HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第15回数学総合若手研究集会 ： 数学の交叉点
Author(s)	福田, 一貴; 青木, 雅允; 植田, 優基 他
Citation	Hokkaido University technical report series in Mathematics, 176, 1-646
Issue Date	2019-03-12
DOI	https://doi.org/10.14943/87560
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/72974
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech176.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 15 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 15th Mathematics Conference for Young Researchers

– MCYR15 –

世話人

福田一貴 (代表) 青木雅允 植田優基 上島芳倫 矢不俊文 新村貴之

佐藤直飛 豊川永喜 松坂公暉 山形颯 吉田啓佑

札幌，北海道大学，2019

Series#176. March, 2019

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.

#156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.

#157 D. Suyama, T. Ito, M. Kuroda, Y. Goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagwa, 第 9 回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.

#158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.

#159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka, Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.

#160 M. Kuroda, Y. Goto, K.Sasaki, S. Futakuchi, D. Funakawa, T. Yamashita, and K. Wada, 第 10 回数学総合若手研究集会, 335 pages. 2014.

#161 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 39th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 147 pages. 2014.

#162 D. Funakawa, T. Kagaya, Y. Kabata, K. Sasaki, H. Takeda, Y. Chino, A. Tsuchida, T. Yamashita, and K. Wada, 第 11 回数学総合若手研究集会, 359 pages. 2015.

#163 S. Jimbo, S. Goto, Y. Kohsaka, H. Kubo, Y. Maekawa, and M. Ohnuma, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation - International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday- , 47 pages. 2015.

#164 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 122 pages. 2015.

#165 A. Tsuchida, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, Y. Kabata, H. Saito, F. Nakamura and S. Honda, 第 12 回数学総合若手研究集会, 373 pages. 2016.

#166 S.-I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 110 pages. 2016.

#167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.

#168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodrguez Mulet, 第 13 回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.

#169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations - In memory of Professor Taira Shirota - , 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

#173 S.Handa,D.Komori,K.Fujisawa,A.Rodriguez Mulet,M.Aoki,Y.kamijima,I.Fukuda,T.Yabu, 第 14 回数学総合若手研究集会, 580 pages. 2018.

#174 Yoshikazu Giga, Hideo Kubo, Tohru Ozawa, The 11th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute - The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations- , 160 pages. 2018.

#175 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Proceedings of 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 99 pages. 2018.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されているこの数学総合若手研究集会も今年で第 15 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。当研究集会を支援して下さる皆様のおかげで研究集会としての規模も年々大きくなり、今年は幅広い分野の若手研究者の方々89 名にご講演して頂くこととなりました。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション (60 分) とパラレルセッション (30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分け、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。また本年度より、ポスターセッションの活性化を目的として「ポスタープレビュー」というセッションを開設致しました。ポスタープレビューとは、ポスター発表の前に参加者全体に向けて、スライドを用いて自身のポスターの内容を数分で紹介していただくコーナーとなっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北海道大学理学部数学教室の先生方
- 数学教室事務員の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2019 年 3 月
MCYR15 世話人
福田一貴 (代表)　青木雅允　植田優基　上島芳倫　矢不俊文　新村貴之
佐藤直飛　豊川永喜　松坂公暉　山形颯　吉田啓佑

第15回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 15th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2019 年 3 月 4 日 (月) ～ 3 月 7 日 (木)

場所： 北海道大学 理学部 5 号館

S: 5-203 大講義室 (シングル会場)　A: 5-305 (パラレル会場)
B: 5-206 (パラレル会場)　C: 5-205 (パラレル会場)
D: 5-304 (パラレル会場)　E: 5-201 (ポスター会場・休憩所)

URL: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/∼wakate/mcyr/2019/ja/program.html

• シングルセッション (会場 S)

須田 智晴　(Tomoharu SUDA)　京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻
区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式について 3

寺本 圭佑　(Keisuke TERAMOTO)　神戸大学大学院理学研究科数学専攻
ある性質を持つカスプ辺とそのガウス写像に現れるカスプ特異点の幾何学的性質の関係について 11

久保田 匠　(Sho KUBOTA)　東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻
有向グラフ上の量子ウォークが定める行列とグラフの同型問題 21

三浦 達彦　(Tatsu-Hiko MIURA)　東京大学大学院数理科学研究科
曲がった薄膜領域上のナヴィエ・ストークス方程式に関する特異極限問題 31

• パラレルセッション (会場 A)

須山 雄介　(Yusuke SUYAMA)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
トーリック多様体の第 2 Chern 指標 43

松坂 俊輝　(Toshiki MATSUSAKA)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
二次形式とモックモジュラー形式 53

藤田 直樹　(Naoki FUJITA)　東京工業大学理学院
Tensor product representations from Newton-Okounkov bodies 63

佐野 薫　(Kaoru SANO)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
周期点のカウント及びディオファントス近似について 71

更科 明　(Akira SARASHINA)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
数理解析系
1 点抜き楕円曲線の同型類の幾何的基本群による復元 75

佐竹 翔平　(Shohei SATAKE)　神戸大学大学院システム情報学研究科情報科学専攻
On a number-theoretic problem arsing from designs of efMRI experiments 79

行田 康晃　(Yasuaki GYODA)　名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
団代数における F 多項式の行列化 83

Tran Tan Nhat (Tan Nhat TRAN) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Characteristic quasi-polynomials and a connection to Ehrhart theory 93

神代 真也 (Shinya KUMASHIRO) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
イデアル化の Cohen-Macaulay 型と residually faithful 加群について 103

伊東 良純 (Ryojun ITO) 千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻
数学情報数理学コース
テータ積の L 関数の特殊値について 109

宋 珠愛 (Chue SON) 首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻
Generators of invariant linear system on metric graphs for finite isometry group 115

向井 重雄 (Shigeo MUKAI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Pfaffian system of confluent hypergeometric functions of two variables 119

土谷 昭善 (Akiyoshi TSUCHIYA) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
反射的凸多面体とグレブナー基底 125

吉川 翔 (Shou YOSHIKAWA) 東京大学大学院数理科学研究科
Singularities of non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties 135

矢澤 明喜子 (Akiko YAZAWA) 信州大学大学院総合理工学研究科理学専攻数学分野
完全グラフのヘッセ行列の固有値について 139

藤原 祥吾 (Shogo FUJIWARA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
団代数における前変異と後変異の双対性について 147

佐藤 悠介 (Yusuke SATO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
$SL(4,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群のクレパント特異点解消と G-ヒルベルトスキームについて 151

森 章 (Akira MORI) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
一般化された Kummer 4-fold のネフ錐について 161

• パラレルセッション (会場Ｂ)

榎吉 奏子 (Kanako ENOYOSHI) お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科
理学専攻
G_2 作用によるグラスマン多様体内の等質超曲面の主曲率 169

佐藤 雄一郎 (Yuichiro SATO) 首都大学東京大学院理学研究科数理科学専攻
擬 Riemann 空間形内の全測地的光的部分多様体 173

乙戸 勇大 (Yudai OTSUTO) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Extension of two FRT weak bialgebras using Frobenius-separable algebras and their relations 183

白川 匠 (Takumi SHIRAKAWA) 埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報系専攻
スピン多様体上の Dirac 作用素の熱核のについて 191

大山 人紀 (Toki OHYAMA) 埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報系専攻
接触多様体の Fefferman 空間と Dirac 作用素 197

照屋 靖志 (Yasushi TERUYA) 九州大学大学院数理学府数理学専攻数理学コース
Convex property of Wulff shapes and regularity of their convex integrands 201

数川 大輔　(Daisuke KAZUKAWA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
l_p-直積空間の集中 207

浅野 喜敬　(Nobutaka ASANO)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
Simplified trisection map による弧の逆像として得られる閉 3 次元多様体について 217

伊勢 彩夏　(Ayaka ISE)　東京工業大学理学院数学系数学コース
Gluck Surgery によって得られる 4 次元ホモトピー球面の微分同相型について 223

福田 瑞季　(Mizuki FUKUDA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
Branched twist spin と Gluck twist 229

永井 渡　(Wataru NAGAI)　東京工業大学大学院情報理工学院
数理・計算科学系数理・計算科学コース
クラスター変数とアレキサンダー多項式 237

小林 和志　(Kazushi KOBAYASHI)　千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻
数学・情報数理学コース
トーラス上のホモロジー的ミラー対称性に関するいくつかの注意点 247

鷲見 拳　(Ken SUMI)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
トロピカル幾何学と Riemann-Roch の定理 257

水野 勇磨　(Yuma MIZUNO)　東京工業大学情報理工学院
数理・計算科学系数理・計算科学コース
ミューテーション列に付随する行列式の恒等式 263

浅尾 泰彦　(Yasuhiko ASAO)　東京大学大学院数理科学研究科
オービフォールドストリングトポロジー 271

高橋 典寿　(Norihisa TAKAHASHI)　立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
点付きトーラス上の有限巡回群作用のリフトの構成について 277

田内 大渡　(Taito TAUCHI)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
リー群による軌道分解と不変超関数 281

• パラレルセッション (会場 C)

水上 雅昭　(Masaaki MIZUKAMI)　東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
Global existence and asymptotic behavior in a Keller–Segel system with signal-dependent sensitivity 289

中屋敷 亮太　(Ryota NAKAYASHIKI)　千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻
数学・情報数理学コース
力学的境界条件下における結晶粒界運動数理モデルの解の表現について 295

伊縫 寛治　(Kanji INUI)　京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間専攻
一般化複素連分数展開に関する等角反復関数系の極限集合の次元と測度 305

渡邉 天鵬　(Takayuki WATANABE)　京都大学大学院人間・環境学研究科
Non-i.i.d random holomorphic dynamical systems 313

喜多 航佑　(Kosuke KITA)　早稲田大学大学院先進理工学研究科
非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について 319

新井 裕太 (Yuta ARAI) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
摂動格子の剛性と非剛性 325

朴 佳南 (Kanam PARK) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
q-超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形 333

野ヶ山 徹 (Toru NOGAYAMA) 首都大学東京大学院理学研究科数理科学専攻
Mixed Morrey spaces and the boundedness of the maximal operators 339

吉田 啓佑 (Keisuke YOSHIDA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
KMS states on Cuntz-Pimsner algebras associated with self-similar group actions and their GNS representations 347

三栖 邦康 (Kuniyasu MISU) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms 357

安部 文人 (Fumihito ABE) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
シュレディンガー方程式の解の H^s 型波面集合について 365

紅村 冬太 (Fuyuta KOMURA) 慶応義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
亜群 C*環のアーベル化について 369

石井 裕太 (Yuta ISHII) 首都大学東京大学院理学研究科数理科学専攻
空間非一様な係数を持つ Schnakenberg モデルの対称な多重ピーク定常解の安定性解析 379

中村 憲史 (Kenji NAKAMURA) 筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻
L^2 boundedness of solutions to the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations 385

谷地村 敏明 (Toshiaki YACHIMURA) 東北大学大学院情報科学研究科システム情報科学専攻
薄膜コーティング問題における固有値の漸近挙動について 391

北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA) お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科理学専攻
Kac-Paljutkin Quantum Group as a Quantum Subgroup of $SU_{-1}(2)$ 399

相原 祐太 (Yuta AIHARA) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
A General Class of Exterior Differential Operators on Boson-Fermion Fock Spaces in the Q-space Representation 403

• パラレルセッション (会場D)

原 健太郎 (Kentaro HARA) 東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻
非可換多様体上の U(1) のインスタントンからのエルミート・アインシュタイン計量を作る 415

植田 優基 (Yuki UEDA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Factorizability of tensoring quantum channels with the completely depolarizing channel 419

中原 智弘 (Tomohiro NAKAHARA) 広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻
非対称細胞分裂における極性パターン形成メカニズムの解明 425

中井 拳吾 (Kengo NAKAI) 東京大学大学院数理科学研究科
機械学習による流体変数の予測 431

澤田 友佑 (Yusuke SAWADA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
E_0-semigroups and product systems of W^*-bimodules 437

奥村 聡 (Satoshi OKUMURA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
漸近的に特異な磁場を含む系の物理量の Magnetic Weyl 量子化 441

笠原 健吾 (Kengo KASAHARA) 東邦大学大学院理学研究科情報科学専攻
CAT(1) 空間上での 2 つのリゾルベントによる近似列 449

梶原 唯加 (Yuika KAJIHARA) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
変分法を用いた n 体問題の周期解の存在証明 457

山中 祥五 (Shogo YAMANAKA) 京都大学大学院情報学研究科科数理工学専攻
2 自由度ハミルトン系における横断的なヘテロクリニック軌道の存在と非可積分性 465

本永 翔也 (Shoya MOTONAGA) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
連続力学系の可積分性とその周辺 475

豊川 永喜 (Hisayoshi TOYOKAWA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
σ-finite invariant densities for essentially conservative Markov operators via the induced operators . 483

梶浦 大起 (Hiroki KAJIURA) 広島大学大学院理学研究科数学専攻
調和解析的視点による有限群の部分集合による近似
(Approximation of finite groups by their subsets from the viewpoint of Harmonic analysis) 491

齋藤 耕太 (Kota SAITO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
フラクタル次元を用いた素数の無限性の証明 495

井元 隆史 (Takashi IMOTO) 東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻
相関基礎科学系
量子 XXZ 鎖に対する厳密な Bethe 量子数と Bethe 根 499

草本 舜輔 (Shunsuke KUSAMOTO) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
量子ラビ模型のスペクトル解析 507

上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
量子 Ising 模型における平均場臨界現象 515

Cavallina Lorenzo (Lorenzo CAVALLINA) 東北大学大学院情報科学研究科
On a two-phase overdetermined problem of Serrin type 525

森 遥 (Haruka MORI) 北里大学大学院理学研究科分子科学専攻
Metric algebroid における Double 構造 535

• ポスターセッション (会場 E)

小原 まり子 (Mariko OHARA) 信州大学理学部
Graded $\mathbb{E}_\infty$-rings and projective spectral schemes 545

石本 和基 (Kazuki ISHIMOTO) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
有限体上の概均質ベクトル空間における Fourier 変換 553

松村 英樹 (Hideki MATSUMURA) 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
A unique pair of triangles 557

石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻
有向グラフに対する一般荷重ゼータの伊原表示 563

早田 裕貴 (Yuki HAYATA) 名古屋工業大学大学院工学研究科情報工学専攻情報数理分野
グラフのラプラシアンから生じる線形符号の性質 567

梅澤 瑠奈 (Runa UMEZAWA) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
古典幾何における内接多角形の面積公式 575

堀内 遼 (Ryo HORIUCHI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
切除多項式環の代数的 K 群とそれに付随するファシーボン射 581

興川 遼大 (Ryota KYOKAWA) 金沢大学大学院自然科学研究科機械科学専攻システム基礎研究室
量子オープンシステムの解析 587

今川 和人 (Kazuto IMAGAWA) 金沢大学大学院自然科学研究科機械科学専攻システム基礎研究室
フーリエ級数の収束問題に関するフェイエールの定理の拡張可能性について 593

桜井 一誓 (Kazutoshi SAKURAI) 信州大学大学院総合理工研究科工学専攻機械システム工学分野
クラウド量子コンピュータを用いた量子アルゴリズムの実装について
(Implementation of quantum algorithm by cloud quantum computer) 599

今西 翔一郎 (Shoichiro IMANISHI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Mathai-Quillen formalism によるグラスマン多様体 $G(2, N)$ の Euler 標数の計算 605

祐川 翼 (Tsubasa SUKEKAWA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
質量保存をもつ反応拡散系のパルス解の相互作用 615

弓林 司 (Tsukasa YUMIBAYASHI) 大妻女子大学社会情報学部
コヒーレント状態を用いた量子古典対応 625

石井 宙志 (Hiroshi ISHII) 北海道大学大学院理学院数学専攻
球面上における分化の波の数値計算 631

佐藤 純 (Jun SATO) 東京大学先端科学技術研究センター
量子可積分系におけるダイナミクスの厳密計算 639

世話人：福田一貴 (代表)　青木雅允　植田優基　上島芳倫　矢不俊文　新村貴之
佐藤直飛　豊川永喜　松坂公暉　山形颯　吉田啓佑

Schedule

3 月 4 日 (月)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	須田 智晴 (数理)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	須山 雄介 (代数)	榎吉 奏子 (幾何)	水上 雅昭 (解析)	原 健太郎 (数理)
12:00-12:30	松坂 俊輝 (代数)	佐藤 雄一郎 (幾何)	中屋敷 亮太 (解析)	植田 優基 (解析)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	藤田 直樹 (代数)	乙戸 勇大 (代数)	伊縫 寛治 (解析)	中原 智弘 (数理)
14:40-15:10	佐野 薫 (代数)	白川 匠 (幾何)	渡邉 天鵬 (解析)	中井 拳吾 (数理)
15:30-16:00	更科 明 (代数)	大山 人紀 (幾何)	喜多 航佑 (解析)	澤田 友佑 (解析)
16:10-16:40	佐竹 翔平 (代数)	照屋 靖志 (幾何)	新井 裕太 (解析)	奥村 聡 (解析)
16:50-17:20	行田 康晃 (代数)	数川 大輔 (幾何)	朴 佳南 (解析)	笠原 健吾 (数理)

3 月 5 日 (火)

10:00-11:00	ポスタープレビュー (ポスター発表者 15 名)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	Tan Nhat Tran (代数)	浅野 喜敬 (幾何)	野ヶ山 徹 (解析)	梶原 唯加 (数理)
12:00-12:30	神代 真也 (代数)	伊勢 彩夏 (幾何)	吉田 啓佑 (解析)	山中 祥五 (数理)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	伊藤 良純 (代数)	福田 瑞季 (幾何)	三栖 邦康 (解析)	本永 翔也 (数理)
14:40-15:10	宋 珠愛 (代数)	永井 渡 (幾何)	安部 文人 (解析)	豊川 永喜 (数理)
15:30-17:00	ポスターセッション (会場 E)			
18:30-20:30	懇親会			

3 月 6 日 (水)

10:00-11:00	寺本 圭佑 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	向井 重雄 (代数)	小林 和志 (幾何)	紅村 冬大 (解析)	梶浦 大起 (数理)
12:00-12:30	土谷 昭善 (代数)	鷲見 拳 (幾何)	石井 裕太 (解析)	齋藤 耕太 (代数)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	吉川 翔 (代数)	水野 勇磨 (代数)	中村 憲史 (解析)	井元 隆史 (数理)
14:40-15:10	矢澤 明喜子 (代数)	浅尾 泰彦 (幾何)	谷地村 敏明 (解析)	草本 舜輔 (数理)
15:30-16:00	藤原 祥吾 (代数)	高橋 典寿 (幾何)	北川 めぐみ (解析)	上島 芳倫 (数理)
16:10-16:40	佐藤 悠介 (代数)	田内 大渡 (幾何)	相原 祐太 (解析)	Lorenzo Cavallina (解析)
16:50-17:20	森 章 (代数)			森 遥 (数理)

3 月 7 日 (木)

10:00-11:00	久保田 匠 (代数)
11:10-12:10	三浦 達彦 (解析)
12:10-12:20	閉会

シングルセッション
会場 S

区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式について

京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻
須田智晴 (Tomoharu SUDA)

概要

不連続なベクトル場により定義される常微分方程式は応用上重要であり，古くから研究されてきた．例えば，身近なところではブレーキの「鳴き」や地震のメカニズムはそのような形でモデル化できる．しかし，このような常微分方程式を数学的に定式化し，その解の概念を定めることはそれほど容易ではない．本稿では，区分的に連続なベクトル場を用いて定義される常微分方程式の基礎概念や応用例について概説した後，解の定義の方法に関する新たな結果を紹介する．

1 はじめに

連続なベクトル場により定義される常微分方程式の解について調べることは基本的であり，その性質についてはよく知られている．この条件下で初期値問題の解が存在することは言うまでもないだろう．また，例えば減衰振動の方程式はこのような例としてなじみ深いものである：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

ここで，β, k は非負の定数とする．これは変数 $v = \frac{dx}{dt}$ を導入すれば，次の形に書き直せて，確かに連続なベクトル場であらわされることが分かる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -kx - \beta v \end{pmatrix}$$

ところで，この系では確かに摩擦が考慮されているが，それは空気抵抗といった粘性による摩擦であり，高校物理でよく知られた乾燥摩擦 (dry friction) ではない．もしこの効果を導入すると，どのような形の方程式になるだろうか．乾燥摩擦の最も簡単なモデルである Coulomb モデルは，次の形で与えられる [11].

$$F(v) = -f_c\,\mathrm{sgn}(v).$$

ただし，$\mathrm{sgn}(v)$ は v の符号であり[*1]，f_c は正の定数である．したがって，乾燥摩擦の効果も考慮に入れると，次の方程式を得る．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -kx - \beta v - f_c\,\mathrm{sgn}(v) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

図 1 は $k = 1, \beta = 0, f_c = 1$ における解の軌道の様子である．

[*1] $v = 0$ での値の決め方は複数存在する．

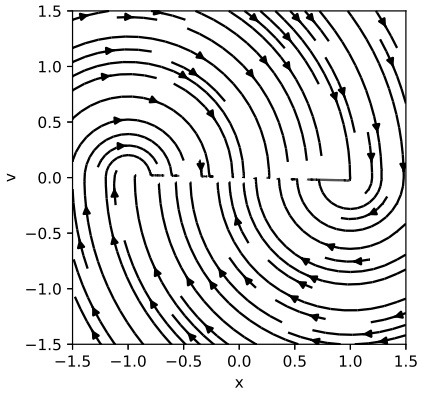


図 1　$k = 1, \beta = 0, f_c = 1$ における方程式 (1) の解の軌道の様子.

ベクトル場の形からわかるように，乾燥摩擦を取り入れた問題は，連続なベクトル場に関する理論だけでは扱えない．また，連続な場合とは質的に異なる現象も生じている．図からわかるように，$v = 0$ 上の $-1 < x < 1$ の範囲では，ベクトル場の零点でないにもかかわらず，平衡点らしきものが生じている．また，この「平衡点」集合の両端での挙動はかなり奇妙である．

乾燥摩擦がかかわる現象は数多い．特に，ブレーキの「鳴き」や地震などは乾燥摩擦により生じる振動である [5, 4]．しばらく滑ったのち，摩擦の効果で動きが止まることを繰り返すため振動が生じる．こうしたスリップ・スティック (slip-stick) 現象には不連続性が本質的に効いている．

さて，方程式 (1) は，区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式の一例である．このようなものに関しては，一部の場合を除いて，常微分方程式の解を連続な場合と同じ形で定義することはできない．そこで，解の定義を改めて考える必要がある．本稿では，区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式の理論のうち，その解の定義に関する部分について概観する．まず，第 2 節では区分的に連続なベクトル場という概念を定義する．次に，第 3 節では解の定義を与える．そして，第 4 節では解の定義に用いられる，Filippov ベクトル場の特徴づけについて新しい結果を紹介する．

2　区分的に連続なベクトル場

先ほど例に挙げた方程式 (1) を定義するベクトル場は $v = 0$ で不連続である．また，$v > 0$，$v < 0$ の各領域でベクトル場は連続である．しかし，このようなベクトル場については不連続点を持つとみなすよりも，ある集合を境にいくつかの連続なベクトル場がつなぎ合わされているとみなすほうが扱いやすい．そこで，次のように定義する．

定義 1 (区分的に連続なベクトル場)**.** $n \geq 2$ に対し，$u : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ を C^1-関数とする．$\mathbb{R}^n$ 上で定義された，

$$\Sigma = \{(\tilde{\mathbf{x}}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = u(\tilde{\mathbf{x}})\}$$

を**不連続点集合** (discontinuity set) に持つ**区分的に連続なベクトル場** (piecewise-continuous vector field) とは，ベクトル場の組 (X_1, X_2) であって，X_1 と X_2 がそれぞれ $G_1 := \{\mathbf{x} \mid u(\tilde{\mathbf{x}}) > x_n\}$ と

$G_2 := \{\mathbf{x} \mid u(\tilde{\mathbf{x}}) < x_n\}$ の閉包上で連続なものである．区分的に連続なベクトル場を (X_1, X_2, Σ) と書く．

Σ の $\mathbf{x}$ における法線ベクトルは

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla u(\mathbf{x})|^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}), -1\right)^T$$

と定義する．また，$X_{1N}(\mathbf{x}) := X_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$，$X_{2N}(\mathbf{x}) := X_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ と定義する．$\mathbb{R}^n$ 上で定義された，Σ を不連続点集合にもつ区分的に連続なベクトル場全体の集合を $C_*(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ と表記する．

ここでは簡単のために不連続点集合が超曲面 1 つで与えられている場合のみを考える．より一般の場合にはさらなる議論が必要であり，適切に定義することはそれほど簡単ではない．例えば，2 次元平面の場合については [3] で論じられている．

3 解の定義

不連続点集合があるため，区分的に連続なベクトル場について，それにより定義される常微分方程式の解を，連続なベクトル場に対するそれと同じように定義することはできない．このことは，次の例を見れば納得できるだろう．

例 2.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (y \geq 0) \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (y < 0) \end{cases} \tag{2}$$

ベクトル場が連続となる領域での解をつなぎ合わせれば「解」の軌道らしきものが得られる．こうして得られた軌道の様子を図 3 の左図に示す．

例 3.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (y \geq 0) \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (y < 0) \end{cases} \tag{3}$$

例 2 と同様にして得た「解」の軌道の様子を図 3 の右図に示す．$y = 0$ に一度入った軌道は，ベクトル場の形から $y \neq 0$ となることができない．しかし，与えられたベクトル場の $y = 0$ での値はこのような挙動とは矛盾する．

そこで，区分的に連続なベクトル場についても解の概念を，例 3 のような場合でも矛盾がないように定めたい．この定義には何通りかの方法があるが[*2]，もっともシンプルなのは微分包含式を用いて定義する方法である．まず，微分包含式は次のように定義される．

[*2] ここで紹介する定義は Filippov による [6]．このほかに，Viktorovskii による定義は先駆的であるが，旧ソ連圏以外

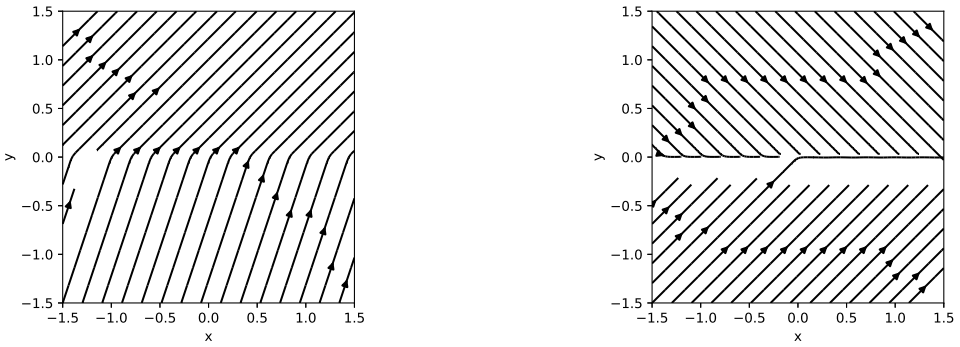


図 2　左：方程式 (2) の軌道の様子．右：方程式 (3) の軌道の様子．

定義 4 (微分包含式 [1])．F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする．次の形の方程式を，(自励的な) **微分包含式** (differential inclusion) という．

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}). \tag{4}$$

これは常微分方程式の一般化であり，その解は次のように定義される．

定義 5 (微分包含式の解)．区間 $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ 上で定義された写像 $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が微分包含式 (4) の**解**であるとは，$\mathbf{x}(t)$ は I 上で一様連続かつ，I 上のほとんどいたるところで微分包含式 (4) をみたす，すなわち

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}(t))$$

となることである．

一様連続性の仮定は $\dot{\mathbf{x}}(t)$ が意味を持つために必要である．集合値関数について，その連続性は次のような形で述べられる．なお，集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ に対し，その閉 ϵ-近傍を

$$M^\epsilon := \{\mathbf{x} \mid \inf_{\mathbf{y} \in M} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq \epsilon\}$$

と定義している．

定義 6 (上半連続性)．F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする．F が $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ で**上半連続** (upper semi-continuous) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$F(\{\mathbf{z}\}^\delta) := \bigcup_{\mathbf{y} \in \{\mathbf{z}\}^\delta} F(\mathbf{y}) \subset F(\mathbf{z})^\epsilon$$

となることである．

もし F が任意の $\mathbf{z} \in A \subset \mathbb{R}^n$ で上半連続ならば，F は A 上で上半連続という．

ではあまり知られていないようである [13]．より最近のものとしては，Guardia, Seara, Teixeira らによる定義もよく用いられる [8].

微分包含式の解の存在については次の定理が知られている．

定理 7. [[7], p.77] F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする．もし F が $\mathbb{R}^n$ 上で上半連続であり，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x})$ が空でない有界な閉凸集合であれば，任意の $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し，微分包含式 (4) の $\mathbf{z}$ を初期値とする解が存在する．

そこで，微分包含式を用いて，区分的に連続なベクトル場が定める常微分方程式の解（以下，区分的に連続なベクトル場の解とも呼ぶ）を次のように定義できる．

定義 8 (区分的に連続なベクトル場の解 [6])**.** (X_1, X_2, Σ) を区分的に連続なベクトル場とする．各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において，集合 $F(\mathbf{x})$ を次のように定める．

1. もし $\mathbf{x} \in G_i$ ならば，$F(\mathbf{x}) = \{X_i(\mathbf{x})\}$.
2. もし $\mathbf{x} \in \Sigma$ ならば，$F(\mathbf{x}) = \{\alpha X_1(\mathbf{x}) + (1-\alpha)X_2(\mathbf{x}) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

区間 $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ 上で定義された写像 $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ が区分的に連続なベクトル場 (X_1, X_2, Σ) の**解**であるとは，こうして構成した集合値関数 F により定義される微分包含式の解となることである．

もし X_1, X_2 が Σ 上で連続であった場合，$F(\mathbf{x}) = \{X(\mathbf{x})\}$ という形になるため，上の定義は通常の常微分方程式の場合に一致する．定理 7 を用いて，この定義の下で区分的に連続なベクトル場の解が存在することも保証される．

特に，点 $\mathbf{x} \in \Sigma$ において $X_{1N}(\mathbf{x})X_{2N}(\mathbf{x}) \leq 0$ となる場合，上で構成した $F(\mathbf{x})$ は Σ に接するベクトルを含む．具体的には，

$$X_0(\mathbf{x}) = \frac{X_{2N}(\mathbf{x})}{X_{2N}(\mathbf{x}) - X_{1N}(\mathbf{x})} X_1(\mathbf{x}) + \frac{X_{1N}(\mathbf{x})}{X_{1N}(\mathbf{x}) - X_{2N}(\mathbf{x})} X_2(\mathbf{x}) \tag{5}$$

であり，Σ の部分集合

$$R_s(X_1, X_2, \Sigma) := \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid X_{1N}(\mathbf{x})X_{2N}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ and } X_{1N}(\mathbf{x}) \neq X_{2N}(\mathbf{x})\}$$

において X_0 はベクトル場を定義する．これは $X_0(\mathbf{x}) \in F(\mathbf{x})$ をみたし，しかも Σ に接する．したがって，X_0 についての通常の意味での解は，上で定義した意味でも解になっているのみならず，Σ 近傍におけるベクトル場の様子から要請される挙動を示す．このようにして得られるベクトル場 X_0 を**Filippov ベクトル場**と呼ぶ．区分的に連続なベクトル場の解を，通常のベクトル場の解と Filippov ベクトル場の解をつなぎ合わせたものとして定義している文献も多い．

4 Filippov ベクトル場の特徴づけ

微分包含式を用いて，区分的に連続なベクトル場の解を定義することはできた．ただ，このように定義することはどの程度自然なのだろうか．特に，凸性の仮定は人為的にも思える．実際，通常のベクトル場の解と R_s におけるベクトル場の解をつなぎ合わせて，区分的に連続なベクトル場の解を定義する際に，Filippov ベクトル場以外を用いた研究も存在する [9].

しかし，実はいくつかの自然な仮定から Filippov ベクトル場の表式 (5) を得ることができる [12]. 以下では簡単のため，$\Sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_n = 0\}$ という場合についてこのことを説明しよう．よ

り一般的な場合も同様の結果は成り立つ．

まず，R_s におけるベクトル場の与え方は，各点における X_1, X_2 の値のみに依存しているものとする．このとき，こうしたベクトル場は $D := \{(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) \in \mathbb{R}^{2n} \mid qs \leq 0 \text{ and } q \neq s\}$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ への写像 α で表現できる．

こうしたベクトル場の決め方は，座標変換と矛盾のないようにするべきである．そこで，正則行列 A について，$T_A(\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_n = 0\}) \subset \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_n = 0\}$ ならば $A(\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s), 0)^T = \alpha(A(\mathbf{p}, q)^T, A(\mathbf{r}, s)^T)$ をみたす，という条件を課す．ただし，$T_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ である．さらに α の微分可能性も仮定すると，上述の座標変換に関する条件から，$\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = A(q, s)\mathbf{p} + B(q, s)\mathbf{r}$ という形になることが示せる．ここで，A, B は q と s について 0-同次な行列値関数である．また，簡単な計算により $(\mathbf{p}, q)$ と $(\mathbf{r}, s)$ が一次従属ならば $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \mathbf{0}$ となることも示せる．

さて，区分的に連続なベクトル場 (X_1, X_2, Σ) が Σ 上で連続になるとき，そこでのベクトル場の与え方は自明である．この場合との整合性を要求することは自然であろう．そこで，次の条件を課す．任意の $\mathbf{p}$ と数列 $\{q_m\}, \{s_m\}$ で，$q_m s_m \leq 0$ かつ $q_m \neq s_m$，さらに $\lim_{m\to\infty} q_m = 0$, $\lim_{m\to\infty} s_m = 0$ となるものについて，$\lim_{m\to\infty} \alpha_\Sigma(\mathbf{p}, q_m, \mathbf{p}, s_m) = \mathbf{p}$ が成り立つものとする．

以上に述べた条件を仮定すれば，次の補題により Filippov ベクトル場の表式 (5) を得ることができる．

補題 9. $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s)$ を $D := \{(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) \in \mathbb{R}^{2n} \mid qs \leq 0 \text{ and } q \neq s\}$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ へのベクトル値関数で，次の条件を満たすものとする．

1. $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = A(q, s)\mathbf{p} + B(q, s)\mathbf{r}$. ただし，$A$ と B は q と s について 0-同次な行列値関数である．
2. $(\mathbf{p}, q)$ と $(\mathbf{r}, s)$ が一次従属ならば $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \mathbf{0}$.
3. 任意の $\mathbf{p}$ と数列 $\{q_m\}, \{s_m\}$ で，$q_m s_m \leq 0$ かつ $q_m \neq s_m$，さらに $\lim_{m\to\infty} q_m = 0$, $\lim_{m\to\infty} s_m = 0$ となるものについて，$\lim_{m\to\infty} \alpha_\Sigma(\mathbf{p}, q_m, \mathbf{p}, s_m) = \mathbf{p}$ が成り立つ．

このとき，α は次の形である．

$$\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \frac{s}{s-q}\mathbf{p} + \frac{q}{q-s}\mathbf{r}.$$

5 おわりに

本稿では，区分的に連続なベクトル場の概念を定義し，それによって定められる常微分方程式の解を定義した．また，その定義の自然さについても検討した．ただし，ここに述べたのは最も簡単な場合の，解の定義に関する話だけである．より一般の場合について，十分な厳密さをもってこれらの概念を定義することは，はるかに難しい．また，スリップスティックなどの不連続性に起因する現象を調べることは応用上重要であり，数学的にも興味深いが本稿ではあまり触れられなかった．興味のある方は，[2, 10] などを参照するとよいだろう．

参考文献

[1] J. P. Aubin and A. Cellina. Differential inclusions: set-valued maps and viability theory. 1984.

[2] M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer Science & Business Media, 2008.

[3] M. E. Broucke, C. Pugh, and S. N. Simic. Structural stability of piecewise smooth systems. *Comput. Appl. Math*, 20(1-2):51–89, 2001.

[4] R. Burridge and L. Knopoff. Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the seismological society of america*, 57(3):341–371, 1967.

[5] P. Duffour. *Noise generation in vehicle brakes*. PhD thesis, University of Cambridge, 2003.

[6] A. F. Filippov. *Differential equiations with discontinuous right–hand side*, volume 42 of *AMS Translations Series 2*, pages 199–231. 1964.

[7] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 1988.

[8] M. Guardia, T. M. Seara, M. A. Teixeira, et al. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations*, 250(4):1967–2023, 2011.

[9] M. R. Jeffrey. Hidden dynamics in models of discontinuity and switching. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 273:34–45, 2014.

[10] O. Makarenkov and J. S. W. Lamb. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1826–1844, 2012.

[11] H. Olsson, K. J. Åström, C. C. De Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *Eur. J. Control*, 4(3):176–195, 1998.

[12] T. Suda. How natural is the definition of the Filippov vector field? *(in preparation)*.

[13] E. E. Viktorovskiĭ. On a generalization of the concept of integral curves for a discontinuous field of directions. *Mat. Sb. (N.S.)*, 34(76):213–248, 1954. (In Russian).

ある性質を持つカスプ辺とそのガウス写像に現れるカスプ特異点の幾何学的性質の関係について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
寺本 圭佑 (Keisuke TERAMOTO) *

1 導入

U を $\boldsymbol{R}^2$ 内の領域とし, $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を C^∞ 級写像とする. このとき, f が**フロンタル**であるとは, ある f に沿う単位ベクトル場 $\nu\colon U \to S^2$ が存在し, 任意の $q \in U$ と $X \in T_qU$ に対して, $\langle df_q(X), \nu(q)\rangle = 0$ が成り立つときをいう. ただし, S^2 は 2 次元単位球面を表し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\boldsymbol{R}^3$ の標準内積を意味する. さらに, フロンタル f が**フロント**であるとは, 写像の組 $(f, \nu)\colon U \to \boldsymbol{R}^3 \times S^2$ が, はめ込みを与えるときをいう. ベクトル場 ν を f の**ガウス写像**と呼ぶ. 定義より, フロンタルやフロントは**特異点**, 即ち, はめ込みにならない点を持つことがある. しかし, 特異点においても, ガウス写像が定義されていることに注意する. このことから, 近年, フロントやフロンタルの特異点における微分幾何学的性質の研究が活発に行われている ([4–6, 8, 9, 11, 13, 15, 17–19]). 特に, **カスプ辺**と呼ばれる特異点に対する研究が顕著である ([10, 12, 14, 21]).

一方, ガウス写像 ν 自身も特異点を持つことがある. ガウス写像に代表的に現れる特異点として, **折り目特異点**や**ホイットニー・カスプ**が知られている ([2, 3, 26]). これらの特異点集合は, 局所的に U 内の正則曲線で与えられ, その ν による像は (特異点を許容する) 球面上の曲線となる. ここで, 折り目特異点の像は, 正則曲線に対応し, ホイットニー・カスプの像は, カスプに対応する. このカスプに対して, **カスプ的曲率**を計算することができる ([19, 20]).

本稿では, カスプ辺の幾何学的不変量とガウス写像に現れるホイットニー・カスプの符号の関係やその幾何学的性質について解説する. また, カスプ辺が有界なガウス曲率を持つとき, ガウス写像の特異点がカスプ辺にどのような影響を与えているかについても述べる. 本研究の内容は, 論文 [24, 25] が元になっている. 特に断らない限り, 多様体や写像は C^∞ 級とする.

2 準備

この節では, 写像の特異点や特異点を持つ曲線, 曲面の幾何学的性質を振り返る. 詳細については, [1, 7, 11, 17] などを参照していただきたい.

* E-mail: teramoto@math.kobe-u.ac.jp

2.1 多様体間の写像に現れる特異点

M^m, N^n をそれぞれ m 次元, n 次元の多様体とし, $f\colon (M^m,p) \to (N^n,P)$ を点 $p \in M$ における写像芽とする. ただし, $P = f(p) \in N$ とする. 点 p が, f の**特異点**であるとは, $\operatorname{rank} df_p < \min\{m,n\}$ を満たすときをいう. いま, $S(f)(\subset (M,p))$ で, f の特異点集合を表す. 本稿では, 主として $(m,n) = (1,2),(2,2),(2,3)$ の場合を扱う.

定義 2.1. $f_i\colon (M_i^m,p_i) \to (N_i^n,P_i)$ $(i = 1,2)$ を写像芽とする. このとき, f_1 が f_2 に $\mathcal{A}$ **同値**であるとは, 微分同相写像芽 $\varphi\colon (M_1^m,p_1) \to (M_2^m,p_2)$ と $\Phi\colon (N_1^n,P_1) \to (N_2^n,P_2)$ が存在し, $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ が成り立つときをいう.

定義 2.2. $f\colon (M^m,p) \to (N^n,P)$ を写像芽とする.

(1) $(m,n) = (1,2)$ とする. このとき, f が p で**カスプ**を持つとは, f が $t \mapsto (t^2,t^3)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう.

(2) $(m,n) = (2,2)$ とする. このとき, f が p で**折り目特異点**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^2)$ に $\mathcal{A}$ 同値となるときをいい, f が p で**ホイットニー・カスプ**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^3+uv)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう.

(3) $(m,n) = (2,3)$ とする. このとき, f が p で**カスプ辺**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^2,v^3)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう.

注意 2.3. 折り目特異点を与える写像芽 $f\colon (\boldsymbol{R}^2,0) \ni (u,v) \mapsto (u,v^2) \in (\boldsymbol{R}^2,0)$ に対して, 特異点集合は, $S(f) = \{v = 0\}$ となる. よって, その像は, $f(S(f)) = \{(u,0)\}$ であり, これは, 正則曲線に $\mathcal{A}$ 同値であることを意味している. 一方, ホイットニー・カスプを与える写像芽 $f\colon (\boldsymbol{R}^2,0) \ni (u,v) \mapsto (u,v^3+uv) \in (\boldsymbol{R}^2,0)$ に対して, その特異点集合 $S(f)$ は, $S(f) = \{u + 3v^2 = 0\}$ で与えられ, 曲線 $\gamma(v) = (-3v^2,v)$ でパラメータ表示される. このとき, $f \circ \gamma(v) = (-3v^2,-2v^3)$ で与えられ, 特異点集合の像がカスプに $\mathcal{A}$ 同値とわかる (図 1).

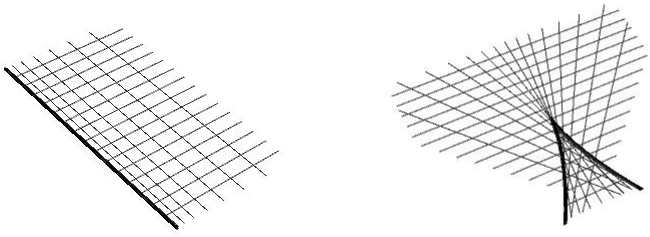


図 1　折り目特異点 (左) とホイットニー・カスプ (右). 太い曲線は, 特異点集合の像.

2.2　カスプを持つ球面曲線のカスプ的曲率

$(I;t)$ を $\boldsymbol{R}$ の開区間とし, $\sigma\colon I \to S^2(\subset \boldsymbol{R}^3)$ を球面曲線とする. 点 $t_0 \in I$ を σ の特異点, つまり, $(d\sigma/dt)(t_0) = \dot{\sigma}(t_0) = \boldsymbol{0}$ とする. このとき, t_0 がカスプであるための必要十分条件は,

$$\det(\sigma, D_t\dot{\sigma}, D_tD_t\dot{\sigma})(t_0) \neq 0$$

であることが知られている ([7, 16]). ただし, D は S^2 の共変微分であり, $D_t = D_{d/dt}$ を表す.

点 t_0 にカスプを持つ球面曲線 σ に対して, **カスプ的曲率** μ を

$$\mu = \left.\frac{\det(\sigma(t), D_t\dot{\sigma}(t), D_tD_t\dot{\sigma}(t))}{|D_t\dot{\sigma}(t)|^{5/2}}\right|_{t=t_0} \tag{2.1}$$

と定める ([19, 20]). これは, カスプの開き具合を表す量であり, 定義域の向きを保つ微分同相写像や S^2 の剛性運動によらない. 一般に, カスプを持つ 2 次元リーマン多様体上の曲線に対して, カスプ的曲率が定義できることを注意しておく.

定義 2.4. $\sigma\colon I \to S^2$ を球面曲線で, t_0 においてカスプを持つとする. このとき, t_0 が σ の**正のカスプ**または**ジグ** (resp. **負のカスプ**または**ザグ**) であるとは, t_0 でカスプ的曲率 μ が正 (resp. 負) のときをいう.



図 2　ジグ (左) とザグ (右). ジグの場合, 曲線はカスプにおいて進行方向に右折する.

2.3　カスプ辺の幾何学的性質

$(U;u,v) \subset \boldsymbol{R}^2$ を開領域とし, $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ をフロント, $\nu\colon U \to S^2$ を f のガウス写像とする. また, 点 $p \in U$ を f の特異点とする. 関数 $\lambda\colon U \to \boldsymbol{R}$ を

$$\lambda(u,v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u,v) \quad (f_u = \partial f/\partial u,\ f_v = \partial f/\partial v) \tag{2.2}$$

とし, f の**符号付き面積密度関数**と呼ぶ. 特異点の定義から, $p \in S(f)$ であることと, $\lambda(p) = 0$ であることは同値である. 点 $p \in S(f)$ が f の**非退化特異点**であるとは, $(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0,0)$ を満たすときをいう. 点 p が f の非退化特異点であるとき, $\operatorname{rank} df_p = 1$ であることに注意する. また, 陰関数定理より, 正則曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ $(\varepsilon > 0)$ で, $\gamma(0) = p$, $\lambda(\gamma(t)) = 0$ を満たすものが存在する. この曲線 γ を f の**特異曲線**と呼ぶ. さらに, p が非退化特異点のとき, U 上の零でないベクトル場 η で, γ に沿って $df(\eta) = \boldsymbol{0}$ を満たすものが存在する. このベクトル場 η を**退化ベクトル場**と呼ぶ.

事実 2.5 ([11, 18])**.** フロント f が点 p でカスプ辺を持つための必要十分条件は, p が非退化特異点であり, $\eta\lambda(p) \neq 0$ を満たすことである.

この事実は, 定義域において $\det(\gamma', \eta)(0) \neq 0$ が成り立つことと同値である. 特に, p の近傍で特異曲線の各点はカスプ辺からなり, 特異曲線の f による像は正則空間曲線である. カスプ辺の周りで, 次の座標系が取れることが知られている ([11, 13, 17]).

定義 2.6. カスプ辺 p を中心とする局所座標系 $(U; u, v)$ で,

- u 軸が特異曲線を与える,
- $\eta = \partial_v$ が退化方向を与える,
- u 軸のほかに特異点がない

を満たすものが存在するとき, この局所座標系を, **適合的座標系**と呼ぶ. さらに, 適合的座標系において $\{f_u, f_{vv}, \nu\}$ が u 軸に沿って正規直交枠を与えるとき, $(U; u, v)$ を**特別な適合的座標系**という.

さて, カスプ辺に沿って次の不変量が知られている: **特異曲率** κ_s ([4, 17]), **極限法曲率** κ_ν ([13, 17]), **カスプ的曲率** κ_c ([13]), **カスプ的捩率** κ_t ([12]), **変曲曲率** κ_i ([12]). 特別な適合的座標系を用いると, これらは次のように与えられる.

$$\kappa_s(u) = \det(f_u, f_{uu}, \nu)(u, 0), \quad \kappa_\nu(u) = \langle f_{uu}, \nu \rangle (u, 0), \quad \kappa_c(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{vvv})(u, 0),$$
$$\kappa_t(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{uvv})(u, 0), \quad \kappa_i(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{uuu})(u, 0).$$

特に, κ_i は, $\kappa_i(u) = \kappa_\nu'(u) + \kappa_s(u)\kappa_t(u)$ を満たす ([12, 24]). また, 極限法曲率 κ_ν とカスプ的曲率 κ_c の積からなる, **積曲率** $\kappa_\Pi = \kappa_\nu \kappa_c$ が知られている ([13]). 特異曲率 κ_s と積曲率 κ_Π はそれぞれカスプ辺の**内在的不変量**である ([4, 13, 17]). 特に, 特異曲率 κ_s は, カスプ辺の凹凸に関係しており (図 3, [17]), 積曲率 κ_Π は, ガウス曲率の挙動に関係している ([13]). ここで, ガウス写像 ν に対して, $\Lambda(u, v) = \det(\nu, \nu_u, \nu_v)(u, v)$ とすると, f のガウス曲率 K は, 正則点集合 $U \setminus S(f)$ 上で, $K = \Lambda/\lambda$ で与えられる波面の内在的不変量である.

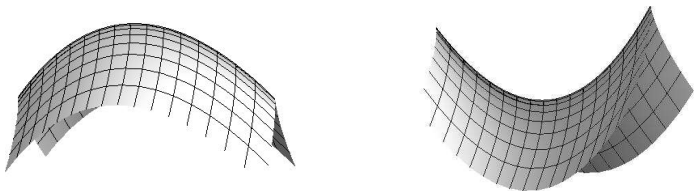


図 3　κ_s が正のカスプ辺 (左) と負のカスプ辺 (右).

上述の不変量を用いることで, 次のカスプ辺の特徴づけができる.

事実 2.7 ([10, 13, 17, 23]). $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ をフロント, $\nu\colon U \to S^2$ を f のガウス写像, $p \in U$ をカスプ辺, γ を p を通る特異曲線とする. このとき, 次が成立する.

(1) f のガウス曲率 K が p の十分小さい近傍上で有界であるための必要十分条件は, κ_ν が γ 上で零となることである.
(2) f のガウス曲率 K が p で有理的有界 (resp. 有理的連続) であるための必要十分条件は, $\kappa_\nu(p) = 0$ (resp. $\kappa_\nu(p) = \kappa_\nu'(p) = 0$) であることである.
(3) 特異曲線 γ が f の曲率線であるための必要十分条件は, κ_t が γ 上零であることである.

ここで, ガウス曲率 K が点 p で**有理的有界** (resp. **有理的連続**) であるとは, 点 p を中心として極座標 (r,θ) をとるとき, 有限個の θ を除いて, $r\to 0$ で K が有界 (resp. 連続) となることである (詳細は, [13] 参照). また, ガウス写像 ν が点 p で特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu(p)=0$ であることから, ガウス曲率 K が有理的有界であることと, ν が p で特異点を持つことは同値である ([13]). これは, $\Lambda(p)=0$ とも同値であることに注意する ([24]).

2.4 カスプ辺のガウス写像の特異点

$f\colon U\to \boldsymbol{R}^3$ を点 p でカスプ辺を持つフロントとし, ν をそのガウス写像で点 p において特異点を持つものとする. このとき, 関数 $\Lambda=\det(\nu,\nu_u,\nu_v)$ は, $\Lambda(p)=0$ であり, さらに $(\Lambda_u(p),\Lambda_v(p))\neq(0,0)$ を満たすとする. このような点を ν **の非退化特異点**いう. フロントの非退化特異点の場合と同様に, 陰関数定理から, 正則曲線 $\sigma\colon(-\delta,\delta)\ni\tau\mapsto\sigma(\tau)\in U$ $(\delta>0)$ で, $\sigma(0)=p$, $\Lambda(\sigma(\tau))=0$ を満たすものが存在する. この曲線 σ を f **の放物点曲線**または, ν **の特異曲線**と呼ぶ. ガウス写像 ν が点 p で折り目特異点やホイットニー・カスプを持つとき, 点 p は非退化特異点であることに注意する. また, 点 p が ν のホイットニー・カスプであるとき, $\check{\nu}(\tau)=\nu\circ\sigma(\tau)$ は, $\tau=0$ でカスプを持つ球面曲線になる (注意 2.3 参照).

定義 2.8 ([17, 19])**.** 点 p でカスプ辺を持つフロント f のガウス写像 ν が, 点 p でホイットニー・カスプを持つとする. このとき, 点 p が ν の**正のカスプ** (resp. **負のカスプ**) であるとは, $\check{\nu}=\nu\circ\sigma$ のカスプ的曲率 μ^ν が正 (resp. 負) であるときをいう. ただし, σ は, 点 p を通る f の放物点曲線である. 点 p が ν の正のカスプ (resp. 負のカスプ) のとき, p を $\check{\nu}$ の**ジグ** (resp. **ザグ**) という.

次の節で, カスプ辺がある条件を満たす場合, カスプ辺の不変量とホイットニー・カスプの符号の関係について述べる. そのために, ホイットニー・カスプの判定条件と不変量の関係を述べる. カスプ辺が, 事実 2.7 の (1), (2), (3) のどれかを満たす場合, ガウス写像の特異点は, 次のように特徴づけられる.

命題 2.9 ([24])**.** $f\colon U\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in U$ にカスプ辺を持つフロントとし, $\nu\colon U\to S^2$ をそのガウス写像とする. また, ガウス写像 ν は, 点 p で特異点を持つとする.

(1) f のガウス曲率 K が p の十分近くで有界であるとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)\neq 0$ である.
- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)=0$, $\kappa_t'(p)\neq 0$, $\kappa_s(p)\neq 0$ である.

(2) K が点 p で有理的連続であるとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)(4\kappa_t(p)^2+\kappa_s(p)\kappa_c(p)^2)\neq 0$ である.
- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)=0$, $\kappa_s(p)\neq 0$, $\kappa_i'(p)\neq 0$ である.

(3) f の特異曲線 γ が曲率線を与えているとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu'(p)\neq 0$ である.

- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu'(p) = 0$, $\kappa_s(p) \neq 0$, $\kappa_\nu''(p) \neq 0$ である.

この命題から, 次のことが分かる.

命題 2.10 ([25]). $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を点 p にカスプ辺を持つフロントとし, ν をそのガウス写像で点 p においてホイットニー・カスプを持つものとする. さらに, 命題 2.9 にある条件 (1), (2), (3) のどれか一つを満たすとする. このとき, 点 p を通る f の特異曲線 γ の接ベクトルと f の放物点曲線 σ の接ベクトルは, 点 p で平行になる.

また, 有界なガウス曲率を持つカスプ辺に対して次のことが言える.

定理 2.11 ([25]). $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ をフロント, $p \in U$ をカスプ辺, ν を f のガウス写像とする. フロント f のガウス曲率 K が, 点 p の十分近くで有界であり, ガウス写像が点 p で, 折り目特異点以外の非退化特異点を持つとする. このとき, K が p の近くで正 (resp. 負) であるための必要十分条件は, κ_s が p で負 (resp. 正) になることである.

3 ある性質を持つカスプ辺のガウス写像に現れるホイットニー・カスプの符号

上記の準備をもとにして, 本稿の主結果を述べる.

定理 3.1 ([25]). $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を点 p でカスプ辺を持つフロント, $\nu\colon U \to S^2$ を f のガウス写像とする. 点 p で, ガウス写像 ν がホイットニー・カスプを持ち, フロント f が次の条件のうち一つを満たしているとする:

(1) f のガウス曲率 K が p の十分近くで有界,
(2) f のガウス曲率 K が p で有理的連続,
(3) f の特異曲率 γ が曲率線を与える.

さらに, 特異曲線 γ と放物点曲線 σ が, $\gamma'(0) \cdot \dot{\sigma}(0) > 0$ を満たしているとする. ただし, ドット '$\cdot$' は, $\boldsymbol{R}^2$ の標準内積を意味する. このとき, 点 p が ν の正のカスプ (resp. 負のカスプ) であるための必要十分条件は, $\kappa_s(p) > 0$ (resp. $\kappa_s(p) < 0$) が成り立つことである.

この定理から, ガウス写像が正のカスプ (resp. 負のカスプ) を持つためには, カスプ辺は凸 (resp. 凹) でなければならないことが分かる. また, 放物点曲線の向きを変えると, ジグとザグが入れ替わることに注意しておく.

定理 2.11 と定理 3.1 から, 次のことが分かる.

系 3.2 ([25]). 定理 3.1 の仮定の下, ガウス曲率がカスプ辺 p の近くで有界であるとする. このとき, ガウス曲率が p の近くで正 (resp. 負) ならば, p はガウス写像の負のカスプ (resp. 正のカスプ) である. 即ち, 点 p は $\tilde{\nu}$ のザグ (resp. ジグ) となる.

このことから, カスプ辺の近くで有界なガウス曲率を持つフロントのガウス写像には, ジグもしくはザグのどちらか一方しか現れないことが分かる.

例 3.3. $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(u,v) = \left(u, 3u^2 + \frac{v^2}{2}, \frac{v^3}{3} + u^4 + u^2v^2\right)$$

とする. これは, 原点にカスプ辺を持つ写像であり, $S(f)$ は u 軸に一致する. 対応するガウス写像 ν は,

$$\nu(u,v) = \frac{\big(8u^3 - 2uv(v-3), -2u^2 - v, 1\big)}{\sqrt{1 + (v+2u^2)^2 + (8u^3 - 2uv(v-3))^2}}$$

で与えられる. 直接計算から, 極限法曲率 κ_ν は, u 軸に沿って零であり,

$$\kappa_s(u) = \frac{6\left(1 + 24u^4 + 64u^6\right)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 64u^6}\,(1 + 36u^2 + 16u^6)^{3/2}}, \quad \kappa_t(u) = \frac{4u}{1 + 4u^2 + 64u^4}$$

を得る. したがって, $\kappa_t(0) = 0$, $\kappa_s(0) = 6 > 0$, $\kappa_t'(0) = 4 \neq 0$ とわかるので, ν は, 原点に ホイットニー・カスプを持つ. また, ガウス曲率 K は有界であり, 原点の十分近くで負になる. 実際, K は,

$$K = \frac{2\left(-3 - 8u^2 + v\right)}{\left(1 + 64u^6 + v^2 + u^4\left(4 + 96v - 32v^2\right) + 4u^2v\left(1 + 9v - 6v^2 + v^3\right)\right)^2}$$

と表される.

一方, 放物点曲線は u 軸であり, $\check{\nu}(u) = \nu(u,0)$ は,

$$\check{\nu}(u) = \frac{\big(8u^3, -2u^2, 1\big)}{\sqrt{1 + 4u^4 + 64u^6}}$$

となる. これは $u = 0$ にカスプを持ち, カスプ的曲率 μ^ν は,

$$\mu^\nu = 6 = \frac{2\kappa_s(0)}{\sqrt{|\kappa_t'(0)|}} > 0$$

である. よって, 原点は, ν の正のカスプ, つまり, $\check{\nu}$ のジグである.(図 4).

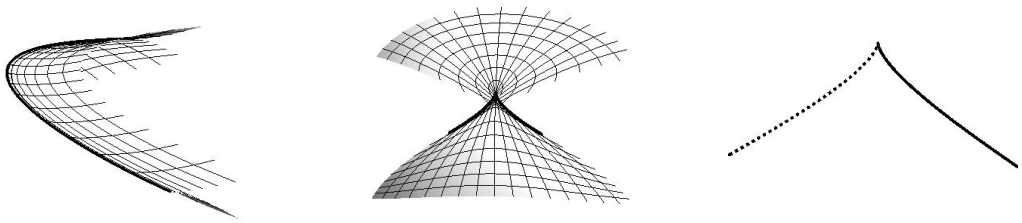


図 4　例 3.3 で与えられたカスプ辺 (左), ガウス写像 (中央) と $\check{\nu}$ (右) の像. 太い曲線は, 放物点曲線の像.

例 3.4. $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(u,v) = \left(u, -u^2 + \frac{1}{2}v^2, \frac{1}{3}v^3 + u^4\right)$$

で与えられる写像とする．これは原点にカスプ辺を持ち, 特異点集合は, $S(f)=\{v=0\}$ である．また, 退化方向は, $\eta=\partial_v$ で与えられている．対応するガウス写像 ν は,

$$\nu(u,v)=\frac{\left(-4u^3-2uv,-v,1\right)}{\sqrt{1+v^2+4u^2(2u^2+v)^2}}$$

である．フロント f に対して,

$$\kappa_s(u)=\frac{-2+64u^6}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)^{3/2}},\quad \kappa_\nu(u)=\frac{12u^2}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)},$$
$$\kappa_t(u)=\frac{24u^3}{(1+16u^6)(1+4u^2+16u^6)},\quad \kappa_i(u)=-\frac{24u(-1+2u^2+56u^6)}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)^{5/2}},$$

$\kappa_c(0)=2$ が成り立ち, 正則点集合で, ガウス曲率 K は,

$$K=\frac{2\left(6u^2+v\right)}{v\left(1+16u^6+16u^4v+v^2+4u^2v^2\right)^2}$$

となる．したがって, $\kappa_\nu(0)=\kappa_\nu'(0)=0$, $\kappa_\nu''(0)=24\neq 0$, $\kappa_t(0)=0$, $\kappa_s(0)\kappa_i'(0)=-48\neq 0$ を得る．これは, K が原点において有理的連続であり, ν が原点でホイットニー・カスプを持つことを意味している．

直接計算より, ν の特異点集合は, $S(\nu)=\{(u,v)\in\boldsymbol{R}^2\mid 6u^2+v=0\}$ であり, したがって, 放物点曲線 σ は, $\sigma(u)=(u,-6u^2)$ で与えられる．さらに, $\sigma'(0)=(1,0)=\gamma'(0)$ とわかる．放物点曲線の ν による像 $\check{\nu}(u)=\nu(\sigma(u))$ は,

$$\check{\nu}(u)=\frac{\left(8u^3,6u^2,1\right)}{\sqrt{1+36u^4+64u^6}}$$

で与えられる．この曲線 $\check{\nu}$ の $u=0$ におけるカスプ的曲率 μ^ν は,

$$\mu^\nu=\frac{-2}{\sqrt{3}}=2\kappa_s(0)\sqrt{\left|\frac{\kappa_s(0)}{\kappa_i'(0)}\right|}<0.$$

よって, 原点は ν の負のカスプである (図 5).

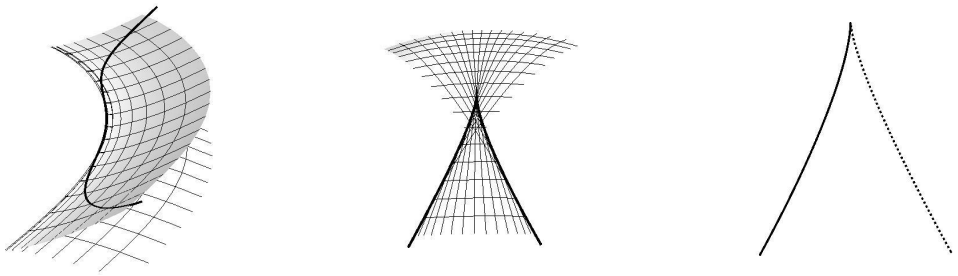


図 5　左: 例 3.4 のカスプ辺の像．太い曲線は, 放物点曲線の像．中央: ガウス写像 ν の像．右: $\check{\nu}$ の像．破線は $u<0$ の部分を表し, 太い曲線は $u>0$ の部分を表している．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I.*, Monographs in Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Math. **55**, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.

[3] D. Bleecker and L. Wilson, Stability of Gauss maps, *Illinois J. Math.* **22** (1978), 279–289.

[4] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic properties of surfaces with singularities, *Intarnat. J. Math.* **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.

[5] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate signular points, arXiv:1710.02999.

[6] G. Ishikawa and Y. Machida, Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature, *Internat. J. Math.* **17** (2006), no. 3, 269–293.

[7] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[8] S. Izumiya and K. Saji, The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces, *J. Singul.* **2** (2010), 92–127.

[9] S. Izumiya, K Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), no. 3, 789–849.

[10] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, Flat surfaces along cuspidal edges, *J. Singul.* **16** (2017), 73–100.

[11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), no. 2, 303–351.

[12] L. F. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, *Canad. J. Math.* **68** (2016), no. 2, 445–462.

[13] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat. **154**, Springer, Tokyo, 2016.

[14] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Isometric deformations of cuspidal edges, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), no. 1, 73–90.

[15] R. Oset Sinha and F. Tari, On the flat geometry of the cuspidal edge, *Osaka J. Math.* **55** (2018), no. 3, 393–421.

[16] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces, Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math. (2)* **169**

(2009), no. 2, 491–529.

[18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, A_k singularities of wave fronts, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **146** (2009), no. 3, 731–746.

[19] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The duality between singular points and inflection points on wave fronts, *Osaka J. Math.* **47** (2010), no. 2, 591–607.

[20] S. Shiba and M. Umehara, The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, *Differential Geom. Appl.* **30** (2012), 285–299.

[21] K. Teramoto, Parallel and dual surfaces of cuspidal edges, *Differential Geom. Appl.* **44** (2016), 52–62.

[22] K. Teramoto, Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space, *Glasgow Math. J.* (2018). https://doi.org/10.1017/S0017089518000277

[23] K. Teramoto, Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts, to appear in *Adv. Geom.* (DOI 10.1515/advgeom-2018-0038), arXiv:1612.00577v2.

[24] K. Teramoto, Singularities of Gauss maps of wave fronts with non-degenerate singular points, arXiv:1806.08140.

[25] K. Teramoto, On cusps of Gauss maps of cuspidal edges with certain properties, preprint.

[26] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), 374–410.

有向グラフ上の量子ウォークが定める行列とグラフの同型問題

東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻
久保田匠 (Sho KUBOTA)

概要

与えられたふたつのグラフが同型かどうかを判定する方法のひとつに，グラフから定まる行列の固有値を用いるというものがある．無向グラフの場合，グラフの隣接行列の固有値は，グラフの同型判定を完全に行うことは出来ずとも，グラフの良い不変量となっている．一方，有向グラフの場合，隣接行列の固有値はグラフの同型判定の道具としてはあまり機能しない．以上を踏まえた上で，本講演では有向グラフ上で定義される量子ウォークから定まるある行列をグラフの同型判定に用いる．これによって，有向グラフの良い不変量を与える．

1　グラフ理論の基本事項

グラフとは，大雑把にいえば「点」とそれらを結ぶ「辺」からなる図形である．右に表したものはグラフのひとつの例である．この棒人間に見えなくもない図形において，右腕と左腕に対応する部分はユークリッド距離の意味での長さは異なるが，本稿で扱うグラフにおいては 2 点が辺で「結ばれているかそうでないか」にだけ興味がある．したがって，集合論的にグラフを記述しようとした場合，このグラフは頂点を表す集合

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

と辺を表す集合

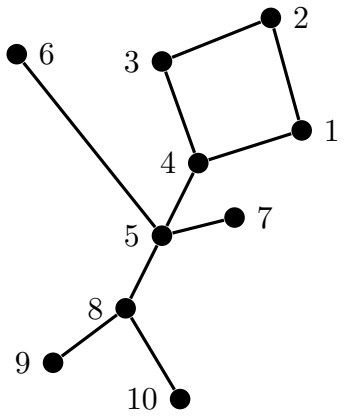


図 1: グラフの例

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}\}$$

のペア (V, E) と書くべきであろう．

より厳密には，(有限単純) グラフ X とは，集合のペア $(V(X), E(X))$ のことで，$V(X)$ は空でない有限集合であり，$E(X)$ は $V(G)$ の 2 点部分集合の集合である．$V(X)$ をグラフ X の点集合または頂点集合といい，$V(X)$ の元を頂点という．$E(X)$ を X の辺集合といい，$E(X)$ の元を辺という．また，$\{x, y\} \in E(X)$ であるとき，x と y は隣接しているといい，$x \sim y$ で表す．

代表的なグラフの例をあげておこう．

Example 1.1 (完全グラフ)**.** 位数 n の完全グラフ K_n とは，

$$V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$E(K_n) = \{\{x, y\} \mid x, y \in V(X), x \neq y\}$$

で定まるグラフである．つまり，n 頂点からなるグラフで，どの相異なる 2 点も隣接しているグラフである．

Example 1.2 (完全 2 部グラフ)**.** $V_1 = \{1, \ldots, m\}, V_2 = \{m+1, \ldots, m+n\}$ とおく．完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ とは

$$V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2,$$
$$E(K_{m,n}) = \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

で定まるグラフである．つまり，V_1 内，V_2 内にはそれぞれ全く辺が無いが，V_1, V_2 間には必ず辺があるグラフである．

完全 2 部グラフのように，点集合のある分割 $V = V_1 \sqcup V_2$ が存在して，V_1 内，V_2 内にはそれぞれ全く辺が無いようにできるとき，そのグラフは 2 部グラフであるという．2 頂点の完全グラフ K_2 は 2 部グラフであるが，3 頂点の完全グラフ K_3 は 2 部グラフではない．一般に，3 頂点以上の完全グラフは勝手な 3 頂点を選ぶと必ず “三角形” が出来てしまうので 2 部グラフではない．

グラフ X の点 x と隣接している点の集合を x の近傍といい，$N(x)$ で表す．$N(x)$ の元の個数は x の次数と呼ばれ，$\deg x$ と書かれる．例えば，図 1 の棒人間的なグラフにおいては $N(1) = \{2, 4\}$ であるから $\deg 1 = 2$ であり，$N(5) = \{4, 6, 7, 8\}$ であるから $\deg 5 = 4$ である．また，グラフの任意の点 x の次数が常に k であるとき，そのグラフは k-正則グラフであるという．

点 x において，$\deg x$ は x と隣接している点の個数であるが，これを点 x に接続している辺の個数と見ると，次数の総和は，各辺を 2 回ずつカウントすることになるので次の命題が成り立つ．この主張は握手補題として大変よく知られている．

Theorem 1.3. グラフ X において次が成り立つ：

$$\sum_{x\in V(X)} \deg x = 2|E(X)|$$

特に，グラフの頂点の次数の総和は常に偶数である．

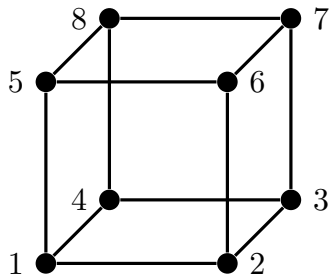
2　隣接行列とその基本的な性質

スペクトラルグラフ理論においては，グラフから様々な行列を定義し，その固有値を解析することを通してグラフを解析する．グラフの性質が固有値の性質としてどのように現れるか，あるいは，固有値の性質を見てグラフの何が分かるのか，グラフの不変量を固有値を用いて評価することができるか，固有値によってグラフを特徴づけることはできるか，など考察できる問題は数多く存在する．

グラフから定まる行列のうち，最も代表的なものは隣接行列であろう．X をグラフとする．このとき，X の隣接行列 $A(X)$ とは，$V(X)$ によって添え字付けられる行列で，

$$A(X)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \sim y, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義される行列である．隣接行列の固有値の多重集合をグラフのスペクトルという．グラフとその隣接行列の例を下に与える．

$X =$ 

$$\leftrightarrow\ A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

隣接行列の対角成分は常に 0 であるから，そのトレースも 0 である．したがって，グラフの固有値の総和は常に 0 となる．また，グラフ X の隣接行列を A とすると，

$$A^2_{xy} = \sum_{z\in V(X)} A_{xz}A_{zy} = \#\{z \in V(X) \mid x \sim z, z \sim y\} = |N(x) \cap N(y)|$$

となる．特に，$A^2_{xx} = |N(x)| = \deg x$ である．したがって，握手補題から

$$\operatorname{tr} A^2 = \sum_{x\in V(X)} A^2_{xx} = \sum_{x\in V(X)} \deg x = 2|E(X)|$$

が成立することが分かる．

また，隣接行列の第 x 行を見たとき，その行に現れる 1 の数は $\deg x$ 個であるから，グラフが正則グラフの場合は，隣接行列の行和は常に一定である．これは，成分がすべて 1 であるベクトル $\mathbf{1}$ が固有ベクトルとして現れることに他ならない．このように，グラフの性質は固有値や固有ベクトルの性質として反映されるケースが非常に多い．この他にも，グラフが 2 部グラフかそうでないかも固有値によって判定することができる．

Example 2.1 (完全グラフのスペクトル)**.** 完全グラフのスペクトルを計算してみよう．J_n を成分がすべて 1 の n 次正方行列とし，I_n を n 次の単位行列とすると，$A(K_n) = J_n - I_n$ とかける．よって，J_n の固有値が分かれば良い．J_n のランクは 1 であるから $\dim \mathrm{Ker}\, J_n = n - 1$ より，0 は J_n の固有値でありその重複度は $n - 1$ である．残りの固有値については，$\mathbf{1}$ が固有値 n に対する固有ベクトルとなっているから結局 J_n の固有値は n がひとつ，0 が $n - 1$ 個である．したがって，$\mathrm{Spec}(K_n) = \{n - 1^{(1)}, -1^{(n-1)}\}$ と分かる．

Example 2.2 (完全 2 部グラフのスペクトル)**.** 次は，完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ のスペクトルを求める．$K_{m,n}$ の隣接行列は，

$$A(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} O & J_{m,n} \\ J_{m,n}^{\top} & O \end{bmatrix}$$

とかける．ここで，$J_{m,n}$ はすべての成分が 1 である $m \times n$ 行列を表す．$A(K_{m,n})$ のランクは 2 であるから，0 は $A(K_{m,n})$ の固有値でその重複度は $m + n - 2$ である．また，少し考えると固有値 $\sqrt{mn}$ の固有ベクトルを見つけることができる．さらに，固有値の総和が 0 だったことを思い出すと，残りの固有値は $-\sqrt{mn}$ に決まる．したがって，$\mathrm{Spec}(K_{m,n}) = \{\sqrt{mn}^{(1)}, 0^{(m+n-2)}, -\sqrt{mn}^{(1)}\}$ と分かる．

3　有向グラフとその隣接行列

先までのセクションでは，向きの無いグラフを考え，その隣接行列の固有値の考察を行った．以降では，辺に向きをもつグラフ，すなわち有向グラフについて考えてみよう．

無向グラフでは，集合とその 2 点部分集合の集合のペアでもって無向グラフの定義を与えた．有向グラフでは，向きをもつ辺の集合として点集合 V の順序対 $V \times V$ の部分集合を考えるのが自然である．ただし，今回はループを持たないものを考えたいので，(x, x) のような順序対は持たないこととする．きちんと書くと，有向グラフ X

とは，集合のペア $(V(X), D(X))$ のことで，$V(X)$ は空でない有限集合であり，$D(X)$ は $V(X) \times V(X) \setminus \{(x,x) \mid x \in V(X)\}$ の部分集合である．$V(X)$ をグラフ X の頂点集合といい，$V(X)$ の元を頂点という．また，$D(X)$ の元を有向辺または弧という．$(x,y) \in D(X)$ であるとき，$x \to y$ で表す．

有向グラフの隣接行列も，無向グラフのときと同様に定めることができる．X を有向グラフとする．このとき，X の隣接行列 $A(X)$ とは，$V(X)$ によって添え字付けられる行列で，

$$A(X)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \to y, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義される行列である．隣接行列の固有値の多重集合を有向グラフのスペクトルという．

無向グラフの場合，隣接行列の固有値はグラフの不変量としてそれなりに強いが，有向グラフの場合はどうだろうか．次の例を考える．

Example 3.1 (transitive tournament)**.** n 頂点の transitive tournament T_n とは，隣接行列が次のようにして与えられる有向グラフである：

$$A(T_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

この行列は，対角成分がすべて 0 である上三角行列であるから $\mathrm{Spec}(T_n) = \{0^{(n)}\}$ である．対角成分がすべて 0 である上三角行列を隣接行列にもつ有向グラフは数多く存在する．実際，transitive tournament の任意の「部分グラフ」である

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

を隣接行列にもつ有向グラフを考えると，任意の $a_{ij} \in \{0,1\}$ に対してこの有向グラフのスペクトルが transitive tournament と同じであることは明らかであろう．transitive tournament の例に限らず，有向グラフのスペクトルはグラフの不変量としてはそれほど強くないことが Guo–Mohar の論文 [5] からも分かる． このような背景があり，我々は有向グラフから定まる行列で，ある程度不変量として強いものが欲しいと考えている．

4　無向グラフ上の量子ウォーク

近年，グラフ上の量子ウォークが盛んに研究されている．量子ウォークにおいては，量子探索問題をはじめとして，物理や工学への応用が期待できる研究もあれば，周期性に関する考察など，数学的な興味としてランダムウォークとの対比の研究など様々な問題がある．一方で，量子ウォークから定まるある行列の固有値が，強正則グラフと呼ばれるあるグラフクラスの特別なシチュエーションにおいては「グラフの同型性を完全に識別できる」という結果を出した [3]． この考察によって，量子ウォークを定める行列や量子ウォークが定める行列がグラフの同型問題を解くための道具として注目されるようになった．

Grover walk と呼ばれる量子ウォークは，シフト作用素とコイン作用素と呼ばれるふたつの行列 (作用素) の積によって定義される．また，コイン作用素は境界作用素を用いて定義される．無向グラフ $X = (V, E)$ において，辺集合の各辺を双方向の弧からなる弧の集合と見たものを A とする，すなわち，$A = \{(x, y), (y, x) \mid \{x, y\} \in E\}$ とする．また，弧 a の始点を $o(a)$, 終点を $t(a)$ とかき，a の逆向きの弧を a^{-1} で表す．複素数を成分とする行列で行が V, 列が A によって添え字付けられる行列 K を

$$K_{v,a} = \frac{1}{\sqrt{\deg v}}\delta_{v,t(a)}$$

によって定める．ここで，δ はクロネッカーのデルタである．また，A によって添え字付けられる行列 S を

$$S_{ab} = \delta_{a,b^{-1}}$$

によって定義し，

$$C = 2K^*K - I$$

とする．ここで定義した K, S, C はそれぞれ境界作用素，シフト作用素，コイン作用素と呼ばれ，本来はヒルベルト空間上での線形作用素として定義されるが，私は代数的グラフ理論，あるいはスペクトラルグラフ理論の立場から量子ウォークの研究を行いたいと思っているため，必要に迫られない限り作用素はすべて行列の言葉に書き換えている．また，

$$U = SC$$

によって定まる行列を Grover transfer matrix といい，この U を時間発展作用素として定まる量子ウォークを Grover walk と呼ぶ．S, C がユニタリであることは直ちに確かめ

られるので，したがって U もユニタリ行列 (作用素) である．なお，U の (e, f) 成分は次のように計算することができる．

$$U_{ef} = \frac{2}{\deg_X(t(f))}\delta_{t(f),o(e)} - \delta_{e^{-1},f}.$$

U の固有値解析については非常に多くの結果が知られているが，ここでは解説しない．

実数を成分とする行列 M の正台 M^+ とは

$$(M^+)_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{if } M_{ab} > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定まる行列である．U の 3 乗の正台 $(U^3)^+$ は，あるパラメータの強正則グラフを固有値によって完全に識別し，「強正則グラフの同型問題は $(U^3)^+$ の固有値で完全に解決できる」という予想が立つほど盛り上がったこともかつてはあったが，この予想は Godsil らによって否定的に解決された [4]．しかしながら，量子ウォークを媒介して定義された行列がスペクトラルグラフ理論で活躍したことは大変興味深く，面白いといえるだろう．

5　有向グラフ上の Grover walk

先のセクションでは，無向グラフ上で Grover walk を定義した．本研究の目的は，この無向グラフ上での Grover walk を有向グラフ上に拡張することである．また，それが可能な場合，我々は新たな「(有向) グラフから定まる行列」を手に入れることができたことになり，その行列の固有値の不変量としての強さを考察するべきである．以上のことについて，現在 (2018 年 12 月 17 日) までに分かっていることをまとめて本稿を締めくくりたい．また，以下の研究は横浜国立大学の瀬川悦生氏と広島工業大学の谷口哲至氏との共同研究に基づく．

有向グラフ $X = (V, D)$ において，$D^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in D\}$ とし，$D^{\pm 1} = D \cup D^{-1}$ と定める．弧の集合として $D^{\pm 1}$ をもつグラフ $X^{\pm 1} = (V, D^{\pm 1})$ は，いわゆる X の underlying graph と呼ばれる無向グラフである．X の点 x について，その次数 $\deg_X x$ を

$$\deg_X x = \deg_{X^{\pm 1}} x$$

によって定める．これから定義する有向グラフ上の Grover walk でも，“波” は $D^{\pm 1}$ 上を動いてもらうが，有向辺上を動くときだけ適切な重みをつけておく．そのようにして量子ウォークを定める行列を定義してしまえば，それはもはや有向グラフ上の量子ウォークと呼んでよいだろう．

有向グラフ $X = (V, D)$ に対し，複素数を成分とする行列で行が V, 列が $D^{\pm 1}$ によって添え字付けられる行列 K を

$$K_{v,a} = \frac{1}{\sqrt{\deg v}} \delta_{v,t(a)}$$

によって定める．また，実数 η に対して，$D^{\pm 1}$ を定義域とする実数値関数 θ を

$$\theta(a) = \begin{cases} \eta & \text{if } a \in D \setminus D^{-1}, \\ -\eta & \text{if } a \in D^{-1} \setminus D, \\ 0 & \text{if } a \in D \cap D^{-1} \end{cases}$$

と定める．(後を見ると分かるが，η は実質的には回転角，すなわち有理数倍の π を想定している．) また，$D^{\pm 1}$ によって添え字付けられる行列 S_θ を

$$(S_\theta)_{ab} = e^{i\theta(b)} \delta_{a,b^{-1}}$$

によって定義し，

$$C = 2K^* K - I$$

とする．そして，量子ウォークを定める時間発展作用素を

$$U_\theta = S_\theta C$$

と定める．S_θ, C はやはりユニタリであるから，U_θ もまたユニタリ行列である．また，$D^{\pm 1}$ によって添え字付けられる対角行列 D_θ を $(D_\theta)_{ab} = e^{i\theta(a)} \delta_{a,b}$ によって定める．本稿では，U_θ の正台に関する結果をまとめる．

Definition 5.1. X を関数 θ を兼ね備えた有向グラフとする．正の整数 n に対して，$D^{\pm 1}$ で添え字付けられる行列 $U_\theta^{n,+}$ を

$$(U_\theta^{n,+})_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{Re}(D_\theta U_\theta^n)_{ab} > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定め，U_θ の n 乗の正台と呼ぶ.

このような定義を与えたのは，無向グラフ上の Grover transfer matrix の正台と類似性を持たせるためである．実際，1 乗の正台に関しては，$\mathrm{Re}(D_\theta U_\theta)_{ab}$ が正であることと，U_{ab} が正であることが同値になり，したがって次のことが分かる．

Proposition 5.2. 次が成り立つ：

$$U_\theta^{1,+} = U^+.$$

また，X が k-regular な有向グラフで $k \geq 3$ ならば

$$U_\theta^{1,+} = kSK^*K - S.$$

が成り立つ．

2 乗の正台については次のことが分かった．

Proposition 5.3. X を関数 θ を兼ね備えた k-regular な有向グラフで $k \geq 3$ とする．$-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$ ならば，次が成り立つ：

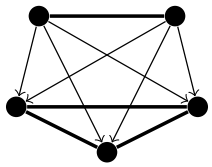
$$U_\theta^{2,+} = (U^+)^2 + I.$$

以上の命題は，例えば $\eta = \pm\frac{\pi}{2}$ の場合は一般には成立しない．しかしながら，この「一般には成立しない」という状況こそが有向グラフの固有値による識別という観点からは都合が良い．

Example 5.4. n を正の整数とし，$a \in \{0, 1, \ldots, n\}$ とする．Guo–Mohar はエルミート隣接行列と呼ばれる，有向グラフから定まる行列で隣接行列とはまた違ったものを定義した．以下に定めるグラフ $Y_{a,n-a}$ は，そのエルミート隣接行列の意味で完全グラフ K_n と同じスペクトルをもつグラフである．

$$\begin{aligned} V(Y_{a,n-a}) &= [n] = \{1, 2, \ldots, n\}, \\ D(Y_{a,n-a}) &= \{(x, y) \mid x, y \in [a], x \neq y\} \\ &\quad \sqcup \{(x, y) \mid x, y \in [n] \setminus [a], x \neq y\} \\ &\quad \sqcup \{(x, y) \mid x \in [a], y \in [n] \setminus [a]\}. \end{aligned}$$

例えば，$Y_{2,3}$ は次のグラフである．太字の無向辺は双方向の弧を表している．



この $Y_{a,n-a}$ の固有値による識別に関して，次のことが分かった．

Proposition 5.5. $\eta = \frac{\pi}{2}$ とする．また，$a \geq n-a$, $a' \geq n-a'$ (i.e., $a, a' \geq \frac{n}{2}$) とする．もし $a \neq a'$ ならば

$$\Phi(U_\theta^{2,+}(Y_{a,n-a})) \neq \Phi(U_\theta^{2,+}(Y_{a',n-a'})).$$

が成り立つ．ここで，$\Phi(U_\theta^{2,+}(X))$ は，有向グラフ X における $U_\theta^{2,+}$ の固有多項式を表す．

今後，様々なグラフクラスにおいて，$U_\theta^{n,+}$ の同型不変量としての強さを調べていくつもりである．実際にはもう少し分かっていることもあるが，紙面の都合上本稿はここで締めくくることにする．

参考文献

[1] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.

[2] Dragoš M. Cvetković, M. Doob, S. Horst, *Spectra of graphs*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.

[3] David Emms, Edwin R. Hancock, Simone Severini, and Richard C. Wilson, *A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant*, Electr. J. Comb., 13(1), 2006.

[4] C. Godsil, K. Guo, and T. G. J. Myklebust, *Quantum walks on generalized quadrangles*, arXiv:1511.01962.

[5] K. Guo, B. Mohar, *Hermitian adjacency matrix of digraphs and mixed graphs*, J. Graph Theory 85 (1) (2017) 217–248.

[6] C.D. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer, New York, 2001.

[7] 仁平政一，西尾義典，「グラフ理論序説」，プレアデス出版，2010.

曲がった薄膜領域上の ナヴィエ・ストークス方程式に関する特異極限問題

東京大学 大学院数理科学研究科
三浦達彦 (Tatsu-Hiko MIURA)*†

概要

薄膜領域とは空間内のある方向への幅が他の方向に比べて非常に小さい領域である．本講演では膜の厚さがゼロに近づくときに与えられた 2 次元閉曲面に退化するような 3 次元空間内の曲がった薄膜領域を扱い, 滑り境界条件を課した薄膜領域上のナヴィエ・ストークス方程式を考える．本講演の目的は膜の厚さがゼロに近づくときの方程式の解の挙動を調べ, 薄膜領域上の方程式から極限曲面上の極限方程式を導出することである．

1 導入

薄膜領域とは空間内のある（1 つまたは複数の）方向への幅が他の方向に対して非常に小さい領域である．薄い板や細長い棒のような薄膜領域は弾性体の分野における主要な研究対象であり, また物質の反応や拡散, 流体運動などの自然現象を偏微分方程式により数理モデル化する際にも多く現れる．例えば, シャーレを用いた化学実験, 細胞膜中の物質輸送, 海流や大気の流れのような地球流体, 細い血管を流れる血液などが薄膜領域上の偏微分方程式により数理モデル化される現象である．

薄膜領域上の偏微分方程式の数学解析においては領域の幅の小ささに応じて方程式の適切性や解の性質などがどのように変化するかを調べることが主な問題となる．例えば, 3 次元のナヴィエ・ストークス方程式の適切性の成否は永年の未解決問題である一方 2 次元ではその成立がよく知られているため, 2 次元領域に近い 3 次元薄膜領域での方程式の適切性は 2 次元の場合にどの程度「近い」かを調べる研究が行われている．また, 薄膜領域が膜の厚さゼロの極限で低次元集合に退化する際, 薄膜領域上の方程式（薄膜方程式）の解は何らかの意味で極限集合上の方程式（極限方程式）に漸近すると予想される．そのような極限方程式を発見し, 薄膜方程式との比較を行うことで薄膜領域上の現象における極限集合と膜の厚さ方向の影響を明らかにすることも重要な問題である．

上記の問題に関する数学研究は Hale–Raugel による反応拡散方程式の研究 [5] に始まり, これまで主に反応拡散方程式とナヴィエ・ストークス方程式について様々な研究が行われてきた．Hale–Raugel [5] は低次元領域に退化する平らな薄膜領域における反応拡散方程式とその極限方程式の固有値や力学系の比較を行った．反応拡散方程式に関する研究はその後 L 字型の薄膜領域 [6] や低次元多様体に退化する曲がった薄膜領域 [17] など様々な形状の薄膜領域の場合に拡張されている（薄

* 本研究は科研費 (課題番号:16J02664) の助成を受けたものである．
† 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科, e-mail: thmiura@ms.u-tokyo.ac.jp

膜領域の形状の例については [18] を参照せよ）．一方, ナヴィエ・ストークス方程式については Raugel–Sell [19] による 2 次元領域に退化する平らな 3 次元薄膜領域における方程式の適切性の研究が最初の結果であり, 以後平らな薄膜領域上でディリクレ, 周期, 滑りなど様々な境界条件を課したナヴィエ・ストークス方程式が研究されている [7, 8, 25]. また, Temam–Ziane [26] は 3 次元の薄い球殻（2 つの球面の間の領域）におけるナヴィエ・ストークス方程式を考え, 方程式の適切性の証明や薄膜方程式と極限方程式の比較を行った. 超曲面に退化する曲がった薄膜領域上の偏微分方程式の数学解析については論文 [9, 20, 27] のように膜の厚さゼロ極限における薄膜領域上のラプラス作用素の固有値の漸近挙動に関する研究が多い. しかし, 曲がった薄膜領域上の発展方程式については上述の研究 [17, 26] の他にはあまり研究がなされていないのが現状である.

そこで, 本講演では 3 次元の曲がった薄膜領域上で次のナヴィエ・ストークス方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \qquad\qquad \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \qquad\qquad u^\varepsilon \cdot n_\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \Gamma_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \qquad P_\varepsilon[\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon) n_\varepsilon] + \gamma_\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{on} \quad \Gamma_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \qquad\qquad u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで Ω_ε は膜の厚さが $\varepsilon > 0$ のオーダーであるような $\mathbb{R}^3$ 内の有界な曲がった薄膜領域, Γ_ε は Ω_ε の境界, n_ε は Γ_ε の外向き単位法線ベクトル, $P_\varepsilon a := a - (a \cdot n_\varepsilon) n_\varepsilon$ はベクトル $a \in \mathbb{R}^3$ の境界 Γ_ε における接線方向成分, $\nu > 0$ は ε に依存しない粘性係数, $\gamma_\varepsilon \geq 0$ は ε に依存する摩擦係数である. また I_3 を 3 次単位行列として応力テンソルを次で定める：

$$\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon) := 2\nu D(u^\varepsilon) + p^\varepsilon I_3 \quad \left(D(u^\varepsilon) := \frac{\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T}{2} \text{ は歪み速度テンソル} \right).$$

方程式 (1.1) の第 1 式は流体の運動量保存則を, 第 2 式は（非圧縮流体に対する）質量保存則を表す. また第 3 式は「流体が領域の内外に出入りしない」という物理的状況を, 第 4 式は「流体が領域の境界で応力ベクトル $\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon) n_\varepsilon$ の接線方向成分に比例する速度で摩擦力を受けながら滑る」という状況を表す. これらの境界条件は Navier [15] が提唱したものであり, （ナヴィエの）滑り境界条件と呼ばれている. 特に $\gamma_\varepsilon = 0$, $\gamma_\varepsilon > 0$ の場合はそれぞれ完全滑り, 部分滑り境界条件と呼ばれることもある. また第 4 式の両辺を γ_ε で割り $\gamma_\varepsilon \to \infty$（摩擦力無限大）とすると通常のディリクレ境界条件（滑り無し境界条件）$u^\varepsilon = 0$ on Γ_ε を得る. なお $P_\varepsilon n_\varepsilon = 0$ であるため (1.1) の第 4 式は

$$2\nu P_\varepsilon D(u^\varepsilon) n_\varepsilon + \gamma_\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\varepsilon \times (0,\infty)$$

という圧力 p^ε に依存しない形で表されることに注意する（講演では初めからこの形式で書く）.

本講演の目的は (1.1) の解 u^ε の $\varepsilon \to 0$ での挙動を調べることである. 具体的には, $\varepsilon \to 0$ のとき Ω_ε が与えられた 2 次元閉曲面 Γ に退化するという仮定の下, u^ε の膜の厚さ方向への積分平均が Γ 上の適切な関数空間内で収束し, かつその極限が Γ 上の極限方程式の解であることを示す.

2 記号

本節では主定理を述べるために必要な記号を与える. 時間の都合上, 講演中はいくつかの記号について注意するにとどめる. また本節で与える関数などは特に指定がなければ全て十分滑らかであると

仮定する. 関数の正則性などに関する詳細な設定については [12] を参照せよ.

以下では $\mathbb{R}^3$ の直交座標系を 1 つ取って固定し, $x \in \mathbb{R}^3$ と $i = 1, 2, 3$ に対して x_i を固定された座標系での x の第 i 成分とする. また I_3 を 3 次単位行列とし, $\mathbb{R}^3$ 内のベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ とベクトル場 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ に対して次のように記号を定める：

$$a \otimes b := \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 & \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \quad \left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$$(\varphi \cdot \nabla) u := \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \partial_i u = (\varphi \cdot \nabla u_1, \varphi \cdot \nabla u_2, \varphi \cdot \nabla u_3).$$

2.1 2 次元閉曲面

Γ を $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた連結な 2 次元閉曲面（コンパクトかつ境界を持たない曲面）とし, その外向き単位法線ベクトルを n とする. また κ_1 と κ_2 を Γ の主曲率とし, $H := \kappa_1 + \kappa_2$ と $K := \kappa_1 \kappa_2$ を Γ の平均曲率（の 2 倍）とガウス曲率とする. Γ の接平面への直交射影 $P = (P_{ij})_{i,j}$ を $P := I_3 - n \otimes n$ で定め, Γ 上の関数 η に対してその接勾配 $\nabla_\Gamma \eta$ と接微分 $\underline{D}_i \eta$ を次のように定める：

$$\nabla_\Gamma \eta := P \nabla \tilde{\eta}, \quad \underline{D}_i \eta := \sum_{j=1}^{3} P_{ij} \partial_j \tilde{\eta} \quad \text{on} \quad \Gamma, \ i = 1, 2, 3.$$

ここで $\tilde{\eta}$ は $\mathbb{R}^3$ 内での Γ の開近傍への η の拡張であるが, $\nabla_\Gamma \eta$ と $\underline{D}_i \eta$ の値は $\tilde{\eta}$ の選び方にはよらないことに注意する（例えば [4, Section 16.1] を見よ）. 次に, 法線方向成分を含む Γ 上のベクトル場 $v = (v_1, v_2, v_3)$ に対して接勾配行列 $\nabla_\Gamma v$, 曲面上の歪み速度テンソル $D_\Gamma(v)$, 曲面発散 $\mathrm{div}_\Gamma v$ を

$$\nabla_\Gamma v := \begin{pmatrix} \underline{D}_1 v_1 & \underline{D}_1 v_2 & \underline{D}_1 v_3 \\ \underline{D}_2 v_1 & \underline{D}_2 v_2 & \underline{D}_2 v_3 \\ \underline{D}_3 v_1 & \underline{D}_3 v_2 & \underline{D}_3 v_3 \end{pmatrix}, \quad D_\Gamma(v) := P \left(\frac{\nabla_\Gamma v + (\nabla_\Gamma v)^T}{2} \right) P,$$

$$\mathrm{div}_\Gamma v := \mathrm{tr}[\nabla_\Gamma v] = \sum_{i=1}^{3} \underline{D}_i v_i \quad \text{on} \quad \Gamma \quad (\text{tr は行列のトレースを表す})$$

で定める. また Γ 上のベクトル場 $v = (v_1, v_2, v_3)$ と $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ に対して

$$(\eta \cdot \nabla_\Gamma) v := \sum_{i=1}^{3} \eta_i \underline{D}_i v = (\eta \cdot \nabla_\Gamma v_1, \eta \cdot \nabla_\Gamma v_2, \eta \cdot \nabla_\Gamma v_3) \quad \text{on} \quad \Gamma$$

と書き, 行列値関数 $A \colon \Gamma \to \mathbb{R}^{3 \times 3}$ に対して $\mathrm{div}_\Gamma A = ([\mathrm{div}_\Gamma A]_1, [\mathrm{div}_\Gamma A]_2, [\mathrm{div}_\Gamma A]_3)$ を次で定める：

$$[\mathrm{div}_\Gamma A]_j := \sum_{i=1}^{3} \underline{D}_i A_{ij} \quad \text{on} \quad \Gamma, \ j = 1, 2, 3 \quad \left(\text{ここで } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ である} \right).$$

次に Γ 上の関数空間を定義する. 関数 $\eta, \xi \in C^1(\Gamma)$ と $i = 1, 2, 3$ に対して部分積分公式

$$\int_\Gamma (\eta \underline{D}_i \xi + \xi \underline{D}_i \eta) \, d\sigma = - \int_\Gamma \eta \xi H n_i \, d\sigma \quad (d\sigma \text{ は } \Gamma \text{ の面積要素, } n_i \text{ は } n \text{ の第 } i \text{ 成分})$$

が成り立つことが知られている（例えば [4, Lemma 16.1] を見よ, ただし本稿では平均曲率 H を曲面 Γ の次元 2 で割っていないことに注意せよ）. この公式に基づき, Γ 上の L^2 関数の弱接微分を次のように定義する：$\eta \in L^2(\Gamma)$ と $i = 1, 2, 3$ に対して $\eta_i \in L^2(\Gamma)$ が存在し, 全ての $\xi \in C^1(\Gamma)$ に対して

$$\int_\Gamma \eta_i \xi \, d\sigma = -\int_\Gamma \eta(\underline{D}_i \xi + \xi H n_i) \, d\sigma$$

となるとき η_i を η の弱接微分と呼び $\underline{D}_i \eta = \eta_i$ と書く. また Γ 上のソボレフ空間を

$$H^1(\Gamma) := \{\eta \in L^2(\Gamma) \mid \underline{D}_1 \eta, \underline{D}_2 \eta, \underline{D}_3 \eta \in L^2(\Gamma)\}$$

で定め, $\mathcal{X} = L^2, H^1$ と Γ 上の関数 g に対して Γ 上の接ベクトル場の関数空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\Gamma, T\Gamma) &:= \{v = (v_1, v_2, v_3) \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{X}(\Gamma),\ v \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\ \mathcal{X}_{g\sigma}(\Gamma, T\Gamma) &:= \{v \in \mathcal{X}(\Gamma, T\Gamma) \mid \mathrm{div}_\Gamma(gv) = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned}$$

で定める. さらに $H^{-1}(\Gamma, T\Gamma)$ を $H^1(\Gamma, T\Gamma)$ の双対空間とし,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \{w(x) = a \times x + b,\ x \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}^3,\ w|_\Gamma \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\ \mathcal{K}(\Gamma) &:= \{v \in H^1(\Gamma, T\Gamma) \mid D_\Gamma(v) = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned}$$

とする. $w \in \mathcal{R}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の微小な回転と平行移動の合成を表すベクトル場であって Γ 上接ベクトル場となるものである. また $v \in \mathcal{K}(\Gamma)$ であるとき Γ 上の任意の接ベクトル場 X と Y に対して

$$\overline{\nabla}_X v \cdot Y + X \cdot \overline{\nabla}_Y v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \quad (\text{ここで } \overline{\nabla}_X v := P(X \cdot \nabla_\Gamma) v \text{ は共変微分を表す})$$

が成り立ち, したがって v は（$\mathbb{R}^3$ の内積から定まる）Γ のリーマン計量を保存する. このようなベクトル場は Γ 上のキリングベクトル場と呼ばれる（詳しくは [16, 23] などを見よ）. 直接計算によって $\mathcal{R}$ の元の Γ への制限は $\mathcal{K}(\Gamma)$ の元となること, すなわち $\mathcal{R}|_\Gamma := \{w|_\Gamma \mid w \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$ であることが分かる. 集合 $\mathcal{R}|_\Gamma$ は $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた曲面 Γ の外在的な無限小対称性を表し, $\mathcal{K}(\Gamma)$ は抽象的なリーマン多様体 Γ の内在的な無限小対称性を表す. 閉曲面 Γ が $\mathbb{R}^3$ 内の回転面または凸曲面のときは $\mathcal{R}|_\Gamma = \mathcal{K}(\Gamma)$ となることが知られているが, 他の閉曲面で同じ関係が成り立つかは分かっていない.

2.2 曲がった薄膜領域

g_0 と g_1 を Γ 上の関数として, ある定数 $c > 0$ が存在して次の不等式が成り立つと仮定する：

$$g := g_1 - g_0 \geq c \quad \text{on} \quad \Gamma.$$

このとき十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbb{R}^3$ 内の曲がった薄膜領域 Ω_ε とその内側と外側の境界 $\Gamma_\varepsilon^0, \Gamma_\varepsilon^1$ を

$$\Omega_\varepsilon := \{y + rn(y) \mid y \in \Gamma,\ r \in (\varepsilon g_0(y), \varepsilon g_1(y))\}, \quad \Gamma_\varepsilon^i := \{y + \varepsilon g_i(y) n(y) \mid y \in \Gamma\}, \quad i = 0, 1$$

で定め, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma_\varepsilon^0 \cup \Gamma_\varepsilon^1$ を Ω_ε の境界全体とする. Ω_ε 上の関数 φ に対して

$$M\varphi(y) := \frac{1}{\varepsilon g(y)} \int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y + rn(y)) \, dr, \quad y \in \Gamma$$

と定め, M を膜の厚さ方向への平均作用素と呼ぶ. またベクトル場 $u \colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ に対してその平均の接線方向成分を $M_\tau u := PMu$ で表す（$M_\tau u$ は Γ 上の接ベクトル場である）.

3　主定理と証明の概要

本講演の主定理に必要な仮定を与える. γ_ε^0 と γ_ε^1 を非負の定数として Γ_ε 上の摩擦定数を

$$\gamma_\varepsilon := \gamma_\varepsilon^i \quad \text{on} \quad \Gamma_\varepsilon^i,\ i = 0, 1$$

で定める. また関数空間を

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_i &:= \{w \in \mathcal{R} \mid w|_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma g_i = 0 \text{ on } \Gamma\}, \quad i = 0, 1, \\
\mathcal{R}_g &:= \{w \in \mathcal{R} \mid w|_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma g = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\
\mathcal{K}_g(\Gamma) &:= \{v \in \mathcal{K}(\Gamma) \mid v \cdot \nabla_\Gamma g = 0 \text{ on } \Gamma\}
\end{aligned}$$

で定め, $\mathcal{R}_g|_\Gamma := \{w|_\Gamma \mid w \in \mathcal{R}_g\}$ とする. 定数 γ_ε^0, γ_ε^1 と閉曲面 Γ に対して以下の仮定を課す：

仮定 3.1. ある定数 $c > 0$ が存在して $i = 0, 1$ と任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $\gamma_\varepsilon^i \le c\varepsilon$ が成り立つ.

仮定 3.2. 以下の条件のいずれかが成り立つ：

(A1) ある定数 $c > 0$ が存在して $\gamma_\varepsilon^0 \ge c\varepsilon$ または $\gamma_\varepsilon^1 \ge c\varepsilon$ が任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して成り立つ.
(A2) $\mathcal{K}_g(\Gamma) = \{0\}$.
(A3) $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_g|_\Gamma = \mathcal{K}_g(\Gamma)$ かつ任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $\gamma_\varepsilon^0 = \gamma_\varepsilon^1 = 0$ が成り立つ.

これらの仮定は滑り境界条件の下での Ω_ε 上のストークス作用素 A_ε に対する一様ノルム同値性

$$c^{-1}\|u\|_{H^k(\Omega_\varepsilon)} \le \|A_\varepsilon^{k/2}u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c\|u\|_{H^k(\Omega_\varepsilon)}, \quad u \in D(A_\varepsilon^{k/2}),\ k = 1, 2$$
($c > 0$ は ε によらない定数, $D(A_\varepsilon^{k/2}) \subset L^2(\Omega_\varepsilon)^3$ は作用素 $A_\varepsilon^{k/2}$ の定義域)

を示すのに必要となるが, 本講演ではこのことに関する説明は行わない（詳しくは [12] を見よ）.

注意 3.3. 仮定 3.2 の条件 (A2) について, 閉曲面 Γ の種数が 2 以上の場合は $\mathcal{K}(\Gamma) = \{0\}$, すなわち Γ 上の非自明なキリングベクトル場は存在しないことが知られている（例えば [21, Proposition 2.2] を見よ）. したがってこの場合は任意の関数 $g = g_1 - g_0$ に対して条件 (A2) が満たされる. また条件 (A3) が成り立つ典型的な例は $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 に退化するような薄い球殻

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < |x| < 1 + \varepsilon\} \quad (\Gamma = S^2,\ g_0 = 0,\ g_1 = 1)$$

である. この場合は S^2 上 $\nabla_\Gamma g_0 = \nabla_\Gamma g_1 = \nabla_\Gamma g = 0$ であり

$$\mathcal{R} = \{w(x) = a \times x,\ x \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}^3\}, \quad \mathcal{R}|_{S^2} = \mathcal{K}(S^2) = \{w(y) = a \times y,\ y \in S^2 \mid a \in \mathbb{R}^3\}$$

となる. ただしこの場合はナヴィエ・ストークス方程式 (1.1) を完全滑り境界条件

$$u \cdot n_\varepsilon = 0, \quad P_\varepsilon D(u) n_\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\varepsilon$$

の下で考えることに注意する. 上記の薄い球殻におけるナヴィエ・ストークス方程式は滑り境界条件とは別の境界条件の下で Temam–Ziane [26] により研究され, 膜の厚さ ε が十分小さいときの方程式の適切性の証明および $\varepsilon \to 0$ での極限方程式の導出が行われている. 論文 [26] で導出された S^2 上の極限方程式と本研究で得られた極限方程式の比較については [12, Remark 1.11] を参照せよ.

薄膜領域 Ω_ε における L^2 ソレノイダル空間を

$$L^2_\sigma(\Omega_\varepsilon) = \{u \in L^2(\Omega_\varepsilon)^3 \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon,\ u \cdot n_\varepsilon = 0 \text{ on } \Omega_\varepsilon\}$$

で表し, 仮定 3.1 と 3.2 の下で Ω_ε 上の関数空間 $\mathcal{H}_\varepsilon$ と $\mathcal{V}_\varepsilon$ を

$$\mathcal{H}_\varepsilon := \begin{cases} L^2_\sigma(\Omega_\varepsilon) & \text{(条件 (A1) または (A2) が満たされている場合),} \\ L^2_\sigma(\Omega_\varepsilon) \cap \mathcal{R}_g^\perp & \text{(条件 (A3) が満たされている場合),} \end{cases}$$
$$\mathcal{V}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon)^3 \cap \mathcal{H}_\varepsilon$$

で定める. ただし $\mathcal{R}_g^\perp$ は $\mathcal{R}_g$ の $L^2(\Omega_\varepsilon)^3$ における直交補空間である.

以上の設定の下, 本講演での主定理を述べる.

定理 3.4 ([12, Theorem 1.6])**.** 仮定 3.1 と 3.2 の下, $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$u_0^\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \quad f^\varepsilon \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{H}_\varepsilon)$$

とする. さらに以下の条件が成り立つと仮定する：

(a) ある定数 $c > 0$, $\varepsilon_1 \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$ が存在して任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ に対して

$$\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|f^\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega_\varepsilon))} \le c\varepsilon^{-1+\alpha}$$

が成り立つ.

(b) ある $v_0 \in L^2(\Gamma, T\Gamma)$ と $f \in L^\infty(0,\infty;H^{-1}(\Gamma,T\Gamma))$ が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\tau u_0^\varepsilon = v_0 \quad \text{weakly in} \quad L^2(\Gamma,T\Gamma),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\tau f^\varepsilon = f \quad \text{weakly-}\star \text{ in} \quad L^\infty(0,\infty;H^{-1}(\Gamma,T\Gamma))$$

が成り立つ.

(c) $i = 0, 1$ に対してある定数 $\gamma^i \ge 0$ が存在して $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\gamma_\varepsilon^i = \gamma^i$ が成り立つ.

このときある定数 $\varepsilon_2 \in (0,1)$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ に対して (1.1) の時間大域的な強解

$$u^\varepsilon \in C([0,\infty);\mathcal{V}_\varepsilon) \cap L^2_{loc}([0,\infty);H^2(\Omega_\varepsilon)^3) \cap H^1_{loc}([0,\infty);\mathcal{H}_\varepsilon)$$

が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Mu^\varepsilon \cdot n = 0 \quad \text{strongly in} \quad C([0,\infty);L^2(\Gamma))$$

が成り立つ. さらに Γ 上の接ベクトル場

$$v \in C([0,\infty);L^2_{g\sigma}(\Gamma,T\Gamma)) \cap L^2_{loc}([0,\infty);H^1_{g\sigma}(\Gamma,T\Gamma)) \cap H^1_{loc}([0,\infty);H^{-1}(\Gamma,T\Gamma))$$

が存在し, 任意の $T > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\tau u^\varepsilon = v \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H^1(\Gamma,T\Gamma)),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \partial_t M_\tau u^\varepsilon = \partial_t v \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma,T\Gamma))$$

が成り立ち, かつ v は以下の方程式の唯一の弱解である：

$$\begin{cases} g\Big(\partial_t v + \overline{\nabla}_v v\Big) - 2\nu \left\{ P\mathrm{div}_\Gamma[gD_\Gamma(v)] - \dfrac{1}{g}(\nabla_\Gamma g \otimes \nabla_\Gamma g)v \right\} \\ \qquad\qquad +(\gamma^0+\gamma^1)v + g\nabla_\Gamma q = gf \quad \text{on} \quad \Gamma\times(0,\infty), \\ \qquad\qquad \mathrm{div}_\Gamma(gv) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma\times(0,\infty), \\ \qquad\qquad v|_{t=0} = v_0 \quad \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで $\overline{\nabla}_v v = P(v\cdot\nabla_\Gamma)v$ は接ベクトル場 v のそれ自身に沿った共変微分, q は流速 v に付随する圧力である. 方程式 (3.1) の弱解の定義については [12, Section 10.5] を参照せよ. 以下方程式 (3.1) を Ω_ε 上のナヴィエ・ストークス方程式 (1.1) の極限方程式と呼ぶ.

定理 3.4 の証明の概略を述べる. 証明は次の 4 つの段階からなる：

(1) 方程式 (1.1) の強解 u^ε の満たす弱形式から $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式を導出する.
(2) 平均の接線方向成分 $M_\tau u^\varepsilon$ に対するエネルギー評価を示す.
(3) 関数列 $\{M_\tau u^\varepsilon\}_\varepsilon$ の部分列が (3.1) の弱解に収束することを示す.
(4) 方程式 (3.1) の弱解の一意性を示し, 関数列 $\{M_\tau u^\varepsilon\}_\varepsilon$ 全体の (3.1) の弱解への収束を示す.

