



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ナッシュ均衡の存在について
Author(s)	田中, 嘉浩
Citation	経済學研究, 68(2), 3-8
Issue Date	2018-12-13
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/72187
Type	departmental bulletin paper
File Information	03ES_68(2)_003.pdf



ナッシュ均衡の存在について

田 中 嘉 浩

1. はじめに

ゲーム理論は19世紀のCournotの複占の理論にも息吹が見られるが、陽に戦略を考える意味ではvon Neumannがドイツ在住の1928年に非協力ゼロ和2人ゲームの均衡点の存在の証明をした[9]（この頃、von Neumannは作用素論の研究を開始していた）のを嚆矢とすべきであろう。ゼロ和2人ゲームに関する混合戦略における均衡点の存在は後に言われる連続最適化の線形計画の双対定理を用いて証明されている。ナチス政権を避けてアメリカのプリンストン大学高等研究所に渡って数学教授をしていた時に、オーストリアから彼を訪ねて渡米したMorgensternとの共著*Theory of Games and Economic Behavior* [10]の発刊以降にプリンストン大学を中心に大きく発展することになる。アメリカのオペレーションズ・リサーチ学会であるinforms (Institute for Operations Research and the Management Sciences)の最高賞はJohn von Neumann理論賞となっていることも彼のゲーム理論の影響力の高さを示している。

Nashはその初期の段階[6]で非協力非ゼロ和 n 人ゲーム（上述のゼロ和2人ゲームを含む）に関する均衡点（Nash均衡点）を定義し、当時証明された点対集合写像に対する角谷の不動点定理を用いて、混合戦略におけるその存在を示した。種々の利得行列のパターンに対するNash均衡点とその意味付け、特に2人共Nashの指導教官であり連続最適化の最適性の条件であるKuhn-Tucker条件導出の1人のA.W.

Tuckerの発案の囚人のジレンマのゲームに対する繰り返しゲームでの協調の可能性の理論である（完全）フォーク定理、進化ゲーム等重要な結果にも繋がってきている。

本稿では、非ゼロ和 n 人ゲームのNash均衡の存在定理に関して、[6]に従ってその条件や導出を検討したい。

2. 準備

戦略形 n 人ゲームを、

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

但し、 N はプレイヤーの集合、 S_i はプレイヤー i が選択可能な戦略の集合、 $f_i : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ はプレイヤー i の利得関数と表す。この時、混合戦略を考えた混合拡大は、

$$\bar{G} = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$$

但し、 Q_i は S_i 上の確率分布の全体、 q_i はプレイヤー i の混合戦略という。プレイヤー i の期待利得関数は、

$$\begin{aligned} & F_i(q_1, \dots, q_n) \\ &= \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \left\{ \prod_{j=1}^n q_j(s_j) \right\} f_i(s_1, \dots, s_n) \end{aligned}$$

で表せる。

混合戦略におけるNash均衡を満たす点は、混合拡大のゲームで

$$F_i(q^*) = F_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq F_i(q_i, q_{-i}^*), \quad \forall i$$

但し $q_{-i}^* = (q_1^*, \dots, q_{i-1}^*, q_{i+1}^*, \dots, q_n^*)$ を満たす $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ として定義できる。

プレイヤー i の最適応答(best response)集合は、 $BR_i(q_{-i}) = \{q_i \mid f_i(q_i, q_{-i}) = \max_{t_i \in Q_i} f_i(t_i, q_{-i})\}$

で定義される。

集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して 関数 $f: S \rightarrow S$ が定義されている時に、

$$f(x^*) = x^*$$

を満たす点 $x^* \in S$ を関数 f の不動点 (fixed point) という。

Brouwer [1] の不動点定理は n -単体からそれ自身への連続写像で示されているが少し拡張された形で述べる。

定理 1 (Brouwer の不動点定理) 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトかつ凸、その上で定義された関数 $f: S \rightarrow S$ は連続とする。この時、関数 f の不動点 $x^* \in S$ が存在する。 $\square$

定理 1 で S がコンパクト ($\mathbb{R}^n$ では有界閉) かつ凸である仮定は重要である。有界でなければ $f(x) = x + r$ ($r \neq 0$) , $r \in \text{hzn } S$ (horizon cone) を考えれば不動点は存在せず、有界だが開とすると境界以外では全部 x と異なる関数を構成できる。凸である仮定は、例え

