である．

Case 3. $u = 1 + x^3$

Case 1 と同様に計算すると，$z^2 = x^5 + y^3$ となる．有理 2 重点で E_8^0 型である．

Case 4. $u = 1 + x^5$

$z^2 = x^7 + y^3$ となる．これは標準特異点より悪い．

このように，正標数では φ の取り方によって指数 1 被覆が変化する．

5.2 主定理

以下記号を設定する．$R = k\{x,y\}$ を $k[x,y]_{(x,y)}$ の Hensel 化，$\mathfrak{m}_0$ をその極大イデアルとする．$\Delta = \sum(1 - 1/b_i)D_i$ とし f_i を D_i の方程式とする．$d : \mathcal{O}_S \longrightarrow \Omega^1_{S,0}$ を微分写像，$ev : \Omega^1_{S,0} \longrightarrow \Omega^1_{S,0}/\mathfrak{m}_0\Omega^1_{S,0}$ を商写像とする．r を (S,Δ) の指数，$u = \varphi/(\theta^r \prod f_i^{e_i})$ とおく．ここで $\mathrm{div}(\theta) = K_S$，$e_i = r \cdot (1 - 1/b_i)$ である．集合 $\mathcal{C} := \{ev(du) \in \Omega^1_{S,0}/\mathfrak{m}_0\Omega^1_{S,0} \mid \widetilde{S}_\varphi$ は標準特異点を持つ $\}$ を定義する．

Theorem 5.2 (主定理). k を標数 p の代数的閉体，S を非特異曲面，Δ を標準境界で (S,Δ) が指数 r の純対数的端末特異点であるものとする．$\pi : \widetilde{S}_\varphi \longrightarrow S$ を φ に伴う指数 1 被覆とする．$p \geq 3$ ならば $\mathcal{C}$ は空でない Zariski 開集合を含む．$p = 2$ ならば，$\mathcal{C}$ が $\Omega^1_{S,0}/\mathfrak{m}_0\Omega^1_{S,0}$ の中で稠密でない為の必要十分条件は，Δ の標準形が反例リストの中の一つになっていることである．

反例リストは以下の通りである：$\dfrac{3}{4}\mathrm{div}(x^2+y^3)$，$\dfrac{1}{2}D + \dfrac{2b}{2b+1}P_1$ $(b \geq 2)$，$\dfrac{1}{2}P_2 + \dfrac{2b}{2b+1}L_1$ $(b \geq 3)$，$\dfrac{1}{2}C_i + \dfrac{2b}{2b+1}L_2$ $(b \geq 1, i = 1,2)$，$\dfrac{2}{3}P_2 + \dfrac{3}{4}L_1$，where $L_1 = \mathrm{div}(x), L_2 = \mathrm{div}(y), P_m = \mathrm{div}(x + y^m), D = \mathrm{div}(xy)$，$C_1 = \mathrm{div}(x^2 + y^{2m+1} + M)$ and $C_2 = \mathrm{div}(x^2 + xy^{2m+1})$, with $m \geq 1$ and $M = 0$ or $M = xy^{2m-r}(m - 1 \geq r \geq 1)$.

この定理により，S が非特異であれば任意の標数で Question 5.1 は解決された．現在の段階で未解決であるのは，S に特異点が存在する場合である．我々はこの定理が正標数における対数的極小モデル予想の解決に貢献出来ると期待している．

証明の概略は以下の通りである．

Fact 5.3 ([A1], Lemma 2.5). S, Δ を上記の通りとする．(S, Δ) が純対数的端末特異点のとき，境界 Δ の台はたかだか単純特異点を持つ．

これにより (S, Δ) が純対数的端末特異点となる境界 Δ の分類が可能になる．具体的に Δ の標準形のリストを構成した．

続いて上記の例のように $\widetilde{S}_\varphi$ が有理２重点になるかどうかを各 Δ について調べた．これにより反例となるものについての分類も同時に可能となった．

例として標数２，$\Delta = \dfrac{1}{2}D$ の場合の結果を表示する:

Equation of D	Condition of u	RDP
$x^2 + xy^m$	$\partial u/\partial y(0) \neq 0$	$\mathrm{A}_t, \mathrm{D}^0_{2t}$
$x^2 + y^{2m+1}$	$\partial u/\partial y(0) \neq 0$	D^0_{2t}
$x^2 + y^{2m+1} + xy^{2m-r}$	$\partial u/\partial y(0) \neq 0$	D^0_{2t}
$x^2y + xy^m$	(any unit)	D^0_{2m}
$x^2y + y^{2m}$	$\partial u/\partial y(0) \neq 0$	D^0_{2t}
$x^2y + y^{2m} + xy^{2m-r}$	(any unit)	D^0_{2t}
$x^3 + y^4$	$\partial u/\partial y(0) \neq 0$	E^0_8
$x^3 + y^4 + xy^3$	$\partial u/\partial x(0) \neq 0$	E^0_7
$x^3 + xy^3$	(any unit)	E^0_7
$x^3 + y^5$	(any unit)	E^0_8

t は m, r に無関係である．

Remark 5.4. D は標数２の１次元単純特異点に一致する．

5.3 追記

この講義の後，標数２の反例が特異点としてどのくらい悪いかに関して結果が出た ([A2])．上記では標準特異点より悪いことのみ知られていたが，新たにそれらが全て対数的標準特異点より悪いことが判明した．

Theorem 5.5. k の標数は２とする．Δ は標準形が Theorem 5.2 の反例リストの中の一つになっているとする．このとき $\Omega^1_{S,0}/\mathfrak{m}_0\Omega^1_{S,0}$ の空でない Zariski 開集合 U で $ev(du) \in U$ を満たすものが存在し，それに伴う φ について $\widetilde{S}_\varphi$ は対数的標準特異点より悪い．

Lemma 5.6 ([A2], Lemma 3.1). 上記の仮定のもとで，$\widetilde{S}_\varphi$ の方程式の標準形は以下の通りである*:*

$Z^2+X^3+u_1XY^{l_1}+u_2Y^{l_2}=0$ または $Z^2+X^3+u_1Y^4Z+u_2XY^5+Y^7=0$

ここで $u_i \in k\{X,Y,Z\}^\times \cup \{0\}$*,* 少なくとも一つの u_i は 0 でなく $l_1 \geq 5$*,* $l_2 \geq 7$*,* また l_2 は奇数である*.*

Lemma 5.7 ([A2], Lemma 3.2). Lemma 5.6 の 2 つの方程式で表される特異点は，対数的標準特異点より悪い.

これは食い違い係数を直接計算でき，-1 より小さくなることが判る.

Remark 5.8. ちょうど対数的標準特異点になるものは存在しない.

参考文献

[A1] K.Arima, *On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 247 (2004), pp432–440

[A2] K.Arima, *On exceptions of index one covers of two-dimensional plt singularities in characteristic two*

[Ar] M.Artin, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, ed. by W.L.Baily Jr. and T.Shioda, pp11–22

[Hi] H.Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*, Annals of Math. 79 (1964), pp109–326

[GK] G.-M.Greuel, H.Kröning, *Simple singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 203 (1990), pp339–354

[Ka1] Y.Kawamata, *Index 1 covers of log terminal surface singularities*, Journal of Algebraic Geometry 8 (1999), pp519–527

[Ka2] Y.Kawamata, *Semistable minimal models of 3-folds in positive or mixed characteristic*, Journal of Algebraic Geometry 3 (1994), pp463–491

[KM] Y.Kollár, S.Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge University Press (1998)

[Ma] K.Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer(2002)

[Mo] S.Mori, *Flip theorem and the existence of minimal modes for 3-folds*, Journal of American Mathematical Society 1 (1988), pp117–253

[Sh] V.V.Shokurov, *3-fold log flips*, Izv. A.N. Ser.Mat., 56 (1992), pp105–203

[Is] 石井志保子, 特異点入門, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997)

[Ka3] 川又雄二郎, 代数多様体論, 共立出版 (1997)

[Mi] 宮西正宜, 代数幾何学, 裳華房 (1990)

[Yo] 吉永良正, 数学・まだこんなことがわからない, 講談社ブルーバックス (1990)