このうち (3) と (4) の議論は $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域におけるナヴィエ・ストークス方程式の弱解の構成およびその一意性の証明と同様である（例えば [2] を見よ）ので本稿および講演での説明は省略する.

(1) では薄膜領域 Ω_ε の膜の厚さ方向への平均作用素 M と積分の変数変換公式

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int_\Gamma \left(\int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y+rn(y))J(y,r)\,dr \right) d\sigma \quad (J(y,r)\ \text{はヤコビアン})$$

を用いて方程式 (1.1) の強解 u^ε の満たす弱形式（方程式に対応する試験関数との積に関する積分等式）をその平均の接線方向成分 $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式に変形する. ここで $M_\tau u^\varepsilon$ の弱形式に現れる残余項が ε に関して「十分小さい」ことを示すために (1.1) の強解 u^ε に対する一様評価

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c\varepsilon^{-1+\alpha}, \quad \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|^2_{H^2(\Omega_\varepsilon)}\,ds \le c\varepsilon^{-1+\alpha}(1+t), \quad t\ge 0$$

が必要となる（$c>0$ は ε によらない定数, 詳しくは [12, Theorem 8.4 and Section 10] を見よ）.

(2) では $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式を用いて $M_\tau u^\varepsilon$ に対するエネルギー評価を導く. 通常の 2 次元ナヴィエ・ストークス方程式の（近似）解に対するエネルギー評価は弱形式の試験関数に解そのものを代入することにより得られるが, $M_\tau u^\varepsilon$ はその弱形式における試験関数の空間 $H^1_{g\sigma}(\Gamma, T\Gamma)$ の元ではないためそれ自身を代入することはできない. そこで Γ 上の接ベクトル場 $v\in L^2(\Gamma,T\Gamma)$ に対する重み付きヘルムホルツ分解（詳しくは [12, Section 9] を参照せよ）

$$v = v_g + g\nabla_\Gamma q \quad \text{in} \quad L^2(\Gamma,T\Gamma), \quad v_g \in L^2_{g\sigma}(\Gamma,T\Gamma), \quad g\nabla_\Gamma q \in L^2_{g\sigma}(\Gamma,T\Gamma)^\perp$$

を用いて $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式をその重み付きソレノイダル部分 $v^\varepsilon \in H^1_{g\sigma}(\Gamma,T\Gamma)$ の満たす弱形式に変換する. その弱形式の試験関数に v^ε を代入することで v^ε のエネルギー評価を導出し, $M_\tau u^\varepsilon$ と v^ε の差分に対する評価と組み合わせることで $M_\tau u^\varepsilon$ のエネルギー評価を得る.

4　極限方程式と多様体上のナヴィエ・ストークス方程式

最後に極限方程式 (3.1) と抽象的なリーマン多様体上のナヴィエ・ストークス方程式との関係について述べる. 極限方程式 (3.1) は g が定数（例えば $g \equiv 1$）かつ $\gamma^0 = \gamma^1 = 0$ のとき

$$\partial_t v + \overline{\nabla}_v v - 2\nu P \mathrm{div}_\Gamma[D_\Gamma(v)] + \nabla_\Gamma q = f, \quad \mathrm{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0,\infty) \tag{4.1}$$

という形になる. また Ric を Γ のリッチ曲率, $\Delta_B = -\overline{\nabla}^* \overline{\nabla}$ を Γ 上のボホナーラプラシアンとする（例えば [24, Appendix C] を見よ）と, Γ は 2 次元曲面であるから Γ 上の接ベクトル場 v に対して $\mathrm{Ric}(v) = Kv$ が成り立ち, さらに v が Γ 上 $\mathrm{div}_\Gamma v = 0$ を満たすならば

$$2P\mathrm{div}_\Gamma[D_\Gamma(v)] = \Delta_B v + Kv \quad \text{on} \quad \Gamma$$

が成り立つ（証明は [13, Lemma 2.5] を参照せよ）. したがって方程式 (4.1) は

$$\partial_t v + \overline{\nabla}_v v - \nu\{\Delta_B v + \mathrm{Ric}(v)\} + \nabla_\Gamma q = f, \quad \mathrm{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0,\infty) \tag{4.2}$$

というリーマン多様体 Γ の内在的な量のみで表現される方程式となる. この方程式は論文 [3, 22] において「正しい」リーマン多様体上のナヴィエ・ストークス方程式と呼ばれており, Mitrea–Taylor [10], Nagasawa [14], Taylor [22] などにより研究されている. したがって極限方程式 (3.1) はリーマン多様体上の重み付きナヴィエ・ストークス方程式に消散項 $(\gamma^0 + \gamma^1)v$ を加えたものと考えられる.

ここで論文 [3, 22] による「正しい」という表現は粘性項 $\nu\{\Delta_B v + \mathrm{Ric}(v)\}$ の定め方に対するものである. リーマン多様体上のオイラー方程式（非圧縮非粘性流体の方程式）は (4.2) で $\nu = 0$ としたものであることが Arnol′d [1] により示されている（論文 [3] も参照せよ）. 一方で非圧縮粘性流体に対するナヴィエ・ストークス方程式については平らな空間での方程式

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$$

の類推から球面 S^2 や多様体 Γ 上の方程式では粘性項を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルラプラシアンの S^2 への制限や Γ 上のホッジラプラシアン $\Delta_D = -(d_\Gamma \delta_\Gamma + \delta_\Gamma d_\Gamma)$ とする論文が多い.（ここで d_Γ と δ_Γ は Γ 上の微分形式に対する外微分と余微分であり, また Γ のリーマン計量 θ を用いて Γ 上のベクトル場と 1 次微分形式を同一視している.）これに対して論文 [3, 22] では $\mathbb{R}^3$ での方程式の粘性項が歪み速度テンソル $D(u) = \{\nabla u + (\nabla u)^T\}/2$ の発散で与えられること, すなわち

$$2\,\mathrm{div}[D(u)] = \Delta u + \nabla(\mathrm{div}\, u) = \Delta u \quad (\text{第 2 式は } \mathrm{div}\, u = 0 \text{ による})$$

であることに着目し, Γ 上のベクトル場 v に対して歪み速度テンソル $\mathrm{Def}\, v$ を

$$(\mathrm{Def}\, v)(X,Y) := \frac{1}{2}\left\{\theta\Big(\overline{\nabla}_X v, Y\Big) + \theta\Big(X, \overline{\nabla}_Y v\Big)\right\} \quad (X \text{ と } Y \text{ は } \Gamma \text{ 上のベクトル場})$$

で定め作用素 Def と L^2 内積による（負号を付けない）形式的共役作用素 Def^* を用いて粘性項を

$$2\,\mathrm{Def}^*\mathrm{Def}\, v = -\Delta_B v - \nabla_\Gamma(\mathrm{div}\, v) - \mathrm{Ric}(v) = -\Delta_B v - \mathrm{Ric}(v) \quad (\text{第 2 式は } \mathrm{div}_\Gamma v = 0 \text{ による})$$

とするべきであると述べている．また三松–矢野 [11] は流体の粘性摩擦とそれによって引き起こされるエネルギー散逸に対する幾何学的考察を通じて多様体上のナヴィエ・ストークス方程式が (4.2) の形になることを示している．ところで $\Gamma = S^2$ のときに

$$v(y) = a \times y, \quad q(y) = \frac{1}{2}|v(y)|^2, \quad y \in S^2 \quad (a \in S^2, \times \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ でのベクトル積})$$

とすると v は S^2 上の接ベクトルであり, $\mathbb{R}^3$ の座標系を用いての直接計算により

$$D_\Gamma(v) = P\left(\frac{\nabla_\Gamma v + (\nabla_\Gamma v)^T}{2}\right)P = 0, \quad \overline{\nabla}_v v + \nabla_\Gamma q = 2D_\Gamma(v)v = 0, \quad \mathrm{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on} \quad S^2$$

であることが確かめられる．このことから原点を通る直線の周りの微小回転を表すベクトル場 v は球面 S^2 上の方程式 (4.1) の, したがって (4.2) の定常解であることが分かるが, 粘性項がベクトルラプラシアンやホッジラプラシアンのみの場合は v は定常解にはならない．このように「回転が球面上の流体方程式の解になる」という直感に合う結果が得られることからも方程式 (4.2) が「正しい」リーマン多様体上のナヴィエ・ストークス方程式であるように思われる．

参考文献

[1] V. I. Arnol′d, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[2] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, vol. 183, Springer, New York, 2013.

[3] D. G. Ebin and J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. (2), **92** (1970), 102–163.

[4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.

[5] J. K. Hale and G. Raugel, *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl. (9), **71** (1992), no. 1, 33–95.

[6] J. K. Hale and G. Raugel, *A reaction-diffusion equation on a thin L-shaped domain*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **125** (1995), no. 2, 283–327.

[7] L. T. Hoang and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions for an oceanic model*, J. Dynam. Differential Equations, **22** (2010), no. 3, 563–616.

[8] D. Iftimie, G. Raugel, and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations in thin 3D domains with Navier boundary conditions*, Indiana Univ. Math. J., **56** (2007), no. 3, 1083–1156.

[9] S. Jimbo and K. Kurata, *Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition*, Indiana Univ. Math. J., **65** (2016), no. 3, 867–898.

[10] M. Mitrea and M. Taylor, *Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Math. Ann., **321** (2001), no. 4, 955–987.

[11] 三松佳彦・矢野泰久, Riemann 多様体上の非圧縮流体の幾何, 数理解析研究所講究録, **1260** (2002), 33–47.

[12] T.-H. Miura, *Navier–Stokes equations in a curved thin domain*, preprint, arXiv:1811.09816.

[13] T.-H. Miura, *On singular limit equations for incompressible fluids in moving thin domains*, Quart. Appl. Math., **76** (2018), no. 2, 215–251.

[14] T. Nagasawa, *Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equations on Riemannian manifold by minimizing variational functionals*, Adv. Math. Sci. Appl., **9** (1999), no. 1, 51–71.

[15] C. L. M. H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France, **6** (1823), 389–440.

[16] P. Petersen, *Riemannian geometry*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, Cham, 2016.

[17] M. Prizzi, M. Rinaldi, and K. P. Rybakowski, *Curved thin domains and parabolic equations*, Studia Math., **151** (2002), no. 2, 109–140.

[18] G. Raugel, *Dynamics of partial differential equations on thin domains*, Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994), Lecture Notes in Math., vol. 1609, Springer, Berlin, 1995, pp. 208–315.

[19] G. Raugel and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations on thin* $3D$ *domains. I. Global attractors and global regularity of solutions*, J. Amer. Math. Soc., **6** (1993), no. 3, 503–568.

[20] M. Schatzman, *On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions*, Appl. Anal., **61** (1996), no. 3-4, 293–306.

[21] Y. Shimizu, *Green's function for the Laplace-Beltrami operator on surfaces with a non-trivial Killing vector field and its application to potential flows*, preprint, arXiv:1810.09523.

[22] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), no. 9-10, 1407–1456.

[23] M. E. Taylor, *Partial differential equations I. Basic theory*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 115, Springer, New York, 2011.

[24] M. E. Taylor, *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 116, Springer, New York, 2011.

[25] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations, **1** (1996), no. 4, 499–546.

[26] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, Optimization methods in partial differential equations (South Hadley, MA, 1996), Contemp. Math., vol. 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 281–314.

[27] T. Yachimura, *Two-phase eigenvalue problem on thin domains with Neumann boundary condition*, Differential Integral Equations, **31** (2018), no. 9-10, 735–760.

パラレルセッション
会場 A

トーリック多様体の第 2 Chern 指標

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
須山 雄介 (Yusuke SUYAMA) *

概要

本研究は佐藤拓氏（福岡大学）との共同研究である．非特異トーリック Fano 多様体に関しては，分類するアルゴリズムをはじめ数多くの研究があるが，Fano 多様体の高次化として，第 2 Chern 指標と任意の曲面との交点数が正である Fano 多様体を考えることができ，これを 2-Fano 多様体という．しかし，2-Fano 多様体は多くはなく，トーリック 2-Fano 多様体はこれまでのところ射影空間以外に例が知られていない．本稿では，$\mathbb{Q}$-分解的な場合にトーリック 2-Fano 多様体の類似を考え，そのような具体例を構成する．

1 トーリック多様体と扇

n 次元**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，**代数的トーラス** $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものである．

例 1.1. 代数的トーラス自身 $(\mathbb{C}^*)^n$, アフィン空間 $\mathbb{C}^n$, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ は n 次元トーリック多様体である．

2 つのトーリック多様体 X, X' は，代数多様体としての同型 $f : X \to X'$ で次を満たすものが存在するとき**同型**であるという．

(1) f は代数的トーラスの間の同型 $f' : (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ を誘導する．
(2) f は f' に関し同変である，すなわち，任意の $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ と $x \in X$ に対し，$f(tx) = f'(t)f(x)$ が成り立つ．

トーリック多様体は，扇とよばれる多面錐の有限集合から構成することができる．

定義 1.2. (1) $\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトル $v_1, \ldots, v_r$ で張られる多面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ で，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる部分空間も含まないものである．
(2) $\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，$\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ で次を満たすものである．
(i) $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
(ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

特に，$\{0\}$ は有理強凸多面錐であり，任意の扇は $\{0\}$ を含む．

* 本研究は科研費 (課題番号:18J00022) の助成を受けたものである．

$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する．まず，各有理強凸多面錐 $\sigma \in \Delta$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する．$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } v \in \sigma \text{ に対し } \langle u, v\rangle \geq 0\}$ とおくと，$\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ は和に関し可換モノイドになり，モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域になる．したがって $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ はアフィン代数多様体になるので，これを U_σ とおく．次にこれらを貼り合わせる．τ が σ の面ならば，包含写像 $\tau \to \sigma$ はモノイドの準同型 $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n \to \tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ を定め，更にこれが定める射 $U_\tau = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] = U_\sigma$ は開埋め込みになる．これにより U_τ を U_σ の開部分集合と同一視し，U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である．

注意 1.3. 更に，扇 Δ のデータから代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ のトーリック多様体 $X(\Delta)$ への作用を定めることができるが，本研究ではトーラスの作用は考えないので本稿では省略する．

例 1.4. (1) $0 \leq k \leq n$ に対し，$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_k \subset \mathbb{R}^n$ とすると，$U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ である．

(2) $\mathbb{R}^2$ の扇 Δ を

$$\begin{aligned}\Delta = &\{\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2),\\ &\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2), \mathbb{R}_{\geq 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2)\}\end{aligned}$$

で定めると（図 1），3 個の 2 次元多面錐に対応するアフィン代数多様体はいずれも $\mathbb{C}^2$ であり，それらが貼り合わさって $X(\Delta) = \mathbb{P}^2$ となる．

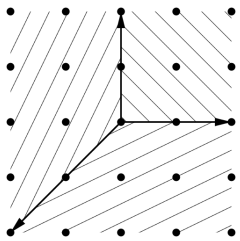


図 1　$\mathbb{P}^2$ を定める扇．

$\mathbb{R}^n$ の 2 つの扇は，$\mathbb{Z}^n$ の自己同型でそれらの間の全単射を誘導するものが存在するとき**同型**であるという．

定理 1.5. n 次元トーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇の同型類は，上述の構成法により 1 対 1 に対応する．

トーリック多様体は非常に特別な代数多様体であり，例えば同じ次元のトーリック多様体はすべて双有理同値であるが，定理 1.5 により，扇を与えることにより一般次元の代数多様体を具体的に数多く構成することができ，多様体の性質を，より扱いやすい扇の側で調べることができる．また，多面錐は $\mathbb{Z}^n$ のベクトルで張られるので，コンピューターとも相性がよい．

注意 1.6. (1) より正確には，トーリック多様体，扇にはそれぞれ射を定義することができて圏をなし，定理 1.5 の対応は圏同値を定める．

(2) トーリック多様体というと，空間だけでなく作用も込めて考えている．しかし，2 つの非特異で完備なトーリック多様体に対しては，代数多様体として同型であることと，トーリック多様体として同型であることは同値である [11].

2　トーリック多様体と扇の関係

$\mathbb{Z}^n$ のベクトルで，成分の最大公約数が 1 であるものを**原始ベクトル**とよぶ．Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．$\sigma \in \Delta$ の各 1 次元面に対し，それを張る原始ベクトルがただ 1 つ存在し，σ はそれらで張られる．

定義 2.1. Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．$\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \ldots, v_k$ を σ の 1 次元面を張る原始ベクトル全体とする．

(1) Δ が**非特異**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \ldots, v_k$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底に延長できることである．
(2) Δ が**単体的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \ldots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ の基底に延長できることである．
(3) Δ が**末端的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して，$\langle u, v_1 \rangle = \cdots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0, v_1, \ldots, v_k\}$ に対し $\langle u, v \rangle > j$ となることである．
(4) Δ が**標準的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して，$\langle u, v_1 \rangle = \cdots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$ に対し $\langle u, v \rangle \geq j$ となることである．
(5) Δ が**完備**であるとは $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$ となることである．

上の定義はトーリック多様体の性質に対応しており，これによりトーリック多様体に関する多くの問題が扇の問題に帰着される．

定理 2.2. Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．

(1) Δ が非特異であることと，$X(\Delta)$ が非特異であることは同値である．
(2) Δ が単体的であることと，$X(\Delta)$ が $\mathbb{Q}$-分解的であることは同値である．
(3) Δ が末端的であることと，$X(\Delta)$ が高々末端特異点のみをもつことは同値である．
(4) Δ が標準的であることと，$X(\Delta)$ が高々標準特異点のみをもつことは同値である．
(5) Δ が完備であることと，$X(\Delta)$ が完備であることは同値である．

明らかに，扇は非特異ならば単体的かつ末端的であり，末端的ならば標準的である．

注意 2.3.　(1) $\mathbb{R}^n$ の単体的な扇は，$n-1$ 次元球面の三角形分割の各頂点に原始ベクトルを書いて表すと便利であり，これにより $n = 4$ でも図に描くことができる．
(2) アフィントーリック多様体 U_σ の構成の過程では反変関手を 2 度施しており，二度手間に見えるが，このように構成することにより，定理 2.2 (5) のように，トーリック多様体と扇の対応が見やすくなるのである．

トーリック多様体の Picard 数や Euler 標数も容易に求めることができる．扇 Δ の r 次元多面錐全体を $\Delta(r)$ で表す．

定理 2.4. Δ を $\mathbb{R}^n$ の完備な扇とする．

(1) $X(\Delta)$ が $\mathbb{Q}$-分解的ならば，$X(\Delta)$ の Picard 数は $|\Delta(1)| - n$ に一致する．
(2) $X(\Delta)$ が非特異ならば，$X(\Delta)$ の Euler 標数は $|\Delta(n)|$ に一致する．

Picard 数が 1 の非特異完備トーリック多様体は射影空間しかない．

例 2.5. 例 1.4 (2) の扇は非特異で完備であり，対応するトーリック多様体 $\mathbb{P}^2$ は確かに非特異で完備である．$\mathbb{P}^2$ の Picard 数は 1 であり，Euler 標数は 3 である．

トーリック多様体 $X(\Delta)$ が射影的かどうかを扇 Δ の側で判定する方法もあるが，一定の条件を満たす関数が存在するという条件であり，他に比べて複雑である（詳細は [14] を参照）．具体的に扇が与えられたときに，対応するトーリック多様体が射影的かどうかを判定するのは一般には容易ではない．しかし，非特異で Picard 数が 3 以下の完備トーリック多様体や，$\mathbb{Q}$-分解的で Picard 数が 2 以下の完備トーリック多様体は必ず射影的になることが知られている [9, 15]．本稿で構成するトーリック多様体は，$\mathbb{Q}$-分解的で Picard 数が 2 なので射影的である．

注意 2.6. 非特異完備トーリック多様体の基本群やコホモロジー環も扇の言葉で記述することができる．一方，2 つのトーリック多様体が微分同相であるための条件は一般次元では不明である．

3 トーリック Fano 多様体

反標準因子が豊富な多様体を **Fano 多様体**とよぶ．高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体は各次元に同型を除いて有限個しかなく，次元が低い所では実際に分類されている．

次元	1	2	3	4	5	6
非特異トーリック Fano 多様体の数	1	5	18	124	866	7,622
高々末端特異点のみをもつ Gorenstein トーリック Fano 多様体の数	1	5	100	166,841	?	?
高々末端特異点のみをもつ $\mathbb{Q}$-分解的トーリック Fano 多様体の数	1	5	233	?	?	?
高々末端特異点のみをもつ トーリック Fano 多様体の数	1	5	634	?	?	?
高々標準特異点のみをもつ Gorenstein トーリック Fano 多様体の数	1	16	4,319	473,800,776	?	?
高々標準特異点のみをもつ $\mathbb{Q}$-分解的トーリック Fano 多様体の数	1	16	12,190	?	?	?
高々標準特異点のみをもつ トーリック Fano 多様体の数	1	16	674,688	?	?	?

表 1　トーリック Fano 多様体の数 [8].

$\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合の $\mathbb{R}^n$ における凸包を**整凸多面体**とよぶ．内部にある格子点が原点のみであるような整凸多面体を**標準的 Fano 多面体**とよび，2 つの標準的 Fano 多面体は，$\mathbb{Z}^n$ の自己同型で移り合うとき**ユニモジュラー同値**であるという．

$X(\Delta)$ を高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体とすると，Δ の 1 次元多面錐を張る原始ベクトル全体の凸包をとることで標準的 Fano 多面体が得られ，この対応により，高々標準特異点のみをもつ n 次元トーリック Fano 多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の n 次元標準的 Fano 多面体のユニモジュラー同値類は 1 対 1 に対応する．n 次元標準的 Fano 多面体の $n-1$ 次元の面が，扇の n 次元多面錐に対応する．整凸多面体の体積は内部の格子点の個数（0 個の場合を除く）を固定すると有界 [7, Theorem 3.6] であり，整凸多面体は体積を固定すると有限個しかない [10, Theorem 2] ので，特に標準的 Fano 多面体は各次元に有限個しかなく，したがって高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体も各次元に有限個しかない．

以下，$X(\Delta)$ を $\mathbb{Q}$-分解的で完備な n 次元トーリック多様体とし，$X(\Delta)$ が Fano かどうかを扇の側で判定する方法について解説する．Δ の r 次元多面錐 τ は，トーリック多様体 $X(\Delta)$ のトーラス不変（代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用で不変）な $n-r$ 次元閉部分多様体 $V(\tau)$ と 1 対 1 に対応する．特に，$D_1, \ldots, D_m$ を $X(\Delta)$ のトーラス不変因子全体とすると，各 D_i には Δ の 1 次元多面錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ が対応する（v_i は原始ベクトル）．

定理 3.1. トーリック多様体 $X(\Delta)$ の反標準因子は $-K_{X(\Delta)} = D_1 + \cdots + D_m$ で与えられる．

トーリック多様体においては，因子が豊富かどうかを判定するには，トーラス不変な曲線との交点数を調べれば十分である．

定理 3.2. $X(\Delta)$ を完備な n 次元トーリック多様体とし，D をその上の Cartier 因子とする．このとき，D が豊富であることと，任意の $\tau \in \Delta(n-1)$ に対し，交点数 $(D \cdot V(\tau))$ が正になることは同値である．

そして，次の命題を繰り返し適用することにより，扇が具体的に与えられたとき，トーラス不変な部分多様体同士の交点数をいつでも計算できる．

命題 3.3. $X(\Delta)$ を $\mathbb{Q}$-分解的で完備な n 次元トーリック多様体とする．

(1) $\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n} \in \Delta(n)$ ならば，

$$(V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1}) \cdot \cdots \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n})) = \frac{1}{|\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})|}$$

である．特に，Δ が非特異ならば右辺は 1 である．

(2) 相異なる $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ が Δ の n 次元多面錐を張らないならば，$(V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1}) \cdot \cdots \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n})) = 0$ である．

(3) 任意の $u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ に対し，$\sum_{i=1}^m \langle u, v_i \rangle D_i \equiv 0$ である．

特に，非特異な場合には，反標準因子とトーラス不変曲線の交点数は次のようになる．

命題 3.4. $X(\Delta)$ を n 次元非特異完備トーリック多様体とし，$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_{n-1}} \in \Delta(n-1)$

とする．v, v' を異なる原始ベクトルで，$\tau + \mathbb{R}_{\geq 0} v, \tau + \mathbb{R}_{\geq 0} v'$ がともに Δ の n 次元多面錐になるものとする．このとき，整数 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ で $v + v' + a_1 v_{i_1} + \cdots + a_{n-1} v_{i_{n-1}} = 0$ を満たすものが一意的に存在し，$(-K_{X(\Delta)} \cdot V(\tau)) = 2 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ となる．

4　トーリック 2-Fano 多様体

非特異トーリック Fano 多様体に関する研究は数多く，与えられた次元のトーリック Fano 多様体をすべて求めるアルゴリズムも知られている [13]．一方，Fano 多様体の高次化として，第 2 Chern 指標と，多様体上の任意の曲面との交点数が正であるという条件を考えることができる．このとき，第 2 Chern 指標は**正**であるといい，そのような非特異 Fano 多様体を **2-Fano 多様体**とよぶ．第 2 Chern 指標が正または非負の多様体について初めて研究したのは de Jong–Starr [4] であり，2-Fano という用語は後に [5] で導入された．[5] では，第 2 Chern 指標が非負の多様体のことを 2-Fano 多様体と呼んでいるが，[1] では第 2 Chern 指標が正の多様体のことを 2-Fano 多様体と呼んでおり，そちらの方が自然であるので，ここでも後者に従う．

注意 4.1. Tsen の定理の超曲面以外への一般化として，Graber–Harris–Starr [6] は，$\mathbb{C}$ 上の曲線の関数体 K 上の有理連結多様体が K-有理点をもつことを示した．2-Fano 多様体はこれの曲面版を考えようという研究の中で導入された．すなわち，多様体に対し，「有理単連結 (rationally simply connected)」という概念を定義した上で，そのような多様体に対し，Tsen の定理の曲面版と言える主張を示そうという問題である．De Jong–He–Starr [3] は定義の候補を与え，Tsen の定理の曲面版といえる定理を示しているが，更に多くの技術的な仮定が必要となっている．そこで，求める仮定が満たされると期待される，より自然な条件として導入されたのが 2-Fano のようである．詳細は [1] を参照して頂きたい．

2-Fano 多様体は数が少なく，例えば 3 次元 2-Fano 多様体は $\mathbb{P}^3$ と $\mathbb{P}^4$ の滑らかな 2 次超曲面しかない [1]．非特異完備トーリック多様体 $X(\Delta)$ の場合，Chern 指標は

$$\mathrm{ch}_k(X(\Delta)) = \frac{D_1^k + \cdots + D_m^k}{k!}$$

となり，$\mathrm{ch}_2(X(\Delta))$ が正であることを示すには，任意のトーラス不変曲面との交点数さえチェックすれば十分なので [12]，扇が与えられれば，トーリック多様体が 2-Fano かどうかはいつでも判定できる．しかし，第 2 Chern 指標が正のものは（Fano の仮定を落としても）これまでのところ射影空間以外に例が知られていない．実際，いくつかの特別なトーリック多様体のクラスでは，射影空間以外にトーリック 2-Fano 多様体は存在しないことがわかっている．

定理 4.2 (Sato [16])**.** Picard 数が 2 で第 2 Chern 指標が正のトーリック多様体は存在しない．

Building set とよばれる，有限集合の部分集合族からトーリック多様体を構成する方法があるが，そのようなトーリック多様体の中にも，2-Fano なものは射影空間しかないことがわかる．

定義 4.3. 空でない有限集合 S 上の **building set** とは，S の空でない部分集合からなる有限集合 B で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in B$ かつ $I \cap J \neq \emptyset$ ならば，$I \cup J \in B$ である．
(2) 任意の $i \in S$ に対し，$\{i\} \in B$ である．

B の包含関係に関する極大元全体を $B_{\max}$ で表し，$B_{\max} = \{S\}$ のとき B は**連結**であるという．

定義 4.4. Building set B の **nested set** とは，$B \setminus B_{\max}$ の部分集合 N で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in N$ ならば，$I \subset J, J \subset I, I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．
(2) 任意の $k \geq 2$ と，任意の pairwise disjoint な $I_1, \ldots, I_k \in N$ に対し，$I_1 \cup \cdots \cup I_k \notin B$ が成り立つ．

B の nested set 全体を $\mathcal{N}(B)$ で表す．

Building set B から扇 $\Delta(B)$ を構成する．まず，B が連結な場合を考える．$S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし，$e_{n+1} = -e_1 - \cdots - e_n$ とおく．$I \subset S$ に対し $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ とおき，$N \in \mathcal{N}(B)$ に対し $\mathbb{R}_{\geq 0}N = \sum_{I \in N} \mathbb{R}_{\geq 0} e_I$ とおくと，$\Delta(B) = \{\mathbb{R}_{\geq 0}N \mid N \in \mathcal{N}(B)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の扇になる．B が連結でない場合，$B = \bigsqcup_{C \in B_{\max}} B|_C$ と分解し，各 $B|_C$ は連結なので，$X(\Delta(B)) = \prod_{C \in B_{\max}} X(\Delta(B|_C))$ と定める．

例 4.5. $S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．

(1) $B = \{\{1\}, \ldots, \{n+1\}, \{1, \ldots, n+1\}\}$ とすると，B は S 上の building set であり，$X(\Delta(B)) = \mathbb{P}^n$ である．
(2) $B = 2^S \setminus \{\emptyset\}$ とすると，B は S 上の building set であり，$X(\Delta(B))$ は **permutohedral variety** とよばれる多様体になる．

定理 4.6 (S. [19])**.** Building set に伴うトーリック 2-Fano 多様体は射影空間のみである．

注意 4.7. Building set に伴うトーリック多様体は，De Concini–Procesi [2] が構成した **wonderful model** をトーリック多様体として構成し直したものである．Building set は元々は一定の条件を満たす subspace arrangement として定義され，本稿における定義はそれを特別な場合に抽象化したものである．[2] の記号を用いて wonderful model との関係を説明すると次のようになる．$V = \mathbb{C}^{n+1}$ とし，V^* の subspace arrangement $\mathcal{G}$ が $\langle e_1^* \rangle, \ldots, \langle e_{n+1}^* \rangle$ をすべて含み，その他の元がすべて $e_1^*, \ldots, e_{n+1}^*$ の一部で生成される場合を考える．このとき，$\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}} = (\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{C}_{\mathcal{G}} = \{\langle e_i^* \mid i \in I \rangle \mid \emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n+1\}\}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{\langle e_1^* \rangle, \ldots, \langle e_{n+1}^* \rangle\}$ となる．$S = \{1, \ldots, n+1\}, B = \{I \subset S \mid \langle e_i^* \mid i \in I \rangle \in \mathcal{G}\}$ とおくと，$\mathcal{G}$ が [2] の定義での building set であることと，B が本稿の定義での building set であることは同値である．また，$\mathcal{G}$ が building set で $V^* \in \mathcal{G}$ ならば，$\mathcal{G} \setminus \{V^*\}$ の部分集合が $\mathcal{G}$-nested set であることと，対応する $B \setminus \{S\} = B \setminus B_{\max}$ の部分集合が本稿の定義での nested set であることは同値であり，$\overline{Y}_{\mathcal{G}} = X(\Delta(B))$ である．

同様に，トーリック 3-Fano 多様体や 4-Fano 多様体なども考えることはできるが，交点数の計算はより複雑になる．

5　主結果

そこで，2-Fano 多様体を研究する当初のモチベーションは忘れて，トーリック 2-Fano 多様体の特異版を考えることにする．非特異完備トーリック多様体 $X(\Delta)$ に対し

$$\mathrm{ch}_2(X(\Delta)) = \frac{D_1^2 + \cdots + D_m^2}{2}$$

となる事実に注目し，（必ずしも非特異でない）$\mathbb{Q}$-分解的な射影的トーリック多様体 $X(\Delta)$ に対し

$$\gamma_2(X(\Delta)) = D_1^2 + \cdots + D_m^2$$

とおく．トーリック多様体 $X(\Delta)$ は，その上の任意のトーラス不変曲面 S に対し交点数 $(\gamma_2(X(\Delta))\cdot S)$ が正であるとき **γ_2-正**であるということにする．3 次元で高々末端特異点のみをもつ場合は，2-Fano の場合と同様に次が成り立つ．

定理 5.1 (Sato–Sumiyoshi [17])．　(1) $\mathbb{Q}$-分解的な射影的トーリック多様体は，Picard 数が 1 ならば γ_2-正である．

(2) $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ 3 次元トーリック Fano 多様体（233 種類）に対し，γ_2-正であることと Picard 数が 1 であることは同値である．

一方，4 次元以上では（特異ではあるが）$\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体が Picard 数 2 で存在することがわかった．

例 5.2 (Sato–S. [18])．$\mathbb{R}^4$ において

$$x_1 = e_1,\ x_2 = e_2,\ x_3 = e_3,\ x_4 = e_4,\ x_5 = -e_1 - 2e_2 - e_3,\ x_6 = -e_2 - 2e_3 - e_4$$

とおき，扇 Δ を

$$\{\mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_2} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_3} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_4} \mid i_1, i_2 \in \{1,2,5\}, i_3, i_4 \in \{3,4,6\}\}$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体である．

例 5.3 (Sato–S. [18])．$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 4)$ において

$$x_1 = e_1,\ \ldots,\ x_{n-2} = e_{n-2},\ x_{n-1} = -(e_1 + \cdots + e_{n-2} + (n-2)e_{n-1}),\ x_n = e_{n-1},$$
$$y_1 = -(e_{n-1} + e_n),\ y_2 = e_n$$

とおき，扇 Δ を

$$\{\mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \cdots + \widehat{\mathbb{R}_{\geq 0}x_i} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}x_n + \mathbb{R}_{\geq 0}y_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体である．

整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ は，原点を内点として含み，双対 $P^* = \{u \in \mathbb{R}^n \mid$ 任意の $v \in P$ に対し $\langle u, v\rangle \geq -1\}$ もまた整凸多面体になるとき**反射的**であるという．高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体が Gorenstein であることと，対応する標準的 Fano 多面体が反射的であることは同値である．例 5.2, 5.3 はどちらも Gorenstein ではないので，γ_2-正な Gorenstein トーリック Fano 多様体がどのくらい存在するかという問題も考えられる．2 次元の場合は，自明な例しか存在しない．

定理 5.4 (Sato–S. [18])**.** Gorenstein で射影的なトーリック曲面に対し，γ_2-正であることと Picard 数が 1 であることは同値である．

一方，3 次元では Picard 数が 2 のものが存在することがわかった．

例 5.5 (Sato–S. [18])**.** $\mathbb{R}^3$ において

$$x_1 = e_1,\ x_2 = e_2,\ x_3 = e_3,\ x_4 = -2e_2 - e_3,\ x_5 = -e_1 - e_2$$

とおき，扇 Δ を

$$\mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4,$$
$$\mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で γ_2-正な Gorenstein トーリック Fano 多様体である．

参考文献

[1] C. Araujo and A-M. Castravet, *Classification of 2-Fano manifolds with high index*, A Celebration of Algebraic Geometry **18** (2013), 1–36.

[2] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 459–494.

[3] A. J. de Jong, X. He and J. Starr, *Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2011), no. 114, 1–85.

[4] A. J. de Jong and J. Starr, *A note on Fano manifolds whose second Chern character is positive*, arXiv:math/0602644.

[5] A. J. de Jong and J. Starr, *Higher Fano manifolds and rational surfaces*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 1, 173–183.

[6] T. Graber, J. Harris and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[7] D. Hensley, *Lattice vertex polytopes with interior lattice points*, Pacific J. Math. **105** (1983), no. 1, 183–191.

[8] A. Kasprzyk and B. Nill, *Fano polytopes*, Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013, pp. 349–364.

[9] P. Kleinschmidt and B. Sturmfels, *Smooth toric varieties with small Picard number are projective*, Topology **30** (1991), no. 2, 289–299.

[10] J. C. Lagarias and G. M. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, Canad. J. Math. **43** (1991), no. 5, 1022–1035.

[11] M. Masuda and D.Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math. **460** (2008), 273–286.

[12] E. Nobili, *Classification of Toric 2-Fano 4-folds*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **42** (2011), 399–414.

[13] M. Øbro, *An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes*, arXiv:0704.0049.

[14] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[15] M. Rossi and L. Terracini, *A $\mathbb{Q}$-factorial complete toric variety with Picard number 2 is projective*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), no. 9, 2648–2656.

[16] H. Sato, *The numerical class of a surface on a toric manifold*, Int. J. Math. Math. Sci. **2012**, Art. ID 536475.

[17] H. Sato and R. Sumiyoshi, *Terminal toric Fano three-folds with certain numerical conditions*, arXiv:1806.03784.

[18] H. Sato and Y. Suyama, *Examples of singular toric varieties with certain numerical conditions*, arXiv:1807.11747.

[19] Y. Suyama, *Notes on toric Fano varieties associated to building sets*, to appear in the proceedings of the 2018 Summer Workshop on Lattice Polytopes at Osaka University; arXiv:1809.09830.

二次形式とモックモジュラー形式

松坂俊輝 (Toshiki MATSUSAKA)*
九州大学大学院数理学府数理学専攻 博士後期課程 1 年
日本学術振興会特別研究員（DC1）

楕円モジュラー j 函数の虚二次点での特殊値は特異モジュライとして知られる代数的数です．一方で実軸は j 函数の自然境界であり字義通りの実二次点での特殊値というものは考えられないわけですが，金子 [Kan09] は実二次点とその共役を結ぶ測地線に沿って j 函数を積分することで，然るべき実二次点での「値」を定式化しました．しかし金子による数値実験はこの「値」が代数的数になりそうにないことを示唆しており，またその整数論的な意味も未だわかっていません．一方で Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] は Zagier [Zag02] の結果の類似を考察することで，この「値」のトレースの（適切な）母函数がモックモジュラー形式をなることを明らかにしており，興味を惹くところであります．以下の小文では，上記に関連する仕事を原論文と共に振り返り，また多重調和 Maass 形式への拡張に関する私の結果について簡単に紹介したいと思います．

ここで個人的なことも振り返ると，この多重調和 Maass 形式という対象は，2017 年 3 月に米国テネシーで開かれた研究集会に参加した際に Scott Ahlgren 氏に教わりました．またその後 11 月に山名俊介氏のはからいでドイツ MPIM へ 2 週間，また 2018 年には JSPS 若手研究者海外挑戦プログラムから半年ほどケルン大学へ滞在する機会を頂き，Kathrin Bringmann 氏をはじめ，多くの方々と議論する機会がありました．特に滞在中は Markus Schwagenscheidt 氏に数学的にも私的にも大変お世話になりました．本当に様々な機会に恵まれ今回の仕事を行うことができました．この場を借りて，上に述べた方々に心から感謝を表したいと思います．

1　モックモジュラー形式とは

まずモックモジュラー形式の歴史について Duke [Duk14] に沿って簡単に振り返っておく．より詳しいことについては，例えば Zagier [Zag07]，Ono [Ono10] の記事を，またより専門的なことについては，Folsom [Fol17] や Bringmann らによる書籍 [BFOR17] を読まれたし．

モックモジュラーという名前は，Ramanujan の最後の仕事に由来する．彼が Hardy とのやり取りの中で数多くの不思議な式を見出したことは有名な話であるが，ここでは特に分割数の話を取り上げよう．分割数 $p(n)$ とは n を正の整数の和として表すときに，（その順序の違いを無視して）何通りの方法があるのかを数える量である．例えば，整数 5 は

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

と書けるため，$p(5) = 7$ と定まる．このとき Euler によって，その母函数は次のように与えられることが知られている．

$$g(q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1}.$$

* toshikimatsusaka@gmail.com

これは $|q|<1$ の範囲で絶対収束する．さらに簡単な計算によって，次の Eulerian 級数と呼ばれる表示を持つこともすぐにわかる．

$$g(q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)q^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2}.$$

Hardy と Ramanujan が与えた最も重要な仕事の一つは，この分割数 $p(n)$ の漸近挙動を求める circle method と呼ばれる手法であろう．大雑把なアイデアを述べると，複素函数論の基本的な定理から，適切な Jordan 曲線 C に対し

$$p(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(q)}{q^{n+1}}dq$$

となるわけだが，その主要部というのが 1 の冪根における $g(q)$ の特異性に由来するため，それを詳しく調べよう，という方針である．一方で，$q^{-1/24}g(q)$ の逆数は Dedekind エータ函数 $\eta(z)$ として知られる重さ $1/2$ のモジュラー形式となっていること（つまり $q^{-1/24}g(q)=1/\eta(z)$，$q=e^{2\pi iz}$）もわかるため，この特異性を調べることは比較的容易となる．

Ramanujan は 1920 年 4 月 26 日に 32 歳という若さでこの世を去るのであるが，その 3 ヶ月前 Hardy へ宛てた最後の手紙の中に，これと類似した，しかし似て非なる「モックテータ函数」と呼ばれる対象を 17 個の具体例と共に記した．最初の例は次のような形で与えられる．

$$f(q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)q^n:=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2}.$$

また手紙には，これらモックテータ函数は無限個の 1 の冪根 ζ において特異性を持つが，各点における特異性は（弱正則）モジュラー形式と同様である，しかし単一のモジュラー形式では全ての特異性を打ち消すことはできないだろう，ということが記されていた．これは上記 $g(q)$ が函数 $q^{1/24}/\eta(z)$ を用いて表示できた様子とは大きく異なっている．具体的に彼は，この $f(q)$ に対して $b(q):=(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)$ とおくとき，$q^{-1/24}b(q)$ がモジュラー形式であり，かつ 1 の偶数 $2k$ 乗根 ζ に対し

$$f(q)-(-1)^kb(q)=O(1)\quad\text{as } q\to\zeta$$

が成り立つこと，また奇数乗根についてはそもそも特異性を持たないことを記し，$p(n)$ と同様に，この係数 $\alpha(n)$ が漸近公式

$$\alpha(n)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{6}-\frac{1}{144}}\right)\quad\text{as } n\to\infty$$

を満たすことを記していた．具体的に与えられた 17 個のモックテータ函数が同様にこれらの性質を満たすかどうかは，その後 Watson [Wat36] ら多くの数学者によって個々の場合に確かめられた．しかしこの性質こそがモックテータ函数の真意なのであろうか，その疑問へ回答が与えられるのは，それから当分先のこととなる．

決定的なブレイクスルーが起こったのは，2002 年の Zwegers の博士論文 [Zwe02] においてである．またその後の Bruinier-Funke [BF04] による調和 Maass 形式の導入，Bringmann-Ono [BO06] などの仕事を受け，今日ではより一般にモックモジュラー形式は調和 Maass 形式の正則部分として定式化されている．(cf. Zagier [Zag07])．まずは弱正則モジュラー形式の定義と合わせて，これらを復習しよう．モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群 Γ が上半平面 $\mathfrak{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ に一次分数変換で作用するとする．このとき，なめらかな函数 $F:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ が Γ に関する重さ $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のモジュラー形式であるとは，$\gamma\in\Gamma$ に対し $|\chi(\gamma)|=1$（加えて保型因子の条件）を満たすような函数 χ が存在し，任意の $\gamma=\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\in\Gamma$ に対し

$$(F|_k\gamma)(z):=\chi(\gamma)^{-1}(\sqrt{cz+d})^{-2k}F(\gamma z)=F(z)\tag{1.1}$$

を満たすときをいう．ただし $\arg(\sqrt{z}) \in (-\pi/2, \pi/2]$ となるように分枝を取る．特に「弱正則」と接頭辞が付くときは，(1) 上半平面 $\mathfrak{H}$ 上正則で，(2) 定数 $C \geq 0$ が存在し，函数 $\mathrm{Im}(z)^{k/2}|F(z)|$ が上半平面上 $\exp(C(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z)^{-1}))$ で抑えられる，という条件を加える．例えば Dedekind エータ函数は，Dedekind 和 $s(d,c)$ を用いて（例えば [BO06, p.250]）任意の $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = i^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right] \cdot \sqrt{cz+d} \cdot \eta(z)$$

を満たすこと，また $q = e^{2\pi iz}$ とおくとき $\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$ であることから，特に $1/\eta(z)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $-1/2$ の弱正則モジュラー形式といえるわけである．$F(z)$ が調和弱 Maass 形式というときは，先の条件 (1) の代わりに微分方程式 $\Delta_k F(z) = 0$ を満たすことを条件にする．ここで Δ_k は

$$\Delta_k := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

で定まる重さ k の双曲的ラプラシアンである．特に弱正則モジュラー形式は調和弱 Maass 形式となることに注意しておく．

次にこれがどのようにして Ramanujan のモックテータ函数と繋がるか見ていこう．上記のモックテータ函数 $f(q)$ に対し，Zwegers は次のような函数を考えた．

$$G(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(n+\frac{1}{6}\right)e^{3\pi i\left(n+\frac{1}{6}\right)^2 z} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{\frac{n^2}{24}},$$
$$G^*(z) := 2i\sqrt{3}\int_{-\bar{z}}^{i\infty}\frac{G(\tau)}{\sqrt{-i(\tau+z)}}d\tau.$$

ここで $G(z)$ は unary テータ函数と呼ばれる重さ $3/2$ のカスプテータ函数で，$G^*(z)$ はその非正則 Eichler 積分を取ったものである．このとき Zwegers および [BO06, Corollary 2.3] によると，$\chi(\gamma) = \left(\frac{12}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}$ と取れば（ここで $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は Kronecker 記号であり，ϵ_d は $d \equiv 1 \pmod 4$ のとき $\epsilon_d = 1$，$d \equiv 3 \pmod 4$ のとき $\epsilon_d = i$ と定まる），函数 $q^{-1}f(q^{24}) + G^*(24z)$ は $\Gamma_0(144)$ に関する重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式になるという．もしくは別に適切な χ を取れば [BO06, p.251, $\tilde{M}(z)$ の変換則]，$q^{-1/24}f(q) + G^*(z)$ は $\Gamma_0(2)$ に関する重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式となる．さらに Ramanujan の 17 個の例は同様に，（適切な q 冪の倍数を取ると）ある重さ $1/2$ の調和弱 Maass 形式の正則部分として得られるということがわかったのである．これにより Bringmann-Ono は $f(q)$ のフーリエ係数 $\alpha(n)$ に関する精密化された漸近公式（Andrews-Dragonette 予想）を解決したのであった．

その後 2007 年に Zagier[Zag07] によって，より一般にモックモジュラー形式と呼ばれる対象が導入された．簡単のため，以下この報告集を通して正の整数 N に対し $\Gamma = \Gamma_0(N)$ とし，$\chi(\gamma)$ を $k \in \mathbb{Z}$ のとき $\chi(\gamma) = 1$, $k \in \mathbb{Z} + 1/2$ のとき $\chi(\gamma) = \left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-2k}$ かつ $4|N$ としておく．（これは自然な取り方である，例えば [Kob93, Chapter IV-1]）．このとき重さ $k \neq 1$ の調和弱 Maass 形式 $F(z)$ は $F(z+1) = F(z)$ および $\Delta_k F(z) = 0$ を満たすため，次の形のフーリエ級数展開を持つことがわかる．

$$F(z) = \sum_{n\gg -\infty} c_F^+(n)q^n + c_F^-(0)y^{1-k} + \sum_{\substack{n\ll\infty \\ n\neq 0}} c_F^-(n)y^{-\frac{k}{2}}W_{-\frac{k}{2},\frac{k-1}{2}}(-4\pi ny)e^{2\pi inx}.$$

ただし，$n \gg -\infty$ はある $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $n \geq -n_0$ という意味であり，$n \ll \infty$ も同様である．また $W_{\mu,\nu}(z)$ は W-Whittaker 函数であり，$\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ となるように分枝を取っておく．$c_F^{\pm}(n) \in \mathbb{C}$ は Fourier 係数と呼ばれる定数である．特殊函数については，例えば [NIST, MOS66, GR00] などが公式集とし

て便利であろうか．このとき，この正則部分

$$\sum_{n\gg -\infty} c_F^+(n)q^n$$

を重さ k のモックモジュラー形式と呼ぶ．さらに Bruinier-Funke [BF04] は微分作用素 $\xi_k F := 2iy^k\overline{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}}$ を導入し，これが双曲ラプラシアンの細分 $\Delta_k = -\xi_{2-k}\circ\xi_k$ を与え，調和弱 Maass 形式の像

$$\xi_k F(z) = (1-k)\overline{c_F^-(0)} - \sum_{\substack{n\gg -\infty\\ n\neq 0}} \overline{c_F^-(-n)}(4\pi n)^{1-\frac{k}{2}}q^n$$

（ただし $n<0$ に対し $n=|n|e^{\pi i}$）が重さ $2-k$ の弱正則モジュラー形式になることを示している．また Zagier はこの像をモックモジュラー形式のシャドーと呼んでいる．特にこの ξ-微分は重さ $2-k$ の弱正則モジュラー形式の空間への全射を与えることも知られている．これが今日におけるモックモジュラー形式の定義である．ちなみにこのようにして定まるモックモジュラー形式は Ramanujan の与えた条件を満たすことが [GOR13], [CLR16] によって示されている．

2　特異モジュライ・サイクル積分のトレースとは

次の主題へ移ろう．楕円モジュラー j 函数は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する（$\chi(\gamma)=1$）重さ 0 の弱正則モジュラー形式で $q^{-1}+O(q)$ の形のフーリエ級数展開を持つものとして一意に特徴付けられる函数である．ここでこの定義は Eisenstein 級数を用いた定義 $E_4(z)^3/\Delta(z)$ とは 744 だけずれていることに注意しておく．この函数の活躍の場は，モンスタームーンシャインや虚数乗法論など多岐にわたる．より詳しいことについては，金子 [Kan01, KS10] などに日本語でまとめられているため，そちらに譲ることにする．今回着目するのは Zagier [Zag02] による「特異モジュライのトレース」に関する仕事である．

まず二次形式について復習する．整数 d を $d\equiv 0,1 \pmod 4$ を満たすように取る．このとき，整数係数の二元二次形式 $Q(X,Y)=[a,b,c]=aX^2+bXY+cY^2$ でその判別式が $b^2-4ac=d$ で与えられるもの全体の空間を $\mathcal{Q}_d$ と定める．ただし $d<0$ のときは正定値なもの，つまり $a>0$ なるもののみを考えることにする．この空間には

$$Q(X,Y)\circ\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} := Q(\alpha X+\beta Y, \gamma X+\delta Y)$$

によって自然に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が右から作用しており，その商 $\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は有限となることが知られている．特に d が基本判別式のとき（つまり $d\equiv 1 \pmod 4$ かつ square-free，または square-free な $m\equiv 2,3 \pmod 4$ を用いて $d=4m$ と書けるとき），この位数 $|\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})|$ は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の狭義類数を与える．（d が基本判別式でなくても同様の結果は知られている，例えば [AIK14, Chapter 6] に詳しい．d が平方数のときは [Koh85, p. 243] など）．

まず正定値：$d<0$ の場合を考える．二次形式 $Q\in\mathcal{Q}_d$ に対して，上半平面上の点 $\alpha_Q\in\mathfrak{H}$ を $Q(z,1)=0$ の解として定めよう．定義よりこれは虚二次無理数となり，この点 α_Q における j 函数の値 $j(\alpha_Q)$ は代数的数になることが知られている．この量は特異モジュライと呼ばれ，Kronecker 青春の夢で知られるように虚二次体上の類体構成において非常に重要な役割を果たす．一方 Zagier は以下で定めるこの値の重み付きトレースを考察した．

$$\mathrm{Tr}_d(j) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|} j(\alpha_Q).$$

ここで $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q$ は Q の固定部分群であり，その位数は $6, 4, 2$ のいずれかである．このとき，$\mathrm{Tr}_d(j)$ は有理整数であり，母函数

$$-\frac{1}{q} + 2 + \sum_{0>d\equiv 0,3(4)} \mathrm{Tr}_d(j) q^{-d}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $3/2$ の弱正則モジュラー形式となる，というのが彼の主張である．さらに一般に，基本判別式 D に対して種の指標 χ_D を

$$\chi_D(Q) := \begin{cases} \left(\dfrac{D}{r}\right), & (a,b,c,D) = 1 \text{ かつ } (r,D) = 1, \text{ ただし } Q \text{ は } r \text{ を表現する}, \\ 0, & (a,b,c,D) > 1. \end{cases}$$

と定めると，これは $\mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上の well-defined な指標となる．（詳しくは [GKZ87, Section I-2] など）．さらに χ_1 を自明な指標と定めておくことで，$D = 1$ も考慮に入れることにする．このとき $dD < 0$ となるような $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ に対し，捻りトレース

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(j) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \chi_D(Q) \frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|} j(\alpha_Q)$$

を定める．このとき一般にはこの値は有理整数とはならないが，Zagier は次のことも示している．D の符号に応じて，2 種類の母函数

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{0>d\equiv 0,1(4)} \mathrm{Tr}_{d,D}(j) q^{-d} \quad \text{if } D > 0, \tag{2.1}$$

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{0<d\equiv 0,1(4)} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,D}(j) q^{d} \quad \text{if } D < 0 \tag{2.2}$$

はそれぞれ $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $3/2$，$1/2$ の弱正則モジュラー形式となる．ここで適切な有限項は explicit に表示することも可能であるが，本報告集では重要としないため省略している．なお遡ること 1975 年，Zagier [Zag75] は j 函数を 1 に変えた場合，つまり Kronecker-Hurwitz 類数

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{2}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q|} \tag{2.3}$$

に対しても同様の考察を行っており，（もちろんそのように主張したわけではないが）母函数

$$-\frac{1}{12} + \sum_{0>d\equiv 0,1(4)} \mathrm{Tr}_{d,1}(1) q^{-d} \tag{2.4}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $3/2$ のモックモジュラー形式になることを示している．つまり適切な非正則函数を加えることで調和 Maass 形式となるのであるが，そのシャドー（非正則部分の ξ-像）はテータ函数 $\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$ の定数倍で与えられる．蛇足であるが，この類数 $\mathrm{Tr}_{d,1}(1)$ が重さ $3/2$ のモジュラー形式 $\theta(z)^3$ の係数に現れることは，（本質的には）Gauss [Gau01, art. 291] によって知られていた．Zagier の結果はある種の補正版ともいえるであろう．具体的な表示は例えば [BFOR17, Example 2.5] でも確認できる．

自然な疑問として，不定値：$d > 0$ の場合も考えて然るべきであるが，この場合は $Q(z, 1) = 0$ の解は互いに共役な二つの実二次無理数となっており，j 函数の自然境界が実軸であることを踏まえると，同様の考察を行うには困難がある．一つの回答として金子 [Kan09] は Hecke の双曲的フーリエ展開の定数項を取り出すことで，実二次点での「値」にあたるものを考察している．（同様のフーリエ展開は Petersson [Pet41] も考えていたようである）．金子 [KS10] にもあるとおり，この「値」はサイクル積分を用いて記述することもできるため，ここではそちらの定義を採用することにする．平方数でない $0 < d \equiv 0, 1 \pmod 4$ に対して，$Q(z, 1) \in \mathcal{Q}_d$ の

二つの根を $w_Q^{\pm} = (-b \pm \sqrt{d})/(2a) \in \mathbb{R}$ とおき，w_Q^+ から w_Q^- へ向かう上半平面上の測地線を S_Q とおく．この測地線を固定するような部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q$ は（符号の差を除き）無限巡回群になることが知られており．（例えば [Sar82] などに詳しくまとめられている），商 $C_Q := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_Q \backslash S_Q$ はリーマン面 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の閉測地線を与える．特に ε_d を整環 $\mathfrak{O}_d$ の単数で，正ノルムを持つ > 1 なる最小の元とすると，この測地線の長さは

$$\mathrm{length}(C_Q) := \int_{C_Q} d_{\mathrm{hyp}}(z) = \int_{C_Q} \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)} = 2\log \varepsilon_{d/r^2} \tag{2.5}$$

で与えられる．ここで $r = \gcd(a,b,c)$ である．このとき，j 函数の実二次点での「値」は

$$\mathrm{val}(w_Q^+) := \frac{1}{\mathrm{length}(C_Q)} \int_{C_Q} j(z) d_{\mathrm{hyp}}(z) = \frac{1}{2\log \varepsilon_{d/r^2}} \int_{C_Q} j(z) \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)} \tag{2.6}$$

で定義される．ここでも金子の定義と 744 だけずれていることに注意しておく．金子は数値実験を通して様々な観察を行っているが [Kan09, KS10]，特異モジュライのときのような代数的数にはなりそうになく，またその整数論的な意味も未だわかっていない．（最近，Bengoechea-Imamoḡlu [BI19+a, BI19+b] によって，いくつかの予想には部分的に証明が与えられている）．一方で，Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT11] は，この「値」が Zagier の結果の類似を満たすことを示した．まずトレースを同様に定義しよう．基本判別式 $D > 0$ と $0 < dD$ が平方数とならないような $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ に対し，捻りトレースを

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(j) := \frac{1}{2\pi} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{dD}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \chi_D(Q) \int_{C_Q} j(z) \frac{\sqrt{dD}dz}{Q(z,1)}$$

によって定める．このとき dD が平方数となるような d に対し，適切な値 $\mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j)$ が存在し，母函数

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ dD=\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j) q^d + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ dD\neq\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,D}(j) q^d \tag{2.7}$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $1/2$ のモックモジュラー形式になることを示した．ちなみに $d < 0, D < 0$ の場合はこの捻りトレースは自明に 0 となる．$\mathrm{Tr}_{d,D}^{\mathrm{reg}}(j)$ については，その後 [And15, BFI15] などにおいて然るべき定義が与えられている．さらにこのモックモジュラー形式のシャドーは (2.1) の定数倍で与えられる．なんとも興味を誘う現象である．さらに Duke ら [DIT11] は (2.3) の実二次類似

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1) := \frac{1}{2\pi} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{C_Q} \frac{\sqrt{d}dz}{Q(z,1)}$$

についても考察している．先の議論から特に基本判別式 d に対して，二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の狭義類数 $h(d)$ を用いて $h(d)\log \varepsilon_d/\pi$ と表される量であり，Dirichlet の L 函数 $L_d(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$ を用いることで，基本判別式 d の正負問わず

$$\mathrm{Tr}_{d,1}(1) = \frac{\sqrt{|d|}}{\pi} L_d(1)$$

と表示することもできる．（Dirichlet の類数公式）．このとき彼らは，母函数

$$(\text{適切な有限項}) + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ d=\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,1}^{\mathrm{reg}}(1) q^d + \sum_{\substack{0<d\equiv 0,1(4)\\ d\neq\square}} \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}_{d,1}(1) q^d$$

が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $1/2$ の「深さ $3/2$ の多重調和 Maass 形式」の正則部分になることを示した．またその $\xi_{1/2}$ に関する像は (2.4) で与えられた調和 Maass 形式の定数倍となる．

ここからもこのような現象が j 函数に限らずより一般にあることが見て取れる．実は j 函数の部分を一般に調和弱 Maass 形式にしても同様の現象が成り立つことも知られている．例えば Schwagenscheidt の博士論文 [Sch18] に詳しくまとめられているので，興味のある方はそちらを参照されたし．しかし上の例からも，この事象は調和弱 Maass 形式の範疇に収まっていないこともわかる．多重調和 Maass 形式とは一体何であろうか？

3　多重調和弱 Maass 形式とは

多重調和 Maass 形式という名前が初めて登場したのは 2016 年の Lagarias-Rhoades [LR16] および続編となる [ALR18] の論文中である．レベル 1 の実解析的 Eisenstein 級数とは，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \Gamma_\infty = \{\pm\left[\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] \in \Gamma \mid b \in \mathbb{Z}\}$ とおくとき，$z = x + iy \in \mathfrak{H}, \mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$E(z,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}(\gamma z)^s$$

によって定まる函数である．この函数は s-平面全体に有理型解析接続を持ち，特に

$$E(z,s) = \frac{3/\pi}{s-1} - \frac{3}{\pi}\log(y|\eta(z)|^4) + C + O(s-1)$$

が成り立つことが知られている（Kronecker の第一極限公式）．ここで定数 C は Euler 定数 γ を用いて $C = \frac{6}{\pi}(\gamma - \log 2 - 6\zeta'(2)/\pi^2)$ と与えられるものである．Eisenstein 級数に関しては，例えば [Iwa02] などを参照．この定数項について実に多くの研究があるが，一方で高次の Laurent 係数というのは，知られていることは少ない．Lagarias らはこれら高次係数について，調和 Maass 形式の観点から考察を行なっている．

よく知られているように，この Eisenstein 級数は双曲的ラプラシアンの固有函数であり，以下を満たす．

$$\Delta_0 E(z,s) = s(1-s)E(z,s).$$

実はこれからすぐに従うこととして，$E(z,s) = \sum_{\ell=-1}^{\infty} F_\ell(z)(s-1)^\ell$ と展開するとき，各係数 $F_\ell(z)$ は微分方程式 $(\Delta_0)^{\ell+2}F_\ell(z) = 0$ を満たす．さらに $E(z,s)$ のモジュラー性が伝播する形で，任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し $F_\ell(\gamma z) = F_\ell(z)$ が成り立つ．彼らはこれらの性質に着目して，そのような条件を満たすクラスを多重調和 Maass 形式として新たに導入した．Lagarias らの論文では，カスプでの指数増大が許されておらず，より広い意味での「多重調和弱 Maass 形式」は [Mat19+, Mat19] において導入した．正確な定義は，(1.1) で与えた定義の (1) を $(\Delta_k)^r F(z) = 0$ に取り替えることで与える．このとき $F(z)$ を Γ に関する重さ k，深さ r の多重調和弱 Maass 形式と呼ぶことにする．さらに $\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k$ であったことを思い出して，$\xi_k \circ (\Delta_k)^r F(z) = 0$ を満たすものを，深さ $r + 1/2$ の多重調和弱 Maass 形式と呼ぶ．例えば Kronecker 極限公式で与えられる函数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 0，深さ 3/2 の多重調和 Maass 形式となる．（この場合はカスプで高々多項式増大しか持たないので，弱の付かない Lagarias らの意味での多重調和 Maass 形式となる）．

この函数 $-\log(y|\eta(z)|^4)$ の捻れトレースについても古くから多くの研究がなされている．Duke-Imamoḡlu-Tóth [DIT18] において詳しくまとめられているが，例えば Kronecker, Lerch, Chowla-Selberg, Siegel, Deninger などが $\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$ について様々な公式を与えている [DIT18, (40), (41), (64), (65)]．一方で上で見たように，捻りトレースの母函数は半整数重さのモジュラー性を持つという哲学もある．それならば多重調和弱 Maass 形式の枠組みで，これら古典的な結果を再構築できないだろうか，というのが自然な問いであろう．この問いに答えるべく，本研究 [Mat19+, Mat19] では次のことを行なった．

1. 重さ $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$（$k \in \mathbb{Z}+1/2$ のときは $\Gamma_0(4)$）に関する多重調和弱 Maass 形式の空間の基底を explicit に構成した：Lagarias-Rhoades [LR16] は，カスプに指数増大を許さない場合について，重さ $k \in 2\mathbb{Z}$ の実解析的 Eisenstein 級数の Laurent 係数を用いて整数重さの場合にその基底を構成していた．弱版については，[BO06] と同様に Maass-Poincaré 級数を考えることで，Δ_k の固有値から定まる適切な点まわりにおける高次 Laurent 係数が多重調和弱 Maass 形式となることがわかる．ここで Maass-Poincaré 級数とは，整数 $m \neq 0$ に対し，M-Whittaker 函数を用いて

$$P_{k,m}(z,s) := \Gamma(2s)^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left[(4\pi|m|y)^{-\frac{k}{2}} M_{\mathrm{sgn}(m)\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi|m|y) e^{2\pi i m x} \right]\Big|_k \gamma$$

によって定まる函数である．半整数重さの場合も同様である [Mat19]．さらにこの Laurent 係数たちが多重調和弱 Maass 形式の空間を張ることもわかり（余分な函数もある），explicit に基底を記述することもできる．[Mat19+, Theorem 1.4], [Mat19, Theorem 1.1]．またこれらの係数が満たす微分漸化式（Lagarias らは “ramp”関係式や “tower”関係式と呼んでいる）もより一般に示すことができる．[Mat19, (4.2), (4.3)].

2. Zagier, Duke-Imamoḡlu-Tóth の結果を多重調和弱 Maass 形式の捻れトレースに拡張した：1 で函数 $P_{0,m}(z,s)$ の Laurent 係数を用いて，重さ 0 の多重調和弱 Maass 形式の空間の基底を構成しているため，捻れトレース $\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{0,m}(z,s))$ を考察すれば十分である．多少技術的ではあるが [DIT11] によってこれは計算されており，Bessel 函数などの特殊函数を用いて表示することができる．一方で半整数重さの場合も基底が求まっており，その Fourier 係数も同様に特殊函数を用いて表示される [Mat19, Proposition 3.2]．これらの表示を直接見比べることで，重さ 0 から重さ 1/2 または 3/2 の多重調和弱 Maass 形式間の写像で，その Fourier 係数が捻りトレースで与えられるものを具体的に構成することができる [Mat19, Theorem 1.3, Section 7] というのが大まかな流れである．さらに定義を適切に修正したのち $\mathrm{Tr}_{d,D}(P_{2k,m}(z,s))$ という量も考えることができるが，Duke らの計算を拡張することでこのトレースも explicit に計算することができ，同様の写像（重さ $2k$ から重さ $k+1/2$ または $3/2-k$）を構成することもできる．特に Schwagenscheidt ら [Sch18] は調和弱 Maass 形式に対し，$dD<0, k\leq 0$ または $dD>0, k\geq 0$ の場合において，テータリフトを用いることでこの写像を構成しているのだが，欠けているケース，例えば $dD<0, k>0$ においても同様の写像を構成できた．これは (2.1), (2.2), (2.7) の重さ $2k$ の多重調和弱 Maass 形式への拡張を与えている．

最後に系を一つ紹介しよう．上記の定理を用いて $0<d$，$D\neq 1$ に対し $\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4))$，および $\mathrm{Tr}_{d,1}(1)$ を正則部分の Fourier 係数に持つ多重調和 Maass 形式をそれぞれ構成する．こうして作られる多重調和 Maass 形式は全て $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 1/2，深さ 3/2 となること，また $\theta(z)$ の差および定数倍の差を除いて等しいことがわかる．あとは Fourier 係数を比較することで次の分解公式を得る [Mat19, Corollary 1.4].

$$\mathrm{Tr}_{d,D}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \sqrt{|D|} L_D(1) \mathrm{Tr}_{d,1}(1), \quad 0<d\neq\square, D\neq 1, dD\neq\square.$$

これは d, D が互いに素な基本判別式のときに Kronecker ($dD<0$)，Siegel ($dD>0$) によって示されている等式である [DIT18, (41), (65)] が，今回の系では多重調和 Maass 形式を用いた自然な別証明が与えられており，特にここでは d は D と無関係な（平方数でない）任意の判別式を取ることができる．例えば $d=20, D=-4$ とすれば，$\mathcal{Q}_{-80}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{[3,-2,7],[1,0,20],[2,0,10],[4,0,5],[3,2,7],[4,4,6]\}$，$\mathcal{Q}_{20}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{[1,-4,-1],[2,-2,-2]\}$ であることから，以下を得る．

$$\mathrm{Tr}_{20,-4}(-\log(y|\eta(z)|^4)) = \log\frac{4}{9}\left|\frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)}\right|^4,$$

$$\mathrm{Tr}_{20,1}(1) = \frac{\log\varepsilon_{20}}{\pi} + \frac{\log\varepsilon_5}{\pi} = \frac{8}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

また $L_{-4}(1) = \pi/4$ より，

$$\frac{4}{9}\left|\frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)}\right|^4 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4, \quad \text{i.e.} \qquad \left|\frac{\eta\left(\frac{1+2\sqrt{5}i}{3}\right)\eta\left(\frac{-1+2\sqrt{5}i}{3}\right)}{\eta(2\sqrt{5}i)\eta\left(\frac{\sqrt{5}i}{2}\right)}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

参考文献

[AIK14] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2014, with an appendix by Don Zagier.

[And15] N. Andersen, *Periods of the j-function along infinite geodesics and mock modular forms*, Bull. Lond. Math. Soc., 47, no. 3, (2015), 407–417.

[ALR18] N. Andersen, J. C. Lagarias, R. C. Rhoades, *Shifted polyharmonic Maass forms for $PSL(2,\mathbb{Z})$*, Acta Arith., 185, (1), (2018), 39–79.

[BI19+a] P. Bengoechea, Ö. Imamoḡlu, *Cycle integrals of modular functions, Markov geodesics and a conjecture of Kaneko*, arXiv:1805.08029.

[BI19+b] P. Bengoechea, Ö. Imamoḡlu, *Values of modular functions at real quadratics and conjectures of Kaneko*, arXiv:1812.07418.

[BFOR17] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, L. Rolen, *Harmonic Maass Forms and Mock Modular Forms: Theory and Applications*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. xv+391 pp.

[BO06] K. Bringmann, K. Ono, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks*, Invent. Math., 165, (2), (2006), 243–266.

[BF04] J. H. Bruinier, J. Funke, *On two geometric theta lifts*, Duke Math. J., 125, (1), (2004), 45–90.

[BFI15] J. H. Bruinier, J. Funke, Ö. Imamoḡlu, *Regularized theta liftings and periods of modular functions*, J. Reine Angew. Math., 703, (2015), 43–93.

[CLR16] D. Choi, S. Lim, R. C. Rhoades, *Mock modular forms and quantum modular forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 144, 6, (2016), 2337–2349.

[Duk14] W. Duke, *Almost a century of answering the question: what is a mock theta function?*, Notices Amer. Math. Soc., 61, (11), (2014), 1314–1320.

[DIT11] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, *Cycle integrals of the j-function and mock modular forms*, Annals of Math., 173, (2011), 947–981.

[DIT18] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, Á. Tóth, *Kronecker's first limit formula, revisited*, Res. Math. Sci. 5, no. 2, (2018), 1–21.

[Fol17] A. Folsom, *Perspectives on mock modular forms*, J. Number Theory, 176, (2017), 500–540.

[Gau01] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.

[GR00] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Translated from the Russian. Sixth edition. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. Academic Press, Inc., San Diego, CA, (2000), xlvii+1163 pp.

[GOR13] M. Griffin, K. Ono, R. C. Rhoades, *Ramanujan's mock theta functions*, Proc. Nat. Acad. Sci., 110, 15, (2013), 5765–5768.

[GKZ87] B. Gross, W. Kohnen, D. Zagier, *Heegner points and Derivatives of L-series, II*, Math. Ann., 278, (1987), 497–562.

[Iwa02] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Revista Math. Iberoamericana, Madrid, second edition, 2002.

[Kan01] M. Kaneko, 楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ のフーリエ係数，Rokko Lectures in Math., 10, 神戸大学理学部数学教室 (2001).

[Kan09] M. Kaneko, *Observations on the 'values' of the elliptic modular function $j(\tau)$ at real quadratics*, Kyushu J. Math., vol. 63-2, (2009), 353–364.

[KS10] M. Kaneko, N. Shigeki, 楕円モジュラー j 関数の実二次点での「値」とマルコフ二次無理数，早稲田大学整数論研究集会報告集 (2010).

[Kob93] N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms, Second edition*, Graduate Texts in Math., 97, Springer-Verlag, New York, (1993), x+248 pp.

[Koh85] W. Kohnen, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann., 271, (1985), 237–268.

[LR16] J. C. Lagarias, R. C. Rhoades, *Polyharmonic Maass forms for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, Ramanujan J., 41, (2016), 191–232.

[MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52 Springer-Verlag New York, Inc., New York, (1966), viii+508 pp.

[Mat19+] T. Matsusaka, *Polyharmonic weak Maass forms of higher depth for* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, Ramanujan Journal, to appear.

[Mat19] T. Matsusaka, *Traces of CM values and cycle integrals of polyharmonic Maass forms*, Res. Number Theory, 5:8, (2019), 1–25.

[NIST] *Digital Library of Mathematical Functions*, http://dlmf.nist.gov/.

[Ono10] K. Ono, *The last words of a genius*, Notice Amer. Math. Soc., 57, (11), (2010), 1410–1419.

[Pet41] H. Petersson, *Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., (1941), 22–60.

[Sar82] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*, J. Number Theory, 15, (1982), 229–247.

[Sch18] M. Schwagenscheidt, *Regularized theta lifts of harmonic Maass forms*, PhD thesis, TU Darmstadt, 2018.

[Wat36] G. N. Watson, *The final problem: An account of the mock theta functions*, J. London Math. Soc. 2, (2), (1936), 55–80.

[Zag75] D. Zagier, *Nombres de classes et formes modulaires de poids* 3/2, C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B 281, (1975), no. 21, Ai, 883–886.

[Zag02] D. Zagier, *Traces of singular moduli*, Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., 3, Int. Press. Somerville MA, (2002), 211–244.

[Zag07] D. Zagier, *Ramanujan's mock theta functions and their applications* [*d'après Zwegers and Bringmann-Ono*], Séminaire Bourbaki, 60 ème année, 2007–2008, no. 986, Astérisque, 326, (2009), Soc. Math. de France, 143–164.

[Zwe02] S. P. Zwegers, *Mock Theta Functions*, Ph.D. Thesis, Utrecht University, 2002.

Tensor product representations from Newton-Okounkov bodies

東京工業大学理学院 藤田 直樹 (Naoki Fujita)* †

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概 要

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその斉次座標環上の付値から作られる凸体であり, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている. 本稿では旗多様体上のある旗多様体束に着目し, その Newton-Okounkov 凸体を一般線形群の表現の言葉で具体的に記述する. この記述を応用することで一般線形群のテンソル積表現の既約分解を Newton-Okounkov 凸体と関連付けることができる. 具体的には既約成分の重複度を与える Littlewood-Richardson 係数を Newton-Okounkov 凸体から作られるある有理凸多面体の格子点の個数として実現する. 本稿の内容は Eunjeong Lee 氏および Dong Youp Suh 教授との共同研究 [4] に基づく.

1 導入

一般線形群 $G \coloneqq GL_n(\mathbb{C})$ とは複素 n 次正則行列全体のなす群のことである. 集合 P_+ を

$$P_+ \coloneqq \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

と定義し, $\lambda \in P_+$ に対応する有限次元既約 G-加群を $V(\lambda)$ とする; 2 節で $V(\lambda)$ の正確な定義を述べる. テンソル積 $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ への G-作用を

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

と定義すると, G-加群 $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ は既約加群の直和に分解する ([5, Sect. 8.2] 参照):

$$V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} V(\nu)^{\oplus c_{\lambda,\mu}^{\nu}}.$$

この重複度 $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ を具体的に記述することは G の表現論における重要な問題の一つである. $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in G$ に対して, トレース $\mathrm{tr}(t\colon V(\lambda) \to V(\lambda))$ は λ に対応するシューア多項式

$$s_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_n) \coloneqq \frac{\det(t_j^{\lambda_i + n - i})_{1 \leq i,j \leq n}}{\det(t_j^{n-i})_{1 \leq i,j \leq n}}$$

と一致することが知られている ([5, Sect. 8.3] 参照). 特に重複度 $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ はシューア多項式の展開係数と一致する:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in P_+} c_{\lambda,\mu}^{\nu} s_\nu.$$

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp

†日本学術振興会特別研究員 (PD)

$c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を **Littlewood-Richardson 係数**という. Berenstein-Zelevinsky [2, Theorems 2.3, 2.4] は標準基底 (= 大域結晶基底) の理論を用いて, $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ をある具体的な有理凸多面体の格子点の個数として実現した. 本稿では旗多様体上のある旗多様体束に着目し, その Newton-Okounkov 凸体を用いて Berenstein-Zelevinsky のものとは異なる記述を与える.

2 テンソル積表現の幾何学的実現

$B \subset G$ を上三角行列全体のなす部分群 (ボレル部分群) とし,

$$\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n) \coloneqq \{(0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

とおく. このとき $\mathbb{C}^n$ への自然な左 G-作用は次のように $\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導する: $g \in G$ および $V_\bullet = (0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \in \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ に対して,

$$gV_\bullet \coloneqq (0 \subset gV_1 \subset gV_2 \subset \cdots \subset gV_n = \mathbb{C}^n)$$

とする. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ を単位ベクトルとし, $1 \leq i \leq n$ に対して $E_i \subset \mathbb{C}^n$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i$ で生成される $\mathbb{C}$-部分空間とする. このとき B は $(0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{C}^n) \in \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ を固定する G の元全体の集合と一致する. そのため集合 $\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ は商多様体 G/B と同一視される. これを**旗多様体**という. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in P_+$ に対して, G/B 上の直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を

$$\mathcal{L}_\lambda \coloneqq (G \times \mathbb{C})/B$$

と定める. ここで B の $G \times \mathbb{C}$ への右作用は

$$(g, c) \cdot b \coloneqq (gb, \lambda(b)c)$$

で与えられる; ただし $b \in B$ の対角成分を $d_1, d_2, \ldots, d_n$ としたとき, $\lambda(b) \coloneqq d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \cdots d_n^{\lambda_n}$ である. $V(\lambda) \coloneqq H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)^*$ とおくと, $V(\lambda)$ は有限次元既約 G-加群である ([5, Sect. 9.3] 参照). 非特異射影多様体 Z を

$$Z \coloneqq (G \times G)/B^2$$

と定義する; ここで B^2 の右作用は $g_1, g_2 \in G$ および $b_1, b_2 \in B$ に対して

$$(g_1, g_2) \cdot (b_1, b_2) \coloneqq (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2)$$

と定める. 写像

$$Z \twoheadrightarrow G/B, \quad (g_1, g_2) \bmod B^2 \mapsto g_1 \bmod B,$$

により Z は G/B 上の G/B-束となっているが, これは自明束と同型である:

$$Z \xrightarrow{\sim} G/B \times G/B, \quad (g_1, g_2) \bmod B^2 \mapsto (g_1 \bmod B, g_1 g_2 \bmod B).$$

$\lambda, \mu \in P_+$ に対して, Z 上の直線束 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ を

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} \coloneqq (G \times G \times \mathbb{C})/B^2$$

と定める; ここで B^2 の $G\times G\times\mathbb{C}$ への右作用は

$$(g_1,g_2,c)\cdot(b_1,b_2)\coloneqq(g_1b_1,b_1^{-1}g_2b_2,\lambda(b_1)\mu(b_2)c)$$

で与えられる. G の Z および $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ への左作用を $g,g_1,g_2\in G$ および $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$g\cdot(g_1,g_2)\bmod B^2\coloneqq(gg_1,g_2)\bmod B^2,\quad g\cdot(g_1,g_2,c)\bmod B^2\coloneqq(gg_1,g_2,c)\bmod B^2$$

と定める. 射影 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}\twoheadrightarrow Z$ がこれらの作用と compatible であるため, 大域切断のなす空間 $H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ は自然に G-加群となる. 上述の同型 $Z\simeq G/B\times G/B$ により, Z への G-作用は直積 $G/B\times G/B$ への対角作用と一致する. また直線束 $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ は $\mathcal{L}_\lambda$ と $\mathcal{L}_\mu$ の直積と対応する. 従って G-加群としての同型

$$H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})^*\simeq V(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}}V(\mu)$$

が得られる.

3 Newton-Okounkov 凸体と一般化ストリング多面体

Newton-Okounkov 凸体は射影多様体およびその斉次座標環上の付値から作られる凸体であり, Okounkov [13, 14, 15] によって導入された後 Kaveh-Khovanskii [8] および Lazarsfeld-Mustata [11] によって系統的な定義がなされ, トーリック多様体の理論を一般の射影多様体へ拡張するための枠組みとして注目されている. まず本稿で扱う Newton-Okounkov 凸体の定義を説明する.

$$N\coloneqq\dim_{\mathbb{C}}(G/B)=\frac{(n-1)n}{2}$$

とおく. このとき $\dim_{\mathbb{C}}(Z)=2N$ である. $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を複素 n 次正方行列全体のなす集合とし, 指数写像 $\exp\colon\mathfrak{g}\to G$ を考える. $[n-1]\coloneqq\{1,2,\dots,n-1\}$ とおき, $i\in[n-1]$ に対して $F_i\in\mathfrak{g}$ を $(i+1,i)$-成分のみ 1 で他の成分は 0 である n 次正方行列とする.

定義 3.1. 語 $(i_1,i_2,\dots,i_N)\in[n-1]^N$ が**簡約語**であるとは, 次の写像が双有理射となることである:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^N&\to G/B,\\(t_1,t_2,\dots,t_N)&\mapsto\exp(t_1F_{i_1})\exp(t_2F_{i_2})\cdots\exp(t_NF_{i_N})\bmod B.\end{aligned}$$

例 3.2. 語 $(1,2,1,3,2,1,\dots,n-1,n-2,\dots,1)\in[n-1]^N$ は簡約語である.

$(i_1,i_2,\dots,i_N),(j_1,j_2,\dots,j_N)\in[n-1]^N$ を簡約語とし,

$$\mathbf{i}\coloneqq(i_1,i_2,\dots,i_N,j_1,j_2,\dots,j_N)\in[n-1]^{2N}$$

とおく. このとき次の写像は双有理射である:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{2N}&\to Z,\\(t_1,\dots,t_{2N})&\mapsto(\exp(t_1F_{i_1})\cdots\exp(t_NF_{i_N}),\exp(t_{N+1}F_{j_1})\cdots\exp(t_{2N}F_{j_N}))\bmod B^2.\end{aligned}$$

この双有理射を用いて関数体 $\mathbb{C}(Z)$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1,\dots,t_{2N})$ と同一視する. $\mathbb{Z}^{2N}$ 上の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1,\dots,a_{2N}),(a'_1,\dots,a'_{2N})\in\mathbb{Z}^{2N}$ に対して, ある $1\le k\le 2N$ について

$$a_1=a'_1,\dots,a_{k-1}=a'_{k-1},\ a_k<a'_k$$

となるとき $(a_1,\dots,a_{2N})<(a'_1,\dots,a'_{2N})$ とする. この全順序 $<$ を用いて $t_1,\dots,t_{2N}$ を変数とする単項式たちの間の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1,\dots,a_{2N})<(a'_1,\dots,a'_{2N})$ のとき $t_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}<t_1^{a'_1}\cdots t_{2N}^{a'_{2N}}$ とする. 以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}\colon \mathbb{C}(Z)\setminus\{0\}\ (=\mathbb{C}(t_1,\dots,t_{2N})\setminus\{0\})\to\mathbb{Z}^{2N}$ を次のように定める: $f,g\in\mathbb{C}[t_1,\dots,t_{2N}]\setminus\{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f/g)\coloneqq v_{\mathbf{i}}(f)-v_{\mathbf{i}}(g)$ とし,

$$f=ct_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}+(\text{lower terms})\in\mathbb{C}[t_1,\dots,t_{2N}]\setminus\{0\}$$

に対して $v_{\mathbf{i}}(f)\coloneqq -(a_1,\dots,a_{2N})$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり, "lower terms" は上で定めた全順序 $<$ に関して $t_1^{a_1}\cdots t_{2N}^{a_{2N}}$ より小さい単項式たちの線形結合である.

例 3.3. $G=GL_2(\mathbb{C})$ とする. このとき $2N=2$ であり, $f=t_1^2t_2+t_1t_2^2+t_2^3\in\mathbb{C}(Z)\simeq\mathbb{C}(t_1,t_2)$ に対して $v_{\mathbf{i}}(f)=-(2,1)$ である.

定義 3.4 ([6, Sect. 3.1.1] および [9, Definition 1.10] 参照)**.** $\lambda,\mu\in P_+$ とし, 0 でない大域切断 $\tau\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ を固定する. 半群 $S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}^{2N}$ を

$$S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\coloneqq\bigcup_{k>0}\{(k,v_{\mathbf{i}}(\sigma/\tau^k))\mid\sigma\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^{\otimes k})\setminus\{0\}\}$$

と定義する. さらにこの $S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ を含む最小の実閉錐を $C(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{R}_{\ge0}\times\mathbb{R}^{2N}$ とし, 集合 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\subset\mathbb{R}^{2N}$ を

$$\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\coloneqq\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{2N}\mid(1,\mathbf{a})\in C(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)\}$$

と定める. この $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ を Z の **Newton-Okounkov 凸体**という.

注意 3.5. 0 でない大域切断 $\tau,\tau'\in H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ に対して

$$\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau')=\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)+v_{\mathbf{i}}(\tau/\tau')$$

が成り立つ. そのため Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ は本質的に大域切断 τ の取り方に依らない.

Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau)$ に対して G の表現の言葉を用いた解釈を与える. $e\in G$ を単位行列とし, 旗多様体 G/B を次の閉埋め込み ι により Z の閉部分多様体と同一視する:

$$\iota\colon G/B\hookrightarrow Z,\quad g\bmod B\mapsto(e,g)\bmod B^2.$$

このとき $\iota^*\mathcal{L}_{\lambda,\mu}=\mathcal{L}_\mu$ なので, ι は写像

$$\iota^*\colon H^0(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu})\to H^0(G/B,\mathcal{L}_\mu)$$

を誘導する.

定義 3.6. $\lambda, \mu \in P_+$ とする. $\sigma \in H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})\backslash\{0\}$ に対して $\Omega_{\mathbf{i}}(\sigma) = (a_1, \ldots, a_N, a'_1, \ldots, a'_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2N}$ を

$$\begin{aligned}
a_1 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_1}^a \sigma \neq 0\},\\
a_2 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_2}^a F_{i_1}^{a_1} \sigma \neq 0\},\\
&\vdots\\
a_N &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{i_N}^a F_{i_{N-1}}^{a_{N-1}} \cdots F_{i_1}^{a_1} \sigma \neq 0\},\\
a'_1 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_1}^a \sigma(2) \neq 0\},\\
a'_2 &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_2}^a F_{j_1}^{a'_1} \sigma(2) \neq 0\},\\
&\vdots\\
a'_N &\coloneqq \max\{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid F_{j_N}^a F_{j_{N-1}}^{a'_{N-1}} \cdots F_{j_1}^{a'_1} \sigma(2) \neq 0\}
\end{aligned}$$

と定義する; ただし

$$\sigma(2) \coloneqq \iota^*(F_{i_N}^{a_N} F_{i_{N-1}}^{a_{N-1}} \cdots F_{i_1}^{a_1} \sigma)$$

である. この非負整数の組 $\Omega_{\mathbf{i}}(\sigma)$ を σ の $\mathbf{i}$ に関する**一般化ストリング・パラメトリゼーション**という.

定義 3.7 ([3, Definition 4.7] 参照)**.** 部分集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^{2N}$ を

$$\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \coloneqq \bigcup_{k>0} \{(k, \Omega_{\mathbf{i}}(\sigma)) \mid \sigma \in H^0(Z, \mathcal{L}_{k\lambda,k\mu}) \setminus \{0\}\}$$

と定義し, $\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2N}$ を $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ を含む最小の実閉錐とする. さらに集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \subset \mathbb{R}^{2N}$ を

$$\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} \coloneqq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2N} \mid (1, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\}$$

と定める. この集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ を**一般化ストリング多面体**という.

注意 3.8. 論文 [3] では表現論における結晶基底の理論を用いて一般化ストリング多面体を定義しているが, 得られる集合 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は同じものである ([3, Proof of Theorem 5.2] 参照). 本稿の主結果 (定理 4.1) の証明では, こちらの結晶基底による定義を用いる (結晶基底については [7] 参照).

$\mathbb{R}$-同型写像 $\omega\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$ を $\omega(k, \mathbf{a}) \coloneqq (k, -\mathbf{a})$ と定義する.

定理 3.9 ([3, Proposition 2.13, Corollary 5.4] 参照)**.** $\lambda, \mu \in P_+$ とする.

(1) ある大域切断 $\tau_{\lambda,\mu} \in H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}) \setminus \{0\}$ が存在して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= \omega(S(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})),\\
\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= \omega(C(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu})),\\
\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &= -\Delta(Z, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}, \tau_{\lambda,\mu}).
\end{aligned}$$

(2) 集合 $\mathcal{S}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $S(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau_{\lambda,\mu})$ はどちらも有限生成半群である. 特に $\mathcal{C}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $C(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau_{\lambda,\mu})$ は有理凸多面錐であり, $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ および $\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau_{\lambda,\mu})$ は有理凸多面体である.

Newton-Okounkov 凸体の一般論を適用することで, トーリック退化および完全可積分系を構成することができる.

系 3.10 ([1, Theorem 1] 参照)**.** Z は $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ に対応する正規トーリック多様体へ平坦に退化する.

系 3.11 ([6, Theorem B] 参照)**.** 複素多様体としての開稠密部分集合 $U\subset Z$ および Z 上の実数値連続関数の組 $f_1,f_2,\dots,f_{2N}$ が存在し, 次が成り立つ:

(1) $f_1,f_2,\dots,f_{2N}$ の U への制限は U 上の完全可積分系を与える;

(2) モーメント写像 $(f_1,f_2,\dots,f_{2N})\colon Z\to\mathbb{R}^{2N}$ の像は一般化ストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ と一致する.

4 Newton-Okounkov 凸体とテンソル積表現

写像 $\pi\colon \mathbb{R}^{2N}=\mathbb{R}^N\oplus\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ を第 2 成分への射影とし,

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu} &\coloneqq -\pi(\Delta(Z,\mathcal{L}_{\lambda,\mu},v_{\mathbf{i}},\tau_{\lambda,\mu}))\\ &= \pi(\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu})\end{aligned}$$

とおく. $i\in[n-1]$ に対して,

$$\alpha_i \coloneqq (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,-1,0,\dots,0)$$

と書き, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_N)\in\mathbb{Z}^N$ に対して,

$$\nu(\mathbf{y})\coloneqq \lambda+\mu-\sum_{1\le l\le N} y_l\alpha_{j_l}$$

とする. 次が本稿の主結果である.

定理 4.1. $\lambda,\mu\in P_+$ とする.

(1) 格子点 $\mathbf{y}\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^N$ に既約表現 $V(\nu(\mathbf{y}))$ を対応させることで, 格子点集合 $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^N$ はテンソル積表現 $V(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}}V(\mu)\simeq\bigoplus_{\nu\in P_+}V(\nu)^{\oplus c^{\nu}_{\lambda,\mu}}$ の直和成分と重複度込みで 1 対 1 に対応する. 特に $V(\nu)$ の重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は集合

$$\{\mathbf{y}\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^N\mid \nu(\mathbf{y})=\nu\}$$

の位数と一致する.

(2) $\mathbf{y}\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^N$ に対して, ファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y})\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $V(\nu(\mathbf{y}))$ の簡約語 $(i_1,\dots,i_N)$ に関するストリング多面体と一致する (ストリング多面体については [2, 12] 参照).

例 4.2. $(i_1,\dots,i_N)=(1,2,1,3,2,1,\dots,n-1,n-2,\dots,1)$ とする. このときファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y})\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $\nu(\mathbf{y})\in P_+$ に対応する Gelfand-Zetlin 多面体とユニモジュラー同値である ([12, Sect. 5] 参照).

例 4.3. $G=GL_2(\mathbb{C})$, $\lambda=(\lambda_1,0)$, $\mu=(\mu_1,0)\in P_+$, $\mathbf{i}=(1,1)$ とする. このとき

$$\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\},\ 0\le a_1\le\lambda_1+\mu_1-2a_2\}$$

が成り立つ. また

$$\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{a_2\in\mathbb{R}\mid 0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\}\}$$

であり, $a_2\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}$ は既約表現 $V((\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2))$ に対応する. 実際

$$V(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}}V(\mu)\simeq\bigoplus_{0\le a_2\le\min\{\lambda_1,\mu_1\}}V((\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2))$$

が成り立つ. 射影 $\pi\colon\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ は $\pi(a_1,a_2)=a_2$ で与えられ, $a_2\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}$ に対して

$$\pi^{-1}(a_2)\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}=\{(a_1,a_2)\mid 0\le a_1\le\lambda_1+\mu_1-2a_2\}$$

である. 第 1 成分への射影 $(a_1,a_2)\mapsto a_1$ により, $\pi^{-1}(a_2)\cap\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は $(\lambda_1+\mu_1-a_2,a_2)\in P_+$ に対応する Gelfand-Zetlin 多面体と同一視される.

例 4.4. $G=GL_3(\mathbb{C})$, $\lambda=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2,0)$, $\mu=(\mu_1+\mu_2,\mu_2,0)\in P_+$, $\mathbf{i}=(1,2,1,1,2,1)$ とする. このとき [3, Corollary 4.15] により, 一般化ストリング多面体 $\Delta_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は以下の不等式を満たす $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^6_{\ge0}$ 全体の集合と一致する:

$$\begin{aligned}
&0\le y_3\le\min\{\lambda_2,\mu_1\},\\
&y_3\le y_2\le y_3+\mu_2,\\
&y_2-\lambda_2\le y_1\le\min\{\lambda_1,y_2-2y_3+\mu_1\},\\
&\max\{y_3-\lambda_2,-y_1+y_2-\lambda_2\}\le x_3\le-2y_1+y_2-2y_3+\lambda_1+\mu_1,\\
&x_3\le x_2\le x_3+y_1-2y_2+y_3+\lambda_2+\mu_2,\\
&0\le x_1\le x_2-2x_3-2y_1+y_2-2y_3+\lambda_1+\mu_1.
\end{aligned}$$

特に $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は以下の不等式を満たす $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_{\ge0}$ 全体の集合と一致する:

$$\begin{aligned}
&0\le y_3\le\min\{\lambda_2,\mu_1\},\\
&y_3\le y_2\le y_3+\mu_2,\\
&y_2-\lambda_2\le y_1\le\min\{\lambda_1,y_2-2y_3+\mu_1\}.
\end{aligned}$$

定理 4.1 より Littlewood-Richardson 係数 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は $\lambda+\mu-(y_1+y_3)\alpha_1-y_2\alpha_2=\nu$ を満たす $(y_1,y_2,y_3)\in\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}\cap\mathbb{Z}^3$ の個数と一致する. 特に $\lambda=\mu=(2,1,0)$ とすると, $\widehat{\Delta}_{\mathbf{i},\lambda,\mu}$ は

$$\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3_{\ge0}\mid y_3\le1,\ y_3\le y_2\le y_3+1,\ y_2-1\le y_1\le\min\{1,y_2-2y_3+1\}\}$$

となる. 従って

$$V((2,1,0))^{\otimes2}\simeq V((4,2,0))\oplus V((3,3,0))\oplus V((4,1,1))\oplus V((3,2,1))^{\oplus2}\oplus V((2,2,2))$$

が成り立つ.

参考文献

[1] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, Math. Ann. **356** (2013), 1183–1202.

[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), 77–128.

[3] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies for Bott-Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules, J. Algebra **515** (2018), 408–447.

[4] N. Fujita, E. Lee, and D. Y. Suh, Algebraic and geometric properties of flag Bott-Samelson varieties and applications to representations, preprint 2018, arXiv:1805.01664v1.

[5] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts Vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[6] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, Invent. Math. **202** (2015), 927–985.

[7] M. Kashiwara, On crystal bases, in Representations of Groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.

[8] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 263–282.

[9] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, Ann. of Math. **176** (2012), 925–978.

[10] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar, Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties, Compos. Math. **130** (2002), 293–318.

[11] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, Ann. Sci. de I'ENS **42** (2009), 783–835.

[12] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups **3** (1998), 145–179.

[13] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, Invent. Math. **125** (1996), 405–411.

[14] A. Okounkov, Multiplicities and Newton polytopes, in Kirillov's Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 181, Adv. Math. Sci. Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 231–244.

[15] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in The Orbit Method in Geometry and Physics, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329–347.

周期点のカウント及びディオファントス近似について

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
佐野　薫 (Kaoru Sano)

1　主定理とその背景

断りが無ければすべての多様体及び有理写像は $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする。多様体の自己射の n-周期点の個数の漸近挙動に関する予想をセミアーベル多様体 X の自己全射 $f\colon X \longrightarrow X$ に対して証明する。その予想とは以下のようなものである：

Conjecture 1.1. X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな準射影多様体、$f\colon X \longrightarrow X$ を X の自己全射とする。f の n-周期点の個数を Q_n で表す。任意の n について $Q_n < \infty$ であれば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n = \log \max_{0\leq k\leq \dim X} d_k(f)$$

となる。特に左辺の極限は存在する。

Theorem 1.2. X をセミアーベル多様体、$f\colon X \longrightarrow X$ を $Q_n < \infty$ であるような自己全射とする。このとき X, f に対しては *Conjecture 1.1* は正しい。

Remark 1.3. Conjecture 1.1 の主張の右辺の

$$\log \max_{0\leq k\leq \dim X} d_k(f)$$

は代数的エントロピーと呼ばれ、$h_{\mathrm{alg}}(f)$ で表される。ここで $d_k(f)$ は f の k 次力学系次数である。力学系次数については 2 節で触れる。今回は定義は述べないが、位相的エントロピー $h_{\mathrm{top}}(f)$ という量が力学系の分野ではよく調べられており、これは力学系の複雑さをよく表した量である。[Gromov], [Yomdin] により X が射影多様体のときには

$$h_{\mathrm{alg}}(f) = h_{\mathrm{top}}(f)$$

であることが知られている。また一般に射影多様体の支配的な自己有理写像に対しては [Dinh-Sibony1] で

$$h_{\mathrm{alg}}(f) \geq h_{\mathrm{top}}(f)$$

が成り立つことが示されている。[Bowen] のオリジナルな予想では滑らかな射影多様体の自己射の場合に極限が $h_{\mathrm{top}}(f)$ に一致すると主張されているが、$h_{\mathrm{top}}(f)$ が双有理不変ではなく準射影多様体の射影多様体への埋め込みに依存して変化するようである。このことは川口周氏及び小木曽啓示氏から教えて頂いた。一方力学系次数が双有理不変であることは [Dinh-Nguyên], [Dinh-Nguyên-Truong] で知られており、準射影多様体に対しては今回のように予想するのが妥当であると思われる。

極限の存在を証明する中で次の定理が必要となる。また次の定理は Baker の定理 (c.f. [Baker]) を用いて証明される。

Theorem 1.4. $|\lambda| = 1$ を満たすが 1 の冪根ではない代数的数 $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda^n - 1|^{1/n} = 1$$

となる。

2 力学系次数の定義及び計算

Theorem 1.2 の証明のキーポイントは f の n-周期点の個数を力学系次数 $d_{\dim X}(f^n - \mathrm{id}_X)$ で表し、明示的にその値を計算すること、及び極限の計算 Theorem 1.4 である。

Definition 2.1 (力学系次数)**.** X を滑らかな射影多様体、H を X の豊富な因子、$f\colon X \dashrightarrow X$ を X の支配的な自己有理写像とする。$\pi\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ を f の不確定点除去とし、$\tilde{f}\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ を誘導される射とする。このとき $f^*\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ を

$$f^* := \pi_* \tilde{f}^*$$

で定める。このとき k 次力学系次数 $d_k(f)$ が

$$d_k(f) := \lim_{n\to\infty} ((f^n)^* H^k \cdot H^{\dim X - k})^{1/n}$$

で定義される。

Theorem 2.2 (代数的トーラスの力学系次数の計算 [Favre-Wulcan], [Lin1], [Lin2])**.** T を代数的トーラス、$g\colon T \longrightarrow T$ を T の自己全射準同型とする。このとき次が成立する：

(a) ある整数係数正則行列 M が存在して $g = g_M$ と表せる。ここで g_A とは行列 $M = (m_{i.j})_{i,j}$ に付随する写像であって $g_M(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の j 番目の成分が $\prod_{i=1}^N x_i^{m_{i,j}}$ で表せるものである。

(b) A の固有値を絶対値が大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ とすると力学系次数は

$$d_k(g) = \prod_{i=1}^{k} |\lambda_i|$$

となる。

(c) 等式

$$\max_{0\le k\le \dim X} d_k(g) = \prod_{|\lambda_i|\ge 1} |\lambda_i|$$

が成り立つ。

Theorem 2.3 (アーベル多様体の力学系次数の計算)**.** A を $\mathbb{C}$ 上の代数的トーラス、$g\colon A \longrightarrow A$ を T の自己全射準同型とする。$g_a\colon \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ をその解析的表示としその表現行列を M とする。このとき次が成立する：

(a) M の固有値を絶対値が大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ とすると力学系次数は

$$d_k(g) = \prod_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2$$

となる。

(b) 等式

$$\max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(g) = \prod_{|\lambda_i| \geq 1} |\lambda_i|^2$$

が成り立つ。

Theorem 2.4 (セミアーベル多様体の力学系次数の計算)**.** X を $\mathbb{C}$ 上のセミアーベル多様体、すなわち代数的トーラス T とアーベル多様体 A が存在して

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

という完全列をもつとする。$g\colon X \longrightarrow X$ を全射自己準同型とする。このとき完全列及び g と可換な全射自己準同型

$$g_T\colon T \longrightarrow T$$
$$g_A\colon A \longrightarrow A$$

が誘導され、力学系次数が

$$d_k(g) = \max_{0 \leq i \leq \dim Y} d_i(g_A) \cdot d_{\dim X - i}(g_T)$$

で計算される。

特に *Conjecture 1.1* の結論の右辺について

$$\max_{0 \leq k \leq \dim X} d_k(f) = \max_{0 \leq k \leq \dim T} d_k(g_T) \cdot \max_{0 \leq k \leq \dim A} d_k(g_A)$$

となる。

参考文献

[Baker] Baker, A., *Transcendental number theory*, Cambridge university press, first edition, 1975.

[Bowen] Bowen, R., *Topological entropy and axiom A*, Proc. Symp. in Pure Math. AMS vol 14, Global Analysis (1970), 23-41.

[Dinh-Nguyên] Dinh, T-C. and Nguyên, V-A., *Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 4, 817–840.

[Dinh-Nguyên-Truong] Dinh, T-C., Nguyên V-A., and Truong, T. T., *On the dynamical degrees of meromorphic maps preserving a fibration*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), no. 6, 1250042, 18 pp.

[Dinh-Sibony1] Dinh, T-C. and Sibony, N., *Une borne sup´ erieure pour l' entropie topologique d' une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637-1644.

[Dinh-Sibony2] Dinh, T-C. and Sibony, N., *Equidistribution problems in complex dynamics of higher dimension*, Internat. J. Math. **28**, 1750057 (2007).

[Favre-Wulcan] Favre, C. and Wulcan, E., *Degree growth of monomial maps and McMullen's polytope algebra*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 2, 493–524.

[Gromov] Gromov, M., *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3–4, 217–235. (Manuscript, 1977).

[Lin1] Lin, J-L., *Algebraic stability and degree growth of monomial maps*, Math. Z. **271** (2012), no. 1–2, 293-311.

[Lin2] Lin, J-L., *Pulling back cohomology classes and dynamical degrees of monomial maps*, Bull. Soc. Math. France **140** (2012), no. 4, 533549 (2013).

[Mumford] Mumford, D., *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[Vojta] Vojta, P., *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I*, Invent. Math. **126** (1996), no. 1, 133–181.

[Yomdin] Yomdin, Y., *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285-300.

1 点抜き楕円曲線の同型類の幾何的基本群による復元

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
更科明 (Akira SARASHINA)

概要

1980 年代、Grothendieck により素体の有限次拡大体上の双曲的曲線の幾何が (ある意味で)étale 基本群から復元されるという予想が提唱された。この予想は中村博昭氏、玉川安騎男氏の部分的な結果を経て望月新一氏によって肯定的に解決された。本稿では正標数代数閉体上の曲線に対しても étale 基本群が多くの情報を持つ事、また特別な場合に元の曲線の同型類が復元できる事を紹介する。

1 導入

S を連結スキーム、Ω を代数閉体とする。射 $\overline{s}:\mathrm{Spec}(\Omega)\to S$ を幾何的点と呼ぶ。S と $\overline{s}$ から (étale) 基本群 $\pi_1(S;\overline{s})$ が定まる。$\pi_1(S;\overline{s})$ の同型類は $\overline{s}$ に寄らずに定まるため、同型類のみを問題にしている場合はしばしば $\overline{s}$ を省略して $\pi_1(S)$ と書く。また体 k が存在して $S\simeq\mathrm{Spec}(k)$ であるとき、$\pi_1(S)$ は k の絶対 Galois 群 G_k と同型である。

U を体 k 上の幾何的連結有限型スキームとする。幾何的点 $\overline{s}:\mathrm{Spec}(\Omega)\to U_{\overline{k}}=U\times_k\overline{k}$ を取り U と $\mathrm{Spec}(k)$ への像も同じ $\overline{s}$ で表す。このときスキームの射の列 $U_{\overline{k}}\to U\to\mathrm{Spec}(k)$ から以下の完全列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(U_{\overline{k}};\overline{s}) & \longrightarrow & \pi_1(U;\overline{s}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{Spec}(k);\overline{s}) & \longrightarrow & 1. \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & G_k & & \end{array}$$

$\pi_1(U_{\overline{k}})$ を U の幾何的基本群と呼ぶ。

Grothendieck により U が遠アーベル多様体であるとき U の幾何は (ある意味で) 上記の完全列から復元されるという、今日では Grothendieck 予想とも呼ばれる予想が提唱された (c.f. [2], [3])。Grothendieck は遠アーベル多様体の定義を残していないためこの予想は厳密に定式化されたものではないが、一次元の場合は遠アーベルと双曲的が同値であると予想した。この曲線に対する予想は中村博昭氏、玉川安騎男氏の部分的な結果を経て望月新一氏によって肯定的に解決された。

定理 1.1 (Grothendieck conjecture for hyperbolic curves) ([4] Theorem A)
k を sub-p-adic field ($\mathbb{Q}_p$ 上の有限生成体の部分体)、U_1 と U_2 を k 上の双曲的曲線 (g を種数、n をカスプの数 $\#(U^{cpt}\backslash U)$ としたとき、$2g+n-2>0$ を満たす曲線) とする。$Isom_{G_k}(\pi_1(U_1),\pi_1(U_2))=\{F\in Isom(\pi_1(U_1),\pi_1(U_2))|Pr_{U_1}=Pr_{U_2}\circ F\}$ とおく。このとき以下の自然な写像は全単射で

ある。

$$Isom_{(k\text{-}sch)}(U_1, U_2) \to Isom_{G_k}(\pi_1(U_1), \pi_1(U_2))/Inn(\pi_1(U_2 \times_k \overline{k}))$$

■

この結果から特に数体上の二つの双曲的曲線 U_1 と U_2 の étale 基本群が同型であれば U_1 と U_2 が同型である事がわかる。

一方 U が標数 0 の代数閉体上の曲線であるとき G.A.G.A. の理論から以下の定理が得られる。

定理 1.2 ([1] XII)
k を標数 0 の代数閉体、U を k 上の曲線とする。$\Pi_{g,n}$ を以下の生成元と関係式で定義される群の副有限完備化とする。

$$< \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_n \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1\cdots\gamma_n >$$

g を U の種数、n を U のカスプの数 $\#(U^{cpt}\backslash U)$ としたとき以下の同型が存在する。

$$\pi_1(U) \simeq \Pi_{g,n}$$

■

ここから U の étale 基本群 (幾何的基本群) の同型類は U のコンパクト化 U^{cpt} の種数 g と U^{cpt} から U を引いた点 (カスプ) の数 $n = \#(U^{cpt}\backslash U)$ のみで定まる事、g と n が異なっても基本群が同型になる場合がある事がわかる ($\Pi_{1,1} \simeq \Pi_{0,3}$)。このように標数が 0 の場合は幾何的基本群はあまり多くの情報を持っていない。次の節で正標数の場合は幾何的基本群が多くの情報を持っている事を述べる。

2 正標数代数閉体上の曲線の基本群

正標数代数閉体上の曲線の基本群に関しては玉川安騎男氏によって多くの結果が得られている。特に有限体の代数閉包上の曲線に対しては、ある副有限群の同型類に対して基本群がその同型類に含まれるような曲線の同型類が (特別な場合を除いて) 有限個である事 (c.f. [7])、以下で述べるように種数 0 の曲線に関しては基本群の同型類に対して曲線の同型類がただ一つ定まる事 (c.f [6]) が玉川安騎男氏によって示されている。筆者は上記の種数 0 の曲線に対する結果に関連した研究を行い $p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$ の場合にも同様の結果が得られる事を示した (c.f. [5])。

k_i $(i = 1, 2)$ を標数 $p_i > 0$ の代数閉体、U_i を k_i 上の曲線、g_i を U_i のコンパクト化 U_i^{cpt} の種数、S_i をカスプの集合 $U_i^{cpt}\backslash U_i$、n_i を S_i の濃度 $\#S_i$ とする。また $\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(U_2)$ と仮定する。

定理 2.1 ([6] Proposition 1.2, Theorem 1.9)

- $(g_1, n_1) = (g_2, n_2)$
- $(g_1, n_1) \neq (0, 0)$ (i.e. $U_1 \not\simeq \mathbb{P}^1$) $\Rightarrow p_1 = p_2$

■

定理 2.1 より標数 0 の場合と異なり正標数の場合は幾何的基本群から元の曲線の基本的な不変量か復元できる。また同型類の復元に関して、$g_1 = 0$ (i.e. $U_1^{cpt} \simeq \mathbb{P}^1$) であればカスプの配置のみが問題であり、$(g_1, n_1) = (1, 1)$ であればコンパクト化の j 不変量が復元できれば良いという事になる。この問題に取り組むにあたって以下の定理が基本的な道具になる。

定理 2.2 ([6] Theorem 2.5)
同型 $\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(U_2)$ に対して全単射 $S_1 \simeq S_2$ が自然に定まる。

■

これ以降 p_i, g_i, n_i (i=1, 2) を単に p, g, n と書く。

$g = 0$ とする。$n = 0$ のとき、基本群は自明なので標数 p_i を復元する事はできないが $U_i \simeq \mathbb{P}^1_{k_i}$ である事がわかる。$1 \leq n \leq 3$ のときは明らかなので $n \geq 4$ を仮定する。S_i の相異なる 2 点 $P_{i,0}, P_{i,\infty}$ を固定すると $P_{i,0}$ を 0 に $P_{i,\infty}$ を ∞ に移す単射 $S_i \hookrightarrow U_i^{cpt}(k) \simeq k \cup \{\infty\}$ が k のスカラー倍の差を除いて定まる。ここから k の加法が $U_i^{cpt}(k) \backslash \{P_{i,\infty}\}$ に誘導され、特に $S_i \backslash \{P_{i,\infty}\}$ の点の $\mathbb{F}_p$ 上の線形関係を定義する事ができる。この線形関係が基本群から復元される (定理 2.2 の全単射を通して片方で成り立てばもう片方で成り立つ) 事を示す事で組み合わせ論的に以下の定理が示される。

定理 2.3 ([6] Theorem 3.5)
$g = 0$、$n \neq 0$、$k_1 \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$ とする。このとき (k_2-スキームとしてではなく) スキームとしての同型 $U_1 \times_{k_1} k_2 \simeq U_2$ が存在する。

■

$p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$ とする。U_i^{cpt} を E_i、カスプを $\mathcal{O}_i$ と置く。$\mathcal{O}_i$ を基点とする楕円曲線の群構造から定まる m 倍射 $[m] : E_i \to E_i$ を用いて étale 被覆に上がる事でカスプの数を増やす事ができる (m が p で割れる場合は射を étale と純非分離に分解し étale 被覆をとる)。このとき被覆のカスプの集合 $E_1[m], E_2[m]$ の間にも自然な全単射が存在し、さらに群同型になる事が示せる ([5] Lemma 4.2)。次に E_i が Legendre form $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_i)$ で定義されているとする。このとき x 軸への射影 $x_i : E_i \to \mathbb{P}^1$ が存在し、特に $g = 0$ の場合と同様に $x_i(E_i[m])$ の点の $\mathbb{F}_p$ 上の線形関係が定義できる。ある場合にこの線形関係が基本群から復元される事を示し (c.f. [5] Corollary 4.8)、上記の群同型 $E_1[m] \simeq E_2[m]$ と組み合わせる事で E_1, E_2 の j 不変量が復元され、以下の定理が示される。

定理 2.4 ([5] Theorem 4.9)
$p \neq 2, (g, n) = (1, 1)$、$k_1 \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$ とする。このとき (k_2-スキームとしてではなく) スキームとしての同型 $U_1 \times_{k_1} k_2 \simeq U_2$ が存在する。

■

参考文献

[1] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Vol. 1960/61 of *Séminaire de Géométrie Algébrique*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963.

