HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Kolmogorov system に対するある疑念
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 68(2), 1-2
Issue Date	2018-12-13
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/72180
Type	departmental bulletin paper
File Information	02ES_68(2)_001.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経 済 学 研 究　*68－2*
北 海 道 大 学　2018.12

Kolmogorov system に対するある疑念

園　　信 太 郎

1. ポーヤの壺

つまり Pólya's urn であり，この想像上の実験は確率算でしばしば言及される。

a, b, c を非負整数とし，a+b を正とする。白玉 a 個，黒玉 b 個のみを含む一個の壺から無差別に一個を取り出し，色を観察し，それと同じ色の c 個の玉と，とり出された一個とを，その壺へ入れる。次にその壺に同様の抽出と追加とを行い，以下それを続ける。一回目の抽出が「白」である確率は，通常は a/(a+b) とされ，「黒」は b/(a+b) である。一回目「白」だと二回目「白」は (a+c)/(a+b+c)，一回目「黒」だと二回目「白」は a/(a+b+c) である。

n を任意の正の整数とすると，n 回目で「白」の確率は a/(a+b) である。実際，「一回目白」の条件下では，n+1 回目「白」は，数学的帰納法の仮定より (a+c)/(a+b+c)，「一回目黒」の条件下では，n+1 回目「白」は，数学的帰納法の仮定より a/(a+b+c)。そこで確率の乗法法則（及び加法法則）を使えば，n+1 回目「白」は a/(a+b) となる。

これが通常の確率算での「解」である。

2. 乗法法則

かりに園（2014, 2017）のような主観確率を前提とすれば，上の「乗法法則」の利用は問題ないであろう。しかし，基礎になる確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を設定していないので，Kolmogorov system では，その「利用」は通用しない。さらに基礎となる確率空間を導入したとしても，この System では，$P(A \mid B)$，$P(B) \neq 0$，は，$P(A \cap B)/P(B)$，$P(B) \neq 0$，の略記にすぎない。つまり，乗法法則の本来の力が発揮されない。

3. ある疑念

問題としている System では Kolmogorov の拡張定理を用いるので，周辺分布たちを定めなければならない。その際，暗黙の内に，言わば裏側で，主観確率の乗法法則を利用しているのではないのかという「疑念」が生じる。しかし，この「暗黙の法則」こそ証明すべき原理なのである。読者は，もし暇があれば，問題の System に基づく「正式の」解を模索して頂きたい。

4. 補遺

筆者は東京のある大学の理学部数学科（当時）の出身である。学部生の頃に確率論を専攻した。ゼミの指導教官は岡部靖憲先生（故人）であった。Brown運動とその「微分」である white noise とを用いて無限次元解析を切り拓くという議論が課題であった。その際，有名な「伊藤清の公式」を学んだ。このゼミには楠岡成雄先生も出席されていて，時に助言を頂いた。

学部の授業では伊藤清三先生（故人）より，Lebesgue（ルベーグ）積分と確率論の基礎概念とをズッシリと学んだ。伊藤清三先生といえば，『ルベーグ積分入門』，裳華房，東京，初版は 1963 年が，あまりにも有名だが，授業では，この快著の縮約改訂版ともいえる，（『解析学の

基礎』，伊藤清三，小松彦三郎，一松信，柳原次郎，岩波書店，東京，1977 年，の）第 2 章「測度と積分」が台本であった。

ここで Lebesgue積分の「定義」について一言述べておきたい。非負の可測関数へと単調非減少に収束する非負の可測単関数列を用いて，この単関数に対しては積分値が自然に定義できるので，その極限として問題の可測関数の積分値を「定義」するという流儀がある。だがここで，二つの「ものいい」をつけることができる。一つは「おきまり」のものいいであり，もう一つは「うがった」ものいいである。「おきまり」だが，定義が成立している（well-defined）か否かに関るもので，単調単関数列のとり方に積分値が依存しないことの保証の要求である。この保証は，基礎となる測度が完全（あるいは可算）加法性をみたすことを本質的に利用して，得られる。「うがった」方だが，問題の「定義」を積分記号と lim とを用いて書いてみると，これは正に積分記号と lim との交換である。これでは，本来証明すべき事柄を先取りして「定義」にしているのであり，この「交換」こそ，しかるべきやり方で「積分」を定義した後に証明すべき事柄ではないのか，というものである。実は，測度の完全加法性を仮定しておけば，「しかるべきやり方」と，問題の積分が一致することが出る。筆者は『数学辞典』にあるように，「しかるべきやり方」で「定義」した方が，少なくとも初学者には良いように思う。なお，例えば Banach limit を用いれば，有限加法性しか満たさない自然な確率測度が定義できるが，その場合でも，この「しかるべきやり方」によって積分が「定義」できる。

2018 年 7 月 7 日（土）

参考文献

園 信太郎，『確率概念の近傍―ベイズ統計学の基礎をなす確率概念―』，内田老鶴圃，東京，2014 年 5 月 15 日。

園 信太郎，『サヴェジ・システム試論―統計的決定理論の公理化と期待効用の最大化―』，内田老鶴圃，東京，2017 年 5 月 10 日。