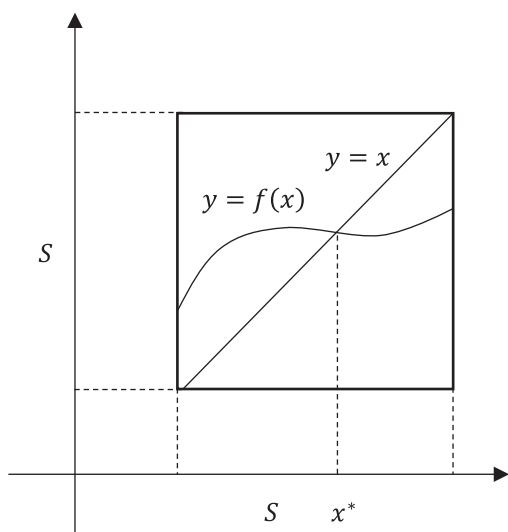


図 1 Brouwer の不動点定理 ($n = 1$)

ば通常のカップに入れたコーヒーをかき混ぜてコーヒーの面 (D^2 と同相) 上の各点を流線の単位時間後の先に写す関数を考えると、定理 1 よりどこかに速度 0 となる不動点が存在する。

しかしながら、仮にトーラス型を同心円になる様に半分に切った形の器 (コーヒーの面は凸にならない) にコーヒーを入れてかき混ぜるとどこも速度が 0 にならない様にできるので不動点は存在しない。

定理 1 の証明は $n = 1$ の場合は図 1 の様に S で定義される任意の連続関数 $y = f(x)$ は $y = x$ と S 内に交点を持つことから分る。一般の n に対しては、レトラクトとホモロジー群を用いる証明、離散数学の分野の Sperner の補題を用いる証明等が知られているが、本稿では割愛する。

次に関数でなく、より一般的な点对集合写像を考える。

集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ に対して 点对集合写像 $F: S \rightarrow S$ が定義されている時に、

$$x^* \in F(x^*)$$

を満たす点 $x^* \in S$ を点对集合写像 F の不動点 (fixed point) という。

定理 2 (角谷の不動点定理) 集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ はコンパクトかつ凸、その上で定義された点对集合写像 $F: S \rightarrow S$ が次の 2 条件

- (1) [凸値] $\forall x \in S$ に対して $F(x)$ は非空かつ凸集合
- (2) [上半連続性] S 内の任意の点列 $\{x_v\}_{v=1}^\infty, \{y_v\}_{v=1}^\infty$ に対して

$$y_v \in F(x_v), \quad v = 1, 2, \dots$$

$$x_v \rightarrow x, \quad y_v \rightarrow y \quad (v \rightarrow \infty)$$

ならば、 $x \in F(x)$ である。

を満たすならば、 $x^* \in F(x^*)$ となる点对集合写像 F の不動点 x^* が少なくとも 1 つ存在する。 $\square$

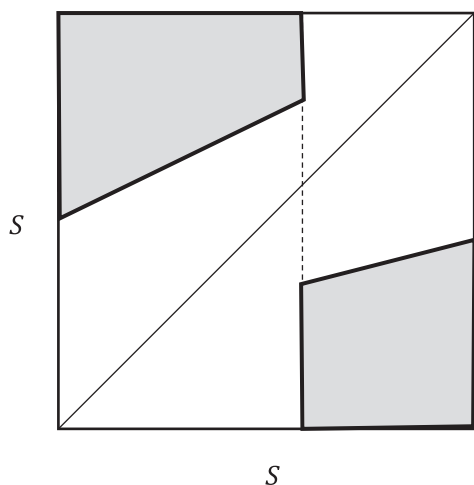


図2 角谷の不動点定理が成立しない例 (凸値でない)

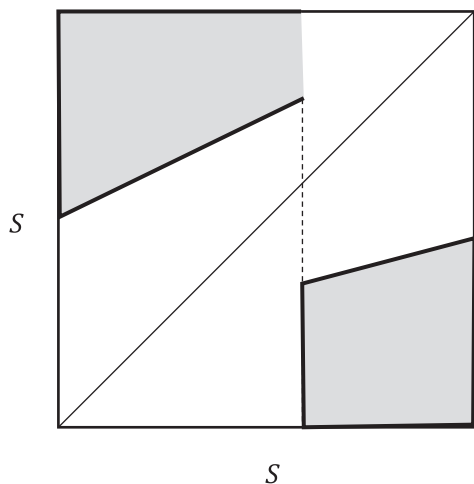


図3 角谷の不動点定理が成立しない例 (上半連続でない)

図2, 図3から分る様に, 定理2で点对集合写像 $F: S \rightarrow S$ に課せられた2条件はどちらも重要である。

技巧上必要な性質だが, 凸集合の直積が凸になることは直ちに分る。コンパクト集合の直積がコンパクトになることは Tychonoff の定理と

して知られている。

点对集合写像の直積に関する定理を追加する。

定理3 [2, 1.8j (3)] $S \subset \mathbb{R}^m$, $T_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, \dots, p$ とし, 上半連続な点对集合写像 $F_i: S \rightarrow T_i$ が定義されており, 各 T_i はコンパクトとする。この時, 点对集合写像の直積

$$F \equiv F_1 \times \dots \times F_p: S \rightarrow T_1 \times \dots \times T_p$$