[2] A. Grothendieck. Brief an G. Faltings. In *Geometric Galois actions, 1*, Vol. 242 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 49–58. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 285–293.

[3] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. In *Geometric Galois actions, 1*, Vol. 242 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 5–48. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With an English translation on pp. 243–283.

[4] S. Mochizuki. The local pro-p anabelian geometry of curves. *Invent. Math.*, Vol. 138, No. 2, pp. 319–423, 1999.

[5] A. Sarashina. Reconstruction of one-punctured elliptic curves in positive characteristic by their geometric fundamental groups. *RIMS Preprint, No.1876*, 2017.

[6] A. Tamagawa. On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic > 0. *Internat. Math. Res. Notices*, No. 16, pp. 853–873, 1999.

[7] A. Tamagawa. Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 13, No. 4, pp. 675–724, 2004.

On a number-theoretic problem arsing from designs of efMRI experiments

神戸大学 大学院システム情報学研究科 情報科学専攻
佐竹 翔平 (Shohei SATAKE)

1 導入

efMRI 実験では, MRI 装置に被験者を乗せて画像列を見せたときの脳の反応を測定する. 脳医学においては, 脳の反応を測定する関数として, 血流動態関数が知られており, 実験ではそのピークを推定することが目的となる. 関数のよい推定を行うにあたっては, 統計的によい推定精度をもつと期待される画像列を設計することが求められる. そういった画像列の候補として, m-系列や直交配列による列などが提案されているが, 非常によい推定精度を保証する代わりに, 実験回数 (刺激列の長さ) に強い制約が課されるという実用上の欠点がある. 本稿で扱う巡回的準直交配列 (Circulant almost orthogonal array, CAOA) は, よい推定精度を与え, かつより柔軟な回数の実験を実現する画像列を与えるべく, Lin-Phoa-Kao [8] によって定義された. 最近 Yoshida-Satake-Phoa-Sawa [11] では, 素体上の平方剰余から新しい CAOA の無限系列を構成した. その構成法を考える上では, 平方剰余の分布について考察する必要がある. 本稿では, 整数論においてこれまでの先行研究で取り扱われてきた平方剰余分布の問題のある種の一般化を与え, 関連するいくつかの結果を紹介する. さらにそこから導かれる, [11] の構成法から得られる CAOA が存在するための必要条件についても述べる.

2 巡回的準直交配列とその構成

CAOA の定義は以下のように与えられる.

定義 1. *n, K, s, t, b を自然数とする. M を $0, 1, 2, \ldots, s-1$ を成分にもつ $K \times n$ 巡回行列とする. M の各 $t \times n$ 小行列内に, 長さ t の順序列 $\boldsymbol{a}$ が (小行列によらず) $\lambda(\boldsymbol{a})$ 回出現し, 任意の長さ t の順序列 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して, $|\lambda(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{b})| \leq b$ が成り立つとき, M をレベル s, 強さ t, 帯域 b の巡回的準直交配列 (Circulant almost orthogonal array, CAOA) とよぶ. また, そのような CAOA を $CAOA(n, K, s, t, b)$ と表す.*

ここで, CAOA の 1 行目が所望の画像列に対応しており, さらに CAOA から統計的なよさを測る一つの尺度 (D-効率性) が計算される (詳細は [8] を参照). 本稿では, 0 または 1 を成分にもつ $s = 2$ の CAOA に着目する. 最初の CAOA の構成として, [8] では, $CAOA(n, K, 2, 2, 1)$ の構成法が与えられている. これに対し, 最近 Yoshida-Satake-Phoa-Sawa [11] では, [8] での構成例よりも強いある

統計的利点をもつ $CAOA(n, K, 2, 3, 1)$ の構成法を与えることができた. いま, $p \equiv 3 \pmod 4$ を素数とし, σ_p を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の平方剰余の 0-1 特性ベクトルとおく. すなわち, σ_p の第 i 成分は i が法 p で平方剰余のとき 1, そうでないとき 0 で与えられるとする. さらに, σ_p を第 1 列目にもつ巡回行列を N, その 0 と 1 を反転して得られる巡回行列を $\overline{N}$ とし,

$$N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_0 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{p-1} \end{bmatrix}, \ \overline{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_0 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{p-1} \end{bmatrix}$$

とおく. 次に N と $\overline{N}$ からそれぞれ K の連続する行 $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$,..., $\boldsymbol{a}_{i+K-1}$ および $\boldsymbol{b}_j$, $\boldsymbol{b}_{j+1}$, ..., $\boldsymbol{b}_{j+K-1}$ を抜き出す. ただし, それぞれの行は

$$M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{b}_j \\ \boldsymbol{a}_{i+1} & \boldsymbol{b}_{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i+K-1} & \boldsymbol{b}_{j+K-1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

が巡回行列となるように選ばれるとする. このとき, M は以下のパラメータをもつ CAOA となる.

定理 2 (吉田-佐竹-Phoa-澤 [11])**.** *M は $CAOA(2p, K, 2, 3, 1)$ である.*

実際にそのような行たちを求めることは, K が定数であれば, 例えば適当な定数 $l > K$ をとって, $0, 1, 2, \ldots, l$ に対して, p に応じて平方剰余の相互法則を用いて, 具体的に $0, 1, 2, \ldots, l$ 上の分布を計算することで可能となる. 一方で, 素数 p に応じて, K はどこまで大きくなれるかという一つの自然な問題が浮かび上がってくる. この問題は N と $\overline{N}$ が巡回行列である (すなわち, それぞれは第 1 列目で定まる) ことに着目することで, 次のように定式化できる.

問題 3. *σ_p 内の 2 つの連続部分列で, 一方がもう一方の 0-1 反転で得られるような列の最大長 H を求めよ (または評価せよ).*

ここで, $H + 1$ が上記の構成法で得られる $CAOA(2p, K, 2, 3, 1)$ における K の最大値となることに注意せよ.

3 平方剰余の分布と CAOA の存在条件

平方剰余の分布に関しては, 整数論において C. F. Gauss から始まって, 150 年以上の長きにわたって考えられてきた. 中でも σ_p 内の連続する平方剰余 (または非剰余) の部分列の最大長 R (または N) の問題は, 最初は E. Landau, G. Polya, I. Schur らによって考えられ (例えば [2], [5, Chapter 9] を参照), 特に Brauer [1], [2], Davenport-Erdős [4], Gel'fond-Linnik [5, Chapter 9], Hudson [6], Hummel [7], Pollack-Treviño [9] らは, 初等的な組合せ論的手法を用いて, 多くの結果を生み出している. しかしながら, 今回定式化した問題 3 のように一般的な列に焦点を当てた研究は, 講演者の知る限り, これまでなかったように思われる (ただし, [2] の直後のレビューで D. E. Knuth がその問題を提起している). 一方で, $p \equiv 3 \pmod 4$ の場合, $R = N$ であることから, 問題 3 は上記の連続する

平方剰余 (または非剰余) の最長部分列の問題の一般化となっている.

以上を踏まえ, 問題 3 に関する結果を紹介する. まず次の定理は完全に初等的な手法で得られる.

定理 4. 全ての奇素数 p *(*$p \equiv 3 \pmod 4$ でなくてもよい*)* に対して, $H \leq \sqrt{7p} + 1$ が成り立つ.

さらに, 組合せ論的な数え上げのアイデアと Weil の評価式による数え上げを用いることで (したがって初等性が定理 4 に比べて落ちてしまうが), すべての素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ に対して, 定理 4 を改良する次の結果が得られる.

定理 5. 全ての素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ に対して, $H \leq \sqrt{2p} + 2\sqrt{7}p^{\frac{1}{4}} + 11$ が成り立つ.

ここで, Burgess [3] の部分指標和の評価から, どのような $\delta > 0$ に対しても, 十分大きな p に対して, $H \leq O(p^{1/4+\delta})$ が成り立つ. この評価式は漸近的には, 定理 4 および 5 よりよい評価式であるが, 十分大きな素数に対して成立する評価式である. 我々は CAOA の動機からすべての素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ に対して成り立つ評価式に着目していることに注意されたい.

以上から我々の構成法によって作られる CAOA が存在するための下記の必要条件が得られる.

系 6. 定理 2 の $CAOA(2p, K, 2, 3, 1)$ が存在するならば, $K \leq \sqrt{2p} + 2\sqrt{7}p^{\frac{1}{4}} + 12$ である.

謝辞

本研究にあたり, 論文 [9] をご教示くださった Paul Pollack 先生に感謝致します. 本研究は, 科学研究費補助金 (特別研究員奨励費 課題番号 18J11282) の助成を受けています.

参考文献

[1] A. Brauer, Über die Verteilung der Potenzreste, *Math. Z.*, **35** (1932), 39–50.

[2] A. Brauer, Combinatorial methods in the distribution of kth power residues, In *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1967), pp. 14–37 Univ. North Carolina Press, 1969.

[3] D. A. Burgess, The distribution of quadratic residues and non-residues. *Mathematika* **4** (1957), 106–112.

[4] H. Davenport, P. Erdős, The distribution of quadratic and higher residues, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952) pp. 252–265.

[5] A. O. Gel'fond, Y. V. Linnik, Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers, Pergamon Press, 1966.

[6] R. H. Hudson, On a conjecture of Issai Schur, *J. Reine Angew. Math.*, **289** (1977), 215–220.

[7] P. Hummel, On consecutive quadratic non-residues: a conjecture of Issai Schur, *J. Number Theory*, **103** (2003), no. 2, 257–266.

[8] Y. L. Lin, F. K. H. Phoa, M. H. Kao, Optimal design of fMRI experiments using circulant (almost-)orthogonal arrays, *Ann. Statist.*, **45** (2017), no. 6, 2483–2510.

[9] P. Pollack, E. Treviño, The primes that Euclid forgot, *Amer. Math. Monthly*, **121** (2014), no. 5, 433–437.

[10] Shivarajkumar, Beyond Schur's conjecture, *Amer. Math. Monthly*, **123** (2016), no. 1, 66–70.

[11] K. Yoshida, S. Satake, F. K. H. Phoa, M. Sawa, "Circulant almost-orthogonal arrays with strength 3 and bandwidth 1: Constructions and existence", Submitted.

団代数における F 多項式の行列化

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
行田康晃 (Yasuaki GYODA)

1 導入

団代数とは，団変数と呼ばれる生成元による有理関数体の部分環として定義される可換代数であり，この団変数は変異と呼ばれる漸化式によって定義される変換によって結びついている．元々は半単純 Lie 群における全正値性や標準規定を調べるために Fomin と Zelevinsky により導入されたもの [FZ02] であるが，現在はさまざまな数学的事象の背景にこの変異の構造が存在することが知られており，クイバーの表現論や双曲幾何など，Lie 理論を超えた枠組みでその応用が行われている．

私の研究対象は，[FZ07] によって導入されたこの変異を決定する漸化式から得られる C 行列，G 行列，F 多項式と呼ばれる，2 つの行列族と 1 つの多項式族である．これらは団変数の表示を一意的に決定する点において重要な概念であるが，これにより団代数の変異に関する研究には新しい視点が与えられた．すなわち，団変数とその係数を見る代わりに，これらを表現することのできる C 行列，G 行列，F 多項式とその関係式を見ることで変異の性質を探っていこうという視点である．そのなかでも，特に C 行列と G 行列に関する研究は数多くある．その主たるものが，[NZ12] による C 行列と G 行列の双対性である．これらの研究において鍵となったのは，行列の性質やその操作である．例えば C 行列と G 行列の符号同一性と呼ばれる性質は行列の「行」や「列」に現れる特徴を述べたものであり，また C 行列と G 行列の双対性は行列の「転置」「逆行列」といった操作を介して得られる変異の性質である．これらは，団変数，係数，変異といった漸化式によって定義されているものを，行列や線形代数の文脈に落とし込むことで初めて顕在化する性質である．私はこの点に着目し，「F 多項式についてもそこから行列を構成してそちらを調べることで新しい性質を見出せるのではないか」という考えに至った．本稿では，2 節でまず団代数を定義し，3 節でその中で今回の主定理を適用するクラスである点付曲面から誘導される団代数を定める．4 節で C 行列，G 行列，F 多項式を導入，5 節で F 多項式から定まる行列である F 行列を定義し，この行列が逆に F 多項式を一意的に決定することを述べる．

2 団代数の定義

準備として，最初に**半体** *(semifield)* $\mathbb{P}$ を定義する．これは可換な乗法 $\cdot$ による群で，可換で結合的であり，乗法について分配的な加法 $\oplus$ を備えるものである．次にシードを定義する準備を行う．$\mathbb{ZP}$ を半体 $\mathbb{P}$ で生成される $\mathbb{Z}$ 上の群環であるとする．$\mathbb{ZP}$ は整域だから，全商環は体である．これを $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ と表すことにする． 体 $\mathcal{F}$ が $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ 上の n 変数有理関数体と同型な体であるとき，$\mathcal{F}$ を以下で

定める団代数 $\mathcal{A}$ の**周辺体** *(ambient field)* という．

定義 2.1 ([FZ07, Definition 2.3])．任意に半体 $\mathbb{P}$ を固定して，$\mathcal{F}$ をその周辺体とする．$\mathcal{F}$ の**ラベル付シード** (*labeled seed*) を，次の条件を満たす三つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ として定義する．

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathcal{F}$ の自由生成集合となる代数的独立な n 個の変数の組である．
- $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ は $\mathbb{P}$ の n 個の元の組である．
- $B = (b_{ij})$ は歪対称化可能な $n \times n$ 整数行列である．ここで，行列 B が歪対称化可能であるとは，ある正整数成分対角行列 S（これを B の歪対称化行列という）が存在して SB が歪対称行列となることをいう．

$\mathbf{x}$ を (ラベル付の) **団** *(cluster)*，$\mathbf{y}$ を**係数組** *(coefficient tuple)*，B を**交換行列** *(exchange matrix)* とそれぞれ呼ぶ．

ここで，$[b]_+ = \max(b, 0)$ と定めておく．

定義 2.2 ([FZ07, Definition 2.4])．$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mathcal{F}$ のラベル付けされたシードとして，$k \in J$ を任意にとる．ℓ 方向の**シード変異** (seed mutation) μ_ℓ によって $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が次で定義される $\mu_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に移るものとする．

- $B' = (b_{ij})$ の成分は

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = \ell \text{ または } j = \ell); \\ b_{ij} + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} + b_{i\ell}[b_{\ell j}]_+ & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.1}$$

  で定義される．
- $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ は

$$y'_j = \begin{cases} y_\ell^{-1} & (j = \ell); \\ y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (y_\ell \oplus 1)^{-b_{\ell j}} & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.2}$$

  で定義される．
- $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ は $j \neq \ell$ のとき $x'_j = x_j$ と定義され．$x'_\ell \in \mathcal{F}$ は**交換関係式** *(exchange relation)*

$$x'_\ell = \frac{y_\ell \prod x_i^{[b_{i\ell}]_+} + \prod x_i^{-[b_{i\ell}]_+}}{(y_\ell \oplus 1) x_\ell} \tag{2.3}$$

  によって定義される．

μ_k は対合である，すなわち，$\mu_k \circ \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が成立することが直接計算によって確かめられる．ここから，$\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ がシードとなることがわかる．実際，$\mathbf{x}'$ が代数的独立であることは背理法から直ちに従う．また，直接計算から B' が歪対称化可能であり，しかも歪対称化行列 S は変異前の B と共通であることが示される．

次に，$\mathbb{T}_n$ を任意の頂点から n 本の辺が伸びており，その各辺に $1, \ldots, n$ でラベル付けされるグラフであるとする．ここで，1 つの頂点から出る n 本の辺には全て違うラベルがついているようにす

る．このグラフ $\mathbb{T}_n$ のことを n-**正則木** *(n-regular tree)* と呼ぶ．$t, t' \in \mathbb{T}_n$ が ℓ でラベル付けされた辺で繋がっているとき，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ のように表すものとする．

定義 2.3 ([FZ07, Definition 2.9])．$\mathbb{T}_n$ と団全体の間の**団パターン** *(cluster pattern)* を，任意の $t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ を満たす $\mathbb{T}$ の頂点 t, t' に対して，ラベル付けされたシード $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t), \Sigma'_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を互いに ℓ 方向のシード変異で移り合うような $\mathbb{T}_n$ の頂点と団の間の対応と定義する．また，Σ_t の元を以下のように表すことにする．

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \ldots, x_{n;t}),\ \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \ldots, y_{n;t}),\ B_t = (b_{ij;t}). \tag{2.4}$$

以上で団代数を定義する準備が整った．

定義 2.4 ([FZ07, Definition 2.11])．任意に団パターンが与えられたとき，

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}, \tag{2.5}$$

を団パターンに現れる全てのシードの和集合として定める．ここで，$x_{i;t}$ を**団変数** *(cluster variable)* と呼ぶことにする．さらに，与えられた団パターンに付随する団代数 $\mathcal{A}$ を全ての団変数で生成される $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数，すなわち $\mathcal{A} = \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$ と定義する．

実は団代数について以下の重要な性質が成立している．

定理 2.5 ([FZ02, Theorem 3.1])．$t \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ に付随する団代数 $\mathcal{A}$ はローラン多項式環 $\mathbb{ZP}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ に含まれる．すなわち，$\mathcal{A}$ の元は全て $\mathbf{x}$ の団変数の $\mathbb{ZP}$ 上ローラン多項式である．

この性質は，**ローラン現象** *(Laurent phenomenon)* と呼ばれる，団代数がもつ大きな特徴の 1 つである．この性質を用いることができるということが，他の数学分野において団代数の考え方を導入する大きな利点となる．

3　点付曲面から誘導される団代数

この節では，[FST08] に沿って点付曲面から誘導される団パターンとその団代数について定義する．点付曲面とそのタグ付三角形分割による団構造の実現は，団パターン，団代数に幾何的，組み合わせ論的手法を取り入れるために定義された．

まず，点付曲面とその弧について定義する．$\mathbf{S}$ を連結な向き付きリーマン面とする．そして，$\mathbf{M}$ を $\mathbf{S}$ の閉包における **点** *(marked points)* と呼ばれる有限集合とする．特に，$\mathbf{S}$ の内部にある点を**穴** *(puncture)* と呼ぶ．このとき，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ を**点付曲面** *(marked surface)* という．以下，$\mathbf{M}$ は空でなく，$\mathbf{S}$ の境界成分ごとに少なくとも 1 つの点を持ち，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ は次のいずれでもないと仮定する：

- 1 点付，2 点付，または 3 点付の球面
- 穴を持たない，または 1 つ持つ一角形
- 穴を持たない二角形
- 穴を持たない三角形

$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ 上の（タグなし）**弧** *(arc)* γ は，$\mathbf{S}$ 上の曲線で次を満たすものである：

- γ の端点は $\mathbf{M}$ に属する点である
- γ は端点となっている点以外では自己交差しない
- 端点を除き，γ は $\mathbf{M}$ や $\mathbf{S}$ の境界との共通部分を持たない
- γ は穴なし一角形や穴なし二角形を切り取らない（言い換えると，γ は $\mathbf{M}$ の元や $\mathbf{S}$ 境界に可縮でない）.

ここで，γ は互いに $\mathbf{S}\backslash\mathbf{M}$ 上の道ホモトピーであるものを同一視するものとする．このタグなし弧を用いて，タグ付弧を定義する．任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ に属する弧 γ に対して，両端に**タグ** *(tag)* と呼ばれるラベルをつけることを考える．**タグ付弧** *(tagged arc)* はタグなし弧の 2 つの端に**プレーン** *(plain)* か**ノッチ** *(notch)*（図 1）のどちらか 1 つのタグがついており，（タグなし弧の条件に加えて）次の条件を持たすものである：

- 弧は 1 点付一角形を切り取らない
- 境界上に端点を持つとき，その端点側の弧の端にあるタグはプレーンである
- ループの両端のタグは同じものである



図 1　タグ付弧

これに関して，点付曲面において団パターンにおける団に対応するタグ付三角形分割という概念を定める.

定義 3.1. 2 つのタグ付弧 α と β について，次の条件が成立しているとき，またそのときに限り，2 つのタグ付弧は**整合的** *(compatible)* であるという：

- α と β のタグを取り除いたものの道ホモトピー類を考えたときの，端点を除く最小交差数が 0 である
- α の β のタグを取り除いたものが異なる（道ホモトピーでない）とき，α と β が端点 a を共有するならば，a についてその端についている α と β についているタグが同じである
- α と β のタグを取り除いたものが一致する（道ホモトピーである）とき，少なくとも 1 つの端点について，その端についている α と β のタグが一致している

タグ付弧の部分集合で，任意の 2 元が整合的であるようなものを考え，この集合のことを整合的集合ということにする．このうち，弧の数が極大であるものを**タグ付三角形分割** *(tagged triangulation)* という.

具体例を見る．図 2 は 1 点付き三角形のタグ付弧を全て集めてきたものである．ここで，互いに線で結ばれているもの同士が互いに整合的であることを示している．濃度最大の整合的集合，すなわち三角形分割はこの例においては全て 3 つの弧たちの組み合わせであることが見て取れる．この図にお

ける 2 次元単体（三角形）が各三角形分割に対応している，一般に次の定理が成り立つ：

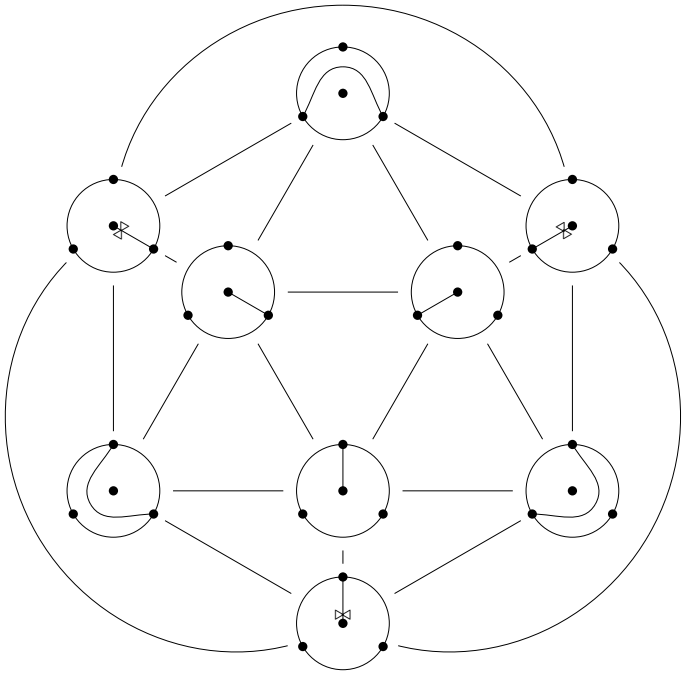


図 2　1 点付三角形の弧と整合的集合

補題 3.2 ([FST08, Lemma 7.9])**.** 任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ を 1 つ固定する．$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ におけるタグ付三角形分割の濃度は，タグ付三角形分割の選び方によらず一定である．さらにこの濃度を n とすると，$n-1$ 個の弧を持つ任意の整合的集合について，それを部分集合として持つタグ付三角形分割がちょうど 2 つ存在する．

次に，タグ付三角形分割から団パターンにおける交換行列を定めることを考える．まずランク（三角形分割の濃度）が n の点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する．T に付随する行列 $B = B(T)$ を定める．いくつか準備をする．便宜上 T の弧に 1 から n までのラベルをつけ，$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ とする．$\overline{T}$ を T に属するダグ付き弧からタグを取り除いた弧の集合とする．ここで，$\overline{\gamma}_i \in \overline{T}$ を γ_i のタグを取り除いた弧としておく．$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ における T からタグなし弧全体への写像 π_T を次で定める： 2 つのタグ付弧 $\gamma_i, \gamma_j \in T$ で，$\overline{\gamma}_i = \overline{\gamma}_j$ であり，$\overline{\gamma}_i$ の端点が a と b で，γ_i と γ_j のタグが a 側の端で異なっているとき，$\pi_T(\gamma_i) = \pi_T(\gamma_j)$ を b を端点として a を囲むようなループとして定める (図 3)．T におけるそれ以外の弧については，$\pi_T(\gamma_i) = \overline{\gamma}_i$ とする．$\pi_T(T)$ の任意の

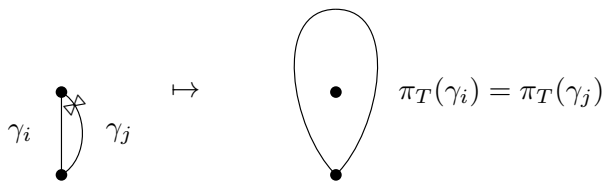


図 3　写像 π_T

辺が折りたたまれていない三角形 Δ について，$n \times n$ 行列 $B^{\Delta} = (b_{ij}^{\Delta})$ を次で定義する：

$$b_{ij}^{\Delta} = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} \pi_T(\gamma_i) \text{ と } \pi_T(\gamma_j) \text{ が } \Delta \text{ の辺であり}, \\ \text{時計回りの順に } \pi_T(\gamma_i),\ \pi_T(\gamma_j) \text{ とならんでいるとき} \end{array} \right) \\ -1 & (\text{反時計回りの順に並んでいるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき，$B = B(T) = (b_{ij})$ を

$$B = \sum_{\Delta} B^{\Delta}\,, \tag{3.2}$$

で定義する．ここでの総和は T における折りたたまれていない三角形 Δ すべてでとる．行列 B は $n \times n$ 歪対称行列であり，すべての成分が $0, 1, -1, 2, -2$ のいずれかに等しい．

定義 3.3. 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T について，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ **と** T **から誘導される団パターン，団代数**を初期シードが $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B(T))$ であるような団パターン，団代数とする．

以降，$T = \{\gamma_1, \ldots \gamma_n\}$ とする．つぎに，団パターンにおける変異にあたる操作であるフリップを定義する．

定義 3.4 ([FST08, Definition 3.5])**.** 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ について，タグ付三角形分割 T を任意にとる．i に関する**フリップ** *(flip)* φ_i を，T から $(T\backslash\{\gamma_i\}) \cup \{\gamma_i'\}$ への変換とする．ただし，γ_i' は $(T\backslash\{\gamma_i\})$ の各元と整合的であり γ_i と異なる（一意的な）元であるとする．

注 3.5. 定理 3.4 における γ_i' の一意性と存在は定理 3.2 により保証されている．

次の 2 つの定理より，点付曲面と団パターン（団代数）の間に，フリップと変異，タグ付弧と団変数，タグ付三角形分割と団の 1 対 1 対応があることがわかる．

定理 3.6 ([FST08, Lemma 9.7])**.** 任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T について，$B(\varphi_i(T)) = \mu_i(B(T))$ が成立する．

定理 3.7 ([FST08, Theorem 7.11])**.** 1 点付閉曲面でない $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する．$A, \mathfrak{A}$ をそれぞれ $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ におけるすべてのタグ付弧，タグ付三角形分割とし，$C, \mathfrak{C}$ をそれぞれ $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T から誘導される団パターンの団変数，団とする． このとき，

(1) 写像

$$\Psi : A \to C,\ \Psi(\varphi_{i_m} \cdots \varphi_{i_1}(\gamma_j)) = \mu_{i_m} \cdots \mu_{i_1}(x_j) \tag{3.3}$$

は全単射である．ここで，$i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots n\}$ とする．

(2) Ψ から誘導される写像

$$\overline{\Psi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C} \tag{3.4}$$

は well-defined かつ全単射である．

注 3.8. $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ が 1 点付閉曲面の場合は，A として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧全体，$\mathfrak{A}$ として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧のみから構成されるタグ付三角形分割をとることで，定理 3.7 と同様の定理が成り立つ．

これらの対応により，点付曲面から誘導される団パターン，団代数における問題を，点付曲面における問題に帰着させることができる．

4 C 行列，G 行列，F 多項式

ここからは，団代数を決定する団パターンとその変異の性質に絞って話を進める．まず C 行列，G 行列，F 多項式について定義する．

定義 4.1. 団パターンの頂点 t に付随する行列 $C_t^{B;t_0} = (c_{ij;t})$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき $c_{ij;t_0} = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）とし，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ に対して，

$$c_{ij;t'} = \begin{cases} -c_{i\ell;t} & (j = \ell); \\ c_{ij;t} + c_{i\ell;t}[b_{\ell j;t}]_+ + [-c_{i\ell;t}]_+ b_{\ell j;t} & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.1}$$

で漸次的に定める．ただし，$b_{ij;t}$ は B_t の (i, j) 成分である．これを C **行列** *(C-matrix)* と呼ぶ．

定義 4.2. 団パターンの頂点 t に付随する行列 $G_t^{B;t_0} = (g_{ij;t})$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき $g_{ij;t_0} = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）とし，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ に対して，

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & (j \neq \ell); \\ -g_{i\ell;t} + \sum_{k=1}^{n} g_{ik;t}[b_{k\ell;t}]_+ - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}[c_{k\ell;t}]_+ & (j = \ell). \end{cases} \tag{4.2}$$

で漸次的に定める．これを G **行列** *(G-matrix)* と呼ぶ．

定義 4.3. 団パターンの頂点 t に付随する多項式族 $\{F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\}_{1 \leq i \leq n}$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $F_{i;t_0}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = 1$ とし，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ に対して，

$$F_{i;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = \begin{cases} F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) & (i \neq \ell); \\ \dfrac{\prod_{k=1}^{n} y_k^{[c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[b_{k\ell;t}]_+} + \prod_{k=1}^{n} y_k^{[-c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[-b_{k\ell;t}]_+}}{F_{\ell;t}(\mathbf{y})} & (i = \ell) \end{cases} \tag{4.3}$$

で漸次的に定める．これを F **多項式** *(F-polynomial)* と呼ぶ．

注 4.4. 定義からは非自明な事実であるが，これにより定義される $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ 達は多項式となる．

これらの重要性は，これらが任意の係数を持つ団パターンの完全に構造を決定するという点にある．

命題 4.5 ([FZ07, Proposition 3.13])**.** $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする．このとき，任意の $t \in \mathbb{T}_n$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ について，

$$y_{j;t} = \prod_{k=1}^{n} y_k^{c_{kj}} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y}))^{b_{kj;t}}. \tag{4.4}$$

が成立する．ここで，$|_{\mathbb{P}}$ は加法を $\mathbb{P}$ についての加法 $\oplus$ にする操作を表す．

命題 4.6 ([FZ07, Corollary 6.3])**.** $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする．このとき，次が成立する；

$$x_{j;t} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{g_{ij;t}} \frac{F_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{y}})}{F_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y})}. \tag{4.5}$$

ただし，$\hat{y}_i = y_i \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{ij}}$ である．

これらの命題より，主係数を持つ団パターンは C 行列，G 行列，F 多項式，交換行列 B_t の 4 つの要素で決定されることがわかる．

5 F 行列の一意性と F 多項式の復元

F 行列とは，n 個の F 多項式の最高次数に関する情報を持つ行列である．

定義 5.1 ([FG18, Proposition 2.6])**.** B を t_0 における初期交換行列とする．任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $t \in \mathbb{T}_n$ について，$f_{1i;t}^{B;t_0}, \ldots, f_{ni;t}^{B;t_0}$ を i 番目の F 多項式 $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ における $y_1, \ldots, y_n$ の最大冪であるとする．このとき，非負整数ベクトル $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} = \begin{bmatrix} f_{1i;t}^{B;t_0} \\ \vdots \\ f_{ni;t}^{B;t_0} \end{bmatrix}$ を t における **f ベクトル** *(***f***-vector)* と呼び，$\mathbf{f}_{1;t}^{B;t_0}, \ldots, \mathbf{f}_{n;t}^{B;t_0}$ を順に横に並べた $n \times n$ 行列 $F_t^{B;t_0}$ を t における F **行列** *(F-matrix)* という．

1 節で述べたように，この行列を用いることで F 多項式を線形代数的な道具を用いて調べることができる．これを利用した例として F 行列の自己双対性と呼ばれる性質が存在する（これについては同じく本研究集会に参加する藤原祥吾氏の講演とテクニカルレポートを参照していただきたい）．しかし，F 多項式の定義を見ればわかるように，F 多項式から F 行列を定義する際には大幅な情報の削減が起こっている．もしこの F 行列が F 多項式にとって枝葉末節な情報であるならば，この行列やその性質を考える意味は薄いであろう．そこで私は，F 行列が F 多項式の「本質的な」情報であるか，という点について考えた．ここでいう F 多項式の「本質的な」情報とは，F 多項式を一意に決定できるだけの情報，という意味である．

予想 5.2. t, t' を $\mathbb{T}$ の頂点とする．このとき，

$$F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0} \Rightarrow \{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \tag{5.1}$$

が成立する．

さらに予想 5.2 が成り立つクラスについてはより具体的に，次の問題を考える．

問題 5.3. 初期交換行列 B と F 行列が与えられたとき，そこから F 多項式を復元する公式あるいはアルゴリズムは存在するか．

これらが解決されることにより，団変数と係数は $\{B_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{C_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{G_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\{F_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}$ で表現されることになり，団代数において F 行列を考える重要性が保証されることになる．百合草寿哉氏との共同研究により，この予想と問題について点付曲面から誘導される団代数において解決した [GY18]．これを説明する．まず，点付曲面における F 行列の対応物を考える．

定義 5.4 ([QZ17, Definition 3.3])．任意の $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ の弧 δ と ϵ に対して，δ と ϵ の**交点数** *(intersection number)* を次のように定義する：δ と ϵ の道ホモトピーで交差数が最小の組を δ_0 と ϵ_0 とする．$\mathsf{Int}(\delta,\epsilon)=A+B+C$ が交点数である．ただし，

- A は δ_0 と ϵ_0 の $\mathbf{S}\setminus\mathbf{M}$ における交差数,
- B は δ_0 と ϵ_0 の共通の端点側の端におけるタグが一致しているものの個数,
- C は δ と ϵ が共役な弧の組ならば -1，それ以外の時 0

である．

交点数を用いて，タグ付弧とタグ付三角形分割との間に定まる交点ベクトル，タグ付三角形分割の間に定まる交点行列を定義する．

定義 5.5 ([GY18])．$(\mathbf{S},\mathbf{M})$ のタグ付弧 δ とタグ付三角形分割 T, $T'=\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ について，

$$\mathsf{Int}(\delta,T):=(\mathsf{Int}(\delta,t))_{t\in T}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \tag{5.2}$$

$$\mathsf{Int}(T',T):=\big(\mathsf{Int}(\delta_1,T)\cdots\mathsf{Int}(\delta_n,T)\big)\in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{5.3}$$

とする．$(\mathbf{S},\mathbf{M})$ の任意のタグ付弧 δ に対して，T との**交点ベクトル** *(intersection vector)* を $\mathsf{Int}(\delta,T)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ で，任意のタグ付三角形分割 T' に対して T との**交点行列** *(intersection matrix)* を $\mathsf{Int}(T',T)\in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で定義する．

実は，ここで定義した交点行列が団パターンにおける F 行列となっている．

定理 5.6 ([Yur18, Theorem 1.8])．$(\mathbf{S},\mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T をにおける任意のタグ付き弧 δ について，定理 3.7 を通して対応する団変数から得られる $\mathbf{f}$ ベクトルを $\mathbf{f}_\delta$ とする．このとき，$\mathbf{f}_\delta=\mathsf{Int}(\delta,T)$ が成立する． 特に，タグ付三角形分割 T' に対応する団から得られる F 行列を $F_{T'}$ とすると，$F_{T'}=\mathsf{Int}(T',T)$ が成立する．

さらに，交点行列については次の性質がわかっている：

定理 5.7 ([GY18])．$(\mathbf{S},\mathbf{M})$ と T を 4 点球面における例外的三角形分割でないような点付曲面とタグ付三角形分割とする． T' と T'' を $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ のタグ付三角形分割とする．このとき，$\mathsf{Int}(T',T)=\mathsf{Int}(T'',T)$ ならば $T'=T''$ である．

ただし，4 点球面における例外的三角形分割とは次にあげる図 4 に示されるような三角形分割のこ

とである．

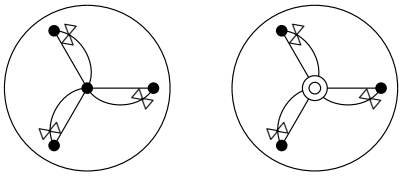


図 4　例外的三角形分割

（ただし，右図中央の穴はここに入る弧の端が全てノッチタグを持っていることを示す）

これを団パターンの性質に言い換えることで次の性質が導かれる．これが本講演の主題となる定理である．

定理 5.8 ([GY18])**.** 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T を 4 点球面における例外的三角形分割でないような点付曲面とタグ付三角形分割とする．この点付曲面とタグ付三角形分割からから誘導される団パターン $t \mapsto \{\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ について，次が成り立つ：t, t' を $\mathbb{T}$ の頂点とする．このとき，

$$F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0} \Rightarrow \{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \dots, x_{n;s}\} \tag{5.4}$$

特に，

$$\{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \tag{5.5}$$

となる．

紙数の都合上詳細は省くが，F 行列から F 多項式を復元する公式については [MSW13, Yur18] により導入された $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ 上の弧からその弧に対応する団変数の表示を求める**団展開公式** *(cluster expansion formula)* を経由して求めることができることがわかっている．

参考文献

[FG18] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between front and rear mutations in cluster algebras*, 2018. preprint, arXiv:1808.02156 [math.RA].

[FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part i: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.

[FZ07] ———, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.

[GY18] Y. Gyoda and T. Yurikusa, *Tagged triangulations from intersection numbers*, 2018. in preparation.

[MSW13] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams, *Positivity for cluster algebras from surfaces*, Compos. Math. **149** (2013), no. 2, 217–263.

[NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226.

[QZ17] Y. Qiu and Y. Zhou, *Cluster categories for marked surfaces: Punctured case*, Compos. Math. **153** (2017), no. 9, 1779–1819.

[Yur18] T. Yurikusa, *Combinatorial cluster expansion formulas from triangulated surfaces*, 2018. arXiv:1808.01567 [math.CO].

CHARACTERISTIC QUASI-POLYNOMIALS AND A CONNECTION TO EHRHART THEORY

TAN NHAT TRAN

This note contains a recent joint work with Masahiko Yoshinaga

ABSTRACT. Kamiya-Takemura-Terao proved that the cardinality of the complement of a central hyperplane arrangement with integral coefficients modulo positive integers q is a quasi-polynomial in q. They called it the characteristic quasi-polynomial as its first constituent coincides with the characteristic polynomial of the hyperplane arrangement, and left the task of understanding the other constituents to be an interesting problem. In this note, we present two interpretations for the constituents through subspace and toric arrangements. We then briefly describe the recent work of Yoshinaga on how the characteristic and Ehrhart quasi-polynomials are relevant to study the arrangements arising from root systems.

1. INTRODUCTION

When a finite list $\mathcal{A}$ of integer vectors in $\mathbb{Z}^\ell$ is given, we may naturally associate to it a *hyperplane arrangement* $\mathcal{A}(G)$ in the vector space G^ℓ with G is $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, and a *toric arrangement* $\mathcal{A}(G)$ in the torus G^ℓ with G is $\mathbb{S}^1$ or $\mathbb{C}^\times$. The study of a hyperplane/toric arrangement typically goes along with the study of its *characteristic polynomial* as the polynomial carries combinatorial and topological information of the arrangement (e.g., [OS80], [OT92], [Loo93], [DCP05]). Many attempts have been made in order to compute and to make a broader understanding the characteristic polynomials (e.g., [Ath96], [BS98], [KTT08], [ERS09], [Law11], [Moc12], [DM13], [BM14]). One of the first and classical ways is to define a polynomial in more than one variable which specializes to the characteristic polynomial. It is well-known that the characteristic polynomial of any hyperplane arrangement gets generalized to the *Tutte polynomial* [Tut54], going back to Whitney (e.g., [Sta07, Theorem 2.4]). More recently, an arithmetical generalization of the ordinary Tutte polynomial, the *arithmetic* Tutte polynomial was introduced [Moc12] to extend the analysis on the toric case. For another interesting way of generalizing the polynomials, we would encode the information of the characteristic polynomials of these arrangements in a single quasi-polynomial, the *characteristic quasi-polynomial* of $\mathcal{A}$ [KTT08]. This quasi-polynomial was defined to evaluate the cardinality of the complement of the *q-reduced arrangement* $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_q)$ in $\mathbb{Z}_q^\ell$. Then the characteristic polynomial of the hyperplane arrangement coincides with the first constituent of the characteristic quasi-polynomial, which is known as a central result of the "finite field method" (e.g., [CR70], [Ath96], [BE97], [BS98], [KTT08]).

In a more general setting, all of the concepts mentioned above can be redefined through a finite list $\mathcal{A}$ of elements in a finitely generated abelian group Γ. The notions of hyperplane, toric and q-reduced arrangements are unified by the notion of *G-plexifications* $\mathcal{A}(G)$ [LTY17], which are defined by means of group homomorphisms from Γ to certain abelian groups G. The G-plexifications when $G = F \times (\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q$, with F is a finite abelian group are (non-trivial) examples of arrangements of *abelian Lie groups*. In [LTY17], their topologies provided that $q > 0$ have been described by the *G-characteristic polynomials*. Studying problems related to this specific class of abelian Lie group arrangements is a source of our interest and suffices the purpose of generalizing the previous concepts. The first result of the paper is obtained through the motivation of giving a combinatorial framework that describes the intersection patterns of $\mathcal{A}(G)$. Insprired by the pioneered work in [Moc12], we will associate to $\mathcal{A}(G)$ intersection posets and prove that its *partial* and *total* characteristic polynomials are also expressible in terms of the G-characteristic polynomials (Section 3).

Key words and phrases. G-Tutte polynomial, chromatic quasi-polynomial, characteristic quasi-polynomial, constituent, abelian Lie group arrangement, Worpitzky partition, Ehrhart quasi-polynomial.

The cardinality of the complement of $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_q)$ appeared as an analogue of the chromatic polynomial defined on a graph, and is called the *chromatic quasi-polynomial* [BM14]. We are also interested in a question that given a constituent of a chromatic polynomial how we can describe it in connection with arrangement characteristic polynomials? Less is known, except for the first and the last. Some attempts were made to describe certain classes of the constituents appeared in [Tra18], [DFM17, §10.3.3]. The second result of the paper is two complete interpretations for the constituents through subspace and toric viewpoints. The subspace interpretation is obtained from the combinatorics of $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{\dim(G)} \times \mathbb{Z}_k)$, while the toric interpretation is obtained from the arithmetics of $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ (or $\mathcal{A}(\mathbb{C}^\times)$) by appropriately extracting its intersection poset (Section 4).

Much of the motivation for the study of the hyperplane and toric arrangements comes from the arrangements that are defined by irreducible root systems. Apart from the theoretical aspects, the "finite field method" and its toric analogue proved to have efficient applications to compute the characteristic (quasi-)polynomials of several arrangements arising from these vector configurations (e.g., [Ath96], [BS98], [KTT07], [ACH15], [Yos18a]). More concrete computational results have also been derived to assist the observation of interesting coincidences, which we choose to mention some important examples in our study. The surprising connection between independent calculations on the Ehrhart quasi-polynomials [Sut98] and the characteristic quasi-polynomials [KTT07] produced a main flavor to the analysis on the deformations of root system arrangements in [Yos18b] (Section 5). Combining the computation on the arithmetic Tutte polynomials of classical root systems [ACH15] with the previously mentioned calculations provided the authors in [LTY17] with the key observation of the identification between the last constituent of the characteristic quasi-polynomial and the corresponding toric arrangement.

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we recall definitions and basic facts of the generalized toric arrangements, G-plexifications with the associated G-Tutte polynomials, and chromatic quasi-polynomials. In Section 3, we define for $\mathcal{A}(G)$ with $G = F \times (\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q$ the total and partial intersection posets, and express the corresponding characteristic polynomials in terms of G-characteristic polynomials (Theorem 3.7, Corollary 3.8). In Section 4, we obtain the subspace interpretation (Corollary 4.1) for every constituent of a chromatic quasi-polynomial immediately from the preceding section. The toric interpretation (Theorem 4.6) is derived from an important arithmetical result on the intersection poset (Lemma 4.4). In Section 5, we describe the Worpitzky partition (Theorem 5.1) introduced by Yoshinaga and show the relation between the characteristic and Ehrhart quasi-polynomials (Theorem 5.2).

This report is written based on the preprint [TY18], to which the interested reader is suggested to refer for many details and for all the proofs, which are omitted here.

2. Preliminaries

Let us first fix some definitions and notations throughout the paper. Let Γ be a finitely generated abelian group, and let $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$ be a finite list (multiset) of elements in Γ. For each sublist $\mathcal{S} \subseteq \Gamma$, we denote by $r_{\mathcal{S}}$ the *rank* (as an abelian group) of the subgroup $\langle \mathcal{S} \rangle \leq \Gamma$ generated by $\mathcal{S}$. Given a group K, denote by K_{tor} the torsion subgroup of K. Denote $\mathcal{S}^{\mathrm{tor}} := \mathcal{S} \cap \Gamma_{\mathrm{tor}}$.

2.1. **Generalized toric arrangements.** Let $(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$ be a finite poset. The Möbius function $\mu_{\mathcal{P}}$ of $\mathcal{P}$ is the function $\mu_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{Z}$ defined by

$$\mu_{\mathcal{P}}(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{if } a \not\leq_{\mathcal{P}} b, \\ 1 & \text{if } a =_{\mathcal{P}} b, \\ -\sum_{a \leq c < b} \mu_{\mathcal{P}}(a,c) & \text{if } a <_{\mathcal{P}} b. \end{cases}$$

A poset $\mathcal{P}$ is said to be *ranked* if for every $a \in \mathcal{P}$, all maximal chains among those with a as greatest element have the same length, denoted this common number by $\mathrm{rk}_{\mathcal{P}}(a)$.

Now we briefly recall what has been known on combinatorics of generalized toric arrangements following [Moc12, §5]. Set $T := \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ with G is either $\mathbb{S}^1$ or $\mathbb{C}^\times$. Each $\alpha \in \mathcal{A}$ determines the subvariety of T as follows $H_\alpha := \{\varphi \in T \mid \varphi(\alpha) = 1\}$. The collection $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \{H_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ is called the *generalized toric arrangement* defined by $\mathcal{A}$ on T. In particular, when Γ is free, T is a torus

and $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ is called the *toric arrangement*. To describe the combinatorics of $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, we associate to it an *intersection poset* $L_{\mathcal{T}(\mathcal{A})}$, which is the set of all the connected components of all the intersections of the subvarieties H_α. The poset $L_{\mathcal{T}(\mathcal{A})}$ is ranked by the dimension of its elements (*layers*). The combinatorics is encoded in the *characteristic polynomial* defined by

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{toric}}(t) := \sum_{\mathcal{C}\in L_{\mathcal{T}(\mathcal{A})}} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) t^{\dim(\mathcal{C})},$$

where $T^{\mathcal{C}}$ is the connected component of T that contains $\mathcal{C}$. To compute $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{toric}}(t)$ (in the same way as the Whitney's theorem showing how the characteristic polynomial of a hyperplane arrangement is computed by the Tutte polynomial), Moci introduced the *arithmetic Tutte polynomial*

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathrm{arith}}(x,y) := \sum_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{A}} \#(\Gamma/\langle\mathcal{S}\rangle)_{\mathrm{tor}} (x-1)^{r_{\mathcal{A}}-r_{\mathcal{S}}} (y-1)^{\#\mathcal{S}-r_{\mathcal{S}}}.$$

Theorem 2.1 ([Moc12]). *If Γ is free and $0_\Gamma \notin \mathcal{A}$ (or even if Γ is arbitrary with $\mathcal{A}^{\mathrm{tor}} = \emptyset$), then*

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{toric}}(t) = (-1)^{r_{\mathcal{A}}} \cdot t^{r_\Gamma - r_{\mathcal{A}}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathrm{arith}}(1-t, 0).$$

2.2. **G-plexifications.** Let G be an arbitrary abelian group. We recall the notions of G-plexifications and G-Tutte polynomials of $\mathcal{A}$ following [LTY17, §3]. We regard $T = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ as our total group. For each $\alpha \in \mathcal{A}$, we define the *G-hyperplane* associated to α as follows:

$$H_{\alpha,G} := \{\varphi \in T \mid \varphi(\alpha) = 0\} \leq T.$$

Then the *G-plexification* $\mathcal{A}(G)$ of $\mathcal{A}$ is the collection of the subgroups $H_{\alpha,G}$

$$\mathcal{A}(G) := \{H_{\alpha,G} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

The *G-complement* $\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G)$ of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, G) := T \smallsetminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} H_{\alpha,G}.$$

In what follows, we assume further that G is torsion-wise finite i.e., $G[d] := \{x \in G \mid d \cdot x = 0\}$ is finite for all $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. The *G-multiplicity* $m(\mathcal{S}; G)$ for each $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ is defined by

$$m(\mathcal{S}; G) := \#\,\mathrm{Hom}\left((\Gamma/\langle\mathcal{S}\rangle)_{\mathrm{tor}}, G\right).$$

Definition 2.2.

(1) The *G-Tutte polynomial* $T_{\mathcal{A}}^G(x,y)$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$T_{\mathcal{A}}^G(x,y) := \sum_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{A}} m(\mathcal{S}; G)(x-1)^{r_{\mathcal{A}}-r_{\mathcal{S}}} (y-1)^{\#\mathcal{S}-r_{\mathcal{S}}}.$$

(2) The *G-characteristic polynomial* $\chi_{\mathcal{A}}^G(t)$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$\chi_{\mathcal{A}}^G(t) := (-1)^{r_{\mathcal{A}}} \cdot t^{r_\Gamma - r_{\mathcal{A}}} \cdot T_{\mathcal{A}}^G(1-t, 0).$$

Proposition 2.3. *The leading coefficient of $\chi_{\mathcal{A}}^G(t)$ equals $\#\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathrm{tor}}; \Gamma_{\mathrm{tor}}, G)$.*

Various specializations of the G-plexifications and G-Tutte polynomials have appeared in the literature which we refer the reader to [LTY17] for more details. In particular, the hyperplane arrangements and generalized toric arrangements are G-plexifications by viewing $G = \mathbb{R}$ (or $G = \mathbb{C}$) and $G = \mathbb{S}^1$ (or $G = \mathbb{C}^\times$), respectively.

2.3. **Chromatic quasi-polynomials.** For each $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, by the Structure Theorem, we may write $\Gamma/\langle \mathcal{S} \rangle \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_\mathcal{S}} \mathbb{Z}_{d_{\mathcal{S},i}} \oplus \mathbb{Z}^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}}$ where $n_\mathcal{S} \geq 0$ and $1 < d_{\mathcal{S},i} | d_{\mathcal{S},i+1}$. The *LCM-period* $\rho_\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$\rho_\mathcal{A} := \operatorname{lcm}(d_{\mathcal{S},n_\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}).$$

It is proved in [BM14] that $\#\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, \mathbb{Z}_q)$ is a quasi-polynomial in $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ for which $\rho_\mathcal{A}$ is a period. The quasi-polynomial is called the *chromatic quasi-polynomial* of $\mathcal{A}$, and denoted by $\chi^{\text{quasi}}_\mathcal{A}(q)$. More precisely, there exist polynomials $f^k_\mathcal{A}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ $(1 \leq k \leq \rho_\mathcal{A})$, called the *$k$-constituents*, such that

$$\#\mathcal{M}(\mathcal{A}; \Gamma, \mathbb{Z}_q) = f^k_\mathcal{A}(q) \ \text{ if } q \equiv k \bmod \rho_\mathcal{A}.$$

The chromatic quasi-polynomial is precisely the $\mathbb{Z}_q$-characteristic polynomial in variable q, i.e., $\chi^{\text{quasi}}_\mathcal{A}(q) = \chi^{\mathbb{Z}_q}_\mathcal{A}(q)$ (e.g., [LTY17, Theorem 5.4]), and also the Chen-Wang's quasi-polynomial [Tra18]. In particular, when $\Gamma = \mathbb{Z}^\ell$, the $\mathbb{Z}_q$-plexification is the q-reduced arrangement defined on $\mathcal{A}$ with $\chi^{\text{quasi}}_\mathcal{A}(q)$ is the characteristic quasi-polynomial in the sense of [KTT08]. A partial description of the constituents in connection with arrangement theory is known.

Theorem 2.4 ([Tra18])**.**

$$f^1_\mathcal{A}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{A}^{\text{tor}} \neq \emptyset, \\ \chi_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}(t) & \text{if } \mathcal{A}^{\text{tor}} = \emptyset. \end{cases}$$

Theorem 2.5 ([LTY17])**.** *Assume that Γ is free and $0_\Gamma \notin \mathcal{A}$. Then*

$$f^{\rho_\mathcal{A}}_\mathcal{A}(t) = \chi^{\text{toric}}_\mathcal{A}(t).$$

3. The combinatorics

Unless otherwise stated, throughout this section, we assume that G is an abelian Lie group with finitely many connected components i.e. $G \simeq (\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q \times F$ with $g := \dim(G) = p + q \geq 0$ and F is a finite abelian group. For each $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, by [LTY17, Proposition 3.6], we have

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{S},G} &:= \bigcap_{\alpha \in \mathcal{S}} H_{\alpha,G} \\ &\simeq \operatorname{Hom}((\Gamma/\langle \mathcal{S} \rangle)_{\text{tor}}, G) \times F^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}} \times \left((\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q\right)^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

We agree that $T := H_{\emptyset,G}$. Each connected component of $H_{\mathcal{S},G}$ is isomorphic to $\left((\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q\right)^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}}$. If either $r_\Gamma = 0$ or $g = 0$, it can be identified with a point. The set of the connected components of $H_{\mathcal{S},G}$ is denoted by $\operatorname{cc}(H_{\mathcal{S},G})$. The following lemma is somewhat more general than [Moc12, Lemma 5.4].

Lemma 3.1. $\#\operatorname{cc}(H_{\mathcal{S},G}) = m(\mathcal{S}; G) \cdot (\#F)^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}}$.

Most of the main concepts in this section are defined by inspiration of [Moc12, §5] and [LTY17, §7].

Definition 3.2.

(1) The *total* intersection poset of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$L = L^{\text{tot}}_{\mathcal{A}(G)} := \{\text{connected components of nonempty } H_{\mathcal{S},G} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\},$$

whose elements, called *layers*, are ordered by reverse inclusion ($\mathcal{D} \leq_L \mathcal{C}$ if $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}$).

(2) The *total* characteristic polynomial of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$\chi^{\text{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) := \sum_{\mathcal{C} \in L} \mu(T^\mathcal{C}, \mathcal{C}) t^{\dim(\mathcal{C})}.$$

Here $T^\mathcal{C}$ is the connected component of T that contains $\mathcal{C}$, and $\mu := \mu_L$.

The set of minimal elements of L is exactly $\mathrm{cc}(T)$. The connected components of $H_{\mathcal{A},G}$ are maximal elements of L but the converse is not necessarily true. For each $\mathcal{C} \in L$, set

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{C} \in \mathrm{cc}(H_{\mathcal{S},G})\}.$$

One observes that $\dim(\mathcal{C}) = \dim(H_{\mathcal{S},G}) = g(r_\Gamma - r_{\mathcal{S}})$ for every $\mathcal{S} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$. The *localization* of $\mathcal{A}$ with respect to $\mathcal{C}$ is defined by

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} := \{\alpha \in \mathcal{A} \mid \mathcal{C} \subseteq H_{\alpha,G}\}.$$

Stated differently, $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ is the unique maximal element of $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ in the sense that $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ for every $\mathcal{S} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$. We also can write

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \mid r_{\mathcal{S}} = r_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}\}. \tag{3.2}$$

Thus L is a ranked poset with a rank function is given by $\mathrm{rk}_L(\mathcal{C}) := r_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}} = \mathrm{codim}(\mathcal{C})/g$ for $\mathcal{C} \in L$.

We are interested in a particular subset of $\mathrm{cc}(T)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{scc}(T) &:= \{T_i \in \mathrm{cc}(T) \mid (\mathcal{A}_{T_i})^{\mathrm{tor}} = \emptyset\} \\ &= \mathrm{cc}(T) \smallsetminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}^{\mathrm{tor}}} \mathrm{cc}(H_{\alpha,G}).\end{aligned}$$

By using the Inclusion-Exclusion principle,

$$\#\mathrm{scc}(T) = \#\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathrm{tor}}; \Gamma_{\mathrm{tor}}, G) \cdot (\#F)^{r_\Gamma}. \tag{3.3}$$

Definition 3.3.

(1) The *partial* intersection poset of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$L^{\mathrm{par}} := \{\mathcal{C} \in L \mid T^{\mathcal{C}} \in \mathrm{scc}(T)\},$$

with the Möbius function of L^{par} is the restriction of μ i.e., $\mu_{L^{\mathrm{par}}} = \mu|_{L^{\mathrm{par}} \times L^{\mathrm{par}}}$.

(2) The *partial* characteristic polynomial of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) := \sum_{\mathcal{C} \in L^{\mathrm{par}}} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) t^{\dim(\mathcal{C})}.$$

In other words, L^{par} is the dual order ideal (e.g., [Sta11, §3.1]) of L generated by $\mathrm{scc}(T)$. It follows from the definition above that $\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = 0$ if $\mathrm{scc}(T) = \emptyset$.

Remark 3.4. Removing from $\mathcal{A}(G)$ the hyperplanes $H_{\alpha,G}$ with $\alpha \in \mathcal{A}^{\mathrm{tor}}$ does not affect the structure of the poset i.e.,

$$L_{\mathcal{A}(G)} = L_{(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}})(G)} = L^{\mathrm{par}}_{(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}})(G)}.$$

As a consequence,

$$\chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^{\mathrm{tot}}_{(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}})(G)}(t) = \chi^{\mathrm{par}}_{(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}})(G)}(t).$$

In particular, $\chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t)$ if $\mathcal{A}^{\mathrm{tor}} = \emptyset$.

In the lemma below, we generalize the result in [Moc12, Lemma 5.5] as we include the possibility $\mathcal{A}^{\mathrm{tor}} \neq \emptyset$.

Lemma 3.5. *If $\mathcal{C} \in L$, then*

$$\sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{R}(\mathcal{C})} (-1)^{\#\mathcal{S}} = \begin{cases} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) & \text{if } \mathcal{C} \in L^{\mathrm{par}}, \\ 0 & \text{if } \mathcal{C} \notin L^{\mathrm{par}}. \end{cases}$$

Corollary 3.6. *The Möbius function of L strictly alternates in sign. That is, for all $\mathcal{C} \in L$,*

$$(-1)^{\mathrm{rk}_L(\mathcal{C})} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) > 0.$$

Theorem 3.7. *Let $G \simeq (\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q \times F$ with $g = p + q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Then*

$$\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^G_{\mathcal{A}}(\#F \cdot t^g).$$

Corollary 3.8. *Let $G \simeq (\mathbb{S}^1)^p \times \mathbb{R}^q \times F$ with $g = p + q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Then*

$$\chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^{G}_{\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{A}^{\mathrm{tor}}}(\#F \cdot t^g)\,.$$

Remark 3.9. Although either Theorem 3.7 or Corollary 3.8 may not be valid when $g = 0$, there is no loss of information in these formulations. Namely, $\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \#\mathrm{scc}(T)$, and by equality (3.3) and Proposition 2.3, this equals the "leading part" of $\chi^{G}_{\mathcal{A}}(\#F)$ (the value of the leading term of $\chi^{G}_{\mathcal{A}}(t)$ evaluated at $\#F$). Similarly, $\chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \#\mathrm{cc}(T)$, which is equal to the leading part of $\chi^{G}_{\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{A}^{\mathrm{tor}}}(\#F)$.

Remark 3.10. Note that when $G = \mathbb{S}^1$ (or $G = \mathbb{C}^\times$ if the dimension is defined over $\mathbb{C}$) and $\mathcal{A}^{\mathrm{tor}} = \emptyset$, $\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = \chi^{\mathrm{toric}}_{\mathcal{A}}(t)$. The result of Moci (Theorem 2.1) is a special case of Corollary 3.8.

4. The constituents

4.1. **Via subspace viewpoint.** Our first result in this section is the interpretation for chromatic polynomials and their constituents through the real subspace arrangement viewpoint. Combining Theorem 3.7 with the property of the chromatic polynomials (e.g., [Tra18, Proposition 3.6]), we obtain

Corollary 4.1. *Let $G = \mathbb{R}^g \times \mathbb{Z}_k$ with $g > 0$ and $1 \le k \le \rho_{\mathcal{A}}$. Then*

$$\chi^{\mathrm{par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = f^k_{\mathcal{A}}(k \cdot t^g).$$

Let us explain Corollary 4.1 in more detail. For nontriviality, we assume that $\mathrm{scc}(T) \neq \emptyset$ (e.g., when $\mathcal{A}^{\mathrm{tor}} = \emptyset$), and $r_\Gamma > 0$. Each connected component of $T = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}^g \times \mathbb{Z}_k)$ is isomorphic to $\mathbb{R}^{gr_\Gamma}$. For each $T_i \in \mathrm{scc}(T)$, the poset $L_i = \{\mathcal{C} \in L \mid \mathcal{C} \subseteq T_i\}$ is isomorphic to the total (or equivalently, partial) intersection poset of a $\mathbb{R}^g$-plexification $\mathcal{G}_i$ in $\mathbb{R}^{gr_\Gamma}$ (or *g-plexification* in the sense of [Björ94, §5.2])), with each $\mathcal{G}_i$ is possibly empty and defined over the integers. Thus after a rescaling of variable, each constituent records the summation of the total characteristic polynomials of the $\mathcal{G}_i$'s i.e.,

$$f^k_{\mathcal{A}}(kt^q) = \sum_{T_i \in \mathrm{scc}(T)} \chi^{\mathrm{tot}}_{\mathcal{G}_i}(t). \tag{4.1}$$

Remark 4.2. In particular, when $g = 1$, each $\mathcal{G}_i$ becomes an integral hyperplane arrangement $\mathcal{H}_i$ [Tra18, Proposition 4.5]. The conclusion related to the first constituent ($k = 1$) in Corollary 4.1 is the same as that stated in Theorem 2.4. In particular, if $\Gamma = \mathbb{Z}^\ell$, each hyperplane $H_{\alpha,\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_k}$ in T can be identified with $H_{\alpha,\mathbb{R}} \times H_{\alpha,\mathbb{Z}_k}$ in $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{Z}_k^\ell$. Each arrangement $\mathcal{H}_i$ turns out to be a subarrangement of $\mathcal{A}(\mathbb{R})$, and in which components of T that the components of $H_{\alpha,\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_k}$ locate depends on the arithmetics of the list $\mathcal{A}$.

4.2. **Via toric viewpoint.** We may expect that if there exists a "nicer" expression to describe every constituent without making any rescaling of variable. It turns out that such expression can be obtained from the toric arrangement by appropriately extracting its poset of layers. Now let us turn to the second interpretation via toric arrangement viewpoint. In the remainder of this section, we assume that G is either $\mathbb{S}^1$ or $\mathbb{C}^\times$. We retain the notation of the total group $T = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, with the identity is denoted by $\mathbf{1}$. For each $k \in \mathbb{Z}$, consider the homomorphism

$$E_k : T \longrightarrow T \quad \text{via} \quad \varphi \mapsto \varphi^k := \varphi \cdots \varphi.$$

Definition 4.3.

(1) For each $k \in \mathbb{Z}$, the *k-total* intersection poset of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$L[k] = \{\mathcal{C} \in L \mid \mathbf{1} \in E_k(\mathcal{C})\}.$$

(2) The *k-total* characteristic polynomial of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$\chi^{k\text{-tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) := \sum_{\mathcal{C} \in L[k]} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) t^{\dim(\mathcal{C})}.$$

The cover relation in L is preserved in $L[k]$ i.e., if $\mathcal{C}$ covers $\mathcal{D}$ in L and $\mathcal{C} \in L[k]$ then $\mathcal{D} \in L[k]$, which implies that $L[k]$ is an *order ideal* (e.g., [Sta11, §3.1]). For each $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, note that $H_{\mathcal{S},G}$ is a subtorus of T whose each connected component is isomorphic to the torus $G^{r_\Gamma - r_\mathcal{S}}$. Let $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}_{\mathcal{S}} \in \mathrm{cc}(H_{\mathcal{S},G})$ be the *identity component* of $H_{\mathcal{S},G}$, that is, the connected component that contains $\mathbf{1}$. Thus $\mathrm{cc}(H_{\mathcal{S},G})$ can be identified with the quotient group $H_{\mathcal{S},G}/\mathcal{C}^{\mathbf{1}}_{\mathcal{S}}$. In the lemma below, we generalize [Moc12, Lemma 5.4] in an arithmetical manner.

Lemma 4.4. *Fix $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. For each $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, we have*

$$\#\left(\mathrm{cc}(H_{\mathcal{S},G}) \cap L[k]\right) = m(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_k).$$

Definition 4.5.

(1) For each $k \in \mathbb{Z}$, the *k-partial* intersection poset of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$L^{\mathrm{par}}[k] := \{\mathcal{C} \in L^{\mathrm{par}} \mid \mathbf{1} \in E_k(\mathcal{C})\}.$$

(2) The *k-partial* characteristic polynomial of $\mathcal{A}(G)$ is defined by

$$\chi^{k\text{-par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) := \sum_{\mathcal{C} \in L^{\mathrm{par}}[k]} \mu(T^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}) t^{\dim(\mathcal{C})}.$$

Theorem 4.6. *If $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, then*

$$\chi^{q\text{-par}}_{\mathcal{A}(G)}(q) = \chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}}(q).$$

Corollary 4.7. *If $1 \leq k \leq \rho_{\mathcal{A}}$, then*

$$\chi^{k\text{-par}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = f^k_{\mathcal{A}}(t).$$

Corollary 4.8. *If $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $1 \leq k \leq \rho_{\mathcal{A}}$, then*

$$\chi^{q\text{-tot}}_{\mathcal{A}(G)}(q) = \chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}}}(q),$$
$$\chi^{k\text{-tot}}_{\mathcal{A}(G)}(t) = f^k_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{\mathrm{tor}}}(t).$$

5. A connection to Ehrhart theory

5.1. **Root systems.** Let $V := \mathbb{R}^\ell$ with $\ell > 0$ be the Euclidean space with the standard inner product $(\cdot, \cdot)$. Let Φ be an irreducible (crystallographic) root system in V with the exponents $e_1, \ldots, e_\ell$, the Coxeter number h and the Weyl group W. For any integer $k \in \mathbb{Z}$ and $\alpha \in \Phi$, the *affine hyperplane* $\widetilde{H}_{\alpha,k}$ is defined by

$$\widetilde{H}_{\alpha,k} := \{x \in V \mid (\alpha, x) = k\}.$$

Fix a positive system $\Phi^+ \subseteq \Phi$ and the associated set of simple roots (base) $\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subseteq \Phi^+$. For $\beta = \sum_{i=1}^\ell n_i \alpha_i \in \Phi^+$, the *height* of β is defined by $\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{i=1}^\ell n_i$. The highest root, denoted by $\tilde{\alpha} \in \Phi^+$, can be expressed uniquely as a linear combination $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^\ell c_i \alpha_i$ ($c_i \in \mathbb{Z}_{>0}$). We also set $\alpha_0 := -\tilde{\alpha}$ and $c_0 := 1$. Then we have the linear relation

$$c_0 \alpha_0 + c_1 \alpha_1 + \cdots + c_\ell \alpha_\ell = 0.$$

Define the partial order $\succeq$ on $\Phi^+ \sqcup \{0\}$ such that $\beta_1 \succeq \beta_2$ (resp., $\beta_1 \succ \beta_2$) if and only if $\beta_1 - \beta_2 = \sum_{i=1}^\ell d_i \alpha_i$ with all $d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (resp., with all $d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and at least one $d_j \in \mathbb{Z}_{>0}$). For every $w \in W$, the *ascent* $\mathrm{asc}(w)$ and the *descent* $\mathrm{dsc}(w)$ of w are the functions $\mathrm{asc}, \mathrm{dsc} : W \to \mathbb{Z}$ defined as follows:

$$\mathrm{asc}(w) := \sum_{\substack{0 \leq i \leq \ell \\ w(\alpha_i) \succ 0}} c_i,$$

$$\mathrm{dsc}(w) := \sum_{\substack{0 \leq i \leq \ell \\ w(\alpha_i) \prec 0}} c_i.$$

Then we have the relation

$$\mathrm{asc}(w) + \mathrm{dsc}(w) = \mathrm{h}. \tag{5.1}$$

The *coweight lattice* $Z(\Phi)$ and the *coroot lattice* $\check{Q}(\Phi)$ are defined as follows:

$$Z(\Phi) := \{x \in V \mid (\alpha_i, x) \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \Delta\},$$
$$\check{Q}(\Phi) := \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z} \cdot \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}.$$

The coroot lattice $\check{Q}(\Phi)$ is a subgroup of the coweight lattice $Z(\Phi)$ of finite index. The index $\#\frac{Z(\Phi)}{\check{Q}(\Phi)} =: f$ is called the *index of connection*. Let $\{\varpi_1^\vee, \dots, \varpi_\ell^\vee\} \subseteq Z(\Phi)$ be the dual basis of the base Δ, that is, $(\alpha_i, \varpi_j^\vee) = \delta_{ij}$ (the Kronecker delta) for all $1 \le i \le \ell$. Then $Z(\Phi)$ is a free abelian group generated by $\{\varpi_1^\vee, \dots, \varpi_\ell^\vee\}$. We also have $c_i = (\varpi_i^\vee, \tilde{\alpha})$.

A connected component of $V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi^+} \widetilde{H}_{\alpha,\mathbb{Z}}$ is called an *alcove*. Let us define the *fundamental alcove* A° by

$$A^\circ = \left\{ x \in V \,\middle|\, \begin{array}{c} (\alpha_i, x) > 0\,(1 \le i \le \ell), \\ (\alpha_0, x) > -1 \end{array} \right\}.$$

The closure $\overline{A^\circ} = \{x \in V \mid (\alpha_i, x) \ge 0\,(1 \le i \le \ell), (\alpha_0, x) \ge -1\}$ is a simplex, which is the convex hull of $0, \varpi_1^\vee/c_1, \dots, \varpi_\ell^\vee/c_\ell \in V$. The supporting hyperplanes of the facets of $\overline{A^\circ}$ are $\widetilde{H}_{\alpha_1,0}, \dots, \widetilde{H}_{\alpha_\ell,0}, \widetilde{H}_{\alpha_0,-1}$. We also note that $\overline{A^\circ}$ is a fundamental domain of the affine Weyl group $W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes \check{Q}(\Phi)$.

The *fundamental parallelepiped* $P^\diamondsuit$ is defined by

$$\begin{aligned} P^\diamondsuit &:= \sum_{i=1}^{\ell} (0,1]\varpi_i^\vee \\ &= \{x \in V \mid 0 < (\alpha_i, x) \le 1\,(1 \le i \le \ell)\}. \end{aligned}$$

Then $P^\diamondsuit$ is the fundamental domain of the coweight lattice $Z(\Phi)$. Denote by Ξ a finite set having the cardinality $\#\Xi = \#W/f$. Following [Yos18b], let us write $\Sigma := \{A_\xi^\circ \mid \xi \in \Xi\}$ for the set of alcoves contained in $P^\diamondsuit$, where each A_ξ° can be written uniquely as

$$A_\xi^\circ = \left\{ x \in V \,\middle|\, \begin{array}{l} (\alpha, x) > k_\alpha\,(\alpha \in I), \\ (\beta, x) < k_\beta\,(\beta \in J) \end{array} \right\},$$

for some subsets $I, J \subseteq \Phi^+$ with $\#(I \sqcup J) = \ell + 1$, and $k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{Z}$ $(\alpha \in I, \beta \in J)$. The facets of A_ξ° are supported by the hyperplanes $\widetilde{H}_{\alpha,k_\alpha}$ $(\alpha \in I)$ and $\widetilde{H}_{\beta,k_\beta}$ $(\beta \in J)$.

Let A' be an arbitrary alcove. We can write $A' = w(A^\circ) + \gamma$ for some $w \in W$ and $\gamma \in \check{Q}(\Phi)$. The value $\mathrm{asc}(w)$ is uniquely determined among all $w \in W$ having this property [Yos18b, Lemma 4.3(2)]. Then we can extend asc as a function $\Sigma \to \mathbb{Z}$ by setting:

$$\mathrm{asc}(A') := \mathrm{asc}(w).$$

For each $A_\xi^\circ \in \Sigma$, we also define the *partial closure* $A_\xi^\diamondsuit$ of A_ξ° as follows:

$$A_\xi^\diamondsuit := \left\{ x \in V \,\middle|\, \begin{array}{l} (\alpha, x) > k_\alpha\,(\alpha \in I), \\ (\beta, x) \le k_\beta\,(\beta \in J) \end{array} \right\}. \tag{5.2}$$

Theorem 5.1 (Worpitzky partition)**.**

$$P^\diamondsuit = \bigsqcup_{\xi\in\Xi} A_\xi^\diamondsuit.$$

As a consequence, for any $q \in \mathbb{Z}_{>0}$*,*

$$qP^\diamondsuit \cap Z(\Phi) = \bigsqcup_{\xi\in\Xi} qA_\xi^\diamondsuit \cap Z(\Phi).$$

The partition of $P^\diamondsuit$ above is probably well-known among experts, for instance [Hum90, Exercise 4.3]. Yoshinaga [Yos18b, Proposition 2.5] named the latter *Worpitzky partition* as it recovers the classical *Worpitzky identity* when Φ is of type A_ℓ.

5.2. **Connection with lattice point counting.** Let Ψ be a subset of Φ^+. We assume that an $\ell \times \#\Psi$ integral matrix $S_\Psi = [S_{ij}]$ satisfies

$$\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} S_{ij}\alpha_i \,\middle|\, 1 \le j \le \#\Psi \right\}.$$

In other words, S_Ψ is a coefficient matrix of Ψ with respect to the base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Set $S := S_{\Phi^+}$. In our language as in the previous sections, we can also consider S_Ψ as a finite list of vectors in $\Gamma = \mathbb{Z}^\ell$ whose elements are nothing but the columns of S_Ψ.
Notation: We will denote the list in $\mathbb{Z}^\ell$ corresponding to S_Ψ by $\mathcal{A}_\Psi$, and denote $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\Phi^+}$. For example, if $\Phi = B_2$, then the matrix $S = S_{\Phi^+}$ is given by

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

and $\mathcal{A} = \{(1,0), (0,1), (1,1), (1,2)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$.
Denote $\mathbb{Z}_q^\times := \mathbb{Z}_q \setminus \{\overline{0}\}$. The $\mathbb{Z}_q$*-complement* $\mathcal{M}(\mathcal{A}_\Psi; \mathbb{Z}^\ell, \mathbb{Z}_q)$ can be formulated as

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}_\Psi; \mathbb{Z}^\ell, \mathbb{Z}_q) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_q^\ell \mid \mathbf{z} \cdot S_\Psi \in (\mathbb{Z}_q^\times)^{\#\Psi}\}.$$

Associating to each subset $\Psi \subseteq \Phi^+$, we define the real *arrangement* $\mathcal{H}_\Psi := \{H_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$, where H_α is the real hyperplane orthogonal to α. It is not hard to see that $H_\alpha \simeq H_{\alpha,\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid x \cdot S_{\{\alpha\}} = 0\}$ as vector spaces, so we can view H_α as the $\mathbb{R}$-hyperplane of the element $\mathcal{A}_{\{\alpha\}}$ of the list $\mathcal{A}$. Hence $\mathcal{H}_\Psi$ is the $\mathbb{R}$-plexification of the list $\mathcal{A}_\Psi$. Note also that $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\Phi^+}$ is called the *Weyl arrangement* of Φ^+, and $\mathcal{H}_\Psi$ is a subarrangement of it.

Let Γ be a lattice. For any polytope $\mathcal{P}$ with vertices in the rational vector space generated by Γ, the *Ehrhart quasi-polynomial* $\mathrm{L}_\mathcal{P}(q)$ of $\mathcal{P}$ with respect to Γ is defined by $\mathrm{L}_\mathcal{P}(q) := \#(q\mathcal{P} \cap \Gamma)$ for $q \in \mathbb{Z}_{>0}$. The Ehrhart quasi-polynomials we are considering are defined with respect to the coweight lattice $\Gamma = Z(\Phi)$.

The characteristic quasi-polynomial $\chi_\mathcal{A}^{\mathrm{quasi}}(q)$ of $\mathcal{A}$ has an interesting relation to the lattice point counting quasi-polynomial function $\mathrm{L}_{\overline{A^\circ}}(q)$ (e.g., [KTT10], [Yos18b, Proposition 3.7]).

Theorem 5.2.

$$\chi_\mathcal{A}^{\mathrm{quasi}}(q) = \frac{\#W}{f}\mathrm{L}_{A^\circ}(q) = \frac{\#W}{f}\mathrm{L}_{\overline{A^\circ}}(q - \mathrm{h}).$$

Acknowledgements: The author thanks Professor Masahiko Yoshinaga (Hokkaido University) for letting him use the preprint [TY18] for writing up this report. He also gratefully acknowledges the support of the scholarship program of the Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology (MEXT) under grant number 142506.

REFERENCES

[ACH15] F. Ardila, F. Castillo, and M. Henley. The arithmetic Tutte polynomials of the classical root systems. *Internat. Math. Res. Notices*, 2015(12):3830–3877, 2015.
[Ath96] C. A. Athanasiadis. Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *Adv. Math.*, 122(2):193–233, 1996.
[BE97] A. Björner and T. Ekedahl. Subspace arrangements over finite fields: cohomological and enumerative aspects. *Adv. Math.*, 129:159–187, 1997.
[Bjö94] A. Björner. *Subspace arrangements*. In: Joseph A., Mignot F., Murat F., Prum B., Rentschler R. (eds) First European Congress of Mathematics. Progress in Mathematics, vol 3. Birkhäuser Basel, 1994.
[BM14] P. Brändén and L. Moci. The multivariate arithmetic Tutte polynomial. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(10):5523–5540, 2014.
[BS98] A. Blass and B. Sagan. Characteristic and Ehrhart polynomials. *J. Algebr. Comb.*, 7(2):115–126, 1998.
[CR70] H. Crapo and G.-C. Rota. *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*. Preliminary edition, MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
[DCP05] C. De Concini and C. Procesi. On the geometry of toric arrangements. *Transform. Groups*, 10(3-4):387–422, 2005.
[DFM17] C. Dupont, A. Fink, and L. Moci. Universal Tutte characters via combinatorial coalgebras. arXiv preprint, 2017. https://arxiv.org/abs/1711.09028v1.

[DM13] M. D'Adderio and L. Moci. Arithmetic matroids, the Tutte polynomial and toric arrangements. *Adv. in Math.*, 232(1):335–367, 2013.
[ERS09] R. Ehrenborg, M. Readdy, and M. Slone. Affine and toric hyperplane arrangements. *Discrete Comput. Geom.*, 41(4):481–512, 2009.
[Hum90] J. E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1990.
[KTT07] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. arXiv preprint [v1], 2007. https://arxiv.org/abs/0707.1381v1.
[KTT08] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *J. Alg. Combin.*, 27(3):317–330, 2008.
[KTT10] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. *Arrangements, local systems and singularities*, pages 177–190, Progr. Math., 283, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
[Law11] J. Lawrence. Enumeration in torus arrangements. *European J. Combin.*, 32(6):870–881, 2011.
[Loo93] E. Looijenga. Cohomology of $\mathcal{M}_3$ and $\mathcal{M}_3^1$. *Contemp. Math.*, 150:205–228, 1993.
[LTY17] Y. Liu, T. N. Tran, and M. Yoshinaga. G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. arXiv preprint, 2017. https://arxiv.org/abs/1707.04551v2.
[Moc12] L. Moci. A Tutte polynomial for toric arrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(2):1067–1088, 2012.
[OS80] P. Orlik and L. Solomon. Combinatorics and topology of complements of hyperplane. *Invent. Math.*, 56(1):167–189, 1980.
[OT92] P. Orlik and H. Terao. *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[Sta07] R.P. Stanley. *An introduction to hyperplane arrangements*. in: E. Miller, V. Reiner, B. Sturmfels (Eds.), Geometric Combinatorics, in: IAS/Park City Math. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 389-496, 2007.
[Sta11] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2011.
[Sut98] R. Suter. The number of lattice points in alcoves and the exponents of the finite Weyl groups. *Math. Comp.*, 67(222):751–758, 1998.
[Tra18] T. N. Tran. An equivalent formulation of chromatic quasi-polynomials. arXiv preprint, 2018. https://arxiv.org/abs/1803.08649.
[Tut54] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.*, 6:80–91, 1954.
[TY18] T. N. Tran and M. Yoshinaga. Combinatorics of certain abelian Lie group arrangements and chromatic quasi-polynomials. arXiv preprint, 2018. https://arxiv.org/abs/1805.03365.
[Yos18a] M. Yoshinaga. Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems. *J. Combin. Theory Ser. A*, 157:267–286, 2018.
[Yos18b] M. Yoshinaga. Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. *Tohoku Math. J.*, 70(1):39–63, 2018.

TAN NHAT TRAN, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, KITA 10, NISHI 8, KITA-KU, SAPPORO 060-0810, JAPAN.
E-mail address: trannhattan@math.sci.hokudai.ac.jp

イデアル化の Cohen-Macaulay 型と residually faithful 加群について

千葉大学大学院 融合理学府 数学情報科学専攻
神代　真也 (Shinya Kumashiro) *

1　導入

本稿で述べる研究内容は後藤四郎氏（明治大学）と Nguyen Thi Hong Loan 女史（Vinh University）との共同研究 [4] に基づく。

本研究は可換環の解析を目的としている。可換環論は特異点論解析の重要な方法の一つであって、様々な代数系と深い関わりを持っている。可換環論は 19 世紀末に不変式論を通して D. Hilbert により創始され、E. Noether による代数学の抽象化の中で大きく展開された。20 世紀半ば、J.-P. Serre がホモロジー代数を用いて正則環を大域次元の局所有限性で特徴づけるという一大成果を挙げて以来、飛躍的な発展を遂げた。20 世紀後半からの 60 年間に、主に代数幾何学との深い関わりの中で、特異点論、整数論、複素解析的多様体論、組み合わせ論などの他分野から問題と手法を獲得しつつ、環と加群の Cohen-Macaulay 性解析を中心に急速に発展、整備されている。

環と加群の Cohen-Macaulay 性はホモロジー代数と非常に相性が良く、多くの研究者によって深い優れた研究がなされている。現代可換環論の研究分野は多岐に渡るが、本研究では多様かつ豊富に存在する Cohen-Macaulay 環をホモロジー代数的視点からの階層化

$$\text{正則環} \Rightarrow \text{完全交叉} \Rightarrow \text{Gorenstein 環} \Rightarrow \text{Cohen-Macaulay 環} \ (\Rightarrow \text{Noether 環})$$

を指標に解析する。とりわけ、Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環を主な解析の対象としている。Gorenstein 性との距離をはかる指標として Cohen-Macaulay 型がよく知られている。Cohen-Macaulay 型は正の整数値であり、任意の Cohen-Macaulay 局所環に対して定義される。小さい値であるほど良い環構造を持っており、Gorenstein 局所環であることと Cohen-Macaulay 型が 1 の Cohen-Macaulay 局所環であることが同値である。

本稿では、与えられた可換環 R とその加群 M から新たに構成されるイデアル化 $R \ltimes M$ という可換環の Cohen-Macaulay 型を解析することを目的としている。動機を述べるために少し記号を準備する。

R は可換環であって、M を零でない R-加群とする。$A = R \ltimes M$ を M のイデアル化とする。すなわち、R-加群 $R \oplus M$ に対し

$$(a, x) \circ (b, y) = (ab, ay + bx) \quad (a, b \in A,\ x, y \in M)$$

によって積を定義することで（可換）環構造をいれたものである。この記号のもと次の事実が基本的である。

定理 1.1. *R, M, $A = R \ltimes M$ を上と同じものとすると次が成り立つ。*

(1) *A が Noether 環である $\Leftrightarrow$ R が Noether 環かつ M が有限生成 R-加群である。*
(2) *A が Cohen-Macaulay 環である $\Leftrightarrow$ R が Cohen-Macaulay 環かつ M が極大 Cohen-Macaulay R-加群である。*

* axwa4903@chiba-u.jp

(3) A が *Gorenstein* 環である $\Leftrightarrow$ R が *Cohen-Macaulay* 環かつ M が正準加群と同型である。

一般に極大 Cohen-Macaulay R-加群は無限にある一方で、正準加群は存在すれば同型を除き一意に定まる。このことから (2) と (3) の間には大きなギャップがあることがうかがえる。また、イデアル化 A の環構造はもともとの環 R の加群の振る舞いと密接に関連していることもみてとれる。以上の考察のもと、本稿では (2) と (3) の間を埋める理論としてイデアル化の Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(A)$ に着目した解析を行う。以下、得られた結果を述べるために本稿における状況設定を述べる。

設定 1. 本稿を通して特に述べない限り $(R, \mathfrak{m})$ は次元が d の *Cohen-Macaulay* 局所環とする。また、M は零でない極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。加群 M に対して、

$$\mathrm{r}_R(M) = \ell_R(\mathrm{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}, M))$$

を M の *Cohen-Macaulay* 型という。ただし、$\ell_R(*)$ は長さを表す。R の *Cohen-Macaulay* 型 $\mathrm{r}_R(R)$ は単に $\mathrm{r}(R)$ と表すことにする。$\mathrm{Q}(R)$ は R の全商環を表し、$\mathrm{Q}(R)$ の R-部分加群 I, J に対して、

$$I : J = \{a \in \mathrm{Q}(R) \mid aJ \subseteq I\}$$

とする。また、$I :_R J = (I : J) \cap R$ で R への制限を表すものとする。

上記の仮定のもと、本稿の概要について述べたい。次章では上の設定のもとで、基本となる不等式

$$\mathrm{r}_R(M) \leq \mathrm{r}(R \ltimes M) \leq \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

について述べる。この不等式は sharp であるが、一方で両極端なケース

$$\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M),\ \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

も非常に数多く存在することが示される。そこで第三章では両極端となるような加群 M の性質についてそれぞれ述べる。

2 不等式 $\mathrm{r}_R(M) \leq \mathrm{r}(R \ltimes M) \leq \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$ について

次の補題が鍵である。

補題 2.1. $(R, \mathfrak{m})$ を（*Noether* とは限らない）局所環として、M を R-加群とする。 $A = R \ltimes M$ において、$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \times M$ でその極大イデアルを表す。このとき、次が正しい。

$$(0) :_A \mathfrak{n} = ([(0) :_R \mathfrak{m}] \cap \mathrm{Ann}_R M) \times [(0) :_M \mathfrak{m}]\,.$$

従って、R が *Artin* 局所環であれば $(0) :_A \mathfrak{n} = (0) \times [(0) :_M \mathfrak{m}]$ であることの必要十分条件は $\mathrm{Ann}_R M = (0)$ (i.e. M が faithful) である。

このことから次が従う。

定理 2.2. 設定 1 のもとで、不等式

$$\mathrm{r}_R(M) \leq \mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M)$$

が成立する。更に、$\mathfrak{q}$ を巴系イデアルとして $\overline{R} = R/\mathfrak{q}$, $\overline{M} = M/\mathfrak{q}M$ とおくと次が正しい。

(1) 左の等号成立条件は $\overline{M}$ が *faithful* $\overline{R}$*-module* である。

(2) 右の等号成立条件は $(\mathfrak{q} :_R \mathfrak{m})M = \mathfrak{q}M$ である。

例 2.3 に示すとおり、この不等式は sharp であり一般にイデアル化の Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(A)$ は $[\mathrm{r}_R(M), \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M)]$ の任意の整数値を取りうる。その一方で定理 2.4 に示すように両極端な二つの場合

$$\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M),\ \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

も非常に数多く存在する。

例 2.3. $S = k[[X_1, X_2, \ldots, X_\ell]]$ $(\ell \geq 2)$ を体 k 上のべき級数環とする。$\mathfrak{a} = \mathbb{I}_2(\mathbb{M})$ を 2×2 小行列式で生成された S のイデアルとする。ただし、$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{\ell-1} & X_\ell \\ X_2 & X_3 & \cdots & X_\ell & X_1^q \end{pmatrix}$ $(q \geq 2)$ とする。このとき、$R = S/\mathfrak{a}$ とおくと R は一次元 *Cohen-Macaulay* 局所環である。勝手な整数 $2 \leq p \leq \ell$ に対して、$I_p = (x_1) + (x_p, x_{p+1}, \ldots, x_\ell)$ とおく（x_i は X_i の R への像を表す）。すると、

$$\mathrm{r}(R \ltimes I_p) = \mathrm{r}_R(I_p) + (\ell - p + 1) \quad (2 \leq \forall p \leq \ell)$$

である。

定理 2.4. $0 \neq M \in \Omega\mathrm{CM}(R)$ とする。すなわち、ある有限生成自由加群 F と極大 *Cohen-Macaulay* 加群 N があって、$0 \to M \to F \to N \to 0$ が完全であるとする。

このとき、次が正しい。

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \begin{cases} \mathrm{r}_R(M) & \textit{if } R \textit{ is a direct summand of } M, \\ \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M) & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

また、正準加群 K_R があれば定理 2.2 の不等式はより具体的に次のように表せる。

定理 2.5. R は正準加群 K_R を持つとせよ。極大 *Cohen-Macaulay* 加群 M に対して

$$t = t^M_{\mathrm{K}_R} : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R) \otimes_R M \to \mathrm{K}_R$$

を $t(f \otimes m) = f(m)$ （ただし、$f \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)$ *and* $m \in M$）で定める。このとき、

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mu_R(\mathrm{Coker}\, t)$$

である。

3 等号が成立する R-加群について

本章では、前章で与えた不等式の極端な場合について考察する。まず等号 $\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M)$ が成立するときについて考える。以下、常に設定 1 を仮定する。次の定義は [2] による。

定義 3.1. [2] M を極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。このとき M が residually faithful であるとは、$M/\mathfrak{q}M$ はある巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対して、$R/\mathfrak{q}$-*module* として *faithful* であることをいう。

定理 2.2 より、residually faithful 性は巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の取り方によらない。定理 2.2, 2.5 により次が直ちに従う。

系 3.2. R は正準加群 K_R を持つとせよ。このとき次は同値である。

(1) $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M)$ である。
(2) $t = t^M_{\mathrm{K}_R} : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R) \otimes_R M \to \mathrm{K}_R$ は全射準同型写像である。

(3) M は *residually faithful* R-加群である。

以上を用いることで、以下の residually faithful 加群の性質が示される。

命題 3.3. M を極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。このとき次が成立する。

(1) $a \in \mathfrak{m}$ を R の非零因子とすると、M が *residually faithful* R-加群である必要十分条件は M/aM が *residually faithful* $R/(a)$-加群であることである。
(2) $(S, \mathfrak{n})$ を *Cohen-Macaulay* 局所環として、$\varphi : R \to S$ を平坦局所写像が与えられているとする。このとき、M が *residually faithful* R-加群である必要十分条件は $S \otimes_R M$ が *residually faithful* S-加群であることである。
(3) M を *residually faithful* R-加群とすると、M は *faithful* であって、更に任意の素イデアル $p \in \operatorname{Spec} R$ に対して M_p は *residually faithful* R_p-加群である。
(4) K_R が存在するとせよ。このとき、M が *residually faithful* R-加群ならば $M^\vee = \operatorname{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)$ も *residually faithful* R-加群である。

系 3.4. $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M)$ とする。このとき、次が正しい。

(1) $\mathrm{r}(R_\mathfrak{p} \ltimes M_\mathfrak{p}) = \mathrm{r}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *for every* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.
(2) K_R が存在するとせよ。このとき、$\mathrm{r}(R \ltimes M^\vee) = \mu_R(M)$ である。ただし、$\mu_R(*)$ は極小生成元の個数とする。

次に $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$ の場合について考察する。以下、定理を簡便にするため、
$\mathrm{CM}(R) = \{M \mid M$ は非零極大 Cohen-Macaulay R-加群 $\}$
$\Omega\mathrm{CM}(R) = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \exists 0 \to M \to F \to X \to 0$ ただし F は自由加群で $X \in \mathrm{CM}(R)\}$
$\Omega\mathrm{CM}^\times(R) = \{M \in \Omega\mathrm{CM}(R) \mid M$ は自由直和因子を持たない $\}$
$\mathrm{Ul}(R) = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \mu_R(M) = \mathrm{e}^0_\mathfrak{m}(M)\}$
とおく。$M \in \mathrm{Ul}(R)$ は Ulrich R-加群と呼ばれるものであり、興味深い性質を持つことが知られている [1]。調べたい対象は次である。

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)\}.$$

定理 3.5. R を正則局所環でないとせよ。このとき、次が正しい。

(1) 勝手な $i \geq d$ に対して、$\Omega^i_R(R/\mathfrak{m}) \in \mathcal{A}$ である。
(2) $\Omega\mathrm{CM}^\times(R) \subseteq \mathcal{A}$, $\mathrm{Ul}(R) \subseteq \mathcal{A}$ である。
(3) I を *Ulrich* イデアルで M を I に関する *Ulrich* 加群とする。このとき、$M \in \mathcal{A}$ であって、更に

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R) = \mathrm{r}(R/I) \cdot \{\mu_R(M) + \mu_R(I) - d\}$$

である。

$\mathcal{A}$ の性質について少し述べる。

命題 3.6. R を正則局所環でないとせよ。このとき、次が正しい。

(1) R は正準加群 K_R を持つとせよ。このとき $M \in \mathcal{A}$ ならば、$M^\vee \in \mathcal{A}$ である。
(2) $d = 1$ とすると、

$$\mathcal{A} = \{0 \neq M \mid M \text{ は極大 } \textit{Cohen-Macaulay} \text{ 加群で } (\mathfrak{m} : \mathfrak{m})M = M\}$$

である。このとき、$\mathcal{A} = \Omega\mathrm{CM}^{\times}(R)$ である $\Leftrightarrow$ R が *almost Gorenstein* 環である (see [6])。

(3) $\mathcal{A} = \mathrm{Ul}(R)$ である $\Leftrightarrow$ R が極小重複度を持つ。

参考文献

[1] J. P. Brennan, J. Herzog, and B. Ulrich, Maximally generated maximal Cohen-Macaulay modules, *Math. Scand.*, **61** (1987), no. 2, 181–203.

[2] J. P. Brennan and W. V. Vasconcelos, On the structure of closed ideals, *Math. Scand.*, **88** (2001), 3–16.

[3] S. Goto, R. Isobe, and S. Kumashiro, Chains of Ulrich ideals in one-dimensional Cohen-Macaulay local rings, *Acta Math. Vietnam.* (to appear).

[4] S. Goto, S. Kumashiro, and N. T. H. Loan, Residually faithful modules and the Cohen-Macaulay type of idealizations, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, (to appear), arXiv:1804.07885.

[5] S. Goto, N. Matsuoka, and T.T. Phuong, Almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 355–381.

[6] T. Kobayashi, Syzygies of Cohen-Macaulay modules over one dimensional Cohen-Macaulay local rings, arXiv:1710.02673.

[7] I. Reiten, The converse of a theorem of Sharp on Gorenstein modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (1972), 417-420.

テータ積の L 関数の特殊値について

伊東良純 (Ryojun Ito)*

1　導入と主結果

L 関数とは Riemann ゼータ関数の一般化であり、整数論において非常に重要な研究対象であるが、その特殊値が具体的にどのように表せるのかはあまり知られていない。

本稿では、保型形式の L 関数の特殊値について議論する。保型形式 f の q 展開を $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ とするとき、L 関数 $L(f,s)$ を

$$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

で定義する。正整数 n に対し、$L(f,n)$ は $f(q)$ の Mellin 変換

$$L(f,n) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 f(q)(\log q)^{n-1} \frac{dq}{q} \tag{1}$$

で得られることに注意しておく。

近年、いくつかの保型形式に対し、L 関数の特殊値が一般超幾何関数

$${}_{p+1}F_p \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_p \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_{p+1})_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{z^n}{(1)_n}$$

の特殊値で表せることがわかってきた。ここで、$(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号を表す。例えば、

1. 大坪 [10] は、Fetmat 曲線の場合に、レギュレーターと呼ばれる幾何的不変量を一般超幾何関数の特殊値で表した。さらに、その結果と Bloch の定理を用いて、特定の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=2$ での値を ${}_3F_2(1)$ で表した。
2. Rogers [11]、Rogers-Zudilin [13]、Zudilin [15]、伊東 [8] は、特定の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=2$ での値を、解析的な手法を用いて ${}_3F_2(1)$ で表した。また、Zudilin [15] は導手 32 の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=3$ での値を ${}_4F_3(1)$ で表した。
3. Rogers-Wan-Zucker [12] は、Dedekind エータ関数 $\eta(q) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ の商で表される重さ 3 (resp. 4, 5) の特定の保型形式の L 関数の $s=2$ (resp. $s=3$, 4) での値を解析的な手法を用いてガンマ関数 $\Gamma(s)$ または一般超幾何関数の特殊値で表した。

* 千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻数学情報数理学コース, E-mail: afua9032@chiba-u.jp

ここで、重さ k、レベル N の尖点形式 $f(q)$ の L 関数 $L(f,n)$ に対し、関数等式

$$\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)L(f,s) = \pm\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s)L(f,k-s)$$

が成り立つことに注意しておく (cf. [7])。

本稿の目的は、Jacobi テータ関数 $\theta_2(q)$、$\theta_3(q)$、$\theta_4(q)$ (定義は 2 節を参照) または Borwein テータ関数 $a(q)$、$b(q)$、$c(q)$ (定義は 3 節を参照) の積で定義される重さ 3 の保型形式 (以下、単にテータ積と呼ぶ) の L 関数の $s=1$ での値を一般超幾何関数の特殊値で表すことである。

次が主結果である。

定理 1 ([9, Theorem 1])**.** 次が成り立つ。

$f(q)$	$L(f,1)$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^4(q^4)\theta_4(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{8},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^3(q^4)\theta_4^2(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4)$	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_4^5(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{16\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_4^5(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{16\pi^2}$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_3^3(q^2)\theta_4(q^2)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_3(q^2)\theta_4^3(q^2)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_4^4(q^2)$	$\frac{1}{4}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$

$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4(q^4)$	$\frac{\pi}{16\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_3(q^4)\theta_4^2(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_4^3(q^4)$	$\frac{\pi}{32\sqrt{2}}$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_4^3(q^8)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^3\left(\frac{3}{8}\right)}{128\pi^{5/2}}$
$\frac{1}{16}\theta_2^4(q)\theta_4^2(q)$	$\frac{\pi}{16}$
$\frac{1}{32}\theta_2^5(q^4)\theta_4(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{256\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2},1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{32}\theta_2^5(q^4)\theta_4(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^2}$

定理 2 ([9, Theorem 2])**.** 次が成り立つ。

$f(q)$	$L(f,1)$
$\frac{1}{3}a(q^3)c(q^3)b(q^3)$	$\frac{\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{3}\pi^3}$
$\frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^3)$	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{9}c^2(q^3)b(q^3)$	$\frac{2\pi}{27\sqrt{3}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^9)$	$\frac{2\pi}{3^{11/6}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$
$\frac{1}{9}c^2(q^3)b(q^9)$	$\frac{2\pi}{3^{13/6}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9}\\ 1,1\end{matrix}\middle\vert 1\right]$

ここで、各定理の $f(q)$ が定数倍されているのは、$f(q)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ と書いたとき、$a_1=1$ とするためである。

Rogers-Wan-Zucker[12] が扱っている重さ 3 のテータ積 $f(q)$ では、$L(f,1)$ は一般超幾何関数の特殊値ではなく、ガンマ関数の特殊値で表されている。重さ 3 のテータ積 $f(q)$ の場合で、$L(f,1)$ に一般超幾何関数の特殊値が現れたのは本結果が初めてである。

本主結果の証明に用いる手法では、Jacobi または Borwein テータ関数が超幾何関数と密接に関係しているということが重要である (下の (2)、(3) を参照)。この手法は [8]、[11]、[12]、[13]、[15] でも用いられている。しかし、Rogers-Wan-Zucker [12] は、重さ 3 のエータ積 $f(q)=\eta^3(q^r)\eta^3(q^s)$ $(r+s\equiv 0 \mod 8)$ の場合に、これと異なる手法を用いて $L(f,2)$ をガンマ関数の特殊値で表していることに注意しておく。

2　定理 1 の証明

Jacobi テータ関数 $\theta_2(q)$、$\theta_3(q)$、$\theta_4(q)$ を

$$\theta_2(q):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{(n+1/2)^2},\qquad \theta_3(q):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2},\qquad \theta_4(q):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^nq^{n^2},$$

で定義する。これらは重さ 1/2 の保型形式である。

これらの間には非常に多くの関係式があることが知られている。その中でも特に有名なのが次の Jacobi の等式である [4]。

$$\theta_3^4(q)=\theta_2^4(q)+\theta_4^4(q).$$

このほかの基本的性質については、[2]、[4] を参照されたい。

$\alpha:=\theta_2^4(q)/\theta_3^4(q)$ とおく。Jacobi の等式より、$1-\alpha=\theta_4^4(q)/\theta_3^4(q)$ であることに注意する。この α を用いて、Jacobi テータ関数と超幾何関数が次のようにして結びつくことが知られている [1]、[2]。

$$\theta_3^2(q)={}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|\,\alpha\right],\qquad \frac{dq}{q}=\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha){}_2F_1{}^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|\,\alpha\right]}.\tag{2}$$

これらの公式により定理 1 を得る。ここでは、

$$L(f,1)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{4},1\end{matrix}\middle|\,1\right]$$

$(f(q)=\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4))$ の場合にのみ示す。残りの結果も同様に証明できる。詳細は [9] を参照されたい。

(1) より、

$$L(f,1)=\frac{1}{2}\int_0^1\theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4)\frac{dq}{q}=\frac{1}{8}\int_0^1\theta_2(q)\theta_3^2(q)\theta_4^3(q)\frac{dq}{q}$$

を得る。(2) を用いると、

$$\frac{1}{8}\int_0^1\theta_2(q)\theta_3^2(q)\theta_4^3(q)\frac{dq}{q}=\frac{1}{8}\int_0^1\alpha^{1/4}(1-\alpha)^{3/4}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|\,\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

がわかる。ここで、一般超幾何関数は次の積分表示を持つことに注意する [14]。

$$
\begin{aligned}
&{}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_{p+1}\\ b_1,b_2,\ldots,b_p\end{matrix}\middle| z\right]\\
&=\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1-a_1)}\int_0^1 t^{a_1}(1-t)^{b_1-a_1}{}_pF_{p-1}\left[\begin{matrix}a_2,\ldots,a_{p+1}\\ b_2,\ldots,b_p\end{matrix}\middle| zt\right]\frac{dt}{t(1-t)}.
\end{aligned}
$$

この積分表示を上記の積分に適用することで、

$$
L(f,1)=\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{8\Gamma(1)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1\end{matrix}\middle| 1\right]
$$

を得る。最後に、ガンマ関数の相反公式

$$
\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}
$$

を用いてガンマ関数部分を整理すれば、公式を得る。

3　定理 2 の証明

Borwein テータ関数 $a(q)$、$b(q)$、$c(q)$ を

$$
\begin{aligned}
a(q)&:=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{n^2+nm+m^2},\\
b(q)&:=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \omega^{n-m}q^{n^2+nm+m^2},\\
c(q)&:=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/3)^2+(n+1/3)(m+1/3)+(m+1/3)^2}.
\end{aligned}
$$

で定義する [5]、[6]。ただし、ω は 1 の原始 3 乗根を表す。これらは重さ 1 の保型形式である。

これらの間には Jacobi テータ関数の関係式の類似が多く成り立つことが知られている。例えば、Jacobi の等式の類似として次が成り立つ [5]。

$$
a^3(q)=b^3(q)+c^3(q).
$$

このほかの基本的な性質については、[3]、[5]、[6] を参照されたい。

$\alpha:=c^3(q)/a^3(q)$ とおく。このとき、上の等式より、$1-\alpha=b^3(q)/a^3(q)$ であることに注意する。Jacobi テータ関数の場合と同様に、この α を用いて、Borwein テータ関数は超幾何関数と結びつくことが知られている [1]、[3]、[5]。

$$
a(q)={}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle| \alpha\right],\qquad \frac{dq}{q}=\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha){}_2F_1{}^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ 1\end{matrix}\middle| \alpha\right]}. \tag{3}
$$

これらの公式を用いて Jacobi テータ積の場合と同様な計算を行うことで、定理 2 が導かれる。ここでは、

$$
L(f,1)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ 1,1\end{matrix}\middle| 1\right]
$$

($f(q) = \frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^3)$) の場合にのみ証明する。残りの結果も同様な計算で証明することが出来る。詳細は [9] を参照されたい。

(1) より、

$$L(f,1) = \frac{1}{3}\int_0^1 c(q^3)b^2(q^3)\frac{dq}{q} = \frac{1}{9}\int_0^1 c(q)b^2(q)\frac{dq}{q}$$

を得る。(3) を用いることで、

$$\int_0^1 c(q)b^2(q)\frac{dq}{q} = \int_0^1 \alpha^{1/3}(1-\alpha)^{2/3}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\middle|\,\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

がわかる。したがって、一般超幾何関数の積分表示とガンマ関数の相反公式を用いることで、公式を得る。

参考文献

[1] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part II*, Springer, New York, NY, 1989.

[2] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part III*, Springer, New York, NY, 1991.

[3] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part V*, Springer, New York, NY, 1998.

[4] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley & Sons, 1987.

[5] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *A Cubic Counterpart of Jacobi's Identity and the AGM*, Transactions of the American Mathematical Society, 323(2) (1991), 691-701.

[6] J. M. Borwein, P. B. Borwein and F. G. Garvan *Some cubic modular identities of Ramanujan*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 35-47.

[7] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Springer-Verlag, 1993.

[8] R. Ito, *The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions*, Ramanujan J (2018) 45: 433-449.

[9] R. Ito, *The Special values of L-functions at $s = 1$ of theta products of weight* 3, in preparation.

[10] N. Otsubo, *Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions*, J.Number Theory, 131 (2011), 648-660.

[11] M. Rogers, *Boyd's conjectures for elliptic curves of conductor 11, 19, 39, 48 and 80*, unpublished notes, 2010.

[12] M. Rogers, J.G. Wan , I.J. Zucker, *Moments of elliptic integrals and critical L-values*, Ramanujan J. 37, 2015, 113-130.

[13] M. Rogers, W. Zudilin, *From L-series of elliptic curves to Mahler measures*, Compositio Math. 148, 2012, 385-414.

[14] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric functions*, Cambridge University Press, 1966.

[15] W. Zudilin, *Period(d)ness of L-Values*, Number Theory and Related Fields, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 43, 2013, 381-395.

Generators of invariant linear system on metric graphs for finite isometry group

首都大学東京大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻
宋珠愛 (Chue SON)

概要

加法として max 演算，乗法として通常の加法を備える集合 $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ は半体を成す．$\boldsymbol{T}$ 上の代数幾何学であるトロピカル[*1]幾何学の一次元の研究対象は距離グラフとして実現される．本稿では距離グラフ上での基礎的な諸概念の定義から始まり，Haase–Musiker–Yu[2] によって示された完備線形系の有限生成性定理を用いて，有限群の作用により不変な線形系が有限生成であることを紹介する．

1 導入

トロピカル幾何学は，最大値関数と通常の加法を演算とするトロピカル代数を用いた代数幾何学である．これは可積分系や工学系まで，幅広い分野への応用を持つことが分かり，近年，重要性を増している．研究対象であるトロピカル多様体は，多面体的複体であり，代数多様体からトロピカル化という極限操作で得られる．一次元のトロピカル多様体であるトロピカル曲線は距離グラフとして実現され，その上で因子や有理関数等が定義される．2007 年，Baker–Norine[1] によりトロピカル曲線版の Riemann–Roch の定理が証明され，トロピカル曲線に対する研究が加速した．

2 準備

グラフ G と，G の各辺に有限の長さを割り当てる関数 l との組 (G, l) を**距離グラフ**という（無限の長さを許す場合もあるが，今は簡単の為有限の長さのみを考える．参考文献を読む際には注意すること）．ただし，本稿におけるグラフとは，重みのない有限で連結な空でない多重グラフを意味する．距離グラフ $\Gamma = (G, l)$ の各辺 e を，閉区間 $[0, l(e)]$ と同一視し，辺たちを G の接続関係に従い接着する．これにより，距離グラフ Γ はコンパクトな距離空間となる．

距離グラフ Γ 上の全ての点で生成された自由アーベル群の元を Γ 上の**因子**という．Γ 上の因子 D が**有効**であるとは，D の各点での係数が非負であることをいう．

距離グラフ Γ 上の**有理関数**とは，Γ 上で恒等的に $-\infty$ を取る関数か，区分的に $\boldsymbol{Z}$ アフィン関数（すなわち，各区分上での傾きが整数）となる連続関数のことをいう．Γ 上の有理関数 $f \not\equiv -\infty$ に対し，Γ 上の各点 x における f の外向き方向微分の和を $\mathrm{ord}_x(f)$ と書く．距離グラフ上の有理関数の

[*1] 「トロピカル」は，ブラジルに住んでいたハンガリー人数学者・計算機科学者の Imre Simon に因んで付けられた．

定義より，有限個の点を除き $\mathrm{ord}_x(f)$ は 0 となるので，$\mathrm{div}(f) := \sum_{x\in\Gamma} \mathrm{ord}_x(f)\cdot x$ は Γ 上の因子となる．これを f によって定まる**主因子**という．

距離グラフ Γ 上の二つの因子 D_1, D_2 に対し，その差がある Γ 上の有理関数によって定まる主因子であるとき，D_1 と D_2 は**線形同値**であるという．Γ 上の因子 D に対し，D に線形同値で有効な Γ 上の因子全体を $|D|$ と書き，D に付随する**完備生成系**という．さらに，$R(D)$ を，$|D|$ の各元を定める Γ 上の有理関数および $-\infty$ から成る集合とする．$R(D)$ はトロピカル半加群（あるいはトロピカルベクトル空間）を成すことが分かる（[2, Lemma 4]）．ただしここでトロピカル半加群とは，**トロピカル半体** $\boldsymbol{T}$ 上の半加群のことである（$\boldsymbol{T}$ は概要を参照）．「半」は，加法に対する逆元が存在しないことを意味する．n 次元**トロピカル射影空間** $\boldsymbol{TP}^n := \boldsymbol{T}^{n+1}/\boldsymbol{T}^\times$ が通常の射影空間の構成と同様にして定義される（$\boldsymbol{T}^\times = \boldsymbol{R}$ に注意する）．$|D|$ は $R(D)$ の射影化 $(R(D)\setminus\{-\infty\})/\boldsymbol{T}^\times$ と同一視されるので，$|D|$ には射影空間の構造が入る．$|D|$ の線形部分空間を**線形系**という．一般に，Γ 上の有限個の有理関数を並べることで Γ からトロピカル射影空間への写像を構成できるが，これを**有理写像**という（ただし有理関数の選び方によっては有限個の点では定義できない場合がある）．有理写像は距離グラフを調べるのに有用な道具である．$R(D)$ の部分半加群 R が有限生成であると，その生成系から有理写像が定まる．有限生成な R に対応する線形系を Λ としたとき，R の極小生成系から定まる有理写像を Λ により**誘導された**有理写像という．

3　主定理

古典的な場合とは異なり，トロピカル半加群は有限次元であっても有限生成であるとは限らないが，Haase–Musiker–Yu[2] により次が示された．

定理 1 ([2, Theorem 6])**.** 距離グラフ上の因子 D に対し，$R(D)$ は有限生成である．

この定理によって $|D|$ は有限生成であり，したがって，$|D|$ により有理写像が誘導されることが分かった．筆者はこの定理に有限群の作用を考慮した，次の定理を示した．

定理 2. 有限群 K が作用する距離グラフ上の有効因子 D に対し，$R(D)^K = \{f \in R(D) \mid f : K \text{ 不変}\}$ は有限生成である．特に D が K 不変のとき，$R(D)^K$ の生成系として次の $\{g_1, \dots, g_n\}$ が取れる：$R(D)$ の生成系 $\{f_1, \dots, f_n\}$ に対し，$g_i :=$ “$\sum_{\sigma\in K} f_i \circ \sigma$”（ここで，“”はトロピカル演算であることを表す）．

D が K 不変のとき，K 不変線形系 $|D|^K = \{E \in |D| \mid E : K \text{ 不変}\}$ は $R(D)^K$ の射影化 $(R(D)^K \setminus \{-\infty\})/\boldsymbol{T}^\times$ と同一視できることが示せるので，$|D|^K$ もまた有限生成である（したがって有理写像を誘導する）ことが分かった．$|D|^K$ によって誘導された有理写像はどのような性質を持っているだろうか？実はこのことについてもある程度分かっているが，それは [3] に譲ることとし，今回はそこに触れない．

参考文献

[1] Mathew Baker, Serguei Norine，*Harmonic Morphisms and Hyperelliptic Graphs*, Int. Math. Res. Not. **15** (2009)，2914–2955.

[2] Christian Haase, Gregg Musiker, Josephine Yu，*Linear Systems on Tropical Curves*, Mathematische Zeitschrift **270** (2012), 1111–1140.

[3] 宋珠愛，*Galois quotients of metric graphs and invariant linear systems*, 首都大学東京修士論文，2018.

Pfaffian Systems of Confluent Hypergeometric Functions of Two Variables

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
向井重雄 (Shigeo MUKAI)

概 要

We study Pfaffian systems of confluent hypergeometric functions of two variables with rank 3, by using rational twisted cohomology groups associated with Euler type integral representations of them. We give bases of the cohomology groups, whose intersection matrices depend only on parameters. Each connection matrix of our Pfaffian systems admits a decomposition into five parts, each of which is the product of a constant matrix and a rational 1-form on the space of variables.

1 導入

1 変数の合流型超幾何関数として、クンマー型、ベッセル型、エルミート型、エアリー型があり、2 変数においても Humbert の Φ_1,Φ_2,Φ_3 を始め、多くの種類が知られています。Gelfand らにより一般超幾何関数の考え方が提唱され、我が国でも木村弘信らにより合流型超幾何関数の統一的取扱い法が開発されて来ました。我々も統一的取扱いの方法にのっとり $GL(n,\mathbb{C})$ の極大可換部分群上の普遍被覆を用いて考えます。複素パラメータを β と置き、λ を n の分割数とします。分割された数は極の重複度を意味します。

本研究においては、ねじれコホモロジー群 $H^1(\Omega^\bullet(x),\nabla_\omega)$ を用いて合流型超幾何関数の満たす微分方程式を考察します。非合流型である Appell の超幾何関数 F_1 では、ねじれコホモロジー群を用いて交点数を求め、交点数の勾配から Pfaffian 方程式にまとめられることが知られています。その場合に交点数は、パラメータだけに依存して変数を含まないことが分かっています。本論の主定理は、有理 1 形式 $\phi_{i;k}=d_t(\theta_i(h^{(k)}))$ を与え、合流型超幾何関数における 1 形式の交点数の公式を導き出した所にあります。そこで、1 形式の交点数はパラメータだけを含み変数が含まれない形にできることも分かりました。本公式を用いて、1 変数についてはランク 2 の、2 変数についてはランク 3 の Pfaffian 方程式系のフレームを作りました。そこで接続行列 W を求めると次のことが分かりました。

(1) 1 変数の場合 $W=d(f_1)W_1+d(f_2)W_2$, 2 変数の場合 $W=\sum_{i=1}^{5}d(f_i)W_i$ に分けられる。ここで d は変数による外微分作用素。

(2) $d(f_i)$ は、変数の有理関数。

(3) W_i は、パラメータだけの行列。

交点数を C と置き、Pfaffian の接続行列を W と書くと、交点数 C が変数を含まないことから、次の関係があることが分かります。

$$W\,C-C\,{}^tW=O$$

例として、非合流型である Appell の F_1 から合流型である Humbert の Φ_1 への交点数 C や接続行列 W の移り変わりを確かめました。クンマーに倣って一定の条件を置き、$\varepsilon \to 0$ の極限を取ると、それらは収束し Humbert の Φ_1 の式や解に一致することを確かめました。Pfaffian 方程式系を追跡すると、接続行列の 2 部分の関数部の極限 $\lim_{\varepsilon\to 0} d(f_i) = \lim_{\varepsilon\to 0} d(f_j)$ が一致し、行列同士の混合 $W_i + W_j \to W_i' + W_j'$ が起こることも見つけました。

2　コホモロジー群の同型定理

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ を自然数とし、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m,\ n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 3,\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ と置き、λ を n の分割数と呼びます。$x_1(=\infty), x_2(=0), x_3, \ldots, x_m$ を $\mathbb{P}$ 上の異なる m 個の点とします。空間 $X = \mathbb{P} \setminus x,\ x = \{x_1, \ldots, x_m\},$ 上で定義された被積分関数

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \exp\Big\{-\frac{\alpha_{1;2}}{s} - \cdots - \frac{\alpha_{1;\lambda_1}}{(\lambda_1-1)s^{\lambda_1-1}}\Big\} \\ &\times \prod_{i=1}^m (t-x_i)^{\alpha_{i;1}} \exp\Big\{-\frac{\alpha_{i;2}}{(t-x_i)} - \cdots - \frac{\alpha_{i;\lambda_i}}{(\lambda_i-1)(t-x_i)^{\lambda_i-1}}\Big\} \end{aligned} \tag{1}$$

と 1 形式 φ(t の有理形形式) との積

$$F = \int_\gamma u_\lambda \varphi$$

を超幾何関数と考えます、ただし積分路は固定します。(1) 式において、$s = 1/t$ は積分変数の逆数とし、係数 $\alpha_{i;k} \in \mathbb{C}$ は条件 $\alpha_{i;\lambda_i} \neq 0$ と留数定理 $\sum_{i=1}^m \alpha_{i;1} = 0$ を満たすものとし、$\lambda_i = 1$ の時は $\alpha_{i;1} \notin \mathbb{Z}$ の非整数条件を満たすものとします。ここで対数微分 1 形式を $\omega := d_t(log(u_\lambda))$ で定義します。ただし d_t は変数 t による外微分作用素とします。1 形式上のねじれ外微分作用素を $\nabla_\omega := d_t + \omega\wedge$ で定義し、X 上の有理 k 形式を $\Omega^k(x)$, x 付近で急減少する k 形式を $S^k(x)$ とすると次の複体が定義できます:

$$\begin{aligned} (\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega) &: \Omega^0(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} \Omega^1(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} 0 \to 0, \\ (S^\bullet(x), \nabla_\omega) &: S^0(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} S^1(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} S^2(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} 0. \end{aligned}$$

ここで $H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ を有理 k 形式のコホモロジー群、$H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ を急減少の k 形式コホモロジー群とすると、次の補題が知られています。

補題 1.（真島 [1]）$H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega) \simeq H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ は同型であり、$k \neq 1$ ならば $H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ と $H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ は消える。$H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ の次元は $n-2$ であり、これは微分方程式系のランクと一致する。

この補題を用いて、$\psi^+ \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ と $\psi^- \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega})$ の交点数 $\langle \psi^+, \psi^- \rangle_\omega$ を

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle_\omega = \int_{\mathbb{P}} \imath_\omega(\psi^+) \wedge (\psi^-) \tag{2}$$

で定義します、ただし $\imath_\omega$ は、$H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ から $H^1(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ への同型写像とします。ψ^- 側は ψ^+ 側と逆にねじれているものとします。このねじれによって「何が変数であって、何がパラメータであるか」という問題に対して明確に答える必要ができました。

3　交点形式

ここで 1 形式 φ が、x_i の近傍 U_i 内で $\varphi = \sum_{k=1}^{\lambda_i} \frac{c_{i;k}dt}{(t-x_i)^k} + \sum_{j=0}^{\infty} d_{i;j}(t-x_i)^j dt$ と表されているものとします、ただし $x_i = \infty$ の場合は s と t の役割を入れ替えるものとします。U_i 内で $\varphi \approx \nabla_\omega f_i$ (漸近的一致) となるような正則な関数 $f_i = \sum_{k=1}^{\lambda_i} b_{i;k}(t-x_i)^{k-1}$ を求めるためには、(1) 式を参照して行列 A_i を

$$A_i := \begin{bmatrix} \alpha_{i;\lambda_i} & \alpha_{i;\lambda_i-1} & \cdots & \alpha_{i;2} & \alpha_{i;1} \\ & \alpha_{i;\lambda_i} & \cdots & \alpha_{i;3} & \alpha_{i;2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \alpha_{i;\lambda_i} & \alpha_{i,\lambda_i-1} \\ & & & & \alpha_{i,\lambda_i} \end{bmatrix} \tag{3}$$

で定義すると、$[b_{i;1}\cdots b_{i;\lambda_i}]A_i = [c_{i;\lambda_i}\cdots c_{i;1}]$ の関係があることが分かります。これは交点数が行列 A_i によって表現されていることを意味します。そこで (木村 [2]) の論文を引用して、(1) 式を次のように書き換えます。

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \exp\Big\{\sum_{k=1}^{\lambda_1-1} \beta_{1;k}\theta_k(s, y_{1;1}, \ldots, y_{1;k})\Big\} \\ &\times \prod_{i=1}^{m}(t-x_i)^{\beta_{i;0}} \exp\Big\{\sum_{k=1}^{\lambda_i-1} \beta_{i;k}\theta_k(t-x_i, y_{i;1}, \ldots, y_{i;k})\Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで関数 θ_i は、次の母関数から定義されます。

$$\log(z_0 + z_1T + z_2T^2 + \cdots) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(z_0, \ldots, z_j)T^j$$

ここで行列 B_i を次で定義すると、

$$B_i := \begin{bmatrix} \beta_{i;\lambda_i-1} & \beta_{i;\lambda_i-2} & \cdots & \beta_{i;1} & \beta_{i;0} \\ & \beta_{i;\lambda_i-1} & \cdots & \beta_{i;2} & \beta_{i;1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \beta_{i;\lambda_i-1} & \beta_{i,\lambda_i-2} \\ & & & & \beta_{i,\lambda_i-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

(3) 式と (5) 式の間に明確な関係 $A_i = {}^R V B_i V$ があり、B_i はパラメータだけで書き表され、${}^R V$ と V は変数だけで表現されます。また (5) 式を用いて 1 形式の交点数の計算を行うと、それはパラメータ β だけに依存し、変数 x, y を含みません。

4　主定理

ここで関数 p_k を、次の母関数から定義します。

$$\frac{z_0}{z_0 + z_1T + z_2T^2 + \cdots} = \sum_{j=0}^{\infty} p_k(z_0, \ldots, z_k)T^k$$

次の結果が得られました。

定理 1. 有理 1 形式 $\phi_{i;k} = p_k(t-x_i, y_{i;1}, \ldots, y_{i;k})\frac{dt}{t-x_i}$ と $\phi_{j;l} = p_l(t-x_j, y_{j;1}, \ldots, y_{j;l})\frac{dt}{t-x_j}$ の交点数は、

$$\left\langle \phi^+_{i;k}, \phi^-_{j;l} \right\rangle_\omega = 2\pi\sqrt{-1}(\delta_{ij}\frac{\psi^{(i)}_{k+l+1-\lambda_i}}{\beta_{i;\lambda_i-1}} - \epsilon_{ijl}\frac{\psi^{(i)}_{k+1-\lambda_i}}{\beta_{i;\lambda_i-1}} - \epsilon_{jik}\frac{\psi^{(j)}_{l+1-\lambda_j}}{\beta_{j;\lambda_j-1}} + \delta_{ijkl}\frac{\psi^{(i')}_{1-\lambda_{i'}}}{\beta_{i';\lambda_{i'}-1}}) \tag{6}$$

となります。ここで δ_{ij} はクロネッカー記号であり、ϵ_{ijl} は次で定義されます:

$$\epsilon_{ijl} = \begin{cases} 1, & (i=1, j\neq 1, l=0) \\ 1, & (i=2, j=1, l=0) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

$i' := 3-i$ で定義し、δ_{ijkl} は

$$\delta_{ijkl} = \begin{cases} 1, & (i=j=1, k=l=0) \\ 1, & (i=j=2, k=l=0) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

を意味するものとします。関数 $\psi^{(i)}_k$ は

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}_0(\beta) &:= 1, \\ \psi^{(i)}_k(\beta) &:= p_k(\beta_{i;\lambda_i-1}, \beta_{i;\lambda_i-2}, \ldots, \beta_{i;\lambda_i-k-1}) \end{aligned}$$

を表すものとします。

5 Pfaffian 方程式系

次の系に対して、Pfaffian 方程式の元となる、Gauss-Manin 接続を求めました。

Function name	λ	Normal form of z	Normal form of β
Gauss's ${}_2F_1$	(1,1,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0})$
Kummer's ${}_1F_1$	(2,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0})$
Bessel's J_a	(2,2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{x}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{2;1})$
Hermite's H_e	(3,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, 0, \beta_{1;2}, \beta_{2;0})$
Airy's A_i	(4)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix}$	$(0, 0, 0, \beta_{1;3})$

Function name	λ	Normal form of z	Normal form of β
Appell's F_1	(1,1,1,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x & -y \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0}, \beta_{5;0})$
Horn's G_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0}, \beta_{5;0})$
Humbert's Φ_1	(2,1,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y & 1 & -1 & -x \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0})$
Humbert's Φ_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0})$
Horn's Γ_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & y & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0})$
Humbert's Φ_3	(2,2,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{2;1}, \beta_{3;0})$
Horn's Γ_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & y & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{2;1}, \beta_{3;0})$
[2] $\Phi_{(3,1,1)}$	(3,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & y & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, 0, \beta_{1;2}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0})$
[2] $\Phi_{(3,2)}$	(3,2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, 0, \beta_{1;2}, \beta_{2;0}, \beta_{2;1})$
[2] $\Phi_{(4,1)}$	(4,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, 0, 0, \beta_{1;3}, \beta_{2;0})$
[2] $\Phi_{(5)}$	(5)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & y \end{bmatrix}$	$(0, 0, 0, 0, \beta_{1;4})$

6 Appell's F_1 と、Humbert's Φ_1 の場合

Appell の F_1 の場合、$\begin{cases} \varphi_{0,F} = \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \\ \varphi_{1,F} = \frac{x\mathrm{d}t}{xt-1} - \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \\ \varphi_{2,F} = \frac{y\mathrm{d}t}{yt-1} - \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \end{cases}$ と置いて、

$$\frac{\nabla_x}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix} = \left\{\frac{1}{x}W_{1,F} + \frac{1}{x-1}W_{2,F} + \frac{1}{x-y}W_{5,F}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\frac{\nabla_y}{\mathrm{d}y}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix} = \left\{\frac{1}{y}W_{3,F} + \frac{1}{y-1}W_{4,F} + \frac{1}{y-x}W_{5,F}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

が得られます。ここで各行列は

$$W_{1,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{1;0}+\beta_{4;0}&\beta_{5;0}\\ 0&0&0\end{bmatrix},\quad W_{2,F}=\begin{bmatrix}0&\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{3;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{4;0}&0\end{bmatrix},$$

$$W_{3,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{4;0}&\beta_{1;0}+\beta_{5;0}\end{bmatrix},\quad W_{4,F}=\begin{bmatrix}0&0&\beta_{5;0}\\ 0&0&\beta_{5;0}\\ 0&0&\beta_{3;0}+\beta_{5;0}\end{bmatrix},\quad W_{5,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\beta_{5;0}&-\beta_{5;0}\\ 0&-\beta_{4;0}&\beta_{4;0}\end{bmatrix},$$

と表されます。これに被積分関数を掛け、積分すると Pfaffian 方程式が得られます。

Humbert の Φ_1 の場合、$\begin{cases}\varphi_{0,\Phi}=\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\\ \varphi_{1,\Phi}=\frac{x\mathrm{d}t}{xt-1}-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\\ \varphi_{2,\Phi}=-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\end{cases}$ と置いて、

$$\frac{\nabla_x}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{x}W_{1,\Phi}+\frac{1}{x-1}W_{2,\Phi}-\frac{y'}{x^2}W_{5,\Phi}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix},\tag{9}$$

$$\frac{\nabla_{y'}}{\mathrm{d}y'}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{y'}W_{3,\Phi}+W_{4,\Phi}+\frac{1}{x}W_{5,\Phi}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix},\tag{10}$$

が得られます。ここで各行列は

$$W_{1,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{1;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&-\beta_{4;0}&\beta_{4;0}\end{bmatrix},W_{2,\Phi}=\begin{bmatrix}0&\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{3;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{4;0}&0\end{bmatrix},$$

$$W_{3,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{4;0}&\beta_{1;0}\end{bmatrix},W_{4,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&\beta'_{1;1}\\ 0&0&\beta'_{1;1}\\ 0&0&\beta'_{1;1}\end{bmatrix},W_{5,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\beta'_{1;1}&-\beta'_{1;1}\\ 0&0&0\end{bmatrix},$$

と表されます。また (7)(8) 式で、$\begin{cases}y=\varepsilon y'\\ \beta_{5;0}=\frac{1}{\varepsilon}\beta'_{1;1}\end{cases}$ と置いて、$\varepsilon\to 0$ の極限を取ると、(9)(10) 式に収束します。

7　統計分野への応用

統計の分野では、ホロノミック勾配法を用いて超幾何関数の数値計算 (斎藤 [3]) が行われています。将来合流型についても、数値計算分野においての応用方法が開発されるかもしれません。

参考文献

[1] Majima, H. Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, lecture Notes in Math. 1075, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.

[2] Kimura, H., and Koitabashi, T., Normalize of Maximal Abelian Subgroup of $GL(n)$ and GeneralHypergeometric Functions, Kumamoto J. Math. Vol.9 (1996),13-43.

[3] Saito, M., Sturmfels, B., Takayama., N. Groebner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, 2000, Springer.

反射的凸多面体とグレブナー基底

大阪大学・大学院情報科学研究科・情報基礎数学専攻
土谷昭善 (Akiyoshi Tsuchiya)

1　格子凸多面体の三角形分割とグレブナー基底

オイラーの公式，ピックの公式などにその源流を持つ凸多面体論は，組合せ論の伝統的な分野の一つである．全ての頂点が整数点（格子点）となっている**格子凸多面体**に焦点を当てると，組合せ論，可換環論，代数幾何，整数論，最適化問題，統計，そしてミラー対称性といった純粋数学や応用数学の様々な分野との間に美しい関係性が現れる．格子凸多面体の研究の中の一つのブレイクスルーは，1995 年の Bernd Strumfels による格子凸多面体の正則三角形分割と，付随するトーリックイデアルのグレブナー基底との関係の発見である．この章では，この関係について紹介する．

体 K 上の n 変数多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式全体を $\mathcal{M}_n$ で表す．集合 $\mathcal{M}_n$ 上の全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件を満たす時をいう．

1. $1 \neq \forall u \in \mathcal{M}_n$ に対して，$1 < u$．つまり，全ての単項式の中で 1 は最小の多項式である．
2. $u, v, w \in \mathcal{M}_n, u < v \Rightarrow uw < vw$.

代表的な単項式順序として逆辞書式順序を紹介する．

例 1（逆辞書式順序） 単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ に対して，次の 2 条件のいずれかを満たす時，$u <_{\mathrm{rev}} v$ と定義する．

1. $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$.
2. $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ かつ $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$ においてもっとも右にある 0 でない成分が負．

例えば，$x_1 x_2^2 x_3^2 <_{\mathrm{rev}} x_2^4 x_3$ である．この $<_{\mathrm{rev}}$ を**逆辞書式順序**と呼ぶ．この時，$x_n <_{\mathrm{rev}} \cdots <_{\mathrm{rev}} x_1$ が従う．実際はこのような変数の順番で逆辞書式順序は定義されるため，上の定義は，正確には $x_n <_{\mathrm{rev}} \cdots <_{\mathrm{rev}} x_1$ に関する逆辞書式順序というべきである．

単項式順序 $<$ を一つ固定する．多項式 $0 \neq f \in K[\mathbf{x}]$ に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のものを $\mathrm{in}_<(f)$ で表し，f の $<$ に関する**先頭単項式**と呼ぶ．イデアル $I \subset K[\mathbf{x}]$ に対して，

$$\mathrm{in}_<(I) := (\mathrm{in}_<(f) : 0 \neq f \in I) \subset K[\mathbf{x}]$$

を I の $<$ に関する**イニシャルイデアル**という．有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_r\} \subset I$ が $<$ に関する I の**グレブナー基底**であるとは，$\mathrm{in}_<(I) = (\mathrm{in}_<(f_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_r))$ が成り立つ時をいう．一般にイデアル

I と単項式順序が与えられれば，そのグレブナー基底は必ず存在し，I を生成することが知られている．一方，$\mathcal{G}$ が I を生成していても，グレブナー基底になるとは限らない．

例 2　イデアル $I = (x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7) \subset K[x_1, \ldots, x_7]$ と逆辞書式順序 $<_{\mathrm{rev}}$ に関して，$\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7\}$ は I のグレブナー基底ではない．実際，

$$x_5(x_1x_2 - x_3x_4) - x_2(x_1x_5 - x_6x_7) = x_3x_4x_5 - x_2x_6x_7 \in I$$

の先頭単項式 $x_3x_4x_5$ は (x_1x_2, x_1x_5) に属さない．実は，この 2 項式を加えた $\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7, x_3x_4x_5 - x_2x_6x_7\}$ は I のグレブナー基底となっている．

次に格子凸多面体に付随するトーリックイデアルを定義する．体 K 上のローラン多項式環 $K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s] := K[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, s]$ を準備する．格子点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し，ローラン単項式 $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} := t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d} \in K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s]$ を対応させる．$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とし，$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ とする．この時，$\mathcal{P}$ の**トーリック環**とは，$K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s]$ の部分環 $K[\mathcal{P}] := K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}s, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}s]$ のことをいう．今，全射準同型 $\pi : K[\mathbf{x}] \to K[\mathcal{P}]$ を $\pi(x_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}s (1 \leq i \leq n)$ で定義し，その核 $I_{\mathcal{P}} := \ker \pi \subset K[\mathbf{x}]$ を $\mathcal{P}$ の**トーリックイデアル**という．トーリックイデアルは素イデアルであり，二項式で生成されることが知られている．

格子単体の集合 Δ が $\mathcal{P}$ の**三角形分割**であるとは，次の 3 条件を満たす時をいう．

1. $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Delta} \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F} \in \Delta$ の面ならば，$\mathcal{F}' \in \Delta$.
3. $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \Delta$ ならば，$\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ のそれぞれの面となっている．

今，単項式順序 $<$ を一つ固定する．この時，

$$\Delta(\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{P}})) := \left\{ \mathrm{Conv}(A) : A \subset \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d, \prod_{\mathbf{a}_i \in A} x_i \notin \sqrt{\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{P}})} \right\}$$

を $\mathcal{P}$ の $<$ に関する**イニシャル複体**という．

命題 3　イニシャル複体 $\Delta(\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{P}}))$ は $\mathcal{P}$ の (正則) 三角形分割である．

正則三角形分割は元々は幾何的な定義であるが，イニシャル複体によって得られる三角形分割と考えてもらって良い．三角形分割 Δ が **unimodular** であるとは，Δ の全ての極大単体の体積が $1/d!$ となる時をいう．unimodular な三角形分割の存在は，$\mathcal{P}$ にいい性質をもたらす．$\mathcal{P}$ が unimodular な正則三角形分割を持つかどうかはトーリックイデアルを調べることで判定できる．

命題 4　条件 $\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1}$ を仮定する．この時，$\mathcal{P}$ が unimodular な正則三角形分割を持つ必要十分条件は，ある単項式順序 $<$ が存在して，$\sqrt{\mathrm{in}_<(I_{\mathcal{P}})} = \mathrm{in}_<(I_{\mathcal{P}})$ が成り立つことである．つまり，すべての先頭単項式が squarefree(2 以上の指数が現れない) なグレブナー基底をもつことである．このようなグレブナー基底を **squarefree グレブナー基底**と呼ぶ．

squarefree グレブナー基底持つかどうかは，計算可換代数において重要な問題である．一方，グレブナー基底が二次の斉次二項式からなるものを見つけることも重要である．このようなグレブナー基

底を**二次グレブナー基底**と呼ぶ．イデアルが二次グレブナー基底を持てば，その剰余環は Koszul となることが知られている．格子多面体の文脈でも，二次グレブナー基底は重要な役割を担う．部分集合 $A \subset \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ が $\mathcal{P}$ の三角形分割 T の **non-face** であるとは，$\mathrm{Conv}(A) \notin T$ の時をいう．三角形分割が **flag** であるとは，全ての極小 non-face が 2 点からなる時をいう．格子凸多面体が flag な正則三角形分割を持つかどうかは，二次グレブナー基底を持つかどうかに他ならない．つまり，

命題 5 $\mathcal{P}$ が flag な正則三角形分割を持つ必要十分条件は，$I_{\mathcal{P}}$ がある単項式順序に対して，二次グレブナー基底を持つことである．

このような格子凸多面体の三角形分割とグレブナー基底の関係の出現により，格子凸多面体の研究は大きな発展を遂げた．グレブナー基底，トーリックイデアル，そしてその格子凸多面体への応用の詳細は [4, 17] を参照していただきたい．

2 反射的凸多面体とグレブナー基底

格子凸多面体の研究におけるグレブナー基底の応用として，反射的凸多面体の豊富な類の構成がある．まず，反射的凸多面体とは何かを見る．

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする．$\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部にある時，集合

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$$

は凸多面体となる．ここで，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である．この多面体を $\mathcal{P}$ の**双対凸多面体**と呼ぶ．一般に，$\mathcal{P}^\vee$ は格子凸多面体になるとは限らない．例えば，線分 $[-2, 2]$ の双対凸多面体は $[-1/2, 1/2]$ である．格子凸多面体が**反射的**であるとは，$\mathbb{R}^d$ の原点がその内部にあり，さらにその双対凸多面体が格子凸多面体となる時をいう．例えば，線分 $[-1, 1]$ は反射的凸多面体である．この反射的凸多面体は特に代数幾何において重要な性質を持っている．実際，反射的凸多面体は代数幾何における Gorenstein toric Fano variety と 1 対 1 に対応しており，その様々な代数幾何的情報を反射的凸多面体の組合せ論的情報から得ることができる (詳しくは [12] を参照)．

反射的凸多面体の特筆すべき性質として，ある種の有限性が知られている．二つの d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値**であるとは，unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$，つまり $\det(U) = \pm 1$，と格子点 $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + \mathbf{w}$ となるときにいう．ここで $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ に対し，$f_U(\mathbf{v}) = \mathbf{v}U$ と定める．この変換において，格子凸多面体（および対応するトーリック多様体）のほとんど全ての情報は保存される．一般に，格子凸多面体の研究において，unimodular 同値な多面体は同じ多面体と考える．今，次元 d を固定する．反射的凸多面体はその定義から，内部に原点を除いて格子点が存在しない，つまりちょうど 1 個の格子点を内部に含むことが従う．この性質と [10] の結果から，d 次元反射的凸多面体は unimodular 同値なものを除いて，高々有限個しか存在しないことが導かれる．さらに低次元の反射的凸多面体の分類が行われている．実際，1 次元は 1 個，2 次元は 16 個の反射的凸多面体が存在することが理論的に証明されており，分類アルゴリズムの開発により，計算機を使って，3 次元で 4319 個，4 次元では 473800776 個もの反射的凸多面体が存在することが知られている．しかし，その量の多さから，5 次元以上の高次元の反射的凸多面体の分類はほぼ不可能である．よって，高次元

の，特に，ある”良い”性質を持った反射的凸多面体の豊富な類の構成は重要な問題の一つである．この問題の一つの方針が，グレブナー基底を用いた反射的凸多面体の構成である．実際，三角形分割の観点から次の結果が従う．

命題 6 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を内部に原点を含む d 次元格子凸多面体とする．もし $\mathcal{P}$ が unimodular な三角形分割で，そのすべての極大単体が原点を含むものを持てば，$\mathcal{P}$ は反射的凸多面体である．

この命題をグレブナー基底の観点から考えると，次のような”使いやすい”結果が得られる．

命題 7 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を内部に原点を含む d 次元格子凸多面体で，条件 $\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1}$ を満たすものとし，x_n を原点に対応する $K[\mathbf{x}]$ の変数とする．もし $I_{\mathcal{P}}$ の逆辞書式順序 $<_{\mathrm{rev}}$ に関する squarefree グレブナー基底が存在すれば，$\mathcal{P}$ は反射的凸多面体である．特に $\mathcal{P}$ は unimodular な正則三角形分割を持つ．

これらの命題を使って，様々な高次元の unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体の豊富な類が構成されている (例えば [7, 8])．一方，この手法は反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持つ時にしか使えない．そこで，[11] では，行列等の線形代数のテクニックを使い，高次元の反射的凸多面体の豊富な類の構成に成功している．

unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体は，数え上げ数学において，非常に良い性質を持つ．次の章ではその性質について紹介する．

3 格子凸多面体の δ 多項式とその unimodal 性

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする．この時，$\delta(\mathcal{P}, t)$ を次の公式で定義する．

$$\delta(\mathcal{P}, t) := (1-t)^{d+1} \left[1 + \sum_{k \geq 1} |k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| t^k \right].$$

ここで $k\mathcal{P} := \{k\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$ である．この時，$\delta(\mathcal{P}, t)$ は t に関する，高々 d 次の多項式になることが知られており，$\delta(\mathcal{P}, t) = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_d t^d$ は $\mathcal{P}$ の δ **多項式**と呼ばれている．δ 多項式について以下のことが知られている．

- $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$.
- $\delta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- $\delta(\mathcal{P}, 1) = \delta_0 + \cdots + \delta_d$ は $\mathcal{P}$ の正規化体積，つまり (通常の体積) $\times d!$ に一致する．

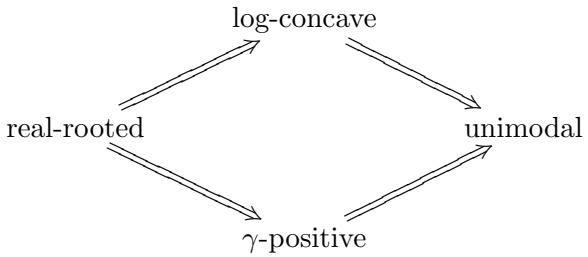
上記のように δ 多項式は格子凸多面体の様々な情報を持っており，その性質の研究は非常に重要である．δ 多項式に関する標準的な教科書として [1] をあげておく．

今，$f = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ を d 次の非負実係数多項式とする．この時，

- f が **real-rooted** であるとは，f の全ての根が実数の時をいう．
- f が **lon-concave** であるとは，$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ が全ての i に対して成り立つ時をいう．
- f が **unimodal** であるとは，ある k に対して，$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq \cdots \geq a_d$ が成り立つ時

をいう．

一方，f が**回帰的**であるとは，$a_i = a_{d-i}$ が全ての i に対して成り立つ時をいう．さらに回帰的な f が **γ-positive** であるとは，ある $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\lfloor d/2 \rfloor} \geq 0$ が存在して，$f = \sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i (1+t)^{d-2i}$ が成り立つ時をいう．また $\sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i$ を f の γ **多項式**と呼ぶ． この時，f が real-rooted であることと，その γ 多項式が real-rooted であることは同値である．f に関する上記の性質はそれぞれ関係があり，実際 f が回帰的であれば，次の図式が成立する:



δ 多項式がいつ上記のような性質を持つかを調べることは，格子凸多面体の研究において重要な研究の一つである．

一方，反射的凸多面体は δ 多項式によって特徴付けることができる．実際，$\mathcal{P}$ が反射的凸多面体（に unimodular 同値）であることと，その δ 多項式が d 次かつ回帰的であることは同値である ([5])．反射的凸多面体の δ 多項式がいつ unimodal となるかという研究は，格子凸多面体の研究における流行の一つとなっている．

反射的凸多面体の δ 多項式の unimodal 性についての強力な結果が知られている．

定理 8（[2, Bruns-Römer]） 反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持てば，その δ 多項式は unimodal である．

この結果により，いつ反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持つか，また unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体を構成する研究が盛んに行われている．しかし，δ 多項式に対し，unimodal 性より強い性質についての研究は多くない．δ 多項式のような数え上げに関する多項式の real-rooted 性について以下のような予想があった．

予想 9（Real Root 予想） flag generalized homology shpere の h 多項式は real-rooted である．

詳しい定義は述べないが，flag generalized homology sphere とはある代数的および幾何的性質を持った単体的複体であり，その h 多項式はその面の数え上げに関する多項式，実際は付随する Stanley-Risner 環の h 多項式のことである．また generalized homology sphere は **Gorenstein*** 複体とも呼ばれている．しかし，Real Root 予想は Ś. Gal により反例が与えられた．一方，その反例を与える過程で，次の予想が提唱された [3].

予想 10（Gal 予想） flag generalized homology shpere の h 多項式は γ-positive である．

一方，反射的凸多面体の δ 多項式と flag generalized homology sphere の h 多項式には次のような関係がある．

命題 11　$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元の反射的凸多面体とする．もし $\mathcal{P}$ が unimodular かつ flag な正則三角形分割で，その全ての極大単体が原点を含むものを持てば，$\mathcal{P}$ の δ 多項式は，ある flag generalized homology sphere の h 多項式と一致する．

したがって，命題 7 の条件を「squarefree 二次グレブナー基底」に変えると，上の命題の条件を満たすことになる．本稿では，unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体の新しい豊富な類を与え，上の二つの予想について議論する．

4　二部グラフに付随する反射的凸多面体

格子凸多面体の構成を考える時，他の組合せ論的対象，例えばグラフなどから構成することが多々ある．そうやって構成した多面体の情報は，元となった組合せ論的対象の情報から得られることが多い．一つ，そのようにしてできた多面体の類を紹介する．G を $[d] := \{1, \ldots, d\}$ 上の有限単純グラフ，つまりループや多重辺がない無向グラフとし，$E(G)$ をその辺集合とする．今，$\mathcal{P}_G$ を集合

$$\{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j : \{i, j\} \in E(G)\}$$

の凸閉包と定義する．ここで $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbb{R}^d$ の標準基底である．この多面体を G の**辺凸多面体**と呼ぶ．この辺凸多面体は付随するトーリック環についての研究が盛んに行われており，様々な貴重な例を可換環論および格子凸多面体の理論に与えている (例えば [6, 13, 14, 15])．特に [14] では，unimodular な非正則三角形分割を持つが，unimodular な正則三角形分割を持たない格子凸多面体という驚くべき例の発見につながっている．

本稿では，この辺凸多面体と関連させて，以下の凸多面体を考える．今，$\mathcal{B}_G$ を集合

$$\{\pm\mathbf{e}_1, \ldots, \pm\mathbf{e}_d\} \cup \{\pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j : \{i, j\} \in E(G)\}$$

の凸閉包と定義する．この時，$\mathcal{B}_G$ は d 次元格子凸多面体であり，原点をその内部に含み，さらに辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ をその極大面に持つ．この関係から，$\mathcal{B}_G$ は $\mathcal{P}_G$ の性質に大きく影響されており，実際，様々な代数的性質は $\mathcal{P}_G$ と同じものを持つ．特に，$I_{\mathcal{B}_G}$ のグレブナー基底は $I_{\mathcal{P}_G}$ のグレブナー基底から構成することが可能である．命題 7 の条件を満たすグレブナー基底の存在を考えることで，以下の結果が証明できる．

定理 12（[16]）　G を有限単純グラフとする．この時，次は同値である．

- $\mathcal{B}_G$ は反射的凸多面体である．
- $\mathcal{B}_G$ は unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体である．
- G は二部グラフである．

さらに G が二部グラフの時，次は同値である．

- $\mathcal{B}_G$ は flag かつ unimodular な正則三角形分割を持つ．
- G の長さ 6 以上のサイクルは弦を持つ，つまり弦二部グラフである．

特にこの時，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式は，ある flag generalized homology sphere の h 多項式と一致する．

G が二部グラフの時の $I_{\mathcal{B}_G}$ のグレブナー基底の形はここでは記載しない．興味のある方は [16] を参照してほしい．この結果から，$\mathcal{B}_G$ が反射的であれば，unimodular な正則三角形分割を持つ．よってその δ 多項式は回帰的かつ unimodal である．最後の章では，この δ 多項式の real-rooted 性と γ-positive 性について議論する．

5 $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ の γ-positive 性と内部多項式

Hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ は，頂点集合 $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ と hyperedge の集合 $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ からなるものである．この時，hypergraph $\mathcal{H}$ を二部グラフ Bip$\mathcal{H}$ に対応させることができる．ここで，Bip$\mathcal{H}$ は頂点分割 $V \cup E$ で，もし $v_i \in e_j$ なら $\{v_i, e_j\}$ が辺となる二部グラフである．今，Bip$\mathcal{H}$ は連結であると仮定する．$\mathcal{H}$ の **hypertree** は関数 $\mathbf{f} : E \to \{0, 1, \ldots\}$ で，Bip$\mathcal{H}$ の spanning tree Γ が存在して，各 hyperedge $e \in E$ に対応する頂点の Γ における次数が $\mathbf{f}(e) + 1$ となるもののことである．$B_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ のすべての hypertree の集合とする．Hyperedge $e_j \in E$ が hypertree $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$ に関して，**internally active** であるとは，$\mathbf{f}' \in B_{\mathcal{H}}$ と，ある整数 $j' < j$ で

$$\mathbf{f}'(e_i) = \begin{cases} \mathbf{f}(e_i) - 1, & (i = j), \\ \mathbf{f}(e_i) + 1, & (i = j'), \\ \mathbf{f}(e_i), & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となるものが存在しない時をいう．Hyperedge が internally active でない時，**internally inactive** であると呼び，$\bar{\iota}(\mathbf{f})$ を hypertree $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$ に関して internally inactive な hyperedge の個数とする．この時，$\mathcal{H}$ の内部多項式とは，

$$I_{\mathcal{H}}(t) = \sum_{\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}} t^{\bar{\iota}(\mathbf{f})}$$

のことをいう．もし $G = \text{Bip}\mathcal{H}$ であれば，$I_G(t) = I_{\mathcal{H}}(t)$ と表記する．内部多項式は [9] において，Kálmán によって導入された．もし $\mathcal{H}$ がグラフで $T(x, y)$ をその Tutte 多項式とすれば，内部多項式は $t^{|V|-1}T(1/t, 1)$ に一致する．内部多項式は Tutte 多項式の hypergraph への一般化として考えられた．

この内部多項式を用いることで，G が二部グラフの時，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式の公式を与えることができる．特にその公式より，$\delta(\mathcal{B}_G, t)$ は γ-positive であることが従う．G を頂点分割を $V_1 \cup V_2 = [d]$ とする二部グラフとする．この時，$\widehat{G}$ を辺集合を

$$E(\widehat{G}) = E(G) \cup \{\{i, d+1\} : i \in V_1\} \cup \{\{j, d+2\} : j \in V_2 \cup \{d+1\}\}$$

とする $[d+2]$ 上の連結二部グラフと定義する．

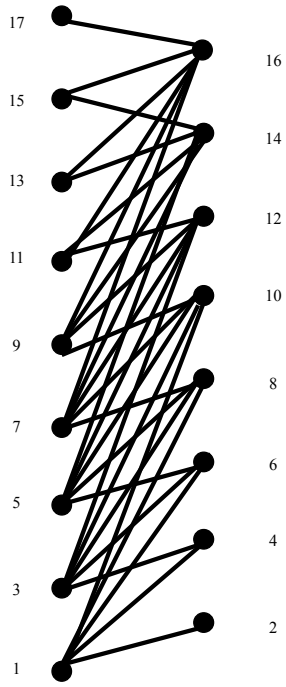
定理 13（[16]） G を $[d]$ 上の二部グラフとする．この時，

$$\delta(\mathcal{B}_G, t) = (t+1)^d I_{\widehat{G}}\left(\frac{4t}{(t+1)^2}\right)$$

となる．特に $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ は γ-positive である．また $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ が real-rooted になる必要十分条件は $I_{\widehat{G}}(t)$ が real-rooted になることである．

上の結果より，$\mathcal{B}_G$ は反射的凸多面体であれば，その δ 多項式は常に γ-positive となることがわかった．しかし，real-rooted になるとは限らない．最後にその例について紹介する．

例 14　G を次の二部グラフとする．



この時，$\widehat{G}$ の内部多項式は

$$I_{\widehat{G}}(t) = 3t^8 + 86t^7 + 658t^6 + 1946t^5 + 2534t^4 + 1420t^3 + 336t^2 + 32t + 1$$

となる．一方，$I_{\widehat{G}}(t)$ は $-1.85884 \pm 0.149768i$ をその根にもつ（ただしこれは近似した値）．よって，$I_{\widehat{G}}(t)$ は real-rooted ではない．したがって，定理 13 より，$\delta(\mathcal{B}_G, t)$ も real-rooted ではない．実際，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式は

$$\begin{aligned}
&\delta(\mathcal{B}_G, t) = (t+1)^{17} I_{\widehat{G}}\left(\frac{4t}{(t+1)^2}\right) \\
&= t^{17} + 145t^{16} + 7432t^{15} + 174888t^{14} + 2128332t^{13} + 14547884t^{12} + 59233240t^{11} \\
&\quad + 148792184t^{10} + 234916470t^9 + 234916470t^8 + 148792184t^7 + 59233240t^6 \\
&\quad + 14547884t^5 + 2128332t^4 + 174888t^3 + 7432t^2 + 145t + 1
\end{aligned}$$

であり，$-3.88091 \pm 0.18448i$ と $-0.257091 \pm 0.0122209i$ をその根に持つ（ただしこれは近似した値）．また，この二部グラフ G は弦二部グラフとなっている．よって，この例は Real Root 予想の反例にもなっている．

参考文献

[1] M. Beck and S. Robins. "Computing the continuous discretely: Integer-point enumeration in polyhedra," Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.

[2] W. Bruns and T. Römer, h-Vectors of Gorenstein polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 65–76.

[3] S. R. Gal, Real Root Conjecture fails for five and higher dimensional spheres, *Discrete Comput. Geom.*, **34** (2005), 269–284.

[4] T. Hibi, Ed., "Gröbner Bases: Statistics and Software Systems," Springer, 2013.

[5] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12** (1992), 237–240.

[6] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Edge rings with 3-linear resolutions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[7] T. Hibi and A. Tsuchiya, Facets and volume of Gorenstein Fano polytopes, *Math. Nachr.*, **290** (2017), 2619–2628.

[8] T. Hibi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from perfect graphs, *J. Combin. Theory Ser. A*, **157** (2018), 233–246.

[9] T. Kálmán, A version of Tutte's polynomial for hypergraphs, *Adv. Math.* **244** (2013), 823–873.

[10] J. C. Lagarias and G. M. Ziegler, Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice, *Canad. J. Math.* **43** (1991), 1022–1035.

[11] T. Nagaoka and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from edge polytopes, *Linear Algebra Appl.*, **557** (2018), 438–454.

[12] B. Nill, Gorenstein toric Fano varieties, *Manuscripta Math.* **116** (2005), 183–210.

[13] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *J. Algebra* **207** (1998), 409–426.

[14] H. Ohsugi and T. Hibi, A normal $(0, 1)$-polytope none of whose regular triangulations is unimodular, *Disc. Comput. Geom.* **21** (1999), 201–204.

[15] H. Ohsugi and T. Hibi, Koszul bipartite graphs, *Adv. Applied Math.* **22** (1999), 25–28.

[16] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with γ-positivity associated to interior polynomials, arXiv:1810.12258.

[17] B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

Singularities of non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties

東京大学大学院　数理科学研究科
吉川翔 (Shou YOSHIKAWA)

1 Introduction

On smooth complex variety, the classical canonical sheaf makes sense, but we can consider the analogous sheaf in normal variety not necessary smooth by the following way;

Definition 1.1. Let X be a normal complex variety and $\pi : Y \to X$ be a resolution of singularities. We define the *canonical sheaf* ω_X on X by

$$\omega_X := \pi_* \omega_Y .$$

This sheaf is very difficult to deal in the general setting, but since resolutions are isomorphism in codimension one points on X, so this sheaf has good condition in codimension one. In particular, we can define the divisor corresponding to the canonical sheaf.

Definition 1.2. Let X be a normal complex variety. We define the *canonical divisor* K_X on X by

$$K_X := \sum_{E\text{: prime divisor}} \mathrm{ord}_E(\omega_X)$$

The canonical sheaf on smooth variety is invertible, and it means the K_X is a Cartier divisor. However, in general, K_X is not Cartier divisor if X is not smooth. Therefore, we want the following mild condition;

Definition 1.3. Let X be a normal complex variety.

- We say that K_X is $\mathbb{Q}$-*Cartier* if there exists positive integer m such that mK_X is a Cartier divisor.
- We say that X is $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* if K_X is $\mathbb{Q}$-Cartier.

Many people studied geometric property of non $\mathbb{Q}$-Gorenstein variety, but non $\mathbb{Q}$-Gorenstein variety exists.

Example 1.4. Let X be a smooth complex projective variety and $\mathcal{L}$ be a ample line bundle on X. Then we define the *affine cone* C associated $\mathcal{L}$ by

$$C := \mathrm{Spec}(\bigoplus_m \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}^m)).$$

Here, C is $\mathbb{Q}$-Cartier if and only if there exists positive integers m_1 and m_2 such that $\mathcal{L}^{m_1} \simeq \mathcal{O}(m_2 K_X)$. It means that affine cones are usually not $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

In section 2, we recall the definition of singularities and related results in $\mathbb{Q}$-Gorenstein setting. Next, in section 3, we explain the analogous singularities to those of $\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties and results.

2 Singularities of $\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties

In this section, we recall the definition of singularities of $\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties. As following way, pullback of the canonical divisor naturally makes sense in $\mathbb{Q}$-Gorenstein setting.

Definition 2.1. Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties and $\pi : Y \to X$ be a birational morphism with Y normal. We define the *pullback* of K_X by

$$\pi^* K_X = \frac{1}{m} f^*(mK_X),$$

where m is an positive integer such that mK_X is a Cartier divisor and $f^*(mK_X)$ is the pullback of Cartier divisor.

Next, we define the log discrepancy, it is very important for birational geometry.

Definition 2.2. Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties and $\pi : Y \to X$ be a birational morphism. For prime divisor E on Y, we define the *log discrepancy* of X with respect to E by

$$a(E, X) := \mathrm{ord}_E(K_Y - f^* K_X) + 1$$

X is *log canonical* if for any birational morphism $\pi : Y \to X$ with Y normal and prime divisor E on Y, $a(E, X) \geq 1$ holds.

First we introduce the result related to MMP.

Theorem 2.3 ([OX12])**.** *Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein variety. Then there exists the birational morphism $\pi : Y \to X$ with Y normal such that Y satisfies the following conditions;*

- *$K_Y + E^\pi$ is π-ample, and*
- *(Y, E^π) is log canonical,*

where E^π is the sum of the prime exceptional divisors.

Next, we introduce the result related to polarized endomorphisms.

Definition 2.4. Let X be a normal projective variety and $f : X \to X$ be a surjective endomorphism. f is *polarized endomorphism* if there exists ample line bundle $\mathcal{L}$ and positive integer m such that $\mathcal{L}^m \simeq f^* \mathcal{L}$ holds.

Theorem 2.5 ([BH14]). *Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein projective variety admitting a non-invertible polarized endomorphism. Then X is log canonical.*

3 Singularities of non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties

In this section, we consider the following questions;

Question 3.1.

(1) How to define log canonical in non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein setting ?
(2) Does non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein variety have good model as in Theorem 2.3 ?
(3) Are there relationships between log canonicalness and existence of polarized endomorphism ?

The answer of Question (1) is the following;

Definition 3.2 (cf. [dFH09], [BdFF],[Has18],[Y]). Let X be a $\mathbb{Q}$-Gorenstein variety, $\pi : Y \to X$ be a birational morphism with Y normal and E be a prime divisor on Y. Then we define the following notations.

- $a^+(E, X) = \mathrm{ord}_E(K_Y) + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}(\mathrm{ord}_E(\mathcal{O}_X(mK_X))) + 1$
- $a^-(E, X) = \mathrm{ord}_E(K_Y) - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}(\mathrm{ord}_E(\mathcal{O}_X(-mK_X))) + 1$

Furthermore, X is pseudo-log canonical (resp. valuative log canonical) if $a^-(E, X) \geq 0$ (resp. $a^+(E, X) \geq 0$) for any $\pi : Y \to X$ be a birational morphism with Y normal and E be a prime divisor on Y.

The definitions of a^+ and a^- are very similar, but these are not same in general.
The answer of (2) is the following;

Theorem 3.3 ([Has18]). *Let X be a normal pseudo-log canonical variety. Then there exists the birational morphism $\pi : Y \to X$ with Y normal such that*

- *Y is $\mathbb{Q}$-Gorenstein log canonical and*
- *π is isomorphism in codimension one points of Y,*

where second condition is equivalent to the condition that Y has no exceptional prime divisor.

The answer of Question 3 is the following;

Theorem 3.4 ([Y]). *Let X be a normal projective variety admitting a non-invertible polarized endomorphism. Then X is valuative log canonical.*

参考文献

[BdFF] S. Boucksom, T. de Fernex, C. Favre, The volume of an isolated singularity, Duke Math. J. **161** (2012), no. 8, 1455–1520.

[BH14] A. Broustet and A. Höring, Singularities of varieties admitting an endomorphism. Math. Ann. **360** (2014), no. 1-2, 439–456.

[dFH09] T. de Fernex and C. Hacon, Singularities on normal varieties, Compos. Math. **145** (2009), no.2, 393–414.

[Has18] K. Hashizume, A class of singularity of arbitrary pairs and log canonicalizations, arXiv:1804.06326v3, preprint (2018).

[OX12] Y. Odaka, C. Xu, Log-canonical models of singular pairs and its applications, Math. Res. Lett, 19(2):325–334, 2012.

[Y] S. Yoshikawa, Singularities of non-$\mathbb{Q}$-Gorenstein varieties admitting a polarized endomorphism, preprint (2018), arXiv:1811.01795v3.

完全グラフのヘッセ行列の固有値について

信州大学大学院総合理工学研究科理学専攻数学分野
矢澤明喜子 (Akiko YAZAWA) *†

概要

グラフの spanning tree の母関数のヘッセ行列を考える. このヘッセ行列をグラフのヘシアンと呼ぶ. 本稿ではヘッセ行列の固有値を求めることによって完全グラフのヘシアンが消えていないことを示す. 応用としてグラフィックマトロイドに付随するある環の強レフシェッツ性を示す.

1 導入

複素次元が d であるコンパクトケーラー多様体 (M,ω) のコホモロジー環 $H^\bullet(M,\omega) = \bigoplus_{i=0}^{2d} H^i(M,\omega)$ は次数付き環である. さらに Hard Lefschetz Theorem とよばれる次の定理が知られている: 任意の $k \in \{0,1,\ldots,d\}$ に対し, $[\omega]^{d-k} : H^k(M,\omega) \to H^{2d-k}(M,\omega)$ は $H^k(M,\omega)$ と $H^{2d-k}(M,\omega)$ の線形空間としての同型を与える. コンパクトケーラー多様体のコホモロジー環がもつこの性質をより一般の可換環で考えたものが強レフシェッツ性である (定義 2.1).

マトロイドから作られるある束の組合せ論的性質を環論的に示すために Maeno–Numata [4] においてマトロイド M に付随するある環 A_M が導入された. そこでは有限射影空間から決まるマトロイドで定義される環の強 Lefschetz 性が示されている. さらに, [4] の exetend abstract [3] では任意のマトロイドに付随する環が強レフシェッツ性をもつことを予想されている. 本稿ではこの予想に対して, グラフから決まるマトロイドの場合について考える. グラフの spanning tree の重み付き母関数の零化イデアルによる多項式環の剰余環がこの場合の考えるべき環である. 主結果として完全グラフのヘッセ行列行列式を計算することにより, 5 頂点以下の完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性を示した.

本稿の構成は以下の通りである: 2 節では強レフシェッツ性の定義や強レフシェッツ性を判定する定理を述べる. 3 節ではマトロイドについて基本的な事柄の定義を例を交えて見ていく. 最後に [4] での結果を紹介する. 4 節では主結果を述べる. 証明などの詳細は省略をしている. 詳細は [9] にある.

最後に本稿を読む際に使う記号や注意についてふれる: 2^E を集合 E の部分集合全体の集合とする. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする. $V(m,\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の m 次元ベクトル空間とする. $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ を成分とするサイズ $m \times n$ の行列とする. また, 本稿では環論, グラフ理論, 束論について用語は定義をせずに用いている. 例えば, 環論についてはイデアルや次数付き環といった用語を定義せずに用いている. 特に強レフシェッツ性については [2] をみるとよい. グラフ理論についてサイクル, forest, spanning

* 当研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです.
† yazawa@math.shinshu-u.ac.jp

tree, 単純グラフといった用語を定義せずに用いているがこれらについては [1] をみるとよい. 束論については, 束, atomic 束, セミモジュラー/モジュラー束を定義せずに用いている. 特にマトロイドの詳細は [7] をみるとよい.

2　可換環の強レフシェッツ性

ここでは可換環の強レフシェッツ性を定義する. また, ある表示をもつ環が強レフシェッツ性をもつかどうかを判定する定理を紹介する.

定義 2.1. $A = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$, $A_s \neq \mathbf{0}$, を体 $\mathbb{K}$ 上の次数付き環とする. $L \in A_1$ が存在して, 任意の $k \in \left\{ 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor \right\}$ に対し掛け算写像

$$\begin{array}{rccc} \times L^{s-2k} \colon & A_k & \longrightarrow & A_{s-k} \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & L^{s-2k} \times f \end{array}$$

が全単射であるとき, A は強レフシェッツ性をもつという. このとき, L を強レフシェッツ元という.

強レフシェッツ性の定義から, 次数付き環 $A = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$ が強レフシェッツ性をもつならば $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{s-k}$ が成り立つ.

斉次多項式 $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対し,

$$\operatorname{Ann}(F) = \left\{ P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \;\middle|\; P\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) F = 0 \right\}$$

とおく. $\operatorname{Ann}(F)$ は $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルである. 次数付き環

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] / \operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$$

を考える. ただし s は多項式 F の次数とする. この環は以下のような性質をもつ: 任意の k に対し

- $\dim_{\mathbb{K}} A_k < \infty$,
- $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{s-k}$.

このような表示をもつ環が強レフシェッツ性をもつかどうかを判定する定理が知られている: 各 A_k は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である. Λ_k を A_k の基底とし, 行列 $H_F^{(k)}$ を

$$H_F^{(k)} = \left(e_i\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) e_j\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) F \right)_{\overline{e_i}, \overline{e_j} \in \Lambda_k}.$$

と定義する. この行列を多項式 F の k 次ヘッセ行列といい, この行列式を k 次ヘシアンという.

定理 2.2 (Watanabe [8], Maeno–Watanabe [5])**.** $L = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in A_1$ とする. 掛け算写像 $\times L^{s-2k} \colon A_k \to A_{s-k}$ が全単射であることと $\det H_F^{(k)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ であることは同値である.

全ての k 次ヘシアンが消えていないことがわかれば強レフシェッツ性が従う. また,

$$A_1^{(k,s-k)} = \left\{ L \in A_1 \;\middle|\; \times L^{s-2k} : A_k \to A_{s-k} \text{が全単射} \right\}$$

とおくとこの定理から

$$A_1^{(k,s-k)} = \left\{ L \in A_1 \;\middle|\; \det H_F^{(k)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \right\}$$

であることがわかる. したがって任意の k に対し, $A_1^{(k,s-k)} \neq \emptyset$ であるとき $\bigcap_k A_1^{(k,s-k)} \neq \emptyset$ である. よって $\bigcap_k A_1^{(k,s-k)}$ の元が強 Lefschetz 元である.

3　マトロイドとマトロイドに付随する環

ここではマトロイドの基本的な事柄について述べる. 後半ではマトロイドに付随する環について述べる.

この節では集合は有限集合を仮定する.

定義 3.1. 集合 E と $\mathcal{I} \subset 2^E$ に対し, 以下の 3 条件が成り立つとき, $(E,\mathcal{I})$ をマトロイドという:

(I1)　$\emptyset \in \mathcal{I}$.
(I2)　$I \in \mathcal{I}$ かつ $I' \subset I$ ならば $I' \in \mathcal{I}$.
(I3)　$I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ とする. $\#I_1 < \#I_2$ ならば, $I_1 \cup \{ e \} \in \mathcal{I}$ となる元 $e \in I_2 \setminus I_1$ が存在する.

$M = (E,\mathcal{I})$ をマトロイドとする. このとき, M を E 上のマトロイドという. E を ground set という. $\mathcal{I}$ の元を独立集合という. $2^E \setminus \mathcal{I}$ の元を従属集合という. $E = E(M), \mathcal{I} = \mathcal{I}(M)$ とも書く.

行列からマトロイドが構成できる. $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ とする.

$$E = \{ A \text{ の列の添え字集合} \},$$
$$\mathcal{I} = \left\{ X \in 2^E \;\middle|\; X \text{ に対応する } A \text{ の列ベクトルは } V(m,\mathbb{K}) \text{ 上で一次独立} \right\}$$

とすると $(E,\mathcal{I})$ はマトロイド. 行列 A から作られるマトロイドを $M[A]$ と書く. $M[A]$ を A の線形マトロイドという.

M をマトロイドとする.

$$\mathcal{B}(M) = \{ X \in \mathcal{I}(M) \mid \text{任意の } e \in E \text{ に対し, } I \cup \{ e \} \in \mathcal{C}(M) \}$$

とする. $\mathcal{B}(M)$ の元を M の basis と呼ぶ. つまり M の極大な独立集合のことを M の basis という. 極大性から次のことがわかる.

命題 3.2. B_1, B_2 を M の *basis* とすると $\#B_1 = \#B_2$ が成り立つ.

次に独立集合属とは異なる集合族からマトロイドを定義できることを見ていく. 従属集合 C の任意の真の部分集合 C' が独立集合であるとき, C を極小従属集合という. 極小従属集合をサーキットと呼ぶ. $\mathcal{C}(M)$ をマトロイド M のサーキットの集合とする. $C \in \mathcal{C}(M), \#C = n$ のとき, C を n-サーキットという.

例 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
E(M[A]) &= \{\,1,2,3,4,5\,\},\\
\mathcal{I}(M[A]) &= \{\,\emptyset,\{\,1\,\},\{\,2\,\},\{\,4\,\},\{\,5\,\},\{\,1,2\,\},\{\,1,5\,\},\{\,2,4\,\},\{\,2,5\,\},\{\,4,5\,\}\,\},\\
2^E \setminus \mathcal{I}(M[A]) &= \{\,\{\,3\,\},\{\,1,3\,\},\{\,2,3\,\},\{\,3,4\,\},\{\,3,5\,\},\{\,1,4\,\}\,\} \cup \{\,X \subset E \mid \#X \geq 3\,\},\\
\mathcal{B}(M[A]) &= \{\,\{\,1,2\,\},\{\,1,5\,\},\{\,2,4\,\},\{\,2,5\,\},\{\,4,5\,\}\,\},\\
\mathcal{C}(M[A]) &= \{\,\{\,3\,\},\{\,1,4\,\},\{\,1,2,5\,\},\{\,2,4,5\,\}\,\}.
\end{aligned}
$$

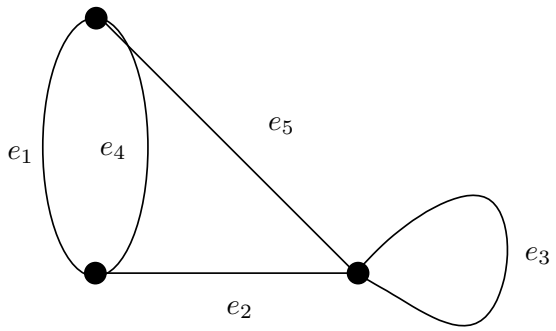
である.

サーキットの集合からマトロイドを構成する.

命題 3.4. E を集合, $\mathcal{C} \subset 2^E$ をサーキット集合とする. $\mathcal{I} = \{\, X \subset E \mid$ 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対し, $C \not\subset X \,\}$ とする. このとき, $(E,\mathcal{I})$ はマトロイドである.

グラフからマトロイドが構成できる. E をグラフの辺集合とする. $\mathcal{C}$ をグラフのサイクルの集合とする. このとき, $\mathcal{C}$ は E 上のマトロイドのサーキット集合である. グラフ Γ から構成されるマトロイドを Γ のサイクルマトロイドといい, $M(\Gamma)$ と書く.

例 3.5. 以下のグラフ Γ を考える.



このとき,

$$
\begin{aligned}
&E(M(\Gamma)) = \{\,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\,\},\\
&\mathcal{I}(M(\Gamma)) = \{\,\emptyset,\{\,e_1\,\},\{\,e_2\,\},\{\,e_4\,\},\{\,e_5\,\},\{\,e_1,e_2\,\},\{\,e_1,e_5\,\},\{\,e_2,e_4\,\},\{\,e_2,e_5\,\},\{\,e_4,e_5\,\}\,\},\\
&\mathcal{C}(M(\Gamma)) = \{\,\{\,e_3\,\},\{\,e_1,e_4\,\},\{\,e_1,e_2,e_5\,\},\{\,e_2,e_4,e_5\,\}\,\}.
\end{aligned}
$$

ここでマトロイドの同型を定義する.

定義 3.6. M, M' をマトロイドとする. 任意の $X \subset E(M)$ に対し, X が M の独立集合であることと $\psi(X) \subset E(M')$ が独立集合であることが同値となる全単射 $\psi : E(M) \to E(M')$ が存在するとき, M と M' は同型であるといい $M \cong M'$ と書く. このとき, ψ を同型写像という.

定義 3.7. グラフのサイクルマトロイドと同型なマトロイドをグラフィックマトロイドという.

例 3.8. 例 3.3 の線形マトロイド $M[A]$ と例 3.5 のサイクルマトロイド $M(\Gamma)$ を考える. $\psi : E(M[A]) \to E(M(\Gamma))$ を $\psi(i) = e_i$ とすると ψ は同型写像である. よって, $M[A]$ はグラフィックマトロイドである.

次にマトロイドの basis の母関数を考える.

$$F_M = \sum_{T \in \mathcal{B}(M)} \prod_{e \in T} x_e$$

と定義する. 補題 3.2 から F_M は斉次多項式である.

$$A_M = \mathbb{K}[\, x_e \mid e \in E(M) \,] / \operatorname{Ann}(F_M)$$

と定義する. ここでは A_M をマトロイド M に付随する環と呼ぶことにする.

マトロイドに付随する環は Maeno–Numata [4] で導入されたものである. [4] の結果を紹介する.

$(E, \mathcal{I})$ をマトロイドとする. E の部分集合 X に対し $\mathcal{I}|X = \{\, I \subset X \mid I \in \mathcal{I} \,\}$ とすると, $(X, \mathcal{I}|X)$ はマトロイドである. $(X, \mathcal{I}|X)$ を M の X への制限 $M|X$ と書く. B を $M|X$ の basis とする. このとき, $r(X) = \#B$ である. 補題 3.2 より basis の要素数は等しいので r は well-defined である. $r(X)$ を X のランクという. B を X の basis という. M を E 上のマトロイドとする. $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $X \mapsto r(X)$ で定義する. r を M のランク関数という.

E 上のマトロイド M に対し

$$\sigma(X) = \{\, e \in E \mid r(X \cup \{\, e \,\}) = r(X) \,\}$$

とする. ただし r は M のランク関数とする. $\sigma(X) = X$ となる $X \subset E$ を M の閉包という. 包含関係による順序が入った M の閉包からなる半順序集合を $\mathcal{L}(M)$ とおく. 一般に $\mathcal{L}(M)$ は atomic なセミモジュラー束であることが知られている. [4] では $\mathcal{L}(M)$ がモジュラーであるとき A_M が強レフシェッツ性をもつことが示されている.

4 主結果

ここでは 5 頂点以下の完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性を示す.

グラフィックマトロイドに付随する環について考える. M をグラフィックマトロイドとする. このとき, ある連結グラフ Γ が存在して $M = M(G)$ である. よって以下では連結なグラフから構成されるマトロイドのみを考える. また, グラフは単純グラフを仮定する. つまり 1-サーキットまたは 2-サーキットをもたないグラフィックマトロイドを考える.

E をグラフ Γ の辺集合とする. Γ から構成されるマトロイド $M(\Gamma) = (E, \mathcal{I})$ の独立集合について以下は同値である:

- $X \subset E$ は独立集合である.
- X がサイクルを含まない.
- 辺集合 X から誘導されるグラフが forest である.

また, $M(\Gamma)$ の basis について以下は同値である:

- $T \subset E$ は basis である.
- 辺集合 T から誘導されるグラフが spanning tree である.

グラフィックマトロイド $M(\Gamma)$ の basis の母関数を $F_\Gamma = F_{M(\Gamma)}$ とおく．いま, Γ は単純であることを仮定しているので F_Γ に現れる単項式は square free である．

グラフ Γ に対し,

$$H_\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F_\Gamma \right)_{i,j \in E(\Gamma)}$$

と定義する．ただし $E(\Gamma)$ は Γ の辺集合とする．$H_\Gamma, \det H_\Gamma$ をそれぞれグラフ Γ のヘッセ行列, ヘシアンという．H_Γ の各変数に 1 を代入した行列を $\tilde{H}_\Gamma$ とする．

例 4.1. 4 頂点のサイクル Γ を考える．このとき,

$$F_\Gamma = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$
$$H_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & x_3+x_4 & x_2+x_4 & x_2+x_3 \\ x_3+x_4 & 0 & x_1+x_4 & x_1+x_3 \\ x_2+x_4 & x_1+x_4 & 0 & x_1+x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{H}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

であり $\det \tilde{H}_\Gamma = -48, \det H_\Gamma \neq 0$ がわかる．

例 4.2. 5 頂点の tree Γ を考える．このとき,

$$F_\Gamma = x_1x_2x_3x_4,$$
$$H_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & x_3x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 \\ x_3x_4 & 0 & x_1x_4 & x_1x_3 \\ x_2x_4 & x_1x_4 & 0 & x_1x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{H}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり $\det \tilde{H}_\Gamma = -3, \det H_\Gamma \neq 0$ がわかる．

グラフのヘシアンを完全グラフの場合に計算した．

定理 4.3 (主結果)**.** Γ が完全グラフのとき $\det H_\Gamma \neq 0$.

以下, Γ は n 頂点の完全グラフであるとする．これを証明するために, $\det \tilde{H}_\Gamma \neq 0$ であることを示す．$\tilde{H}_\Gamma$ の (i,j) 成分には辺 i, j を含む $T \in B_\Gamma$ の数が現れる．一般に k 辺を含む完全グラフの spanning tree の個数が Moon によって知られている [6]．よって以下がわかる．

補題 4.4. $\tilde{H}_\Gamma = (h_{ij})_{i,j\in E(\Gamma)}$ とすると

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ 4n^{n-4} & \text{if } i \cap j = \emptyset, \\ 3n^{n-4} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$A = \frac{1}{n^{n-4}}\tilde{H}_\Gamma$ とおくと固有値とその重複度は次のようになっている.

補題 4.5. A の固有値は, -2, $-n$, $2n(n-2)$ である. 重複度はそれぞれ $\binom{n}{2} - n$, $n-1$, 1 である.

この補題を使うと $\tilde{H}_\Gamma$ の行列式がわかる.

定理 4.6. $\tilde{H}_\Gamma$ の行列式は

$$(-1)^{\binom{n}{2}-1} 2^{\binom{n}{2}-(n-1)} n^{\binom{n}{2}(n-4)} (n-2)$$

である. よって $\tilde{H}_\Gamma$ は正則行列で, $\tilde{H}_\Gamma$ も正則行列.

頂点数が小さい場合の例は以下の通りである.

例 4.7. $n = 3$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 54.$$

$n = 4$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -4096.$$

$n = 5$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -1875000000.$$

最後に完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性について考える. $n+1 \geq 3, N = \binom{n+1}{2}$ とする. K_{n+1} を $n+1$ 頂点の完全グラフとする. $A_{M(K_{n+1})}$ は

$$A_{M(K_{n+1})} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]/\operatorname{Ann}(F_{K_{n+1}}) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k$$

と斉次分解される. 定理 2.2, 4.6 より次がわかる.

定理 4.8. $L = x_1 + \ldots + x_N$ とする. このとき掛け算写像 $\times L^{n-1} : A_1 \to A_{n-1}$ は全単射である.

これより $n \leq 5$ に対し, $A_{M(K_n)}$ の強レフシェッツ性がわかる.

参考文献

[1] Norman Biggs, *Algebraic graph theory*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1271140

[2] Tadahito Harima, Toshiaki Maeno, Hideaki Morita, Yasuhide Numata, Akihito Wachi, and Junzo Watanabe, *The Lefschetz properties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2080, Springer, Heidelberg, 2013, URL `https://doi.org/10.1007/978-3-642-38206-2`. MR 3112920

[3] Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata, *Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras*, Tropical geometry and integrable systems, Contemp. Math., vol. 580, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 73–84, URL `https://doi.org/10.1090/conm/580/11496`. MR 2985388

[4] ———, *Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids*, J. Commut. Algebra **8** (2016), no. 4, 549–570, URL `https://doi.org/10.1216/JCA-2016-8-4-549`. MR 3566530

[5] Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe, *Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials*, Illinois J. Math. **53** (2009), no. 2, 591–603, URL `http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1266934795`. MR 2594646

[6] J. W. Moon, *Enumerating labelled trees*, Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, London, 1967, pp. 261–272. MR 0231755

[7] James Oxley, *Matroid theory*, second ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Oxford University Press, Oxford, 2011, URL `https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001`. MR 2849819

[8] Junzo Watanabe, *A remark on the Hessian of homogeneous polynomials*, The curves seminar at Queen's, vol. XIII, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., vol. 119, Queen's Univ., Kingston, ON, 2000, pp. 171–178.

[9] Akiko Yazawa, *The Hessians of the complete and complete bipartite graphs and its application to the strong Lefschetz property*, arXiv:1812.07199, URL `https://arxiv.org/abs/1812.07199`.

団代数における前変異と後変異の双対性について

藤原祥吾 Fujiwara Shogo (名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻)

1 概要

団代数は変異関係式によって定まる可換代数のクラスである. 本稿では通常の変異と後変異の間の双対性について紹介する. 後変異とは初期種子を変更した際の, 団変数の初期種子による有理関数表示の変換である. 特に F 多項式の最大次数を並べてできる行列 (F 行列) を考え, F 行列が自己双対を持つことを示した. これは C 行列, G 行列に関する双対性の類似である. 本稿内容は行田康晃氏 (名古屋大学) との共同研究に基づく.

2 前変異と後変異の双対性および F 行列の自己双対性

団代数は Fomin, Zelevinsky 氏らが, リー理論における全正値性や標準基底の問題を解決するために [FZ02] で導入したものである. その後の研究により団代数の代数的・組み合わせ論的性質が, 多面体の三角形分割, 完全 WKB 解析, 箙の表現など様々な分野に現れることが分かっている. あらゆる数学分野に影響を及ぼすため, 団代数の研究は近年盛んに行われている.

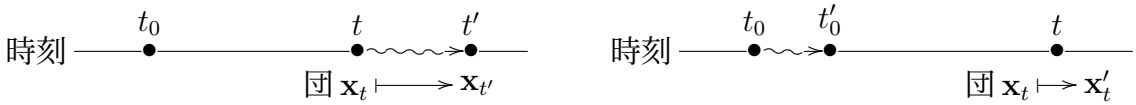
団代数の主眼は種子 (団変数, y 変数, 交換行列の組) と変異の代数的・組み合わせ論的性質を調べることにある. さらに分離公式 ([FZ07, Proposition 3.13, Corollary 6.3]) により, C 行列, G 行列, F 多項式を通して団変数や y 変数の性質や表示を調べることができる. そのため C 行列, G 行列, F 多項式の性質を研究することが主である.

ところで F 多項式は C 行列, G 行列と異なり多項式であるため, 行列特有の操作ができず扱いにくいという点がある. そのため F 多項式の情報の一部を持つ次のような行列を定める.

定義 2.1 ([FG, Definition 2.6])**.** 各 F 多項式 $F_{i;t}^{B;t_0}(y_1,\dots,y_n)$ において, $y_1,\dots,y_n$ の最大次数をそれぞれ, $f_{1i;t}^{B;t_0},\dots,f_{ni;t}^{B;t_0}$ とする. それを並べて得られる列ベクトル $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0}=\begin{bmatrix} f_{1i;t}^{B;t_0} \\ \vdots \\ f_{ni;t}^{B;t_0} \end{bmatrix}$ を **f ベクトル**と呼び, $F_t^{B;t_0}=(\mathbf{f}_{1;t}^{B;t_0},\dots,\mathbf{f}_{n;t}^{B;t_0})$ を F **行列**と呼ぶ.

本稿では C 行列, G 行列, F 行列の前変異関係式と後変異関係式の双対性について述べる.

通常の変異 (前変異) は下図左のように, 初期頂点を固定し, 現在頂点を動かした際に得られる変換である. 一方後変異は下図右のように, 現在頂点を固定し, 初期頂点を動かした際に得られる, 現在頂点における種子の “表示” の変換である. 本稿では変換で定義される前変異, 後変異の具体的な関係式を与え, それらが双対的であることを述べる.



通常の変異 (前変異)　　後変異

まず次の事実がある.

命題 2.2 ([NZ12, (1.13), Proposition 4.2], [FG, Proposition 3.7])**.** C 行列の列符号同一性の仮定の下, 次が成り立つ:

(1) 任意の交換行列 B, および $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ に対し,

$$(G_t^{B;t_0})^T = C_{t_0}^{B_t^T;t}. \tag{2.1}$$

(2) 任意の $t \in \mathbb{T}_n$ に対し,

$$H_t^{B;t_0} = -[-G_t^{B;t_0}]_+. \tag{2.2}$$

(3) 全ての G 行列 $G_t^{B;t_0} (t \in \mathbb{T}_n)$ は行に関して符号同一的である.

(2.1) は C 行列と G 行列の双対性を表す重要な等式である.

さて, 最初に C, G, F 行列の前変異関係式については次で与えられる.

命題 2.3 (C, G, F 行列の前変異関係式 I [FZ07, (5.9), Proposition 6.6], [FG, Proposition 2.9])**.** $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. $\mathbb{T}_n$ の各辺 $t \overset{\ell}{\text{---}} t'$ について, 以下の式が成り立つ.

$$C_{t'}^{B;t_0} = C_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet}) + [-\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} B_t, \tag{2.3}$$

$$G_{t'}^{B;t_0} = G_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\bullet\ell}) - B[\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}, \tag{2.4}$$

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\bullet\ell}) + [\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + [-\varepsilon C_t^{-B;t_0}]_+^{\bullet\ell}. \tag{2.5}$$

さらに C 行列の符号同一性を仮定することで, (2.3), (2.4), (2.5) は, 次のように簡略化できる. (2.6), (2.7) は [NZ12] で既に与えられたものである.

命題 2.4 (C, G, F 行列の前変異関係式 II [FG, Proposition 2.12, 2.13])**.** $\mathbb{T}_n$ の各辺 $t \overset{\ell}{\text{---}} t'$ について, 以下の式が成り立つ.

$$C_{t'}^{B;t_0} = C_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0})B_t]_+^{\ell\bullet}), \tag{2.6}$$

$$G_{t'}^{B;t_0} = G_t^{B;t_0}(J_\ell + [-\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0})B_t]_+^{\bullet\ell}), \tag{2.7}$$

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{-\varepsilon B;t_0})(\varepsilon B_t)]_+^{\bullet\ell}) + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{-\varepsilon B;t_0})C_t^{\varepsilon B;t_0}]_+^{\bullet\ell}. \tag{2.8}$$

ただし (2.8) において, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ である.

一方, 一般に C, G, F 行列の後変異関係式は次で定まる.

命題 2.5 (C, G, F 行列の後変異関係式 I)**.** 辺 $t_0 \overset{k}{—} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet})C_t^{B;t_0} + H_t^{B;t_0}(\varepsilon)^{k\bullet}B_t, \tag{2.9}$$
$$G_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{\bullet k})G_t^{B;t_0} - BH_t^{B;t_0}(\varepsilon)^{k\bullet}, \tag{2.10}$$
$$F_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet})F_t^{B;t_0} + (\varepsilon G_t^{B;t_0})^{k\bullet} - H_t^{B;t_0}(\varepsilon)^{k\bullet} - H_t^{-B;t_0}(\varepsilon)^{k\bullet}. \tag{2.11}$$

ただし $H_t^{B;t_0}(+) = H_t^{B;t_0}, H_t^{B;t_0}(-) = H_t^{B_1;t_1}, H_t^{-B;t_0}(+) = H_t^{-B;t_0}, H_t^{-B;t_0}(-) = H_t^{-B_1;t_1}$ である.

命題 2.5 に (2.2) を適用することで, 次を得る:

命題 2.6 (C, G, F 行列の後変異関係式 II)**.** 辺 $t_0 \overset{k}{—} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet})C_t^{B;t_0} - [-\varepsilon G_t^{B;t_0}]^{k\bullet}B_t, \tag{2.12}$$
$$G_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{\bullet k})G_t^{B;t_0} + B[-\varepsilon G_t^{B;t_0}]^{k\bullet}, \tag{2.13}$$
$$F_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet})F_t^{B;t_0} + [\varepsilon G_t^{B;t_0}]^{k\bullet} + [-\varepsilon G_t^{-B;t_0}]^{k\bullet}. \tag{2.14}$$

ここで命題 2.3, 命題 2.6 を比べよう. (2.1) を通して (2.3) と (2.13), (2.4) と (2.12), (2.5) と (2.14) がそれぞれ双対的な式になっていることが分かる.

さらに, 命題 2.2 (3) を用いて, 命題 2.6 の式を簡略化できる:

命題 2.7 (C, G, F 行列の後変異関係式 III)**.** 辺 $t_0 \overset{k}{—} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_k + [-\varepsilon_{k\bullet}(G_t^{B;t_0})B]_+^{k\bullet})C_t^{B;t_0}, \tag{2.15}$$
$$G_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon_{k\bullet}(G_t^{B;t_0})B]_+^{\bullet k})G_t^{B;t_0}, \tag{2.16}$$
$$F_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon_{k\bullet}(G_t^{-\varepsilon B})(\varepsilon B)]_+^{k\bullet})F_t^{B;t_0} + [\varepsilon_{k\bullet}(G_t^{-\varepsilon B})G_t^{\varepsilon B;t_0}]^{k\bullet}. \tag{2.17}$$

ただし (2.17) において, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ である.

先ほどと同じように命題 2.4, 命題 2.7 を見比べる. (2.1) を通して (2.6) と (2.16), (2.7) と (2.15), (2.8) と (2.17) がそれぞれ双対的な式になっていることが分かる. 以上が本稿の題目となっていた前変異と後変異の双対性である.

最後に (2.1) の類似である, F 行列の自己双対性を述べる. これが本稿における主結果である.

定理 2.8 ([FG, Theorem 3.10])**.** 任意の交換行列 B, および $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ に対し, 次が成り立つ:

$$(F_t^{B;t_0})^T = F_{t_0}^{B_t^T;t}. \tag{2.18}$$

参考文献

[FG] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between front and rear mutations in cluster algebras.* preprint, arXiv:1808.02156.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.

[FZ07] ———, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.

[NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226.

$SL(4,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群のクレパント特異点解消と G-ヒルベルトスキームについて

佐藤　悠介 (Yusuke SATO)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻

1　問題と背景

G を $SL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とすると，その商 $\mathbb{C}^n/G$ は特異点を持つ．このとき $\mathbb{C}^n/G$ はいつクレパント特異点解消を持つか，という問題について考える．
クレパント特異点解消とは特異点解消のうち次の” 良い” 性質を持ったものである．

定義 1.1. X を特異点を持つ正規な代数多様体としたとき射 $f : Y \to X$ が特異点解消であり標準因子 K_X がカルティエ因子になっていると仮定する．このとき，特異点解消 $f : Y \to X$ に対して $K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i$ が成り立つ．ここで a_i はディスクレパンシーと呼ばれる有理数であり，D_i は例外因子である．このとき全ての i において $a_i = 0$ が成り立つとき f を**クレパント特異点解消**という．

さて $\mathbb{C}^n/G$ はいつクレパント特異点解消を持つかという問題に関して，n が 2 と 3 の場合については解決されている．特に $n = 2$ のとき $SL(2,\mathbb{C})$ の任意の小型の有限アーベル部分群による商 $\mathbb{C}^2/G$ は超曲面になり，ADE 特異点やクライン特異点と呼ばれる孤立特異点を持つ．これらの曲面は代数幾何学の分野ではよく知られた研究対象であり，極小特異点解消を持つことが知られている．このとき極小特異点解消がクレパント特異点解消と一致する．また，極小特異点解消は同型を除いて一意に定まる．
次にその高次元版として $n = 3$ のとき，$\mathbb{C}^3/G$ はクレパント特異点解消を持つことが Roan, Markushevich，伊藤によって証明された ([Ito])．このとき一般に $\mathbb{C}^3/G$ はクレパント特異点解消を複数持つ場合がある．
しかし $n \geq 4$ のとき，$\mathbb{C}^n/G$ は一般にクレパント特異点解消を持つとは限らない．またいつクレパント特異点解消を持つかという判定法も見つかっておらず，クレパント特異点解消の構成の具体例は少ししか知られていない．
本稿では $SL(4,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群に対して $\mathbb{C}^4/G$ がクレパント特異点解消を持つ例を紹介する．

主結果 1. (S)
$G \subset SL(4,\mathbb{C})$ が 2 つの $SL(2,\mathbb{C})$ の巡回群 C_m, C_n(位数はそれぞれ m, n とする) で生成される場合について考える．つまり，$G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ という場合を考える．このとき，m と n が互いに素ならば $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持つ．そうでないとき，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．

次に G-ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ と $\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消の関係についてこれまでに知られている結果を紹介する．$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群のマッカ

イ対応を説明するために伊藤-中村 [IN] によって導入されたものであり，G-ヒルベルトスキームの定義は以下で与えられる．

定義 1.2. $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対して，G-ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ を以下のように定義する．

$$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n) := \{I \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \mid I : G - \text{不変イデアル}, \dim(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I) = |G|\}$$

$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ とクレパント特異点解消の関係については以下の事実が知られている．
$n=2$ のとき，$GL(2,\mathbb{C})$ の任意の小型の有限部分群 G に対して $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ は $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消である（したがって $SL(2,\mathbb{C})$ においてクレパント特異点解消である）．さらに $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ のとき，$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ が $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント特異点解消の一つを与えることが G が可換な場合は中村 [Nakamura] に，一般の場合は Bridgeland-King-Reid[BKR] によって証明された．
しかし，高次元の場合は同様の結果は得られず，$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ はクレパント特異点解消になるとは限らない．実際 G が $SL(4,\mathbb{C})$ の有限部分群のときには $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ がクレパント特異点解消にならない例がよく知られている (例 $G = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$)．また，Craw[Craw] によって $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が $\mathbb{C}^4/G$ のある特定のクレパント特異点解消をブローアップして得られるものになる例が与えられた．これまで知られている $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ と $\mathbb{C}^n/G$ の関係をまとめると以下のようになる．

	$SL(n,\mathbb{C})$	$GL(n,\mathbb{C})$
n=2	極小特異点解消 （伊藤-中村）	（木藤，石井）
n=3	クレパント特異点解消 (中村, Bridgeland-King-Reid)	一般に特異点解消とは限らない 例:$G = \frac{1}{4}(1,2,3)$
n=4	一般にクレパント特異点解消とは限らない terminal になる例 :$G = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ クレパント特異点解消の blow-up になる例 $G =< \frac{1}{2}(1,0,0,1), \frac{1}{2}(0,1,0,1), \frac{1}{2}(0,0,1,1) >$	分かっていない

表 1 ：$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ と $\mathbb{C}^n/G$ のこれまでに知られている関係

本稿では次の 4 次元の $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例を紹介する．

主結果 2. *(S)*
m を正の整数とする．このとき群 $G = (C_{2m}, C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m \geq 2$ のとき $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

2 トーリック多様体の準備

この章では錐，アフィントーリック多様体，扇, トーリック多様体の順に定義と特異点解消に関わる性質を説明する．性質については [Fulton] や [小田] から引用した．トーリッ

ク多様体の性質として重要な性質は，トーリック多様体の圏と扇の圏が同値であることである．この性質によってトーリック多様体の様々な性質を扇の言葉を用いて表すことができる．トーリック多様体のメリットは特異点解消を対応する扇の細分によって考えることができることである．
まず初めに $\mathbb{C}^n/G$ をトーリック多様体として構成しよう．G を位数 r の $GL(n,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群とする．このとき，G の元は対角行列として表すことができるので $g \in G$ に対してある整数 $0 \leq a_i \leq r (i = 1, \ldots, n)$ が存在して $g = \mathrm{diag}(\varepsilon^{a_1}, \ldots, \varepsilon^{a_n})$ と書ける．ただし ε は 1 の原始 r 乗根とする．また，このとき g を $g = \frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_n)$ と書き，g で生成される巡回群 G を $G = \frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_n)$ と表す．また $g \in G$ に対して ϕ を $\phi(g) = \frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．$\phi(G)$ の元を $\bar{g}$ と書くことにする．

- $N := \mathbb{Z}^n + \sum_{\bar{g} \in \phi(G)} \mathbb{Z}\bar{g}$: 階数 n の自由 $\mathbb{Z}$-加群,
- $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$:$N$ の双対 $\mathbb{Z}$-加群,
- σ:$N_{\mathbb{R}}$ の第一象限,

と定義する．ここで $G \cong N/\overline{N}$ であることに注意しておく．

有理強凸多面錐 σ に対して $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ と定義する．このとき S_σ は有限生成の加法半群である ([小田, Proposition 1．1] を参照)．この S_σ に対して群環 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ を次のように定義する．各 $u \in S_\sigma$ に対し X^u を対応させ，$\{X^u \mid u \in S_\sigma\}$ を $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底とする．また $\mathbb{C}[S_\sigma]$ の積は S_σ での和と定義する．

定義 2.1. アフィントーリック多様体
有理強凸多面錐 σ に対して，対応するアフィントーリック多様体を $U_\sigma = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[S_\sigma]$ で表す．

別の言い方をすれば，$\mathbb{C}[S_\sigma]$ を座標環とするアフィン代数多様体をアフィントーリック多様体という．

命題 2.2. ([Fulton], §2.2 を参照)
上記の設定で，アフィントーリック多様体 U_σ は $\mathbb{C}^n/G$ に同型である．

扇（錐）が非特異であることは，対応するトーリック多様体（アフィントーリック多様体）が非特異であることと同値である．また，扇の細分はトーリック多様体のブローアップに対応する．次にクレパント特異点解消を扇の言葉で定義する．

定義 2.3. age の定義
群 G の元 $g = \frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_n)$ に対して $age(g) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^n a_i$ と定義する．

N の格子点に対しても同様に age を定めることができる．つまり $v = (b_1, \ldots, b_n) \in N$ に対して $age(v) = \sum_{i=1}^n b_i$ である．当然ながら標準基底 e_i の age は 1 である．また，G が $SL(n,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群ならば $age(g)$ は必ず整数になる．

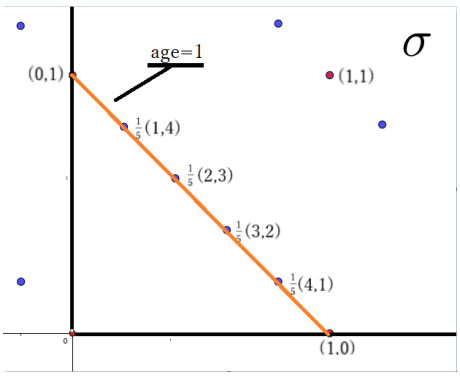


図 1: ($n = 2$ のときの age が 1 の格子点)

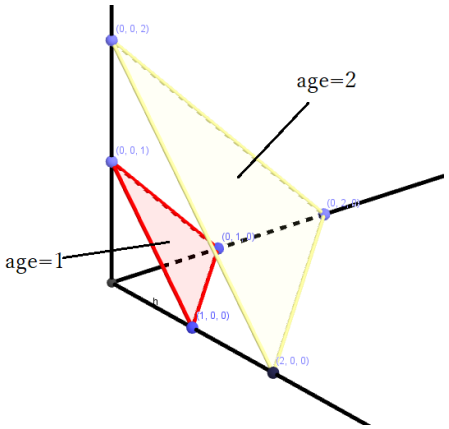


図 2: ($n = 3$ の場合)

定義 2.4. トーリック多様体のクレパント特異点解消
前述の方法で定義した σ を age が 1 となる格子点のみを用いて扇 Δ に細分する．もし Δ に対応するトーリック多様体 Y が非特異であるならば，Y は $\mathbb{C}^n/G$ のクレパント特異点解消である．

図 1 および図 2 に示すように age が 1 の格子点は単体上にある．つまり $n = 2$ ならば age が 1 の格子点は同一線分上に在り，$n = 3$ ならば三角形上に在る．したがって本論文で主に扱う $\mathbb{C}^4/G$ の場合では age が 1 の格子点は正四面体上にある．つまり，$\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消を考えるにあたっては正四面体の分割を考え，それによって得られた各錐が非特異であることを確かめればよい．

例 2.5. $n = 2$ のとき商特異点のクレパント特異点解消の具体例を説明する．図 3 に示されているものが $G = \frac{1}{5}(1, 4)$ の場合の $\mathbb{C}^2/G$ に対応する錐であり，これらを図 4 のような扇に細分することによって $\mathbb{C}^2/G$ のクレパント特異点解消を与えることができる．この細分は図 4 に示されているように age が 1 の格子点を用いた細分であり各錐が非特異であることもわかる．

3 主結果

この章では $G \subset SL(4, \mathbb{C})$ が 2 つの $SL(2, \mathbb{C})$ の巡回群 C_m, C_n(位数はそれぞれ m, n とする) で生成される場合について考える．つまり，$G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ という場合を考える．以下，この群を $G = (C_m, C_n)$ と表すことにする．
群 G の位数は m と n の最小公倍数になる．この群 G に関して以下の二つが成り立つ．

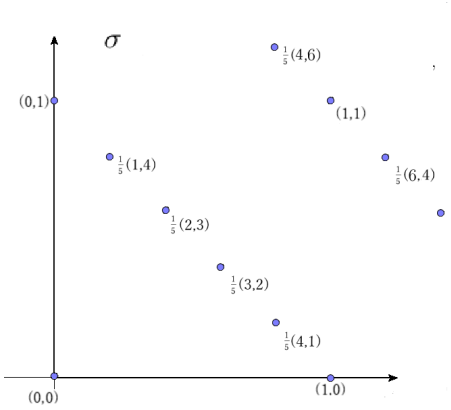


図 3: $\mathbb{C}^2/G$ に対応する錐

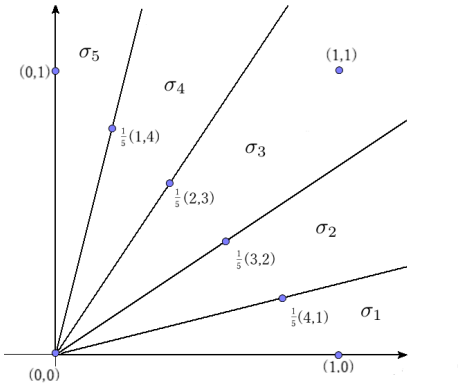


図 4: $\mathbb{C}^2/G$ のクレパント特異点解消を与える扇

定理 3.1. (S)
$G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >\subseteq SL(4,\mathbb{C})$ とする．このとき，m と n が互いに素ならば $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持つ．そうでないとき，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．

定理 3.2. (S)
m を正の整数とする．このとき群 $G = (C_{2m}, C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m \geq 2$ のとき $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

$G = (C_m, C_n)$ というタイプの群は $age(g) = 2$ となる元で生成される群である．また $m = n$ のときは群 G のすべての元の age が 2 となるため $\mathbb{C}^4/G$ は端末特異点を持つ．したがってこの場合のとき $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．
また，$m \neq n$ のとき（特に $m > n$ とする）は群 G の生成元を g とすると，n は群 G の位数 r の約数であるから，$g^{\frac{r}{n}}$ は C_n の部分が単位元になる．つまり $g^{\frac{r}{n}} = \frac{1}{r}(x, r-x, 0, 0,)$ という形になるため，この元の age は 1 になる．したがって $m \neq n$ のときは $\mathbb{C}^4/G$ の特異点は端末特異点ではない．

3.1 主結果 1 について

$l = LCM(m,n)$ とすると G は位数 l の巡回群である．また群 $G < \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ は $G = \frac{1}{l}(\frac{l}{m}, -\frac{l}{m}, \frac{l}{n}, -\frac{l}{n})$ と表せる．
このとき群 G 由来の格子点で，age が 1 になる格子点は $v_i = \frac{1}{l}(ni, l-ni, 0, 0), u_j = \frac{1}{l}(0, 0, mj, l-mj)$ という 2 種類ある．ただし $i = 1, \ldots, \frac{l}{n}-1, j = 1, \ldots, \frac{l}{m}-1$ である．これらの点は図に示すように $(1,0,0,0)$ と $(0,1,0,0)$ を結ぶ線分上及び $(0,0,1,0)$ と $(0,0,0,1)$ を結ぶ線分上にある．

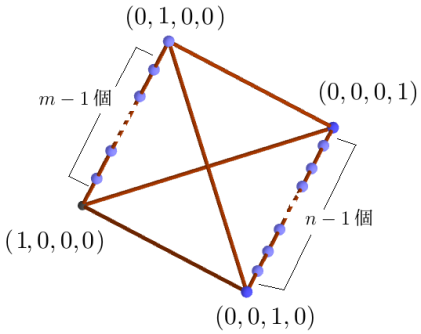


図 5: age が 1 の格子点の様子

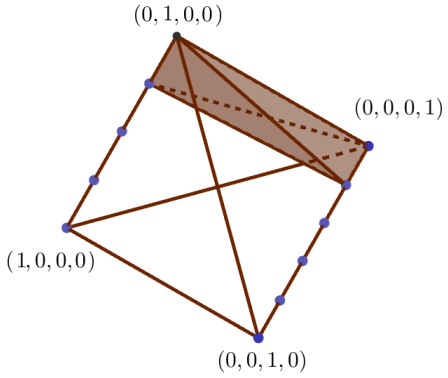


図 6: $m = 5, n = 4$ の場合の σ_{11} の age $= 1$ の断面図

これらの点を用いた次のような細分を考える．細分によって得られる扇 Δ が

$$|\Delta| = \bigcup_{1 \leq i \leq \frac{l}{n}, 1 \leq j \leq \frac{l}{m}} \sigma_{ij}$$

を満たすように細分する．ここで $\sigma_{ij} = \mathrm{Cone}(v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j)$ と定義する．ただし $v_0 = (0, 1, 0, 0), v_{\frac{l}{n}} = (1, 0, 0, 0), u_0 = (0, 0, 0, 1), u_{\frac{l}{m}} = (0, 0, 1, 0)$ である．

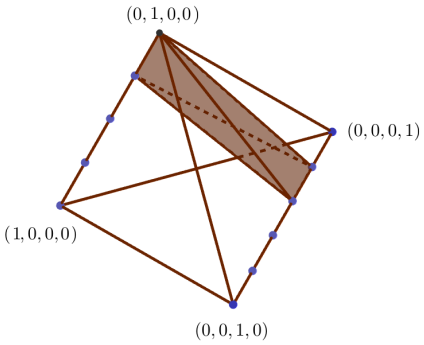


図 7: σ_{12} の $age = 1$ での断面図

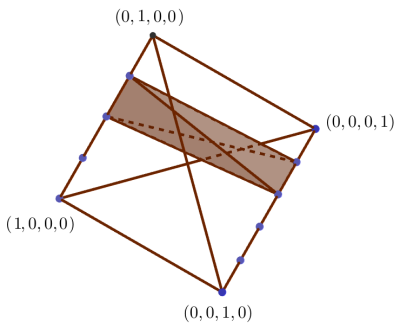


図 8: σ_{22} の $age = 1$ での断面図

この扇 Δ の最大次元の錐の個数は m と n の最大公約数を d とすると，$\frac{l}{m} \times \frac{l}{n} = \frac{l}{d}$ で与えられる．群 G の位数は l であるため $d > 1$ のとき，オイラー数が群の位数と一致しないためこの細分による扇 Δ に対応するトーリック多様体は $\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消にならず，age が 1 の格子点のみを用いた細分は Δ しかないことから $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．一方 $d = 1$ のとき，つまり m と n が互いに素のとき上記で与えられた σ_{ij} が非特異である．このことを以下に示す．
$\sigma_{ij} = \mathrm{Cone}(v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j)$ において $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ が $N = \mathbb{Z}^4 + \sum_{g \in G} \bar{g}\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$-基底

であることを示せばよい．なお $l = mn$ であることに注意する．
$v_i - v_{i-1} = \frac{1}{mn}(n, -n, 0, 0)$ および $u_j - u_{j-1} = \frac{1}{mn}(0, 0, m, -m,)$ が成り立つから，$v_i - v_{i-1} + u_j - u_{j-1} = \frac{1}{mn}(n, -n, m, -m)$ を得る．m と n が互いに素であることから，$G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >=< \frac{1}{mn}(n, -n, m, -m) >$ となる．したがって $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ は N の元のうち $\sum_{g \in G} \bar{g}\mathbb{Z}$ と表せる元の生成系になっている．残りは $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ の 4 点が $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ で表せることを示せば良い．$(1,0,0,0)$ の場合を示す．ある実数 a, b が存在し $av_i + bv_{i+1} = (1,0,0,0)$ であるとすると，

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{m} & \frac{i-1}{m} \\ 1 - \frac{i}{m} & 1 - \frac{i-1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

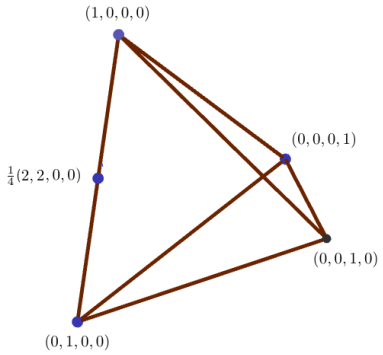
が成り立ち，$\det \begin{pmatrix} \frac{i}{m} & \frac{i-1}{m} \\ 1 - \frac{i}{m} & 1 - \frac{i-1}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}$ であることから a, b は整数になる．したがってある整数 a, b で $av_i + bv_{i+1} = (1,0,0,0)$ と表せる．残りの点の場合も同様である．$v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ が一次独立であることは v_{i-1}, v_i が一次独立であり，u_{j-1}, u_j もまた一次独立であることからわかる．よって $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ は N の $\mathbb{Z}$-基底になっている．つまり σ_{ij} は非特異である．
したがって $G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ のとき $\mathbb{C}^4/G$ がクレパント特異点解消を持つための必要十分条件は m と n が互いに素であることである

3.2 $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例

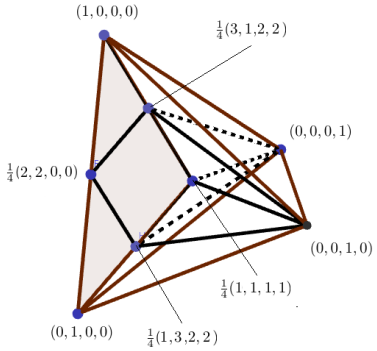
次に，この節では $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例を説明する．G が $SL(n, \mathbb{C})$ の有限アーベル部分群に対して $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例はこれまで知られていなかった例である．また，以下の群において $\mathbb{C}^4/G$ 自身は標準特異点を持つが $m \neq 1$ のときそれらは端末特異点ではないことに注意する．

定理 3.3. (S) m を正の整数とする．このとき群 $G = (C_{2m}, C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m \geq 4$ のとき $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

例として $m = 4$ のとき，つまり $G = \frac{1}{4}(1,3,2,2)$ について詳しく紹介する．このとき格子点集合 N のうち age が 1 になる格子点は図に示すような 5 つの点のみである．一方 $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ に対応する扇は計 10 個の錐からなり，生成元として $\frac{1}{4}(3,1,2,2), \frac{1}{4}(1,1,1,1), \frac{1}{4}(1,3,2,2)$ という age が 2 の N の格子点や，N 以外の点を新たに付け加える必要がある．



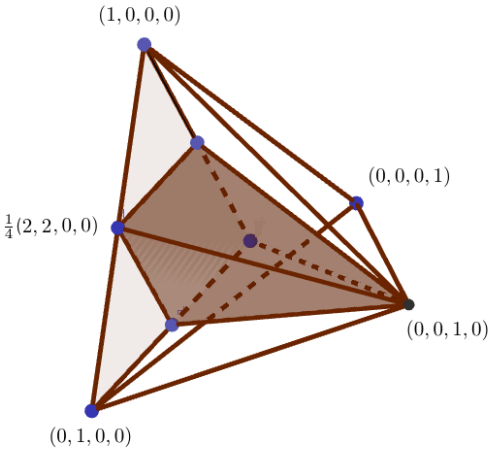
age(g)=1 の格子点

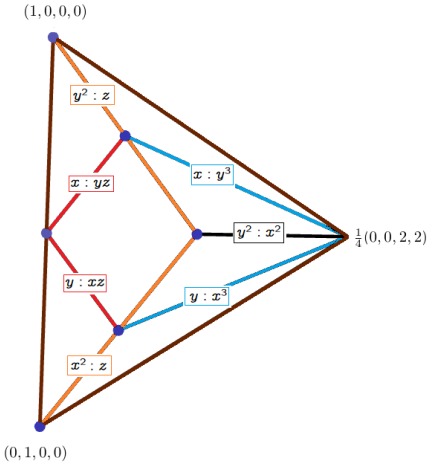


$\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$

以下の図に示す四角錐が $I_1 = (x^2, y^2, z^2, w, xy, yz, zx)$ から定まる錐である．さらにこの四角錐の反対側に同様の錐として $I_2 = (x^2, y^2, z, w^2, xy, yw, wx)$ から定まる四角錐が存在する．これらの座標環はともに $\mathbb{C}[\frac{x^2}{z}, \frac{y^2}{z}, \frac{xz}{y}, \frac{yz}{x}, \frac{w}{z}] \cong \mathbb{C}[XYZWV]/(XW - YZ)$ と表すことができる．

最後の図は各細分に付随する単項式の比を表したものである．





参考文献

[BKR] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid, The Mckay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. 14(2001), no.3, 535-554.

[Craw] A. Craw, Quiver representations in toric geometry, arXiv:0807:2191

[D.H.Z.] D. I. Dais, M. Henk, and G. M. Ziegler, On the existence of crepant resolutions of Gorenstein abelian quotient singularities in dimensions ≥ 4, Contemp. Math., 423, (2006), 124-204, Amer. Math. Soc.,Providence .

[Fulton] W. Fulton, Introduction to Toric Varieties, Princeton University Press, 1993.

[HIS] T. Hayashi, Y. Ito, Y. Sekiya, Existence of crepant resolutions, Advanced Study in Pure Mathematics, vol.74 (2017), 185-202.

[IN] Y. Ito, I. Nakamura, Mckay correspondence and Hilbert schemes, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 72(1996), no.7, 135-148

[Ito] Y. Ito, *The McKay correspondence - A bridge from algebra to geometry*, Algebraic Geometry in European women in mathematics(Malta, 2001), pp. 127-147, World Scientific Publ., River Edge, NJ(2003).

[Nakamura] I. Nakamura, Hilbert schemes of abelian group orbits, J. Algebraic Geom. , 10,(2001), 757 -759.

[小田] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店, 1977.

[Reid] M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985(Brunswick, Maline, 1985), 345-414, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[K.Sato] K. Sato, Existence of crepant resolution for abelian quotient singularities by order p elements in dimension 4, Saitama Math. J. ,Vol. 27(2010),9-23

一般化された Kummer 4-fold のネフ錐について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
森　章 (Akira Mori)*

概要

吉岡氏は [Yo2] においてネフ錐とムーバブル錐の格子論的記述を与えた. 本講演ではピカール数が 1 のアーベル曲面に付随した一般化された Kummer 4-fold の各錐に対して, より具体的な記述を与えれることを紹介する.

1　導入

標準束が自明な高次元代数多様体は分類理論において重要なクラスである. Bogomolv の分解定理によれば, そのような多様体は複素トーラス, カラビ-ヤウ多様体, そして既約シンプレクティック多様体の 3 つのクラスから構成される. ここでは 3 つ目の既約シンプレクティック多様体に焦点を当てる.

$\mathbb{Q}$-分解的な正規代数多様体 X に対して, 一般的に

$$\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{Mov}(X)$$

がいえる. ここで左から順に X のアンプル錐, ネフ錐, そしてムーバブル錐である. 上記のそれぞれの錐は次の X 上の因子 D で生成される錐である. アンプル : D は正整数倍 nD が射影空間への埋め込みを与える, ネフ : 任意の既約曲線 C に対して $(D \cdot C) \geq 0$, ムーバブル : 線形系 $|D|$ の固定点集合の余次元が 2 以上. X が 2 次元であるときには, X 上の因子がムーバブルであることと, ネフであることは同値となる. しかし X の次元が 3 以上のときは一般になりたたない, つまりネフ錐とムーバブル錐が一致しない場合がある. これは部屋分解やフリップを考える動機になるため, 極小モデル理論において興味深いところである [川又]. ここで与える, 以下定義する一般化された Kummer 4-fold の錐の具体的記述では, 錐の境界が一致するかどうか明確になる.

本講演で現れるスキーム, 代数多様体は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものとする. アーベル曲面 A に対して, Beauville は次元が $2(l-1)$ の既約シンプレクティック多様体の一種である $\mathrm{Km}^{l-1}(A)$ $(l \leq 2)$ を構成した [Be]. それは A 上の l 点のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^l(A)$ のアルバネーゼ射 $\mathrm{Hilb}^l(A) \to S^l(A) \to A$ のファイバーである. ここで $S^l(A)$ は l 次対称積である.

定義 1. $\mathrm{Km}^{l-1}(A)$ $(l \leq 3)$ を一般化された Kummer 多様体という. $l = 2$ のときは A の Kummer $K3$ 曲面である.

* akrmori@math.kobe-u.ac.jp

既約シンプレクティック多様体 M に対して, $H^2(M,\mathbb{Z})$, したがってネロン-ゼベリ群 $\mathrm{NS}(M)$ は双線形形式である Beauville-Bogomolov 形式をもつ [Be]. A をピカール数が 1 のアーベル曲面とする. H を $\mathrm{NS}(A)$ の ample generator とし, $H^2/2 = n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $\mathrm{NS}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ $(l \geq 3)$ は

$$\mathrm{NS}(\mathrm{Km}^{l-1}(A)) \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\delta$$

と記述でき, Beauville-Bogomolov 双線形形式は

$$h^2 = 2n,\ \delta^2 = -2l,\ (h,\delta) = 0$$

をみたす. ここで h は $S^l(A)$ のアンプル因子の $\mathrm{Km}^{l-1}(A) \to S^l(A)$ による引き戻しである [Yo2].

2 向井ベクトル

A をアーベル曲面とする. $\langle\ ,\ \rangle$ を代数的コホモロジー群 $H^*(A,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := \mathbb{Z}\oplus\mathrm{NS}(A)\oplus\mathbb{Z}$ 上の向井ペアリングとする, つまり $x = (x_0,x_1,x_2), x' = (x_0',x_1',x_2')$ に対して, $\langle x,x'\rangle = x_1x_1' - x_0x_2' - x_2x_0'$. これにより, $H^*(A,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ には格子の構造が入る. $x^2 := \langle x,x\rangle$ とかく. $E \in \mathrm{Coh}(A)$ に対して, $v(E) = \mathrm{ch}(E) \in H^*(A,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ を E の向井ベクトルという.

定義 2. 向井ベクトル $v = (r,\xi,a) \in H^*(A,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ が

(1) 原始的とは $\gcd(r,\xi,a) = 1$ となるときをいう.
(2) 等方的とは $v^2 = 0$ となるときをいう.