は上半連続になる。□

3. Nash 均衡の存在

次の問題を考える。

問題 2人で硬貨を出し合う。2人とも表か裏ならばAがBに1ドル払い, 2人の硬貨の表裏が違えばBがAに1ドル払う。

Aの Nash 均衡点による戦略を考えよ。

この問題はゼロ和2人ゲームになっているので行列ゲームで書ける。純戦略の下でミニマックス原理で考えるとAの $\max \min$ 値とBの $\min \max$ 値が異なるので純戦略では均衡が存在しない例である。

ここでは, 敢えて双行列ゲームとして利得行列を表す (Aをプレイヤー1, Bをプレイヤー2とする)。

		P 2	
		表	裏
P 1	表	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	裏	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

プレイヤー1が表を x (裏を $1-x$) $x \in [0, 1]$, プレイヤー2が表を y (裏を $1-y$) $y \in [0, 1]$ の確率で選ぶ混合戦略を考える。

プレイヤー1の期待効用は,

$$\text{表を選択すると } -y + (1-y) = 1 - 2y$$

$$\text{裏を選択すると } y - (1-y) = 2y - 1$$

よって, プレイヤー1の y に対する最適応答は,

$$BR_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{when } y < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{when } y = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{when } y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

同様にプレイヤー 2 の期待効用は、

表を選択すると $x - (1 - x) = 2x - 1$

裏を選択すると $-x + (1 - x) = 1 - 2x$

よって、プレイヤー 2 の x に対する最適応答は、

$$BR_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{when } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{when } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

これらをグラフで表わすと、図 4 の様になる。

このグラフから分る様に Nash 均衡点は、

$$x^* \in BR_1(y^*), y^* \in BR_2(x^*)$$

を満たす解

$$\{A : (\text{表 } \frac{1}{2}, \text{裏 } \frac{1}{2}), B : (\text{表 } \frac{1}{2}, \text{裏 } \frac{1}{2})\}$$

となる。

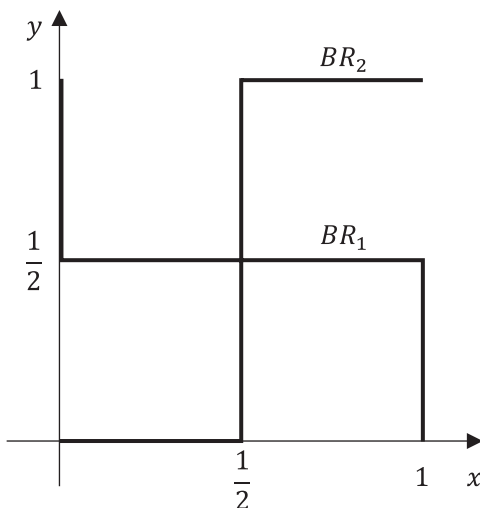


図 4 問題の最適応答

この解を見て、

「相手が Nash 均衡点の戦略でくる限り自分は表に決めていようが何を出そうが期待利得は 0 になるので一緒だ」

と考える人もいるかもしれない。しかしながら実際には相手がどのような戦略かは分らないのであり、自分が Nash 均衡点でない戦略を選ぶ時に相手側は何も知らなくとも可能性としてはそのバイアスを狙って相手の得になる戦略を偶然選んでいる可能性があり、自分の期待利得がマイナスになる可能性がある。つまり、Nash 均衡の定義を逆から考えると、

「自分が Nash 均衡点の戦略を取っていれば、相手がどんな戦略できても期待利得がマイナスになることはない」

という意味である。

さらに、Nash 均衡点の混合戦略 $q^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が Maynard Smith and Price [5] によって導入された進化的に安定な戦略 (ESS: evolutionarily stable strategy) かどうかを考えるために適応度を考える。

$F(q^*, q^*) = 0$ であり、突然変異 $t = (p, 1 - p)$, $p \neq \frac{1}{2}$ に対して $F(t, q^*) = 0$ となるので、

$$F(q^*, q^*) = F(t, q^*).$$

よって、 $F(q^*, t)$ と $F(t, t)$ の比較をする必要があるが、 $F(q^*, t) = 0$, $F(t, t) = -(1 - 2p)^2$ となるので、

$$F(q^*, t) - F(t, t) = (1 - 2p)^2 > 0.$$

これは、Nash 均衡点の混合戦略 $q^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が進化的に安定な戦略 (ESS) であることを示す。

実際には、一般の n 人ゲームに対して、次の定理が成立する。

定理 4 非協力非ゼロ和 n 人ゲーム $\bar{G} = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$ において、混合戦略の範囲で少なくとも 1 つ Nash 均衡を満たす点