A をピカール数が 1 のアーベル曲面とする. H を $\mathrm{NS}(A)$ の ample generator とし, $H^2/2 = n \in \mathbb{N}$ とする. さらに $v = (1,0,-l) \in H^*(A,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ とする. このとき

$$v^\perp = \mathbb{Z}(0,H,0) \oplus \mathbb{Z}(1,0,l)$$

であり, isometry

$$\begin{array}{rccc} \theta_v : & v^\perp & \to & \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\delta \\ & (0,H,0) & \mapsto & h \\ & (1,0,l) & \mapsto & \delta \end{array}$$

を得る. これにより, $\mathrm{NS}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ と $v^\perp$ を同一視する. $h = (0,H,0),\ \delta = (1,0,l)$ とする. このとき, $\mathrm{NS}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ は $h\delta$-平面で記述できることになる.

3 錐の記述

[Yo2] における, $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ と $\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ の記述を述べる. Γ を次の不等式をみたす向井ベクトル u の集合とする:

$$\langle u, v-u\rangle > 0,\ u^2 \geq 0,\ \langle (v-u)^2\rangle \geq 0,\ \langle v,u\rangle^2 > v^2u^2.$$

$P^+ := \{x \in v^\perp \mid x^2 > 0, \langle x,h\rangle > 0\}$ とおく. $P^+ \setminus \cup_{u\in\Gamma} u^\perp$ の連結成分 $\mathcal{C}$ で, $h - \varepsilon\delta$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ を含むものは $\mathrm{Km}^{l-1}(A)$ のアンプル錐 $\mathrm{Amp}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ となる.

$$\Gamma_m := \{u \in \Gamma \mid u^2 = 0,\ \langle u,v\rangle = 1 \text{ or } 2\}$$

に対して, $\mathcal{C}'$ を $P^+ \setminus \cup_{u\in\Gamma_m} u^\perp$ の連結成分で $\mathcal{C}$ を含むものとする. このとき,

$$\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^{l-1}(A)) = \overline{\mathcal{C}},\ \mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^{l-1}(A)) = \overline{\mathcal{C}'}.$$

を得る. よって, それぞれの錐の境界は $u^\perp$ で張られることがわかった.

4 錐の計算

ここでは, 主結果について述べる. 特に断わらない限り, 第 2, 3 節と同様の記号を用いる.

まず, 次の補題より $\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^2(A))$ の境界は等方的ベクトル $u \in \Gamma$ によって定まることを主張する.

補題 3. $v = (1, 0, -l), l \leq 4$ とする. このとき $u \in \Gamma$ は次の条件の内一つをみたす:

(1) $u^2 = 0$ かつ $0 < \langle u, v\rangle \leq l$.
(2) $(v-u)^2 = 0$ かつ $0 < \langle v-u, v\rangle \leq l$.

さて, ここからは $l = 3$ とする, つまり $v = (1, 0, -3)$ とする. $u \in \Gamma$ とする. 補題 3 から u が等方的かつ $\langle u, v\rangle = 1, 2, 3$ をみたすことがわかる. 適当な $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $u - \lambda v \in v^\perp \otimes \mathbb{R}$ と仮定すると, $\lambda = \langle u, v\rangle/6$ を得る. したがって, u は次のように表すことができる:

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{6} v + xh + y\delta, \quad x, y \in \mathbb{Q}.$$

$\frac{6}{\langle u,v\rangle} u - v \in v^\perp \cap H^*(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ であるから,

$$\frac{6}{\langle u, v\rangle} u = v + Xh + Y\delta, \quad X, Y \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

を得る. u が等方的であることから, (X, Y) は

$$\gcd(Y + 1, X, 6) = 2, 3, 6 \tag{4.2}$$

をみたし, 次の Pell 方程式といわれる二次不定方程式の解となる:

$$3Y^2 - nX^2 = 3. \tag{4.3}$$

逆に (4.2) をみたす方程式 (4.3) の解は, (4.1) をみたす原始的で等方的な向井ベクトル u を得る. また等方的向井ベクトル u に対して, $u^\perp \subset P^+$ は $\mathbb{R}_{>0}(h - \frac{nX}{3Y}\delta)$ で与えられる.

ここで Pell 方程式について成立することを復習する. (4.3) について, もし $\sqrt{n/3} \notin \mathbb{Q}$ であるならば, (X_1, Y_1) $(X_1, Y_1 > 0)$ を (4.3) の基本解とする, つまり (4.3) の解 (X, Y) で $X, Y > 0$ をみたすもののうち X が最少となるものである. (X_k, Y_k) $(k \geq 1)$ を

$$Y_k + \sqrt{n/3} X_k = (Y_1 + \sqrt{n/3} X_1)^k$$

によって定める. $(X_0, Y_0) := (0, 1)$ とする. このとき X_k, Y_k は (4.3) をみたす正整数で, $\{(\pm X_k, \pm Y_k) \mid k \geq 0\}$ は全解の集合となる.

さて, 次の補題は (4.3) が無限個の解をもつならば, 境界の傾きは単調に収束することを示す.

補題 4. $\sqrt{n/3} \notin \mathbb{Q}$ とする. このとき

$$0 = \frac{X_0}{Y_0} < \frac{X_1}{Y_1} < \frac{X_2}{Y_2} < \frac{X_3}{Y_3} < \cdots, \ \lim_{k\to\infty} \frac{X_k}{Y_k} = \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

よって, 各錐の境界を求める (つまり $u^{\perp}$ を求める) ためには Pell 方程式 (4.3) の最少解に注目すればよいことがわかった. n の値と (4.3) の解で場合分けをすることにより, 次の定理を得る.

定理 5. ([Mo]) $\mathrm{Km}^2(A)$ のムーバブル錐 $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^2(A))$ とネフ錐 $\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^2(A))$ は Pell 方程式 (4.3) の解と n の値によって, 次のように特徴付けされる :

type of n		type of (X_1, Y_1)			$\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^2(A))$	$\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^2(A))$
$3 \nmid n$		$3 \mid X_1$			$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$
$n = 3m$	m is not square	$3 \mid X_1$			$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$
		$3 \nmid X_1$	X_1 even	$3 \mid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$
				$3 \nmid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_3}{3Y_3}\delta)$
			X_1 odd	$3 \mid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$
				$3 \nmid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_3}{3Y_3}\delta)$
	m is square				$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{3}}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{3}}\delta)$

この定理とその証明より次の系を得る:

系 6. もし $3 \nmid n$ か $n \equiv 3 \mod 9$ ならば, $\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^2(A)) = \mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^2(A))$.

系 7. $\sqrt{3n} \notin \mathbb{Q}$ を仮定する. 次の場合, $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^2(A))$ の境界はヒルベルト-チャウ収縮により与えられる:

1. $2 \mid X_1$.
2. $3 \mid n$, $X_1 \equiv \pm 1 \mod 6$ and $3 \mid Y_1$.

$l = 3$ のときと同様の議論を用いることにより, 一般化された Kummer 多様体のムーバブル錐 $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^{l-1}(A))$ も求めることができる.

定理 8. 1. $\sqrt{ln} \notin \mathbb{Q}$ と仮定する. u を $\mathrm{Km}^{l-1}(A)$ のムーバブル錐の境界を定める向井ベクトルとする.

(1) $Y = Y_1$ か $Y = -Y_1$ に対して $l \mid Y + 1$ とする. $Y = Y_1$ or $Y = -Y_1$ に従って $X = X_1$ もしくは $X = -X_1$ とおく. このとき, もし

$\gcd(\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}, Y - 1) = 1$ ならば, $u = (\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}H, Y - 1)$ に対して $\langle u, v\rangle = 2$.

$\gcd(\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}, Y - 1) = 2$ ならば, $u = (\frac{Y+1}{2l}, \frac{X}{2l}H, \frac{Y-1}{2})$ に対して $\langle u, v\rangle = 1$.

(2) $l \nmid (Y_1 \pm 1)$ とする. このとき $u = -(nZ_1^2, Z_1Y_1H, Y_1^2)$ に対して $\langle u, v\rangle = 1$.

2. $\sqrt{ln} \in \mathbb{Q}$ と仮定する. このとき $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^{l-1}(A)) = \mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{l}}\delta)$.

注意 9. 一般化された Kummer 多様体のムーバブル錐の境界を求められたのは, 境界を定める向井ベクトルが等方的になるからである. しかし, ネフ錐の境界を定める向井ベクトル u が等方的になるかどうかは一般的に非自明である. 今回の場合では, $l = 3$ とし, 補題 3 を用いることにより u を等方的な向井ベクトルとすることができた. 補題 3 より $l = 4$ についても $l = 3$ のときと同様の方法で $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^3(A))$ と $\mathrm{Nef}(\mathrm{Km}^3(A))$ を求めることができる. 一般の場合は, u が等方的であるという条件の代わりになるものを見つけなければ同様の記述を得れないと思われる.

注意 10. 定理 5 よりネフ錐とムーバブル錐が一致していない場合に, $\mathrm{Mov}(\mathrm{Km}^2(A))$ に対して, $\mathrm{Km}^2(A)$ の極小モデルのアンプル錐がそれぞれの部屋となるような部屋分解を与えれる [Mo].

参考文献

[Be] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755-782

[Mo] A. Mori, *Nef Cone of a Generalized Kummer 4-fold*, arXiv:1810.07892v1

[Yo1] K. Yoshioka, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), 817-884

[Yo2] K. Yoshioka, *Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface*, Adv. Stub. Pure Math. **69**(2016), 473–537

[川又] 川又 雄二郎, 高次元代数多様体論, 2014, 岩波書店

パラレルセッション
会場 B

G_2 作用によるグラスマン多様体内の等質超曲面の主曲率

お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科　理学専攻
榎吉 奏子 (Kanako ENOYOSHI)

概要

例外型 Lie 群 G_2 作用によるグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等質超曲面の主曲率を求める．ここで, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は八元数の虚部 $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向きづけられた 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体を表す．その応用として, austere 部分多様体となる軌道が唯一存在することと, proper 二重調和性をもつ軌道がちょうど 2 つ現れることを示す．さらに, その austere 軌道が弱鏡映部分多様体であることの証明を与える．

1　はじめに

等質超曲面は余等質性 1 作用の軌道として得られる．A. Kollross は既約コンパクト Riemann 対称空間上の余等質性 1 作用を分類した ([5])．その分類により, 余等質性 1 作用の多くは Hermann 作用となることが知られている．そして, それらの作用による等質超曲面の主曲率は, 多くの研究者たちによって既に求められている．グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ への G_2-作用は Hermann 作用ではない例外型余等質性 1 の作用である．そこで我々は, Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の不変部分空間分解に着目することで, G_2-作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等質超曲面の主曲率を計算する．

2　準備

$\mathbb{H} = \{x1 + yi + zj + wk \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4$ $(i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k)$ を四元数体, $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ を純虚四元数全体の集合とする．単位四元数の集合を $Sp(1) \subset \mathbb{H}$ で表す．八元数からなるノルム代数 $\mathbb{O}$ は, ある単位八元数 ε に対し,$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ で与えられる．ここで, 八元数 $\mathbb{O}$ 上の積は, $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$ で与えられる．八元数 $\mathbb{O}$ の純虚八元数全体の集合を $\mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathrm{Im}\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ で表す．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の交代 3 次形式 φ を

$$\varphi(x, y, z) = \langle x, yz \rangle$$

で定める．ここで, $\langle , \rangle$ は八元数上の内積である．交代 3 次形式 φ は $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の associative calibration と呼ばれる ([2] p.113 Definition 1.5)．Lie 群 G_2 は,

$$G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = \{g \in GL_8(\mathbb{R}) \mid \text{任意の元 } x, y \in \mathbb{O} \text{ に対して, } g(xy) = g(x)g(y)\}$$

で定められる．Lie 群 G_2 は 14 次元で単純であることが知られている ([2])．任意の元 $g \in G_2$ は部分空間 $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{O}$ を固定し, $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ を不変に保つ．G_2 は $SO(\mathrm{Im}\mathbb{O}) = SO(7)$ の部分群であること, そして $G_2 = \{g \in O(7) | \ g^*\varphi = \varphi\}$ となることが知られている ([2])．$Sp(1) \times Sp(1)$ の $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ への作用は, $(q_1, q_2) \in Sp(1) \times Sp(1)$, $a + b\varepsilon \in \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ に対して,

$$\rho(q_1, q_2)(a + b\varepsilon) = q_1 a q_1^{-1} + (q_2 b q_1^{-1})\varepsilon$$

で与えられる．$\rho(q_1, q_2)$ は G_2 の元になることが分かる．ρ は $Sp(1) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ の作用である．

八元数の虚部 $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き付けられた 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体を $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ で表す．$\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は Riemann 対称空間 $SO(7)/SO(3) \times SO(4)$ である．ここで，$SO(7)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(7)$ 上の Killing 形式により，Riemann 計量を導入する．associative calibration φ の値は，$\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の正規直交基底の選び方によらないため，φ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ 上の関数とみなすことができる．さらに，任意の $\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に対して，$|\varphi(\zeta)| \leq 1$ が成立する ([2] p.113 Theorem 1.4)．そこで，$-1 \leq \Phi \leq 1$ に対して，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の等位集合 $M(\Phi)$ を次で定める:

$$M(\Phi) = \{\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O}) \mid \varphi(\zeta) = \Phi\}.$$

八元数 $\mathbb{O}$ の任意の四元数部分代数の純虚数 3 次元部分空間で，四元数代数から定まる向きを備えたものを associative 部分空間という．associative 部分空間全体の集合を associative グラスマン多様体といい，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ で表す．基点として $o = \mathrm{Im}\mathbb{H}$ をとる．G_2 は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に推移的に作用し，o における等方部分群は $\rho(Sp(1) \times Sp(1))$ である．それゆえ，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は 8 次元の Riemann 対称空間 $G_2/SO(4)$ と同一視されることが知られている ([2] p.114 Theorem 1.8)．Lie 群 G_2 は各 $M(\Phi)$ $(-1 \leq \Phi \leq 1)$ に推移的に作用する．$M(1)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ と一致する．$M(-1)$ の部分空間の向きを逆向きにすれば，$M(-1)$ は $M(1) = \widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に等長である．$M(1)$ と $M(-1)$ は全測地的特異軌道であり，$-1 < \Phi < 1$ に対し，$M(\Phi)$ は余次元 1 の主軌道で $G_2/SO(3)$ に微分同型となる．特に，associative calibration φ は等径関数である．

3 主結果

等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ は，全測地的特異軌道 $M(1)$ の周りの管状超曲面と一致するという性質を用いて主曲率を計算する．法ベクトル場 $-\frac{\mathrm{grad}\varphi}{||\mathrm{grad}\varphi||}$ に関して，G_2 作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ 内の等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ の主曲率は以下で与えらえる．

定理 1　等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ の主曲率は，

$$\mu_1(\Phi) = 0,$$
$$\mu_2(\Phi) = \frac{1}{2\sqrt{30(1-\Phi^2)}}(-3\Phi + \sqrt{8+\Phi^2}),$$
$$\mu_3(\Phi) = \frac{1}{2\sqrt{30(1-\Phi^2)}}(-3\Phi - \sqrt{8+\Phi^2})$$

である．ここで，重複度はそれぞれ $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 3$ である．

4 応用

F. R. Harvey と H. B. Lawson ([2]) は austere 部分多様体という概念を導入した．N を Riemann 多様体，M を N の部分多様体とする．M の各点の法ベクトル u に対して，M の型作用素 A_u の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，M を austere 部分多様体という．定理 1 を用いて，次の系を得る．

系 1　主軌道 $M(0)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の austere 部分多様体である.

1983 年, J. Eells と L. Lemaire が Riemann 多様体間の写像に対して二重調和性という概念を導入した ([1]). (M,g) と $(N,\tilde{g})$ を Riemann 多様体とし, $\phi\colon M\to N$ を滑らかな写像とする. $\tau(\phi)$ を ϕ のテンション場としたとき, M のコンパクト領域 Ω 上の bienergy 汎関数は次で定義される.

$$E_2(\phi;\Omega)=\int_\Omega \frac{1}{2}|\tau(\phi)|^2 dv_g,$$

ここで, dv_g は M の体積要素である. 任意のコンパクト領域 $\Omega\subset M$ に対して, ϕ が $E_2(\phi;\Omega)$ の臨界点となっているとき, ϕ を二重調和写像という. 調和写像ではない二重調和写像を proper 二重調和写像という. $N=G/K$ を Killing 形式から定まる計量を備えたコンパクト半単純 Riemann 対称空間とする. このとき, 平均曲率一定の超曲面 $\phi\colon M\to G/K$ が proper 二重調和性をもつことの必要十分条件は, M の型作用素 A が

$$|A|^2=\frac{1}{2}$$

を満たすことである ([4] Theorem 3). この事実と定理 1 を用いて, 次の系を得る.

系 2　主軌道 $M(\pm\frac{1}{\sqrt{10}})$ は G_2 作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の 唯一の proper 二重調和等質超曲面である.

5　弱鏡映部分多様体

主軌道 $M(0)$ は austere 性より強い性質をもつ. O. Ikawa, T. Sakai と H. Tasaki は弱鏡映部分多様体という概念を導入した ([3]). N を Riemann 多様体, M を N の部分多様体とする. 各点 $p\in M$ における法ベクトル $\xi\in T_p^\perp M$ に対して次の条件を満たす N の等長変換 σ_ξ が存在するとき, M を弱鏡映部分多様体という.

$$\sigma_\xi(p)=p,\qquad (d\sigma_\xi)_p\xi=-\xi,\qquad \sigma_\xi(M)=M.$$

命題 1　主軌道 $M(0)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の弱鏡映部分多様体である.

参考文献

[1] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, Regional Conference Series in Math. **50** (1983), Amer. Math. Soc.

[2] F.R.Harvey and H.B.Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47-157.

[3] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[4] J. Inoguchi and T. Sasahara, *Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces* I, II, Hiroshima Math. J. **46** (2016), 97-121, **47** (2017), 349-378.

[5] A. Kollross, *A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001), no. 2, 571-612.

擬リーマン空間形内の全測地的光的部分多様体

佐藤　雄一郎　(Yuichiro Sato)*

1. 序 (導入と準備)

微分幾何において，リーマン多様体は古典的な対象でありながらも，現在もなお中心的な存在であり，洗練された理論が展開される．一方で，アインシュタインによる相対論では，ローレンツ多様体と呼ばれる正定値とは限らない計量を持つ多様体が導入された．これをきっかけに擬リーマン多様体と呼ばれるリーマン多様体の一般化が定式化され，リーマン幾何のアナロジーが試みられている．しかしながら，擬リーマン多様体においては，ホップ·リノウの定理など古典的な結果が成立せず，その大域的な性質が，リーマンの場合とどのような違いがあるのかという問いは基本的なものである．

一方で，曲線·曲面論の一般化として部分多様体論がある．擬リーマン多様体内の部分多様体を考えると，誘導計量が非退化の場合，退化の場合，あるいは混合する場合がある．非退化になる場合は，多くの先行研究が存在する．例えば，Anciaux [1] による極小部分多様体の研究がある．本稿では，退化する場合を考える．Bejancu–Duggal [3] や Kupeli [9] によって基礎理論が構築されたが，未知な点が多く，その研究は始まったばかりであると言えるだろう．本稿の主結果は，全測地的光的部分多様体に関するものだが，全臍的光的部分多様体の一般論は，Duggal–Jin [5] によって展開されている．その特徴付けや存在問題としての研究は少なくないが，分類問題は全く解決されていない．また，極小光的部分多様体の定式化が Sakaki [11] によって与えられている．また，混合する場合は，曲面の場合に研究が存在する．例えば，[7] を参照せよ．

さて，本稿は序破急の三部作構成とした．本論である序では，以降，舞台となる擬リーマン多様体について必要最低限の予備知識について説明する．破では，主役である擬リーマン多様体内の光的部分多様体についての理論を Bejancu–Duggal [3] に従い，解説する．最後に，急では，主結果である擬リーマン空間形内の全測地的光的部分多様体の分類結果について紹介する．

M を n 次元可微分多様体とする．以降，多様体と述べた場合，可微分性は仮定する．g を M 上の**擬リーマン計量**とする．すなわち，非退化で滑らかな対称な計量テンソルとする．このとき，組 (M,g) を n 次元**擬リーマン多様体**と呼ぶ．

符号 (p,q) において，数 p のことを計量 g の**指数**としばしば呼ばれる．$p=0$ のとき，まさに g はリーマン計量であり，(M,g) はリーマン多様体のことに他ならない．また，$p=1$ のとき，擬リーマン計量 g は**ローレンツ計量**と呼ばれ，相対論において重要な役割を果たしている．

符号 (p,q,r) の n 次元**特異擬ユークリッド空間**を

$$\mathbb{R}^{p,q,r} := \left(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} dx_j^2 + \sum_{k=p+q+1}^{n} 0 dx_k^2 \right)$$

で定める [13]．ここで，$n=p+q+r$ であり，$(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準座標を表す．このとき，次のことが分かる．

* 〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1　首都大学東京大学院 理学研究科 数理科学専攻
e-mail: satou-yuuichirou@ed.tmu.ac.jp

- $r=0$のとき，$\mathbb{R}^{p,q,0}$は指数pの**擬ユークリッド空間**と呼び，$\mathbb{R}^n_p$と表す．
- $p=r=0$のとき，$\mathbb{R}^{0,n,0}$は通常のユークリッド空間$\mathbb{R}^n$のことに他ならない．

符号$(0,2,1)$の場合の先行研究は，[2]や[12]を参照せよ．指数p $(0\leq p\leq q)$のn次元擬ユークリッド空間を$\mathbb{R}^n_p$を考える．$\mathbb{R}^n_p$の零でないベクトルvが**空間的**，**時間的**，**光的**であるとは，それぞれ$|v|^2>0, |v|^2<0, |v|^2=0$を満たすことである．ここで，$v\in\mathbb{R}^n_p$に対し，$|v|^2:=\langle v,v\rangle$である．記号に2のべき指数がつけられているが，負値も取りうることに注意する．あくまで形式的な記号である．

指数1のn次元擬ユークリッド空間$\mathbb{R}^n_1$をn次元**ミンコフスキー空間**と呼ぶ．さらに4次元ミンコフスキー空間は，平坦な時空モデルとして，物理学と密接な関係がある．

ここで，擬ユークリッド空間内の非退化な部分多様体について，よく知られた事実を述べる．

定理 1 ([1]). 擬ユークリッド空間$\mathbb{R}^n_p$内の任意の非退化なアファイン部分空間は，全測地的部分多様体であり，逆に，$\mathbb{R}^n_p$内の任意の連結な全測地的部分多様体は，非退化なアファイン部分空間の開部分集合である．

次に$\mathbb{R}^n_p$内の超曲面を考える．ここで，$\mathbb{R}^n_p$内の2次超曲面を実数$c\in\mathbb{R}$に対し，

$$Q^{n-1}_{p,c}:=\{x\in\mathbb{R}^n_p \mid |x|^2=c\}$$

を定め，$\mathbb{R}^n_p$への包含写像による誘導計量を導入する．さらに$r>0$に対し，

$$\mathbb{S}^{n-1}_p(r^2):=Q^{n-1}_{p,r^2},\quad \mathbb{H}^{n-1}_{p-1}(-r^2):=Q^{n-1}_{p,-r^2}$$

と置くと，$n\geq 3$のとき，これらは擬リーマン多様体として，断面曲率がそれぞれ一定値$\dfrac{1}{r^2}, -\dfrac{1}{r^2}$であり，かつ測地的完備である．$\mathbb{S}^{n-1}_p(r^2)$, $\mathbb{H}^{n-1}_{p-1}(-r^2)$をそれぞれ指数$p$の$(n-1)$次元**擬球面**，指数$(p-1)$の$(n-1)$次元**擬双曲空間**と呼ぶ．また，擬ユークリッド空間を含めたものを総称して，**擬リーマン空間形**と呼ぶこともある．4次元の場合において，ド·ジッター空間または，反ド·ジッター空間はそれぞれ正または，負の定曲率を持つ時空モデルとして，やはり物理学と関係がある．

定理 2 ([1]). $c\neq 0$のとき$Q^{n-1}_{p,c}$は，擬ユークリッド空間$\mathbb{R}^n_p$内の全臍的超曲面であり，逆に，$\mathbb{R}^n_p$内の任意の連結な全臍的超曲面は，平均曲率Hが一定となり，平行移動の差を除いて，$H=0$のとき，非退化な超平面の開部分集合であり，$H\neq 0$のとき，2次曲面$Q^{n-1}_{p,c}$の開部分集合である．ここで，$|c|=\dfrac{1}{H^2}$である．

2次曲面$Q^{n-1}_{p,c}$に対し，$c=0$のとき，$Q^{n-1}_{p,c}$は，$p=0$ならば原点の一点集合となってしまう．$1\leq p\leq q$ならば原点$(0,\cdots,0)$を唯一の孤立特異点とする滑らかな超曲面が得られるが，誘導計量が退化する．これは，擬ユークリッド空間$\mathbb{R}^n_p$内の$(n-1)$次元**光錐**と呼ばれ，ミンコフスキー空間の場合に物理的な意味を持つ．また，光錐は次節で述べる光的部分多様体の一例である．

平坦でない擬リーマン空間形内の全測地的部分多様体については，次の結果がある．

定理 3 ([4]). 擬球面$\mathbb{S}^n_p(r^2)\subset\mathbb{R}^{n+1}_p$と非退化な線形部分空間との共通部分は，$\mathbb{S}^n_p(r^2)$内の全測地的部分多様体であり，逆に，$\mathbb{S}^n_p(r^2)$内の任意の連結な全測地的部分多様体は，非退化な線形部分空間との共通部分の開部分集合である．擬双曲空間$\mathbb{H}^n_p(-r^2)\subset\mathbb{R}^{n+1}_{p+1}$内の全測地的部分多様体についても擬球面と同様の主張が成立する．

2. 破 (擬リーマン多様体内の光的部分多様体)

以下，断りのない限り $(\bar{M}, \bar{g})$ で，実 $(m+n)$ 次元擬リーマン多様体を表す．ここで，$m, n \geq 1$ で，$\bar{g}$ の指数 p は，$1 \leq p \leq m+n-1$ を満たすとする．M を実 m 次元多様体，$f : M \to \bar{M}$ を C^∞ 級はめ込みで，M 上の f による誘導計量を $g := f^*\bar{g}$ とする．

各点 $x \in M$ に対し，

$$T_x^\perp M := \{v \in T_x\bar{M} \mid \bar{g}_x(v, w) = 0,\ \forall w \in T_x M\}$$

を定める．$\bar{g}_x$ が T_xM 上で退化するならば，$T_x^\perp M$ 上でも退化し，逆も成立する．このとき，特に，非自明な交わりを持ち，

$$\mathrm{Rad}T_xM = \mathrm{Rad}T_x^\perp M = T_xM \cap T_x^\perp M \supsetneqq \{0\}$$

が成立する．しかしながら，この空間の次元は，点 $x \in M$ に依存する．

$\bar{M}$ の (はめ込まれた) 部分多様体 M が **r-光的 (r-退化，r-零的)** であるとは，対応

$$M \ni x \longmapsto \mathrm{Rad}T_xM \subset T_xM$$

が階数 $r > 0$ の滑らかな接分布を定めることをいい，

$$\mathrm{Rad}TM = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Rad}T_xM$$

を M 上の**根基分布**という．このとき，誘導計量 g は，**r-光的 (r-退化，r-零的)** であるといわれ，特に r を明示する必要がないとき，M, g をそれぞれ単に，**光的部分多様体，光的計量**という．

定理 4 ([3])**.** (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ 内の部分多様体とする．このとき，次は同値である．r は $1 \leq r \leq m$ とする．

(i) M は r-光的である．

(ii) 各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ に対し，$\mathcal{U} \ni x \mapsto \mathrm{Rad}T_x\mathcal{U}$ は，$\mathcal{U}$ 上の階数 r の滑らかな分布を定める．

(iii) 各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ に対し，g は $\mathcal{U}$ 上で，一定の階数 $m-r$ を持つ．

このとき，それぞれ階数が m, n, r となる M 上のベクトル束 $TM, T^\perp M, \mathrm{Rad}TM$ が構成される．ここで，次を定義する．$\overset{\perp}{\oplus}$ は直交直和を表すものとする．

(i) $S(TM)$ が M の**スクリーン分布**であるとは，M 上のベクトル束であって，直和

$$TM = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Rad}TM$$

を満たすことをいう．これは階数 $(m-r)$ の非退化なベクトル束である．

(ii) $S(T^\perp M)$ が M の**スクリーン横断的ベクトル束**であるとは，M 上のベクトル束であって，直和

$$T^\perp M = S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Rad}TM$$

を満たすことをいう．これは階数 $(n-r)$ の非退化なベクトル束である．

(iii) $\mathrm{ltr}(TM)$ が M の**光的横断的ベクトル束**であるとは，$f^*T\bar{M}$ の階数 r の部分束であって，各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ と，任意の $\mathrm{Rad}TM|_{\mathcal{U}}$ 上の枠場 $\{\xi_i\}_{i=1}^r$ に対し，$\mathrm{ltr}(TM)|_{\mathcal{U}}$ に属する切断 $\{N_i\}_{i=1}^r$ が存在して，

$$\bar{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad \bar{g}(N_i, N_j) = 0 \quad (i, j \in \{1, \cdots, r\})$$

を満たすことをいう．

(iv) B が M の**補スクリーンベクトル束**であるとは，$f^*T\bar{M}$ の階数 $2r$ の部分束であって，

$$\mathrm{Rad}TM \subset B$$

を満たす非退化なベクトル束のことをいう．

これらの部分束は存在するが，一意性は全く成立しないことに注意する．すなわち，擬リーマン多様体内の光的部分多様体の研究を行う際は，選び方に依らない幾何学的な性質を見抜き，調べなければならない．

r-光的部分多様体 M に対し，次のようなクラス分けを考える．

(Case I) : $0 < r < \min\{m, n\}$ のとき，M を**プロパーな r-光的部分多様体**という．

(Case II) : $0 < r = n < m$ のとき，M を**余等方的部分多様体**という．

(Case III) : $0 < r = m < n$ のとき，M を**等方的部分多様体**という．

(Case IV) : $0 < r = m = n$ のとき，M を**全光的部分多様体**という．

定義から，M が光的曲線 $(m = 1)$ のとき，等方的であり，光的超曲面 $(n = 1)$ のとき，余等方的である．また，$f^*T\bar{M}$ 上の階数 0 の部分束を，$f^*T\bar{M}$ の零切断のみからなる M 上のベクトル束 $\{0\}$ として約束する．このとき，次が成立する．

命題 5 (S.). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r-光的部分多様体とする．このとき，M のスクリーン分布とスクリーン横断的ベクトル束の組 $(S(TM), S(T^\perp M))$ の全体をなす集合と，M の補スクリーンベクトル束 B の全体をなす集合の間に一対一対応が存在して，

$$f^*T\bar{M} = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} B$$

を満たし，特に，

$$\begin{aligned} M &: \text{余等方的} \iff S(T^\perp M) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} B \\ M &: \text{等方的} \iff S(TM) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} B \\ M &: \text{全光的} \iff S(TM) = S(T^\perp M) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = B \end{aligned}$$

が成立する．

r-光的部分多様体 M に対し，M 上のベクトル束

$$\mathrm{tr}(TM) := \mathrm{ltr}(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M)$$

を定める．このとき，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{tr}(TM)$$

である．ここで，$\oplus$ は直交でない直和を表す．この $\mathrm{tr}(TM)$ を M の**横断的ベクトル束**といい，M に沿う $\bar{M}$ の**局所擬正規直交枠場**が

$$\{\xi_i, N_i, X_a, W_\alpha\}$$

によって与えられる．ここで，$1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq a \leq m$, $r+1 \leq \alpha \leq n$ で，$\{\xi_i\}, \{N_i\}$ は，それぞれ $\mathrm{Rad}TM, \mathrm{ltr}(TM)$ の局所枠場で，$\{X_a\}, \{W_\alpha\}$ は，それぞれ $S(TM), S(T^\perp M)$ の局所正規直交枠場である．

注意 6. (Case II) と (Case IV) のとき，M の横断的ベクトル束 $\mathrm{tr}(TM)$ を

$$\mathrm{tr}(TM) = \mathrm{ltr}(TM)$$

で定め，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{ltr}(TM)$$

となる．

(Case III) のとき，M の横断的ベクトル束 $\mathrm{tr}(TM)$ を

$$\mathrm{tr}(TM) = S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{ltr}(TM)$$

で定め，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{tr}(TM)$$

となる．

命題 7 (S.)**.** (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の 1-光的部分多様体とする．このとき，M のスクリーン分布とスクリーン横断的ベクトル束の組 $(S(TM), S(T^\perp M))$ の全体をなす集合と，M の光的横断的ベクトル束 $\mathrm{ltr}(TM)$ の全体をなす集合の間に一対一対応が存在して，

$$f^*T\bar{M} = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Rad}TM \oplus \mathrm{ltr}(TM))$$

を満たす．$r > 1$ の場合，この結果は，光的横断的ベクトル束の一意性を除いて成立する．

r-光的部分多様体に対し，ベクトル束としての直和

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{tr}(TM)$$

が得られたので，これを用いて次のような分解を得る．

以降，$(\bar{M}, \bar{g})$ のレビ･チビタ接続を $\bar{\nabla}$ とする．任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$，$V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ に対して，

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A(V, X) + \nabla^t_X V \end{aligned}$$

となる．これらをそれぞれ M の**ガウスの公式，ワインガルテンの公式**と呼ぶ．また，誘導された ∇, ∇^t をそれぞれ M 上の**誘導接続，横断的接続**といい，対称 $C^\infty(M)$-双線形形式 h を M の**第二基本形式**という．また，各 $V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ に対し，$C^\infty(M)$-線形作用素を

$$A_V : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)\ ;\ A_V(X) := A(V, X)$$

によって定め，M の V に関する**形作用素**という．

以下，M は (Case I) または (Case III) とする．このとき，$\mathrm{tr}(TM) = \mathrm{ltr}(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M)$ より，M のガウスの公式，ワインガルテンの公式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A(V, X) + D^l_X V + D^s_X V \end{aligned}$$

となる．h^l, h^s をそれぞれ M の**光的第二基本形式，スクリーン第二基本形式**という．D^l, D^s はそれぞれ $\mathrm{tr}(TM)$ 上の線形接続にならないことに注意する．そこで，L, S をそれぞれ $\mathrm{tr}(TM)$ 上の $\mathrm{ltr}(TM), S(T^\perp M)$ への射影束準同型とする．

また，任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対し，微分作用素を

$$\begin{aligned} \nabla^l_X &: \Gamma(\mathrm{ltr}(TM)) \to \Gamma(\mathrm{ltr}(TM))\ ;\ \nabla^l_X(LV) := D^l_X(LV), \\ \nabla^s_X &: \Gamma(S(T^\perp M)) \to \Gamma(S(T^\perp M))\ ;\ \nabla^s_X(SV) := D^s_X(SV) \end{aligned}$$

によって定めると，これらはそれぞれ $\mathrm{ltr}(TM), S(T^\perp M)$ 上の線形接続 ∇^l, ∇^s を定めることが分かり，これらをそれぞれ M 上の**光的横断的接続，スクリーン横断的接続**という．

M を一般に r-光的部分多様体として，$\{N_i, W_\alpha\}$ を $\mathrm{tr}(TM)$ の局所枠場とする．このとき，(Case I) または (Case III) の場合については，局所的に

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{r} h^l_i(X, Y) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h^s_\alpha(X, Y) W_\alpha$$

と表せ，同様にして，(Case II) または (Case IV) の場合については，局所的に

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{n} h^l_i(X, Y) N_i$$

と表せる．この対称 $C^\infty(M)$-双線形形式の族 $\{h^l_i\}, \{h^s_\alpha\}$ をそれぞれ M の**局所光的第二基本形式，局所スクリーン第二基本形式**という．

定理 8 ([3])．(M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r-光的部分多様体とする．このとき，M の局所光的第二基本形式は，M のスクリーン分布，スクリーン横断的ベクトル束，光的横断的ベクトル束の選び方に依らない．但し，$\mathrm{Rad}TM$ の局所枠場 $\{\xi_i\}$ の取り方には依存することに注意する．

スクリーン分布が消えない状況を考えるため，以下，(Case I) または (Case II) の場合を考える．このとき，

$$TM = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Rad}TM$$

であるので，各 $X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ に対し，

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \overset{*}{\nabla}_X PY + h^*(X, PY), \\ \nabla_X \xi &= -\overset{*}{A}(\xi, X) + \overset{*}{\nabla}{}^t{}_X \xi \end{aligned}$$

と分解される．ここで，P は，射影 $P : TM \to S(TM)$ である．このとき，$\overset{*}{\nabla}, \overset{*}{\nabla}{}^t$ は，それぞれ $S(TM), \mathrm{Rad}TM$ 上の計量接続となり，$S(TM), \mathrm{Rad}TM$ 上の**誘導接続**と呼ぶ．h^* は，$\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ 上で定まる $\Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ に値を持つ $C^\infty(M)$-双線型形式であって，これを $S(TM)$ の**第二基本形式**という．$\overset{*}{A}$ は，$\Gamma(\mathrm{Rad}TM) \times \Gamma(TM)$ 上で定まる $\Gamma(S(TM))$ に値を持つ $C^\infty(M)$-双線型形式であって，各 $\xi \in \Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ に対し，$C^\infty(M)$-線形作用素

$$\overset{*}{A}_\xi : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM)) \ ; \ \overset{*}{A}_\xi(X) = \overset{*}{A}(\xi, X) \ (X \in \Gamma(TM))$$

を定め，これを $S(TM)$ の ξ に関する**形作用素**という．

次のような関係式を持つことが示される．任意の $X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ に対し，

$$\bar{g}(h^l(X, PY), \xi) = g(\overset{*}{A}_\xi X, PY)$$

が成立する．すなわち，形作用素 $\overset{*}{A}$ と h^l の $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ への制限は，等価である．また，任意の $X, Y \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(\mathrm{ltr}(TM))$ に対し，

$$\bar{g}(h^*(X, PY), N) = \bar{g}(A_N X, PY)$$

が成立する．すなわち，形作用素 A と h^* は，等価である．

(M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r-光的部分多様体とし，M 上の誘導接続を ∇ とする．このとき，M が**全測地的**であるとは，∇ に関する任意の測地線が，$\bar{\nabla}$ に関する $\bar{M}$ の測地線になることをいう．

定理 9 ([3])**.** (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r-光的部分多様体とし，$S(TM), S(T^\perp M), \mathrm{ltr}(TM)$ をそれぞれ一つずつ選ぶ．このとき，次は同値である．

(i) M は全測地的である．

(ii) M 上で $h^l = 0, h^s = 0$ である．すなわち，M 上で $h = 0$ である．

(iii) 任意の $\xi \in \Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ に対し，M 上で $\overset{*}{A}_\xi = 0$，任意の $W \in \Gamma(S(TM))$ に対し，A_W は $\Gamma(\mathrm{Rad}TM)$ 値であり，任意の $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ に対し，$D^l(X, SV) = 0$ を満たす．

r-光的部分多様体が全測地的であることは，$S(TM), S(T^\perp M), \mathrm{ltr}(TM)$ の選び方に依らない幾何学的な条件である．

系 10 ([3])**.** 全測地的 r-光的部分多様体上に誘導されるすべての誘導接続は，計量接続であり，レビ･チビタ接続 $\bar{\nabla}$ の $\Gamma(TM)$ への制限に一致する．

系 11 ([3])**.** (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の余等方的部分多様体とする．このとき，次は同値である．

(i) M は全測地的である．

(ii) M 上で $h^l = 0$ である．

(iii) 任意の $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ に対し，M 上で $\overset{*}{A}_\xi = 0$ である．

(iv) 誘導接続 ∇ は，計量接続である．

系 12 ([3])**.** (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の等方的部分多様体とする．このとき，次は同値である．

(i) M は全測地的である．

(ii) M 上で $h^s = 0$ である．

(iii) 任意の $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$ に対し，$D^l(X, SV) = 0$ である．

系 13 ([3])**.** すべての全光的部分多様体は，全測地的である．

3. 急 (主結果と課題)

W を指数 p の $(m+n)$ 次元擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内の退化 m 次元部分空間，$v \in \mathbb{R}^{m+n}_p$ とする．このとき，$v + W$ を $\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内の**光的 m-平面**という．容易に分かることとして，任意の r-光的 m-平面は，擬ユークリッド空間内の全測地的光的部分多様体である．逆が成立する．

定理 14 (S.)**.** $m \geq 2, n \geq 1, 1 \leq p \leq [\frac{m+n}{2}]$ とし，M を m 次元連結多様体，$f : M \to \mathbb{R}^{m+n}_p$ を r-光的はめ込みとする．f による M 上に誘導される退化計量を g で表す．このとき，(M, g) が擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内の全測地的光的部分多様体ならば，f による像 $f(M)$ は，$\mathbb{R}^{m+n}_p$ 内のある r-光的 m-平面の開部分集合である．

Proof. 証明は，測地線の議論を使う．すなわち，擬ユークリッド空間内の任意の測地線は，直線であることを利用する． □

$m \geq 2, 1 \leq p \leq [\frac{m+1}{2}]$ とし，$\varepsilon = \pm 1$ に対し，非平坦な擬リーマン空間形を

$$Q^{m+1}_p(\varepsilon) := \begin{cases} \mathbb{S}^{m+n}_p(1) \subset \mathbb{R}^{m+2}_p & (\varepsilon = 1), \\ \mathbb{H}^{m+n}_p(-1) \subset \mathbb{R}^{m+2}_{p+1} & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

と定める．更に，$\bar{p} := p + \frac{1-\varepsilon}{2}$ とすれば，統一的に

$$Q^{m+1}_p(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^{m+2}_{\bar{p}}$$

と表せる．このとき，$Q^{m+1}_p(\varepsilon)$ 内の超曲面 $N(\varepsilon)$ を次で構成する．

光的ベクトル $v := (1, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{m+2}_{\bar{p}}$ と直交するベクトル全体の空間

$$W := \{x \in \mathbb{R}^{m+2}_{\bar{p}} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

は，1-光的 $(m+1)$-平面である．このとき，次を定める．

$$N(\varepsilon) := Q^{m+1}_p(\varepsilon) \cap W.$$

命題 15 (S.)**.** $N(\varepsilon)$ は，$Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ 内の全測地的光的超曲面である．

超曲面の場合，この逆が成立する．

定理 16 (S.)**.** $m \geq 2, 1 \leq p \leq [\frac{m+1}{2}], \varepsilon = \pm 1$ とし，M を m 次元連結多様体，$f : M \to Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ を r-光的はめ込みとする．f による M 上に誘導される退化計量を g で表す．このとき，(M, g) が $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ 内の全測地的光的超曲面ならば，$Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ の等長変換の差を除いて，f の像 $f(M)$ は，$N(\varepsilon)$ の開部分集合である．

Proof. 光的超曲面は，余等方的であるので，系 10，11 の結果を使って，初等的な計算により，階数 1 の根基分布の枠場が定ベクトルとして取れることを示す． □

非平坦な擬リーマン空間形 $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ の場合に，全測地的部分多様体を完全分類することが直近の課題である．擬ユークリッド空間のときと同様に，測地線の議論で示すことができるだろうか．ローレンツ空間形の場合に，リーマン沈め込みを利用した先行研究が存在する [6]．より統一的な証明が求められる．

一方，平坦の場合であるが，n 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^n$ 内の光的超曲面についてはある意味では，研究が完了している．より厳密には，次が成立する．

事実 ([8])**.** n 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^n$ 内の光的超曲面は，線織超曲面である．

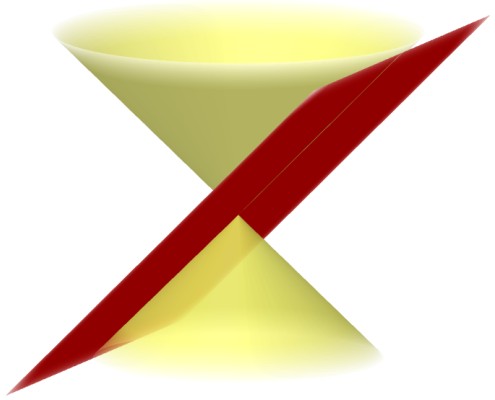


図 1: $\mathbb{R}_1^3$ 内の全測地的光的曲面 (赤色) と光錐 (黄色) の図示．

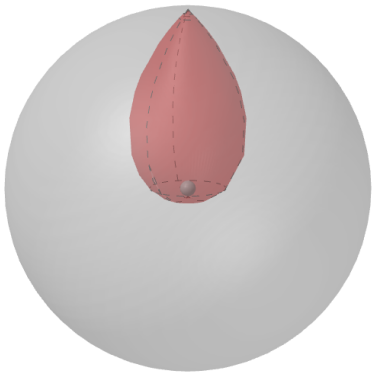


図 2: $\mathbb{S}_1^3(1)$ 内の全測地的光的曲面 $N(1)$ (赤色) の図示．

参考文献

[1] H. Anciaux, "*Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*", World Scientific (2011).

[2] M. E. Aydin, "*Classification results on surfaces in the isotropic* 3*-space*", AKU J. Sci. Eng. **16** (2016), 239–246.

[3] A. Bejancu and K. L. Duggal, "*Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*", Kluwer Academic Publishers (1996).

[4] B. Y. Chen, "*Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*", World Scientific (2011).

[5] K. L. Duggal and D. H. Jin, "*Totally umbilical lightlike submanifolds*", Kodai Math. J. **26** (2003), no. 1, 49–68.

[6] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, "*Geometry of lightlike submanifolds in Lorentzian space forms*", Pub. de la RSME. **5** (2003), 125–139.

[7] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, "*Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*" Quarterly J. Math. **67** (2016), 801–837.

[8] S. Izumiya and T. Sato, "*Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space-time*", J. Geom. Phys. **71** (2013), 30–52.

[9] D. N. Kupeli, "*Singular semi-Riemannian geometry*", Kluwer Academic Publishers (1996).

[10] M. O'Neill, "*Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*", Academic Press, London (1983).

[11] M. Sakaki, "*On the definition of minimal lightlike submanifolds*", Int. Electron. J. Geom. **3** (2010), no. 1, 16–23.

[12] Y. Sato, "*d-minimal surfaces in three-dimensional singular semi-Euclidean space* $\mathbb{R}^{0,2,1}$", arXiv:1809.07518.

[13] O. C. Stoica, "*On singular semi-Riemannian manifolds*", Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **11**, (2014), no. 5, 1450041.

Extension of two FRT weak bialgebras using Frobenius-separable algebras and their relations

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
乙戸勇大 (Yudai OTSUTO)

概要

ヤン・バクスター方程式の解を用いた双代数（ホップ代数）の構成法を FRT 構成法と呼ぶ．この構成法により，有向グラフに関するヤン・バクスター方程式の解およびヤン・バクスター写像の一般化であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像を用いて弱双代数が構成できる．本講演ではこれら 2 つの弱双代数と松本-清水により構成されたその間の射がフロベニウスかつ分離的な代数を用いて拡張でき，かつ上記の写像を用いず記述できることについて紹介する．なお，本講演の一部内容は澁川陽一氏（北海道大学）との共同研究に基づく．

1 導入

Yang-Baxter 方程式 [1, 9]（YBE）は，bialgebra や Hopf algebra の研究において重要な役割を果たしてきた．Cobraided な bialgebra により YBE の解（R-行列）が得られる事はよく知られた事実である．これに対し，Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan は，R-行列を用いて，bialgebra を構成したが（FRT 構成法 [6]），この bialgebra は cobraided であり，上で述べた事実と逆の主張が得られる．後に FRT 構成法は様々な研究がなされ，Hayashi による有限集合上の quiver とその YBE による face algebra（weak bialgebra）の構成 [7]，Etingof-Varchenko による YBE にパラメータを付け加えて一般化した dynamical Yang-Baxter 方程式およびその解（dynamical R-行列）を用いた left bialgebroid の構成，およびその表現のなすテンソル圏の研究 [5] がある．一方，Drinfel'd [4] の提唱により，YBE の集合論的解（Yang-Baxter map）の研究も始まり、のちに Shibukawa により dynamical Yang-Baxter map（DYBM）へと一般化された [11, 12]．また，Shibukawa および Takeuchi は不変条件を持つ有限集合上の DYBM を用いた left bialgebroid の構成およびその表現のなすテンソル圏の研究を行った [13, 14].

ここではそれぞれの FRT 構成法により定義される代数構造の関係性に焦点を置く．Matsumoto-Shimizu は有限集合上の quiver とその YBE，および DYBM を用いた FRT 構成法による 2 つの weak bialgebra の間に準同型写像を構成した [8]．今回，この 2 つの FRT 構成法及び準同型写像について，Frobenius-separable algebra を用いて一般化することができるという結果が得られた．

本稿は次のように構成される．2 節では，weak bialgebra およびその一般化である left bialgebroid の基礎事項及びその関係性について述べる．3 節では， [7] における weak bialgebra の構成法の一般化を行う．具体的には，有限集合 Λ 上の quiver Q（source map を $\mathfrak{s}$，target map を $\mathfrak{t}$ で表す），およ

びそのファイバー積 $Q^{(m)} = Q \times_\Lambda \cdots \times_\Lambda Q$ (m は正整数) に関する記号 $\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ ($p, q \in Q^{(m)}, m$ は正整数) を基底とする左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R$-自由加群 $\overline{\mathfrak{A}(w)}$ に積を定義し，ある条件を満たす R の元の族 w に関する両側イデアル I で割ったもの $\mathfrak{A}(w) := \overline{\mathfrak{A}(w)}/I$ に構造射 Δ, ϵ を定義することで weak bialgebra が得られる．ただし，R は Frobenius-separable な体 $\mathbb{K}$ 上の algebra とする．4 節では，[13, 14] における left bialgebroid の構成法の一般化を行う．X を有限集合とし，

$$HX := (M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \bigsqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \bigsqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$$

とする．もととなる algebra は free algebra $\mathbb{K}\langle HX \rangle$ のある条件を満たす $M_\Lambda(R)$ の元の族 σ に関する両側イデアル I_σ に関する商 $A_\sigma := \mathbb{K}\langle HX \rangle / I_\sigma$ により得られる．結果として，A_σ には left bialgebra の構造が与えられ，R の Frobenius-separable 性により weak bialgebra となる．5 節では，本稿における主定理を述べる．[8] の一般化として，4 節の weak bialgebra A_σ と同様の設定のもとで構成される 3 節の weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ との間に準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ を構成する．

定理 1.1 (定理 5.1)**.** $\delta_a \in M_\Lambda(R)$ $(a \in \Lambda)$ を $\delta_a(b) = \delta_{ab}$ $(b \in \Lambda)$ とする．左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\phi} : \overline{\mathfrak{A}(w_\sigma)} \to A_\sigma$ を，以下で定義する．

$$\overline{\phi}(\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}) = (\delta_{\mathfrak{s}(p)} \otimes \delta_{\mathfrak{s}(q)}) L_{x_1 y_1} \dots L_{x_m y_m} + I_\sigma \quad (p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ただし，$p = ((\lambda_1, x_1), \dots, (\lambda_m, x_m))$, $q = ((\mu_1, y_1), \dots, (\mu_m, y_m))$．このとき，$\overline{\phi}(I) = \{0\}$ であり，weak bialgebra の準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ $(\phi(\alpha + I) = \overline{\phi}(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}(w_\sigma))$ を導く．

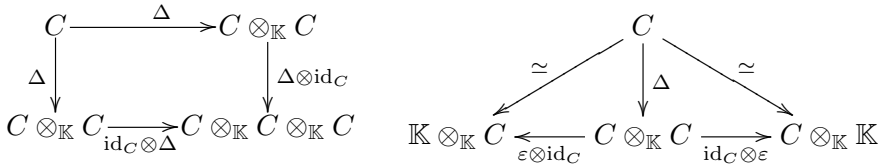
なお，本稿 4 節は澁川陽一氏（北海道大学）との共同研究に基づいている．

2 Weak bialgebra と left bialgebroid

この節では，weak bialgebra と left bialgebroid の基礎事項およびその関係性について述べる．なお，weak bialgebra については [2]，left bialgebroid については [3]，Frobenius-separable algebra については [10] を参照した．

以下、環といえば積において結合的で単位元の存在する環を指す．体 $\mathbb{K}$ を固定し，ベクトル空間および algebra はすべて $\mathbb{K}$ 上で定義されているものとする．

定義 2.1. C をベクトル空間とする．(C, Δ, ε) が coalgebra であるとは，線型写像 $\Delta : C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$, $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ が，以下の可換図式を満たすことである．



Coalgebra C, C' に対し，線形写像 $\varphi : C \to C'$ が coalgebra の準同型写像であるとは，

$$\Delta^{C'} \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta^C, \quad \varepsilon^{C'} \circ \varphi = \varepsilon^C$$

を満たすことである．

定義 2.2. B を algebra とする．(B, Δ, ε) が weak bialgebra であるとは，(B, Δ, ε) が coalgebra であり，以下を満たすことである．

$$\begin{gathered}\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \\ (\Delta(1_B) \otimes 1_B)(1_B \otimes \Delta(1_B)) = 1_{B(1)} \otimes 1_{B(2)} \otimes 1_{B(3)} = (1_B \otimes \Delta(1_B))(\Delta(1_B) \otimes 1_B) \\ \varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c) = \varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c) \ \ (\forall a, b, c \in B)\end{gathered}$$

ただし，$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, $\Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} = a_{(1)} \otimes \Delta(a_{(2)})$.

Weak bialgebra B, B' に対し，線形写像 $\varphi : B \to B'$ が algebra および coalgebra の準同型写像であるとき，φ は weak bialgebra の準同型写像であるという．

定義 2.3. Left bialgebroid $A_L := (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ は，以下を満たす 6 つ組である:

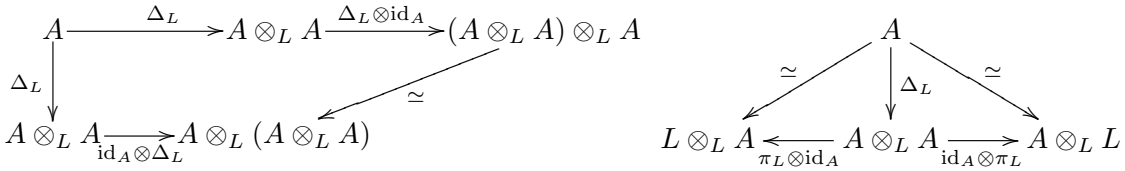
1. A, L は環であり，環準同型写像 $s_L : L \to A$, $t_L : L^{op} \to A$ は

$$s_L(l)t_L(l') = t_L(l')s_L(l) \ \ (\forall l, l' \in L) \tag{2.1}$$

を満たす．また，以下で左作用と右作用を定義し，A を (L, L)-両側加群とみなす．

$$l \cdot a \cdot l' := s_L(l)t_L(l')a \ \ (l, l' \in L, a \in A) \tag{2.2}$$

2. (L, L)-両側加群の準同型写像 $\Delta_L : A \to A \otimes_L A$, $\pi_L : A \to L$ は，以下の可換図式を満たす．



3. Δ_L, π_L は以下を満たす．

$$a_{[1]}t_L(l) \otimes a_{[2]} = a_{[1]} \otimes a_{[2]}s_L(l) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L(1_A) &= 1_A \otimes 1_A \\ \Delta_L(ab) &= \Delta_L(a)\Delta_L(b) \\ \pi_L(1_A) &= 1_L\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\pi_L(as_L(\pi_L(b))) = \pi_L(ab) = \pi(at_L(\pi_L(b))) \ \ (\forall l \in L, \forall a, b \in A)$$

ただし，$\Delta_L(a) = a_{[1]} \otimes a_{[2]}$．(2.4) の右辺は，(2.3) により well-defined となる．

定義 2.4. R を algebra とする．R が Frobenius-separable であるとは，線形写像 $tr : R \to \mathbb{K}$ と元 $e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in R \otimes_{\mathbb{K}} R$ の組 $(tr, e^{(1)} \otimes e^{(2)})$ が存在して，以下を満たすことである．

$$r = tr(re^{(1)})e^{(2)} = e^{(1)}tr(e^{(2)}r), \ \ e^{(1)}e^{(2)} = 1_R \ \ (\forall r \in R)$$

Left bialgebroid は Frobenius-separable algebra と以下のような関係がある．

命題 2.5 ([10], Theorem 5.5)**.** $A_L := (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ を left bialgebroid，ただし，A を algebra，L を $(tr, e^{(1)} \otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra，s_L, t_L を algebra の準同型写像

とする．このとき，(A, Δ, ε) は以下で weak bialgebra の構造が与えられる．

$$\Delta(a) = t_L(e^{(1)})a_{[1]} \otimes s_L(e^{(2)})a_{[2]}$$
$$\varepsilon(a) = tr(\pi_L(a)) \ \ (a \in A)$$

3 Weak bialgebra $\mathfrak{A}(w)$

この節では [7] における weak bialgebra の構成法の一般化を行う．

Λ を空でない有限集合とする．Λ 上の quiver Q とは，source map および target map と呼ばれる写像 $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} : Q \to \Lambda$ を持った集合のことである．quiver は以下のような図を用いて表現される．

$$\mathfrak{s}(a) \xrightarrow{\ a\ } \mathfrak{t}(a)$$

Q, Q' を Λ 上の quiver とする．$Q \times_\Lambda Q' = \{(a, b) \in Q \times Q' \mid \mathfrak{t}(a) = \mathfrak{s}(b)\}$ とし，これをファイバー積という．ファイバー積は $\mathfrak{s}(a, b) = \mathfrak{s}(a)$, $\mathfrak{t}(a, b) = \mathfrak{t}(b)$ により Λ 上の quiver となる．

いま，Q を Λ 上の有限な quiver，R を $(tr, e^{(1)} \otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra とする．また，任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$Q^{(0)} = \Lambda$, $Q^{(1)} = Q$, $Q^{(m+1)} = Q^{(m)} \times_\Lambda Q$ と定める．記号 $\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ $(p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を基底とした左自由 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群を

$$\overline{\mathfrak{A}(w)} := \bigoplus_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \cdot \mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

とする．$\overline{\mathfrak{A}(w)}$ は，以下の積とスカラー倍により algebra となる．

$$\Big(\sum_{\substack{p,q \in Q^{(m)} \\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r_{pq}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\Big)\Big(\sum_{\substack{p',q' \in Q^{(n)} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r'_{p'q'}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}\Big) = \sum_{\substack{p,q \in Q^{(m)}, p',q' \in Q^{(n)} \\ m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r_{pq}r'_{p'q'}\delta_{\mathfrak{t}(p)\mathfrak{s}(p')}\delta_{\mathfrak{t}(q)\mathfrak{s}(q')}\mathbf{e}\begin{bmatrix} pp' \\ qq' \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \Big(\sum_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} r_{pq}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\Big) = \sum_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (kr_{pq})\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \ \ (r_{pq} \in R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}, k \in \mathbb{K})$$

$\mathbf{w}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R$ $((a, b), (c, d) \in Q^{(2)})$, $w = \{\mathbf{w}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\}_{(a,b),(c,d) \in Q^{(2)}}$，$I$ を以下の元で生成される $\overline{\mathfrak{A}(w)}$ の両側イデアルとし，$\mathfrak{A}(w) := \overline{\mathfrak{A}(w)}/I$ と定める．

$$\sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} (\mathbf{w}\begin{bmatrix} a & x \\ b & y \end{bmatrix} \otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix}\mathbf{e}\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} - \sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} (1_R \otimes \mathbf{w}\begin{bmatrix} c & d \\ x & y \end{bmatrix})\mathbf{e}\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}\mathbf{e}\begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} \ (\forall (a, b), (c, d) \in Q^{(2)})$$

Algebra の準同型写像 $s_R : R \to \mathfrak{A}(w)$, $t_R : R^{op} \to \mathfrak{A}(w)$ を，以下で定義する．

$$s_R(r) = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda} (r \otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + I, \ \ t_R(r) = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda} (1_R \otimes r)\mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + I \ \ (r \in R)$$

$\mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$ は以下の環準同型写像 $E : R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \to \mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$ により，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群となる．

$$E(r \otimes r') = s_R(r) \otimes t_R(r') \ \ (r, r' \in R)$$

E を用いて，左 $R\otimes_{\mathbb{K}}R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\Delta}:\overline{\mathfrak{A}(w)}\to\mathfrak{A}(w)\otimes_{\mathbb{K}}\mathfrak{A}(w)$ を以下で定義する．

$$\overline{\Delta}(\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix})=\sum_{u\in Q^{(m)}}(1_R\otimes e^{(1)})\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\u\end{bmatrix}+I\otimes(e^{(2)}\otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix}u\\q\end{bmatrix}+I\ \ (p,q\in Q^{(m)},m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

命題 3.1. $\overline{\Delta}(I)=\{0\}$ であり，$\Delta(\alpha+I)=\overline{\Delta}(\alpha)$ $(\alpha\in\overline{\mathfrak{A}(w)})$ は well-defined な線型写像．

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ は以下の環準同型写像 $F:R\otimes_{\mathbb{K}}R^{op}\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ により，左 $R\otimes_{\mathbb{K}}R^{op}$-加群となる．

$$F(r\otimes r')(l)=rlr'\ \ (r,r',l\in R)$$

F を用いて，左 $R\otimes_{\mathbb{K}}R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\theta}:\overline{\mathfrak{A}(w)}\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ を以下で定義する．

$$\overline{\theta}(\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix})(r)=\delta_{pq}r\ \ (p,q\in Q^{(m)},m\in\mathbb{Z}_{\geq 0},r\in R)$$

命題 3.2. (3.1) を満たすとき，$\overline{\theta}(I)=\{0\}$ であり，$\theta(\alpha+I)=\overline{\theta}(\alpha)$ $(\alpha\in\overline{\mathfrak{A}(w)})$ は well-defined な線型写像．

$$\begin{cases}\mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\in(R\text{の中心})\ \ (\forall(a,b),(c,d)\in Q^{(2)})\\ \mathfrak{s}(a)\neq\mathfrak{s}(c)\text{ or }\mathfrak{t}(b)\neq\mathfrak{t}(d)\Rightarrow\mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]=0\end{cases}\tag{3.1}$$

θ を用いて，線型写像 $\pi_R:\mathfrak{A}(w)\to R$, $\varepsilon:\mathfrak{A}(w)\to\mathbb{K}$ を以下で定義する．

$$\pi_R(\alpha)=\theta(\alpha)(1_R),\quad\varepsilon(\alpha)=tr(\pi_R(\alpha))\ \ (\alpha\in\mathfrak{A}(w))$$

定理 3.3. (3.1) を満たすとき，$(\mathfrak{A}(w),\Delta,\varepsilon)$ は weak bialgebra．

4 Weak bialgebra A_σ

この節では [13, 14] における left bialgebroid の構成法の一般化を行う．なお，ここで構成された left bialgebroid は用いられた algebra の Frobenius-separable 性により，weak bialgebra となる．

Λ を空でない有限集合，X を有限集合，R を $(tr,e^{(1)}\otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra，$M_\Lambda(R)$ を Λ から R への写像全体のなす algebra とする．$\sigma^{ab}_{cd}\in M_\Lambda(R)$ $(a,b,c,d\in X)$，$\sigma=\{\sigma^{ab}_{cd}\}_{a,b,c,d\in X}$，$G_\Lambda$ を Λ から Λ への全単射全体のなす群，G を G_Λ^{op} の部分群とする．すると G は Λ に次のようにして右から作用する: $\lambda\alpha=\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda,\alpha\in G)$.

$$HX:=(M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}}M_\Lambda(R)^{op})\bigsqcup\{L_{ab}\mid a,b\in X\}\bigsqcup\{(L^{-1})_{ab}\mid a,b\in X\}$$

とし，$\mathbb{K}\langle HX\rangle$ を HX で生成される free algebra とする．また，I_σ を以下の元 (1)〜(5) で生成される $\mathbb{K}\langle HX\rangle$ の両側イデアルとし，$A_\sigma:=\mathbb{K}\langle HX\rangle/I_\sigma$ と定める．

(1) $\xi+\xi'-(\xi+\xi')$, $c\xi-(c\xi)$, $\xi\xi'-(\xi\xi')$ $(\forall c\in\mathbb{K},\forall\xi,\xi'\in M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}}M_\Lambda(R)^{op})$.
$\xi+\xi'$ は，$\mathbb{K}\langle HX\rangle$ の和，$(\xi+\xi')$ は，$M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}}M_\Lambda(R)^{op}$ の和を表す．積やスカラー倍についても同様．

(2) $\displaystyle\sum_{c\in X}L_{ac}(L^{-1})_{cb}-\delta_{ab}$, $\displaystyle\sum_{c\in X}(L^{-1})_{ac}L_{cb}-\delta_{ab}$ $(\forall a,b\in X)$.

(3) $(T_{\deg(a)}(f)\otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{ab}-L_{ab}(f\otimes 1_{M_\Lambda(R)})$,
$(1_{M_\Lambda(R)}\otimes T_{\deg(b)}(f))L_{ab}-L_{ab}(1_{M_\Lambda(R)}\otimes f)$,
$(f\otimes 1_{M_\Lambda(R)})(L^{-1})_{ab}-(L^{-1})_{ab}(T_{\deg(b)}(f)\otimes 1_{M_\Lambda(R)})$,
$(1_{M_\Lambda(R)}\otimes f)(L^{-1})_{ab}-(L^{-1})_{ab}(1_{M_\Lambda(R)}\otimes T_{\deg(a)}(f))$ $(\forall f\in M_\Lambda(R),\forall a,b\in X)$.
deg は X から G への写像.

(4) $\displaystyle\sum_{x,y\in X}(\sigma_{ac}^{xy}\otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{yd}L_{xb}-\sum_{x,y\in X}(1_{M_\Lambda(R)}\otimes\sigma_{xy}^{bd})L_{cy}L_{ax}$ $(\forall a,b,c,d\in X)$.

(5) $\emptyset-1_{M_\Lambda(R)}\otimes 1_{M_\Lambda(R)}$
$\emptyset$ は空語を表す.

Algebra の準同型写像 $s_{M_\Lambda(R)}:M_\Lambda(R)\to A_\sigma, t_{M_\Lambda(R)}:M_\Lambda(R)^{op}\to A_\sigma$ を以下で定義する.

$$s_{M_\Lambda(R)}(f)=f\otimes 1_{M_\Lambda(R)}+I_\sigma \tag{4.1}$$
$$t_{M_\Lambda(R)}(f)=1_{M_\Lambda(R)}\otimes f+I_\sigma\ \ (f\in M_\Lambda(R)) \tag{4.2}$$

$s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}$ は (2.1) を満たし，(2.2) により，A_σ は $(M_\Lambda(R),M_\Lambda(R))$-両側加群となる.

命題 4.1. 加群として,
$$A_\sigma\otimes_{M_\Lambda(R)}A_\sigma\cong(A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)/I_2$$
I_2 は $t_{M_\Lambda(R)}(f)\otimes 1_{A_\sigma}-1_{A_\sigma}\otimes s_{M_\Lambda(R)}(f)$ $(\forall f\in M_\Lambda(R))$ なる元で生成される $A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma$ の右イデアル.

証明. 以下の加群の準同型写像 $\Phi:A_\sigma\otimes_{M_\Lambda(R)}A_\sigma\to(A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)/I_2$, $\Xi:A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma\to A_\sigma\otimes_{M_\Lambda(R)}A_\sigma$, $\tilde{\Xi}:(A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)/I_2\to A_\sigma\otimes_{M_\Lambda(R)}A_\sigma$ は $\Phi\circ\tilde{\Xi}=\mathrm{id}_{(A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)/I_2}$, $\tilde{\Xi}\circ\Phi=\mathrm{id}_{A_\sigma\otimes_{M_\Lambda(R)}A_\sigma}$ を満たす.

$$\Phi(a\otimes b)=a\otimes b+I_2$$
$$\Xi(a\otimes b)=a\otimes b\ \ (a,b\in A_\sigma)$$
$$\tilde{\Xi}(\alpha+I_2)=\Xi(\alpha)\ \ (\alpha\in A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)$$

□

Algebra の準同型写像 $\overline{\Delta}:\mathbb{K}\langle HX\rangle\to A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma$ を，以下で定義する.

$$\overline{\Delta}(\xi)=s_{M_\Lambda(R)}\otimes t_{M_\Lambda(R)}(\xi)\ \ (\xi\in M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}}M_\Lambda(R)^{op})$$
$$\overline{\Delta}(L_{ab})=\sum_{c\in X}L_{ac}+I_\sigma\otimes L_{cb}+I_\sigma\ \ (a,b\in X)$$
$$\overline{\Delta}((L^{-1})_{ab})=\sum_{c\in X}(L^{-1})_{cb}+I_\sigma\otimes(L^{-1})_{ac}+I_\sigma$$

命題 4.2. $\overline{\Delta}(I_\sigma)\subset I_2$ で，以下の加群の準同型写像 $\nabla_{M_\Lambda(R)}:A_\sigma\to(A_\sigma\otimes_{\mathbb{K}}A_\sigma)/I_2$ は well-defined.

$$\nabla_{M_\Lambda(R)}(a+I_\sigma)=\overline{\Delta}(a)+I_2\ \ (a\in\mathbb{K}\langle HX\rangle)$$

系 4.3. $\Delta_{M_\Lambda(R)}=\tilde{\Xi}\circ\nabla_{M_\Lambda(R)}$ は $(M_\Lambda(R),M_\Lambda(R))$-両側加群の準同型写像.

Algebra の準同型写像 $\overline{\chi} : \mathbb{K}\langle HX\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M_\Lambda(R))$ を，以下で定義する．

$$\begin{aligned}&\overline{\chi}(\xi) = \zeta(\xi)\ \ (\xi \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op})\\ &\overline{\chi}(L_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)}\\ &\overline{\chi}((L^{-1})_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)^{-1}}\ \ (a, b \in X)\end{aligned}$$

ただし，$\zeta(f \otimes g) = \rho_l(f)\rho_r(g)$, $\rho_l(f)(h) = fh$, $\rho_r(g)(h) = hg$ $(f, g, h \in M_\Lambda(R))$.

命題 4.4. (4.3) を満たすとき，$\overline{\chi}(I_\sigma) = \{0\}$ であり，$\chi(a + I_\sigma) = \overline{\chi}(a)$ $(a \in \mathbb{K}\langle HX\rangle)$ は well-defined な algebra の準同型写像．

$$\begin{cases}\sigma_{cd}^{ab}(\lambda) \in (R \text{ の中心})\ \ (\forall \lambda \in \Lambda, \forall a, b, c, d \in X)\\ \lambda\deg(d)\deg(b) \neq \lambda\deg(c)\deg(a) \Rightarrow \sigma_{ac}^{bd}(\lambda) = 0\end{cases} \tag{4.3}$$

χ を用いて，$(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$-両側加群の準同型写像 $\pi_{M_\Lambda(R)} : A_\sigma \to M_\Lambda(R)$ を以下で定義する．

$$\pi_{M_\Lambda(R)}(a) = \chi(a)(1_{M_\Lambda(R)})$$

定理 4.5. (4.3) を満たすとき，$A_\sigma := (A_\sigma, M_\Lambda(R), s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}, \Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)})$ は，left bialgebroid.

$M_\Lambda(R)$ は以下の $(Tr, E^{(1)} \otimes E^{(2)})$ により Frobenius-separable となる．

$$Tr(f) = \sum_{\lambda\in\Lambda} tr(f(\lambda)),\ \ E^{(1)} \otimes E^{(2)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_M^{(1)}\delta_\lambda \otimes e_M^{(2)}\delta_\lambda\ \ (f \in M_\Lambda(R))$$

ただし，$\delta_\lambda(\mu) = \delta_{\lambda\mu}$, $r_M(\lambda) = r$ $(r \in R, \lambda, \mu \in \Lambda)$．よって，命題 2.5 の Δ と ε により，A_σ は weak bialgebra となる．

5 主定理：Weak bialgebra homomorphism ϕ

この節では，[8] の一般化として，4 節の weak bialgebra A_σ と同様の設定のもとで構成される 3 節の weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ との間に準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ を構成する．

A_σ を 4 節で構成された weak bialgebra とする．Λ 上の quiver Q を，$Q := \Lambda \times X$, $\mathfrak{s}(\lambda, x) = \lambda$, $\mathfrak{t}(\lambda, x) = \lambda\deg(x)$ $(\lambda \in \Lambda, x \in X)$ と定める．また，algebra R の元の族 $w_\sigma = w$ は以下を満たすと仮定する．

$$\mathbf{w}\begin{bmatrix}(\lambda,a)\\ (\mu,c)\quad\quad(\lambda',b)\\ (\mu',d)\end{bmatrix} = \delta_{\lambda\mu}\sigma_{dc}^{ba}(\lambda)\ \ (\forall((\lambda,a),(\lambda',b)),((\mu,c),(\mu',d)) \in Q^{(2)})$$

この条件により，(3.1) を満たし，weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ が構成できる．

A_σ は以下の環準同型写像 $G : R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \to A_\sigma$ により，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群となる．

$$G(r \otimes r') = (r_M \otimes r'_M) + I_\sigma\ \ (r, r' \in R)$$

定理 5.1. G を用いて，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\phi} : \overline{\mathfrak{A}(w_\sigma)} \to A_\sigma$ を，以下で定義する．

$$\overline{\phi}(\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}) = (\delta_{\mathfrak{s}(p)} \otimes \delta_{\mathfrak{s}(q)})L_{x_1y_1}\dots L_{x_my_m} + I_\sigma\ \ (p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ただし，$p = ((\lambda_1, x_1), \dots, (\lambda_m, x_m))$, $q = ((\mu_1, y_1), \dots, (\mu_m, y_m))$．このとき，$\overline{\phi}(I) = \{0\}$ であり，weak bialgebra の準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ $(\phi(\alpha + I) = \overline{\phi}(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}(w_\sigma))$ を導く．

参考文献

[1] R. J. Baxter, "*Partition function of eight-vertex lattice model*", Ann. Physics, 70, 193-228, 1972.

[2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, "*Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*", J. Algebra, 221, 385-438, 1999.

[3] G. Böhm, K. Szlachányi, "*Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals, and duals*", J. Algebra, 274, 708-750, 2004.

[4] V. G. Drinfel'd, "*On some unsolved problems in quantum group theory*", In Quantum groups (Leningrad, 1990), volume 1510 of Lecture Notes in Math., 1-8, 1992.

[5] P. Etingof, A. Varchenko, "*Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups*", Comm. Math. Phys., 196, 591-640, 1998.

[6] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, A. Takhtajan, "*Quantization of Lie groups and Lie algebras*", in:Algebraic analysis, Academic Press, Inc., Boston, 129-139, 1989.

[7] T. Hayashi, "*Quantum groups and Quantum semigroups*", J. Algebra, 204, 225-254, 1998.

[8] D. K. Matsumoto, K. Shimizu, "*Quiver-theoretical approach to dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 507, 47-80, 2018.

[9] J. B. McGuire, "*Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems*", J. Mathematical Phys., 5, 622-636, 1964.

[10] P. Schauenburg, "*Weak Hopf algebras and quantum groupoids*", In Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001), volume 61 of Banach Center Publ., 171-188, 2003.

[11] Y. Shibukawa, "*Dynamical Yang-Baxter maps*", Int. Math. Res. Not., (36), 2199-2221, 2005.

[12] Y. Shibukawa, "*Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition*", Publ. Res. Inst. Math. Sci., 43(4), 1157-1182, 2007.

[13] Y. Shibukawa, M. Takeuchi, "*FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 323, 1698-1728, 2010.

[14] Y. Shibukawa, "*Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 449, 408-445, 2016.

スピン多様体上の Dirac 作用素の熱核について *

埼玉大学大学院理工学研究科 数理電子情報系専攻
白川匠 (Takumi SHIRAKAWA)†

概要

閉スピン多様体上の Dirac 作用素の熱核を漸近展開したときの項の係数は一般にリーマン曲率を含む複雑な式になり, 特に高次の項の係数を計算するのは非常に困難である. そこで Getzler 氏により発案されたスケール変換を用いて高次の項の係数を初等的な微積分の知識のみでできる計算方法を考案した. 本発表ではその計算方法といくつか計算した結果を述べる.

1 Introduction

スピン多様体 $(M^m, g, \rho : \mathrm{Spin}(T^*M, g) \to SO(T^*M, g))$ 上には, スピノール束 $\not{S}$

$$\not{S} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{Spin}(T^*M, g) \times_{\mathrm{Spin}(m)} S_m, \quad (S_{2n} = S_{2n+1} = \mathbb{C}^n)$$

と 1 階の楕円型微分作用素である Dirac 作用素 $\not{D} : \Gamma(\not{S}) \to \Gamma(\not{S})$

$$\not{D} = \sum e^j \circ \nabla^{\not{S}}_{e_j} \overset{\text{def.}}{=} \sum e^j \circ \Big\{ e_j + \frac{1}{4} \sum \omega(\nabla^g)^k_\ell(e_j)\, e^\ell \circ e^k \circ \Big\}$$

が得られる. ここで $\circ$ は Clifford action, $e_\bullet = (e_1, \cdots, e_m)$ は TM の (local) orthonormal frame, $e^\bullet = (e^1, \cdots, e^m)$ は $e_\bullet$の dual frame である. Dirac 作用素については次の指数定理が有名である.

Theorem 1.1 (Atiyah-Singer [2])
偶数次元の閉スピン多様体上の Dirac 作用素について次が成り立つ.

$$\mathrm{ind}(\not{D}^+) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}} \int_M \hat{A}(M)$$

$\mathrm{ind}(\not{D}^+)$ とは Dirac 作用素をフレドホルム作用素と見たときの解析的指数

$$\mathrm{ind}(\not{D}^+) = \dim \mathrm{Ker}\, \not{D}^+ - \dim \mathrm{CoKer}\, \not{D}^+$$

であり, $\hat{A}(M) \overset{\text{def.}}{=} \det{}^{1/2}\Big(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)}\Big)$ は $\hat{A}$-*genus* と呼ばれる topological な量である.

指数定理には様々な証明方法が知られているが, 次の熱方程式の初期値問題

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \not{D}^2\right)\phi = 0, \quad \lim_{t \downarrow 0} \|\phi(t, \cdot) - \phi_0\|_{L^2} \to 0 \quad (\phi_0 \in \Gamma(\not{S}))$$

---

* 本研究は長瀬正義氏 (埼玉大学) との共同研究である.

† E-mail:t.shirakawa.220@gmail.com

を用いる証明方法がある. この熱方程式は unique な解及び熱核 $e^{-t\not{p}^2}(P,P')$ を持つ. そして, 熱核は各点 $P^0 \in M$ の周りで漸近展開 :

$$
\begin{aligned}
e^{-t\not{p}^2}(P^0,P^0) &\underset{t\downarrow 0}{\sim} (4\pi t)^{-m/2}\sum_{l=0}^{\infty} t^l K_l(P^0), \quad K_l(P^0) \in \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M) \qquad (1)\\
&= (4\pi t)^{-m/2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m} t^l K_{l,[p]}(P^0)\\
&\overset{\text{def.}}{=} (4\pi t)^{-m/2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\sum_{|\alpha|=p} t^l e^{\alpha_1}\circ\cdots\circ e^{\alpha_{|\alpha|}}\cdot K_{l,\alpha}(P^0)
\end{aligned}
$$

を持つ. この係数たち $K_l(P^0)$ はリーマン曲率を含む複雑な式になり, 実際に計算をすることは非常に困難であるが, 指数定理では (1) 式において, $l = m/2$ のときの係数 $K_{m/2}(P^0)$ を計算することで証明される. この計算が指数定理の証明では 1 番の難所であり, 一般に係数たち $K_l(P^0)$ を計算する実用的な方法はない. そこで一般に係数たち $K_l(P^0)$ を計算できるよう, 初等的な微積分の知識のみで計算できる手法を考案した. この手法を適用することで具体的に次のような計算結果を得た.

$$
\begin{aligned}
&K_0(P^0) = 1,\\
&K_1(P^0) = -\frac{\sum R_{jiji}}{12} = -\frac{s(\nabla^g)(P^0)}{12},\\
&K_2(P^0) = \det{}^{1/2}\Big(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\Big)_{[4]} - \frac{5\sum R_{jijikk}}{24} - \frac{\sum R_{jijkik}}{3}\\
&\qquad + \frac{\big(\sum R_{jiji}\big)^2}{432} + \frac{\sum R_{jkik}R_{jk'ik'}}{12} + \frac{2\sum R_{jkik'}\big(R_{jkik'}+R_{jk'ik}\big)}{27}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
R_{j_1j_2j_3j_4j_5\cdots j_\ell} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial^{\ell-4} g(F(\nabla^g)(\partial/\partial x_{j_3},\partial/\partial x_{j_4})\partial/\partial x_{j_2},\partial/\partial x_{j_1})}{\partial x_{j_5}\cdots\partial x_{j_\ell}}(P^0)
$$

であり, $s(\nabla^g)(P^0)$ はスカラー曲率である.

2 Geztler's rescaling transformation

指数定理の証明では $K_{m/2}(P^0)$ の計算が 1 番の難所であるが, この難所を Getzler 氏はスケール変換を用いて洗練された計算方法を与えた. ([4], [5])

Definiton 2.1 (Geztler's rescaling transformation)
P^0を中心とする局所座標 (U,x) を取り, $\varepsilon > 0$ とする.
$\omega(t,x) = \sum e^I \cdot \omega_I(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+\times(U,x),\mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$ に対して

$$
\begin{aligned}
(T_\varepsilon\omega)(t,x) &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{I=(i_1,\cdots,i_{|I|})}^{i_1<\cdots<i_{|I|}} e^I\cdot\varepsilon^{-|I|/2}\cdot\omega_I(\varepsilon t,\varepsilon^{1/2}x)\\
&= \sum_{I=(i_1,\cdots,i_{|I|})}^{i_1<\cdots<i_{|I|}} e^{i_1}\circ\cdots e^{i_{|I|}}\cdot\varepsilon^{-|I|/2}\cdot\omega_I(\varepsilon t,\varepsilon^{1/2}x)
\end{aligned}
$$

とする. そして任意の作用素

$$A : C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M)) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))$$

に対し

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(A) &\overset{\text{def.}}{=} T_\varepsilon \circ A \circ T_\varepsilon^{-1} \\ &= T_\varepsilon \circ A \circ T_{\varepsilon^{-1}} \end{aligned}$$

とする. G_εを Geztler′s rescaling transformation という.

Remark 2.2 具体的例をいくつか挙げる.

$$G_\varepsilon(f\times) = f(\varepsilon^{1/2}x)\times, \quad G_\varepsilon\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \varepsilon^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad G_\varepsilon\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \varepsilon^{-2/2}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Getzler 氏はこの変換を熱方程式に応用し, 指数定理の証明を与えた.

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \not{D}^2\Big)e^{-t\not{D}^2}(x) = 0 \\ &\qquad \Downarrow\ \varepsilon > 0,\ \text{Geztler′s rescaling transformation} \\ &\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)}\Big)e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &e^{-t\not{D}^2}(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{-t\not{D}^2}(x) \\ &\mathbb{D}_{(\varepsilon)} \overset{\text{def.}}{=} \varepsilon^{2/2}G_\varepsilon(\not{D}^2) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\mathbb{D}_{i/2} \\ &e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) \overset{\text{def.}}{=} \varepsilon^{m/2}(T_\varepsilon(e^{-t\not{D}^2}(x))) = \varepsilon^{m/2}e^{-\varepsilon t\not{D}^2}(\varepsilon^{1/2}x) \end{aligned}$$

である.

Theorem 2.3 (Getzler[5]) $[0,1]\times(U,x)$ 上 uniformal に次の漸近展開を得る.

$$\begin{aligned} e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) &\underset{\varepsilon^{1/2}\downarrow 0}{\sim} q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2}(t,x) \qquad \Big(q_t(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\Big) \\ &= q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\varepsilon^{i/2}\gamma_{i/2,[p]}(t,x) \\ &\overset{\text{def.}}{=} q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=p}^{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{|\alpha|})}\varepsilon^{i/2}e^{\alpha_1}\circ\cdots\circ e^{\alpha_{|\alpha|}}\cdot\gamma_{i/2,\alpha}(t,x) \end{aligned}$$

そして次を満たす

$$\gamma_{0/2}(0,0) = 1, \quad \gamma_{i/2}(0,0) = 0\ (i>0)$$

$$\begin{aligned} q_t(x)\gamma_{0/2}(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}}\det{}^{1/2}&\Big(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)}\Big) \\ &\cdot\exp\Big(-\frac{1}{4t}\Big\langle x\Big|\frac{tR(P^0)}{2}\coth(\frac{tR(P^0)}{2})\Big|x\Big\rangle\Big) \end{aligned}$$

そして, 熱核の漸近展開の係数たちを計算するにあたって重要となるのが次の主張である.

Theorem 2.4 (Getzler)

$$K_{l,[p]}(0) = \begin{cases} 0 & (l < p/2) \\ \gamma_{l-p/2,[p]}(1,0) & (l \geqq p/2) \end{cases}$$

つまり, $\gamma_{l,[p]}(1,0)$ たちを調べれば $K_{l,[p]}(0)$ たちがわかるのである. そこで$\gamma_{l,[p]}(1,0)$ たちの計算方法を考える.

3 Main Theorem

まず, $\gamma_{l,[p]}(1,0)$ たちを調べるにあたって重要となるのが次の主張である.

Lemma 3.1 (N. S.)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right) q_t(x) \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Psi_{i/2}(t,x) = 0 \quad \text{(形式和)} \\ \\ \Psi_{0/2,0/0}(0,0) = 1,\ \Psi_{i/2,0/0}(0,0) = 0\,(i>0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) q_t(x) \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} t^{l/2} \Psi_{0/2,l/2} = 0,\ \Psi_{0/2,0/2}(0) = 1 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2}\right) (q_t \Psi_{i/2}) + \displaystyle\sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i} \mathbb{D}_{i_1}(q_t \Psi_{i_2}) = 0,\ \Psi_{i/2,0/2}(0) = 0\,(i>0) \end{cases} \tag{2}$$

を満たす列 $\{\Psi_{i/2}(t,x) \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times (U,x), \mathbb{C}l(T^*_{P^0}M))\}_{i=0}^{\infty}$は unique に存在する.

よって Lemma 3.0.1 の (2) の微分方程式を満たすようなものを見つければよい.

Theorem 3.2 (N. S.)

$$\begin{aligned} q_t(x-y)\Psi_{0/2}(t,x,y) &\overset{\text{def.}}{=} q_t(x-y)\gamma_{0/2}(t,x-y) \\ q_t(x-y)\Psi_{i/2}(t,x,y) &\overset{\text{def.}}{=} -\Big(q_t\Psi_{0/2} \# \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2<i} \mathbb{D}_{i_1/2}(q_t\Psi_{i_2})\Big)(t,x,y) \\ &= \sum_{\sum i_l = i}^{i_1,\cdots,i_k>0} (-1)^k \Big(q_t\gamma_{0/2} \# \mathbb{D}_{i_1/2}(q_t\gamma_{0/2}) \# \cdots \# \mathbb{D}_{i_k/2}(q_t\gamma_{0/2})\Big)(t,x,y)\,(i>0) \end{aligned}$$

で定義される$\Psi_{i/2}(t,x,y)$ は, Lemma 3.0.1 の微分方程式 (2) の unique な解であり,

$$\gamma_{i/2}(t,x) = \Psi_{i/2}(t,x,0)$$

を満たす. ここで, $\#$ は convolution を表す. さらに,

$$\begin{aligned} &i \text{ が奇数} \Rightarrow \gamma_{i/2}(t,x) \text{ は } x \text{ に関して奇関数} \\ &i \text{ が偶数} \Rightarrow \gamma_{i/2}(t,x) \text{ は } x \text{ に関して偶関数} \end{aligned}$$

である. 特に, i が奇数 $\Rightarrow \gamma_{i/2}(1,0) = 0$ が言える.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math. **19** (1973), 279–330.

[2] M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1968), 422–433

[3] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.

[4] E. Getzler, Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, Comm. Math. Phys. **92** (1983), 163–178.

[5] E. Getzler, A short proof of the Atiyah-Singer index theorem, Topology **25** (1986), 111–117.

[6] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn, Spin geometry, Princeton Math. Series **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[7] M. Nagase, The heat equation for the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.

[8] M. Nagase, A formula for the heat kernel coefficients on Riemannian manifolds, preprint.

接触多様体の Fefferman 空間と Dirac 作用素

埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報系専攻　大山 人紀（Ohyama Toki）

概要

接触リーマン多様体 $(M^{2n+1}, \theta; \xi, J, ; g)$ には $(2n+1, 1)$ 型 Lorentze 計量が自然に入る S^1- 束 Fefferman 空間が存在する．Fefferman 空間の計量である Fefferman 計量は CR 共形変換で共形変換する．そのことからもわかるように接触リーマン多様体の研究で非常に有効的である．H.Baum はスピン構造が存在するとき、Fefferman 空間と似た Fefferman-Baum 空間を導入して、可積分条件を満たす接触リーマン多様体を研究した．さらに長瀬正義は可積分条件でない場合でも同様の方法が有用であることを示した．実は、これらと同様のことはスピン c 構造を持つときにも成立する．それを最後に説明する。特に接触リーマン多様体はスピン c 構造は常に持つ．

1　導入

接触多様体 $(M^{2n+1}, \theta; \xi)$（ξ は Reeb 場）は $d\theta$ が $H := \ker\theta$ で非退化かつ強擬凸のとき、(1,1) テンソル J とリーマン計量 g で

$$J^2X = -\mathrm{id}_{TM} + \theta(X)\xi \quad , \quad g(X,Y) = d\theta(X, JY) + \theta(X)\theta(Y)$$

となるものが存在する．これより接触リーマン多様体 $(M.\theta; \xi, J; g)$ となる．このとき、(H, J, g) はエルミート束になる．特に

$$H^c = H_+ \oplus H_-, \quad H_\pm := \{v \in H^c \,|\, Jv = \pm iv\}$$

となる．エルミート束が存在するときスピン c 束 $\mathbb{S}^c_H$ が存在する．さらに, $\wedge^{0,*}_H(M)^* := \{\omega \in T^*M^c \,|\, X\rfloor\omega = 0\,(X \in H_+ \oplus \mathbb{C}\xi)\}$ とすると,

$$\mathbb{S}^c_H = \wedge^{0,*}_H(M)$$

となる．ここで

$$K := \wedge^{n+1,0}(M) := \{\omega \in \wedge^{n+1}T^*M^c \,|\, X\rfloor\omega = 0\,(X \in H_-)\}$$

とすると, エルミート束 (H, J, g) から誘導されるスピン c 構造は

$$Spin^c(M) \to SO(M) \times U(K^{-1})$$

と書かれる．

また接触リーマン多様体にはよく知られているように以下の Tanno 接続が存在する．

命題 1. 以下を満たす線形接続 ${}^*\nabla$ が一意に存在する。

$$ {}^*\nabla\theta = 0, \quad {}^*\nabla g = 0, \quad {}^*\nabla_X J = Q(\cdot, X) $$
$$ T(X_+, Y_+) = 0, \quad T(X_+.Y_-) = ig(X_+, Y_-)\xi, \quad J \circ \tau + \tau \circ J = 0 $$

ここで $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \tau(X) := T(\xi, X)$ であり, X_+, X_- などはそれぞれ $\Gamma(H_+), \Gamma(H_-)$ の元である. Q は *Tanno* テンソルである. この接続 ${}^*\nabla$ を *Tanno* 接続という.

また, Tanno 接続の変形として Hermitian Tanno 接続が存在する.

命題 2. 以下を満たす線形接続 ∇^{TN} が一意に存在する。

$$ \nabla^{TN}\theta = 0, \quad \nabla^{TN} g = 0, \quad \nabla^{TN}_X J = Q(\cdot, X) $$
$$ T(X_+, Y_+) = 0, \quad T(X_+.Y_-) = ig(X_+, Y_-)\xi, \quad J \circ \tau + \tau \circ J = 0 $$

この接続 ∇^{TN} を *Hermitian Tanno* 接続という.

2 スピン構造をもつ接触リーマン多様体上の Fefferman-Baum 空間

スピン構造を持つ接触リーマン多様体にはスピン構造に依存した複素ライン束 $\sqrt{K}$ ($\sqrt{K}^2 = K$) が存在し, $\mathbb{S}_{TM}$ をスピン構造から誘導されたスピン束とすると,

$$ \mathbb{S}_{TM} = \mathbb{S}^c_H \otimes \sqrt{K} $$

となる. $\mathbb{S}_{TM}$ 上の ∇^g から定まる Dirac 作用素 $D^{\mathbb{S}_{TM}}$ は, (ξ_A) をユニタリー枠とすると、

$$ D^{\mathbb{S}_{TM}} = \sum \xi_A \circ \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi_{\bar{A}}} - \frac{1}{4}\xi \circ d\theta \circ $$

となる. ここで, $\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi_{\bar{A}}}$ は ∇^{TN} から定まる $\mathbb{S}_{TM}$ の接続である. また, $\mathbb{S}^c_H = \wedge^{0,*}_H(M)$ より

$$ \mathbb{S}_{TM} \otimes \sqrt{K}^{-1} = \wedge^{0,*}_H(M) $$

となる. $\sqrt{K^{-1}}$ には ∇^{TN} から接続 $\mathcal{A}(K^{-1})$ ($= \mathrm{Tr}\nabla^{TN}$) が定まり, 上の同型のもと次の命題が成り立つ.

命題 3.

$$ \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})} + \frac{1}{2}\mathcal{A}(K^{-1}) = \nabla^{TN} $$

一方、

$$ \sqrt{F(M)} := \sqrt{K}_0/\mathbb{R}_{>0} $$

とすると, $\sqrt{\pi} : \sqrt{F(M)} \to M$ は S^1- 束になる. この $\sqrt{F(M)}$ には以下の自明化が存在する.

$$ \sqrt{\pi}^{-1}(U) \simeq U \times [0, 2\pi), \quad \sqrt{[\theta \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n]}(p) \cdot e^{i\Theta^\vee} \leftrightarrow (p, \Theta^\vee) $$

$\Sigma\surd := (n+2)\partial/\partial\Theta\surd$ とおく.

また, Fefferman 空間と同様にして, 接続になる $\sqrt{F(M)}$ 上の 1 次形式 $\sigma\surd$（$i(n+1)\sigma\surd$ が Ehresmann 型の接続になる）が存在する. これによって,

$$T\sqrt{F(M)} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$$

垂直束と水平束に分かれる. $\sigma\surd$ を用いて, CR 共形変換で共形変換する $(2n+1,1)$ 型 Lorentze 計量 $h\surd$ が存在する. この組 $(\sqrt{F(M)}, h\surd)$ を Fefferman-Baum 空間という. $(e_1, \cdots, e_{2n}, \xi)$ を TM の正規直交枠とすると,

$$(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} e_1, \cdots, \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} e_{2n}, \frac{N+\Sigma\surd}{2\sqrt{2}}; \frac{N-\Sigma\surd}{2\sqrt{2}})$$

が $(\sqrt{F(M)}, h\surd)$ の正規直交枠になる.

さらに, (M,g) のスピン構造から $(\sqrt{F(M)}, h\surd)$ にはスピン構造が入る. これを $\mathbb{S}_{\sqrt{F}}$ とかくと,

$$\mathbb{S}_{\sqrt{F}} = \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM} \oplus \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM}$$

となる. この同型のもと, 以下の定理が成り立つ.

定理 1. (ξ_A) を TM のユニタリー枠とし、$\sqrt{\pi}^*\xi_A$ を水平束への持ち上げとする. 局所的に以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} D^{\mathbb{S}_{\sqrt{F}}} = &\sum_{C\neq 0} \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_C \circ (\sqrt{\pi}^* \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi_C}, \sqrt{\pi}^* \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi_C}) \\ &+ \frac{N}{2\sqrt{2}} \circ (\frac{\Sigma\surd}{\sqrt{2}} \cdot - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* d\theta \circ) + \frac{\Sigma\surd}{2\sqrt{2}} \circ (\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi}) \\ &- \frac{\Sigma\surd}{2\sqrt{2}} \circ \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \sum_{A,B\neq 0} \mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar{B}}, \xi_{\bar{A}}) \xi_B \circ \xi_A \circ \end{aligned}$$

3　スピン c 構造を持つ接触リーマン多様体

スピン構造と異なり, 一般には $\sqrt{K}$ は存在しない. そのため, $\sqrt{F(M)}$ が構成できないことに注意されたい. そこで, スピン c 構造に依存する同様のものを構成する. スピン c 構造を

$$Spin^c(M) \to SO(M) \times U(L)$$

とすると, 標準的スピン c 束に依存する

$$\mathcal{L} = \sqrt{L} \otimes \sqrt{K}$$

となる複素ライン束が存在する（$\sqrt{L}, \sqrt{K}$ は局所的には存在する）. L の接続を $\mathcal{A}(L)$ とすると, $\mathbb{S}^c_{TM}$ 上の Dirac 作用素は

$$D^{\mathbb{S}^c_{TM}} = \sum \xi_A \circ (\nabla^{(\mathbb{S}^c_{TM}:\nabla^{TN})}_{\xi_{\bar{A}}} + \frac{1}{2}\mathcal{A}(L)(\xi_{\bar{A}})) - \frac{1}{4}\xi \circ d\theta \circ$$

また, $\mathbb{S}^c_{TM} = \mathbb{S}^c_H \otimes \mathcal{L}$ となり, $\mathbb{S}^c_{TM} \otimes \mathcal{L}^{-1} = \wedge^{0,*}_H(M)$ より

$$\nabla^{(\mathbb{S}^c_{TM};\nabla^{TN})} + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(K^{-1}) + \mathcal{A}(L^{-1})) = \nabla^{TN}$$

また, $\sqrt{F(M)}$ に対応する

$$F(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_0/\mathbb{R}_{>0}$$

が構成され, $\sqrt{\pi} : F(\mathcal{L}) \to M$ は S^1- 束になる. するとスピン構造の場合と同様にして以下の事柄が成り立つ.

接続を構成する $\sigma\surd$ が存在し, これより $(2n+1,1)$ 型 Lorentze 計量 $h\surd$ が存在する. (M,g) のスピン c 構造から $(F(\mathcal{L}), h\surd)$ のスピン c 構造が定まり, そのスピン c 束を $\mathbb{S}^c_{\sqrt{F}}$ と書と,

$$\mathbb{S}^c_{\sqrt{F}} = \sqrt{\pi}^*\mathbb{S}^c_{TM} \oplus \sqrt{\pi}^*\mathbb{S}^c_{TM}$$

となり, 以下が成り立つ.

定理 2.

$$\begin{aligned} D^{\mathbb{S}^c_{\sqrt{F}}} = &\sum_{C\neq 0} \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_C \circ (\sqrt{\pi}^*\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN},\mathcal{A}(L))}_{\xi_C}, \sqrt{\pi}^*\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN},\mathcal{A}(L))}_{\xi_C}) \\ &+\frac{N}{2\sqrt{2}} \circ (\frac{\Sigma\surd}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}^* d\theta \circ) + \frac{\Sigma\surd}{2\sqrt{2}} \circ (\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}^*\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN},\mathcal{A}(L))}_{\xi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}^*\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}:\nabla^{TN},\mathcal{A}(L))}_{\xi}) \\ &-\frac{\Sigma\surd}{2\sqrt{2}} \circ \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\pi}^* \sum_{A,B\neq 0} \mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar{B}}, \xi_{\bar{A}})\xi_B \circ \xi_A \circ \end{aligned}$$

参考文献

[1] J. Lee, *The Fefferman metric and pseudohermitian invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **296**(1)(1986), 411-429

[2] H. Baum, *Lorentzian twistor spinors and CR-geometry*, Diff. Geom. Appl. **11**(1999), 69-96

[3] M. Nagase, *Dirac operators on the Fefferman spin spaces in almost CR-geometry*, preprint

Convex property of Wulff shapes and regularity of their convex integrands

九州大学大学院数理学符数理学専攻　数理学コース
(Graduate School of Mathematics Kyushu University)
照屋靖志 (Yasushi TERUYA)

Abstract

We study the convexity of the Wulff shape. In this paper, we investigate a convex property of the Wulff shape, both locally and globally.

1 Introduction

Let $n \in \mathbb{N}$. We denote by S^n the unit sphere with center at the origin in $\mathbb{R}^{n+1}$. Let $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ be a positive continuous function. For any $\nu \in S^n$, we set

$$\Gamma_{\gamma,\nu} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, \nu \rangle \leq \gamma(\nu)\},$$

where $\langle\ ,\ \rangle$ stands for the standard inner product of $\mathbb{R}^{n+1}$. The definition of the **Wulff shape** for γ is as follows :

$$\mathcal{W}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in S^n} \Gamma_{\gamma,\nu}.$$

We note that the Wulff shape for γ is not smooth in general (examples of nonsmooth Wulff shapes are given in Section 2). γ is called **convex integrand** if the homogeneous extension $\tilde{\gamma}$ to $\mathbb{R}^{n+1}$ of γ is convex function. It is equivalent to the condition $\tilde{\gamma}(x+y) \leq \tilde{\gamma}(x) + \tilde{\gamma}(y)$ for any $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

By the fact which J. E. Taylor [3] proved in 1978, it is known that for a given $V > 0$, there exists a unique (up to translations) closed hypersuface S which minimizes an anisotropic surface energy E_γ among all closed piecewise smooth hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ enclosing the same volume V, and the minimizer S is homothetic with the boundary of the Wulff shape for γ. Here, for a smooth hypersurface S in $\mathbb{R}^{n+1}$ (when $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is an n-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{n+1}$, S is called a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$) with the outward pointing unit normal vector field ν on S, an anisotropic surface energy $E_\gamma(S)$ of S is as follows :

$$E_\gamma(S) := \int_S \gamma(\nu(p))\ dS,$$

where dS is the n-dimensional volume element of S. More generally, even if S is a piecewise smooth compact hypersurface without self-intersections, $E_\gamma(S)$ can be defined. In fact, we consider the integral $\int \gamma(\nu(p))\ dS$ over each part in which S is smooth and take the sum of all integrals. Therefore, the Wulff shape for γ is the solution of the isoperimetric problem for the functional E_γ. In the case where $\gamma \equiv 1$, the anisotropic surface energy $E_\gamma(S)$ is the usual n-dimensional volume of the hypersurface S, and the Wulff shape for γ is the unit sphere S^n. When $n = 2$, $E_\gamma(S)$ is the surface area of S. Thus, the Wulff shape for γ is the solution of the classical isoperimetric problem. The solution is known as a mathematical model of a soap

bubble. Thus, the Wulff shape is the generalization of the solution of the classical isoperimetric problem and the research for the Wulff shape is practical.

The Wulff shape is known as a mathematical model of a crystal. For example, it is known that the crystal of a salt is a cube and the crystal of an ice is an octahedron which is surrounded by two hexagons and six rectangles normal to them [7]. In general, the Wulff shape is not smooth. In some cases, the Wulff shape is a closed surface containing straight segments, flat faces and edges like a polytope. It is known that if γ satisfies the "convexity condition", the Wulff shape for γ has no edges, that is, the Wulff shape for γ is smooth (Note that we need to assume that γ is of C^2 to assume the convexity condition for γ. See [1], [4] for the definition of the "convexity condition".). However, it is not natural to assume the smoothness of the Wulff shape if we regard it as a mathematical model of a crystal. Also, to research more general properties of the Wulff shape, we neither assume high regularity of γ nor the convexity condition for γ in this paper.

We are interested in when the Wulff shape contains straight segments and flat faces. In 2017, H. Han and T. Nishimura [2] proved that the following (a) and (b) are equivalent :

(a) γ is of C^1.

(b) The boundary of the Wulff shape for γ has no segments.

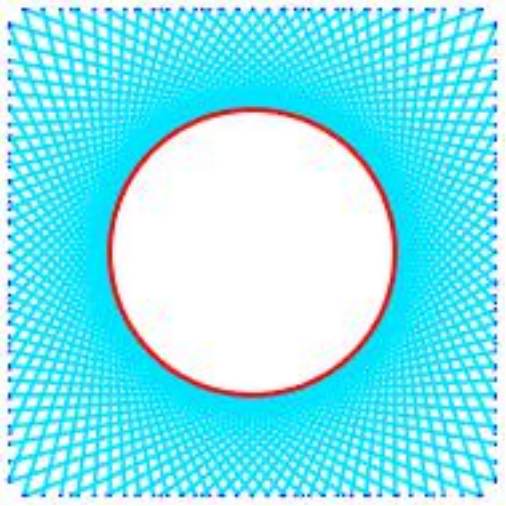
By their theorem, when γ is not of C^1, the Wulff shape for γ contains a straight segment. In this paper, we investigate more detail their relationship.

2 Preliminaries

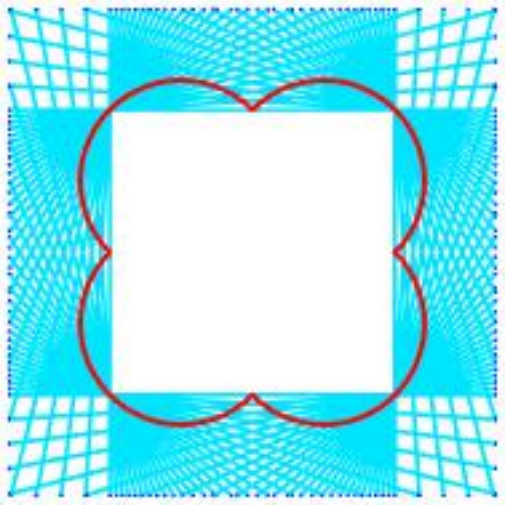
2.1 Examples of Wulff shapes

First, we would like to show many examples of Wulff shapes. In the following examples, the white part is the Wulff shape. The red curve is the γ-plot. Here, γ-plot is the set $\{\ \gamma(\nu)\nu \in \mathbb{R}^{n+1} | \nu \in S^n\}$ The blue lines are the boundaries of the half spaces $\Gamma_{\gamma,\nu}$.

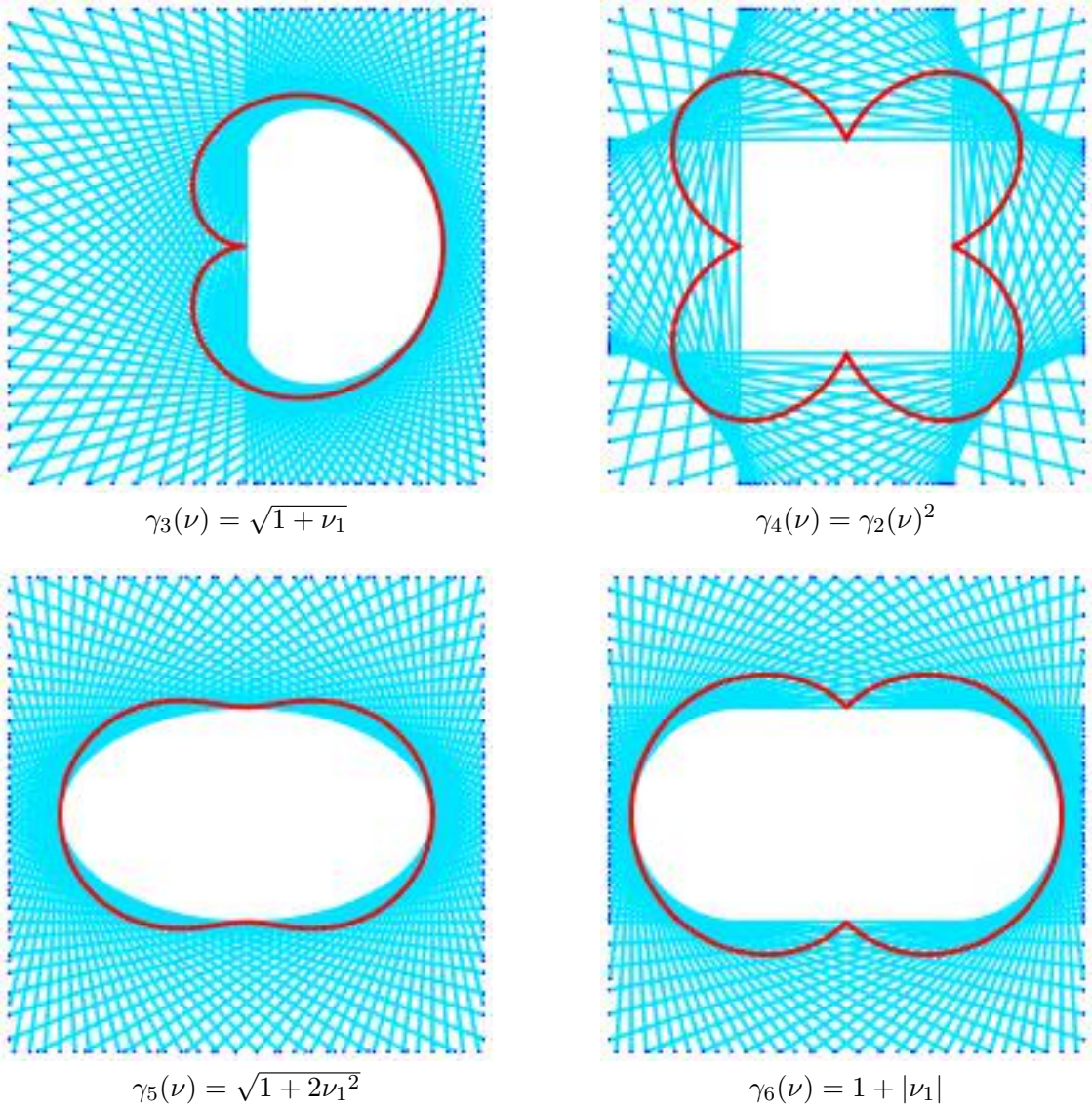
Example 2.1. *Let* $\gamma_i : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in S^1$.



$\gamma_1 \equiv 1$
the Wulff shape is a circle.



$\gamma_2(\nu) = |\nu_1| + |\nu_2|$
the Wulff shape is a square.



$\gamma_3(\nu) = \sqrt{1+\nu_1}$ $\gamma_4(\nu) = \gamma_2(\nu)^2$

$\gamma_5(\nu) = \sqrt{1+2{\nu_1}^2}$ $\gamma_6(\nu) = 1+|\nu_1|$

Figure 1: Examples of Wulff shapes

2.2 Notations and Definitions

$$\mathcal{K}_0^{n+1} := \{A \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid A \text{ is a compact convex set containing the origin.}\}.$$

Let $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ be a non-negative continuous function. Then, by the definition of $\mathcal{W}_\gamma$, we can verify that $\mathcal{W}_\gamma \in \mathcal{K}_0^{n+1}$. Conversely, it is known that for a given $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$ there exists a continuous function $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that $W = \mathcal{W}_\gamma$. In fact, for a function $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ defined by

$$\gamma(\nu) := \max_{x \in W} \langle x, \nu \rangle \quad (\forall \nu \in S^n),$$

γ is continuous and $W = \mathcal{W}_\gamma$ holds (see [3] for details on the proof). The function $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ constructed as above is called the **convex integrand** for W and denoted by γ_W. For $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$ we set $C_W^0(S^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) := \{\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} |\ \gamma \text{ is continuous and } W = \mathcal{W}_\gamma\}$.

An element of $C_W^0(S^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ is called a **support function** for W. As demonstrated above, we obtain $C_W^0(S^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) \neq \phi$ (Because γ_W is contained in it.). But, $C_W^0(S^n, \mathbb{R}_{\geq 0}) = \{\gamma_W\}$ does

not hold in general, that is, a support function for a given $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$ is not unique.

For $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$ and $\nu \in S^n$, we denote by $F(W,\nu)$ the intersection of the boundary of W and the boundary of $\Gamma_{\gamma_W,\nu}$:

$$F(W,\nu) := \partial W \cap \partial\Gamma_{\gamma_W,\nu},$$

We call the set $F(W,\nu)$ the **ν-way face** of W. By the following remark, $F(W,\nu)$ is a nonempty set.

Remark 2.1. *The following* (a) *and* (b) *are equivalent.*

(a) γ *is the convex integrand for* W.

(b) $\forall \nu \in S^n \ : \ \partial W \cap \partial\Gamma_{\gamma,\nu} \neq \phi$.

Example 2.2. *Let* $W \in \mathcal{K}_0^2$ *be a square whose incircle is* S^1. *Then, for* $\nu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in S^1$ $F(W,\nu)$ *is the point* $(1,1)$ *that is an edge of* W. *For* $\nu = (0,1) \in S^1$, $F(W,\nu)$ *is the segment joining the points* $(-1,1)$ *and* $(1,1)$, *that is, a side of* W.

Definition 2.1. *Let* $\gamma\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Then, the homogeneous extension $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *of* γ *is defined by*

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} \|x\|\gamma(\frac{1}{\|x\|}x), & (x \neq \mathbf{0}), \\ 0, & (x = \mathbf{0}). \end{cases}$$

Remark 2.2. *Let* $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, *and* γ *be the convex integrand for* W. *Then, the homogeneous extension* $\tilde{\gamma}$ *of* γ *is represented as follows :*

$$\tilde{\gamma}(x) = \max_{a \in W} \langle x, a \rangle \quad (\forall x \in \ \mathbb{R}^{n+1}).$$

Then, $\tilde{\gamma}$ *is convex function.*

For $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, we denote by $Int(A)$ the set consisting of interior points of A.

Definition 2.2. *Let* $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Then, if* $\overline{xy} \setminus \{x,y\} \subset Int(W)$ *holds for any distinct two points* $x, y \in \partial W$, *we say that* W *is* **strictly convex**.

Example 2.3. *A sphere is strictly convex. A cube is not strictly convex.*

For $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, W is strictly convex if and only if the boundary of W has no segments.

2.3 Known Results

Now, we list the known results about convex analysis and convex geometry below.

Fact 2.1 (cf. Schneider 1994 [5])**.** *Let* $\nu \in S^n$ *and* $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. *Then the followings hold :*
(1) $D_u^+\tilde{\gamma}_W(\nu) = \max_{x \in F(W,\nu)} \langle x, u \rangle$,

(2) The set $DD\tilde{\gamma}(\nu)$ *is a linear space,*

(3) The following (a) and (b) are equivalent,

(a) γ *is differentiable at* ν,

(b) $\tilde{\gamma}$ *is differentiable at* ν,

(4) Similarly, for $r \in \mathbb{N}$ the following (a) and (b) are equivalent,

(a) *γ is of C^r,*

(b) *$\tilde{\gamma}$ is of C^r on $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

(5) the following (a) and (b) are equivalent,

(a) *$\tilde{\gamma}$ is differentiable on $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

(b) *$\tilde{\gamma}$ is of C^1 on $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$,*

(6) The following (a) and (b) are equivalent,

(a) *W is strictly convex,*

(b) *$F(W, \nu) = \{$one point$\}$ $(\forall \nu \in S^n)$,*

(7) the following (a) and (b) are equivalent,

(a) *γ_W is differentiable at ν,*

(b) *$F(W, \nu) = \{$one point$\}$,*

where, $D_u^+ \tilde{\gamma}_W(\nu)$ stands for the right-hand derivative of $\tilde{\gamma}_W$ with respect to the direction u at ν and $DD\tilde{\gamma}(\nu)$ is the set consisting of all directions which $\tilde{\gamma}$ is differentiable at ν with respect to.
We remark that the result by H. Han and T. Nishimura is the corollary of above fact.

3 Main Results

We state the local detail relationship between convex property of Wulff shapes and regularity of their convex integrands.

Theorem 3.1. *Let $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$, $\nu \in S^n$. Then the following holds :*

$$DD\gamma_W(\nu) \bigoplus V_{F(W,\nu)} = \langle \nu \rangle^{\perp},$$

where $V_{F(W,\nu)}$ is the vector space parallel to $F(W, \nu)$ in R^{n+1} and
$DD\gamma_W(\nu) = \{\frac{dc}{dt}|_{t=0} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma \circ c$ is differentiable at $t = 0$ for an arc c on S^n such that $c(0) = \nu\}$.

Corollary 3.1. *The following holds :*

$$\dim F(W, \nu) = n - \dim DD\gamma_W(\nu),$$

where $\dim F(W, \nu)$ is the dimension of the vector space $V_{F(W,\nu)}$.

4 Proof of Main Results

In this section, since it immediately follows Corollary 3.1 from Theorem 3.1, we only prove Theorem 3.1. Let $\nu \in S^n$, $W \in \mathcal{K}_0^{n+1}$. We need the following lemma :

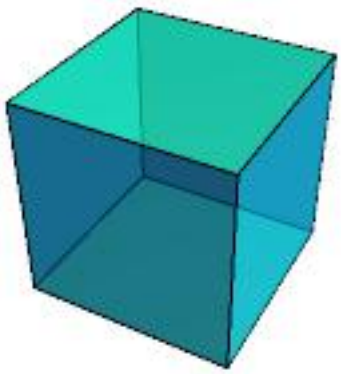
Lemma 4.1. *The following holds :*

$$DD\gamma_W(\nu) = DD\tilde{\gamma}_W(\nu) \cap \langle \nu \rangle^{\perp}.$$

Since it is easy to show this lemma, we skip the proof. By this lemma, it is sufficient to show that $DD\tilde{\gamma}(\nu) = V_{F(W,\nu)}{}^{\perp}$. $u \in DD\tilde{\gamma}_W(\nu)$ if and only if $D_u^+ \tilde{\gamma}_W(\nu) = -D_{-u}^+ \tilde{\gamma}_W(\nu)$. This equation is equivalent to the equation $\max\limits_{x \in F(W,\nu)} \langle x, u \rangle = \min\limits_{x \in F(W,\nu)} \langle x, u \rangle$. This equation holds if and only if $F(W, \nu)$ is contained a plane perpendicular to the direction u, it is equivalent to $u \in V_{F(W,\nu)}{}^{\perp}$. Therefore we have finished the proof of this theorem.

5 Examples of Main Results

Example 5.1.



$\gamma(\nu) = |\nu_1| + |\nu_2| + |\nu_3|$
$(\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S^2)$
W_γ *is a cube.*

For $\nu = (0, 0, 1) \in S^2$,
$F(W, \nu)$ *is the flat face of cube.*
$\dim F(W, \nu) = 2$.

For $\nu = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in S^2$,
$F(W, \nu)$ *is the segment of cube.*
$\dim F(W, \nu) = 1$.

For $\nu = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \in S^2$,
$F(W, \nu)$ *is the vertex of cube.*
$\dim F(W, \nu) = 0$.

References

[1] Atsufumi Honda, Miyuki Koiso and Yasuhiro Tanaka. Non-convex anisotropic surface energy and zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space. *Journal of Math-for-Industry* **5** (2013). 73–82.

[2] H. Han and T. Nishimura. Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands. *Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2017). 3997–4008.

[3] J. E. Taylor. Crystalline variational problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978). 568–588.

[4] M. Koiso and B. Palmer. Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005). 1817–1852.

[5] R. Schneider. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory 2nd edition. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **44**. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[6] Takashi Nishimura and Yu Sakemi. Topological aspect of Wulff shapes. *J. Math. Soc. Japan* **66** (2014). 89–109.

[7] T. Kuroda. *kesshō ha ikiteiru* [Crystal is alive]. Saiensusha. Tokyo. (2014) (in Japanese).

l_p-直積空間の集中

東北大学大学院理学研究科数学専攻
数川大輔 (Daisuke KAZUKAWA) *

概要

測度距離空間の収束概念の 1 つに集中と呼ばれる収束がある. 集中は “現在研究されている最も弱い収束概念” の 1 つであり, 次元が発散する空間列を収束列として許容するなど特徴的な性質を持つ. 本発表では,「2 つの集中する空間列に対して, それらの l_p 直積空間の列は集中する」という結果について述べる. 集中する測度距離空間列の (非自明な) 例を得ることは一般には難しいが, 直積をとる操作で新しい集中列が構成できることが分かった.

1 導入

完備可分距離空間 (X, d_X) とその上の Borel 測度 m_X の 3 つ組 (X, d_X, m_X) を**測度距離空間**という. 本稿では, 確率測度 (すなわち, $m_X(X) = 1$) を持つ測度距離空間のみを扱う. (確率) 測度距離空間 (の同型類) 全体の集合 $\mathcal{X}$ 上の距離として, **ボックス距離** $\square$ と**オブザーバブル距離** d_{conc} と呼ばれる 2 つの距離が Gromov によって [3] で導入された.

ボックス距離 $\square$ による位相は, 多くの研究者によって同じ位相を与える距離や収束の概念 (例えば, Greven-Pfaffelhuber-Winter による Gromov-Prokhorov 距離 [2] や Gigli-Mondino-Savaré による pmG 収束 [1] など) が導入され, 様々な研究がなされている. 例えば, プレコンパクト性などの位相的性質の研究, 幾何学的条件の保存性による極限空間の性質の研究, エネルギー汎関数の収束性などの解析的性質の研究などが挙げられる.

オブザーバブル距離 d_{conc} による位相は, $\mathcal{X}$ 上の位相のうち, “現在研究されている最も弱い位相” の 1 つと言え, 実際にボックス距離とオブザーバブル距離の間には,

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$$

という関係がある. d_{conc} による位相は, Lévy-Milman による古典的な集中現象に基づいた空間収束の概念を与えることから, **集中位相**と呼ばれ, d_{conc} による収束は**集中**と呼ばれる. 集中位相の最大の特徴の 1 つは, 次元が発散する空間列を収束列として許容することである. 典型的な例として, 球面列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある. $S^n(1)$ を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の n 次元単位球面とし, 標準リーマン計量から定まる距離と確率測度に正規化された体積測度を持つ測度距離空間とみなす. その $n \in \mathbb{N}$ に関する列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 1 点から成る測度距離空間 $*$ に集中する. 一方, $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

* daisuke.kazukawa.s6@dc.tohoku.ac.jp, 本研究は特別研究員奨励費（17J02121）の助成を受けたものである.

ボックス位相では発散することが知られている. ボックス位相に関する様々な性質が, 集中位相でも同様に成り立つかという問題は, 単純であるが実際の証明は困難な場合が多い.

ボックス距離とオブザーバブル距離の定義および性質は, 本稿の 2 節で述べることにする.

次に, 測度距離空間の l_p-直積について述べる. 2 つの測度距離空間 X, Y と $p \in [1, +\infty]$ に対し, X と Y の **l_p-直積空間**と呼ばれる新たな測度距離空間 $X \times_p Y$ が次で定義される:

$$X \times_p Y := (X \times Y, d_{l_p}, m_X \otimes m_Y),$$

ただし, d_{l_p} は, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対し,

$$d_{l_p}((x, y), (x', y')) := \begin{cases} (d_X(x, x')^p + d_Y(y, y')^p)^{\frac{1}{p}} & (p < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} & (p = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる d_X と d_Y の l_p-直積距離であり, $m_X \otimes m_Y$ は m_X と m_Y の直積測度である.

l_p-直積空間とボックス距離には次のような関係があることがそれぞれの定義から簡単に分かる.

命題 1.1. X, Y, Z, W を測度距離空間とする. 任意の $p \in [1, +\infty]$ に対して,

$$\square(X \times_p Y, Z \times_p W) \leq \square(X, Z) + \square(Y, W)$$

が成り立つ.

この不等式は次のような l_p-直積空間列の収束性を導く.

系 1.2. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をボックス収束する 2 つの測度距離空間列とし, X, Y をそれぞれの極限空間とする. このとき, l_p-直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は極限空間の l_p-直積空間 $X \times_p Y$ にボックス収束する.

そこで, この性質が集中位相でも成り立つかという次の素朴な問題が生じる.

問題 1.3. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集中する 2 つの測度距離空間列とし, X, Y をそれぞれの極限空間とする. このとき, l_p-直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は極限空間の l_p-直積空間 $X \times_p Y$ に集中するか?

先行研究として, Gromov [3, $3\frac{1}{2}$.46.] によって, 極限空間 X, Y のうち少なくとも一方が 1 点空間 $*$ ならば, $\{X_n \times_p Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X \times_p Y$ に集中するということが知られていた ([6, Proposition 7.32] も参照). 本稿の主結果はこの問題を解決した次の定理である.

定理 1.4 (K.)**.** 問題 1.3 において, l_p-直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X \times_p Y$ に集中する.

集中位相の場合は, 命題 1.1 のようにオブザーバブル距離を定量的に評価することで l_p-直積空間列の集中を示すことができるかは未だ分かっておらず, 今後の課題である.

本稿の 3 節で定理 1.4 の証明の鍵となった補題について, 4 節で定理 1.4 により新たに集中が示された測度距離空間列の例について, 5 節で定理 1.4 の一般化についてそれぞれ述べることにする.

2　ボックス距離とオブザーバブル距離

この節ではボックス距離 $\square$ とオブザーバブル距離 d_{conc} の定義と性質について簡単に述べる．詳細は [3,6] を参照されたい．[3] ではボックス距離は $\square_1$, オブザーバブル距離は $\underline{H}_1\mathcal{L}\iota_1$ と表記されている．

X を測度距離空間とする．また, $I := [0,1)$ とし, $\mathcal{L}^1$ を I 上の 1 次元 Lebesgue 測度とする．写像 $\varphi : I \to X$ が X の**パラメータ**であるとは, φ が Borel 可測写像であり,

$$\varphi_*\mathcal{L}^1 = m_X$$

を満たすときをいう．ここで, $\varphi_*\mathcal{L}^1$ は φ による $\mathcal{L}^1$ の**押し出し測度**である．一般に Borel 可測写像 $f : X \to Y$ と X 上の Borel 確率測度 μ に対し, f による μ の押し出し測度 $f_*\mu$ とは, Y 上の任意の Borel 集合 A に対して, $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$ により定まる Y 上の Borel 確率測度である．

補題 2.1. 任意の測度距離空間にはパラメータが存在する．

測度距離空間の間のボックス距離 $\square$ は次のように定義される．

定義 2.2. (ボックス距離) 2 つの測度距離空間 X, Y に対して, X と Y の間の**ボックス距離** $\square(X,Y)$ を次の条件を満たす実数 $\varepsilon > 0$ の下限として定める: X, Y それぞれのあるパラメータ $\varphi : I \to X$, $\psi : I \to Y$ と I 上のある Borel 集合 I_0 で $\mathcal{L}^1(I_0) \geq 1-\varepsilon$ を満たすものが存在し, 任意の $s,t \in I_0$ に対し,

$$|d_X(\varphi(s),\varphi(t)) - d_Y(\psi(s),\psi(t))| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．

ボックス距離の定義のアイデアは, 2 つの測度距離空間の近さを測るにあたり, パラメータ (測度を保つ写像) でそれぞれの空間の距離関数を単位区間 I に引き戻し, I 上で 2 つの距離関数を測度を考慮して比較するという単純なものである．$\mathcal{X}$ を (確率) 測度距離空間 (の同型類) 全体の集合とする．

定理 2.3. $(\mathcal{X}, \square)$ は完備可分距離空間である．

次の補題は測度距離空間のボックス収束と同値な条件を与える．

補題 2.4. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と測度距離空間 X に対して, 次の (1) と (2) は同値である．

(1) X_n が X にボックス収束する．
(2) ある Borel 可測写像の列 $p_n : X_n \to X$ と X_n 上のある Borel 集合 $\widetilde{X}_n$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} m_{X_n}(\widetilde{X}_n) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x,x'\in\widetilde{X}_n} |d_{X_n}(x,x') - d_X(p_n(x),p_n(x'))| = 0,$$
$$X \text{ 上の任意の有界連続関数 } f \text{ に対し, } \lim_{n\to\infty}\int_X f\, d(p_{n*}m_{X_n}) = \int_X f\, dm_X$$

を満たす．

オブザーバブル距離 d_{conc} を定義するための準備として, まず測度空間 (X,μ) 上の可測関数全体の集合上に **Ky Fan 距離**と呼ばれる (擬) 距離を導入する. Ky Fan 距離は関数の測度収束を与える (擬) 距離である.

定義 2.5 (Ky Fan 距離)**.** 2 つの可測関数 $f,g : X \to \mathbb{R}$ に対し, f と g の間の **Ky Fan 距離** $d^{\mu}_{\mathrm{KF}}(f,g)$ を次の条件を満たすような実数 $\varepsilon > 0$ の下限として定める.

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

測度距離空間 X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合を $\mathcal{L}ip_1(X)$ とする. **1-Lipschitz 関数**とは, Lipschitz 定数が 1 以下の連続関数である. さらに, X のパラメータ $\varphi : I \to X$ に対して,

$$\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\} \tag{2.1}$$

と定める. $\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X)$ は I 上の Borel 可測関数から成る集合である.

測度距離空間の間のオブザーバブル距離 d_{conc} を次で定める.

定義 2.6 (オブザーバブル距離)**.** 2 つの測度距離空間 X,Y に対して, X と Y の間の**オブザーバブル距離** $d_{\mathrm{conc}}(X,Y)$ を

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_{\mathrm{H}}(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y))$$

で定める. ここで, φ,ψ は X,Y それぞれのパラメータ全てにわたって下限をとる. d_{H} は $d^{\mathcal{L}^1}_{\mathrm{KF}}$ に関する Hausdorff 距離である.

定理 2.7. $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ は距離空間である. また任意の 2 つの測度距離空間 X,Y に対して,

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \leq \square(X,Y)$$

が成り立つ.

オブザーバブル距離 d_{conc} による位相は**集中位相**と呼ばれ, その収束は**集中**と呼ばれる. オブザーバブル距離の定義のアイデアは, ボックス距離のように 2 つの空間の距離関数を直接比較するのではなく, Lipschitz 関数という距離構造をよく反映する関数たち全体を比較することである. このアイデアの違いがボックス収束と集中の間に大きな違いを生み, 集中位相では以下に述べる例のような次元が発散する収束列を多く許容する.

$*$ を 1 点からなる測度距離空間とする. すなわち, 1 点集合に自明な距離と Dirac のデルタ確率測度を与えた空間である. 測度距離空間 X と $*$ のオブザーバブル距離は次のように特徴づけられる.

補題 2.8. 測度距離空間 X に対して,

$$d_{\mathrm{conc}}(X,*) = \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \inf_{c \in \mathbb{R}} d^{m_X}_{\mathrm{KF}}(f,c)$$

が成り立つ.

1 点空間 $*$ の (1-Lipschitz) 関数は定数関数のみなので, オブザーバブル距離で 1 点に近い測度距離空間は (Ky Fan 距離の意味で) 定数関数に近い 1-Lipschitz 関数のみを持つ空間である.

定義 2.9. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, X_n が $*$ に集中するときをいう.

例 2.10. 半径 1 の n 次元球面 $S^n(1)$ を標準リーマン計量に関するリーマン距離と正規化されたリーマン体積測度をもつ測度距離空間とする. このとき, 空間列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である. これは Lévy による古典的な球面の測度集中現象を捉えている.

例 2.11. $\mathbb{C}P^n$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ をそれぞれ n 次元複素射影空間, n 次特殊直交群, n 次特殊ユニタリ群とする. これらは標準的な計量の下, リーマン多様体であるとし, 測度を正規化して測度距離空間とみなせる. このとき, $\{\mathbb{C}P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathrm{SO}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathrm{SU}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ はすべて Lévy 族である.

閉リーマン多様体 (コンパクトかつ境界がない) から成る Lévy 族はラプラシアンの第一正固有値の振る舞いと密接な関係がある. ここで, ラプラシアンは固有値が $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to \infty$ となるものとし, 第一正固有値は 0 でない固有値の最小値とする.

定理 2.12. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を閉リーマン多様体の列とする. $\lambda_1(X_n)$ を X_n のラプラシアンの第一正固有値とする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\lambda_1(X_n) = +\infty$ ならば, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である.
(2) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が非負 Ricci 曲率をもつ Lévy 族であるならば, $\lim_{n\to\infty}\lambda_1(X_n) = +\infty$ が成り立つ.

例 2.10, 2.11 はともに定理 2.12 (1) より Lévy 族であることが従う. 定理 2.12 (2) は E. Milman [4, 5] による.

ボックス収束の時と同様に, 測度距離空間列の集中と同値な条件を与える次の定理が知られている.

定理 2.13. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と測度距離空間 X に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) X_n が X に集中する.
(2) ある Borel 可測写像の列 $p_n : X_n \to X$ が存在して, 次を満たす:

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{H}}(\mathcal{L}ip_1(X_n), {p_n}^*\mathcal{L}ip_1(X)) = 0, \tag{2.2}$$

$$X \text{ 上の任意の有界連続関数 } f \text{ に対し, } \lim_{n\to\infty}\int_X f\, d(p_{n*}m_{X_n}) = \int_X f\, dm_X. \tag{2.3}$$

ただし, ${p_n}^*\mathcal{L}ip_1(X)$ は (2.1) と同様に定義し, d_{H} は Ky Fan 距離 $d_{\mathrm{KF}}^{m_{X_n}}$ に関する Hausdorff 距離である.

3 オブザーバブル直径の評価

定理 1.4 は, **κ-オブザーバブル直径**と呼ばれる測度距離空間の不変量に対して, l_p-直積に関する新しい性質 (補題 3.3) を示すことで得られた. 測度距離空間 X の κ-オブザーバブル直径 $\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa)$ とは, 実数 $\kappa > 0$ に対して,

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f\in\mathcal{L}ip_1(X)} \inf\{\mathrm{diam}\, A \mid A \subset \mathbb{R} : \text{Borel}, f_*m_X(A) \ge 1-\kappa\} \tag{3.1}$$

により定義される量である. $\kappa \geq 1$ に対して, 常に $\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) = 0$ が成り立つ. κ-オブザーバブル直径は, 次の命題にあるように, 1 点空間 $*$ への集中の度合いを表す量である.

命題 3.1 ([6, Corollary 5.8])**.** 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Lévy 族であることは, 任意の $\kappa > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成り立つことと同値である.

例 3.2. n 次元単位球面 $S^n(1)$ の κ-オブザーバブル直径は

$$\mathrm{ObsDiam}(S^n(1); -\kappa) = \pi - 2v^{-1}(\kappa/2) = O(n^{-1/2})$$

で与えられる. ただし, $v(r) := (\int_0^r \sin^{n-1} t\, dt)/(\int_0^\pi \sin^{n-1} t\, dt)$ である. これは (3.1) の sup を達成する 1-Lipschitz 関数が存在し, かつ, それが 1 点からの距離関数 $d_{S^n(1)}(x, \cdot)$ であることから従う.

κ-オブザーバブル直径を正確に求めることはほとんどの場合で困難であるが, 一般にそのオーダーを計算することも難しい場合が多い.

κ-オブザーバブル直径と l_p-直積空間に関して, 次のような新しい関係式が得られた.

補題 3.3 (K.)**.** X, Y を測度距離空間とする. このとき, 任意の $p \in [1, +\infty]$, $\kappa \in (0, 1)$, $\kappa' \in (0, 1/2)$ に対して,

$$\mathrm{ObsDiam}(X \times_p Y; -(\kappa + \kappa')) \leq \mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) + 2\,\mathrm{ObsDiam}(Y; -\kappa')$$

が成り立つ.

補題 3.3 は, 粗く言うと, l_p-直積空間の集中の度合いを各成分の空間の集中の度合いで制御できることを表している. 実際に, 定理 1.4 の証明では, X_n, Y_n がそれぞれ X, Y に集中することと定理 2.13 から存在する写像 $p_n : X_n \to X$, $q_n : Y_n \to Y$ に対して, 写像 $p_n \times q_n : X_n \times Y_n \to X \times Y$ を $(x, y) \in X_n \times Y_n$ に対し,

$$p_n \times q_n(x, y) := (p_n(x), q_n(y))$$

と定め, この $p_n \times q_n$ が再び (2.2), (2.3) を満たすことを確かめる. (2.2) を示す際に, 補題 3.3 によりある種の誤差を制御することができることが主結果の証明の鍵であった.

4 主結果による集中の例

本研究の動機の 1 つとして, ボックス収束しないが集中する測度距離空間列の例を増やしたいということが挙げられる. 特に古典的な集中現象に対応する例 (例 2.10, 2.11 など) は, 非常に重要ではあるが, 極限空間は 1 点空間 $*$ になってしまうので, 極限空間が 1 点にならないような例はどのようなものがあるかという問題が考えられる. 例えば, 次のような例が挙げられる.

例 4.1. n 次元単位球面 $S^n(1)$ と区間 $[0, \pi]$ を考える. これらは共に通常のリーマン計量による距離と正規化された確率測度をもつとする. $S^n(1)$ 上の点 $\bar{x}$ を任意に選び, 固定する. 測度距離空間 X_n

を区間 $[0,\pi]$ 上の点 π と $S^n(1)$ 上の点 $\bar{x}$ を同一視した空間とする．すなわち，

$$X_n := [0,\pi] \sqcup S^n(1) \Big/ \pi = \bar{x}$$

とし，X_n 上の距離 d_{X_n} を任意の $x, x' \in X_n$ に対し，

$$d_{X_n}(x,x') := \begin{cases} d_{[0,\pi]}(x,x') & (x,x' \in [0,\pi] \text{ のとき}) \\ d_{S^n(1)}(x,x') & (x,x' \in S^n(1) \text{ のとき}) \\ d_{[0,\pi]}(x,\pi) + d_{S^n(1)}(\bar{x},x') & (x \in [0,\pi], x' \in S^n(1) \text{ のとき}) \\ d_{[0,\pi]}(x',\pi) + d_{S^n(1)}(\bar{x},x) & (x' \in [0,\pi], x \in S^n(1) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め，X_n 上の確率測度 m_{X_n} を

$$m_{X_n} := \frac{1}{2} m_{[0,\pi]} + \frac{1}{2} m_{S^n(1)}$$

と定めると，(X_n, d_{X_n}, m_{X_n}) は測度距離空間である．この X_n は次の測度距離空間 X に集中する．X は 1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ の部分集合 $[0,\pi] \cup \{3\pi/2\}$ にユークリッド距離と確率測度

$$m_X := \frac{1}{2} m_{[0,\pi]} + \frac{1}{2} \delta_{\frac{3}{2}\pi}$$

を持つ測度距離空間である．ただし，δ_x は点 x に置ける Dirac のデルタ測度である．(図 1 を参照)

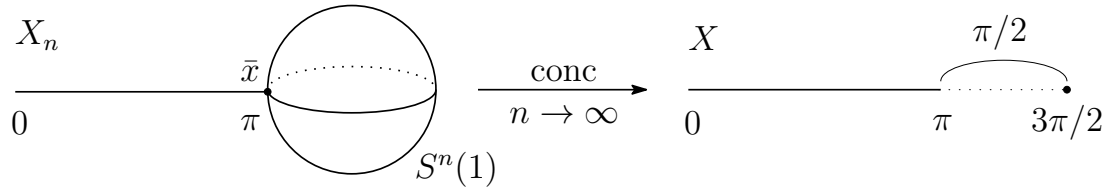


図 1　例 4.1 の集中

すなわち，集中位相において，n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 1 点空間 $*$ に集中するのであるが，区間 $[0,\pi]$ が取り付けられている場合は，$\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限に相当する 1 点は区間 $[0,\pi]$ から離れた点になる．実際には内在的な意味の直径 $\operatorname{diam} S^n(1) = \pi$ の半分だけ離れることになる．この例は定理 2.13 の写像 p_n を具体的に構成することで証明される．

本稿の主結果により，例えば，例 4.1 の X_n を 2 つ直積した空間の収束先が分かる．

例 4.2. X_n, X を例 4.1 の測度距離空間とする．定理 1.4 より，任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，$X_n \times_p X_n$ は $X \times_p X$ に集中する．極限空間 $X \times_p X$ は距離空間 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_p)$ 上の部分集合

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0,\pi] \cup \{3\pi/2\}\}$$

であると考えられる．ここで，$|\cdot|_p$ は l_p-ノルムである．すなわち次の図 2 のようになる．

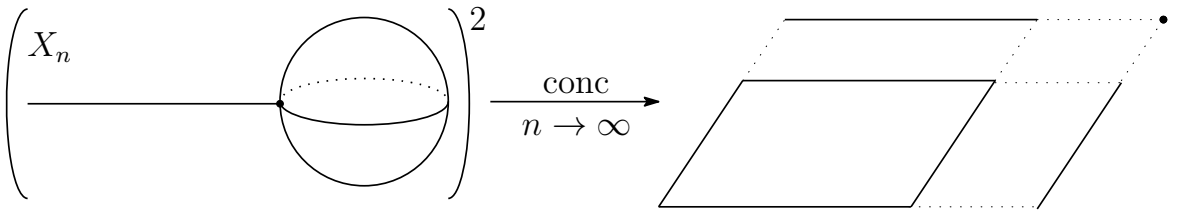


図 2　例 4.2 の集中

5　主結果の一般化

本稿では, l_p-直積空間の集中を主結果としていたが, 実際には l_p-直積距離を次の条件を持つ連続関数 F が誘導する距離関数 d_F にまで主結果は一般化できる.

関数 $F : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ に対して,

(F1) 任意の $s, s', t, t' \in [0,\infty)$ に対して, $F(s+s', t+t') \leq F(s,t) + F(s',t')$ が成り立つ.
(F2) 任意の $s_0, t_0 \in [0,\infty)$ に対し, $s \mapsto F(s,t_0)$ および $t \mapsto F(s_0,t)$ がともに単調非減少である.
(F3) $F(s,0) = s$ および $F(0,t) = t$ が成り立つ.

の 3 つの条件を考える. さらに, 2 つの測度距離空間 X, Y に対して, 関数 $d_F : (X \times Y) \times (X \times Y) \to [0,+\infty)$ を任意の $(x,y), (x',y') \in X \times Y$ に対し,

$$d_F((x,y),(x',y')) := F(d_X(x,x'), d_Y(y,y'))$$

と定める.

命題 5.1. X, Y を測度距離空間とし, $F : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする. このとき, $(X \times Y, d_F)$ は完備距離空間であり, d_F の位相は積位相に一致する. 特に, $(X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y)$ は測度距離空間である.

例 5.2. (1) 任意の $p \in [1,+\infty]$ に対して,

$$F_p(s,t) := \begin{cases} (s^p + t^p)^{\frac{1}{p}} & (p < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{s,t\} & (p = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると, F_p は条件 (F1) – (F3) を満たし, d_{F_p} は l_p-直積距離 d_{l_p} と一致する.
(2) $F(s,t) := \log(e^s + e^t - 1)$ と定めると, F は条件 (F1) – (F3) を満たす.

命題 1.1, 定理 1.4 は次のように一般化できる.

命題 5.3. X, Y, Z, W を測度距離空間とし, $F : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする. このとき,

$$\square((X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y), (Z \times W, d_F, m_Z \otimes m_W)) \leq \square(X,Z) + \square(Y,W)$$

が成り立つ.

定理 5.4. $F : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする．2 つの集中する測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とそれらの極限空間 X, Y に対して, それらの直積空間の列 $\{(X_n \times Y_n, d_F, m_{X_n} \otimes m_{Y_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ は極限空間の直積空間 $(X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y)$ に集中する．

また, 本稿の主結果を測度距離空間のねじれ積へ一般化しようとすると次の簡単な反例が存在する．

例 5.5. n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．区間 $[0,\pi]$ と n 次元単位球面 $S^n(1)$ のねじれ積 $[0,\pi] \times_{\sin} S^n(1)$ は $(n+1)$ 次元単位球面 $S^{n+1}(1)$ と等長同型である．したがって, $\{[0,\pi] \times_{\sin} S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 1 点空間 $*$ に集中する．一方で, 同じ空間の列 $\{[0,\pi]\}_{n\in\mathbb{N}}$ と n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限空間どうしのねじれ積は $[0,\pi] \times_{\sin} *$, すなわち, $[0,\pi]$ である．

参考文献

[1] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.

[2] A. Greven, P. Pfaffelhuber, and A. Winter, *Convergence in distribution of random metric measure spaces (Λ-coalescent measure trees)*, Probab. Theory Related Fields **145** (2009), no. 1-2, 285–322.

[3] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[4] E. Milman, *Isoperimetric and concentration inequalities: equivalence under curvature lower bound*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 207–239.

[5] ———, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 1–43.

[6] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures.

Simplified trisection map の弧の逆像として得られる閉 3 次元多様体について

浅野　喜敬 (ASANO Nobutaka)*

本稿では断りのない限り，X は連結で向き付け可能かつ滑らかな閉 4 次元多様体，M は連結で向き付け可能かつ滑らかな閉 3 次元多様体，Σ_g を種数 g の向き付け可能閉曲面とする．また，$\simeq$ は微分同相，$\sharp^k A$(resp. $\natural^k A$) は k 個の A の連結和 (resp．境界連結和) を表す．

1　序文

低次元多様体論において，多様体の微分同相類の表示を与える研究がいくつか知られている．これは多様体の位相型の解析を行う上で重要である．表示を与える多様体の分割の例として，3 次元多様体 M を 2 つの $\natural^k(S^1 \times D^2)$ に分割する Heegaard 分解が古典的に知られている．Heegaard 分解により，M の持つ 2-ハンドルの接着円周が種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上の g 個の単純閉曲線として表示される．

近年，閉 4 次元多様体を 3 つの $\natural^k(S^1 \times D^3)$ に分割する trisection が Gay-Kirby により導入され [2], 注目を集めている．Trisection は Heegaard 分解の 4 次元多様体への類似であり，trisection により 4 次元多様体の 2-ハンドルの接着円周が Σ_g 上の単純閉曲線の 3 つの族として表示される．一方で，trisection は 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ へのある安定写像として定義することができる．この安定写像のことを trisection map と呼ぶ．Baykur-Saeki は，trisection map の特異値集合がある条件を満たすものを simplified trisection map と呼び，すべての閉 4 次元多様体がある simplified trisection map を持つことを示した [1].

$f : X \to \mathbf{R}^2$ を simplified trisection map，$I \subset f(X)$ を適切に埋め込まれたジェネリックな弧とする．このとき $f^{-1}(I)$ は閉 3 次元多様体を定める (詳細は 5 主結果を参照)．本稿では，f が種数 2 の simplified trisection map であるとき，$f^{-1}(I)$ として現れ得る閉 3 次元多様体を決定したのでこれを紹介する．

また，section が 4 つである安定写像 $f : X \to \mathbf{R}^2$ に対して，$f^{-1}(I)$ として無限個の異なる双曲多様体が得られることが分かったので，これについても紹介する．

2　Trisection の定義

定義 1 (**(g, k)-trisection**).

$0 \leq k \leq g$ を自然数とする．組 (X, X_1, X_2, X_3) が次の (1)，(2)，(3) を満たすとき，この組を **(g, k)-trisection** であるという．

* 東北大学大学院理学研究科数学専攻, E-mail : nobutaka.asano.r4@dc.tohoku.ac.jp

(1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
(2) 各 $i = 1, 2, 3$ について，$\phi_i : X_i \simeq \sharp^k(S^1 \times B^3)$ である．
(3) 各 $i = 1, 2, 3$ について，(3 を法として) $\phi_i(X_i \cap X_{i+1}) = Y^-_{k,g}$
かつ $\phi_i(X_i \cap X_{i-1}) = Y^+_{k,g}$
(ただし，$\sharp^k(S^1 \times S^2) = Y^+_{k,g} \cup Y^-_{k,g}$ は種数 g の標準的な Heegaard 分解である．)

3 次元多様体において，2-ハンドルの接着円周を種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上に表示したものを Heegaard 図式と呼んでいた．これと同様に，4 次元多様体に対しても，4 次元の 2-ハンドルの接着円周を曲面上に表示したものを考えることができる．これは次に述べる **trisection 図式**である．

定義 2 (**trisection 図式**)**.**
$\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を Σ_g 上の単純閉曲線の族とする．各 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k S^1 \times S^2$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき，組 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ を **trisection 図式**という．

(g, k)-trisection(X, X_1, X_2, X_3) が与えられた時，定義 1.(3) の条件から，$\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の 3 つの Heegaard 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が定まる．これらを 1 つの曲面上に表示したものを $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ と書くと，これは trisection 図式であり，(trisection 図式の安定化・ハンドルスライドの違いを除いて) 一意に定まる．逆に，trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が与えられると，$\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を接着円周とする 2-ハンドルを $\Sigma_g \times D^2$ の境界 $\Sigma_g \times \partial D^2$ の部分集合 $\Sigma_g \times \{1\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$ に接着し，(フレーミングは surface framing により定める．) その後現れる $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ を k 個の 3-ハンドルと 1 個の 4-ハンドルで埋めることにより，X が微分同相の違いを除いて一意に復元される．(この k 個の 3-ハンドルと 1 個の 4-ハンドルの埋め方は Laudenbach-Poenaru の定理 [3] により一意である．)

3 安定写像と折り目特異点とカスプ特異点

以下，$Sing(f) = \{p \in X \mid p \text{ は } f \text{ の臨界点 }\}$ とする．

定義 3 (**右左同値**)**.**
$C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$= $\{f : X^4 \to \mathbf{R}^2 \mid f \text{ は } C^\infty\text{級写像 }\}$ に Whitney 位相を入れ，位相空間とする．$f, g \in C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ が**右左同値**とは，ある微分同相写像 $\varphi : X^4 \simeq X^4$, $\psi : \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2$ が存在して，次が可換となることである．

$$\begin{array}{ccc} X^4 & \xrightarrow{\varphi} & X^4 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

定義 4 (**安定写像**)**.**
$f \in C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ について，ある $U_f \subset C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ が存在して，任意の $g \in U_f$ に対し f と g が右左同値であるとき f を**安定写像**と呼ぶ．

例えば，特異値が全て異なる Morse 関数は安定写像である．安定写像は Morse 関数の一般化

である．次に，trisection map を定義するために必要な折り目特異点とカスプ特異点について述べる．

定義 5 (**不定値 (resp. 定値) 折り目特異点**)**.**
$p \in Sing(f)$ とする．ある p の局所座標 (t,x,y,z) が存在して，$f(t,x,y,z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp.$f(t,x,y,z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) であるとき，$p$ を**不定値 (resp. 定値) 折り目特異点**であるという．

定義 6 (**カスプ特異点**)**.**
$p \in Sing(f)$ とする．ある p の局所座標 (t,x,y,z) が存在して，$f(t,x,y,z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ であるとき，p を**カスプ特異点**であるという．

図 1 は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである．図 1 の縦方向の座標が定義 5 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 1 の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため，点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．したがってファイバーの曲面では手術が行われ，図 1 のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 1 で赤線で示される単純閉曲線) を**不定値折り目特異点の消滅サイクル**と呼び，値域上の点線を **reference path** と呼ぶ．定値折り目特異点の場合も同様にして，reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．また，このとき図 2 の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって赤線を通過するとファイバーは空集合となり，図 2 のような変化が生じる．

カスプ特異点の近傍の像は図 3 である．黒太線部が特異値集合であり，特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している．図 3 の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われファイバーが D^2 へと変化する．この時，a と b は geometric に 1 度だけ交わる．

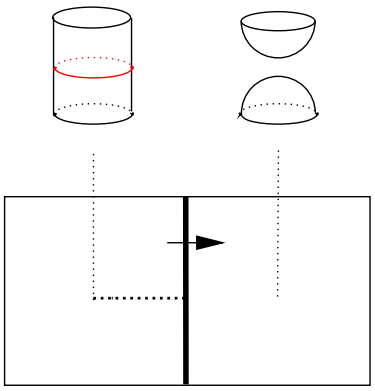


図 1: 不定値折り目特異値の近傍のファイバーの変化の様子.

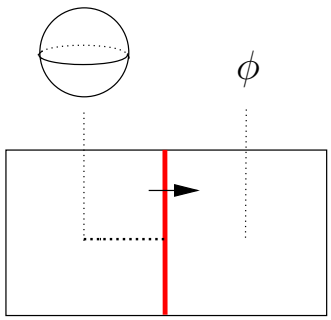


図 2: 定値折り目特異値の近傍のファイバーの変化の様子.

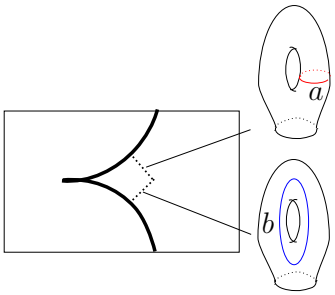


図 3: カスプ特異点の像の近傍のファイバーと消滅サイクル.

4　安定写像を用いた Trisection の定義と simplified trisection

定義 7 (**(g,k)-trisection**).

安定写像 $f : X \to D^2$ の特異値集合が図 4 で与えられるとき，f を **(g,k)-trisection map** という．(このとき X は **(g,k)-trisection を許容する**という．)

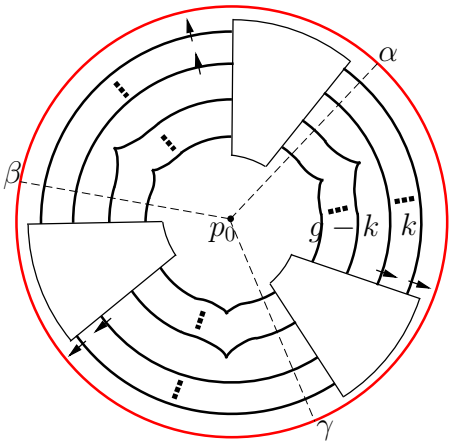


図 4: (g,k)-trisection map の特異値集合.

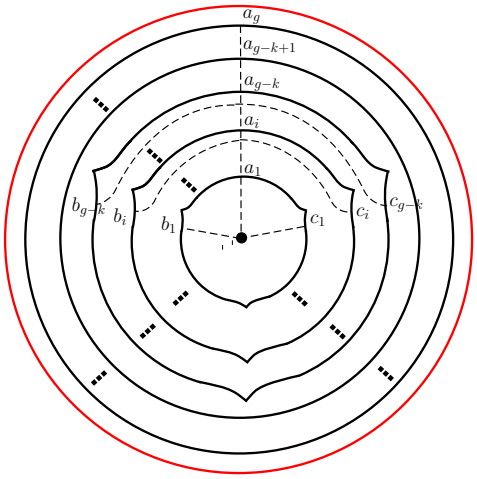


図 5: simplified (g,k)-trisection map の特異値集合.

図 4 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．その内，外側の k 本は不定値折り目特異点の像で，内側の $g-k$ 本にはそれぞれにカスプ特異点が 1 つずつ現れる．3 つの白い箱の内部は端点どうしが g 本の不定値折り目特異値集合のなすブレイドにより結ばれている．図 4 の白い箱の中の内部の不定値折り目特異点の像が互いに交わらず両側の端点を繋いでいる trisection map を **simplified trisection map** という [1].

さらに，$f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．これは半径方向の reference path に沿ってファイバーを動かすと，先のセクションでの観察により，外側から順に，空集合，$S^2, T^2, \ldots, \Sigma_g$ と変化することからしたがう.

定義 7 における (g,k)-trisection f から X の (g,k)-trisection(X,X_1,X_2,X_3) と trisection diagram $(\Sigma_g,\alpha,\beta,\gamma)$ を次のようにして得ることができる．まず，図 4 の reference pathα,β,γ に沿って値域の D^2 を 3 つのセクターに分割する．各セクターの引き戻しはは $\sharp^k(S^1\times B^3)$ と微分同相である．さらに，reference pathα,β に沿って内側から外側にファイバーを動かすことで，不定値折り目特異点の消滅サイクルの族 $\alpha=\{\alpha_1,...,\alpha_g\}$，$\beta=\{\beta_1,...,\beta_g\}$ を得る．これらは定義から Σ_g 上の cut system であり，$f^{-1}(\alpha\cup\beta)\simeq\sharp^k(S^1\times S^2)$ であることから (Σ_g,α,β) は $\sharp^k(S^1\times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．reference path(β,γ)，(γ,α) についても同様に (Σ_g,β,γ)，(Σ_g,γ,α) が $\sharp^k(S^1\times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．以上から，trisection diagram $(\Sigma_g,\alpha,\beta,\gamma)$ が f より得られた．またこれらのことから各セクターの共通部分が定義 1(3) を満たすこともしたがう．逆に，定義 1 から図 4 を特異値集合とする安定写像を構成することもできる [2].

5　主結果

$f:X\to\mathbf{R}^2$ を simplified (g,k)-trisection map，$I\subset f(X)\simeq D^2$ を適切に埋め込まれた弧とする．I がカスプ特異値と交わらず，不定値折り目特異値と接点を持たないとき，I はジェネリックに位置するとよぶ．以下 $I\subset f(X)$ はすべて適切に埋め込まれたジェネリックに位置する弧とする．$f^{-1}(I)$ は次のようにして閉 3 次元多様体のハンドル分解を与える：$p\in I\cap f(X)\backslash f(Singf)$ として，$N_\epsilon(p)\subset I$ を p の I における ϵ 近傍とする．このとき ϵ を十分小さくとることで，$N_\epsilon(p)\simeq f^{-1}(p)\times[0,1]$ と仮定できる．$N_\epsilon(p)$ の端点をそれぞれ p_0,p_1 とおく．$\partial I=\{2pt.\}$ のどちらか片方と，p_i の 2 点を端点に持つ部分弧のうち，p_{i+1} を含まないものを I_i とする．ここで，$i=0,1(mod\ 2)$ である．$I_0\cap f(Singf)$ の各点に対応して 3 次元のハンドルが得られるが，これらを p_0 から順次 $f^{-1}(p_0)\times\{p_0\}$ へと接着する．同様の操作を I_1 に対しても行うことで 3 次元のハンドル体を構成することができる．以上の構成によって得られるハンドル体は p の取り方に依存しないことに注意する．

f が種数 2 の simplified trisection map であるとき，$f^{-1}(I)$ として現れ得る閉 3 次元多様体の位相型をすべて決定した．以下に主張を述べる．

定理 8. (主結果 1[A.]) $f:X\to\mathbf{R}^2$ を simplified $(2,0)$-trisection map とする．このとき $f^{-1}(I)$ として得られる閉 3 次元多様体は

$$S^3,S^1\times S^2,\pm L(r^2,s),\pm L(t,1)$$

のいずれかの有限個の連結和である。ただし、s は $r^2\pm1$ の約数である．

また，simplified trisection map のセクションの数を 4 つに増やした安定写像 $f:X\to\mathbf{R}^2$ を考えることで，次が得られた．

定理 9. (主結果 1[A.]) 次を満たす閉 4 次元多様体 $X(\simeq\sharp^2S^2\times S^2$ または $\sharp^2\mathbf{CP}^2\sharp^2\overline{\mathbf{CP}^2})$ と無限個の安定写像の族 $\{f_i:X_i\to\mathbf{R}^2\}_{n\in\mathbf{N}}$ が存在する。

- f_i の特異値集合は図 6 で与えられる。
- $f_i^{-1}(I)$ は双曲多様体である．
- $i\neq j$ ならば $f_i^{-1}(I)$ と $f_j^{-1}(I)$ は同相でない。

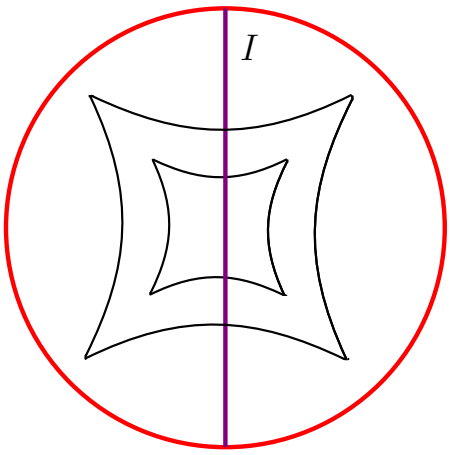


図 6

参考文献

[1] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds, preprint, available at arXiv:1705.11169 [math.GT].

[2] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[3] F. Laudenbach and V. Poénaru, A note on 4-dimensional handlebodies, *Bull. Soc. Math. France*, **100** (1972), 337–344.

Gluck Surgery によって得られる 4 次元ホモトピー球面の微分同相型について

東京工業大学理学院数学系数学コース

伊勢彩夏 (Ayaka ISE)

1 はじめに

4 次元球面 S^4 を，そこに埋め込まれた 2-knot に沿って Gluck surgery をすると，4 次元ホモトピー球面が得られることが知られている．Gluck surgery とは，S^4 に埋め込まれた 2-knot K に対し，K を管状近傍ごと S^4 から取り去り，恒等写像に isotopic でない微分同相写像によって接着し直す操作のことである．この操作によって得られた 4 次元ホモトピー球面 (=: M_K) が S^4 と微分同相であるかどうかは一般にはわかっていない．しかし，2-knot が ribbon（Gluck の定理 [2]）や twist spun（Gordon の定理 [3]）のときに関しては，M_K は S^4 と微分同相であることがわかっている．２つの 4 次元多様体が微分同相であるかどうかの判定方法として，Kirby calculus がある．4 次元多様体の図示法である Kirby diagram が，Kirby calculus と呼ばれる微分同相を保つ変形を行うことで移り合えば，その２つの 4 次元多様体は微分同相ということができる．

本稿では一般の m-twist spun 2-knot に関して，その ch-diagram から M_K の Kirby diagram を構成し，Kirby calculus の拡張である relative Kirby calculus によって M_K が S^4 と微分同相であることを示す．

2 Kirby calculus

2.1 handle

定義 2.1 （handle）$0 \leq k \leq n$（$k, n \in \mathbb{Z}$），X をコンパクト n 次元 C^∞-級多様体とする．このとき，n 次元 k-handle（$:= h^k$）とは，埋め込み $\varphi\colon \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ によって X の境界に接着される $D^k \times D^{n-k}$ のコピーのことである．

以下は handle に関する基本的な用語の定義である．
$\partial D^k \times \{0\}$：attaching sphere　　$\{0\} \times \partial D^{n-k}$：belt sphere
$\partial D^k \times D^{n-k}$：attaching region

定義 2.2 （handle 分解）X をコンパクト n 次元 C^∞-級多様体で，∂X がコンパクトな部分多様体 $\partial_+ X$ と $\partial_- X$ の直和で表されるとする．このとき，X は，$[0,1] \times \partial_- X$ に handle をいくつか接着して得られたものと微分同相である．ただし，$\{0\} \times \partial_- X$ は $\partial_- X$ に対応しているものとする．これを $\partial_- X$ 上の relative handle body という．$\{0\} \times \partial_- X = \emptyset$ のときは単に handle body という．また，X と微分同相な（relative）handle body を求めることを $(X, \partial_- X)$ の handle 分解という．

2.2 Kirby diagram

X がコンパクトで連結な C^∞-級の 4 次元多様体で，$\partial_- X = \emptyset$ とする．X の handle body は 0-handle をただ 1 つだけ持ち，1,2,3,4-handle を適当に ∂h^0 に接着することで X の handle body が得られる．$\partial h^0 = \partial D^4$ を $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ として，$\mathbb{R}^3$ 内に 1,2,3,4-handle の attaching region を図示したものを Kirby diagram という．$\partial_+ X = \emptyset$ であるとき, 1,2-handle の接着の様子がわかれば 3,4-handle の接着の仕方が一意に定まる（Laudenbach-Poenaru [1]）ことから，3,4-handle の attaching region は描く必要はなく，いくつあるかだけわかるようにすればよい．

1,2-handle が Kirby diagram でどのように図示されるかを述べる．1-handle の attaching region は，定義より $\partial D^1 \times D^3 = \{\pm 1\} \times D^3$ であるため，２つの ball を図示すればよい．また，２つの ball の代わりに dotted circle で 1-handle を表すこともできる．

2-handle の attaching region は，定義より $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$（＝ソリッドトーラス）である．簡単の為，中心線である $S^1 \times \{0\}$ を描くことでソリッドトーラスを表す．中心線だけでは接着写像の isotopy 類が決定できないので，framing を一つ決める必要がある．よって，2-handle の attaching region は framing を表す数（framing coefficient）を付けた knot として表される．2-handle が複数ある場合，それらの knot は link になっている場合がある．

以上より，$\mathbb{R}^3$ 内の 1,2-handle の attaching region を表す link diagram に，3,4-handle がいくつ付いているかわかるように描いたものが Kirby diagram となる．

2.3 Kirby calculus

Kirby calculus とは，handle の slide と cancel によって Kirby diagram を変形していくことである．slide と cancel は微分同相型を変えない操作であるため，Kirby calculus によって２つの Kirby diagram が移り合う場合，それらの diagram が表す 4 次元多様体は微分同相である．

定義 2.3 （slide）h_1, h_2 を k-handle$(0<k<n)$ で，∂X に接着されているものとする．h_2 上の h_1 の slide とは，h_1 の attaching sphere を $\partial(X \cup h_2)$ 上で滑らせて h_2 の belt sphere を通ったのち完全に分離することである．

slide という操作が Kirby diagram 上でどのように表されるかを述べる．handle 分解の特性上，1-handle を 2-handle に slide することはできない．従って，Kirby calculus においては，1 (or 2) -handle 同士の slide か 2-handle を 1-handle に slide させるという操作しか扱わない．

２つの handle h_1, h_2 が, framed knot K_1, K_2 で表されているとする．ただし, h_1 が 1-handle の場合は framing coefficient が 0 の knot として考える．K_2 の framing を表す平行曲線を K_2' とする．このとき，h_2 上の h_1 の slide とは，K_1 を K_1 と K_2' の band 和に取り替えることである．

K_1 と K_2 にあらかじめ向きを定めておく．K_2 と K_2' の向きが等しいとき，この動かし方のことを handle addition，逆向きのときは handle subtruction という．

handle を slide させると，framing が変化する．K_1, K_2 の framing coefficient をそれぞれ n_1, n_2 とし，h_1 を h_2 に slide させると，n_1 は以下のように変化する（n_2 は変化しない）．

addition ： $n_1 + n_2 + 2lk(K_1, K_2)$

subtruction ： $n_1 + n_2 - 2lk(K_1, K_2)$

定義 2.4 （cancelling pair）$0 \le k \le n$ として， h^{k-1} の belt sphere と h^k の attaching sphere が一点で横断的に

交わるとき，h^{k-1} と h^k を cancelling pair という．

cancelling pair h^{k-1} と h^k に対して，$X \cup h^{k-1} \cup h^k$ と X が微分同相になることから，diagram 内に cancelling pair がある場合，それらを cancel することができる．4次元の場合，cancelling pair は h^1 と h^2，h^2 と h^3，h^3 と h^4 の3種類がある．

$\mathbb{CP}^2$ や $\overline{\mathbb{CP}^2}$ との connected sum を考えると，$\mathbb{CP}^2$ や $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby diagram は ±1-unknot であるので，元の diagram に ±1-unknot を付け加えればよい．±1-unknot を付け加えたのち，他の handle を slide させる操作を blow up，もともとある ±1-unknot に他の handle を slide させたのち ±1-unknot を消去する操作を blow down という．

2.4 Dehn surgery

定義 2.5 （Dehn surgery）M を向き付けられた3次元多様体，K を M 内の knot とする．K の closed な管状近傍 νK は $S^1 \times D^2$ と微分同相である．このとき，K 上の Dehn surgery とは，M から int νK を取り去り，微分同相写像 $\varphi\colon \partial(S^1 \times D^2) \to \partial \nu K$ によって $S^1 \times D^2$ を接着し直す操作のことである．

$S^1 \times D^2$ の接着の仕方によって, coefficient $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \infty$ が決まる．coefficient が整数のときを integral surgery，整数でないときを rational surgery という．

定理 2.6 任意の向き付けられた3次元閉多様体は，コンパクトで向き付けられた4次元多様体の境界になっている．

系 2.7 任意の向き付けられた連結な3次元閉多様体は S^3 内の link 上の integral surgery として表すことができる．

surgery diagram における coefficient は，Kirby diagram での framing coefficient と混同を避けるために＜＞を付けて表すことにする．

2.5 Relative Kirby calculus

2.5.1 Relative Kirby diagram

X をコンパクトで連結な4次元多様体とする．これまでの handle body の説明では $\partial_- X = \emptyset$ を仮定していたが，ここでは $\partial_- X \neq \emptyset$ とする．$\partial_- X$ は $\mathbb{R}^3$ 上の rational（or integral）surgery diagram として表される．この diagram 上に 1,2,3,4-handle を Kirby diagram として描いた図を，$(X, \partial_- X)$ の relative Kirby diagram と呼ぶ．relative Kirby diagram 上での handle の動かし方には次のような規則がある．

- handle は Kirby diagram で扱ったのと同様の動かし方ができる．
- $\partial_- X$ の link の component 同士を slide させることができる．
- $\partial_- X$ の link を Kirby diagram の handle に slide させることはできない．

2.5.2 upside down

upside down とは，handle body の double をとった後，元の handle body を取り除くことによって，handle body の上下を反転させる操作である．具体的には以下の手順で行う．ここでは，$(X, \partial_- X)$ に 3,4-handle が存

在しない場合のみ考える．コンパクトな多様体の組 $(X,\partial_- X)$ の double とは，$D(X,\partial_- X) = (X \cup_{id_{\partial_+ X}} \overline{X}, \partial_- X)$ のことである．$(X,\partial_- X)$ の double をとると，次のように $(X,\overline{\partial_+ X})$ を誘導する．まず，0-handle がある場合は 4-handle を誘導する．次に 1-handle は 3-handle を誘導する．また，2-handle は core と cocore が逆転した 2-handle を誘導する．従って，4 次元多様体の double をとると，Kirby diagram 内では 0-handle があれば 4-handle を加え，1-handle の個数と同じ数の 3-handle を加え，2-handle の attaching circle に 0-framed meridian を描き加えればよい．その後，もともとあった $(X,\partial_- X)$ を取り除けば，upside down が完了する．Kirby diagram 内では 1-handle を表す dotted circle を ⟨0⟩-framed unknot に変え，もともとあった 2-handle の framing coefficient に＜＞を付ければよい．

3 Gluck surgery と Kirby diagram

定義 3.1 （Gluck surgery）M を C^∞-級 4 次元多様体とする．滑らかな写像 $f\colon S^2\times D^2 \to M$ で $S^2\times D^2$ を M に埋め込む．$\mathrm{Int} f(S^2\times D^2)$ を取り去り，恒等写像に isotopic でない微分同相写像 $h\colon \partial(S^2\times D^2) \to \partial(M - \mathrm{Int} f(S^2\times D^2))$ で貼り直すことを $f(S^2\times D^2)$ に沿う M の Gluck surgery という．

M 内の 2-knot K に対し，$\nu K = S^2\times D^2$ とすると，K に沿う M の Gluck surgery とは $f(S^2\times D^2)$ に沿う Gluck surgery のことである．K に沿う M の Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体を M_K とする．K のモーションピクチャーにでてくる saddle band をある時点にまとめた図である ch-diagram という M_K の Kirby diagram は，K のモーションピクチャーに現れる全ての saddle band を 1 つの図にまとめたものである ch-diagram から次の手順で構成することができる．

1. ch-diagram の band を 0-framed unknot に変える．
2. ch-diagram にもともとあった component に dot をつける．
3. dotted circle のどれかひとつに 1or -1-framed meridian をつける．
4. （band の数）-（dotted circle の数）+1 だけ 3-handle を加える．
5. 4-handle を 1 つ加える．

4 Sketch of Kirby calclus for M_K

Meier と Zupan[4] が構成した ch-diagram より，m-twist spun 2-knot K に沿って得られる 4 次元ホモトピー球面 M_K の Kirby diagram を構成する．

M_K の Kirby diagram から 0,1,3,4-handle を取り除いて cobordism W_m を作る．0,1-handle を取り除いた跡は surgery diagram で表すことができる．すると W_m は relative Kirby diagram で表せる．W_m を up side down をすることで handle の数を増やし，blow down できる形にもっていき，blow down によって m 回フルツイストを $m-1$ 回フルツイストにする．さらにもう一度 up side down してうまく handle を slide させると余分な handle が外れて cancel できるようになる．すると W_m を 2 回 up side down したものを W_{m-1} の形に変形できる．W_m を 2 回 up side down したものは W_m に他ならないので W_m と W_{m-1} が微分同相であることわかる．すると帰納的に W_m と W_1 が微分同相とわかる． Laudenbach-Poenaru [1] より，cobordism 同士が微分同相であるならば元の多様体同士も微分同相である．cobordism W_1 に 0,1,3,4-handle を戻したものは 1-twist spun 2-knot であるので，m-twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は 1-twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体と微分同相である．1-twist spun 2-knot は自明な

2-knot であり，自明な 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相であることから m-twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相であることがわかる．

参考文献

[1] F. Laudenbach and V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–334.

[2] H. Gluck, *The embeddings of 2-spheres in the 4-sphere*,Trans. Amer. Math. Soc. **104**(1962), 308–333.

[3] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 4, 585–596.

[4] J. Meier, A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in* S^4, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 10, 7343–7386.

Branched twist spin と Gluck twist

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
福田瑞季 (Mizuki FUKUDA)

概要

Branched twist spin とは，S^4 に滑らかに埋め込まれた 2 次元ファイバー結び目である．この結び目は Fintushel と Pao によって 1 次元の結び目と S^4 上の S^1-作用によって特徴付けがなされている．Gluck twist とは 4 次元多様体における結び目に沿った手術の一種で，branched twist spin に沿った Gluck twist では全空間である S^4 は変化しないことが知られている．この講演では branched twist spin に対し，Gluck twist を行なった後の結び目がどのようなものであるか決定できたので，証明の概略とともに紹介する．

1 導入

n 次元絡み目とはいくつかの S^n を S^{n+2} へ埋め込んだ像のことである．埋め込む S^n の個数を成分数といい，特に成分数が 1 のとき，n 次元結び目と呼ばれる．以下では滑らかな埋め込みによる結び目について考える．また，S^{n+2} から結び目の開環状近傍を取り除いたものを n 次元結び目の補空間と呼ぶ．結び目理論では，位相型で結び目を区別する．

この区別には大きく分けて 2 つの大きなテーマがある．1 つ目は与えられた結び目が自明かどうかという問題である．n 次元結び目が自明であるとは，$n+1$ 次元球体の境界の n 次元球面と位相型が等しいことをいう．1 次元の結び目において，その結び目が自明であることと，結び目群 (補空間の基本群) が $\mathbb{Z}$ と同型であることが必要十分条件である．これは結び目の近傍内で K と平行なロンジチュードを取ると，このロンジチュードが補空間内でディスクを張ることからわかる．3 次元以上の結び目では結び目群が $\mathbb{Z}$ となる結び目を構成できるため，基本群の情報だけでは完全に決定することはできない．2 次元では Unknotting conjecture と呼ばれ，位相的な埋め込みに関しては肯定的に解決されているが，滑らかな埋め込みに関しては未解決問題となっている [15].

2 つ目は与えられた 2 つの結び目の位相型が等しいかどうかという問題である．2 つの結び目が等しいとき，その補空間は同相になるが，逆が一般には成り立つとは限らない．実際，2 次元以上の結び目に関しては，Gluck によって補空間が同相になる結び目は高々 2 種類あることが知られている [2]．この事実は 4 次元多様体の 2 次元結び目に沿ったある手術が向きを保つ同相類によって本質的には 2 種類しか存在しないことに由来する．また，Gordon と Plotnick によって補空間が同相であるが結び目の位相型が異なる 2 次元結び目の例が無限個存在することが知られている [9, 14]．彼らは結び目補空間のファイバー性を用いて結び目の位相型が異なることを示している．

先ほど上の手術は本質的に 2 種類あると述べたが，1 つは自明な貼り合わせを行うものであり，結び目の位相型が変わらないことは明らかである．よってもう 1 つの自明でない手術によって結び目の

位相型が変化するかどうかという問題は素朴な疑問である．この自明でない手術を本稿では Gluck twist と呼ぶことにする．注意として，具体的な Gluck twist の定義は 3 章で述べるが，Gluck twist を行うと結び目の位相型だけでなく，全空間である S^4 自体が変化する可能性がある．実際，異種微分構造を持つ S^4 を構成する候補として Gluck twist による手術は研究されており， S^4 が異種瓶分構造を持つかどうかは未解決問題として Kirby の問題集に取り上げられている [7]．注意として 任意の 2 次元結び目に対し，その結び目に沿った Gluck twist により S^4 がホモトピー S^4 になることは知られている．

本稿では branched twist spin と呼ばれる 2 次元結び目に沿った Gluck twist を行なって得られる 2 次元結び目の位相型について述べる．Branched twist spin はその補空間に S^1 上のファイブレーション構造を持つ結び目であり，モノドロミーが周期的であることが知られている．このように補空間に S^1 上のファイブレーション構造を持つ結び目をファイバー結び目という． 1 次元結び目では，モノドロミーが周期的な結び目はトーラス結び目であり，branched twist spin はトーラス結び目に対応する 2 次元結び目の重要なクラスであると言える．

2 準備

滑らかな埋め込み $k : S^n \hookrightarrow S^{n+2}$ について， $k(S^n)$ を n 次元結び目といい，$\mathcal{K}$ と書く．結び目の位相型は次の同値類で定義する．$\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ を n 次元結び目とする．これらの結び目が同値であるとは，S^{n+2} 上の滑らかなアイソトピー $F : S^{n+2} \times I \to S^{n+2}$ が存在して， $F(x, 0) = x$ かつ $F(\mathcal{K}, 1) = \mathcal{K}'$ を満たすときをいい，$\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ と書く．本稿では 1 次元結び目と 2 次元結び目を扱うが， 1 次元結び目を表す際には $\mathcal{K}$ の代わりに K と書くことにする．

Branched twist spin は S^4 上の S^1-作用を用いて定義される．作用について準備を行った後，branched twist spin の定義を述べる．

2.1 局所滑らかな作用

G をリー群とし，X を多様体とする．$f : G \times X \to X$ が任意の $g, h \in G$, $x \in X$ に対して，

(0) f は滑らかな写像，
(1) $f(g, f(h, x)) = f(gh, x)$，
(2) $f(e, x) = x$，

を満たすとき，f を X 上の G の左作用という．ここで e は G の単位元である．右作用も同様にして定義される．G の作用 f が与えられた位相空間 X を G -空間という．以下では作用 f は左右両側で定義されているものとし，混乱が起きないときは写像 f を明記せず $f(g, x)$ や $f(x, g)$ を単に gx や xg と書くことにする．

$x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gx = y$$

という同値関係 $\sim$ による G -空間 X の商空間を X/G と書き，X の **G-軌道空間**という．G が明らかな場合には単に軌道空間と書くことにする．この商空間の各点の引き戻しは $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$

と表記できる．これを G による x の**軌道**という．また G の部分群 $G_x = \{g \mid gx = x\}$ を**安定部分群**という．各点の安定部分群の積集合 $\bigcap_{x\in X} G_x$ が自明な群 $\{e\}$ となるとき，作用は**効果的**であるという．特に全ての $x \in X$ に対して $G_x = \{e\}$ となるとき，作用は**自由**であるという．

X, Y を G -空間とする． 微分同相写像 $\phi : X \to Y$ が存在して，

$$\phi(gx) = g\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は G-**同値**であるという．また，微分同相写像 $\phi : X \to Y$ に対して $\psi \in Aut(G)$ が存在して，

$$\phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は**弱** G-**同値**という．

直積 $X \times Y$ への G -作用を $g(x, y) = (xg^{-1}, gy)$ で定義すると，$X \times Y$ も G -空間となる．この作用による商空間を $X \times_G Y$ と書く．商空間の同値類を $[x, y]$ と書くことにすると $[xg, y] = [x, gy]$ となることを注意しておく．作用が直交的であるとは作用の表現が直交群と同型になるときをいう．

次の補題からユークリッド空間上のコンパクトリー群による作用は常に直交的な作用としてよい．

補題 2.1. G をコンパクトリー群，$H \subset G$ を閉部分群とする．このとき，ある自然数 m と $v \in \mathbb{R}^m$ に対して $G_v = H$ となる表現 $\rho : G \to O(m)$ が存在する．

次に局所滑らかな作用を定義する．X を G -空間とし，X 内のある点 X の軌道 $G(x)$ を G/H -タイプとする．ここで，軌道 $G(x)$ が G/H-**タイプ**であるとは，$G_x = H$ となるときをいう．さらに，V をユークリッド空間で，V 上の H の作用は直交的であるとする．このとき $G(x)$ に関する**線形管**を

$$\phi : G \times_H V \to X$$

の像として定義する．また点 $y \in X$ の**線形スライス** S_y を

$$\psi : G \times_{G_y} S_y \to X; [g, s] \mapsto gs$$

が $G(y)$ の線形管と G -同値となるものとして定義する．各点で線形スライスが存在するとき X を**局所滑らか**であるという．注意として，$G \times_H V \to X$ は G/H 上の V 束なので $G \times_H V$ は多様体である．したがって滑らかな作用を持つ空間 X は多様体でなくてはならない．

一般に作用と軌道空間が与えられたときに，全空間がどのようになっているかわからない．しかし主 S^1 束については次が成立する．

補題 2.2. $\mathcal{P}(S^1, M)$ を M 上の主 S^1 束全体の集合とする．このとき，$\mathcal{P}(S^1, M) = H^2(M; \mathbb{Z})$.

2.2 Branched twist spin の定義

局所滑らかで効果的な S^1 作用をもつ S^4 を考える．このとき，軌道空間は D^3 か S^3 になることが Montgomery と Yang によって知られている [12]．軌道空間が D^3 の場合には例外軌道がなく，固定点集合の像 F^* が $\partial D^3 = S^2$ となる．軌道空間が S^3 の場合には固定点集合 F は 2 点からな

り，例外軌道は高々 2 種類存在する．本稿では例外軌道が 2 種類存在するときを考える．例外軌道をそれぞれ $\mathbb{Z}_m$-タイプ，$\mathbb{Z}_n$-タイプとし，それぞれの例外軌道の集合を E_m, E_n と書く．ここで m, n は互いに素な整数である．以下，簡単のため m, n は互いに素な自然数とする．E_m, E_n の軌道空間内の像をそれぞれ E_m^*, E_n^* と書く．同様に固定点集合 F の軌道空間内の 像を F^* と書くことにする．Fintushel によって，$E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内で 1 次元結び目になっていることが知られている [3]．(例として図 1 を参照．) また各 $E_m \cup F$, $E_n \cup F$ は S^2 と同相であり，2 次元結び目である．

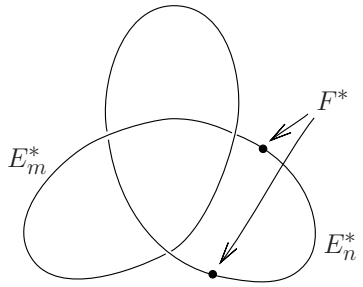


図 1　軌道空間 S^3 内の例外軌道と固定点の像

上記から branched twist spin は次のように定義される．

定義 2.3 (Branched twist spin)**.** $S^1 \curvearrowright S^4$ を局所滑らかで効果的な作用，2 つの例外軌道をそれぞれ E_m, E_n とし，$K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ とする．$E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ をそれぞれ K の branched twist spin といい $K^{n,m}, K^{m,n}$ と書く．

注意 2.4. (1) 上の定義の K は任意の 1 次元結び目を与えることができる．
(2) S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1-作用を 1 つ与えると，S^4 内には 2 つの branched twist spin の組 $(K^{m,n}, K^{n,m})$ が定義されている．この組に現れる m, n は互いに連動している．つまり，“適切な意味”で $K^{m,n}$ が $K^{m',n}$ に置き換わったとすると，同時に $K^{n,m}$ は $K^{n,m'}$ に置き換わる．

作用を用いて軌道空間である S^3 から S^4 を構成する．まず S^3 を軌道の種類によって次の 5 つのパーツに分ける．$E_m^* \cup E_n^* \cup F^* = K \subset S^3$ を 1 次元結び目，

$$S^3 = X \cup (E_m^{c*} \times D^2) \cup (E_n^{c*} \times D^2) \cup D_1^{3*} \cup D_2^{3*}.$$

ここで， D_1^{3*}, D_2^{3*} は F^* の 2 点それぞれの近傍， E_m^{c*}, E_n^{c*} は それぞれ E_m^*, E_n^* 内のコンパクト部分集合，X は K の結び目補空間である．

X の任意の点は S^4 内の自由な S^1 作用による軌道の像なので，特に主 S^1 束である．ポアンカレ双対より $H^2(X;\mathbb{Z}) = H_1(X, \partial X;\mathbb{Z}) = 0$ となるため，補題 2.2 より X の作用による逆像は直積 $X \times S^1$ となる．

次に D_1^{3*}, D_2^{3*} について作用による逆像を考える．D_1^{3*}, D_2^{3*} は中心が固定点の像である 3 次元球体であり，中心以外は自由な作用による像である．S^4 内の固定点 F は 2 点からなる．その近傍である 4 次元球体をそれぞれ D_1^4, D_2^4 とする．境界 ∂D_i^4 $(i = 1, 2)$ には自由な S^1 作用が入っており，D_i^4 上の作用はこの自由な作用の錐を取ることで得られる．

次に $E_m^{c*} \times D^2$ について作用による逆像を考える．E_m^{c*} 上の点 z_m^* を取り，S^3 内で $z_m^* \in E_m^{c*}$ を中心とし，E_m^{c*} と横断的に交わるディスクを $D^{2*}_{z_m^*}$ とする．このディスクは z_m^* 以外の例外軌道の像を含まないように取れる．$D^{2*}_{z_m^*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_m$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_m である．同様に $E_n^{c*} \times D^2$ についても S^3 内で $z_n^* \in E_n^{c*}$ を中心とし，E_n^{c*} と横断的に交わるディスクを $D^{2*}_{z_n^*}$ とする．$D^{2*}_{z_n^*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_n$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_n である．

以上のことから S^4 は次の 5 つのピースに分解できる．

$$S^4 = (B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1). \tag{2.1}$$

それぞれのピースには S^1-作用が与えられているので，座標を与え作用が適合するような貼り合わせを考えることで，貼り合わせ写像を具体的に書き下すことができる．貼り合わせ写像の細かい議論に関しては， 例えば [4] を参照されたい．

2.3 Gluck twist と主定理

Gluck twist とは 4 次元多様体の重要な手術の 1 つとして知られており．1 章でも述べたが， 一般に 2 次元結び目に沿った Gluck twist によって S^4 が変化することがあるかどうかは知られていない．Pao によって branched twist spin に沿った Gluck twist は S^4 を変えないことが知られているので，以下の議論は全空間が常に S^4 であることが保証される [13].

Gluck twist を定義する．Gluck twist とは S^4 から 2 次元結び目 $\mathcal{K}$ の近傍を取り除き，ある非自明な写像によって貼り戻す操作のことである．Gluck はこの貼り戻す写像が向きを保つ同相類を除いて 2 種類しかないことを示した．1 つは自明な貼り戻しで，もう一つは次の写像 $\tau = \nu \cup \nu'$ で定義される：

$$\nu(x,(r,\theta),\phi) = (x,(r,\theta-\phi),\phi) \qquad (x,(r,\theta),\phi) \in (\partial D^1 \times D^2) \times S^1 \subset S^2 \times S^1,$$
$$\nu'(x,\theta,\phi) = (x,\theta-\phi,\phi) \qquad (x,\theta,\phi) \in (D^1 \times \partial D^2) \times S^1 \subset S^2 \times S^1.$$

この τ による貼り戻しによって出来上がる 4 次元多様体を $\Sigma(\mathcal{K})$ と書く．

筆者は branched twist spin に沿った Gluck twist について次の結果を得た．

定理 2.5. $K^{m+n,n}$ は $K^{n,m}$ に沿った Gluck twist による $K^{m,n}$ の像として得られる．

証明の概略. $\Sigma(K^{n,m})$ は Pao によって S^4 と微分同相であることが示されているので，$\Sigma(K^{n,m})$ 全体に S^1-作用があると $\Sigma(K^{m,n})$ 内に branched twist spin が定義できる．(2.1) のうち，$(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ は $N(K^{n,m})$ の分解であり，$(D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ は補空間の分解である．Gluck twist の定義から $(D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ 上の S^1-作用は変化しないので，この作用が $(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ 内の作用に拡張できることを示す．実際，貼り合わせ写像と Gluck twist の定義式を用いて $(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ 上の S^1-作用は $\mathbb{Z}_{m+n}$-タイプの例外軌道が存在し，残りは自由である S^1-作用を定義できることが確認できる．$K^{m,n}$ の補空間である $(D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ には最初から $\mathbb{Z}_n$-タイプの例外軌道が存在するので，$\Sigma(K^{n,m})$ 上には 2 種類の例外軌道をもつ S^1-作用を考えることができる．特に，$K^{n,m}$ の Gluck twist による

像は固定点は変わらず，例外軌道のタイプが $\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_{m+n}$ に変化しただけである．軌道空間に関しては，図 2 のように K の位相型を変えず Gluck twist が行われていることに注意すると， $K^{n,m}$ の Gluck twist による像は $K^{n,m+n}$ であることが確かめられる．

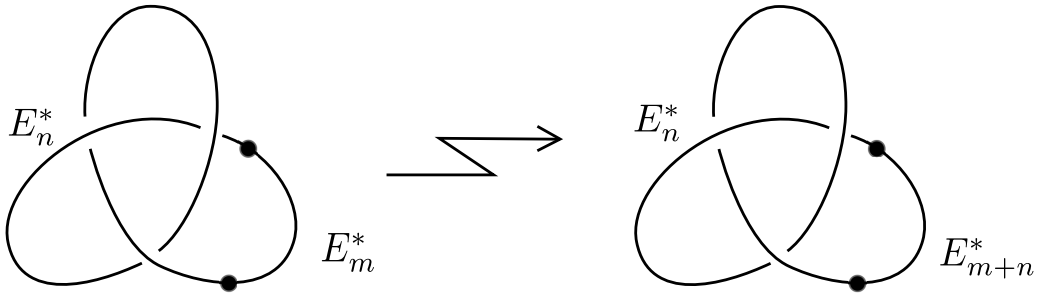


図 2　Gluck twist による軌道空間の変化

したがって，対の片方である $K^{m,n}$ は Gluck twist によって $K^{m+n,n}$ に移る． □

この定理の系を紹介して本稿の終わりとする．Plotnick はモノドロミーの位数が奇数の非自明な 2 次元ファイバー結び目は Gluck twist によって結び目が必ず変化することを示した [14]．これは補空間が同相だが結び目の同値類がことなるということを述べている．一般に，Gluck twist による 2 次元結び目の像がどのような結び目であるかは知られていない．Branched twist spin $K^{m,n}$ は 2 次元ファイバー結び目であり，そのモノドロミーの位数は m であるので，定理 2.5 に Plotnick の結果を適用することで次の系を得る．

系 2.6. m が奇数であり，$K^{m,n}$ は非自明な 2 次元結び目とする．このとき $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は同相な補空間をもつが，異なる結び目である．

参考文献

[1] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, New York-London Pure and Applied Mathematics, Vol.46, 1972.

[2] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.

[3] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[4] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.

[5] R. H. Fox, *Rolling*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 162–164.

[6] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–140.

[7] R. Kirby,(Ed.) *Problems in Low-Dimensional Topology*, 1995. http://www.math.berkeley.edu/~kirby/.

[8] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fiberd two-knots*, Math. Ann. **287** (1990) 259–273.

[9] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585–596.

[10] C. McA. Gordon, *On the reversibility of twist-spun knots*, J. Knot Theory Ramifications **12**, (2003) 893–897.

[11] C. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** , no. 2 (1989), 371–415.

[12] D. Montgomery and C. T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension n-3*, **I**, **II**, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517. ; **5** (1961), 206–211.

[13] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[14] S. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.

[15] J. Stallings, *On topological unknotted spheres*, Ann. of Math. Second Series, Vol. 77, no.3, May, 1963, pp. 490–503.

[16] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.

クラスター変数とアレキサンダー多項式

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
永井渡 (Wataru NAGAI)

1 導入

クラスター代数は Fomin と Zelevinsky[FZ] によって導入され, 様々な分野との関連が研究されている. クラスター変数はクラスター代数の生成元であり, ミューテーションと呼ばれる操作により交換関係式と呼ばれる関係式を満たしながら変化する.

Musiker と Schiffler は三角形分割から得られる主係数付きクラスター変数が, スネークグラフと呼ばれる重み付きグラフの完全マッチングを用いて表せることを示した [MS]. そして Çanakçı と Schiffler は重みをつけないスネークグラフが 1 より大きい有理数と一対一に対応することを示した [CS]. さらに Lee と Schiffler は 1 より大きい有理数に対応する主係数付きクラスター変数の特殊化からその有理数に対応する 2 橋絡み目のジョーンズ多項式が得られることを示した [LS].

一方, 2 橋結び目のジョーンズ多項式を計算する方法として, 山田修司氏が発見した祖先三角形を用いる方法がある [Y, KW]. 祖先三角形とは正の有理数によって定まる三角形を張り合わせた図形である. 祖先三角形の各辺に重みを与えて重み付きパスの母関数を考えると, 同じ有理数に対応する 2 橋絡み目のジョーンズ多項式を計算できる.

本研究では, 有理数に対応するクラスター変数を [LS] とは異なる方法で特殊化することで, その有理数に対応する 2 橋絡み目のアレキサンダー多項式が得られることを示した. そのために, まず祖先三角形から定まるクイバーとミューテーション列から得られるクラスター変数が祖先三角形の重み付きパスの母関数で表せることを示し, そのクラスター変数を特殊化することで 2 橋絡み目のアレキサンダー多項式が得られることを示した. 本講演の内容は, 寺嶋郁二氏との共同研究 [NT] に基づく.

2 祖先三角形

ここでは, [Y] の定義を少し変えて $0 < p/q < 1$ となる有理数 p/q に対して祖先三角形を構成する. p/q を次のように連分数展開する.

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ただし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の整数である. この式の右辺を $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ で表す.

以降, 次のような三角形を右向きあるいは左向きであるという.



左向き　　右向き

p/q の連分数展開の一つを $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とする. 祖先三角形を次のように下から上へ三角形を積み上げることで構成する. まず, $a_1 - 1$ 個の右向きの三角形を積む. さらに a_2 個の左向きの三角形, a_3 個の右向きの三角形, $\ldots$, n が奇数 (偶数) のとき a_n 個の右向き (左向き) の三角形を積み上げる. さらに, こうしてできた図形の各頂点に次のように下から分数でラベルをつけていく. まず, 一番下の三角形の一番下の辺の左側の頂点に $0/1$, 右側の頂点に $1/1$ でラベルをつける. さらに, 各三角形で下の辺が r/s と t/u でラベル付けされていれば残りの頂点に $(r+t)/(s+u)$ でラベルをつける. このようにしてできた祖先三角形を $A(p/q)$ で表す. また, 1 回目に積まれた $a_1 - 1$ 個の三角形たちをまとめて Δ_1 と表し, k 回目に積まれた a_k 個の三角形たちをまとめて Δ_k で表す. また, 下から i 番目の三角形を T_i で表す.

例 2.1. $7/19$ と $3/5$ に対応する祖先三角形を構成する. $7/19 = [2,1,2,2]$ より $A(7/19)$ は 1 つの右向きの三角形, 1 つの左向きの三角形, 2 つの右向きの三角形, 2 つの左向きの三角形を積み上げると, $A(7/19)$ は図 1 の左側のようになる. 一方, $3/5 = [1,1,2]$ より 0 個の右向きの三角形, 1 つの左向きの三角形, 2 つの右向きの三角形を積み上げて $A(3/5)$ は図 1 の右側のようになる.

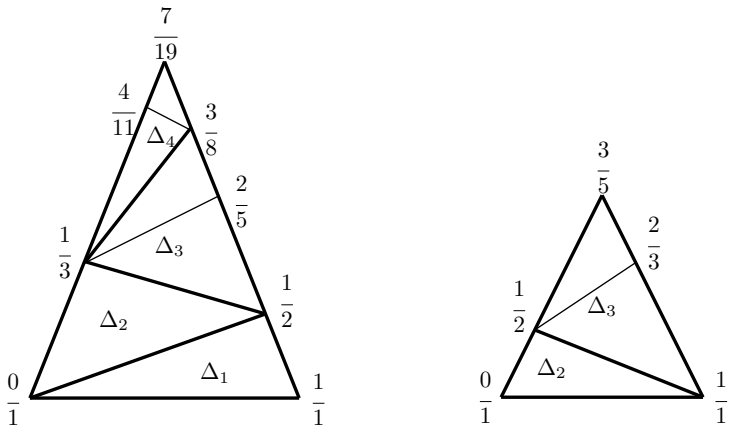


図 1　$A(7/19)$ (左) と $A(3/5)$ (右).

祖先三角形について, 次が成り立つ.

命題 2.2.　(1) $A(p/q)$ の一番上の頂点は p/q でラベル付けされる.

(2) $A((q-p)/q)$ は $A(p/q)$ を反転させて得られる.

2.1　祖先三角形のパス

祖先三角形 $A(p/q)$ の下降パスとは, 頂点 p/q から頂点 $0/1$ または $1/1$ へ至るパスであり, パスが通る頂点のラベルの分母が単調減少になっているものをいう. 以降, 下降パスのことを単にパスと

いう.

例 2.3. 図 2 の左側の図の矢印は $A(7/19)$ のパスである. 一方, 右側の図の矢印は $1/2$ を通った後 $1/3$ を通っていて, 分母が単調減少ではないためパスではない.

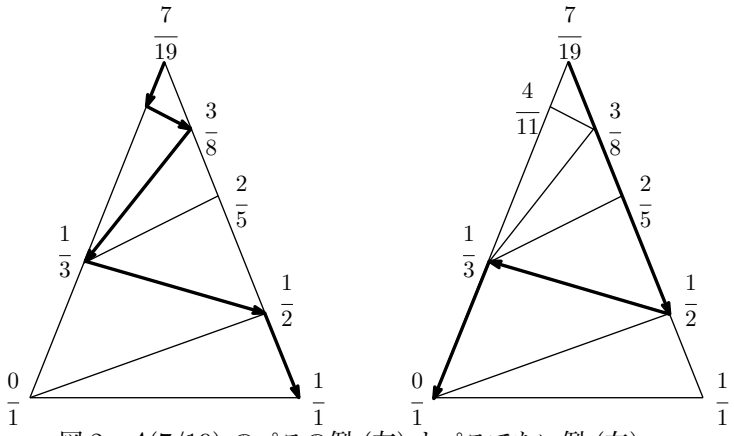


図 2　$A(7/19)$ のパスの例 (左) とパスでない例 (右).

祖先三角形 $A(p/q)$ のパス全体の集合を $\Gamma_{p/q}$ とする. $\gamma \in \Gamma_{p/q}$ に対し, γ の左側にある三角形の集合を S_γ とする.

定義 2.4. $p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とし, $N = a_1 + \cdots + a_n - 1$ とする. また, $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ を変数とする. 祖先三角形 $A(p/q)$ の三角形 T_i の重み $\mathrm{wt}(T_i)$ を次のように定める.

$$\mathrm{wt}(T_1) = \begin{cases} y_1 x_2 & T_1 \text{ が右向きの時} \\ y_1 / x_2 & T_1 \text{ が左向きの時} \end{cases}$$

$i \geq 2$ の時,

$$\mathrm{wt}(T_i) = \begin{cases} y_i x_{i+1} / x_{i-1} & T_i \text{ が右向きかつ } T_{i-1} \text{ が右向きの時} \\ y_i x_{i-1} x_{i+1} & T_i \text{ が右向きかつ } T_{i-1} \text{ が左向きの時} \\ y_i / x_{i-1} x_{i+1} & T_i \text{ が左向きかつ } T_{i-1} \text{ が右向きの時} \\ y_i x_{i-1} / x_{i+1} & T_i \text{ が左向きかつ } T_{i-1} \text{ が左向きの時} \end{cases}$$

ただし, $x_{N+1} = 1$ とする. さらに, $\gamma \in \Gamma_{p/q}$ の重み $\mathrm{wt}(\gamma)$ を次のように定義する.

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \prod_{T_i \in S_\gamma} \mathrm{wt}(T_i)$$

例 2.5. 図 2 の左側のパスを γ としてその重みを求める. 各三角形の重みは以下のようになる.

$$\begin{array}{lllllllll} \mathrm{wt}(T_1) & = & y_1 x_2, & \mathrm{wt}(T_2) & = & y_2 / x_1 x_3, & \mathrm{wt}(T_3) & = & y_3 x_2 x_4, \\ \mathrm{wt}(T_4) & = & y_4 x_5 / x_3, & \mathrm{wt}(T_5) & = & y_5 / x_4 x_6, & \mathrm{wt}(T_6) & = & y_6 x_5. \end{array}$$

$S_\gamma = \{T_1, T_2, T_5\}$ であるから,

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}(T_1)\,\mathrm{wt}(T_2)\,\mathrm{wt}(T_5) = \frac{y_1 y_2 y_5 x_2}{x_1 x_3 x_4 x_6}.$$

3 クラスター代数

まず, クラスター代数の定義を復習する. 詳しくは [FZ4] を参照.

クラスター代数は係数の属する半体に対して定義される. 半体とは, 和と積の 2 つの演算を持ち, 積についてアーベル群であって和が可換で結合的であり, 分配法則を満たすものである. $\mathbb{P}$ を半体とし, $\mathbb{ZP}$ を群環, $\mathbb{QP}$ をその商体とする.

N を正の整数とする. $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ を $\mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の N 個組, $\mathbf{y} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ を $\mathbb{P}$ の N 個組, B を $N \times N$ 整数行列で反対称化可能とする. ただし, B が反対称化可能であるとは, 正の整数 $d_1, d_2, \ldots, d_N$ があって, 対角行列 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_N)$ との積 DB が反対称行列となるときをいう. これらの 3 つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を種子という.

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mathbb{QP}$ の種子とし, $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, $\mathbf{y} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ とする. $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し, k でのミューテーション μ_k は種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に変換する操作で, 次で定義される.

- $B' = (b'_{ij})$ は次で定義される.

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \text{ の時} \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{1}$$

- $\mathbf{y}' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_N)$ は次で定義される.

$$u'_j = \begin{cases} u_k^{-1} & j = k \text{ の時} \\ u_j u_k^{[b_{kj}]_+} (u_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & j \ne k \text{ の時.} \end{cases} \tag{2}$$

- $\mathbf{x}' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_N)$ は交換関係式と呼ばれる次の式で定義される.

$$X'_j = \begin{cases} \dfrac{\prod X_i^{[-b_{ik}]_+} + u_k \prod X_i^{[b_{ik}]_+}}{(u_k \oplus 1) X_k} & j = k \text{ の時} \\ X_j & j \ne k \text{ の時} \end{cases} \tag{3}$$

ただし, $[x]_+ = \max(x, 0)$ である.

クイバーとは, 単純とは限らない有向グラフのことである. 本稿では, クイバーは頂点と辺の数が有限で, 以下のような 1-loop や 2-cycle を含まないとする.



1-loop　　2-cycle

Q をクイバーとし, その頂点集合を $\{1, 2, \ldots, N\}$ とする. Q に対応する反対称行列 $B^Q = (b^Q_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を $b_{ij} = Q_{ij} - Q_{ji}$ で定義する. ただし, Q_{ij} は頂点 i から頂点 j への辺の本数とする. 逆に, 反対称整数行列 B に対して $b_{ij} > 0$ の時頂点 i から 頂点 j へ b_{ij} 本の辺を引くと, これは前の対応の逆になっている. 以降では, この対応によって 3 つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q)$ を種子とみなす.

$\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^N$, $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{P}^N$ とし, B_0 を反対称化可能行列とする. このとき種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ を初期種子と呼ぶ. 初期種子から有限回のミュー

テーションで得られる任意の種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ の $\mathbf{x}$ の各々の要素をクラスター変数という. 初期種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ から得られる全てのクラスター変数で生成される $\mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数を係数付きクラスター代数と呼ぶ. 以降では, $\mathbb{P}$ をトロピカル半体 $\mathrm{Trop}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ とする. トロピカル半体 $\mathrm{Trop}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ とは, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ たちのローラン単項式全体の集合に通常の積と次で定義される和 $\oplus$ を入れたものである.

$$\prod_{j=1}^{N} y_j^{a_j} \oplus \prod_{j=1}^{N} y_j^{b_j} = \prod_{j=1}^{N} y_j^{\min(a_j, b_j)}$$

例 3.1. クイバー Q_0 を $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ とし, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, Q_i) = \mu_i \circ \cdots \circ \mu_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ とする. この時, 種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, Q_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, Q_2)$, $(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, Q_3)$ は次のようになる.

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{y}_i$	Q_i
0	(x_1, x_2, x_3)	(y_1, y_2, y_3)	$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$
1	$\left(\dfrac{x_2+y_1}{x_1}, x_2, x_3\right)$	$\left(\dfrac{1}{y_1}, y_1y_2, y_3\right)$	$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$
2	$\left(\dfrac{x_2+y_1}{x_1}, \dfrac{x_2+y_1+y_1y_2x_1x_3}{x_1x_2}, x_3\right)$	$\left(y_2, \dfrac{1}{y_1y_2}, y_3\right)$	$1 \rightleftarrows 2 \longrightarrow 3$
3	$\left(\dfrac{x_2+y_1}{x_1}, \dfrac{x_2+y_1+y_1y_2x_1x_3}{x_1x_2}, X_3'\right)$	$\left(y_2y_3, \dfrac{1}{y_1y_2}, \dfrac{1}{y_3}\right)$	$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$

ここで,

$$X_3' = \frac{x_2^2 + y_1x_2 + y_3x_2 + y_1y_3 + y_1y_2y_3x_1x_3}{x_1x_2x_3}.$$

3.1 祖先三角形のクラスター変数

p/q を $0 < p/q < 1$ となる有理数とし, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ をその連分数展開, $N = \sum_{i=1}^{n} a_i - 1$ とする. 祖先三角形 $A(p/q)$ に対応する初期クイバー Q_0 を次のように構成する.

- Q_0 の頂点集合は $\{1, 2, \ldots, N\}$.
- $i = 1, 2, \ldots, N-1$ について, T_i が右向きであれば頂点 $i+1$ から頂点 i へ辺を引き, 左向きであれば頂点 i から $i+1$ へ辺を引く.

例 3.2. $A(7/19)$ に対応するクイバー Q_0 は次のようになる.

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longrightarrow 6\ .$$

初期種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ に $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ を順に施して得られた種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ の $\mathbf{x}$ の N 番目のクラスター変数を $X_{p/q}$ とすると, 次の式が成り立つ.

定理 3.3.

$$X_{p/q} = \frac{D}{x_1x_2\cdots x_N} \sum_{\gamma \in \Gamma_{p/q}} \mathrm{wt}(\gamma), \tag{4}$$

ここで,

$$D = \prod_{i=1}^{N} (\mathrm{wt}(T_i) \text{ の分母})$$

注意 1. 祖先三角形は, 頂点を 1 つ付け加えてその頂点と 0/1 及び 1/1 を結ぶ辺を追加することで, $(N+3)$ 角形の三角形分割と思うことができる. [MS] によりクラスター変数 $X_{p/q}$ はスネークグラフの完全マッチングを用いて表せるが, このスネークグラフは [CS] の対応で q/p に対応する. 彼らの連分数展開の表記は本稿と同じであるが, 定義は本稿の逆数となっているので, $X_{p/q}$ を [LS] の $x[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ としてとれる.

例 3.4. 祖先三角形 $A(3/5)$ は図 1 の左側に図示されている. 各三角形の重みは $\mathrm{wt}(T_1) = y_1/x_2$, $\mathrm{wt}(T_2) = y_2x_1x_3$, $\mathrm{wt}(T_3) = y_3/x_2$ であるので, $D = x_2^2$ であり, 各パスの重みは以下のようになる.

γ	S_γ	$\mathrm{wt}(\gamma)$
$\frac{3}{5} \to \frac{1}{2} \to \frac{0}{1}$	$\emptyset$	1
$\frac{3}{5} \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1\}$	$\frac{y_1}{x_2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{2} \to \frac{0}{1}$	$\{T_3\}$	$\frac{y_3}{x_2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1, T_3\}$	$\frac{y_1y_3}{x_2^2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1, T_2, T_3\}$	$\frac{y_1y_2y_3x_1x_3}{x_2^2}$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{D}{x_1x_2\cdots x_N} \sum_{\gamma \in \Gamma_{p/q}} \mathrm{wt}(\gamma) &= \frac{x_2^2}{x_1x_2x_3}\left(1 + \frac{y_1}{x_2} + \frac{y_3}{x_2} + \frac{y_1y_3}{x_2^2} + \frac{y_1y_2y_3x_1x_3}{x_2^2}\right) \\ &= \frac{x_2^2 + y_1x_2 + y_3x_2 + y_1y_3 + y_1y_2y_3x_1x_3}{x_1x_2x_3}. \end{aligned}$$

一方, $A(3/5)$ に対応する初期クイバー Q_0 は次のようになる.

$$Q_0 = \ 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

さらに, $X_{3/5}$ は種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q) = \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ の $\mathbf{x}$ の 3 番目の要素である. よって, $X_{3/5}$ は例 3.1 の X_3' と等しいから,

$$X_{3/5} = X_3' = \frac{x_2^2 + y_1x_2 + y_3x_2 + y_1y_3 + y_1y_2y_3x_1x_3}{x_1x_2x_3}.$$

4　2 橋絡み目のアレキサンダー多項式

4.1　2 橋絡み目

2 橋絡み目は有理数と対応する絡み目で, 有理数の連分数展開を使って次のように構成できる. まず, 整数 m に対し次のような組み紐を考える.

$$\boxed{m} = \begin{cases} \overbrace{\cdots}^{m} & \text{if } m > 0 \\ \overbrace{\cdots}^{m} & \text{if } m < 0 \end{cases} \tag{5}$$

p/q を $0 < p/q < 1$ となる有理数とし, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ をその連分数展開とする. p/q に対応する 2 橋絡み目 $K(p/q)$ は次の図 3 のような図式を持つ絡み目のことである.

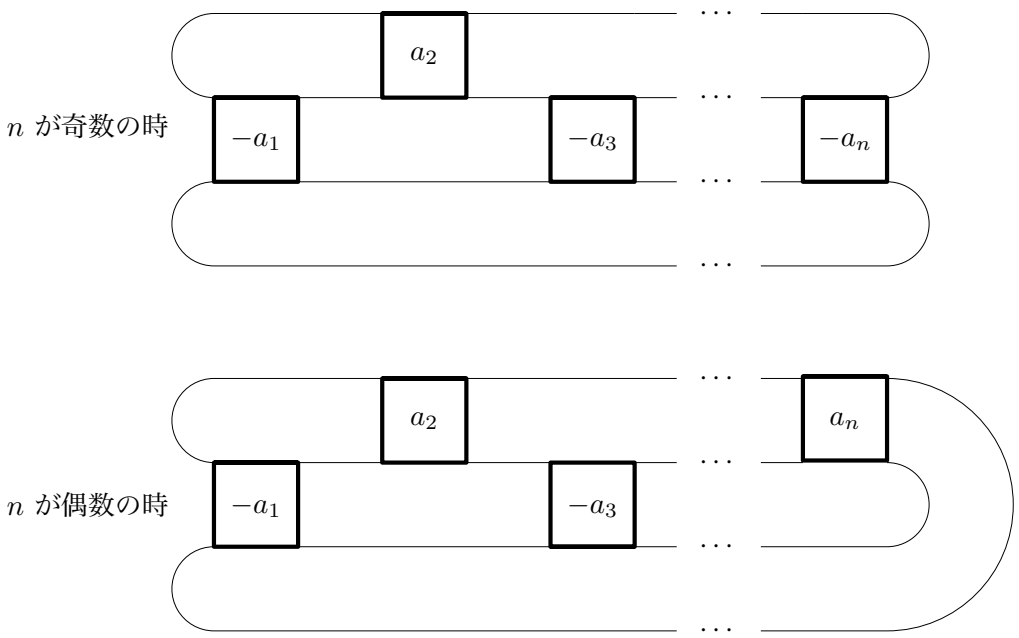


図 3　2 橋絡み目の図式. 各正方形は (5) のような組み紐を表す.

2 橋絡み目 $K(p/q)$ は q が奇数の時結び目となり, 偶数の時 2 成分絡み目となる. 以降では, $K(p/q)$ の向き付けを次のように固定する. $-a_1$ の部分の組み紐の一番左の交点のひもの向きが q が奇数の時 , q が偶数の時  となるようにする. また, 各交点の符号を交点が  のようになっている時 $+1$ とし, 交点が  のようになっている時 -1 とする.

例 4.1. $3/5 = [1, 1, 2]$ に対応する 2 橋絡み目 $K(3/5)$ は結び目であり, 図 4 のようになる. 各交点の符号は左から順に -1, -1, $+1$, $+1$ である.

簡単にわかるように, 各組み紐の中では交点の符号は等しい. そこで, 組み紐の符号をその交点の符

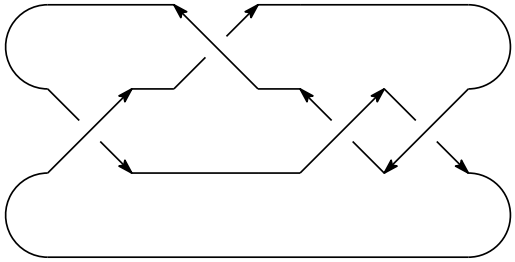


図 4　$K(3/5)$

号とする. この符号を祖先三角形から計算する公式のために, ザイフェルトパスというパスを用いる. ザイフェルトパスとは, 次の 2 つの条件を満たすパスである.

1. 1 つの三角形の 2 辺以上を通らない.
2. 祖先三角形の各頂点の分子と分母に $\bmod 2$ をとると, 各頂点は 0/1, 1/1, 1/0 のいずれかである. p と q が奇数の時端点が 1/1 と 1/0 である辺のみを, それ以外の時は端点が 0/1 と 1/0 である辺のみを通る.

このようなパスは唯一つ存在する. ここで, 数列 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ を次のように定める.

$$t_1 = \begin{cases} -1 & p \text{ と } q \text{ がどちらも奇数の時} \\ +1 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

$$t_i = \begin{cases} -t_{i-1} & \Delta_i \text{ と } \Delta_{i-1} \text{ の間をザイフェルトパスが通る時} \\ t_{i-1} & \Delta_i \text{ と } \Delta_{i-1} \text{ の間をザイフェルトパスが通らない時} \end{cases}$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. t_i は $K(p/q)$ の $(-1)^i a_i$ の部分の組み紐の符号に等しい.

証明の概略. ある i について a_i が 3 以上であれば, 向き付けに影響を与えずにその部分の組み紐の交点を 2 つ減らすことができる. さらに, 祖先三角形で Δ_i の三角形を 2 つ減らしてもザイフェルトパスは変化しない. よって, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は 1 または 2 であるとしてよい. さらに $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$ から構成される 2 橋絡み目と $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1]$ から構成される 2 橋絡み目は等しくなるので $a_n = 2$ であるとしてよい. このとき, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ と $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}]$ は $\bmod 2$ で等しい. そこで, n に関する帰納法で証明する. その際に鍵となるのが次の公式である: q が奇数の時,

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{一番上の三角形の左側の頂点が} \mod 2 \text{ で } 1/0 \text{ の時} \\ -1 & \text{一番上の三角形の右側の頂点が} \mod 2 \text{ で } 1/0 \text{ の時} \end{cases}$$

この公式から a_{n-2} に対応する組み紐の符号がわかるので, $K([a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}])$ に 2 つ組み紐を挿入することで $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ に対応する 2 橋絡み目を作り, この操作によって元の部分の向き付けを変えないことと挿入した組み紐の符号が t_{n-1}, t_n に等しいことを示す. □

注意 2. Hatcher と Oertel は祖先三角形のある条件を満たすパスから 2 橋絡み目の境界スロープを計算できることを示した [HO]. このアルゴリズムにおいて, ザイフェルトパスはザイフェルト曲面に対応するパスである.

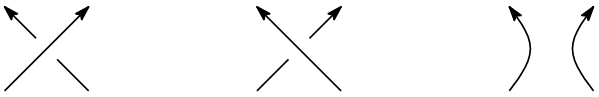


図 5　スケイン関係式

4.2　アレキサンダー多項式

一般に, 2 つの絡み目が等しくないことを示すのは難しい. そこで, 絡み目の不変量と呼ばれる等しい絡み目に等しい数や多項式などを割りあてる写像を構成し, これを計算することで異なる結び目を見分けることを考える. アレキサンダー多項式はそのような不変量の一つであり, 1 変数の負冪を許した多項式である. 絡み目 L に対するアレキサンダー多項式を $\Delta_L(t)$ とする. アレキサンダー多項式は次のように計算できる. まず, 自明な結び目のアレキサンダー多項式は 1 である. さらに, 図式においてある交点の近傍以外は全く同じで近傍だけが図 5 のように異なる 3 つの絡み目 L_+, L_-, L_0 に対して次の関係式 (スケイン関係式) が成り立つ.

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t)$$

これら 2 つの規則により任意の向きをつけられた絡み目のアレキサンダー多項式が計算できる. 2 橋絡み目 $K(p/q)$ のアレキサンダー多項式を $\Delta_{p/q}$ とする.

$p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ の祖先三角形 $A(p/q)$ において, Δ_k の中で下から i 番目の三角形を $T_i^{(k)}$ とする. すなわち, $l_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ とすれば, $T_i^{(k)}$ は $k = 1$ のとき T_i であり, $k \geq 2$ の時 $T_{l_{k-1}+i-1}$ である. 三角形の符号 $e(T_i^{(k)})$ を次のように定める.

- Δ_k の一番下の辺をザイフェルトパスが通る時,

$$e(T_i^{(k)}) = (-1)^i$$

- k が奇数の時

$$e(T_i^{(k)}) = \begin{cases} +1 & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの左側にある時} \\ (-1)^{i-1} & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの右側にある時} \end{cases}$$

- k が偶数の時

$$e(T_i^{(k)}) = \begin{cases} +1 & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの右側にある時} \\ (-1)^{i-1} & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの左側にある時} \end{cases}$$

三角形 T_i の符号を e_i とする. p/q に対応するクラスター変数 $X_{p/q}$ は $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ の有理式であった. $X_{p/q}$ において, $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$ とし, $y_i = -t^{e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ として得られる t の負冪を許した多項式を $\mathcal{F}_{p/q}$ とする. 次の定理が主結果である.

定理 4.3.

$$\Delta_{p/q} \;=\; \epsilon t^d \mathcal{F}_{p/q}$$

ここで,

$$d = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d(k)$$

$$d(k) = \begin{cases} a_k - 1 & k \text{ が奇数かつ } t_k = -1 \text{ , または } k \text{ が偶数かつ } t_k = +1 \text{ の時} \\ t_k & \Delta_k \text{ の一番下の辺をザイフェルトパスが通る時} \\ 1 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

$$\epsilon = (-1)^{n+\sum_{i:\text{even}} a_i - pq}$$

特に, この結果と [LS] の結果から, クラスター変数 $X_{p/q}$ は 2 つの異なる結び目不変量の情報を持っていることになる.

参考文献

[CS] İlke Çanakçı and R. Schiffler, *Cluster algebras and continued fractions. (English summary)*, Compos. Math. 154 (2018), no. 3, 565–593.

[FZ] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497–529.

[FZ4] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. 143 (2007), no. 1, 112–164.

[HO] A. Hatcher and U. Oertel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology 28 (1989), no. 4, 453–480.

[KW] T. Kogiso and M. Wakui, *A Bridge between Conway-Coxeter Friezes and Rational Tangles through the Kauffman Bracket Polynomials*, `arXiv:1806.04840`

[LS] K. Lee and R. Schiffler, *Cluster algebras and Jones polynomials*, `arXiv:1710.08063`.

[MS] G. Musiker and R. Schiffler, *Cluster expansion formulas and perfect matchings (English summary)*, J. Algebraic Combin. 32 (2010), no. 2, 187–209.

[NT] W. Nagai and Y. Terashima, *Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials*, `arXiv:1812.02434`

[Y] 山田修司, *2* 橋結び目の *Jones* 多項式, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集 (1996) 92–96.

トーラス上のホモロジー的ミラー対称性に関するいくつかの注意点

千葉大学大学院理学研究科　基盤理学専攻　数学・情報数理学コース
小林和志 *　(Kazushi Kobayashi)

1　導入

1.1　背景

本稿では, 一貫してトーラス上におけるミラー対称性, 特にホモロジー的ミラー対称性と呼ばれるものに関連した話題をとりあつかう. そのため, ここではまずそれらについての簡単な説明を行うことにする.

はじめに, ミラー対称性とはそもそも何なのかということに関して言及しておく. M をカラビ・ヤウ多様体とする. カラビ・ヤウ多様体は複素構造 J とシンプレクティック構造 ω を両方備えているので, (何かしらの意味で定義された)M の複素構造のみに依存して定まる量を $J(M)$, M のシンプレクティック構造のみに依存して定まる量を $\omega(M)$ と書くことにする. このとき, ミラー対称性とは, 任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し,

$$J(M) \cong \omega(\check{M}) \tag{1}$$

といった関係式が成り立つという現象のことである. 特に, このような関係にあるカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ はしばしばミラー対と呼ばれる. ミラー対の例として最も基本的であると考えられているのは楕円曲線の組であるが, これを高次元化したものである複素トーラスとシンプレクティックトーラスの組もミラー対の例を与える.

実際には, 一口にミラー対称性 (予想) と言っても, 上記の (1) における $J(M)$ や $\omega(\check{M})$ のとり方に応じていくつかの定式化の仕方が考えられる. そのような定式化の中の 1 つであって, (1) における $J(M)$, $\omega(\check{M})$ の部分をそれぞれある適切な導来圏 (三角圏) としたようなものが 1994 年に Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性 (予想) [12] であり, これを正確に述べると以下のようになる.