が存在する。

[証明] プレイヤー i は m_i 個の純戦略に対する混合戦略 q_i を考えるので,

$q_i \in \Delta^{m_i-1}$ ($m_i - 1$ 単体) となるので

$$(q_1, \dots, q_n) \in \Delta^{m_1-1} \times \dots \times \Delta^{m_n-1}$$

である。 $S = \Delta^{m_1-1} \times \dots \times \Delta^{m_n-1}$ とすれば, コンパクトな凸集合になる。 $F_i(q_1, \dots, q_n)$ は定義より q_i に関して線形であるから $BR_i(q_{-i}) \in \Delta^{m_i-1}$ は凸かつ上半連続になる。

$$\begin{aligned} B(q) &= B(q_1, \dots, q_n) \\ &= BR_1(q_{-1}) \times \dots \times BR_n(q_{-n}) \end{aligned}$$

と考えれば, 定理 3 より, $B(q)$ はコンパクトな凸集合 S から S への凸値かつ上半連続な点集合写像になる。よって, 定理 2 (角谷の不動点定理) から

$$q^* \in B(q^*)$$

が存在する。 $\square$

4. おわりに

Brouwer の不動点定理は非負正方行列の固有値に関する Frobenius の定理の証明等に使われている。さらには, Schauder により, 値域をコンパクト部分集合と制約することによって, 考える空間を $\mathbb{R}^n$ でなく一般に無限次元である Banach 空間に一般化されており (Schauder の不動点定理), 微分方程式の解の存在に応用されている。Brouwer の不動点定理の一般化としては, Lefschetz の不動点定理・Lefschetz の不動点公式も知られている。球面 S^2 での写像 $f: S^2 \rightarrow S^2$ での不動点 (同相である地球上では無風の場所) は凸ではないので Brouwer の不動点定理は直接は使えないが, Lefschetz の不動点公式から導かれる Poincaré-Hopf の定理から Euler 数である 2 個は存在する事が分っている。

角谷の不動点定理は元々 Brouwer の不動点定理の点対集合写像への一般化なのだが,

Browder は variational inequality を用いて値域をさらに拡張する定理を導出している。

Nash 自身は, 本稿で検討した [6] では角谷の不動点定理を用いて均衡点の存在を証明しているが, その翌年の [7] では混合戦略, 即ち

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in S \equiv \Delta^{m_1-1} \times \dots \times \Delta^{m_n-1}$$

を他の混合戦略 $q' \in S$ に写す連続写像 T を上手く定義することによって, 単に Brouwer の不動点定理を用いて均衡点の存在を証明することに成功している。本稿では, 最適応答を点対集合写像と考えて均衡点を考える見通しのいい [6] の考え方に準拠した。

Nash 均衡点は個人合理性の観点から定義されているので, 個人からも集団からも順当な戦略を導くこともあるが, 一般には偏っていたり, 囚人のジレンマの様に集団に都合が悪い戦略を導くこともある。こういう場合には, コミットメント (アナウンスメント効果) や, 混合戦略の組では表せない相関均衡や, 繰り返しゲームでの Nash 均衡点の利用の可能性を考えていくのだが, いずれの場合にも Nash 均衡点は妥当な解を考える出発点として不可欠になっている。

2015 年の Nash の数学の Abel 賞 (授賞理由は Nash が博士資格の為に万一を考えてゲーム理論と並行して数学的内容を重視して考えたリーマン多様体の埋め込み定理に関する方向である) の受賞式の帰りの不慮のタクシー事故死に続いて, 2016 年には Shapley, Selten, Schelling とゲーム理論の巨星の面々の訃報が続いたのは惜しまれる。彼等が 20 世紀に成し遂げた偉業を思いつつ彼等に続く新世代の出現を楽しみにしたい。

参考文献

- [1] Brouwer, L.E.J., "Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten," *Mathematische Annalen* 7, (1911) 97—115.
- [2] Debreu, G., *Theory of Value*, Yale University Press, 1959.
- [3] Kakutani, S., "A generalization of Brouwer's fixed point theorem," *Duke Mathematical Journal* 8, (1941) 457—459.
- [4] 栢田 幹也, 『代数的トポロジー』, 朝倉書店, 2002.
- [5] Maynard Smith, J., Price, G.R., "The logic of animal conflict," *Nature* 246, (1973) 5—18.
- [6] Nash, J.F., "Equilibrium points in n-person games," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, (1950) 48—49.
- [7] Nash, J.F., "Non-cooperative games," *Annals of Mathematics* 54, (1951) 286—295.
- [8] 岡田 章, 『ゲーム理論 (新版)』, 有斐閣, 2011.
- [9] von Neumann, J., "Zur theorie der gesellschaftsspiele," *Mathematische Annalen* 100, (1928) 295—320.
- [10] von Neumann, J. and Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944 1st ed., 1947 2nd ed., 1953 3rd ed.