予想 1.1 (Kontsevich)**.** 任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し, M 上で定義される連接層の成す有界導来圏 $D^b(Coh(M))$ と $\check{M}$ 上で定義される深谷圏 $Fuk(\check{M})$ から得られる三角圏 $Tr(Fuk(\check{M}))$ の間に, 三角圏としての圏同値

$$D^b(Coh(M)) \cong Tr(Fuk(\check{M})) \tag{2}$$

が存在する.

*E-mail : afka9031@chiba-u.jp

この予想 1.1 に関して, いくつか注意事項を記しておく. まず, 深谷圏 $Fuk(\check{M})$ とは, $\check{M}$ 内のラグランジュ部分多様体[1] とその上のユニタリ局所系の組の成す A_∞ 圏のことである [4]. 今回は A_∞ 圏の定義等の詳細は省略するが, ここで注意すべき点は, $Fuk(\check{M})$ はあくまでも A_∞ 圏であって三角圏の構造を持つわけではないので直接左辺の $D^b(Coh(M))$ と比較することができないということである. そこで必要となるのが Bondal, Kapranov, Kontsevich によって考案された A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ から三角圏 $Tr(\mathscr{C})$ を作り出す構成法 [3], [12] であり, これによって A_∞ 圏 $Fuk(\check{M})$ を用いて三角圏 $Tr(Fuk(\check{M}))$ を構成することができ, この $Tr(Fuk(\check{M}))$ と $D^b(Coh(M))$ を三角圏として比較してみると実は本質的に同じものになっているのではないだろうか?ということを問うているのがホモロジー的ミラー対称性 (予想) というわけである. 歴史的には, この予想 1.1 はまず始めに楕円曲線上における場合が研究され ([17], [16], [1] など), その後, それの一般化としてアーベル多様体上における場合に関する研究も成されていった ([5] など).

ここで, この予想 1.1 を攻略するためのあるアイディアを一つ紹介しておく. このアイディアとは, “(2) における左辺を右辺の形に合わせて書き換える”, すなわち, ある A_∞ 圏 $\mathscr{C}_M$ であって

$$Tr(\mathscr{C}_M) \cong D^b(Coh(M))$$

となるようなものを見つけるというものである. 実際には, この A_∞ 圏として DG 圏 DG_M(DG 圏とは, 高次の積が 0 となるような A_∞ 圏のことである) がとれることが期待されているので, とりあえずはそのような DG_M がとれたと仮定してみよう. するとこのとき, (Tr をとる前の)A_∞ 圏としての圏同値 $DG_M \cong Fuk(\check{M})$ が存在することが示せると, (Tr をとることによる) 三角圏としての圏同値 $Tr(DG_M) \cong Tr(Fuk(\check{M}))$ が存在する, すなわち予想 1.1 が成り立つという事実が自動的に従うことになる. このことに関して, 楕円曲線上においては DG_M に相当するものが実際に見つかっており [13], [1], より高次元の複素トーラス上においては DG_M に相当すると期待されている DG 圏の例が具体的に構成されている ([7], [8] などを参照せよ).

1.2 問題意識

一般的に, トーラス上におけるホモロジー的ミラー対称性について考える場合, 実 2 次元 (すなわち, 楕円曲線) の場合に比べて実 4 次元以上の高次元の場合は状況が複雑であり, 実 2 次元の場合に行っていた議論を直接実 4 次元以上の場合における議論に拡張することができない場合がある. 本稿でとりあつかう問題も, そのようなものの例である. まず, 1 次元複素トーラス $T^2_{J=T} := \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})$ ($T \in \mathbb{H}$) を一つとる. これに対応するミラーパートナー $\check{T}^2_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式は $-\frac{1}{T}$ または T を用いて定義される. 基本的にはこのようにしてミラー対 $(T^2_{J=T}, \check{T}^2_{J=T})$ を得ることができるのであるが, ここで, このやり方の高次元版, すなわち, $T^{2n}_{J=T} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ ($n \geq 2$, T は虚部が正定値となるような n 次複素行列) のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の定義の仕方について考えてみよう. このとき, 一見すると $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式は ($n = 1$ の場合の安直な一般化として)$-(T^{-1})^t$ または T を用いて定義すればよいのではないか?という気がしてしまう. しかしながら, $n = 1$ の場合と違って $n \geq 2$ の場合にはそもそも T の逆元, すなわち逆行列 T^{-1} が存在しないことがあるので, その際には当然 $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式を $-(T^{-1})^t$ を用いて定義することはできない. さらに, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式を T を用いて定義したとしても, 結局, 得られたミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に (T^{-1} の存在性に関連した) 不都合が生じてしまうこと

[1] シンプレクティック多様体 (M, ω) 内のラグランジュ部分多様体 L とは, $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$ となるような部分多様体であって, $\omega|_L = 0$ を満たすようなもののことである.

が確認されている. 以上のことを考慮し, 本稿では, まず T^{-1} が存在しない場合におけるミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の定義の仕方について提案し, その後, 得られたミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に現れる圏の対象の対応のさせ方について説明する.

1.3 いくつかの記法

後で用いるいくつかの記法についてここで説明しておく. まず, 上でも既に用いた記法であるが, 虚部が正定値となるような n 次複素行列 $T \in M(n;\mathbb{C})$ を用いて定義される n 次元複素トーラス $\mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ は今後も $T^{2n}_{J=T}$ と書くことにする :

$$T^{2n}_{J=T} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n).$$

また, $2n$ 次元実トーラス T^{2n} のある局所座標 $(p := (p^1, \cdots, p^n)^t, q := (q^1, \cdots, q^n)^t)$ に対して $dp := (dp^1, \cdots, dp^n)^t$, $dq := (dq^1, \cdots, dq^n)^t$ としたとき, 複素化されたシンプレクティックトーラス $(T^{2n}, \tilde{\omega} = dp^t \tau dq)$ $(\tau \in M(n;\mathbb{C}))$ をしばしば $T^{2n}_{\tilde{\omega}=\tau}$ と略記する :

$$T^{2n}_{\tilde{\omega}=\tau} := (T^{2n}, \tilde{\omega} = dp^t \tau dq).$$

2 準備

本章では, まず現時点で既に議論が可能であるものの例として, $\det T' \neq 0$ となるような T' を用いて定義される $T^{2n}_{J=T'}$ とそのミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T'} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}$ から構成されるミラー対を一つとり, その上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に現れる圏の対象の対応関係について説明する.

先に, 複素幾何学側の話から始める. $T^{2n}_{J=T'}$ の局所座標を $Z = X + T'Y$ と書く. ここで,

$$Z := (Z_1, \cdots, Z_n)^t,\ X := (X_1, \cdots, X_n)^t,\ Y := (Y_1, \cdots, Y_n)^t$$

である. 以下, $r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{Z})$, $p := (p_1, \cdots, p_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $q := (q_1, \cdots, q_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mu := p + T'^t q \in \mathbb{C}^n$, $\zeta := e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{r}}$ $(\mathbf{i} = \sqrt{-1})$ とする. 複素幾何学側において考えるべき対象は, 以下のようにして構成される階数 r の正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ である. まずは変換関数を定義したいわけであるが, これを厳密に書こうとすると表記が煩雑になるので, ここでは次のようなやや大雑把な説明をするにとどめる (厳密な定義については, [8] の section 2 を参照せよ). $s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$ を $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の滑らかな切断とする. このとき, $X_j \mapsto X_j + 2\pi$, $Y_k \mapsto Y_k + 2\pi$ $(j, k = 1, \cdots, n)$ とした場合の変換関数を

$$\begin{aligned} &s(X_1, \cdots, X_j + 2\pi, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) = e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j Y} V_j s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n), \\ &s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_k + 2\pi, \cdots, Y_n) = U_k s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) \end{aligned}$$

で定める. ただし, $a_j := (a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, $V_j, U_k \in U(r)$ である. 特に, これらの行列 V_j, U_k としては, コサイクル条件

$$V_j V_k = V_k V_j,\ U_j U_k = U_k U_j,\ \zeta^{-a_{kj}} U_k V_j = V_j U_k\ (j, k = 1, \cdots, n)$$

を満たすもののみを考え, そのような V_j, U_k 全体の成す集合を $\mathcal{U}$ と書く. さらに, 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し, $\xi_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ を

$$e^{\mathbf{i}\xi_j} = \det V_j,\ e^{\mathbf{i}\theta_j} = \det U_j$$

で定め,

$$\xi := (\xi_1, \cdots, \xi_n)^t,\ \theta := (\theta_1, \cdots, \theta_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

とおく. これらの $\xi, \theta \in \mathbb{R}^n$ は, 後でシンプレクティック幾何学側において $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ とミラー双対な関係にある対象を定義する際に用いることになる [2]. このようにして定義された複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の上で, 局所的に以下のような形で書かれる接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を考える [3].

$$\begin{aligned}\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} &:= d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(\frac{1}{r}X^tA^t + \frac{1}{r}\mu^t\right)dY \cdot I_r \\ &= d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{r}X^tA^t + \frac{1}{r}p^t\right) + \frac{1}{r}q^tT'\right\}dY \cdot I_r. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで, $dY := (dY_1, \cdots, dY_n)^t$ であり, d は外微分作用素, I_r は r 次単位行列を表す. 後は複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則ベクトル束になるための条件を考えればよいわけであるが, このことに関して次の命題が成り立つ ([8], Proposition 2.2).

命題 2.1. 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ が正則ベクトル束になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

これらの正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は自然に DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ を成す ([8] の section 2 などを参照せよ). 特に, $n = 1$ の場合には実際にこの DG 圏 $DG_{T^2_{J=T'}}$ が $D^b(Coh(T^2_{J=T'}))$ を生成する, すなわち, $Tr(DG_{T^2_{J=T'}}) \cong D^b(Coh(T^{2n}_{J=T'}))$ が成り立つことが確認されており [13], [1], より一般の n に対してもそのようになることが期待されている.

次に, シンプレクティック幾何学側の説明を行う. $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ の局所座標を ($\check{X} := (X^1, \cdots, X^n)^t, \check{Y} := (Y^1, \cdots, Y^n)^t$) と書き, $d\check{X} := (dX^1, \cdots, dX^n)^t$, $d\check{Y} := (dY^1, \cdots, dY^n)^t$ とする. 特に, $\tilde{\omega} = d\check{X}^t(-(T'^{-1})^t)d\check{Y}$ を $\tilde{\omega} = d\check{X}^tBd\check{Y} + \mathbf{i}d\check{X}^t\omega d\check{Y}$ と分解したとき, $d\check{X}^t\omega d\check{Y}$ がシンプレクティック形式を表し, $d\check{X}^tBd\check{Y}$ は B 場と呼ばれ, しばしば 2 形式 $d\check{X}^t\omega d\check{Y}$, $d\check{X}^tBd\check{Y}$ をそれぞれ n 次正方行列 $\omega = \mathrm{Im}(-(T'^{-1})^t)$, $B = \mathrm{Re}(-(T'^{-1})^t)$ と同一視する. また, $\Theta, \Xi \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$p(\theta, \Theta) := p - \theta + \Theta,\ q(\xi, \Xi) := q + \xi + \Xi$$

と定める (実際には, Θ, $\Xi \in \mathbb{R}^n$ は補助的なベクトルであり, これらの $p(\theta, \Theta)$, $q(\xi, \Xi)$ の定義において本質的なのはそれぞれ $p - \theta$, $q + \xi$ の部分である). 以下, 与えられた正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ とミラー双対になるような深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象の構成法について述べる. なお, この構成法は基本的には SYZ 構成 [18] に基づくものであるが ([14], [2] なども参照せよ), 以下の説明における, ラグランジュ部分多様体の位置, 及びユニタリ局所系の平坦接続がそれぞれ $\theta, \xi \in \mathbb{R}^n$ に依存して定まるという点に関しては, 筆者の研究によって明らかになった部分であるということをここで断っておく [10]. まず, $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ 内の n 次元部分多様体 $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ を次で定める.

$$L_{(r,A,p(\theta,\Theta))} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{X} \\ \check{Y} \end{pmatrix} \in \check{T}^{2n}_{J=T'} \mid \check{Y} = \frac{1}{r}A\check{X} + \frac{1}{r}p(\theta, \Theta) \right\}. \tag{4}$$

[2] 一般的に, $\xi_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ のとり方に関しては $2\pi\mathbb{Z}$ の不定性がある. しかしながら, それらに対応して定まる対象同士が互いに同型になることが確認できるので, そのような不定性は実際には無視しても問題ない.

[3] $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナーを $T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'}$ で定義する場合には, (3) の中の T' と書かれている部分に T'^{-1} が現れてしまう. したがって, T' が逆行列を持たない場合には, $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナー自体は $T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'}$ を用いて定義することはできるものの, そのミラー対 $(T^{2n}_{J=T'}, T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論しようとすると結局 T' の逆行列の存在性の問題が現れてしまうということである.

このとき, この $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ が $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ 内のラグランジュ部分多様体になるための必要十分条件は ωA が対称行列になることである. さらに, 以下のような平坦接続 $\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}}$ を持つ自明な複素直線束 $\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} \to L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ を考える.

$$\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}} := d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\frac{1}{r}q(\xi,\Xi)^t d\check{X}. \tag{5}$$

特に, 深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になるための条件として, この $\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}}$ の曲率形式 (すなわち, 0) が B 場 $d\check{X}^t B d\check{Y}$ の $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ への制限と一致するというものがあるので, 結局 BA も対称行列にならなければいけないということが分かる. ここで, ωA, BA がそれぞれ対称行列になるという条件は AT' が対称行列になるという条件と同値であることに注意せよ. したがって, 上記の内容をまとめることによって次の命題を得る.

命題 2.2. ラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ とその上のユニタリ局所系 $\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} \to L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ の組が深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

以降, 簡単のため,

$$\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} := (L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}, \mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))})$$

と略記する. この命題 2.2 と先に紹介した命題 2.1 を比較することにより, AT' が対称行列になるという条件を介して DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ の対象 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象 $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ が対応しているということが見てとれるだろう. 特に, $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の定義式 (3) の接続形式の部分と $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ を定義する際に用いられる 2 つの式 (4), (5) を比較してみると, “$E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ と $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ が互いにミラー双対な関係にある” という言葉の雰囲気がより強く感じられることと思う.

3 主結果

本章では, 虚部が正定値であるような $T \in M(n;\mathbb{C})$ であって $\det T = 0$ となるようなものを一つ固定して考える. そのような $T \in M(n;\mathbb{C})$ を用いて定義される n 次元複素トーラス $T^{2n}_{J=T}$ のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の定義を与え, ミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性について考えることが本章の目的である.

まず, 以下の補題が成り立つことに注意する [9].

補題 3.1. 行列 $T \in M(n;\mathbb{C})$ に対し, ある行列 $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ であって $\det(T-\delta) \neq 0$ となるようなものが存在する.

上記の補題 3.1 における δ のとり方は一意的ではないことに注意せよ. この δ のとり方の非一意性に関しては後でもう一度述べる.

以下, $T^{2n}_{J=T}$ の局所座標を $z = x + Ty$ と書くことにする. ただし,

$$z := (z_1, \cdots, z_n)^t,\ x := (x_1, \cdots, x_n)^t,\ y := (y_1, \cdots, y_n)^t$$

である. 今, 補題 3.1 より $\det(T-\delta) \neq 0$ となるような $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ をとることができるので, これを一つとり, 固定する. このような状況下において, 本稿では, n **次元複素トーラス**

$$T^{2n}_{J=T}$$

のミラーパートナーとして, 実 $2n$ 次元の複素化されたシンプレクティックトーラス

$$\check{T}^{2n}_{J=T} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=T-\delta}$$

をとることを考える. ただし, この対応関係の与え方の詳細を述べるためには “ 一般化された複素構造 ” という概念についてまず説明する必要があり, 本稿では紙数の関係上それについて述べることはできない [4]. このあたりのことについては [9] において詳しく記載する予定である. 以降, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の局所座標を $(\check{x} := (x^1, \cdots, x^n)^t, \check{y} := (y^1, \cdots, y^n)^t)$ と書く.

次に考えるのは, このミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ 上におけるホモロジー的ミラー対称性についてであるが, そのために次のような T' を用いて定義される n 次元複素トーラス

$$T^{2n}_{J=T'}$$

をまず用意する :

$$T' := (-T + \delta)^{-1}.$$

明らかに $\mathrm{det}T' \neq 0$ であるから, この $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ として $T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}$ をとることができる :

$$\check{T}^{2n}_{J=T'} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}.$$

このミラー対 $(T^{2n}_{J=T'}, \check{T}^{2n}_{J=T'})$ の上で, 第 2 章において説明した (SYZ 構成に基づくやり方で)DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ の対象である正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象である $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ を, AT' が対称行列になるという条件を介して対応させることができる. ここで, 二つの n 次元複素トーラス $T^{2n}_{J=T}$ と $T^{2n}_{J=T'}$ の関係について簡単に説明しておく. 実は, $T^{2n}_{J=T}$ と $T^{2n}_{J=T'}$ は互いに双正則同値になっていることが確認できる. したがって, 双正則写像

$$\varphi : T^{2n}_{J=T} \xrightarrow{\sim} T^{2n}_{J=T'}$$

を考えることができ, この φ による複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ の引き戻しとして複素ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ を定義することができる. 特に, $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の (滑らかな切断 $s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ に対する) 変換関数, 及び接続はそれぞれ局所的に以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
&s(x_1, \cdots, x_j + 2\pi, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = V'_j s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n),\\
&s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k + 2\pi, \cdots, y_n) = e^{-\frac{\mathbf{i}}{r} a_k (x + \delta y)} U'_k s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n),\\
&\varphi^* \nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} y^t A^t + \frac{1}{r} \mu^t \right) (dx + \delta dy) \cdot I_r.
\end{aligned}$$

ここで, V'_j, $U'_k \in U(r)$, $dx := (dx_1, \cdots, dx_n)^t$, $dy := (dy_1, \cdots, dy_n)^t$ である. また, V'_j, U'_k としてはコサイクル条件を満たすもののみを考え, さらに, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の場合と同様にして, 各 $j = 1, \cdots, n$ に対して ξ'_j, $\theta'_j \in \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$e^{\mathbf{i}\xi'_j} = \mathrm{det}V'_j,\ e^{\mathbf{i}\theta_j} = \mathrm{det}U'_j$$

で定め,

$$\xi' := (\xi'_1, \cdots, \xi'_n)^t,\ \theta' := (\theta'_1, \cdots, \theta'_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

[4] 実際には, $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナーを $\tilde{\omega} = -(T'^{-1})^t$ $(\mathrm{det}T' \neq 0)$, あるいは $\tilde{\omega} = T'$ を用いて与えることができるという話も, 一般化された複素構造を用いた枠組みの中で定式化することができる.

とおく. この複素ベクトル束 $\varphi^*E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則になるための条件については, 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ が正則になるための必要十分条件を与えた命題 2.1, 及び φ の双正則性を考慮することにより, 次のように述べることができる.

命題 3.2. 複素ベクトル束 $\varphi^*E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ が正則ベクトル束になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

さらに, これらの正則ベクトル束 $\varphi^*E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ もまた自然に DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ を成す (これの定義の仕方についても, [8] の section 2 に記載されているものと全く同様である). ここで, $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ のとり方の非一意性に関して簡単に説明しておく. δ_1, $\delta_2 \in M(n;\mathbb{Z})$ であって $\det(T-\delta_1) \neq 0$, $\det(T-\delta_2) \neq 0$ を満たすようなものをとったと仮定し,

$$T'_1 := (-T+\delta_1)^{-1},\ T'_2 := (-T+\delta_2)^{-1}$$

とおく. 特に, 各 δ_i $(i=1,2)$ に応じて双正則写像

$$\varphi_i : T^{2n}_{J=T} \xrightarrow{\sim} T^{2n}_{J=T'_i}$$

をとることができる. このとき, DG 圏

$$DG_{T^{2n}_{J=T'_1}},\ DG_{T^{2n}_{J=T'_2}},\ \mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}},\ \mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}}$$

をそれぞれ考えることができるが, 一般的に $\mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}}$ と $\mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}}$ の間には DG 圏としての圏同値が存在するとは限らない. しかしながら, それらから得られる三角圏に関しては, 次の命題が成り立つ [9].

命題 3.3. 各 $i=1,2$ に対し, $DG_{T^{2n}_{J=T'_i}}$ が $D^b(Coh(T^{2n}_{J=T'_i}))$ を生成する, すなわち, $Tr(DG_{T^{2n}_{J=T'_i}}) \cong D^b(Coh(T^{2n}_{J=T'_i}))$ が成り立つならば, 三角圏としての圏同値

$$Tr(\mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}}) \cong Tr(\mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}})$$

が存在する.

以下, DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ の対象として与えられた正則ベクトル束 $\varphi^*E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ とミラー双対になるような深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T})$ の対象の構成法について述べる. Θ', $\Xi' \in \mathbb{R}^n$ とする. まず, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 内の n 次元部分多様体 $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ を

$$\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ \check{y} \end{pmatrix} \in \check{T}^{2n}_{J=T} \mid \check{x} = -\frac{1}{r}A\check{y} + \frac{1}{r}p(\xi',\Xi') \right\}$$

で定める. さらに, 自明な複素直線束 $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} \to \tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ であって, 平坦接続

$$d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\frac{1}{r}q(\delta^t p - \theta', \Theta')^t d\check{y}$$

をもつようなものを考える. ただし, $d\check{y} := (dy^1, \cdots, dy^n)^t$ である. このとき, $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ が $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 内のラグランジュ部分多様体になるための必要十分条件は $(\mathrm{Im}T)^t A$ が対称行列になることであり, また, $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))}$ の平坦性から $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 上における B 場の $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ への制限が消えるという条件を得ることができ, これは $A^t\mathrm{Re}(T-\delta)$ が対称行列になることと同値である. 特に, $(\mathrm{Im}T)^t A$, $A^t\mathrm{Re}(T-\delta)$ がそれぞれ対称行列になるという条件は AT' が対称行列になるという条件と同値であることに注意せよ. したがって, 次の命題を得る.

命題 3.4. ラグランジュ部分多様体 $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ とその上のユニタリ局所系 $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} \to \tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ の組が深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

以降, 簡単のため,

$$\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} := (\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}, \tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))})$$

と略記する. 第 2 章において説明した場合と同様にして, この命題 3.4 と先に紹介した命題 3.2 を比較することにより, AT' が対称行列になるという条件を介して DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ の対象 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T})$ の対象 $\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))}$ が対応しているということが見てとれるだろう.

ここまでの議論をまとめると, 結果的に以下の図式のようになる. ただし, 右辺における対応関係は第 2 章において説明した SYZ 構成に基づくものであり, 左辺における対応関係は本章において説明した筆者が新たに提案したものである.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \longrightarrow & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
T^{2n}_{J=T} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & T^{2n}_{J=T'} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T'\mathbb{Z}^n) \\
{\scriptstyle \text{mirror dual}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \text{mirror dual}} \\
\check{T}^{2n}_{J=T} = (T^{2n}, \tilde{\omega} = d\check{x}^t(T-\delta)d\check{y}) & & \check{T}^{2n}_{J=T'} = (T^{2n}, \tilde{\omega} = d\check{X}^t(-(T'^{-1})^t)d\check{Y}),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{AT'=(AT')^t} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
{\scriptstyle \text{mirror dual}}\big\downarrow {\scriptstyle AT'=(AT')^t} & & {\scriptstyle AT'=(AT')^t}\big\downarrow{\scriptstyle \text{mirror dual}} \\
\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} & & \mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}.
\end{array}$$

最後に, 正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の射影的平坦性について述べる. 一般的に, $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は射影的平坦束 [5] の例になっており, また, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関しては, その保型因子についての分類結果が既に存在する [6], [15], [11]. ここでは, この分類結果を用いて, 正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 全体をある種の射影的平坦束から成るクラスとして特徴付ける. まず, $T^{2n}_{J=T}$ の格子を $L := 2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})$ と書くことにする. この L が

$$\gamma_1 := (2\pi, 0, \cdots, 0)^t, \cdots, \gamma_n := (0, \cdots, 0, 2\pi)^t,$$
$$\gamma'_1 := (2\pi t_{11}, \cdots, 2\pi t_{n1})^t, \cdots, \gamma'_n := (2\pi t_{1n}, \cdots, 2\pi t_{nn})^t$$

によって生成されることは明らかである. ここで, t_{ij} は T の (i,j) 成分を表す. 以下, 局所的に

$$j(\gamma_j, z) = U'(\gamma_j)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma_j) + \frac{1}{2r}R(\gamma_j,\gamma_j)\right\},$$
$$j(\gamma'_k, z) = U'(\gamma'_k)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma'_k) + \frac{1}{2r}R(\gamma'_k,\gamma'_k)\right\},$$
$$R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ R(z,w) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} z^t\{(T-\bar{T})^{-1}\}^t A^t \bar{w},$$
$$U' : L \to U(r),\ U'(\gamma+\gamma') = U'(\gamma)U'(\gamma')\exp\left\{\frac{\mathbf{i}}{r}\mathrm{Im}R(\gamma',\gamma)\right\}.$$

[5] 射影的平坦束の定義等については, 例えば [11] などを参照せよ.

と書かれるような保型因子 $j : L \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ によって定義される射影的平坦束 $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ を考える $(j,k=1,\cdots,n)$. ただし, μ はこの保型因子と両立するような (エルミート) 接続の局所表示において用いられるものであり, また, $\mathcal{U}'$ は $U'(\gamma_j)$, $U'(\gamma_k')$ 全体の成す集合を表す. 特に, 上記の $U' : L \to U(r)$ が満たすべき条件式は $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を定義する際に考えることになるコサイクル条件と全く同じ形をしているので, r, A, μ を固定すると, $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ 全体の成す集合の濃度と $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 全体の成す集合の濃度が等しくなっていると考えられる. このような状況下において, 実際に以下の定理が成り立つ [9].

定理 3.5. $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ であり, その同型射 $\Psi : \varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ の局所表示は以下で与えられる. ただし, $\mathcal{A} := \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t A^t (\delta - T)(T-\bar{T})^{-1}$ であるとする.

$$\Psi(z,\bar{z}) = \exp\Big\{ \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} z^t \bar{\mathcal{A}} z + \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} \bar{z}^t \mathcal{A} \bar{z} - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \mathcal{A} \bar{z} \\ + \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} \bar{z}^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t (\delta - T)^t \mu - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t (\delta - \bar{T})^t \bar{\mu} \Big\} \cdot I_r.$$

一方, 第 2 章において定義した SYZ 構成に基づいて定まる正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ も射影的平坦束の例であり, それの全体もまた上記の定理 3.5 と同様な形である種の射影的平坦束から成るクラスとして特徴付けられている ([8], Theorem 3.6). これら二つの結果を比較することにより, 結局, 射影的平坦束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の成すクラスと SYZ 構成に基づいて定義される射影的平坦束の成すクラスは一般的に異なっているということが確認できる. したがって, 本稿において紹介した結果は, SYZ 構成に基づいて定義される正則ベクトル束のクラスとは異なる正則ベクトル束のクラスを用いたとしてもホモロジー的ミラー対称性を議論することが可能であるということを示唆している.

参考文献

[1] M. Abouzaid, I. Smith, Homological mirror symmetry for the four-torus, Duke Mathematical Journal, 152.3 (2010), 373-440.

[2] D. Arinkin, A. Polishchuk, Fukaya category and Fourier transform, AMS IP STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS, 2001, 23 : 261-274.

[3] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik 70:93-107, 1991.

[4] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies, In: Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993). Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).

[5] K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions, J. Algebr. Geom. 11, 393-512 (2002).

[6] J. Hano, A geometrical characterization of a class of holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. Vol. 61 (1976), 197-202.

[7] H. Kajiura, On some deformations of fukaya categories. Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry, 93-130, MSRI Publ. 62, Cambridge Univ. Press, New York, 2014.

[8] K. Kobayashi, Geometric structure of exact triangles consisting of projectively flat bundles on higher dimensional complex tori, arXiv : mathDG/1705.04007.

[9] K. Kobayashi, Remarks on the homological mirror symmetry for tori, In preparation.

[10] K. Kobayashi, The explicit construction of mirror maps for tori, In preparation.

[11] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Princeton University Press, 1987.

[12] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, 1995, pages 120-139, arXiv : math.AG/9411018.

[13] M. Kontsevich, Y. Soibelman, Homological mirror symmetry and torus fibrations. In Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203-263. World Sci.Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.

[14] N. C. Leung, S.-T. Yau, E. Zaslow, From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform, Adv. Theor. Math. Phys. 4:13191341, 2000.

[15] Y. Matsushima, Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. Vol. 61 (1976), 161-195.

[16] A. Polishchuk, A_∞-structures on an elliptic curve, Comm. Math. Phys. 247, 527 (2004), arXiv : math.AG/0001048.

[17] A. Polishchuk, E. Zaslow, Categorical mirror symmetry : the elliptic curve, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443-470 (1998), arXiv : math.AG/9801119.

[18] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror Symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, 479:243-259, 1996.

トロピカル幾何学と Riemann-Roch の定理

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻攻
鷲見拳 (Ken SUMI)

1 導入

トロピカル幾何は、雑に言えばトロピカル半体 $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}, \max, +)$ 上の代数幾何である。トロピカル半体は集合 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ に加法として max、乗法として $+$ を入れたものであり、加法について半群でしかない。

トロピカル幾何は代数幾何とはかなり異なった構造をしているが、以下のような類似の結果が成り立つ。

- Curve counting (曲面上の正則曲線の数の対応) [5]
- コンパクトトロピカル曲線上の Riemann-Roch の定理 [1] [6] [3]
- トロピカル曲面に対する添加公式 [4]
- トロピカル曲面に対する Noether の公式 [2] [4]

今回はこの二つ目、Riemann-Roch の定理とその高次元化について説明する。コンパクトトロピカル曲面に対する Reimann-Roch の定理は次のものである。

定理 1. C をコンパクトトロピカル曲線、すなわち有限距離付きグラフとし、g を C の種数とする。C 上の因子 $D=\sum a_i p_i$、$a_i\in\mathbb{Z}, p_i\in C$ に対し、$h^0(C,D)$ を次の条件を満たす最小の整数 k とする。

ある次数 k の有効因子 E が存在して、$|D-E|=\emptyset$

このとき次が成り立つ。

$$h^0(C,D)-h^0(C,K-D)=\deg D+1-g$$

ここで $K=\sum(\mathrm{val}(p)-2)p$ は C 上の標準因子である。$\mathrm{val}(p)$ は p から出る辺の本数であり、したがって p が本質的な頂点でないときは 2 である。

注意 2. D が定める線束 $L(D)$ の正則切断の集合 $H^0(C,L(D))$ はベクトル空間にはならないが自然に多面体複体となる。したがって位相的にその次元を考えることが可能ではあるが、一般にはその次元は上で現れた h^0 とは異なることもある。ここが古典的な場合との大きな違いの一つである。

Riemann-Roch の公式の高次元化がトロピカル幾何においても存在し成り立つのかというのは自然な疑問である。今回はその高次元化をトロピカルアーベル多様体に対して調べた結果を紹介する。

2　基本的な概念

3　トロピカル多様体、正則関数

定義 3. $\mathbb{T}^n$ 上のトロピカル多項式とは、通常の多項式の演算をトロピカルなものに変えた関数である。すなわち $\mathbb{T}^n$ 上の関数であって、ある有限集合 $S \subset (\mathbb{Z}^n)^*$ とその各元 $n \in S$ に対しある実数 a_n が存在して $\max_{n\in S}\{a_n + n \cdot x\}$ と書かれるものである。特に $S \subset (\mathbb{Z}^n_{\geq 0})^*$ のときトロピカル多項式という。トロピカル多項式はその形から整の傾きをもつ区分線形凸関数であることが分かる。

トロピカル多項式同士の和や積も同様に通常の max, + と定義することで、n 変数トロピカル多項式全体の集合 $\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ は半環となる。したがって代数幾何の場合に仕えていた様々な議論が使えない点に注意されたい。（例えばイデアルによる商が well-defined でないことなど。）

代数幾何では代数多様体は局所的に多項式の零点の集合として表せるものであった。トロピカル幾何では、トロピカル多様体は局所的にトロピカル多項式の特異点集合として表せるものと定める。これは一般には多面体複体となる。

例 4. 以下はトロピカル多項式 $f_1 = \max\{x, y, 0\}$、$f_2 = \max\{2x, y, x + y, 0\}$ が定める $\mathbb{R}^2$ 内のトロピカル曲線 $V(f_1)$、$V(f_2)$ である。

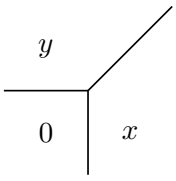


図 1　$V(f_1)$

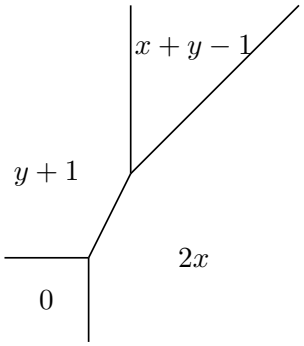


図 2　$V(f_2)$

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ もトロピカル多様体であり、階数 n の部分格子 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ による商 $\mathbb{R}^n/\Lambda$ もまたトロピカル多様体である。これはトロピカルトーラスと呼ばれる。

トロピカル多様体上の正則関数、有理関数などの概念が、局所的にトロピカル多項式、それらのトロピカル商でかけている関数として定まる。そのとき、可逆な正則関数というのは、古典的には零点を持たない正則関数であるが、トロピカルの場合には特異点を持たない正則関数、すなわち整の傾きを持つアフィン線形関数となる。

3.1 トロピカル線束

トロピカル線束は、$\mathbb{T}$ 束であって変換関数が整の傾きを持つアフィン線形函数を足すもの、つまりトロピカルにはかけるものとして複素幾何と同様に定まる。複素幾何と同様に同値な線束などの概念も定まり、トロピカル多様体 X 上の線束の同値類全体は $H^1(X, \mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}})$ と同一視される。ここで $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}$ とは整の傾きを持つアフィン線形関数の層である。

定義 5. X がトロピカルトーラス $\mathbb{R}^n/\Lambda$ のとき、群完全列

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}} \to \underline{(\mathbb{Z}^n)^*} \to 0$$

よりコホモロジーの写像 $c_1 \colon H^1(X, \mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}) \to H^1(X, \underline{(\mathbb{Z}^n)^*})$ が得られる。これによるトロピカル線束 L の像を Q_L とおく。自然な同型 $H^1(X, \underline{(\mathbb{Z}^n)^*}) \cong (\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^*$ によって Q_L を $\mathbb{R}^n$ 上の双一次形式としてみることができる。上の完全列から得られるコホモロジーの完全列を調べることで、Q_L は $\mathbb{R}^n$ 上の対称形式であることが分かる。この Q_L は L の第一 Chern 類と呼ばれる。

Q_L が正定値対称形式のとき、線束 L は豊富であるという。

トロピカルアーベル多様体とは、豊富な線束をもつトロピカルトーラスのことである。

3.2 因子

n 次元トロピカル多様体上のトロピカル線束の有利切断が与えられたとき、その特異点集合は $n-1$ 次元の多面体複体を与える。その $n-1$ 次元の多面体に対し、有理切断のその近傍での傾きの差として重みが与えられる。有理切断によって与えられるこの重み付きの多面体複体は因子と呼ばれる。逆に因子から線束を復元することも可能である。詳細は省くが、トロピカル幾何においても交点理論が存在し、因子の自己交点数 D^n が定義できる。

4 主結果

定理 6. $X = \mathbb{R}^n/\Lambda$ を n 次元トロピカルアーベル多様体、D を X 上の因子とする。$h^0(X, D)$ を、次を満たす最小の整数とする。

X のある k 点 $p_1, \ldots, p_k$ が存在して、D に線形同値な有効因子 E ですべての p_i を通るものが存在しない

このとき、次が成り立つ。

1. $H^0(X, L(D))$ はある $h^0(X, D)$ 次元凸多面体と自然に同一視される。
2. $\frac{D^n}{n!}$ は整数となる。
3. 特に $n = 2$ のとき、次の Riemann-Roch 不等式が成り立つ。

$$h^0(X, D) + h^0(X, -D) \geq \frac{1}{2} D^2$$

二つ目、三つ目の主張は交点数が連続変形で不変なことと具体計算によって、$\frac{D^n}{n!} = \det Q_{L(D)}$ が

得られることからわかる。ここで $Q_{L(D)} \in (\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^*$ に対しその行列式は $(\Lambda)^*$、$(\mathbb{Z}^n)^*$ の同じ向きの基底に関するものとする。よってこれは整数である。

一つ目の主張の証明にはトロピカルテータ関数を用いる。証明については述べないが、トロピカルテータ関数について簡単に説明しよう。

5　トロピカルテータ関数

簡単のため、$X = \mathbb{R}^n/\Lambda$ をトロピカルアーベル多様体、D を X 上の豊富な因子とする。D から得られる線束 $L(D)$ を普遍被覆 $\mathbb{R}^n \to X$ によって引き戻すことで、$L(D)$ の $-\infty$ でない大域正則切断全体 $H^0(X, L(D)) \setminus -\infty$ は次の集合と同一視される。

$$\left\{ \Theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Theta(x+\lambda) = \Theta(x) + Q_{L(D)}(\lambda, x) + \dfrac{1}{2} Q_{L(D)}(\lambda, \lambda) + Q_{L(D)}(c, x),\ \lambda \in \Lambda,\ x \in \mathbb{R}^n \\ \Theta(x) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の正則関数} \end{array} \right\}$$

上のような正則関数をトロピカルテータ関数と呼ぶ。

$Q_{L(D)}$ は正定値な $(\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^* \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, (\mathbb{Z}^n)^*)$ の元であるから、$(\mathbb{Z}^n)^*/Q_{L(D)}(\Lambda)$ は有限集合となる。$B \subset (\mathbb{Z}^n)^*$ をその代表元集合とする。このとき、任意のトロピカルテータ関数は

$$\max_{b \in B} \{\Theta_b(x) + s_b\},\ s_b \in \mathbb{T}$$

と表すことができる。ここで Θ_b は、その傾きの集合が $b + \Lambda$ と一致するトロピカルテータ関数である。Θ_b はトロピカルの定数倍を除いて、すなわち定数差を除いて一意的に定まる。

このとき全射 $\mathbb{T}^{|B|} \twoheadrightarrow H^0(X, L(D))$ が $\{s_b\}_{b \in B} \mapsto \max_{b \in B}\{\Theta_b(X) + s_b\}$ で定まる。この全射の右逆写像を次のように定める。

定義 7. $\varphi\colon H^0(X, L(D)) \to \mathbb{T}^{|B|}$ を、

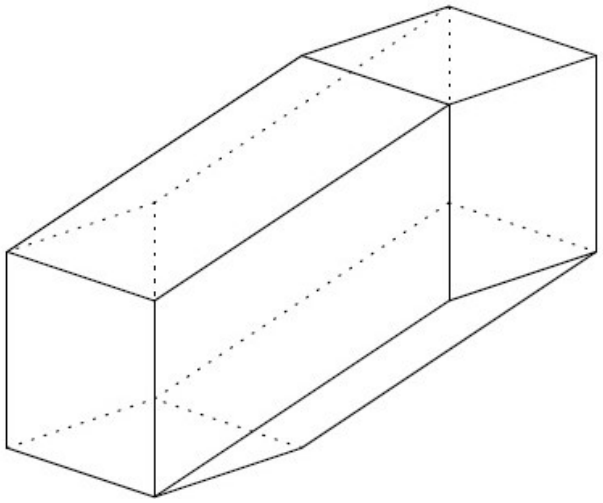
$$\begin{aligned} \varphi^b(\Theta) &= \max\{s_b \mid \Theta(x) \geq \Theta_b(x) + s_b\ \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\Theta(x) - \Theta_b(x)\}. \end{aligned}$$

で定める。これは $\mathbb{T}^{|B|}$ への単射となり、$H^0(X, L(D))$ の形が定まる。

例 8. Q を行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし、Λ を $\mathbb{R}^n$ の格子 $Q^{-1}(((2\mathbb{Z})^2)^*)$ とする。

L を $\mathbb{R}^n/\Lambda$ 上の線束で $Q_{L(D)} = Q$ となるものとする。このとき $H^0(\mathbb{R}^n/\Lambda, L)$ は 4 元で生成される。

$H^0(\mathbb{R}^n/\Lambda, L)$ の $\mathbb{T}^4$ 内でのトロピカル射影化は、下図のような 14 個の頂点を持つ凸多面体となる。



参考文献

[1] Baker, M., Norine, S.: Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph, Advances in Mathematics, 215.2, 766-788 (2007)

[2] Cartwright, D.: Combinatorial tropical surfaces, arXiv preprint, arXiv1506.02023 (2015)

[3] Gathmann, A., Kerber, M.: A Riemann-Roch theorem in tropical geometry, Mathematische Zeitschrift, 259.1, 217-230 (2008)

[4] Kristin, S.: Tropical surfaces, arXiv preprint, arXiv:1506.07407 (2015)

[5] Mikhalkin, G.: Tropical geometry and its applications, arXiv preprint, math/0601041 (2006)

[6] Mikhalkin, G., Zharkov, I.: Tropical curves, their Jacobians and theta functions, Curves and abelian varieties, 465, 203-230, (2008)

ミューテーション列に付随する行列式の恒等式

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
水野勇磨 (Yuma Mizuno)

1　導入

クラスター代数の理論は Fomin と Zelvinsky によって 2000 年頃に導入された [2]. 彼らのもともとの動機は全正値性現象および標準基底について理解することであったのだが, その当初の目的を超えてクラスター代数は, クイバーの表現論, Teichmüller理論, Donaldson–Thomas 理論, ミラー対称性などといった幅広い分野と関連することが明らかになっていった. クラスター代数においてミューテーションと呼ばれる重要な操作があるのだが, これが多くの数学の分野に興味深い形で現れるのである.

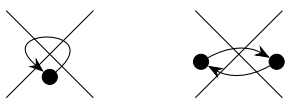
このようにクラスター代数にまつわる話題は数多くあるのだが, そのうちのひとつに, Rogers のダイログ関数という特殊関数との関係がある. 簡単に言うと, クラスター代数におけるある種の関係式から, Rogers のダイログ関数の関数等式が導かれるというものである. このクラスター代数と Rogers のダイログ関数との関係は, 共形場理論における中心電化と呼ばれる値を Rogers のダイログ関数の特殊値を用いて表すという話とも関係していて興味深い.

このレポートでは, 上記の Rogers のダイログ関数の関数等式の類似として, クラスター代数における関係式からそれに付随する行列式の等式が導かれるということを紹介する. ここに登場する行列式は, 三次元トポロジーにおける Reidemeister トーションやアフィン Lie 代数の表現論における漸近的次元に関連すると予想される興味深い値になっている.

本文の流れは次のようである. 2 節でミューテーション (クイバーのミューテーションと Y 種子のミューテーションという二種類のミューテーションがある) について復習して, 3 節でクラスター代数における関係式から Rogers のダイログ関数の関数等式が得られるということを紹介したのち, 4 節で行列式の等式について解説する.

2　クイバーのミューテーションとY種子のミューテーション

正の整数 n を固定する. **クイバー**とは, 頂点が $\{1,\dots,n\}$ の有向グラフのこととする. ただし, クイバーは次の形は含まないこととする.



.

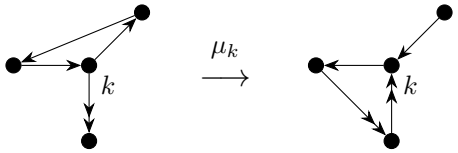
クイバー Q に対して, Q_{ij} で頂点 i から頂点 j への辺の本数を表す.

Definition 2.1. Q をクイバーとして, k をその頂点とする. 頂点 k における**クイバーのミューテーション**と

は, 以下で定義されるような, クイバー Q を別のクイバー $\mu_k(Q)$ に変形する操作のことをいう.

1. 各パス $i \to k \to j$ について新しい矢印 $i \to j$ を加える.
2. 頂点 k とつながっている矢印の向きを反転させる.
3. 長さ 2 のサイクル  が生じていたら, それらをすべて消去する.

例えば,

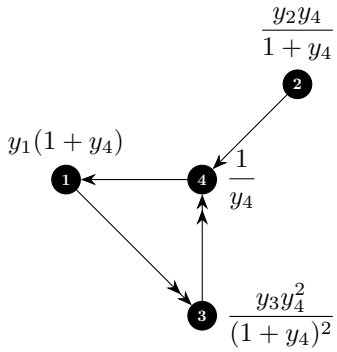


がクイバーのミューテーションである.

次は, Y 種子のミューテーションを定義する. 可換な変数 $y_1, \ldots, y_n$ を用意する. 組 (Q, Y) が Y **種子**であるとは,

- Qはクイバー
- $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ は Q の各頂点に割り当てられた $y_1, \ldots, y_n$ のsubtraction-freeな有理関数

のときをいう. 例えば,



が Y 種子である.

Definition 2.2. (Q, Y) を Y 種子, k を Q の頂点とする. 頂点 k における Y **種子のミューテーション**とは, (Q, Y)を新しい Y 種子 $\mu_k(Q, Y) = (\tilde{Q}, \tilde{Y})$に変形する操作のことである. ここで, $\tilde{Q} := \mu_k(Q)$ は先ほど定義したクイバーのミューテーションであり, $\tilde{Y}$ は

$$\tilde{Y}_i := \begin{cases} Y_i^{-1} & \text{if } i = k, \\ Y_i \cdot z_+^{Q_{ki}} & \text{if } i \neq k, Q_{ki} \geq 0, \\ Y_i \cdot z_-^{Q_{ki}} & \text{if } i \neq k, Q_{ik} \geq 0, \end{cases}$$

で定義される. ただし,

$$z_+ = \frac{Y_k}{1+Y_k}, \quad z_- = \frac{1}{1+Y_k}$$

である.

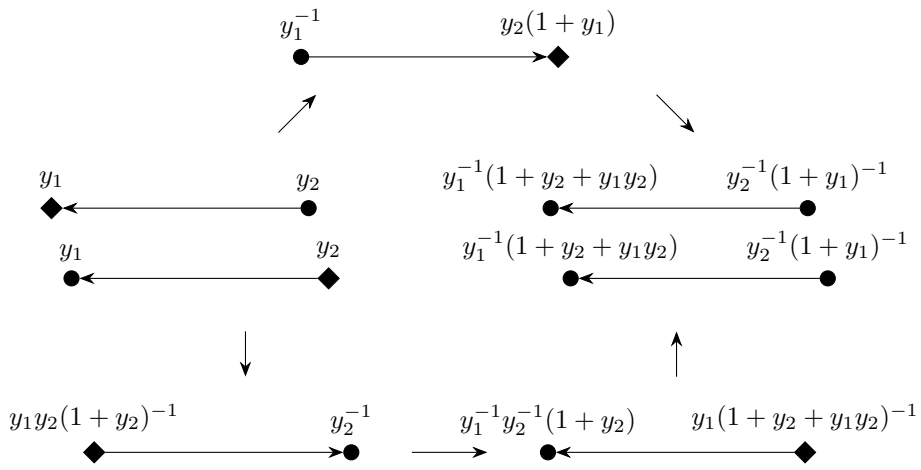


図1　Y 種子のミューテーションの 2-3 関係式. ダイヤモンドの頂点はミューテーションが行われる頂点を意味する.

Q をクイバーとして, $m = (m_1, \ldots, m_T)$を Q の頂点の列, ν を Q の頂点の置換とする. このとき, $Q(0) := Q$ と $Y(0) := (y_1, \ldots, y_n)$ から始まる Y 種子の列

$$(Q(0), Y(0)) \xrightarrow{\mu_{m_1}} (Q(1), Y(1)) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \cdots \xrightarrow{\mu_{m_T}} (Q(T), Y(T)) \xrightarrow{\nu} (\nu(Q(T)), \nu(Y(T))) \tag{1}$$

が定まる. ただし, 置換は Y 種子に $\nu(Q)_{ij} = Q_{\nu^{-1}(i)\mu^{-1}(j)}$ および $\nu(Y)_i = Y_{\nu^{-1}(i)}$ と作用する. 最初と最後のクイバーが等しい, すなわち $\nu(Q(T)) = Q$ のとき, 三つ組 $\gamma = (Q, m, \nu)$ を (Q 上の) **ミューテーション・ループ**という. また, T をミューテーション・ループの長さということにする.

ミューテーション・ループにおいては $\nu(Q(T)) = Q$ であるが, $\nu(Y(T)) = y$ となるとは一般には限らない. そこで有理関数 $\nu(Y(T))$ を $f_\gamma(y)$ と書くことにする.

クイバー Q 上の二つの異なるミューテーション・ループ γ および γ' をとってきたときに, $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$ となることがある. その中で最も単純な (そして最も重要と考えられている) 非自明な例は 2-3 **関係式**と呼ばれるものである. これは

$$Q = \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \end{array}$$

上のミューテーション・ループ

$$\gamma = (Q, (1,2), \mathrm{id}), \tag{2}$$
$$\gamma' = (Q, (2,1,1), (1\ 2)) \tag{3}$$

について, $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$ が成り立つというものである (図 1).

一般に, クイバー Q 上のミューテーション・ループ γ および γ' が $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$ を満たすとき, γ と γ' は同値であるといい, $\gamma \sim \gamma'$ と書くことにする.

3　クラスター代数と Rogers のダイログ関数の等式

Rogers **のダイログ関数**とは, 次で定義される関数である.

$$L(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y} \right\}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Rogers のダイログ関数が持つ最も重要な性質は, 以下の**ペンタゴン関係式** (もしくは 2-3 **関係式**ともいう) である:

$$L(x)+L(y)=L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right)+L(xy)+L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) \tag{4}$$

Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式は古典的に知られていたものであるのだが, 驚くことに, このペンタゴン関係式は, 前節で述べた Y 種子の 2-3 関係式と関係している. ペンタゴン関係式は 2 つのダイログ関数の和が 3 つのダイログ関数の和と等しいというものであり, Y 種子の 2-3 関係式は長さ 2 のミューテーション・ループと長さ 3 のミューテーション・ループが同値であるというものであるが, ここで 2 と 3 という数字がどちらにも表れていることは偶然ではない. この関係をもう少し詳しく見てみることにする. まず, ミューテーション・ループに対して,

$$z_+(t)=\frac{Y_{m_t}}{1+Y_{m_t}} \tag{5}$$

という有理関数を考える. ここで, Y_{m_t} は $Y_{m_t}(t-1)$ の略記であり, (1) で定まる. ミューテーション・ループ γ,γ' に対応する $z_+=(z_+(1),\dots,z_+(T))$ をそれぞれ z_+, z'_+ と書くことにする. すると, 図 1 の計算より

$$\begin{aligned} z_+&=\left(\frac{y_1}{1+y_1},\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2}\right),\\ z'_+&=\left(\frac{y_2}{1+y_2},\frac{y_1y_2}{1+y_2+y_1y_2},\frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)}\right) \end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$x=\frac{y_1}{1+y_1},\quad y=\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2}$$

とおくと, Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式の右辺に現れる引数は

$$\begin{aligned} \frac{y(1-x)}{1-xy}&=\frac{y_2}{1+y_2},\\ xy&=\frac{y_1y_2}{1+y_2+y_1y_2},\\ \frac{x(1-y)}{1-xy}&=\frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)} \end{aligned}$$

となる. これらはまさに z'_+ の成分そのものになっている. すなわち, Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式は

$$L(z_+(1))+L(z_+(2))=L(z'_+(1))+L(z'_+(2))+L(z'_+(3))$$

と書き直すことができる.

より一般に, 長さ T のミューテーション・ループと長さ T' のミューテーション・ループが同値なとき,

(T 個の Rogers ダイログ関数の和) = (T' 個の Rogers ダイログ関数の和)

という形の等式が得られることが中西 [8] によって証明された. すなわち, クラスター代数における Y 種子のミューテーションの間の関係式から, Rogers ダイログ関数の関数等式が得られるのである.

4　ミューテーション・ループに付随する行列式の等式

前節では, 二つの同値なミューテーション・ループが与えられると, それに付随して Rogers ダイログ関数の等式が得られるという結果を紹介した. この節では, その結果の類似として, 二つの同値なミューテーション・ループが与えられたときにそれに付随する行列式の等式が得られるという [6] の結果を紹介する. もう少し詳しくいうと, 長さ T のミューテーション・ループと長さ T' のミューテーション・ループが同値なとき, $T \times T$ 行列の行列式と $T' \times T'$ 行列の行列式が等しいという等式が得られる. その例として, この節の最後では, Y 種子の 2-3 関係式から得られる 2×2 行列の行列式と 3×3 行列の行列式の間の等式を書き下す.

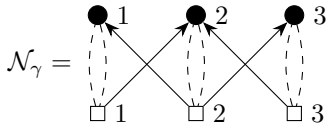
ミューテーション・ループ γ から, ミューテーション・ネットワークと呼ばれるグラフ $\mathcal{N}_\gamma$ を定義することができる. ミューテーション・ネットワークはもともとは場の理論の研究において導入された [9]. 紙面の都合上完全な定義を書き下すことはできないが, $\mathcal{N}_\gamma$ は次の性質を持つものである.

- 二種類の頂点を持つ (● と □)
- 三種類の辺を持つ (● - - - - - □ と ● ⟵ □ と ● ⟶ □)
- ● はクイバーの頂点, □ はミューテーションを表す
- 三種類の辺は, クイバーの頂点が各ミューテーションとどのように関係しているかを表す

例えば γ をミューテーション列

$$\underline{1} \to 2 \to 3 \quad \xrightarrow{\mu_1} \quad 1 \leftarrow \underline{2} \to 3 \quad \xrightarrow{\mu_2} \quad 1 \to 2 \leftarrow \underline{3} \quad \xrightarrow{\mu_3} \quad 1 \to 2 \to 3$$

としたときは,



となる. 完全な定義については [6] を参照してほしい.

ミューテーション・ネットワークは二種類の頂点 (四角の頂点と黒丸の頂点) および三種類の辺 (点線と四角から黒丸への矢印と黒丸から四角への矢印) からなる. 辺の種類が三つあることから, γ の隣接行列として三つの行列 N_0, N_+ および N_- を得る. 上の例においては

$$N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

Definition 4.1. $A_+ = N_0 - N_+$ および $A_- = N_0 - N_-$ で定まる行列 A_+, A_- を γ の Neumann-Zagier 行列という.

ミューテーション・ループ $\gamma = (Q, m, \nu)$ が fully mutated であるとは, 集合 $\{\nu^n(m_t) \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq T\}$ が $\{1, \ldots, n\}$ と一致するときをいう. これは大雑把にいうと, すべての頂点で少なくとも一度はミューテーションが行われるということである. 例えば, Y 種子の 2-3 関係式で出てきた γ, γ' はどちらも fully mutated

である. 長さが T のfully mutated なミューテーション・ループの Neumann-Zagier 行列は $T \times T$ 行列になる. 以下, ミューテーション・ループは fully mutated であると仮定する.

(5) で定義された有理関数 $z_+(t)$ に加えて, 有理関数 $z_-(t) = 1 - z_+(t)$ を定める. すなわち,

$$z_+(t) = \frac{Y_{m_t}}{1+Y_{m_t}}, \quad z_-(t) = \frac{1}{1+Y_{m_t}}$$

とする. Z_+ および Z_- を $T \times T$ の対角行列で, t 番目の成分がそれぞれ $z_+(t)$ および $z_-(t)$ であるものとする. Neumann-Zagier 行列および行列 Z_+, Z_- を用いて, $\tau_\gamma(y)$ という量を

$$\tau_\gamma(y) = \det(A_+ Z_- + A_- Z_+)$$

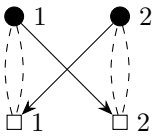
で定める.

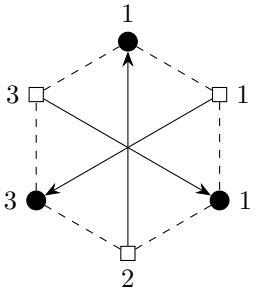
Theorem 4.2 (M [6].)**.** Q をクイバーとする. Q 上の fully mutated なミューテーション・ループが γ, γ' が $\gamma \sim \gamma'$ を満たすとき,

$$\tau_\gamma(y) = \tau_{\gamma'}(y)$$

が成り立つ.

この定理を Y 種子の 2-3 関係式に適用したときに得られる行列式の間の等式について見てみることにする. (2) および (3) のミューテーション・ループ γ および γ' に対応するミューテーション・ネットワークは

$\mathcal{N}_\gamma =$ 

, $\mathcal{N}_{\gamma'} =$ 

で与えられる. これより,

$$\begin{aligned}
\tau_\gamma(y) &= \det(A_+ Z_- + A_- Z_+) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z_- + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Z_+\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 2 & -\frac{y_1}{1+y_1} \\ -\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2} & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\tau_{\gamma'}(y) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_+\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+y_2}{1+y_2+y_1y_2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1+y_2+y_1y_2}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ -\frac{1}{1+y_2} & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る. よって, 定理 4.2 より

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -\frac{y_1}{1+y_1} \\ -\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2} & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+y_2}{1+y_2+y_1y_2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1+y_2+y_1y_2}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ -\frac{1}{1+y_2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

という 2×2 行列の行列式と 3×3 行列の行列式の間の等式を得ることができる. いまの場合はもちろんこれらの値を直接計算することができて, 実際に両辺ともに

$$\frac{4+4y_2+3y_1y_2}{1+y_2+y_1y_2}$$

となることを確かめることができる.

最後に補足をする. このレポートでは行列式の間の等式について述べたが, 行列式そのものの値の意義については何も述べなかった. このことについては

- 長尾-寺嶋-山崎 [7] によるクラスター代数と三次元双曲幾何学との関係を用いると, 本レポートの行列式は Dimofte-Garoufalidis [1] による Reidemeister トーションの予想式のクラスター代数における類似物と見ることができる.
- ミューテーション・ループとして [3, 4] で用いられている (X_r, ℓ) 型の Y システムに付随するものを考えてきたときは, 本レポートの行列式の値は, アフィン Lie 代数の表現論における漸近的次元と関係するということが [5] で予想されている.

といった話題がある.

謝辞

講演の機会を作ってくださった第15回数学総合若手研究集会〜数学の交叉点〜の世話人の皆様に感謝を申しあげます. 本研究は科研費 (課題番号: JP18J22576) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] Tudor Dimofte and Stavros Garoufalidis, *The quantum content of the gluing equations*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 3, 1253–1315.

[2] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529.

[3] Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba, and Tomoki Nakanishi, *Periodicities of T-systems and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: type B_r*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), no. 1, 1–42.

[4] ———, *Periodicities of T-systems and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: types C_r, F_4, and G_2*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), no. 1, 43–85.

[5] Yuma Mizuno, *Exponents associated with y-systems and their relationship with q-series*, arXiv preprint arXiv:1812.05863 (2018).

[6] ———, *Jacobian matrices of Y-seed mutations*, arXiv preprint arXiv:1805.00044 (2018).

[7] Kentaro Nagao, Yuji Terashima, and Masahito Yamazaki, *Hyperbolic 3-manifolds and cluster algebras*, Nagoya Mathematical Journal (2017), 1–25.

[8] Tomoki Nakanishi, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, Representations of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, pp. 407–443.

[9] Yuji Terashima and Masahito Yamazaki, $\mathcal{N} = 2$ *theories from cluster algebras*, PTEP **2014** (2014), no. 2, 023B01.

Loop homology algebra of discrete torsion

東京大学大学院数理科学研究科
浅尾泰彦 (Yasuhiko ASAO)

概要

Chas-Sullivan によるストリングトポロジーのオービフォールド（有限群商）への拡張として、Lupercio-Uribe-Xicoténcatl は有向閉多様体のボレル構成の自由ループ空間のホモロジーに次数付き可換結合的な積構造（ループ積）を構成し、それがオービフォールド不変量であることを示した。しかし一般に自由ループ空間のホモロジーを計算することは難しく、この積構造もまた非常に計算例に乏しい。講演者は群の作用がホモトピー的に自明な場合に考察を深めることで計算可能な例を大幅に増やすことができた。またそれらの積構造は有限群のあるコホモロジー類を用いて記述されることを示し、群コホモロジーの計算によってホモロジーの積構造を計算することができた。この積構造は純代数的には R.Kauffmann による “algebra of discrete torsion” として考察されている。

本稿では分野の雰囲気を幾ばくかでも知っていただけるように入門的な解説をするよう努めた。ループ積の定義と、オービフォールドに関する簡単な説明が書いてある。その後に少しだけ上の結果の説明をする。

1 導入

1.1 ストリングトポロジー

$\mathrm{Map}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ を X の自由ループ空間と呼び LX と書く。ここで X は位相空間であり $\mathrm{Map}(\mathrm{S}^1, \mathrm{X})$ はコンパクト開位相により位相空間とみなす。Chas-Sullivan [4] は有向閉多様体 M に対して、ホモロジー群 $H_*(LM)$ にループ積と呼ばれる積構造が存在することを発見した。ループ積の構成の基本的なアイディアは多様体の交叉積と、始点の一致した 2 つのループを繋ぐ操作を同時に行うというものである。ここでは Cohen-Jones [3] によるホモトピー論的なループ積の定義を紹介する。

M を d 次元有向閉多様体とし $ev_0 : LM \to M; l \mapsto l(0)$ とする。また $\Delta : M \to M \times M$ を対角埋め込みとする。次の pull-back 図式

$$\begin{array}{ccc} LM \times_M LM & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & LM \times LM \\ \downarrow{\scriptstyle ev_0} & & \downarrow{\scriptstyle ev_0 \times ev_0} \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array} \tag{1}$$

を考える。多様体の交叉積は Δ の誘導する「逆向きの写像」$\Delta^!_* : H_*(M \times M) \to H_{*-d}(M)$ (Δ の法バンドルに対する Pontrjagin-Thom 構成と Thom 同型を合成して得られる) によって定義される。したがってこれと両立するような $\tilde{\Delta}^!_* : H_*(LM \times LM) \to H_{*-d}(LM)$ を構成しループを繋ぐ写像

$\gamma : LM \times_M LM \to LM$;

$$\gamma(l_1, l_2)(t) = \begin{cases} l_1(2t) & (0 \le t \le 1/2), \\ l_2(2t-1) & (1/2 \le t \le 1). \end{cases}$$

と合成するというのがアイディアである。つまり

$$\circ : H_p(LM) \otimes H_q(LM) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(LM \times LM) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^!_*} H_{p+q-d}(LM \times_M LM) \xrightarrow{\gamma_*} H_{p+q-d}(LM). \tag{2}$$

で定義される。$\tilde{\Delta}^!_*$ は次のように構成される。

$i : A \to X$ を cofibration としコホモロジー類 $u \in H^n(X, X-A)$ を 1 つ固定しておく。A の近傍 $A \subset U \subset X$ に対して $i^!_{U*} : H_*(X) \to H_{*-n}(U)$ を

$$i^!_{U*} : H_*(X) \to H_*(X, X-A) \xrightarrow{\cong} H_*(U, U-A) \xrightarrow{\cap u} H_{*-n}(U) \tag{3}$$

で定義する。ただし 2 番目の同型写像は切除同型である。$\{i^!_{U*}\}_{A \subset U}$ は U の包含に関して逆系をなす。$i^!_* : H_*(X) \to H_{*-n}(A)$ を

$$i^!_* := \varprojlim_{A \subset U} i^!_{U*} : H_*(X) \to \varprojlim_{A \subset U} H_{*-n}(U) \cong H_{*-n}(A) \tag{4}$$

で定義する。ただし最後の同型は i が cofibration であることから従う。$(X, A) = (M \times M, M)$ とし $u \in H^d(M \times M, M \times M - M)$ を M の Thom 類とすることで $\tilde{\Delta}^!_*$ が構成できる。

$i^!_*$ に関して次の自然性が成立する。

Lemma 1.1. *$i : A \to X$ を cofibration, $f : \hat{X} \to X$ を fibration* とし、コホモロジー類 $u \in H^n(X, X-A)$ を固定する。このとき次の *pull-back* 図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{X} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} \tag{5}$$

に関して $f'_* \circ \hat{i}^!_* = i^!_* \circ f_*$ が成り立つ。ただし $i^!_*, \hat{i}^!_*$ はそれぞれ $u \in H^n(X, X-A), f^*u \in H^n(\hat{X}, \hat{X}-\hat{A})$ について上のように構成した準同型である。

Lemma 1.2. 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} \tag{6}$$

において i, j は *cofibration* とする。コホモロジー類 $u \in H^n(X, X-A)$ と $h'^*u \in H^n(Y, Y-B)$ に対して $h_* \circ j^!_* = i^!_* \circ h'_*$ が成立する。

これらの自然性から上で定義したループ積の結合性や次数付き可換性が証明できる。また以下では $H_*(LM)$ を環として扱う際には次数の都合により $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$ という記号を用いる。

1.2 計算例

位相空間 X の自由ループ空間 LX の構造は非常に複雑でそのホモロジー群が計算されている例は少ないが、以下に挙げるものはループ積構造も含めてホモロジー群が計算されている。

- コンパクトリー群 G に対して群同型 $LG \cong G \times \Omega G$ が成り立ち、環同型 $\mathbb{H}_*(LG) \cong \mathbb{H}_*(G) \otimes H_*(\Omega G)$ が成り立つ。ただし ΩG は単位元を基点とする G の基点付きループ空間を表し、$H_*(\Omega G)$ は Pontrjagin 環を表す。
- Cohen-Jones-Yan[2] は Serre スペクトル系列を用いて S^n や CP^n の場合に具体的にその積構造を記述した。例えば奇数次元球面に対しては $\mathbb{H}_*(LS^{2n+1}) \cong \mathbb{H}_*(S^{2n+1}) \otimes H_*(\Omega S^{2n+1})$ である。
- Tamanoi [7] は複素 Stiefel 多様体のループホモロジー環構造を決定している。
- aspherical 多様体 $K(\pi, 1)$ に対して、ホモトピー同値 $LK(\pi, 1)\pi \simeq \coprod_{[g]} BC(g)$ が成立する。ここで右辺は共役類全体に関する g の中心 $C(g)$ の分類空間の直和である。また Hochschild コホモロジーとの環同型 $\mathrm{HH}^*(\mathbb{Z}\pi; \mathbb{Z}\pi) \cong \mathbb{H}_*(\mathrm{LK}(\pi, 1))$ も成立する ([8])。

1.3 オービフォールド

多様体が「局所的に $\mathbb{R}^n$ と同相な T_2 空間」として定義されるように、オービフォールドは「局所的に有限群商 $\mathbb{R}^n/G$ と同相な T_2 空間」として定義される幾何学的対象である。(「」をつけたのはもちろんこれだけでは定義されずいくつかの座標間の両立性を満たさなければいけないからであるが、それはここで述べるにははんざつで入門の目的を見失う恐れがあるため触れない。また有限群 G は座標ごとに異なっても良い。) 特に多様体はオービフォールドである。一方でオービフォールドを「固有かつエタールなリー亜群」として定義することができる。(「固有かつエタール」という条件には先と同じ理由で触れない。) リー亜群とは亜群であってその構造写像が全て滑らか (さらに一部は沈め込み) であるものである。つまり亜群を圏と見たときに対象と射の集合がそれぞれすでに多様体の構造をもっている。この点においてもはやこの定義ではオービフォールドを多様体の一般化と呼ぶことに抵抗があるが、この視点はその圏論的な特性によって要所で議論がしやすくなるという利点がある。

本稿では以下で説明する有限群商オービフォールドを扱う。M を C^∞ 多様体とし G を M に滑らかに作用する有限群とする。このとき有限群商オービフォールド $[M/G]$ とは $\mathrm{Mor} = M \times G, \mathrm{Ob} = M$ を持つ亜群であり、射 (m, g) は m から mg に伸びる。関手 $F : [M/G] \to [N/K]$ はそれが「滑らかな圏同値」であるときに同値と呼ばれる。つまり「本質的全射かつ忠実充満」に倣った次の条件

- F は全射準同型 $\rho : G \to K$ と ρ 同変な全射局所可微分同相写像 $M \to N$ から構成されており、

- 次の図式は pullback である。

$$\begin{array}{ccc} M\times G & \xrightarrow{f\times\rho} & N\times K \\ \downarrow{\scriptstyle s\times t} & & \downarrow{\scriptstyle s\times t} \\ M\times M & \xrightarrow[f\times f]{} & N\times N \end{array} \tag{7}$$

を満たすときである。「本質的全射かつ忠実充満なら圏同値」という主張は逆写像が滑らかと限らないためリー亜群については成り立たない。そのため次のような同値関係を考える。つまり二つの関手 $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ が同値のとき、X と Z は森田同値という。これが同値関係であることが確かめられる。もちろん最初に紹介した定義に則ってオービフォールドの同型を定義することもできる（つまり T_2 空間の間の連続写像であって座標間では同変滑らかなものを射とする圏での同型）。さらにリー亜群としてのオービフォールド X から最初の定義のオービフォールド $|X|$ を構成することができ、X と Z が森田同値であれば $|X|$ と $|Z|$ はこの意味で同型であることも知られている。したがってどちらの定義を用いても大方支障はないが、今見た通りリー亜群を用いれば「座標」という概念を経由せずに議論が可能である。

$[M/G]$ に対して n 個の合成可能な射の空間を X_n とする。通常の圏の単体的ナーブと同様に単体的位相空間 $X_\bullet$ が得られ、その幾何的実現（Top での coend）は $[M/G]$ の分類空間と呼ばれる。分類空間のホモトピー型は森田同値不変量であることが知られている。また $[M/G]$ の分類空間は Borel 構成 $M \times_G EG$ とホモトピー同値である。

オービフォールドに関しては [1] が詳しく [6] が入門的である。

1.4 オービフォールドストリングトポロジー

自由ループ空間のループ積は有向閉多様体のみならずより広い空間のクラスに拡張されている。以下で Lupercio-Uribe-Xicoténcatl [5] によるオービフォールドへのループ積の拡張を紹介する。

M を d 次元有向閉多様体とし、G を M に滑らかに右から作用する有限群とする。G の元 g に対して空間 $P_gM := \{\sigma : [0,1] \rightarrow M \mid \sigma(1) = \sigma(0)g\}$ をパス空間 $\mathrm{Map}([0,1], \mathrm{M})$ の部分空間として定義する。$P_GM = \coprod_{g\in G} P_gM$ とすると有限群 G は空間 P_GM に $(\sigma, g)h = (\sigma h, h^{-1}gh)$ によって連続に作用する。 この作用に関する Borel 構成 $P_GM \times_G EG$ は G の M への作用に関する Borel 構成 $M \times_G EG$ の自由ループ空間と弱ホモトピー同値になる。つまり $P_GM \times_G EG \simeq L(M \times_G EG)$ である。オービフォールド $[M/G]$ に対して Borel 構成 $M \times_G EG$ のホモトピー型はオービフォールド不変量であることに注意する。

オービフォールドループ積を定義するためにホモロジー群 $H_*(P_GM)$ 上に積 $\bullet : H_p(P_GM) \otimes H_q(P_GM) \rightarrow H_{p+q-d}(P_GM)$ を定義する。G の元 g, h に対して pull-back 図式

$$\begin{array}{ccc} P_gM \times_M P_hM & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & P_gM \times P_hM \\ \downarrow{\scriptstyle ev_1\times_M ev_0} & & \downarrow{\scriptstyle ev_1\times ev_0} \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M\times M \end{array} \tag{8}$$

を考える。$\tilde{\Delta}^!_* : H_*(P_gM \times P_hM) \rightarrow H_{*-d}(P_gM \times_M P_hM)$ が既に説明した方法で構成できるので、連続

写像 $\gamma : P_gM \times_M P_hM \to P_{gh}M$;

$$\gamma(\sigma_g, \sigma_h)(t) = \begin{cases} \sigma_g(2t) & (0 \le t \le 1/2), \\ \sigma_h(2t-1) & (1/2 \le t \le 1). \end{cases}$$

と合成することで準同型 $H_p(P_gM) \otimes H_q(P_hM) \to H_{p+q-d}(P_{gh}M)$ が得られる。これらの直和を $\bullet : H_p(P_GM) \otimes H_q(P_GM) \to H_{p+q-d}(P_GM)$ と定義する。

次に被覆の transfer map について説明する。$\pi : X \to Y$ を正則 G 被覆写像とする。このとき準同型 $\theta_* : H_*(Y;R) \to H_*(X;R)$ を $\theta_*(\Delta) := \sum_{\text{lift of}\Delta} \tilde{\Delta}$ で定義し、被覆写像 π の transfer map という。係数環 R の標数が G の位数と互いに素の場合は θ_* は単射となりその像は G 作用の不変部分空間 $H_*(X;R)^G$ と一致する。

オービフォールドループ積は積 $\bullet$ と transfer map を用いて次のように定義される。

$$\circ : H_p(P_GM \times_G EG) \otimes H_q(P_GM \times_G EG) \xrightarrow{\theta_* \otimes \theta_*} H_p(P_GM) \otimes H_q(P_GM) \xrightarrow{\bullet} H_{p+q-d}(P_GM) \xrightarrow{p_*} H_{p+q-d}(P_GM \times_G EG) \tag{9}$$

ここで $p : P_GM \times EG \to P_GM \times_G EG$ は G の作用による商写像、特に被覆写像である。また θ_* は被覆写像 p の transfer map である。このようにして定義されたオービフォールドループ積は結合性と次数付き可換性を満たし、特に G の作用が固定点自由の時は通常のループ積と一致する。またオービフォールド不変量であることも知られている ([5])。

2 主結果

M を滑らかな有向閉多様体、$\mathcal{G}$ を M に作用する弧状連結位相群とする。G をその有限部分群とし、M には滑らかに作用しているとする。主結果は次の二つのパートに分けられる。

(1) 組 $(\mathcal{G}, G)$ に対するある条件の下で加群としての同型 $H_*(L[M/G];k) \cong H_*(LM;k) \otimes Z(k[G])$ を示した。

(2) 上の同型はループ積に関する代数の同型であり、右辺の代数構造はあるコホモロジー類 $c \in H^2(G;A)$ を用いて書けることを示した。また具体的な空間に対して計算を行った。

2.1 (1) について

$\mathcal{G}$ 上の道の族 $\{\theta_g\}_{g \in G}$ で、$\begin{cases} \theta_g(0) = e, \\ \theta_g(1) = g \end{cases}$ を満たすものを 1 つ固定する。このとき各 $g \in G$ に対して

$\tau_g(\gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma(0)\theta_g(2-2t) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$ で定義されるホモトピー同値写像 $\tau_g : P_gM \to LM$ を得る。

直和を取ることでホモトピー同値写像 $\tau_G : P_GM \to LM \times G$ を得るが、これが（ある条件のもとで）ホモトピーの差を除いて G 同変であることを示すことで次を証明した。

Theorem 2.1. $|G|$ と $|(\pi_1\mathcal{G})^{tor}|$ が互いに素のとき、上の写像は加群の同型 $H_*(L[M/G];k) \cong$

$H_*(P_G M;k)^G \cong H_*(LM;k)\otimes Z(k[G])$ を誘導する。ここで *1* つ目の同型は被覆のトランスファーによるものであり、Z は環の中心を表す。

2.2 (2) について

上の定理の同型写像が誘導する積構造を調べる。写像 $c : G\times G \to \pi_1\mathcal{G}$ を $c(g,h) = \theta_h * \theta_g h * \theta_{gh}^{-1}$ で定める。ここで位相群の基本群は必ずアーベル群であることに注意する。c は 2 コサイクルであることが確認できる。一方で合成写像 $\pi_1\mathcal{G} \to \pi_1 \mathrm{aut}_1 M \to H_{\dim M}(LM;\mathbb{Z})$ を考える（$\mathrm{aut}_1 M$ は自己写像空間の Id 連結成分）。ここで 1 つ目の写像は作用写像 $\mathcal{G} \to \mathrm{aut}_1 M$ が誘導する写像であり、2 つ目は $\mathrm{aut}_1 M \subset [M,LM] \ni l \mapsto l_*[M]$ で定義する（$[M]$ は基本類）。この写像は像 (=: A) の上でループ積に関して群準同型である。したがって c を合成することで 2 コサイクルを得る。これも同じ記号 $c \in Z^2(G;A)$ で表す。すると $x,y \in H_*(LM;k), g,h \in G$ に対して

$$(x\otimes g)\circ(y\otimes h) := xyc(g,h)\otimes gh \tag{10}$$

は $H_*(LM;k)\otimes Z(k[G])$ 上の積を定めることが確認できる。

Theorem 2.2. 定理 *(2.1)* の同型は積構造 *(10)* に関して同型であり、その同型類は道の族 $\{\theta_g\}$ の取り方に依らない。

したがって例えば $\mathrm{rank}\, H_{\dim M}(LM;k) = 1$ のとき $H^2(G;A) = 0$ なので積構造は常に自明になる。

参考文献

[1] Alejandro Adem, Johann Leida, and Yongbin Ruan. Orbifolds and stringy topology , volume 171 of Cambridge Tracts in Mathematics . Cambridge University Press, Cambridge, 2007

[2] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces. Categorical decomposition techniques in algebraic topology , 77-92, Progr. Math., 215, Birkhäuser, Basel, 2004.

[3] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology. *Math. Ann.* **324** (2002), no. 4, 773-798.

[4] M. Chas, D. Sullivan, String Topology, preprint, arxiv:math.GT/9911159.

[5] E. Lupercio, B. Uribe, and M. A. Xicoténcatl, Orbifold string topology, *Geom. Topol.* **12(4)** (2008), 2203-2247.

[6] I. Moerdijk, Orbifolds as Groupoids: an introduction, preprint(2002), arXiv:math/020310

[7] H. Tamanoi, Batalin-Vilkovisky Lie algebra structure on the loop homology of complex Stiefel manifolds, *Int. Math. Res. Not.* 2006, Art. ID 97193, **23** pp.55-48.

[8] D. Vaintrob, The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces, preprint(2007), arXiv:math/0702859

点付きトーラス上の有限巡回群作用のリフトの構成について

高橋 典寿 (Norihisa Takahashi)
(立命館大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻)

1 背景と目的

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と表す．Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像の isotopy 類の全体は写像の合成を積とし群をなす．これを Σ_g の写像類群と呼び，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ で表す．

$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ の群構造に関しては，様々な研究が存在する．M. Dehn 氏, W. B. R. Lickorish 氏は，有限個の Dehn twist と呼ばれる Σ_g 上の可微分同相写像によって $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ が生成されることを示した．さらに S. P. Humphries 氏は，Σ_g 上の $2g+1$ 個の単純閉曲線に関する Dehn twist によって，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ が生成されることを示した．

廣瀬進氏 [3] は種数 4 以下の全ての極大有限巡回群作用の Dehn twist 表示を与えた．石坂瑞穂氏 [4] は Σ_g 上の超楕円的周期的写像を共役の差を除き分類し，それらの Dehn twist 表示を与えた．さらに中村豪氏，中西敏浩氏 [5] は，$\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ の全ての有限部分群に Dehn twist 表示を与えた．しかし，一般の写像類群の任意の有限部分群に対し，Dehn twist による表示を与えることは未だ出来ていない．

また，J. S. Birman 氏, H. M. Hilden 氏は，$2g+2$ 点付き球面上の任意の同相写像が Σ_g に持ち上がることを示した．さらに T. Ghaswala 氏, R. R. Winarski 氏 [2] は点付き球面上の巡回分岐被覆写像であって，点付き球面上の任意の同相写像が Σ_g に持ち上がる条件を求めた．

本稿では，Σ_g 上の有限巡回群であって，$2g-2$ 点付きトーラス上の有限巡回群の持ち上げとして得られるものの構成を行う．本稿は，野澤啓氏 (立命館大学 理工) との共同研究に基づく．

2 周期的写像の分類

$f \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ に対し，$f^n = id_{\Sigma_g}$ なる自然数 n が存在するとき，f は周期的であるという．また，$x \in \Sigma_g$ が周期的写像 f の重複点であるとは，f の周期 n よりも小さい自然数 k が存在し，$f^k(x) = x$ となることである．ここで，f の重複点全体の集合を M_f とおき，$\pi_f : \Sigma \to \Sigma/\langle f \rangle$ を n 重分岐被覆写像とする．$B_f := \pi(M_f)$ を f の分岐集合と呼ぶ．$b_i \in B_f$ に対し，$p_i \in M_f$ を任意に一つ固定する．p_i に置ける π_f の分岐指数を λ_i とおく．σ_i $(1 \leq \sigma_i < \lambda_i)$ を p_i の近傍の境界への $f^{\frac{n}{\lambda_i}}$ の作用が $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}2\pi$ であるように選ぶ．このとき $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}$ を p_i を含む f の特異軌道の *valency* と呼び，$[\, g, n\,;\, \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\sigma_s}{\lambda_s}\,]$ を f の *total valency* と呼ぶ．total valency は周期的写像類の共役類を完全に分類することが知られている．

3 $2g-2$ 点付きトーラス上の周期的写像とその作用の分類

以下，$g \geq 2$ とする．$\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \ltimes T^2$ の T^2 への作用から以下が分かる．

命題 3.1. $2g-2$ 点付きトーラス T^2_{2g-2} 上の有限巡回群の生成元の共役類は以下のいずれかの冪乗で尽くされる：

1. $[\,f_{1,1}\,]=[\,1,6\,;\,\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,]$,
2. $[\,f_{1,2}\,]=[\,1,4\,;\,\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,]$,
3. $[\,f_{1,3}\,]=[\,1,\frac{2g-2}{\mathrm{lcm}(k,2g-2)}\,;\,*\,]$.

以後の計算のために，分岐指数及び total valency に関する 2 つの主張を紹介する．

補題 3.2 (Harvey, ([1] 参照))．Σ_g 上の周期 n の周期的写像及び，f に対応する n 重分岐被覆写像 $\pi_f:\Sigma_g\to\Sigma_{g'}$ を考える．$(\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell\,)$ を π_f の各分岐点における分岐指数とし，$M=\mathrm{lcm}(\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell\,)$ とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $g'=0$ ならば，$M=n$,
2. $2\mid M$ ならば，$q\mid M$ なる最大の 2 の冪 q に対し，$q\mid\lambda_i$ なる i の数は偶数である．

補題 3.3 (Nielsen, ([1] 参照))．$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\frac{\sigma_1}{\lambda_i}$ は整数である．

f の Σ_g への持ち上げを $\tilde{f}\in\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ とおく．本稿では $[\,f\,]=[\,f_{1,2}\,]$ なる T^2 上の周期的写像 f を考える．特に，$G=\langle\,f\,\rangle$ の Σ_g への持ち上げ $\tilde{G}$ であって，$\tilde{f}$ で生成される巡回群の構成を行う．$\Sigma_g\to T^2_{2g-2}$ が二重分岐被覆写像であることから，$\tilde{f}$ の周期は 4 もしくは 8 であることが従う．以下，T^2 上の $2g-2$ 点を上記二重分岐被覆写像の分岐点と見做す．

f の T^2 への作用は，各分岐点への f の作用を分類することによって以下のように類別される．

1. g が奇数であって，かつ $M_f\cap B_\iota\neq\emptyset$,
2. g が奇数であって，かつ $M_f\cap B_\iota=\emptyset$,
3. g が偶数であって，かつ $\mathrm{Fix}(f)\cap B_\iota\neq\emptyset$,
4. g が偶数であって，かつ $\mathrm{Fix}(f)\cap B_\iota=\emptyset$.

また，それぞれに対応する $\Sigma_g\to\Sigma_g/\langle\,\tilde{f}\,\rangle$ の分岐指数 $(\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell\,)$ は以下で与えられる．

1. $(\,8,8,4,2,\cdots,2\,)$ $(\,\ell=\frac{g+3}{2}\,)$,
2. $(\,4,4,2,\cdots,2\,)$ $(\,\ell=\frac{g+5}{2}\,)$,
3. $(\,8,8,2,\cdots,2\,)$ $(\,\ell=\frac{g}{2}+2\,)$,
4. $(\,4,4,4,2,\cdots,2\,)$ $(\,\ell=\frac{g}{2}+2\,)$.

ここで，Riemann-Hurwitz の公式と補題 3.2 の 2 を用いることで, 上記 2 の場合は種数が 2 以上の場合では起こり得ないことが分かる．また，補題 3.2 の 2 から上記 4 は起こり得ないことが分かる．

4　f の持ち上げの構成

補題 3.3 を用いて計算することで，$\tilde{f}$ の total valency が決定される．

定理 4.1. $\tilde{G}$ の生成元の共役類は以下のいずれかで与えられる：

1. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 1 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
2. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 1 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
3. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 3 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
4. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 3 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
5. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 2 \mod 4,\ \lambda=\frac{g}{2})$,
6. $[\,g,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,]$, $(g\equiv 0 \mod 4,\ \lambda=\frac{g}{2})$.

(ここで，λ は valency が $\frac{1}{2}$ である特異軌道の数である．)

Σ_g 上の $\tilde{G}$-作用を具体的に構成する．そのために，以下のように total valency 同士の和を定義する．

$$[\,g,n\,;\cdots+\frac{\theta_p}{\lambda_p}+\cdots]\,\#_{\frac{\theta_p}{\lambda_p}}\,[\,h,n\,;\cdots+\frac{\lambda_p-\theta_p}{\lambda_p}+\cdots]=[\,g+h+\frac{n}{\lambda_p}-1,n\,;\cdots+\frac{\tilde{\theta_p}}{\lambda_p}+\cdots+\frac{\lambda_p\ \tilde{-}\ \theta_p}{\lambda_p}+\cdots]$$

上記定義は，Σ_g 上の valency が $\frac{\sigma_p}{\lambda_p}$ である特異軌道上の各重複点の円盤近傍及び，Σ_h 上の valency が $\frac{\lambda_p-\sigma_p}{\lambda_p}$ である特異軌道上の各重複点の円盤近傍を切除し，それらの境界を貼り合せることで，Σ_g と Σ_h の巡回群作用で不変な連結和を取ることに対応する．

f を定理 4.1 内のいずれかの total valency を持つ Σ_g 上の周期的写像とする $\mathrm{Op}:[\,f\,]\mapsto \mathrm{Op}([\,f\,])$ を $\mathrm{Op}([\,f\,])=[\,f\,]\,\#_{\frac{1}{8}}\,[\,4,8\mid \frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,]$ で定める．

定理 4.2. f は以下のいずれかの周期的写像に Op を有限回施すことで得られる:

$[\,5,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,]$, $[\,5,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\,]$, $[\,3,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\,]$,
$[\,3,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\,]$, $[\,2,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\,]$, $[\,4,8\,;\,\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,]$.

他の持ち上げに関しても，同様の手法で得ることが出来る．

参考文献

[1] T. Ashikaga and M. Ishizaka, "Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos' theorem", Tohoku Math. J. **54** (2002), 195–226.

[2] T. Ghaswala and R.R. Winarski, "Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres", Mishigan Math. J. **66** (2017), 885–890.

[3] S. Hirose, "Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4", Osaka J. Math. **47** (2010), 385–421.

[4] M. Ishizaka, "Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families", Rev. Mat. Complut. **20**(2) (2007), 483–495.

[5] G. Nakamura and T. Nakanishi, "Generation of finite subgroups of the mapping class group of genus 2 surface by Dehn twists", J. Pure. Appl. Algebra, **222** (2018), 3585–3594.

リー群による軌道分解と不変超関数

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
田内大渡 (Taito TAUCHI)

概要

リー群 G による多様体 X の軌道分解や X 上の G 不変な超関数の空間は表現論的に X を理解する一つの手がかりになると考えられる。また G と X の複素化をそれぞれ $G_{\mathbb{C}}$ と $X_{\mathbb{C}}$ としたとき $G_{\mathbb{C}}$ による $X_{\mathbb{C}}$ の軌道分解は $\mathcal{D}$ 加群の理論より X 上の G 不変な超関数の空間に関する情報を与える。これを踏まえ今回の講演では X 上の G 軌道の個数は有限だが $X_{\mathbb{C}}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 軌道が無限となる系列が存在することに幾何学的手法と表現論的手法の二通りの証明を与える。

1 Introduction

Let G be a real reductive Lie group (for example, general linear group $GL(n,\mathbb{R})$) and H a closed subgroup of G. Then T. Kobayashi and T. Oshima established the criterion of finite-multiplicity property for the regular representation on G/H.

Fact 1.1 ([7, Thm. A])**.** Suppose that G and H are defined algebraically over $\mathbb{R}$. Then the following two conditions on the pair (G,H) are equivalent:

(i) $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) < \infty$ for any $(\pi,\tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$,
(ii) G/H is real spherical.

Here $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ denotes the set of equivalence classes of irreducible smooth admissible Fréchet representations of G with moderate growth (see [12] for the definition of a smooth admissible Fréchet representation with moderate growth), and $\hat{H}_{\mathrm{alg}}$ that of algebraic irreducible finite-dimensional representations of H. Given $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{alg}}$, we write $C^\infty(G/H,\tau)$ for the Fréchet space of smooth sections of the G-homogeneous vector bundle over G/H associated to τ, namely, the induced representation of G induced from a representation τ of H. The terminology *real sphericity* was introduced by Kobayashi [5] in his study of a broader framework for global analysis on homogeneous spaces than the usual (e.g., reductive symmetric spaces).

Definition 1.2. A homogeneous space G/H is *real spherical* if a minimal parabolic subgroup P of G has an open orbit on G/H.

Remark 1.3. (1) In the case $G = GL(n,\mathbb{R})$, a minimal parabolic subgroup P of G is given by the non-singular upper triangular matrices.
(2) G/H is real spherical if and only if the number $\#(H\backslash G/P)$ of H-orbits on G/P is infinite

[1]. This is a consequence of the rank one reduction of T. Matsuki [9] and the classification of real spherical varieties in the case of real rank one by B. Kimelfeld [3].

Let $G_{\mathbb{C}}$ be the complexification of G, that is, $G_{\mathbb{C}}$ is a complex Lie group which contains G as a closed Lie subgroup and its Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ is equal to $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ where $\mathfrak{g}$ is a Lie algebra of G (for example, $G_{\mathbb{C}} = GL(n, \mathbb{C})$ in the case $G = GL(n, \mathbb{R})$).

By finding an upper and lower estimate of the dimensions of $\mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau))$, Kobayashi and Oshima also established the criterion of the uniform boundedness of the multiplicities for induced representations.

Fact 1.4 ([7, Thm. B])**.** Suppose that G and H are defined algebraically over $\mathbb{R}$. Then the following two conditions on the pair (G, H) are equivalent:

(i) $\displaystyle\sup_{\tau \in \hat{H}_{\mathrm{alg}}} \sup_{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}} \frac{1}{\dim \tau} \dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty,$

(ii) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ is spherical.

Here we say that a homogeneous space $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ is spherical if a Borel subgroup B of $G_{\mathbb{C}}$ has an open orbit on $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$.

Remark 1.5. (1) In the case that $G_{\mathbb{C}}$ is the general linear group $GL(n, \mathbb{C})$ over $\mathbb{C}$, a Borel subgroup B of $G_{\mathbb{C}}$ is given by the non-singular upper triangular matrices.

(2) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ is spherical if and only if $\#(H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B) < \infty$ holds [2, 11]. This also follows from the argument in [9].

Moreover, we proved in [10] the following bounded multiplicity property.

Fact 1.6 ([10])**.** Suppose that $\#(H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$. Then we have

$$\sup_{\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}} \sup_{\eta \in \hat{P}_{\mathrm{f}}} \frac{1}{\dim \eta \cdot \dim \tau} \dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \eta), C^\infty(G/H, \tau)) < \infty.$$

Here $\hat{P}_{\mathrm{f}}$ denotes the set of equivalence classes of irreducible finite dimensional representations of P.

Remark 1.7. (1) In general, $\#(H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$ is weaker condition on the pair (G, H) than $\#(H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B) < \infty$ when $P_{\mathbb{C}}$ is not a Borel subgroup B of $G_{\mathbb{C}}$.

(2) In [10], it is proved that Fact 1.6 is also true if we replace a minimal parabolic subgroup P by a general parabolic subgroup Q of G.

(3) In Fact 1.6, individual terms are finite by Fact 1.1. Moreover the supremum of these terms is also finite if $P_{\mathbb{C}}$ is a Borel subgroup B of $G_{\mathbb{C}}$ by the proof of Fact 1.4 in [7] (The finiteness of supremum is also true if we replace $\hat{H}_{\mathrm{alg}}$ by $\hat{H}_{\mathrm{f}}$ in Fact 1.4).

2 Main Theorem

As we have seen in Section 1, the orbit decomposition of H on G/P and its complexification have information of harmonic analysis on G/H. In particular, the finiteness of the number of H-orbits on G/P, or $H_{\mathbb{C}}$-orbits on $G_{\mathbb{C}}/B$ characterizes the finite/bounded multiplicity property of the regular representation on G/H. Moreover $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$ also implies bounded multiplicity property. Therefore we want to know what happens in the intermediate case, namely, the case that $\#(H\backslash G/P) < \infty$ holds although $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$ does not hold. While there are many pairs (G, H) satisfying $\#(H\backslash G/P) < \infty$ and $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B) = \infty$ (for example, see [6]), it is not easy to construct examples that $\#(H\backslash G/P) < \infty$ holds although $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$ does not hold. As a first step in the study of the intermediate case, we give examples that the number of H-orbits on G/P is finite but the number of $H_{\mathbb{C}}$-orbits on $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ is infinite.

Theorem 2.1. For a real reductive Lie group G without compact factors, the following three conditions are equivalent:

(i) $\mathfrak{l}$ is abelian,
(ii) $\#(N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$,
(iii) $G_{\mathbb{C}}/N_{\mathbb{C}}$ is spherical,

where P is a minimal parabolic subgroup of G and $P = LN$ is its Levi decomposition.

Remark 2.2. (1) For any real reductive Lie group, we have $\#(N\backslash G/P) < \infty$ by the Bruhat decomposition (for example, see [4, Thm. 7.40]). Therefore Theorem 2.1 implies that the number of N-orbits on G/P is finite but the number of $N_{\mathbb{C}}$-orbits on $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ is infinite if $\mathfrak{l}$ is not abelian.

(2) In Fact 1.4 and Theorem 2.1, we consider the orbit decompositions of $H_{\mathbb{C}}$ on $G_{\mathbb{C}}/B$ and $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$, respectively. Note that $\mathfrak{l}$ is abelian if and only if $P_{\mathbb{C}} = B$ holds.

(3) Let G be the special indefinite unitary group $SU(1, n)$. Then it is pointed out that $\#(N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ holds if $n \geq 3$ by Matsuki [9, Remark 7].

It is obvious that (i) and (iii) are equivalent by the Bruhat decomposition and that (iii) implies (ii) by (2) of Remark 1.5. Therefore, it is sufficient to prove that the implication (ii) $\Rightarrow$ (i) is true for Theorem 2.1. We give two proofs of this claim. One is a representation theoretic proof and the other is a geometric proof.

Sketch of a geometric proof. By the generalized Bruhat decomposition, we have

$$G_{\mathbb{C}} = \coprod_{w \in W/W_L} BwP_{\mathbb{C}}$$

where W and W_L are Weyl groups of $G_{\mathbb{C}}$ and $L_{\mathbb{C}}$. Because $N_{\mathbb{C}} \subset B$, $N_{\mathbb{C}}$ acts on $BwP_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ for any $w \in W/W_L$. If $\mathfrak{l}$ is not abelian and G has no compact factors, we can show that

there exists $w_0 \in W/W_L$ such that the dimension of every $N_{\mathbb{C}}$-orbit on $Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ is smaller than $\dim Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$. This implies $\#(N_{\mathbb{C}}\backslash Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$, in particular, $\#(N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}P_{\mathbb{C}}) = \infty$ holds. □

Sketch of a representation theoretic proof. By Fact 1.6, it is sufficient to prove the following proposition.

Proposition 2.3. *Suppose that G has no compact factors and $\mathfrak{l}$ is not abelian. Then there exists a sequence $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ of one-dimensional representations of P satisfying*

$$\lim_{k\to\infty} \dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \eta_k), C^\infty(G/N)) = \infty.$$

We prove this proposition by constructing concrete intertwining operators, which are differential operators in the sense of [8, Def. 2.1]. Let $R : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(G))$ be a differential of the right regular representation on $C^\infty(G)$ of G. In other words, for $X \in \mathfrak{g}$ and $f \in C^\infty(G)$, define $R(X)f \in C^\infty(G)$ by

$$(R(X)f)(x) := \left.\frac{d}{dt} f(xe^{tX})\right|_{t=0}$$

where $x \in G$. Then, R extends to $: U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(G))$ where $U(\mathfrak{g})$ is the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. If G has no compact factors and $\mathfrak{l}$ is not abelian, we can take an element $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ satisfying the following property.

Let V_k be a subrepresentation of L on $U(\mathfrak{g})$ is generated by Y^k for any $k \in \mathbb{N}$. Then there exists a one-dimensional representation η_k of P such that $R(V_k) \subset \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \eta_k), C^\infty(G/N))$ and $\lim_{k\to\infty} \dim R(V_k) = \infty$ hold.

Here we abbreviate $R(V_k) \subset \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \eta_k), C^\infty(G/N))$ because the image of the restriction of $R(V_k)$ on $C^\infty(G/P, \eta_k) \subset C^\infty(G)$ is contained in $C^\infty(G/N)$ although $R(V_k)$ is a priori contained in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(G))$. This implies Proposition 2.3. □

Reference

[1] F. Bien, Orbit, multiplicities, and differential operators, Contemp. Math. **145** (1993), Amer. Math. Soc. 199–227.

[2] M. Brion, Spherical varieties, Progr. Math., **295**, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.

[3] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds of rank 1, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 506–588.

[4] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Second edition, Progr. Math. **140** (2002), Birkhäuser, xviii+812 pp.

[5] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[6] T. Kobayashi, T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, Transformation Groups, **19** (2014), 457–493. Special Issue in honour of Professor Dynkin for his 90th birthday.

[7] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[8] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801–845.

[9] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the InternationalCongress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, 807–813.

[10] T. Tauchi, On a uniformly bounded multiplicity theorem, in preparation.

[11] È. B. Vinberg, Complexity of action of reductive groups, Func. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.

[12] N. R. Wallach, Real Reductive Groups I, II, Pure and Appl. Math. **132** (1988, 1992), Academic Press, xx+412 pp, xiv+454 pp.

パラレルセッション
会場 C

Global existence and asymptotic behavior in a Keller–Segel system with signal-dependent sensitivity

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
水上雅昭 (Masaaki MIZUKAMI)*

概要

本講演では, 次の感応性関数をもつ Keller–Segel 系を Neumann 境界条件と初期条件の下で考える:

$$u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot(uS(v)\nabla v), \quad v_t = \Delta v - v + u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0. \tag{KS}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界をもつ有界領域とし, $\chi > 0$, S は $S(v) \le (a+v)^{-k}$ $(k \ge 1,\ a \ge 0)$ を満たす既知関数とする. 本講演では, $k = 1$ の場合と $k > 1$ の場合を統一的に扱う手法を用いて, 時間大域的古典解の存在を導く χ の条件を導出する. さらに, 問題 (KS) の時間大域的古典解の漸近挙動を導く χ の条件を決定する.

1 導入

偏微分方程式は解析学における一つの研究分野であり, 多くの数学者がさまざまな偏微分方程式の研究に従事している. 偏微分方程式はしばしば自然現象を数学的に記述しており, 自然現象を数学的に解明する手段として研究されている. 特に, 物理や化学だけではなく, 工学や生物, 医学などを背景にもつ偏微分方程式も近年広く扱われている. ここでは, 生物現象, 特に走化性による生物の集中現象に焦点を当てる. 走化性とは, 生物や細胞が化学物質に反応して方向性をもった運動をする性質であり, 例えば癌細胞の浸潤現象, 免疫, リンパ球や神経細胞の遊走などの生命活動において重要な役割をもつ性質である. Keller–Segel [4, 5] は走化性をもつ細胞性粘菌の一種であるキイロタマホコリカビの集中現象について研究を行い, Keller–Segel 系と呼ばれる次の問題を提唱した:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot(uS(v)\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad v(\cdot,0) = v_0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり, $\chi > 0$ は定数, S, u_0, v_0 は既知関数とする. Keller–Segel 系は 2 本の偏微分方程式の連立系を Neumann 境界条件と初期条件のもとで考える問題であり, 未知関数の u と v はそれぞれ生物の密

* 本研究は JSPS 科研費 (No. 17J00101) の助成を受けたものである.

度と化学物質の濃度を表している．この問題の第一方程式の右辺第一項の Δu は生物の拡散を表す項であり, 右辺第二項の $-\chi\nabla\cdot(nS(v)\nabla v)$ は走化性による生物の集中現象を表す項である．ここで, 走化性項が集中現象を記述している理由を説明する．v を既知関数として, Δu をなくした第一方程式

$$u_t = -\chi\nabla\cdot(uS(v)\nabla v)$$

は, 連続の方程式の観点から考えると, 流れ $\chi S(v)\nabla v$ の方向に移動する密度 u の生物の運動を記述しており, ∇v は v の値が高い方向に向かう勾配ベクトルであるため, 走化性項は生物が v の値が高い方向に移動する現象を記述していることがわかる (図 1 参照). 特に, 流れ $\chi S(v)\nabla v$ の長さは $\chi S(v)$ の影響を強く受けるため, $\chi S(v)$ の値が小さいときは走化性の力が弱いことを表し, 値が大きい場合は走化性の力が強いことを表している．ここで, $S(v)$ の例として想定されている関数は

$$S(v)=1, \qquad S(v)=\frac{1}{v}, \qquad S(v)=\frac{1}{(a+v)^k} \quad (a\geq 0,\ k>1)$$

などが挙げられるが, $S(v)=1/v$ の場合や $S(v)=1/(a+v)^k$ $(a\geq 0,\, k>1)$ の場合には v が大きくなるにつれて $\chi S(v)$ が小さくなるため, 感応性関数 $S(v)$ は走化性の力を抑制する効果をもつ.

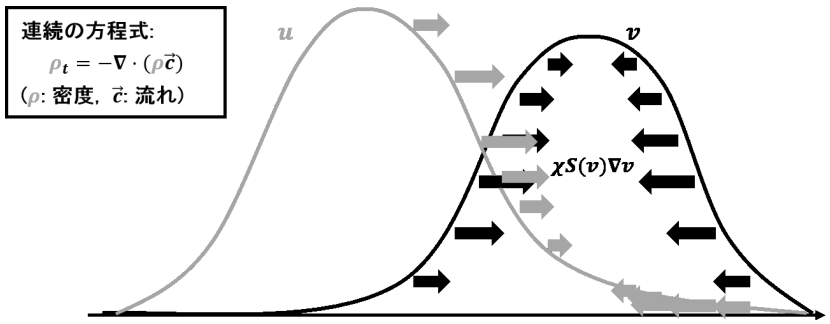


図 1: 走化性項による生物の集中現象

2 先行研究

Keller–Segel 系の研究において, 拡散現象と集中現象のどちらがより強い影響をもつのかを明らかにすることが重要な研究テーマの 1 つである．$S(v)=1$ の場合には, 次の結果が知られている:

- 1 次元の場合: 有界な時間大域的古典解が存在する (Osaki–Yagi [10]).
- 2 次元の場合: ある定数 $C>0$ が存在し, 次が成り立つ ($C=4\pi$ or $C=8\pi$):
  - $\int_\Omega u_0 < C$ のとき, 有界な時間大域的古典解が存在する (Nagai–Senba–Yoshida [9]).
  - $m>C$ のとき, 対応する解が爆発するようなある u_0 で $\int_\Omega u_0 = m$ を満たすものが存在する (Horstmann–Wang [3], Mizoguchi–Winkler [6]).
- 3 次元以上の場合: 任意の $m>0$ に対して, 対応する解が爆発するようなある u_0 で $\int_\Omega u_0 = m$ を満たすものが存在する (Winkler [12]).

このように, $S(v)=1$ の場合は次元に応じて性質が変わり, 特に, 次元が上がるにつれて爆発解が存在しやすくなっている.

感応性関数 S が $S(v)=1/v$ の場合, χ に対する小ささの条件の下で時間大域的古典解の存在が示されている. $S(v)=1/v$ のとき, Fujie [2] が $\chi<\sqrt{2/n}$ という条件の下で時間大域的古典解の存在を示した. 一方, $S(v)=1/(a+v)^k$ $(a\geq 0, k>1)$ の場合, Winkler [11] によりすべての $\chi>0$ に対して有界な時間大域的古典解の存在が主張されていたが, その証明には本質的な間違いがある. そのため, $S(v)=1/(a+v)^k$ のときの時間大域的古典解の存在と有界性を導出する条件はまだ得られていない. さらに, $S(v)=1/v$ のときと $S(v)=1/(a+v)^k$ のときは別々に考えられており, 両者の数学的なつながりは解明されていない. また, $S(v)=1/(a+v)^k$ の場合における問題 (1.1) の解の漸近挙動についてはまだ明らかになっていない. 本研究の目的は次の 2 つの課題を解決することである:

- 問題 (1.1) の時間大域的古典解の存在と有界性を導出する χ の適切な条件を明確にし, $S(v)=1/v$ の場合と $S(v)=1/(a+v)^k$ の場合を数学的につなげる.
- 問題 (1.1) の時間大域的古典解の解の挙動を導く条件を決定する.

3 主定理

感応性関数 S 及び初期値 u_0, v_0 は次の (A1), (A2) を満たすと仮定する:

$$\begin{cases} S\in C^{1+\theta}([0,\infty))\ (\exists\theta>0), \\ \exists a\geq 0\ \exists k\geq 1;\ 0<S(v)\leq \dfrac{1}{(a+v)^k}, \end{cases} \tag{A1}$$

$$0\leq u_0\in C(\overline{\Omega})\setminus\{0\},\quad \begin{cases} 0<v_0\in W^{1,q}(\Omega)\ (\exists q>n) & (a=0), \\ 0\leq v_0\in W^{1.q}(\Omega)\setminus\{0\}\ (\exists q>n) & (a>0). \end{cases} \tag{A2}$$

このとき, [7] における手法を応用して, 有界な時間大域的古典解の存在に関する次の定理を得た.

主定理 1 ([8, Theorem 1.1]). 感応性関数 S, 初期値 u_0, v_0 はそれぞれ (A1), (A2) を満たすとし, $\chi>0$ は

$$\chi<k(a+\eta)^{k-1}\sqrt{\frac{2}{n}} \tag{A3}$$

を満たすと仮定する. ここで, η はある定数 $c_0>0$ を用いて次のように表せる:

$$\eta:=\sup_{\tau>0}\left(\min\left\{e^{-2\tau}\min_{x\in\overline{\Omega}}v_0(x),\ c_0\left\|u_0\right\|_{L^1(\Omega)}(1-e^{-\tau})\right\}\right).$$

このとき, (1.1) の時間大域的古典解が一意的に存在し, 次の意味で有界である:

$$\exists C>0;\ \left\|u(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|v(\cdot,t)\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}\leq C\quad (t\geq 0).$$

注意. 条件 (A3) は大域解の存在と有界性を導出する自然な条件となっている. 実際, $k=1$ のとき, 条件 (A3) は $S(v)=1/v$ のときの条件になる:

$$\chi<\left(k(a+\eta)^{k-1}\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\Bigg|_{k=1}=\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

次に, 問題 (1.1) の解の挙動について扱う. ここで, 主定理 1 における条件 $\chi < k(a+\eta)^{k-1}\sqrt{2/n}$ は, 走化性の力が十分弱く, 問題 (1.1) で $\chi = 0$ とした熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

と問題 (1.1) が十分近いということを意味していることが予想される. そのため, まず始めに問題 (3.1) の漸近挙動について検討する. ここで, 問題 (3.1) の解 u は $\int_\Omega u(\cdot,t) = \int_\Omega u_0$ $(t \geq 0)$ を満たすことに注意する. 実際, u に関する境界条件と Gauss の発散定理から

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u = \int_\Omega \Delta u = \int_\Omega \nabla \cdot \nabla u = 0$$

となるため, $\int_\Omega u(\cdot,t) = \int_\Omega u_0$ となることがわかる. これより, 関数 f に対して $\overline{f} := (1/|\Omega|)\int_\Omega f$ と定めると, 部分積分と等式 $\overline{u} = (1/|\Omega|)\int_\Omega u = (1/|\Omega|)\int_\Omega u_0 = \overline{u_0}$, Poincaré の不等式から

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-\overline{u_0})^2 = 2\int_\Omega (u-\overline{u_0})\Delta u = -2\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq -C_P \int_\Omega (u-\overline{u_0})^2$$

がわかる ($C_P > 0$ はある定数). この微分不等式と Neumann 熱半群の評価により, ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して

$$\|u - \overline{u_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{-\kappa t} \quad (t > 0)$$

が成り立つことが示せる. このように, 問題 (3.1) においては, $\int_\Omega u = \int_\Omega u_0$ が成り立つことから, 関数

$$\mathcal{F}_1(t) := \int_\Omega (u(\cdot,t) - \overline{u_0})^2$$

が問題 (3.1) の Lyapunov 関数として機能し, 問題 (3.1) の解 u が初期値 u_0 の平均に指数関数的に収束することがわかる. ここで, 問題 (1.1) においても, u に関する境界条件と Gauss の発散定理から $\int_\Omega u(\cdot,t) = \int_\Omega u_0$ $(t \geq 0)$ が示せるため, χ が小さいという条件の下で Lyapunov 関数が構成でき, 問題 (1.1) の解の第一成分である u は初期値 u_0 の平均に収束することが期待できる. 実際, Winkler–Yokota [13] の手法を参考にして, 指数関数的に収束するような時間大域的古典解の存在に関する次の定理を得た.

主定理 2 ([1, Theorem 1.1]). 感応性関数 S がある定数 $k > 1$, $a \geq 0$ に対して (A1) を満たしていると仮定すると, 任意の定数 $M > 0$, $v_* > 0$ に対してある定数 $\delta = \delta(k, a, M, v_*) > 0$ が存在し, 次の主張が成り立つ: 初期値 u_0, v_0 が (A2) 及び $\int_\Omega u_0 = M$, $\min_{x\in\overline{\Omega}} v_0(x) = v_*$ を満たしていると仮定すると, 任意の $\chi \in (0, \delta)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が一意的に存在して, ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して

$$\|u(\cdot,t) - \overline{u_0}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t) - \overline{u_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{-\kappa t} \tag{3.2}$$

がすべての $t > 0$ で成り立つ. ここで, $\overline{u_0} := (1/|\Omega|)\int_\Omega u_0$.

ここで, $M \to \infty$ のとき $\delta(k, a, M, v_*) \nearrow k(a+v_*)^{k-1}\sqrt{2/n}$ となることから, $M = \int_\Omega u_0$ が十分大きい場合に関する次の定理を得た.

系 ([1, Theorem 1.3]). 感応性関数 S がある定数 $k > 1$, $a \geq 0$ に対して (A1) を満たすとすると, 任意の定数 $v_* > 0$, $\chi_0 \in \left(0, k(a+v_*)^{k-1}\sqrt{2/n}\right)$ に対してある定数 $M_0 = M_0(k, a, v_*, \chi_0) > 0$ が存在して次の主張が成り立つ: 初期値 u_0, v_0 が (A2) 及び

$$\int_\Omega u_0 = M \geq M_0,$$

$\min_{x\in\overline{\Omega}} v_0(x) = v_*$ を満たすとすると, 任意の $\chi \in (0, \chi_0)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が一意的に存在して, ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して (3.2) が成り立つ.

4 証明の方針

主定理 1 の証明の鍵は, 条件 (A1) における $1/(a+v)^k$ を用いてテスト関数 $\varphi_r(v)$ を

$$\varphi_r(v) = \exp\left\{-r\int_0^v \frac{1}{(a+s)^k}\,ds\right\}$$

とおき, 問題 (1.1) の解 (u, v) とある定数 $\varepsilon \in [0, 1)$, $r, c > 0$ に対して,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p\varphi_r(v) + \varepsilon p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}\varphi_r(v)|\nabla u|^2 \leq c\int_\Omega u^p\varphi_r(v) - r\int_\Omega u^{p+1}\frac{\varphi_r(v)}{(a+v)^k}$$

を導出することである. この不等式より $\int_\Omega u^p$ の評価を導出することができ, Neumann 熱半群の評価から u の L^∞ 評価を得ることができる. ここで, この証明は $k > 1$ の場合だけでなく $k = 1$ でも有効なため, これにより $S(v) = 1/v$ と $S(v) = 1/(a+v)^k$ の場合を数学的につなげることができた.

一方, 主定理 2 の証明の鍵は, 主定理 1 の証明で用いたエネルギー関数 $\varphi_r(v)$ を利用して次のような時間遠方での評価を与えることである:

$$\limsup_{t\to\infty}\int_\Omega u^p(\cdot, t)\varphi_r(v(\cdot, t)) \leq C_1 M$$

($C_1 = C_1(k, a, v_\star) > 0$ はある定数). この評価により,

$$\limsup_{t\to\infty}\chi\left\|u(\cdot, t)S(v(\cdot, t))\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\chi C_2}{M^{k-1}}$$

($C_2 = C_2(k, a, v_\star) > 0$ はある定数) が得られ, χ が十分小さい場合, 熱方程式における Lyapunov 関数 $\mathcal{F}_1$ に問題 (1.1) の解の第二成分である v のエネルギー関数を加えた関数

$$\mathcal{F}(u, v)(t) := \int_\Omega (u(\cdot, t) - \overline{u_0})^2 + D\int_\Omega (v(\cdot, t) - \overline{u_0})^2$$

(D はある定数) が時間遠方で問題 (1.1) の Lyapunov 関数であることを示すことができ, 問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が $(\overline{u_0}, \overline{u_0})$ に収束することが得られる.

参考文献

[1] T. Black, J. Lankeit, and M. Mizukami. Stabilization in the Keller–Segel system with signal-dependent sensitivity. submitted.

[2] K. Fujie. Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity. *J. Math. Anal. Appl.*, 424:675–684, 2015.

[3] D. Horstmann and G. Wang. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions. *Eur. J. Appl. Math.*, 12:159–177, 2001.

[4] E. F. Keller and L. A. Segel. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biol.*, 26:399–415, 1970.

[5] E. F. Keller and L. A. Segel. Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis. *J. Theor. Biol.*, 30:235–248, 1971.

[6] N. Mizoguchi and M. Winkler. Blow-up in the two-dimensional parabolic Keller–Segel system. preprint.

[7] M. Mizukami and T. Yokota. Global existence and asymptotic stability of solutions to a two-species chemotaxis system with any chemical diffusion. *J. Differential Equations*, 261:2650–2669, 2016.

[8] M. Mizukami and T. Yokota. A unified method for boundedness in fully parabolic chemotaxis systems with signal-dependent sensitivity. *Math. Nachr.*, 290:2648–2660, 2017.

[9] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida. Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial. Ekvac.*, 40:411–433, 1997.

[10] K. Osaki and A. Yagi. Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller–Segel equations. *Funkcial. Ekvac.*, 44:441–469, 2001.

[11] M. Winkler. Absence of collapse in a parabolic chemotaxis system with signal-dependent sensitivity. *Math. Nachr.*, 283:1664–1673, 2010.

[12] M. Winkler. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller–Segel system. *J. Math. Pures Appl.*, 100:748–767, 2013.

[13] M. Winkler and T. Yokota. Stabilization in the logarithmic Keller–Segel system. *Nonlinear Anal.*, 170:123–141, 2018.

力学的境界条件下における結晶粒界運動数理モデルの解の表現について

中屋敷 亮太 (NAKAYASHIKI, Ryota)*
千葉大学大学院 理学研究科 基盤理学専攻 数学・情報数理学コース 博士後期課程 3 年

概要

本講演では, 結晶粒界運動の数理モデルによるシステムを考える. このモデルは 2 つの放物型偏微分方程式の連立系で構成されている自由境界値問題である. 特異拡散を含む方程式に対して力学的境界条件を課して数学的観点から考察を行う. 劣微分作用素に支配される発展方程式によるアプローチからシステムの可解性及び, 解の数学的表現について詳しく説明する.

1 導入

$1 < N \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\kappa > 0$ はそれぞれ固定された定数とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ空間を表す有界領域とし, n_Γ は外向き単位法線ベクトルを表す. また $Q := (0,T) \times \Omega$ を時間区間 $(0,T)$ と領域 Ω との直積集合とし, $\Sigma := (0,T) \times \Gamma$ とする.

本稿では $\varepsilon \geq 0$ に対し, **Kobayashi–Warren–Carter 型システム** と呼ばれる以下の偏微分方程式による初期値境界値問題のシステム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ を考える.

$$(\mathrm{S})_\varepsilon: \quad \begin{cases} \partial_t \eta - \Delta\eta + g(\eta) + \alpha'(\eta)|\nabla\theta| = 0 \text{ in } Q, \\ \nabla\eta_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \\ \eta(0,x) = \eta_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(\eta)\partial_t\theta - \mathrm{div}\left(\alpha(\eta)\dfrac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \kappa^2\nabla\theta\right) = 0 \text{ in } Q, \\ \partial_t\theta_\Gamma - \Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma) + \left(\alpha(\eta)\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \kappa^2\nabla\theta\right)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma = 0, \text{ and} \\ \theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma \text{ on } \Sigma, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x),\ x \in \Omega, \text{ and } \theta_\Gamma(0,y) = \theta_{\Gamma,0}(y),\ y \in \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

特に問題 (2) の方程式には**特異拡散**と呼ばれる次の項:

$$\mathrm{div}\left(\alpha(\eta)\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \kappa^2\nabla\theta\right), \tag{3}$$

が含まれており, これによって強い特異性を伴う非線形偏微分方程式であることを表す.

システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ は R. Kobayashi, J. A. Warren, W. C. Carter (cf. [6]) による「多結晶体内の結晶粒界運動を記述する数理モデル」に基づいて構成されたシステムとして知られる. 一般に金属材料は結晶粒と呼ばれる, 原子配列の向きが異なる領域を多数もつ構造を

*e-mail: nakayashiki1108@chiba-u.jp

している. この結晶粒の境界が結晶粒界と呼ばれており, 多結晶体内で原子配列の乱れた領域に対応している. この原子配列の乱れ方は結晶粒界を作る 2 つの結晶粒の向きによって異なることから, Kobayashi, et al. は結晶粒界を数学的に制御することを目的とした上記 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ のような偏微分方程式によるシステムを提唱し, 数値シミュレーション及び解析的な解の構成について議論している [6].

一般に Kobayashi–Warren–Carter 型システムは, **自由エネルギー**と呼ばれる物理量を表す汎関数の勾配流として与えられ, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の場合は以下の汎関数 $\mathscr{F}_\varepsilon$ が対応する.

$$
\begin{aligned}
[\eta,\theta,\theta_\Gamma] \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma) \mapsto \mathscr{F}_\varepsilon(\eta,\theta,\theta_\Gamma) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\eta|^2\,dx + \int_\Omega G(\eta)\,dx \\
&+ \int_\Omega \left(\alpha(\eta)|\nabla\theta| + \frac{\kappa^2}{2}|\nabla\theta|^2\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma)|^2\,d\Gamma, \\
&\text{if } [\eta,\theta,\theta_\Gamma] \in H^1(\Omega)^2 \times H^{1/2}(\Gamma),\ \varepsilon\theta_\Gamma \in H^1(\Gamma), \text{ and } \theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma \text{ on } \Gamma.
\end{aligned}
$$

ここに未知変数 $\eta = \eta(t,x)$ と $\theta = \theta(t,x)$ は, それぞれ多結晶体内の結晶粒の「配向度」と「方位角」を表す相関数である. また未知変数 θ_Γ は方位角 θ の境界熱源として与えられる Σ 上の関数である. $g = g(\eta)$ は Lipschitz 連続な関数とし, $0 \le G \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ は g の原始関数を表す. $0 < \alpha_0 \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ と $0 < \alpha \in C^2(\mathbb{R})$ はそれぞれ速度のモビリティと空間拡散のモビリティであり, $\alpha' = \frac{d}{d\eta}\alpha$ である. さらに, "$_{|\Gamma}$" は Γ 上のトレース (境界値) を表し, $d\Gamma$ は Γ の面積要素を表す. ∇_Γ は Γ 上の勾配を表し, Δ_Γ は Laplace–Beltrami 作用素を表す. $\eta_0, \theta_0 \in L^2(\Omega)$ と $\theta_{\Gamma,0} \in L^2(\Gamma)$ はそれぞれ与えられた初期値である. また自由エネルギーに現れる

$$
[\eta,\theta] \mapsto \int_\Omega \alpha(\eta)|\nabla\theta|\,dx,
$$

は全変動汎関数と呼ばれる特異拡散に対応する non-smooth な汎関数である.

結晶粒界運動を記述する数理モデルに対する解析は様々な状況下で研究の成果が挙げられている (cf. [4,7,8,12]) が, 多くの先行研究では外力を定数とする等の静的な状況に的が絞られている. そこで本研究では θ に関する初期値境界値問題 (2) に対して**力学的境界条件**と呼ばれる境界条件を課したシステムを考察する. この境界条件は未知変数 $\theta_\Gamma : \Sigma \to \mathbb{R}$ をもつ放物型偏微分方程式と, **接合条件** "$\theta_{|\Gamma} = \theta_\Gamma$ on Σ" から構成されており, Ω の外部が時間とともに動的に変化する状況を再現している. 本研究では, 実際の物理現象においてより高度な動的変化にも対応可能な数学理論を確立することを大きな目標としており, 本稿では特にシステム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の可解性について詳しく述べる.

システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ は 3 つの未知変数 $[\eta,\theta,\theta_\Gamma]$ をもつ初期値境界値問題である. 本研究では $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の可解性を議論するために, 自由エネルギー $\mathscr{F}_\varepsilon$ を次のように変形した.

$$
\mathscr{F}_\varepsilon(u) = \Phi_\varepsilon(u) + \int_\Omega G(\eta)\,dx - \frac{1}{2\kappa^2}\int_\Omega (\alpha(\eta))^2\,dx;
$$

with

$$
\begin{aligned}
u = [\eta,\theta,\theta_\Gamma] \ \in\ D(\mathscr{F}_\varepsilon) \mapsto \Phi_\varepsilon(u) &= \Phi_\varepsilon(\eta,\theta,\theta_\Gamma) \\
&:= \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\eta|^2 + \left(\frac{1}{\kappa}\alpha(\eta) + \kappa|\nabla\theta|\right)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma)|^2\,d\Gamma.
\end{aligned}
$$

さらに解を次のような関数の組:

$$\begin{cases} u(t) = [\eta(t), v(t)] = [\eta(t), \theta(t), \theta_\Gamma(t)] \text{ in } \mathscr{H} := L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma) \\ \qquad \text{with } v(t) = [\theta(t), \theta_\Gamma(t)] \in H := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \text{ for any } t \in [0,T], \\ u_0 = [\eta_0, v_0] = [\eta_0, \theta_0, \theta_{\Gamma,0}] \text{ in } \mathscr{H} \text{ with } v_0 = [\theta_0, \theta_{\Gamma,0}] \in H, \end{cases}$$

として捉え, システムを次のような凸関数 Φ_ε の**劣微分作用素に支配された発展方程式による Cauchy 問題**とみなして考察を行った.

$$\begin{cases} A_0(u(t))u'(t) + \partial\Phi_\varepsilon(u(t)) + \mathcal{G}(u(t)) \ni 0 \text{ in } \mathscr{H}, \text{ a.e. } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \text{ in } \mathscr{H}. \end{cases} \tag{4}$$

ここに A_0 は行列の値をとる作用素とし, $\mathcal{G} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ は Lipschitz 作用素としてそれぞれ次のように定義する.

$$u = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in \mathscr{H} \mapsto A_0(u) = A_0(\eta) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathscr{H}; \mathscr{H}),$$

$$u = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in \mathscr{H} \mapsto \mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(\eta) := {}^{\mathrm{t}}[g(\eta) - \kappa^{-2}\alpha'(\eta)\alpha(\eta), 0, 0] \in \mathscr{H}.$$

また $\partial\Phi_\varepsilon$ は次で定義される凸関数 Φ_ε の劣微分作用素を表す.

定義 1 (劣微分作用素の定義)**.** X は Hilbert 空間 とする. X 上の適正下半連続凸 (汎) 関数 ϕ を考える. このとき, **劣微分作用素** (以下, 劣微分) $\partial\phi$ は任意の $z_0 \in X$ に対し, 以下の変分不等式によって定義される.

$$(z_0^*, z - z_0)_X \le \phi(z) - \phi(z_0), \text{ for any } z \in D(\phi).$$

ここに, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_X$ は Hilbert 空間上の内積を表し, $D(\phi)$ は凸関数 ϕ の有効領域を表す.

劣微分は汎関数に対する弱微分のような位置づけであり, 特に本問題のような non-smooth な関数を扱う際に有効であるとされる. また一般に劣微分は, $X^2 := X \times X$ 上の集合値関数で与えられる極大単調作用素であることが知られている (cf [1–3, 5]). このことから非線形発展方程式の一般論 [2, 3] を用いることにより, Cauchy 問題 (4) は次の意味での解の存在が容易に示すことが可能である.

定義 2 (解の定義)**.** 任意の $\varepsilon \ge 0$ に対して, 次の条件 (S1)–(S3) を満たす 3 つ組の関数 $u = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in L^2(0,T; \mathscr{H})$ を Cauchy 問題 (4) の**解**であるという.

(S1) $u = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in W^{1,2}(0,T; \mathscr{H}) \cap L^\infty(0,T; D(\Phi_\varepsilon))$,

$$0 \le \eta \le 1, \ m_0 \le \theta \le M_0, \text{ a.e. in } Q, \text{ and } m_0 \le \theta_\Gamma \le M_0, \text{ a.e. on } \Sigma.$$

(S2) η は初期条件 $\eta(0) = \eta_0$ in $L^2(\Omega)$ と次の変分等式を満たす.

$$\int_\Omega (\partial_t\eta(t) + g(\eta(t)) + \alpha'(\eta)|\nabla\theta(t)|)\varphi\, dx + \int_\Omega \nabla\eta(t) \cdot \nabla\varphi\, dx = 0,$$
$$\text{for any } \varphi \in H^1(\Omega), \text{ a.e. } t \in [0,T].$$

(S3) $[\theta, \theta_\Gamma]$ は初期条件 $[\theta(0), \theta_\Gamma(0)] = [\theta_0, \theta_{\Gamma,0}]$ in H を満たし, 次の変分不等式を満たす.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \alpha_0(\eta(t))\partial_t\theta(t)(\theta(t)-\psi)\,dx + \int_\Omega \nabla\theta(t)\cdot\nabla(\theta(t)-\psi)\,dx \\
&+\int_\Gamma \partial_t\theta_\Gamma(t)(\theta_\Gamma(t)-\psi_\Gamma)\,d\Gamma + \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma(t))\cdot\nabla_\Gamma(\varepsilon(\theta_\Gamma(t)-\psi_\Gamma))\,d\Gamma \\
&+\int_\Omega \alpha(\eta(t))|\nabla\theta(t)|\,dx \le \int_\Omega \alpha(\eta(t))|\nabla\psi|\,dx, \text{ for } t\in[0,T], \\
&\text{for any } [\psi,\psi_\Gamma]\in H^1(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma),\ \varepsilon\theta_\Gamma\in H^1(\Gamma), \text{ and } \theta_{|\Gamma}=\theta_\Gamma \text{ on } \Gamma.
\end{aligned}$$

複雑に見えるシステムも Cauchy 問題として定式化すると上記の意味で解の存在は簡単に示すことが可能になるが, ここでいう「解」が果たしてシステムの厳密な「解」とすることができるかどうかは不明瞭である. そのことを踏まえ, 本研究では上記で定義された Cauchy 問題 (4) の解をシステム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の解として特徴づけることが主目的である. そのためにまず $(\mathrm{S})_\varepsilon$ 自身の可解性を別の方法 (時間離散化法という) で示し, Cauchy 問題の解がシステムの解であるか検証するために「解の数学的表現」を明らかにする. 本稿では以下の主定理を示す.

主定理 システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ は少なくとも一つ解が存在し, 上記の定義を満たす Cauchy 問題 (4) の解はシステムの解である.

2 記号の準備

$d\in\mathbb{N}$ を任意の次元とする. 任意の $a,b\in\mathbb{R}^d$ に対して, $|a|$ は通常の Euclid ノルム, $a\cdot b$ を通常のスカラー積とする. また $a\otimes b$ をテンソル積とする. $\mathcal{L}^d$ を d 次元 Lebesgue 測度, $\mathcal{H}^d$ を d 次元 Hausdorff 測度とする. 滑らかな境界 S に対して, S 上の面積要素を dS と書くことにする.

X を Banach 空間とするとき, $|\cdot|_X$ は X のノルムとし, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ は X と X^* との双対写像を表す. また $\mathcal{I}_X : X\to X$ は X 上の恒等写像を表す. もし X が Hilbert 空間ならば, $(\cdot,\cdot)_X$ は内積と定義する.

次に主定理の証明の鍵となる凸関数の収束, "Mosco 収束" を定義する.

定義 3 (Mosco 収束: cf. [9])**.** X を Hilbert 空間 とする. $\phi : X\to(-\infty,\infty]$ を適正下半連続凸関数, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ を適正下半連続凸関数の列で, $\phi_n : X\to(-\infty,\infty]$, $n\in\mathbb{N}$ とする. このとき, ϕ_n が ϕ に **Mosco 収束** するとは, 次の (M1), (M2) を満たすことをいう.

(M1) Lower-bound: 任意の $\check{z}\in X$ と $\{\check{z}_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ に対して, "$\check{z}_n\to\check{z}$ weakly in X, as $n\to\infty$" を満たすならば, "$\underline{\lim}_{n\to\infty}\phi_n(\check{z}_n)\ge\phi(\check{z})$" が成り立つ.

(M2) Optimality: 任意の $\hat{z}\in D(\phi)$ に対して, 次を満たす列 $\{\hat{z}_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ が存在する:

$$\hat{z}_n\to\hat{z} \text{ in } H \text{ and } \phi_n(\hat{z}_n)\to\phi(\hat{z}), \text{ as } n\to\infty.$$

次に境界に関して, 記号を整理する. 本稿を通して $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とし, $n_\Gamma \in C^\infty(\Omega)^N$ は外向き単位法線ベクトルとする. さらに, 距離 $x \in \mathbb{R}^N \mapsto d_\Gamma(x) := \inf_{y\in\Gamma} |x-y| \in \mathbb{R}$ と定義する. この距離関数は Γ 上の近傍で C^∞-関数を形成する. これらを基に, **Laplace–Beltrami 作用素** "Δ_Γ" を定義する. そのために, Γ 上の勾配を表す "∇_Γ" (surface-gradient) および, Γ 上の発散を表す "div_Γ" (surface-divergence) を次のように定義する (cf. [11]).

$$\begin{cases} \bullet\ \varphi \in C^1(\Gamma) \mapsto \nabla_\Gamma\varphi := \nabla\varphi^{\mathrm{ex}} - (\nabla d_\Gamma \otimes \nabla d_\Gamma)\nabla\varphi^{\mathrm{ex}} \in L^2_{\tan}(\Gamma) \cap C(\Gamma)^N; \\ \bullet\ \omega \in C^1(\Gamma)^N \mapsto \mathrm{div}_\Gamma\,\omega := \mathrm{div}\,\omega^{\mathrm{ex}} - \nabla(\omega^{\mathrm{ex}} \cdot \nabla d_\Gamma) \cdot \nabla d_\Gamma \in C(\Gamma). \end{cases}$$

ここに,

$$L^2_{\tan}(\Gamma) := \{\ \tilde{\omega} \in L^2(\Gamma)^N \ \big|\ \tilde{\omega} \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma\ \}$$

である. ∇_Γ は $H^1(\Gamma)$ から $L^2_{\tan}(\Gamma)$ への線形作用素として拡張することができ, その拡張は Hilbert 空間 $H^1(\Gamma)$ の内積を用いて, 次のように表せる.

$$(\varphi,\psi)_{H^1(\Gamma)} := (\varphi,\psi)_{L^2(\Gamma)} + (\nabla_\Gamma\varphi, \nabla_\Gamma\psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \ \text{ for } \varphi,\psi \in H^1(\Gamma).$$

さらに div_Γ は $L^2(\Gamma)^N$ から $H^{-1}(\Gamma)$ への作用素として拡張可能である. これを踏まえると, $-\Delta_\Gamma = -\mathrm{div}_\Gamma \circ \nabla_\Gamma : H^1(\Gamma) \to H^{-1}(\Gamma)$ は双対写像を用いて, 次のように表せる.

$$\langle -\Delta_\Gamma\varphi, \psi\rangle_{H^1(\Gamma)} = (\nabla_\Gamma\varphi, \nabla_\Gamma\psi)_{L^2(\Gamma)^N}, \ \text{for } [\varphi,\psi] \in H^1(\Gamma)^2.$$

この節の最後に, 本問題を考察する上で重要な定理を紹介する.

定理 1 (boundary operator)**.** $\omega \in H^1(\Omega)^N \mapsto \omega_{|\Gamma} n_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ は次で与えられる有界線形汎関数 $[(\cdot)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma] : L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \to H^{-1}(\Gamma)$ が存在する (cf. [5]).

$$\langle [\omega_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma], z_{|\Gamma}\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int_\Omega \mathrm{div}\,\omega z\,dx + \int_\Omega \omega \cdot \nabla z\,dx,$$
$$\textit{for all } \omega \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega) := \{\ \tilde{\omega} \in L^2(\Omega)^N \ \big|\ \mathrm{div}\,\tilde{\omega} \in L^2(\Omega)\ \}, \textit{ and } z \in H^1(\Omega),$$

3 主定理

まず以下の仮定を設定する. 簡単のため, 関数空間 $\mathscr{H} := L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Gamma)$, $H := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ とする. また, 次の 2 つの関数空間 (Hilbert 空間) を定義する.

- $V_\varepsilon := \left\{\ w = [\xi,\xi_\Gamma] \in H \ \middle|\ \begin{array}{l} \xi \in H^1(\Omega),\ \xi_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma),\ \varepsilon\xi_\Gamma \in H^1(\Gamma), \\ \text{and } \xi_{|\Gamma} = \xi_\Gamma \text{ in } H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right\},$
- $\mathscr{V}_\varepsilon := \left\{\ z = [\zeta, w] \in \mathscr{H} \ \middle|\ \zeta \in H^1(\Omega) \text{ and } w = [\xi,\xi_\Gamma] \in V_\varepsilon\ \right\}, \text{ for any } \varepsilon \geq 0.$

これらを踏まえ本研究における仮定を次のように設定する.

(A1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 連続な関数とし, $g(0)\le 0$ and $g(1)\ge 0$ を満たす.
また $G:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ を g の原始関数とする.

(A2) $\alpha_0:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ は Lipschitz 連続な関数とする. また $\alpha:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ は $\alpha'(0)=0$, $\alpha'\in L^\infty(\mathbb{R})$ を満たす C^2-級の凸関数で, $\alpha\alpha'$ を $\mathbb{R}$ 上の Lipschitz 連続な関数とする.

(A3) 関数 α_0 と α は次を満たす定数 $\delta_\alpha>0$ が存在する:

$$\alpha_0(\sigma)\ge\delta_\alpha \text{ and } \alpha(\sigma)\ge\delta_\alpha, \text{ for any } \sigma\in\mathbb{R}.$$

(A4) $m_0, M_0\in\mathbb{R}$ は固定された定数とする. このとき, 任意の $\varepsilon\ge 0$ に対して初期値 $u_0=[\eta_0,\theta_0,\theta_{\Gamma,0}]$ は以下のクラス $\mathscr{D}_\varepsilon\subset\mathscr{H}$ に属する.

$$\mathscr{D}_\varepsilon:=\left\{\ [\zeta,\xi,\xi_\Gamma]\in\mathscr{V}_\varepsilon\ \middle|\ \begin{array}{l}0\le\zeta\le 1,\ m_0\le\xi\le M_0,\text{ a.e. in }\Omega,\\ \text{and } m_0\le\xi_\Gamma\le M_0,\text{ a.e. on }\Gamma.\end{array}\right\}$$

Remark 1. 上の仮定 (A1)–(A3) を満たす関数の例として次が挙げられる (cf. [6]).

$$g(\sigma)=\sigma-1 \text{ with } G(\sigma)=\frac{1}{2}(\sigma-1)^2, \text{ and } \alpha_0(\sigma)=\alpha(\sigma)=\frac{\sigma^2}{2}+\delta_\alpha, \text{ for any } \sigma\in\mathbb{R}.$$

以上を踏まえて, 本稿の主定理を紹介する.

主定理 1 (可解性および解の数学的表現)**.** すべての仮定の下で, Cauchy 問題 (4) は少なくとも一つの解 $u\in L^2(0,T;\mathscr{H})$ が存在する. 特に α_0 が定数関数であれば, 解は一意的に定まる. さらに, Cauchy 問題 (4) の解は Kobayashi–Warren–Carter システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の解である. すなわち, 特異拡散に対応するベクトル場 $\nu^*\in L^\infty(\Omega)^N$ が存在し, 次の関係を満たす.

$$\nu^*\in\mathrm{Sgn}(\nabla\theta),\ \textit{a.e. in } Q.$$

さらにこのベクトル場を用いると定義 2 の (S1)–(S3) を満たす Cauchy 問題の解 $u(t)=[\eta(t),\theta(t),\theta_\Gamma(t)]$ は任意の $t\in(0,T)$ に対して以下の偏微分方程式及び接合条件, 初期条件を満たす.

$$\begin{cases}\partial_t\eta(t)-\Delta_N\eta(t)+g(\eta(t))+\alpha(\eta(t))|\nabla\theta(t)|=0 \ \text{ in } \ L^2(\Omega),\\ \alpha_0(\eta(t))\partial_t\theta(t)-\mathrm{div}\big(\alpha(\eta(t))\nu^*(t)+\kappa^2\nabla\theta(t)\big)=0 \ \text{ in } \ L^2(\Omega),\\ \theta_{|\Gamma}(t)=\theta_\Gamma(t),\ \text{a.e. on } \ \Gamma,\\ \partial_t\theta_\Gamma(t)-\Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma(t))+[(\alpha(\eta)\nu^*+\kappa^2\nabla\theta)_{|\Gamma}\cdot n_\Gamma](t)=0 \ \text{ on } \ L^2(\Gamma),\\ \eta(0,\cdot)=\eta_0,\ \theta(0,\cdot)=\theta_0 \ \text{ in } \ \Omega, \text{ and } \ \theta_\Gamma(0,\cdot)=\theta_{\Gamma,0} \ \text{ on } \ \Gamma.\end{cases}$$

システム $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の可解性を証明するためには「時間離散化法」と呼ばれる近似方法を用いる. ここではこれに関する証明は割愛し, 「数学的表現」についての証明を見ていくことにする.

4　証明のポイント

解の数学的表現を示すためには次の**劣微分作用素の表現定理**と呼ばれる重要補題を示す必要がある. 主張は以下の通りである.

重要補題 1 (劣微分の表現定理)**.** 任意の $\varepsilon \geq 0$ に対して, 次の二つは同値.

(Key 1) $u = [\eta, v] = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in D(\partial_v \Phi_\varepsilon)$ *and* $v^* = [\theta^*, \theta_\Gamma^*] \in \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, v) = \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, \theta, \theta_\Gamma)$ *in* H, *with* $v = [\theta, \theta_\Gamma] \in V_\varepsilon$.

(Key 2) $u = [\eta, v] = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in \mathscr{V}_\varepsilon$ に対し, 以下を満たす $\nu^* \in L^\infty(\Omega)^N$ が存在する.

$$\begin{cases} \bullet\ \nu^* \in \mathrm{Sgn}(\nabla\theta),\ a.e.\ in\ \Omega, \\ \bullet\ \alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega), \\ \bullet\ -\Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma) + \left[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2\nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\right] \in L^2(\Gamma), \end{cases} \tag{5}$$

and

$$\begin{cases} \bullet\ \theta^* = -\mathrm{div}\big(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2\nabla\theta\big)\ in\ L^2(\Omega), \\ \bullet\ \theta_\Gamma^* = -\Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma) + \left[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2\nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\right]\ in\ L^2(\Gamma). \end{cases} \tag{6}$$

劣微分の表現の 1 つの例として**符号関数 (Sgn 関数)** が挙げられる. 主定理でも登場した符号関数は集合値関数 $\mathrm{Sgn} : \mathbb{R}^N \to 2^{\mathbb{R}^N}$ として次のように定義される.

$$\omega \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathrm{Sgn}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{\omega}{|\omega|}, & \text{if } \omega \neq 0, \\ \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| < 1\}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

関数 Sgn は Euclid ノルム $|\cdot| : \omega \in \mathbb{R}^N \mapsto |\omega| := \sqrt{\omega \cdot \omega} \in [0, \infty)$ の劣微分と一致する. すなわち, $\mathrm{Sgn} = \partial|\cdot|$ である.

以下では, 重要補題 1 の証明について簡単に説明する.

Proof. 任意の $\varepsilon \geq 0$ に対して, 次のような集合値写像 $\mathcal{A}_\varepsilon : D(\mathcal{A}_\varepsilon) \subset \mathscr{H} \to 2^H$ を考える.

$$D(\mathcal{A}_\varepsilon) := \left\{ u = [\eta, v] = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in \mathscr{V}_\varepsilon \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists } \nu^* \in L^\infty(\Omega)^N, \\ \text{such that (5) holds} \end{array} \right\}, \tag{7}$$

and

$$\begin{aligned} u = [\eta, v] = [\eta, \theta, \theta_\Gamma] \in D(\mathcal{A}_\varepsilon) \subset \mathscr{H} &\mapsto \mathcal{A}_\varepsilon u = \mathcal{A}_\varepsilon[\eta, v] = \mathcal{A}_\varepsilon[\eta, \theta, \theta_\Gamma] \\ &:= \left\{ v^* = [\theta^*, \theta_\Gamma^*] \in H \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(6) holds, for some } \nu^* \in L^\infty(\Omega)^N, \\ \text{satisfying (5)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

このとき 重要補題の主張は任意の $\varepsilon \geq 0$ と $\eta \in H^1(\Omega)$ に対して以下のように言い換えることができることに注意する:

$$\partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, \cdot) = \mathcal{A}_\varepsilon(\eta, \cdot) \text{ in } H^2. \tag{9}$$

集合が一致することを示せばよいので, 次の 2 つの Claim によって上の等式は示される.

Claim 1. $\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot) \subset \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta,\cdot)$ *in* H^2, *for any* $\eta \in H^1(\Omega)$.

$\eta \in H^1(\Omega)$ は任意として, $v = [\theta, \theta_\Gamma] \in D(\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot))$ と $v^* = [\theta^*, \theta^*_\Gamma] \in \mathcal{A}_\varepsilon(\eta, v) = \mathcal{A}_\varepsilon(\eta, \theta, \theta_\Gamma)$ in H とする. このとき, (5)–(8) より次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&(v^*, w - v)_H = (\theta^*, \xi - \theta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^*_\Gamma, \xi_\Gamma - \theta_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} \\
&= \int_\Omega -\mathrm{div}(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta)(\xi - \theta)\, dx \\
&\qquad + \int_\Gamma \Big(-\Delta(\varepsilon^2 \theta_\Gamma) + \big[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\big] \Big)(\xi_\Gamma - \theta_\Gamma)\, d\Gamma \\
&= \int_\Omega (\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta) \cdot \nabla(\xi - \theta)\, dx - \Big\langle \big[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\big], (\xi - \theta)_{|\Gamma} \Big\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\
&\qquad + \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma) \cdot \nabla_\Gamma(\varepsilon(\xi_\Gamma - \theta_\Gamma))\, d\Gamma + \Big\langle \big[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2 \nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\big], \xi_\Gamma - \theta_\Gamma \Big\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\
&\le \int_\Omega \alpha(\eta)(|\nabla\xi| - |\nabla\theta|)\, dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_\Omega (|\nabla\xi|^2 - |\nabla\theta|^2)\, dx \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int_\Gamma (|\nabla_\Gamma(\varepsilon\xi_\Gamma)|^2 - |\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma)|^2)\, d\Gamma \\
&= \Phi_\varepsilon(\eta, w) - \Phi_\varepsilon(\eta, v), \text{ for all } \eta \in H^1(\Omega), \text{ and } w = [\xi, \xi_\Gamma] \in V_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

ここに定理 1, 劣微分の定義を用いた. 再び劣微分の定義から以下が成り立つ.

$$
v = [\theta, \theta_\Gamma] \in D(\partial_v \Phi_\varepsilon(\eta,\cdot)) \text{ and } v^* = [\theta^*, \theta^*_\Gamma] \in \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, v) = \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, \theta, \theta_\Gamma) \text{ in } H.
$$

よって, $\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot) \subset \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta,\cdot)$ in H^2, となりさらにこのことから $\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot)$ が単調作用素であることがわかる.

Claim 2. $\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot)$ **の極大性**.

任意の H 上の元を $w = [\xi, \xi_\Gamma] \in H$ とする. Claim 1 から $\mathcal{A}_\varepsilon$ の単調性を示すことができたので, Minty's の定理を用いて極大性を示す. すなわち $H = (\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot) + \mathcal{I}_H)H$ (レゾルベントが全射であること) を示すが, 明らかに $H \subset (\mathcal{A}_\varepsilon(\eta,\cdot) + \mathcal{I}_H)H$ を示せば十分であることがわかる. そのためには凸関数 Φ_ε にある全変動汎関数を次の関数の列 $\{f_\delta\}_{\delta>0} \subset C^1(\mathbb{R})$ で近似する.

$$
\omega \in \mathbb{R}^N \mapsto f_\delta(\omega) := \sqrt{\delta^2 + |\omega|^2}, \text{ for any } \delta > 0. \tag{10}
$$

この関数を全変動汎関数と置き換えた凸関数 Φ^δ_ε を考え, 近似問題を考える. ここでは詳細を割愛させて頂くが, この近似した凸関数の劣微分作用素の表現定理を前もって示しておくことで (cf. [10, Key-Lemma 2]), 再び Minty の定理を用いれば関数列 $\{v^\delta = [\theta^\delta, \theta^\delta_\Gamma] \,|\, 0 < \delta \le 1\} \subset V_\varepsilon$ に関して次が成り立つ:

$$
w - v^\delta = \partial_v \Phi^\delta_\varepsilon(\eta, v^\delta) \text{ in } H, \text{ for any } 0 < \delta \le 1. \tag{11}
$$

(11) はすなわち次の変分不等式を満たすことを表している.

$$\int_\Omega (\alpha(\eta)\nabla f_\delta(\nabla\theta^\delta)+\kappa^2\nabla\theta^\delta)\cdot\nabla\psi\,dx+\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma^\delta)\cdot\nabla_\Gamma(\varepsilon\psi_\Gamma)\,d\Gamma$$
$$=\int_\Omega(\xi-\theta^\delta)\psi\,dx+\int_\Gamma(\xi_\Gamma-\theta_\Gamma^\delta)\psi_\Gamma\,d\Gamma,\ \text{for all } [\psi,\psi_\Gamma]\in V_\varepsilon \text{ and } 0<\delta\le 1. \tag{12}$$

ここで (12) において, $[\psi,\psi_\Gamma]=[\theta^\delta,\theta_\Gamma^\delta]\in V_\varepsilon$ を代入し, 仮定 (A2) と Young の不等式を用いることで以下が成り立つ:

$$\frac{1}{2}|v^\delta|_H^2+\kappa^2|\nabla\theta^\delta|^2_{L^2(\Omega)^N}+|\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma^\delta)|^2_{L^2(\Gamma)^N}\le\frac{1}{2}|w|_H^2+\delta\int_\Omega\alpha(\eta)\,dx$$
$$\le\frac{1}{2}|w|_H^2+(\mathcal{L}^N(\Omega)^{\frac{1}{2}}|\eta|_{L^2(\Omega)}+\delta_\alpha\mathcal{L}^N(\Omega)),\ \text{for any } 0<\delta\le 1. \tag{13}$$

この不等式 (13) から $\{v^\delta\,|\,0<\delta\le 1\}\subset V_\varepsilon$ 有界数列となる. さらに, ∇f_δ を計算すると以下のようになる:

$$|\nabla f_\delta(\nabla\theta_\delta)|=\left|\frac{\nabla\theta^\delta}{\sqrt{\delta^2+|\nabla\theta^\delta|^2}}\right|\le 1,\ \text{a.e. in } \Omega, \text{ for any } 0<\delta\le 1.$$

したがって, (A2) と上記二つの評価から, 関数列 $\{v_\delta\}_\delta>0$ は弱点列コンパクトとなり, $\delta_n\downarrow 0$ as $n\to\infty$ を満たす部分列 $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,1]$ と極限関数 $v=[\theta,\theta_\Gamma]\in V_\varepsilon$ が存在する. さらに Alaoglue の定理からベクトル場 $\nu^*\in L^\infty(\Omega)^N$ が存在し, 以下が成り立つ:

$$v_n=[\theta_n,\theta_{\Gamma,n}]:=v^{\delta_n}=[\theta^{\delta_n},\theta_\Gamma^{\delta_n}]\to v=[\theta,\theta_\Gamma]\text{ in } H, \text{ weakly in } V_\varepsilon, \text{ as } n\to\infty, \tag{14}$$

and

$$\nabla f_{\delta_n}(\nabla\theta_n)\to\nu^*\ \text{weakly-}*\ \text{in } L^\infty(\Omega)^N, \text{ as } n\to\infty. \tag{15}$$

さて (14) と (15) からテスト関数 $\psi_0\in H_0^1(\Omega)$ を (12) に代入すると, 次のようなる:

$$\int_\Omega(\alpha(\eta)\nu^*+\kappa^2\nabla\theta)\cdot\nabla\psi_0\,dx=(\xi-\theta,\psi_0)_{L^2(\Omega)}.$$

これはすなわち以下を表している:

$$-\mathrm{div}(\alpha(\eta)\nu^*+\kappa^2\nabla\theta)=\xi-\theta\in L^2(\Omega)\text{ in }\mathcal{D}'(\Omega). \tag{16}$$

今のことをもとに, 定理 1 および (14)–(16) を用いると

$$(\xi_\Gamma-\theta_\Gamma,\psi_\Gamma)_{L^2(\Gamma)}=\int_\Omega(\alpha(\eta)\nu^*+\kappa^2\nabla\theta)\cdot\nabla\psi\,dx-(\xi-\theta,\psi)_{L^2(\Omega)}$$
$$+\int_\Gamma\nabla_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma)\cdot\nabla_\Gamma(\varepsilon\psi_\Gamma)\,d\Gamma$$
$$=\left\langle\left[(\alpha(\eta)\nu^*+\kappa^2\nabla\theta)_{|\Gamma}\cdot n_\Gamma\right],\psi_{|\Gamma}\right\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$
$$+\left\langle-\Delta_\Gamma(\varepsilon\theta_\Gamma),\varepsilon\psi_\Gamma\right\rangle_{H^1(\Gamma)},\ \text{for any } [\psi,\psi_\Gamma]\in V_\varepsilon.$$

が成り立ち, 劣微分の表現定理が以下のように導ける:

$$-\Delta_\Gamma(\varepsilon^2\theta_\Gamma) + \left[(\alpha(\eta)\nu^* + \kappa^2\nabla\theta)_{|\Gamma} \cdot n_\Gamma\right] = \xi_\Gamma - \theta_\Gamma \in L^2(\Gamma) \text{ in } H^{-1}(\Gamma). \tag{17}$$

最後に, Mosco 収束 [10, Key-Lemma 4], (11) と (14) を用いると以下が成り立つ:

$$w - v \in \partial_v \Phi_\varepsilon(\eta, v) \text{ in } H, \text{ and } \Phi_\varepsilon^{\delta_n}(\eta, v_n) \to \Phi_\varepsilon(\eta, v), \text{ as } n \to \infty. \tag{18}$$

さらに凸関数の下半連続性が成り立つことから (18) により

$$\theta_n \to \theta \text{ in } H^1(\Omega) \ (\nabla\theta_n \to \nabla\theta \text{ in } L^2(\Omega)^N), \text{ as } n \to \infty. \tag{19}$$

が成り立つ. (15), (19) 及び [3, Proposition 2.16] を用いれば

$$\nu^* \in \mathrm{Sgn}(\nabla\theta), \text{ a.e. in } \Omega.$$

となり, Claim 2 が示されたことになるため, 重要補題 1 の証明が完了する. □

参考文献

[1] Attouch, H. *Variational Convergence for Functions and Operators.* Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[2] Barbu, V. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2010.

[3] Brézis, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[4] Ito, A.; Kenmochi, N.; Yamazaki, N. A phase-field model of grain boundary motion. *Appl. Math.*, **53**(5): 433–454, 2008.

[5] Kenmochi, N. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.* http://ci.nii.ac.jp/naid/110004715232, **30**: 1–87, 1981.

[6] Kobayashi, R.; Warren, J. A.; Carter, W. C. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, **140**(1-2): 141–150, 2000.

[7] Moll, S.; Shirakawa, K. Existence of solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **51**(3-4): 621–656, 2014.

[8] Moll, S.; Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy dissipative solutions to the Kobayashi–Warren–Carter system. *Nonlinearity*, **30**(7): 2752–2784, 2017.

[9] Mosco, U. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, **3**: 510–585, 1969.

[10] Nakayashiki, R. Quasilinear type Kobayashi–Warren–Carter systems including dynamic boundary conditions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **27**(1): 401–435, 2018.

[11] Savaré, G.; Visintin, A. Variational convergence of nonlinear diffusion equations: applications to concentrated capacity problems with change of phase. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **8**(1): 49–89, 1997.

[12] Shirakawa, K.; Watanabe, H. Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **7**(1): 139–159, 2014.

一般化複素連分数展開に関する等角反復関数系の極限集合の次元と測度

京都大学大学院 人間・環境学研究科 共生人間専攻
伊縫 寛治 (Kanji INUI)

概要

Cantor set や Sierpiński gasket などを含む多くのフラクタルは有限個の縮小写像による反復関数系 (以後 IFS と記す) の極限集合として定義され, よく研究されてきた. しかし近年, Mauldin, Urbański の 2 人により可算無限個の縮小写像による等角 IFS(以後 CIFS と記す) の極限集合に関する研究が始まった. 特に, 彼らは, 極限集合の Hausdorff 次元を h とするとき, 極限集合の h 次元 Hausdorff 測度が 0 であるが, h 次元 packing 測度が正であるような性質を持つ無限反復関数系を構成した. この性質は有限個の縮小写像による CIFS では起こりえない性質である. 本稿では, 上記の CIFS を基に複素平面上の部分集合によってパラメーター化された可算無限個の縮小写像による CIFS の族を導入し, その CIFS の族に対応する Hausdorff 次元関数とその族の CIFS それぞれに対応する極限集合の Hausdorff 測度や packing 測度に関する結果を紹介する. またこの研究は角大輝教授 (京都大学人間・環境学研究科) との岡田熙氏 (大阪大学理学研究科) との共同研究である.

1 導入

現代数学において, 反復関数系は様々な状況で現れる. 反復関数系を用いる例として最も有名なものの一つは, 反復関数系によって構成されるフラクタルの研究である. この研究は 1970 年代から始まり, 様々な方向に発展した. 以後, 縮小写像による反復関数系 ((contractive) iterated function system) を IFS と記すことにする. ここで, 有限個の相似写像からなる IFS は, 今までよく研究されていることに注意する (例えば, [1], [2], [3] などを参照).

しかし, 1990 年頃から, 可算無限個の写像からなる IFS(以後, 無限 IFS と記す) により構成されるフラクタルの研究が始まった (例えば, [5], [6], [7] などを参照). 特に, Mauldin and Urbański の 2 人は可算無限個の等角写像からなる IFS の極限集合 (フラクタル) に関する研究を行った. 以後, 等角写像からなる IFS(conformal IFS) を CIFS と記すことにする (Definition 2.4 参照). 彼らは CIFS により構成された極限集合の Hausdorff 次元を与える公式や Hausdorff 測度や packing 測度を与える条件に関する一般論を発見している. さらに, 彼らは無限 CIFS により構成された極限集合の興味深い例を与えている.

加えて, CIFS の族に関する研究も近年見られるようになった. Roy and Urbański の二人は CIFS の族に対応する Hausdorff 次元関数の研究を行った ([8] を参照). 彼らは, “λ-topology” という CIFS の集合上に定義できる位相によって, Hausdorff 次元関数が連続であることを示し, 加えて CIFS の

族が良い性質を持てば, Hausdorff 次元関数が劣調和かつ実解析的であることも示した.

これまで見てきたように, CIFS や CIFS の族に関する一般論はよく調べられている. しかし, CIFS の族に関する一般論を適用できる例がまだ十分に見つかっていないのではないかと考えた ([4], [9], [10]). そこで本稿では, 無限 CIFS の族に関する例を導入し, その族に対応する極限集合の Hausdorff 次元関数やその族の各 CIFS に対応する極限集合の Hausdorff 測度や packing 測度について考える. この研究は角大輝教授 (京都大学人間・環境学研究科) との岡田熙氏 (大阪大学理学研究科) との共同研究である.

2 一般的な設定

この章では, 後の章で述べる定理を説明するために必要な定義や命題を述べる.

2.1 等角反復関数系 (CIFS) と極限集合

この節では, CIFS やそれに対応する極限集合を定義し, その性質を述べる.

Definition 2.1 (可算無限個の元による記号の空間)**.** I を要素を 2 つ以上持つ高々可算個の集合とし, この I を alphabet と呼ぶ. I に discrete topology を入れ, $I^\infty := I^{\mathbb{N}}$ に product topology を入れる. 以後, I^∞ の元 w を $w_1w_2\cdots w_n\cdots$ と記す.

このとき, 次が成り立つ.

Proposition 2.2. I を alphabet とする. このとき, I^∞ は Polish 空間である. さらに, もし $|I| < \infty$ ならば, I^∞ は compact 空間である.

また, $I^* := \bigcup_{n=1}^\infty I^n$ と定める. 以後, $n \in \mathbb{N}$ に対し, I^n の元 w を $w_1w_2\cdots w_n$ と記す. さらに, $w \in I^* \cup I^\infty$ に対し, $|w| := n$ と定める. ここで, n は $w \in I^n$ を満たすただ一つの $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ である. $w \in I^* \cup I^\infty$ と $n < |w|$ なる $n \in \mathbb{N}$ に対し, $w|_n := w_1w_2\cdots w_n$ と定める. 以後, I は固定して考える.

この I に対して, 等角反復関数系 (CIFS) を以下のように定義する.

Definition 2.3. W を $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 上の開集合とし, $f\colon W \to f(W)$ を微分同相写像とする（ただし, $f(W)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の開集合とする）. このとき, 全ての $x \in W$ と $v, u \in \mathbb{R}^d$ に対して, 微分係数 $f'(x)$ が $|f'(x)v - f'(x)u| = |f'(x)| \cdot |v - u|$ を満たすとき, f は W 上等角写像であるという. ここで, f の $x \in X$ における微分 $f'(x)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の通常のノルムに関する $f'(x)$ の作用素ノルムを $|f'(x)|$ と表す.

Definition 2.4. X を $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 上の空でない連結コンパクト集合とし, I を Definition 2.1 のものとする. このとき, 以下の条件を満たす $S := \{\phi_i\colon X \to X \mid i \in I\}$ を (I を添え字集合とする X 上の) 等角反復関数系 (以後, CIFS と記す) という.

1. 単射性: 全ての $i \in I$ に対し, $\phi_i\colon X \to X$ は単射である.

2. 一様縮小性: ある $c \in (0,1)$ が存在して, 全ての $i \in I$ と $x, y \in X$ に対し, 次が成り立つ.

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq c|x - y|.$$

3. 等角性: ある $\epsilon > 0$ と $X \subset V$ なる連結開集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ が存在して, 全ての $i \in I$ に対し, ϕ_i は V 上の $C^{1+\epsilon}$ 級微分同相写像に拡張されて, かつ ϕ_i は V 上等角である.
4. 開集合条件: 全ての $i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対し, $\phi_i(\mathrm{Int}(X)) \subset \mathrm{Int}(X)$ かつ

$$\phi_i(\mathrm{Int}(X)) \cap \phi_j(\mathrm{Int}(X)) = \emptyset$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{Int}(X)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の通常の位相における X の内部を表す.
5. Bounded Distortion Property(BDP): ある $K \geq 1$ が存在して, 全ての $x, y \in V$ と $w \in I^*$ に対し, 次が成り立つ.

$$|\phi'_w(x)| \leq K \cdot |\phi'_w(y)|.$$

ここで, $n \in \mathbb{N}$ と $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in I^n$ に対し, $\phi_w := \phi_{w_1} \circ \phi_{w_2} \circ \cdots \circ \phi_{w_n}$ と定め, さらに ϕ_w の $x \in X$ における微分 $\phi'_w(x)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の通常のノルムに関する $\phi'_w(x)$ の作用素ノルムを $|\phi'_w(x)|$ と表す.
6. Cone Condition: 全ての $x \in \partial X$ に対し, 頂点 x, 方向 u, 長さ $|u|$, 角度 α である open cone $\mathrm{Con}(x, u, \alpha)$ が存在して, $\mathrm{Con}(x, u, \alpha) \subset \mathrm{Int}(X)$ が成り立つ.

Definition 2.4 における一様縮小性から次の命題を得る.

Proposition 2.5. S を CIFS とする. このとき, 全ての $w \in I^\infty$ に対し, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_{w|_n}(X)$ は一点集合である.

この一点集合の元を $x_w \in X$ と記すとき, 写像 $\pi\colon I^\infty \to X$ を $\pi(w) := x_w$ $(w \in I^\infty)$ と定める. この写像 π を coding map と呼ぶ. これより, CIFS に対し, 極限集合が定まる.

Definition 2.6. S を CIFS とする. このとき, S に対応する極限集合 J_S が以下のように定まる.

$$J_S := \pi(I^\infty) = \bigcup_{w \in I^\infty} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_{w|_n}(X).$$

また, CIFS S に対し, J_S の Hausdorff 次元を h_S と記す. この極限集合に対し, 以下の命題が成り立つ.

Proposition 2.7. J_S を S に対応する極限集合とする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $J_S = \bigcup_{i \in I} \phi_i(J_S)$ である.
2. $J_S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w \in I^n} \phi_{w|_n}(X)$ である.

特に, J_S は Borel 可測集合である.

Definition 2.8. $|I| = \infty$ とし, S を CIFS とする. $S = \{\phi_i\}_{i \in I}$ と表す. $I' \subset I$, $|I'| = \infty$ なる, 添え字集合 I' とする X 上の点の族 $\{z_i\}_{i \in I'}$ と $z \in X$ が, 全ての $\epsilon > 0$ に対し, ある $|F'| < \infty$ な

る $F' \subset I'$ が存在して, もし $i \in I' \setminus F'$ ならば, $|z_i - z| < \epsilon$ が成り立つとき, $\lim_{i \in I'} z_i = z$ と記す. さらに, $X_S(\infty) \subset X$ を以下のように定める.

$$X_S(\infty) := \left\{ \lim_{i \in I'} z_i \in X \mid {}^{\exists} I' \subset I, {}^{\exists} \{z_i\}_{i \in I'} \text{ s.t. } |I'| = \infty, z_i \in \phi_i(X) \ \ (i \in I') \right\}.$$

2.2 Pressure function

この節では, CIFS S に対し, S の pressure function P_S を定義し, その性質を述べる.

Definition 2.9 (Pressure function)**.** S を CIFS とする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\psi_S^n \colon [0, \infty) \to [0, \infty]$ を

$$\psi_S^n(t) := \sum_{w \in I^n} \left(\sup_{z \in X} |\phi_w'(z)| \right)^t \quad (t \geq 0).$$

と定める. さらに, $P_S \colon [0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ を

$$P_S(t) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \psi_S^n(t) \in (-\infty, \infty].$$

と定める. この P_S を S の pressure function と呼ぶ. また, $\theta_S := \inf\{t \geq 0 | \ \psi_S^1(t) < \infty\}$ と定める.

この P_S が well-defined であることは次の命題による.

Proposition 2.10. S を CIFS とする. このとき, 全ての $m, n \in \mathbb{N}$ と $t \geq 0$ に対し, $\psi_S^{m+n}(t) \leq \psi_S^m(t) \psi_S^n(t)$ が成り立つ. 特に, 全ての $t \geq 0$ に対し, 実数列 $\{\log \psi_S^n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は劣加法的である.

pressure function の性質は以下の通りである.

Proposition 2.11. S を $X (\subset \mathbb{R}^d)$ 上の CIFS とし, P_S を S の pressure function とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $P_S(0) = \log |I|$ である.
2. $t_0 \geq 0$ が $P(t_0) < \infty$ を満たすならば, 全ての $t \geq t_0$ に対し, $P(t) < \infty$ である.
3. $P_S(d) \leq 0$ である.
4. P $\{t \geq 0 \mid P(t) < \infty\}$ 上狭義単調減少かつ凸である.
5. $\lim_{t \to \infty} P(t) = -\infty$ である.

この pressure function を用いて, “良い性質”を持つ CIFS が以下のように定まる.

Definition 2.12 (Regular, Strongly regular, Hereditarily regular)**.** S を CIFS とする. $P_S(t) = 0$ なる $t \geq 0$ が存在するとき, S を regular CIFS という. さらに, $P_S(t) \in (0, \infty)$ なる $t \geq 0$ が存在するとき, S を strongly regular CIFS という. 加えて, 全ての $|I \setminus I'| < \infty$ なる $I' \subset I$ に対し, $S' := \{\phi_i \colon X \to X \mid i \in I'\}$ が regular CIFS であるとき, S を hereditarily regular CIFS という.

ここで, もし S が hereditarily regular CIFS ならば, S は strongly regular CIFS であることと, もし S が strongly regular CIFS ならば, S は regular CIFS であることに注意する.

2.3 CIFS の族

この節では, CIFS の族について述べる. $\mathbb{C}$ 上の空でない連結コンパクト集合 X と可算無限個の I に対し, CIFS(X, I) を I を添え字集合とする X 上の CIFS の集合と定める. 各 $S \in \mathrm{CIFS}(X,I)$ に対し, $\pi_S \colon I^\infty \to X$ を S の coding map と定める.

$\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$, $S \in \mathrm{CIFS}(X,I)$ とする. $S^n = \{\phi_i^n\}_{i\in I}$, $S = \{\phi_i\}_{i\in I}$ と表す. このとき, 本稿において, $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ と $S \in \mathrm{CIFS}(X,I)$ が以下の条件を満たすとき $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) := S$ と定める.

(L1) 全ての $i \in I$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |\phi_i^n(x) - \phi_i(x)| + \sup_{x\in X} |(\phi_i^n)'(x) - (\phi_i)'(x)| \right) = 0$ が成り立つ.

(L2) ある $C > 0$ と $M \in \mathbb{N}$ と 有限集合 $F \subset I$ が存在して, 全ての $i \in I \setminus F$ と $n \geq M$ に対し, $\left| \log \left(\sup_{x\in X} |(\phi_i^n)'(x)| \right) - \log \left(\sup_{x\in X} |\phi_i'(x)| \right) \right| \leq C$ が成り立つ.

$\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ が全ての $S \in \mathrm{CIFS}(X,I)$ に対し, 条件 (L1), (L2) を満たさないとき, $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \emptyset$ と定める. $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ が $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathrm{CIFS}(X, I)$ であるとき, $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ は λ -converging であるという. この λ により, CIFS(X,I) に位相が定まる ([8]). このとき以下の命題が成立する.

Proposition 2.13 ([8] Lemma 3.3)**.** Z を位相空間とし, CIFS(X, I) に λ-topology が入っているとする. さらに, $f \colon \mathrm{CIFS}(X, I) \to Z$ とする. このとき, 次は同値である.

1. $f \colon \mathrm{CIFS}(X, I) \to Z$ は連続である.
2. もし $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ は λ -converging ならば, $\lim_{n\to\infty} f(S^{\mu_n}) = f(\lambda(\{S^{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}))$ である.

さらに, 複素平面上の部分集合によってパラメーター付けされた CIFS の族について述べる.

Definition 2.14. Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合とし, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in \mathrm{CIFS}(X, I)$ なる CIFS の族とする. また, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu = \{\phi_i^\mu\}_{i\in I}$ と表す. このとき, 全ての $x \in X$ と $i \in I$ に対し, 写像 $\mu \mapsto \phi_i^\mu(x)$ が Λ 上正則であるとき, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ は plane-analytic であるという. 加えて, plane-analytic な CIFS の族 $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ に対し, ある $\mu_0 \in \Lambda$ が存在して, 以下の条件を満たすとき, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ regularly plane-analytic という.

1. S^{μ_0} は strongly regular である.
2. ある $\eta \in (0,1)$ が存在して, 全ての $w \in I^\infty$ と $\mu \in \Lambda$ に対し, $|\kappa_w^{\mu_0}(\mu) - 1| \leq \eta$ を満たす.
   ここで, 各 $\mu_0 \in \Lambda$ と $w = w_1 w_2 \cdots \in I^\infty$ に対し,

$$\pi_\mu := \pi_{S_\mu}, \kappa_w^{\mu_0}(\mu) := \frac{(\phi_{w_1}^\mu)'(\pi_\mu(\sigma w))}{(\phi_{w_1}^{\mu_0})'(\pi_{\mu_0}(\sigma w))} \quad (\mu \in \Lambda) \text{ と定める.}$$

3　主要な結果

この章では, 主定理の証明に必要な定理を記す.

3.1　Mauldin and Urbański (1996) の結果

Theorem 3.1 ([5] Theorem 3.15)**.** S を CIFS とする. このとき, 次が成り立つ.

$$h_S = \inf\{t \geq 0 \mid P_S(t) < 0\} \geq \theta_S.$$

特に, $P_S(t) = 0$ なる $t \geq 0$ が存在するならば, t は P_S の唯一の零点であって, $t = h_S$ である.

Proposition 3.2 ([5] Lemma 3.13)**.** S を CIFS とする. このとき, S が regular CIFS ならば, 次の性質を満たす X 上の Borel 確率測度 m_S がただ一つ存在する.

1. $m_S(J_S) = 1$ が成り立つ.
2. 全ての X 上の Borel 集合 A と $i \in I$ に対し, $m_S(\phi_i(A)) = \int_A |\phi_i'(x)|^{h_S} m_S(\mathrm{d}x)$ が成り立つ.
3. 全ての $i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対し, $m_S(\phi_i(X) \cap \phi_j(X)) = 0$ が成り立つ.

この確率測度 m_S を h_S-conformal measure と呼ぶ.

Theorem 3.3 ([5] Theorem 3.20)**.** $|I| = \infty$ とし, S を, I を添え字集合とする CIFS S とする. このとき, 次は同値である.

1. S は hereditarily regular である.
2. $\psi_S^1(\theta_S) = \infty$ が成り立つ.

特に, もし S が hereditarily regular ならば, $\theta_S < h_S$ が成り立つ.

Theorem 3.4 ([5] Proposition 4.4)**.** S を regular CIFS とする. このとき, もし $\lambda_d(\mathrm{Int}(X) \setminus X_1) > 0$ ならば, $h_S < d$ が成り立つ. ここで, λ_d は d 次元 Lebesgue 測度である. さらに, $X_1 := \cup_{i \in I} \phi_i(X)$ と定める.

Theorem 3.5 ([5] Theorem 4.9)**.** S を regular CIFS とし, m_S を S の conformal measure とする. このとき, もしある $X_S(\infty)$ 上の点列 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ と正の実数列 $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して,

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{m_S(B(z_j, r_j))}{r_j^{h_S}} = \infty,$$

が成り立つならば, $\mathcal{H}^{h_S}(J_S) = 0$ が成り立つ.

Theorem 3.6 ([5] Lemma 4.3)**.** S を regular CIFS とする. このとき, もし $J_S \cap \mathrm{Int}(X) \neq \emptyset$ が成り立つならば, $\mathcal{P}^h(J_S) > 0$ が成り立つ.

3.2 Roy and Urbański (2005) の結果

Theorem 3.7 ([8] Theorem 5.10)**.** 写像 $h\colon \mathrm{CIFS}(X,\, I) \to [0,\infty)$ を $h(S) := h_S$ と定め, $\mathrm{CIFS}(X,\, I)$ に λ-topology が入っているとする. このとき, h は連続である.

Theorem 3.8 ([8] Theorem 6.3)**.** Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in \mathrm{CIFS}(X,\, I)$ なる CIFS の族とする. このとき, もし $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ が plane-analytic ならば, 写像 $\mu \mapsto 1/h_{S^\mu}$ は Λ 上優調和である.

Theorem 3.9 ([8] Theorem 6.1)**.** Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in \mathrm{CIFS}(X,\, I)$ なる CIFS の族とする. このとき, もし $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ が regularly plane-analytic ならば, 写像 $\mu \mapsto h_{S^\mu}$ は Λ 上実解析的である.

4 主結果

この章では, 本稿の主結果を述べる.

$A_0 := \{\tau = u + iv \in \mathbb{C} \mid u \geq 0, v \geq 1\}$ とする. 添え字集合を $I := \mathbb{N}^2$ とする $X := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| \leq 1/2\}$ 上の一般化複素連分数展開による CIFS の族 $\{S_\tau\}_{\tau\in A_0}$ を

$$S_\tau := \{f_{(a,b)}(z) := 1/(z + a + b\tau) \mid (a, b) \in \mathbb{N}^2\} \quad (\tau \in A_0)$$

と定める. $J_\tau \subset X$ を S_τ に対応する極限集合と表し, J_τ の Hausdorff 次元を h_τ と表す. さらに, s 次元 Hausdorff 測度, s 次元 Packing 測度をそれぞれ $\mathcal{H}^s$, $\mathcal{P}^s$ と表す. このとき, 次が得られた.

Theorem 4.1 (次元に関する結果, [4] Theorem1.2, Theorem1.3, Corollary 1.4 参照)**.** 全ての $\tau \in A_0$ に対し, $1 < h_\tau < 2$ が成り立つ. さらに, $\lim_{|\tau|\to\infty} h_\tau = 1$ が成り立つ. 加えて, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ は A_0 上で連続かつ A_0 の内部で実解析的かつ劣調和である. 特に, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ の最大値は存在し, その最大点は A_0 の境界に存在する. 加えて, A_0 に含まれるどんな開球 B に対しても, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ は B 上定数関数ではない.

Theorem 4.2 (測度に関する結果:角 大輝氏との共同研究)**.** 全ての $\tau \in A_0$ に対し, $\mathcal{H}^{h_\tau}(J_\tau) = 0$ かつ $\mathcal{P}^{h_\tau}(J_\tau) > 0$ である.

参考文献

[1] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere: New Edition*, Dover Publications, (2012).

[2] J. Hutchinson, Fractals and Self-Similarity, Indiana Univ. Math. J. **30**, no. 5, (1981), pp.713–747.

[3] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, (1990).

[4] K. Inui, H. Okada, H. Sumi, The Hausdorff dimension function of the family of conformal iterated function systems of generalized complex continued fractions, preprint, submitted, https://arxiv.org/abs/1810.12599, (2018).

[5] R. D. Mauldin, M. Urbański, Dimensions and measures in infinite iterated function systems, Proceedings of the London Mathematical Society, **73**, no. 1, (1996), pp.105–154.

[6] R. D. Mauldin, M. Urbański, Conformal iterated function systems with applications to the geometry of continued fractions, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, no. 12, (1999), pp.4995–5025.

[7] M. Moran, Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets, Monatsh. Math. **122**, no. 4, (1996), pp.387–399.

[8] M. Roy, M. Urbański, Regularity properties of Hausdorff dimension in infinite conformal iterated function systems, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25**, no. 6, (2005), pp.1961–1983.

[9] H. Sugita, Dimension of limit sets of IFSs of complex continued fractions (in Japanese), Master thesis, under supervision of H. Sumi, Osaka University, (2014).

[10] S. Takemoto, Properties of the family of CIFSs of generalized complex continued fractions (in Japanese), Master thesis, under supervision of H. Sumi, Osaka University, (2015).

Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems

渡邉天鵬 Takayuki Watanabe *
京都大学大学院人間・環境学研究科

概要

リーマン球面上の複素力学系の研究は古くから行われており，近年になってそのランダム化が活発に研究されている．本稿では独立同分布でないランダム性をもつ有理関数の力学系について考え，力学系がある意味で安定になるための十分条件を与え，その条件のもとでランダム力学系特有の現象が起こることを紹介する．本研究は角大輝氏との共同研究 [2] に基づく．

1 設定と動機

複素一変数の非定数有理関数全体を Rat とおき，$f \in \mathrm{Rat}$ を自然な方法でリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像とみる．独立同分布でないランダム力学系を，次のようなマルコフ連鎖として定義する．

Setting 1.1. $m \in \mathbb{N}$ とし，Rat 上の m^2 個の（非負値）測度の族 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ で次を満たすものを考える：$p_{ij} := \tau_{ij}(\mathrm{Rat})$ と置いたとき $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ が任意の $i = 1, \ldots, m$ で成立する．ただし，$\tau_{ij} \equiv 0$ かもしれない．このとき，$\widehat{\mathbb{C}} \times \{1, \ldots, m\}$ 上の点 (z, i) からボレル集合 $B \times \{j\}$ への遷移確率が

$$\mathbb{P}\left((z,i), B \times \{j\}\right) = \tau_{ij}(\{f \in \mathrm{Rat} \,|\, f(y) \in B\})$$

で与えられるマルコフ連鎖をマルコフシステムという．

Remark 1.2. $m = 1$ のとき Setting 1.1 のマルコフシステムは，一つの確率分布 τ_{11} に従って毎回独立に写像を選択するような独立同分布ランダム複素力学系である．さらに，τ_{11} が $f \in \mathrm{Rat}$ に重みを持つディラック測度 δ_f の場合，このシステムは写像 f の反復合成により定まる決定論的な力学系である．

本稿では Setting 1.1 で定義されるマルコフ連鎖を力学系の観点から考察する．独立同分布ランダム複素力学系は 1990 年代に Fornaess と Sibony [1] によって創始されたが，独立同分布でない場合に関する結果はあまり知られていない．$m > 1$ のとき上のシステムは**独立同分布でないランダム力学系**であり，本稿で一番興味があるのはこの場合である．

以下この節では，決定論的複素力学系および独立同分布ランダム複素力学系に関する結果を述べることにより本研究の背景を紹介する．特に，吸引的な周期点についての結果が重要である．

* E-mail: watanabe.takayuki.43c@st.kyoto-u.ac.jp

Definition 1.3. $f \in \mathrm{Rat}$ とする．決定論的力学系の文脈において，点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が f の周期点であるとはある $p \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p}(z_0) = f^{\circ p}(z_0) = z_0$$

となることをいう．f の周期点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が吸引的であるとは，z_0 での座標 φ について $\varphi \circ f^{\circ p} \circ \varphi^{-1}$ の $\varphi(z_0)$ における複素微分の絶対値が 1 よりも小さいことをいう．

吸引的周期点 z_0 の周期軌道を $\gamma = \{z_0, f(z_0), \ldots, f^{\circ p-1}(z_0)\}$ とすると，テイラーの定理より z_0 の近傍の点 z の軌道は γ に吸引される；$f^{\circ np+k}(z) \to f^{\circ k}(z_0)$ $(n \to \infty)$. このような z の集合を γ の吸引領域といい，上記のように吸引領域では力学系が安定的である．決定論的な力学系で古くから知られているこの結果を，ランダム力学系の視点から考えたい．まずは一つの例を定義する．

Definition 1.4. Λ を連結複素多様体とする．非定数有理関数の族 $\{f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が Λ 上の holomorphic family であるとは，$\Theta(z, \lambda) = g_\lambda(z)$ によって定まる写像 $\Theta\colon \widehat{\mathbb{C}} \times \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$ が正則であることをいう．

Example 1.5. Λ をエルミート計量付きの連結複素多様体とし，$c_0 \in \Lambda$ を中心とする半径 δ の閉球を $B(c_0, \delta)$ と記す．$\{f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ 上の holomorphic family とする．設定 1.1 において $m = 1$ とし，τ_{11} を $B(c_0, \delta)$ 上の正規化されたルベーグ測度とする．こうして定まるマルコフシステムにおいて，初期値 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ のランダム軌道は

$$f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z), \quad N \in \mathbb{N},\, c_n \in B(c_0, \delta)\,(\forall n = 1, 2, \ldots, N)$$

の形をしている．ここで，各 c_n は確率測度 τ_{11} に従ってランダムに（独立同分布で）選択される．

Example 1.5 は有理関数 f_{c_0} のランダム摂動と呼ぶべき独立同分布ランダム力学系である．Fornaess と Sibony は 1991 年にこのようなランダム力学系を考え，f_{c_0} が吸引的周期軌道を持つ場合について次の定理を示した．

Theorem 1.6 ([1])**.** 有理関数 f_{c_0} が $k \geq 1$ 個の吸引的周期軌道 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ を持ったとする．Example 1.5 から定まる f_{c_0} のランダム摂動であって，$\Theta\colon \widehat{\mathbb{C}} \times \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$ が次を満たすとする．

(i) 各 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $c \mapsto \Theta(z, c)$ は非定数.
(ii) 複素偏微分 $\partial\Theta/\partial c$ が点 $(z_0, c_0) \in \widehat{\mathbb{C}} \times B(c_0, \delta)$ で 0 ならば，$(\partial\Theta/\partial z)(z_0, c_0) \neq 0$ かつ $z_0 = \Theta(w_0, c_0)$ なる任意の $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $(\partial\Theta/\partial c)(w_0, c_0) \neq 0$.

このとき，摂動の幅 δ が十分に小さければ，初期値 z のランダム軌道 $f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z)$ が $N \to \infty$ のとき γ_j の吸引領域に吸引される確率の関数 $T_{\gamma_j}\colon \widehat{\mathbb{C}} \to [0, 1]$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上連続になる．さらに，任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\sum_{j=1}^{k} T_{\gamma_j}(z) = 1$ である．

Theorem 1.6 は決定論的な複素力学系では成立しない．というのも，決定論的な力学系では確率の関数 T_{γ_j} は 0 か 1 の値を取り，それは連続になり得ない．そして，有理関数 f_{c_0} が「カオス的」振る舞いをする初期値が必ず存在し，その点の軌道はどの周期軌道にも吸引されない．

このような，決定論力学系では起こらないランダム力学系特有の現象を**ランダム性誘起現象（または雑音誘起現象）**という．ランダム性誘起現象を探すことはランダム力学系の研究における最も重要なテーマの一つである．

一方，Fornaess と Sibony の結果を振幅の幅 δ が大きい場合へと拡張することは応用上重要である．実際，多項式の根を探すためのよく知られたアルゴリズムであるニュートン法にランダム項を掛けた「ランダム緩和ニュートン法」の研究の過程で，角はランダム性（ノイズ）が大きいときに力学系が安定的になり，決定論的な場合よりもランダムな場合の方がより効率的に多項式の根を計算できる可能性があることを示唆した．ランダム緩和ニュートン法以外にも，自然界の現象を記述する数理モデルに応用できる可能性を考えると，ランダム性が小さい時のみを対象とするのでは不十分である．

加えて，Fornaess と Sibony の結果や角による研究はほとんどが独立同分布の場合について考えている．数学的にも応用的にも，これらの結果を独立同分布でない場合に拡張することは非常に自然かつ重要であると筆者は考える．その第一歩として，Setting 1.1 のようなランダム力学系を考えたい．

このマルコフシステムは一つ前の過去に依存して分布が変化する，ある意味で「マルコフ的」なシステムである．そして，遷移確率を制御する $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ は大きなランダム性を含むことも可能である．この 2 点の特長をマルコフシステムは持っている．

2 マルコフシステムにおけるジュリア集合と確率測度

Setting 1.1 のマルコフシステムに対し，次のような有向グラフを用いてその性質を解析する．

Definition 2.1. Setting 1.1 にある測度の組み τ が与えられたとき， S_τ を次で定める．頂点集合を $V := \{1, 2, \dots, m\}$ ，辺集合を $E := \{(i,j) \in V \times V | \, p_{ij} > 0\}$ とする有向グラフを考える．各有向辺 $e = (i,j) \in E$ に有理関数族 $\operatorname{supp} \tau_e \, (\tau_e = \tau_{ij})$ を対応させる．これらの組み $S_\tau := (V, E, (\operatorname{supp} \tau_e)_{e \in E})$ を有理関数からなる $\widehat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフシステムという．また，$i, t : E \to V$ を第一成分，第二成分への射影とし，$i(e), t(e) \in V$ を有向辺 $e \in E$ の始点，終点と定める．

本稿では有向グラフ (V, E) が強連結であるようなシステム S_τ のみを考える．

Definition 2.2. (i) $e = (e_1, e_2, \dots, e_N) \in E^N$ が長さ $N \in \mathbb{N}$ の（有限） admissible word であるとは，任意の $n = 1, 2, \dots, N-1$ に対して，$t(e_n) = i(e_{n+1})$ を満たすことである．この word に対し，$i(e_1), t(e_N)$ を e の始点，終点といい，$i(e), t(e)$ とおく．

(ii) admissible word $e = (e_1, e_2, \dots, e_N) \in E^N$ に付随する N 個の写像 $f_n \in \operatorname{supp} \tau_{e_n}$ に対し，合成 $f_N \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ の全体を $H(S_\tau)$ とする．これらのうち，$i(e) = i$ となる合成の全体を $H_i(S_\tau)$ とし，さらに $t(e) = j$ となるもの全体を $H_i^j(S_\tau)$ とする．

$\widehat{\mathbb{C}}$ は 1 次元複素射影空間であり，実 2 次元の球面と同相であるからコンパクト距離空間である．

Definition 2.3. 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z_0 で同程度連続であるとは，任意の正の数 ϵ に対して，ある正の数 δ が存在して，z_0 との距離が δ 未満の任意の点 z と任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して，$h(z)$ と $h(z_0)$ との距離が ϵ 未満となることをいう． 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z で局所同程度連続であるとは，z の近傍 U が存

在して，その各点 $z_0 \in U$ で同程度連続であることをいう．

(i) 写像族 $H(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ のファトウ集合という．そうでない点の全体を $J(S_\tau)$ とおき，S_τ のジュリア集合という．

(ii) $i \in V$ に対し，写像族 $H_i(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F_i(S_\tau)$ とおき，マルコフシステム S_τ の i におけるファトウ集合という．そうでない点の全体を $J_i(S_\tau)$ とおき，S_τ の i におけるジュリア集合という．

ファトウ集合・ジュリア集合は力学系を考える上で最も基本的な対象である．実際，ファトウ集合は「力学系が安定的な振る舞いをする初期値」の集合である．すなわち，初期値 z が少しずれても，時間発展した点は少ししかずれない．ジュリア集合はそうではない初期値の集合である．つまり，初期値に対し鋭敏に反応し，誤差を許しても時間発展した時の様子が予測できないことを意味する．後者になることは決して稀ではなく，例えば次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば，そのジュリア集合 $J(S_\tau)$ は非可算集合になる．

次の集合はジュリア集合の中でも「最もカオス的」な初期値の集合である．

Definition 2.4. 集合 $J_{\ker,i}(S_\tau) := \bigcap_{j\in V}\bigcap_{h\in H_i^j(S_\tau)} h^{-1}(J_j(S_\tau))$ をマルコフシステム S_τ の $i \in V$ における核ジュリア集合という．$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) := \bigcup_{i\in V} J_{\ker,i}(S_\tau)\times\{i\} \subset \widehat{\mathbb{C}}\times V$ とおく．

続いて，自然な確率測度を次のように構成する．

Definition 2.5. $(\mathrm{Rat}\times E)^{\mathbb{N}}$ 上のボレル確率測度 $\tilde{\tau}_i$ を次のように定める：

Rat の N 個のボレル集合 $A_n\,(n=1,\dots,N)$ と $(e_1,\dots,e_N)\in E^N$ に対して，$A'_n = A_n\times\{e_n\}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\tilde{\tau}_i(A'_1\times\cdots\times A'_N\times\prod_{N+1}^{\infty}(\mathrm{Rat}\times E))\\ &=\begin{cases}\tau_{e_1}(A_1)\cdots\tau_{e_N}(A_N) & ,(e_1,\dots,e_N)\text{ が }i\in V\text{ から始まるアドミッシブルワード}\\ 0 & ,\text{そうでないとき}\end{cases}\end{aligned}$$

となるような確率測度が一意に定まる．ここで，$e=(ij)$ に対し $\tau_e=\tau_{ij}$ である．

次の結果は本稿の主結果の一つである．

Main Result A (協調原理の一般化). $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau)=\emptyset$ なら， 任意の $i\in V$ について

$$\mathrm{Leb}(\{z\in\widehat{\mathbb{C}}\,|\,\text{写像族 }\{f_N\circ\cdots\circ f_1\}_{N\in\mathbb{N}}\text{が }z\text{ で局所同程度連続でない }\})=0$$

が任意の $i\in V$ と $\tilde{\tau}_i$ -a.e. $(f_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathrm{supp}\,\tilde{\tau}_i$ について成り立つ．

3　多項式マルコフシステムと ∞ に収束する確率

Poly を 2 次以上の多項式全体の空間とする．点 $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ は各多項式の吸引的固定点（周期 1 の周期点）であることに注意する．以下，各 $e \in E$ に対し $\operatorname{supp}\tau_e$ が Poly 内のコンパクト集合であると仮定する．このとき，ランダム軌道が ∞ に吸引される確率の関数を次で定める．

Definition 3.1. 関数 $\mathbb{T}_\infty \colon \widehat{\mathbb{C}} \times V \to [0,1]$ を次で定める．

$$\mathbb{T}_\infty(z,i) := \tilde{\tau}_i(\{(f_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{Rat}\times E)^{\mathbb{N}} | f_N \circ \cdots f_1(z) \to \infty\,(N\to\infty)\}).$$

次の結果は本稿の主結果の一つである．

Main Result B. $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ なら ∞ に吸引される確率の関数 $\mathbb{T}_\infty$ は $\widehat{\mathbb{C}} \times V$ 上連続である．

すなわち，任意の初期値に対しあるランダム軌道がジュリア集合（力学系が鋭敏に反応する初期値の集合）を避けるならば，力学系が安定的になり $\mathbb{T}_\infty$ が連続になる．次の結果はいつ $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ になるかを述べており，Fornaess と Sibony による定理 1.6 の部分的一般化である．

Main Result C. ある $e \in E$ が存在して，任意の $z \in J_{i(e)}(S_\tau)$ に対して，ある holomorphic family $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \operatorname{supp}\tau_e$ が存在して，$\Lambda \ni \lambda \mapsto f_\lambda(z) \in \widehat{\mathbb{C}}$ が非定数であると仮定する．このとき，$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ となり，したがって $\mathbb{T}_\infty$ は $\widehat{\mathbb{C}} \times V$ 上連続である．

Corollary 3.2. ある $e \in E$, $f \in \mathrm{Poly}, c_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$ に対し $\operatorname{supp}\tau_e \supset \{f + c \,|\, |c - c_0| < \varepsilon\}$ が成り立つならば，$\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ となる．

前述の通り決定論的力学系では $\mathbb{T}_\infty$ が空間全体で連続になることは起こらなため，これらの結果はランダム性誘起現象の一種である．一方で，次の結果は独立同分布の場合とそうでない場合との違いについて言及している．

Main Result D (独立同分布の場合とそうでない場合との違い). $\sum_{i\in V} p_i = 1$ なる正のベクトル $(p_1,\ldots,p_m)$ に対し，関数 $T_\infty \colon \widehat{\mathbb{C}} \to [0,1]$ を $T_\infty(z) = \sum_{i\in V} p_i \mathbb{T}_\infty(z,i)$ によって定める．$m = 1$（システムが独立同分布）のとき，T_∞ は恒等的に 1 であるか零点を持つかである．$m \geq 2$ のとき，あるマルコフシステム S_τ が存在して，T_∞ は恒等的に 1 でなく零点を持たず，かつ連続である．

参考文献

[1] John Fornaess and Nessim Sibony, Random iterations of rational functions. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 11 (1991), 687-708.

[2] Hiroki Sumi and Takayuki Watanabe, Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity, preprint, https://arxiv.org/abs/1810.09922 .

[3] 渡邉天鵬，マルコフシステムのランダム複素力学系，第 14 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点，北海道大学数学講究録 **173** (2018)，387-393.

非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について *

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
喜多 航佑 (Kosuke KITA) †

概要

非線形境界条件に支配される放物型方程式の初期値境界値問題に対する比較定理について報告する. 特に, 境界上での非線形性と解の減衰についての関係に注目し, 得られた比較定理の幾つかの具体的なモデルへの応用について述べる.

1 研究の背景

本講演では, 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対しての比較定理について考える. 比較定理は二階の非線形放物型方程式の研究において, 非常に有用な道具であることはよく知られている. 例えば, 最も単純な形として

$$\mathrm{P}(u^0) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(u(t,x)), & t>0,\ x\in\Omega, \\ u(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x) = u^0(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

を考える. ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな境界をもつ領域とする. このとき, $i=1,2$ に対して u_i を $\mathrm{P}(u_i^0)$ の解とすると, 初期値及び f に適当な仮定をおくと, $u_1^0 \le u_2^0$ $a.e.$ in Ω ならば $u_1 \le u_2$ $a.e.$ in $(0,\infty)\times\Omega$ が成り立つ. このように, 初期値の大小が解の大小に保存するという性質は, 優解・劣解の構成など, 反応拡散方程式を研究する上で非常に重要である.

ところで, 実際の現象を偏微分方程式をもって記述しようとするとき, 領域内部の方程式だけでなく, 境界条件を如何に適切に課すかということが本質的かつ重要な問題となる. 実際, 領域内部の方程式の形が同じでも境界条件が異なると解が全く異なる性質を有することがあるという事実が知られている. 今回, 我々は境界条件に非線形性を課す問題を考える. 特に, 非線形放射に相当する境界条件を取り扱う. 実際, 原子炉や或いは海洋や湖などの非常に大きな系では, 境界における熱流の制御が困難であり Stefan-Boltzmann の法則に想起されるような非線形放射に対応する境界条件を課すことが妥当であると考えられる. その他にも酵素の反応速度式や自然熱対流のモデルにも, 前述の非線形放射と同様なタイプの非線形性を持った境界条件が現れる場合があることが指摘されている. これらの事実にもかかわらず, 非線形境界条件を課した反応拡散方程式 (系) に対する統一的な解析の手法は十

* 本研究は大谷光春教授 (早稲田大学) との共同研究に基づくものである.
† kou5619@asagi.waseda.jp

分に整備されているとは言えない. そこで我々は, 前述の比較定理とは少し視点を変えて, 初期値の大小ではなく境界条件の非線形性の強さに関する比較定理を, より多くの方程式を包括するようにして構築することで, 非線形境界条件を課した反応拡散方程式の解の漸近挙動の研究に対する手法の一つを確立できると考えた. つまり, 今回我々の考える問題は, “初期値や内部の方程式の形が同じ場合に, 境界条件が異なると解の性質はどう変わるのか” という事に主眼を置いた反応拡散方程式の解析である.

2 非線形境界条件

非線形境界条件に関して述べる前に, 劣微分作用素について簡単に説明する. 詳しくは [1] や [3] を参照. X を実 Banach 空間とする. その双対を X^* で表し, 双対積を $_{X^*}<\cdot,\cdot>_X$ とする. また, $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ を適正 ($\varphi \not\equiv \infty$) 凸下半連続汎函数とする. $D(\varphi) = \{u \in X\,;\, \varphi(u) < \infty\}$ とおき, これを φ の有効領域と呼ぶ. このとき, φ の $u \in D(\varphi)$ における劣微分 $\partial\varphi(u)$ は

$$\partial\varphi(u) := \{f \in X^*\,;\, {}_{X^*}< f, v-u >_X \le \varphi(v) - \varphi(u), \quad \forall v \in X\}$$

と定義される. 定義から明らかなように劣微分は一般には多価を許す. また, この作用素 $\partial\varphi : u \mapsto \partial\varphi(u)$ を劣微分作用素と呼ぶ. 特に, $X = H$ が Hilbert 空間であるときは, $_{X^*}<\cdot,\cdot>_X$ は H の内積 $(\cdot,\cdot)_H$ とする. $\partial\varphi(u)$ は上の定義で $X = X^* = H$ とすればよい.

今回, 我々が考える非線形境界条件は以下のタイプである. 以下では, Ω を $\mathbb{R}^N$ の滑らかな境界を持つ有界領域とする.

$$-\partial_\nu u \in \beta(u) \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{1}$$

ここで, $\beta = \partial j$ とする. 但し, $j : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ はある適正凸下半連続函数である. このとき, $\varphi : L^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ を

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} j(u) d\sigma & u \in H^1(\Omega),\ j(u) \in L^1(\partial\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定めると, φ は $L^2(\Omega)$ 上の適正凸下半連続汎函数となり,

$$\partial\varphi(u) = -\Delta u \qquad \forall u \in D(\partial\varphi),$$
$$D(\partial\varphi) = \left\{u \in H^2(\Omega)\,;\ -\partial_\nu u \in \beta(u) \quad a.e.\ \text{on } \partial\Omega\right\},$$

となる. さらに, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C_1 \| -\Delta u + u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \qquad \forall u \in D(\partial\varphi),$$

が成り立つ. このような劣微分の正確な記述は, 対応する非線形楕円型方程式の正則性の問題と同等であり容易ではない ([2]). 注意として, $\partial\varphi$ は見掛け上は $-\Delta$ であり線形作用素の様であるが, 定義域が非線形であるため非線形作用素と見做さなくてはならない. また, 一般に劣微分作用素は極大単調作用素であることが知られているので, 非線形境界条件を伴うラプラシアンを拡散項として持つ (準線形) 放物型方程式の局所可解性は抽象発展方程式の理論から議論することが出来る.

以下, 上記の型で記述される境界条件の例を少し挙げる [1, 3]. 尚, 当然 $\beta(r) = 0$ のときは斉次 Neumann 境界条件に, $\beta(u) = u$ のときは Robin 境界条件に対応しており, 良く用いられる線形の境界条件を含んでいることに注意.

例 2.1 (冪乗型)**.** 黒体輻射で現れる Stefan-Boltzmann の法則は

$$\beta(r) = \begin{cases} \alpha(r^4 - r_0^4) & r \geq 0, \\ -\alpha r_0^4 & r < 0, \end{cases}$$

で表される. ここで, α, r_0 は正の定数. また, 自然熱対流の記述で現れる境界条件として次の形で書かれることが知られている.

$$\beta(r) = \begin{cases} \alpha r^{\frac{5}{4}} & r \geq 0, \\ 0 & r < 0. \end{cases}$$

例 2.2 (Michaelis-Menten 型)**.**

$$\beta(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{a(r+b)} & r > 0, \\ (-\infty, 0] & r = 0, \\ \emptyset & r < 0. \end{cases}$$

ここで, a, b は正の定数. 酵素の拡散反応の記述の際に用いられる.

例 2.3 (斉次 Dirichlet 境界条件)**.** (1) は見掛け上, Dirichlet 境界条件を含んでいないように見えるが実は β を以下のように定めると, (1) は斉次 Dirichlet 境界条件になる.

$$\beta(r) = \begin{cases} \mathbb{R} & r = 0, \\ \emptyset & r \neq 0. \end{cases}$$

例 2.4 (Signorini の問題)**.** 摩擦の数学的な記述に関連した弾性学の問題に現れる Signorini の問題は次のように表現できる.

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & r > 0, \\ (-\infty, 0] & r = 0. \end{cases}$$

このとき, 境界条件は

$$u\partial_\nu u = 0, \quad u \geq 0, \quad \partial_\nu u \geq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega,$$

となることが知られている.

3 主結果

ここでは次の初期値境界値問題を考える.

$$\mathrm{NBC}(F, \beta, \gamma, a; T) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \gamma(u) \ni F(u), & t \in [0, T],\ x \in \Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta(u), & t \in [0, T],\ x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = a(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ $(\neq \emptyset)$ を持つ $\mathbb{R}^N$ の領域であり, $\nu = \nu(x)$ は境界上の $x \in \partial\Omega$ での外向き法線ベクトルとし, その外向き法線微分を ∂_ν で表す $(\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu)$. また, β, γ はある適正凸下半連続函数 j, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を以って $\beta = \partial j$ 及び $\gamma = \partial k$ と表される極大単調グラフとし, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は一価の写像である. 初期値を $a \in L^\infty(\Omega)$ とし, $T > 0$ は $\mathrm{NBC}(F, \beta, \gamma, a; T)$ の解の極大存在時間とする. 本講演では, $\mathrm{NBC}(F, \beta, \gamma, a; T)$ の解を $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ のクラスに属する強解と定める.

定理 3.1. u_i をそれぞれ $\mathrm{NBC}(F_i, \beta_i, \gamma_i, a_i; T_i)$ $(i = 1, 2)$ の強解とする. 以下を仮定する.

(A1) $a_1 \le a_2$ *a.e.* in Ω,
(A2) " $D(\beta_1) \subset D(\beta_2)$ かつ $\min \beta_1(r) - \max \beta_2(r) \ge 0 \quad \forall r \in D(\beta_1)$"
　　または " $[r_1 - r_2]^+ = 0 \quad \forall r_1 \in D(\beta_1), \forall r_2 \in D(\beta_2)$",
(A3) $D(\gamma_1) \subset D(\gamma_2)$ かつ $\min \gamma_1(r) - \max \gamma_2(r) \ge 0 \quad \forall r \in D(\gamma_1)$,
(A4) $F_1 \le F_2$ *a.e.* in $\mathbb{R}$ かつ F_1 と F_2 の少なくとも一方は局所 *Lipschitz* 連続.

このとき, 次が成立する.

$$u_1(t,x) \le u_2(t,x) \qquad \forall t \in [0,T], \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

ここで, $T = \min(T_1, T_2)$ 及び $[w]^+ = \max(w, 0)$ とする.

4 応用

簡単のため, 次の非線形熱方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_\nu u + |u|^{q-2}u = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \ge 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{NH}$$

$p, q > 2$ とし, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ とする. (NH) に対して $q < p$ のとき, 即ち, 内部の方程式の非線形性が境界における非線形性より強いときは, 斉次 Dirichlet 境界条件の場合と同様の手法により有限時間で爆発する解が存在するという事が簡単に分かる. ところが, 一般に $q > p$ の場合, 即ち境界での非線形性の方が強い場合には, Dirichlet 境界条件の場合と同様の手法が上手く回らず, 有限時間爆発解の存在を示すのに複雑な議論と煩雑な計算が必要になっていた [6]. ここで, (NH) と

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \ge 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

は, 定理 3.1 の仮定を満たしていることに注意. 今回得られた比較定理によれば, (NH) は q の値に依らず (q と p の関係に依らず) 有限時間で爆発する解を持つという事を非常に容易に示すことが出来る.

また, 講演では摂動項への仮定は厳しくなるものの, 定理 3.1 が多成分の反応拡散系に対しても有効になる場合があることについて, 非線形境界条件を課した原子炉モデルの反応拡散系 [4] を例に言及する.

参考文献

[1] V. Barbu, "*Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*", Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[2] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in Contributions to Nonlinear Funct. Analysis, Madison, 1971, (E. Zarantonello ed.), Acad. Press, 1971, 101-156.

[3] H. Brézis, "*Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans Espace de Hilbert*," North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1973.

[4] K. Kita, M. Ôtani and H. Sakamoto, On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **27**, No.2 (2018), 193-224.

[5] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, "*Linear and quasilinear equations of parabolic type*", Translations of Mathematical Monographs **23**, Amer. Math. Soc. 1968.

[6] A. Rodríguez-Bernal and A. Tajdine, Nonlinear balance for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions: dissipativity and blow-up, *J. Differential Equations*, **169**, no. 2 (2001), 332-372.

摂動格子の剛性と非剛性

千葉大学大学院 融合理工学府 数学情報科学専攻

新井裕太 (Yuta Arai) *

概 要

位相空間 S 上の点過程とは, S 内のランダムな集積点を持たない高々可算な部分集合 (点配置) のことを言う. 点過程の研究において, 摂動格子における剛性と耐性という性質を見る問題があり, 近年盛んに研究されている. 本レポートでは, 摂動格子として, ユークリッド空間に値をとる独立同分布である確率変数によって乱された多次正方格子を扱い, 剛性 (球の外にある摂動格子の点を可測関数を用いて見てやると球の内部にある点の個数を決定できるという性質) や耐性 (摂動格子から有限個の点を除いたものと元の摂動格子はそれぞれの分布を用いて見てやると区別できないという性質) を調べる. 最も基本的な点過程であり, 無相関な点配置のモデルであるポアソン点過程では耐性があり, ランダム行列理論での研究対象の 1 つである対数相関をもつジニーブル点過程は剛性があることが 2016 年に Osada と Shirai により示されている. また, ガウス摂動格子に対しては, 2010 年に Holroyd と Soo は次元が 1, 2 のとき耐性をもつことを示し, 最近の Peres と Sly による論文により, 次元が 3 以上のとき, 剛性と耐性に関する相転移が見られることが示されている. 本レポートでは, 次元が 3 次元以上のとき, ラプラス摂動格子と一様摂動格子において耐性に関する相転移が見られることを紹介する.

1 導入

1.1 点過程

点過程を以下のように定義する.
本レポートにおいて, 配置空間を

*E-mail: yutaarai@chiba-u.jp

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \{\xi = \sum_{j\in\Lambda} \delta_{x_j} : x_j \in \mathbb{R}^d, \Lambda : \text{可算集合}, \xi(K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : compact\}$$
$$= \{\xi : \text{非負整数値ラドン測度 }\}$$

とする.
ただし, δ_a は a のデルタ測度で,

$$\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

また, $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ を

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d) = \{\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \xi(\{x\}) \leq 1, x \in \mathbb{R}^d\}$$
$$= \{\{x_j\}_{j\in\Lambda} \subset \mathbb{R}^d : \sharp(\{x_j\}_{j\in\Lambda} \cap K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : compact\}$$
$$= \{\{x_j\}_{j\in\Lambda} \subset \mathbb{R}^d : \{x_j\}_{j\in\Lambda} \subset \mathbb{R}^d \text{は集積点を持たない }\}$$

とする.
$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ は多重点がない場合 $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ と同一視する.
ここで, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 上に次の位相を入れる.

Definition 1.1 (漠位相)**.** $\mathbb{R}^d$上のコンパクト台の連続関数 f の全体を $C_c(\mathbb{R}^d)$ とする.
$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ と $\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\langle \xi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\xi(x) = \sum_{i\in\Lambda} f(x_i)$$

と定義する.
$\xi, \xi_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), n = 1, 2, ...$に対して, $\langle \xi_n, f \rangle \to \langle \xi, f \rangle (\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d))$ となるとき ξ_n は ξ に漠収束するという.
この収束によって定まる位相を漠位相という.

Remark 1. 漠位相の下で $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ はポーランド空間 (完備可分距離空間) である.

証明は参考文献 [8],[9] を参照.

写像族 $\{\xi \mapsto \xi(K) : K \text{ は compact}\}$ で生成される $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ の $\sigma-$ 加法族を $\mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ とし, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$-値確率変数 $\xi(\omega)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の点過程という.
本レポートでは, 可測空間 $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)))$ 上の確率測度 μ も点過程と呼ぶことにする.
ただし, μ はラドン測度で $\mu(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) = 1$ つまり整数値ラドン測度を台に持つものである.

1.2 Perturbed lattice

この節では Perturbed lattice の定義をし, その後その性質である Rigidity と Tolerance の定義をしていく.

Definition 1.2 (Perturbed lattice)**.** $\mathbf{X} := (X_z)_{z\in\mathbb{Z}^d}$:を i.i.d である確率変数の列とする. そのとき,

$$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{z + X_z : z \in \mathbb{Z}^d\},\ \mathbb{Z}_0(\mathbf{X}) := \{z + X_z : z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\}$$

を摂動格子と呼ぶ.
また, 対応する点過程を $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$, $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ とする.

次に Rigidity の定義をする.

Definition 1.3 (Rigidity)**.** $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と球 $B \subset \mathbb{R}^d$ において, $\mathbb{Z}_{in}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B$, $\mathbb{Z}_{out}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B^c$ と定義するとき,$\forall B \subset \mathbb{R}^d$ において

$$N_B(\mathbb{Z}_{out}(B)) = |\mathbb{Z}_{in}(B)|\ a.s.$$

となるような $\mathbb{R}^d$ に含まれる離散点集合の集合族上の可測関数 $N = N_B$ が存在するとき, $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid であるという.

次に Tolerance の定義をする.
これは Holroyd と Soo [1] の定義に準ずる.

Definition 1.4 (Tolerance)**.** $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ の点を $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ a.s. であるような $\mathbb{R}^d$ 値確率変数 Z とする.
1. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が**deletion tolerant** であるとは, 任意の $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において, $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))-$

δ_Z が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して絶対連続である.
2. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **deletion singular** であるとは, 任意の $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において, $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))-\delta_Z$ と $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が相互特異である.
3. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **insertion tolerant** であるとは, ルベーグ測度 $\mathcal{L}(V) \in (0,\infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において, U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様に分布するとき $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) + \delta_U$ が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して絶対連続である.
4. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **insertion singular** であるとは, ルベーグ測度 $\mathcal{L}(V) \in (0,\infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において, U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様に分布するとき $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) + \delta_U$ が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して相互特異である.

2 先行研究

この章では Peres と Sly の先行研究について紹介する.
ただし, Tolerance の定義が Holroyd, Soo の定義と違い摂動格子の空間でなされていることに注意する.([13] 参照.)
任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において

$$\mathbb{Z}_s(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d \setminus S\}$$

とする.

Proposition 2.1. 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
摂動格子 $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ が rigid である.
$\iff$ 任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ が相互特異である.

全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているという仮定において,1 次元で perturbation X_z が有界 1 次モーメントを持つときか 2 次元で perturbation X_z が有界 2 次モーメントを持つとき摂動格子が deletion singular であることが Holroyd, Soo [1] によって示されている.
3 次元以上での Gaussian perturbation の結果については次の結果がある。

Theorem 2.2. $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を Gaussian $N_d(0, \sigma I)$ perturbation を持つ $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.
このとき $d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \sigma_r(d) \leq \sigma_c(d)$ が存在する.
[1] $\sigma > \sigma_c$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant で $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続.

[2] $0 < \sigma < \sigma_c$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion singular

[3] $0 < \sigma < \sigma_r$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid

[4] $\sigma > \sigma_r$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は non-rigid

Cauchy perturbation については以下の結果がある.

Lemma 2.3. $d = 1$ とし $\{X_z\}$ を i.i.d でコーシー分布に従う perturbation とする.
そのとき摂動格子は任意の $k \in \mathbb{N}$ において k-deletion singular である.

より一般的な perturbation に関する結果については次の定理のようなものがある.

Theorem 2.4. $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を密度を $g(z)$ とする perturbation X_z を持つ摂動格子とする.
[1] $d < \alpha < 2d$ で

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} > 0$$

のとき
$\forall k \in \mathbb{N}$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は k-deletion tolerant であり, k-insertion tolerant である.
また $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続である.
[2] $\alpha > 2d$ で

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} < \infty$$

のとき
$0 < \forall \epsilon' < \epsilon$ と $\forall k$ において perturbation $\epsilon' X_z$ を持つ摂動格子が deletion singular となるような ϵ が存在する.
この結果は $\mathbb{E}|X_z|^{\alpha - d} < \infty$ という条件のもとでも成り立つ.

ここで, deletion tolerance と insertion tolerance という 2 つの違う概念の間の同値性を見る.

Proposition 2.5. $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ とし, 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
そのとき以下は同値

(1) 摂動格子が deletion tolerant である.
(2) 摂動格子が insertion tolerant である.
(3) 摂動格子が deletion singular でない.
(4) 摂動格子が insertion singular でない.
(5) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
(6) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

この命題をより一般化したものが次の命題である.

Proposition 2.6. 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
$S \subset \mathbb{Z}^d$ を濃度が $k \in \mathbb{N}$ である集合とする.
そのとき以下は同値
(1) 摂動格子が k-deletion tolerant である.
(2) 摂動格子が k-insertion tolerant である.
(3) 摂動格子が k-deletion singular でない.
(4) 摂動格子が k-insertion singular でない.
(5) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
(6) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

3 主結果

この章では, 次元が 3 次元以上のとき, ラプラス摂動格子と一様摂動格子において耐性に関する相転移が見られることを紹介する.
まず, ラプラス摂動格子についての結果を紹介する.

Theorem 3.1 (A)**.** $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を i.i.d な確率変数 X_z が d 次元ラプラス分布 $BEx_d(\frac{1}{\lambda})$ に従うような $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.
このとき, $d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \lambda_c(d) < \infty$ が存在する.
[1] $\lambda > \lambda_c(d)$ のとき
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ は deletion singular である.
[2] $0 < \lambda < \lambda_c(d)$ のとき
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ は deletion tolerant であり insertion tolerant で $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ に関して相互絶対連続である.

この定理の証明は Peres, Sly のガウス摂動格子の証明と同様な証明によって与えられる.
次に一様摂動格子についての結果を紹介する. この定理の証明には Oriented bond percolation の結果 [6],[7] を使っている.

Theorem 3.2 (A)**.** $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を Uniform perturbation $U_d(-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L)$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ の perturbed lattice とする.
このとき, $d \geq 3$ において以下が成り立つ.
[1] $L > L_c(d)$ のとき
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異でなく, 相互絶対連続でない.
[2] $L < L_c(d)$ のとき
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異である.

参考文献

[1] Alexander E. Holroyd, Terry Soo, "Insertion and Deletion Tolerance of Point Processes",Electron. J. Probab.Volume 18 (2013).

[2] Grimmett,Geoffrey R, "Percolation",Springer Science and Business Media,(1999).

[3] Hirofumi Osada, Tomoyuki Shirai, "Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process",Probab. Theory Relat. Fields (2016).

[4] Itai Benjamini, Robin Pemantle, and Yuval Peres, "Unpredictable paths and percolation",Annals of probability (1998).

[5] Noam Berger and Yuval Peres, "Detecting the trail of a random walker in a random scenery",Electron. J. Probab.Volume 18 (2013).

[6] Nobuo Yoshida, "Localization for Linear Stochastic Evolution" ,Journal of Statistical Physics.Volume 138 (2010).

[7] Nobuo Yoshida, "Phase Transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions", Journal of Statistical Physics.Volume 133 (2008).

[8] Olav Kallenberg, "Random Measures",Academic press ,(1986).

[9] Peter Jagers, "Aspects of random measures and point processes",Chalmers institute of technology and the University of Goteborg. Department of mathematics,(1972).

[10] Peter Mörters and Yuval Peres, "Brownian motion",Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

[11] Richard Durrett,Roberto H. Schonmann,and Nelson I. Tanaka "Correlation Lengths for Oriented Percolation" Journal of Statistical Physics.Volume 55, (1988).

[12] Richard Durrett, "Oriented Percolation in Two Dimensions",Ann. Prob. 12:999-1040 ,(1984).

[13] Yuval Peres, Allan Sly, "Rigidity and tolerance for perturbed lattices",arXiv:1409.4490v1 [math.PR] ,(2014).

q-超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
朴 佳南 (Kanam PARK)

1 q-超幾何関数の拡張 $\mathcal{F}_{N,M}$

1.1 q-超幾何関数

q-超幾何級数は Gauss の超幾何級数の q 類似として 19 世紀に Heine によって導入された. Gauss の超幾何級数とは次のような式である

$$ {}_2F_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n, |x|<1. \tag{1}$$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ を表す. 級数 (1) の q 類似として定義される q-超幾何級数は次のような式である [1] [2]

$$ {}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(q)_n}x^n, |x|<1. \tag{2}$$

ここで, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^n a)_\infty}$ を表す. ここでは, q-超幾何関数 (2) の重要な性質である Heine の公式と q-積分表示を紹介する. Heine の公式とは次のような等式である.

Proposition 1.1（Heine の公式） (2) は, 次の等式を満たす

$$ {}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\Big)=\frac{(b)_\infty(ax)_\infty}{(c)_\infty(x)_\infty}{}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix}\frac{c}{b},x\\ ax\end{matrix};b\Big). \tag{3}$$

この証明は, 二項定理の q 類似である q-二項定理と, 和の順序交換によって示される. ここで q-二項定理とは次のようなものである

Theorem 1.1（q-二項定理） 次の等式が成り立つ

$$ \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}=\sum_{m\geq 0}\frac{(a)_m}{(c)_m}z^m. \tag{4}$$

次に, (2) の積分表示について述べる. 定積分の q 類似である Jackson 積分は次のように定義される.

Definition 1.1（Jackson 積分）

$$ \int_0^c f(t)d_qt=c(1-q)\sum_{n\geq 0}f(cq^n)q^n. \tag{5}$$

$q \to 1$ のとき, この和はリーマン積分に移行する. これを用いると (3) は, 次のような積分表示として解釈される.

Proposition 1.2（q-超幾何関数の積分表示） (3) に対して, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と代入すると, (3) は次のような式になる

$$ {}_2\varphi_1\Big(\begin{matrix} q^\alpha, q^\beta \\ q^\gamma \end{matrix}; x\Big) = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} \frac{(qt)_\infty (q^\alpha xt)_\infty}{(q^{\gamma-\beta}t)_\infty (xt)_\infty} d_q t, \tag{6} $$

ここで, $\Gamma_q(x) = \frac{(q)_\infty}{(q^x)_\infty}(1-q)^{1-x}$ を表す.

1.2 級数 $\mathcal{F}_{N,M}$ の定義

関数 (2) の拡張式 $\mathcal{F}_{N,M}$ を, 次のように定義する

$$ \mathcal{F}_{N,M}\Big(\begin{matrix} \{a_j\}, \{b_i\} \\ \{c_j\} \end{matrix}; \{y_i\}\Big) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} \frac{(a_j)_{|m|}}{(c_j)_{|m|}} \prod_{i=1}^{M} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \prod_{i=1}^{M} y_i^{m_i}. \tag{7} $$

ここで, $|m| = \sum_{i=1}^{M} m_i$, $(a)_n = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a) = \frac{(a)_\infty}{(q^n a)_\infty}$. $(M,N) = (1,1)$ のとき, 式 (7) は式 (2) に相等する.

Proposition 1.3（Heine の公式の拡張） (7) は, 次の等式を満たす.

$$ \mathcal{F}_{N,M}\Big(\begin{matrix} \{y_j\}, \{a_i\} \\ \{b_j y_j\} \end{matrix}; \{x_i\}\Big) = \frac{(\{y_j\}, \{a_i x_i\})_\infty}{(\{b_j y_j\}, \{x_i\})_\infty} \mathcal{F}_{M,N}\Big(\begin{matrix} \{x_i\}, \{b_j\} \\ \{a_i x_i\} \end{matrix}; \{y_j\}\Big). \tag{8} $$

この証明は, Proposition 1.1 と同様に, Theorem 1.1 と和の順序交換によって示される. (8) により, Proposition 1.2 と同様にして次を得る.

Proposition 1.4（$\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示） (8) に対して, $a_i = q^{\alpha_i}$, $b_j = q^{\beta_j}$, $y_j = q^{\gamma_j}$ を代入すると, (8) は次のような式になる

$$ \mathcal{F}_{N,M}\Big(\begin{matrix} \{q^{\gamma_j}\}, \{q^{\alpha_i}\} \\ \{q^{\beta_j}q^{\gamma_j}\} \end{matrix}; \{x_i\}\Big) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_q(\beta_j+\gamma_j)}{\Gamma_q(\beta_j)\Gamma_q(\gamma_j)} \prod_{j=1}^{N} \int_0^1 d_q t_j \frac{(qt_j)_\infty}{(q^{\beta_j}t_j)_\infty} \prod_{i=1}^{M} \frac{(x_i q^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{N} t_j)_\infty}{(x_i \prod_{j=1}^{N} t_j)_\infty} t_j^{\gamma_j - 1}. \tag{9} $$

2 $\mathcal{F}_{N,M-1}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形

関数 (7) は $M = N = 1$ のとき ${}_2\varphi_1$ に等しく, これで表される特殊解を持つ方程式として q-P_{VI} 方程式 [3] が知られている. また, その他変数化として q-Garnier 系 [7] [8] や q-DS 階層の相似簡約から得られる方程式系 [9] が知られており, それぞれ q-Appell-Lauricella 関数 φ_D, 一般 q-超幾何関数 ${}_{N+1}\varphi_N$ で表される特殊解を持つ. 定義した関数 (7) は $N = 1$ のとき q-Appell-Lauricella 関数 φ_D に等しく, $M = 1$ のとき一般 q-超幾何関数 ${}_{N+1}\varphi_N$ に等しい. 我々の目標は, 関数 (7) で表される特

殊解を持つ方程式系の構成, すなわち q-Garnier 系 [7] [8] や q-DS 階層の相似簡約から得られる方程式系 [9] を包括する結果を得ることである. 微分の場合に, これに対応する結果が Tsuda[10] によって得られている. ここでは, 目標の方程式系の構成について述べる.

2.1 $\mathcal{F}_{N,M}$ が満たすパフ系

まず, $\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示からパフ系を求める. (9) における被積分関数を

$$\Phi(\{u_j\}_{j=1}^N) = \prod_{i=1}^M \frac{(x_i a_i u_N)_\infty}{(x_i u_N)_\infty} \prod_{j=1}^N \frac{(qu_j/u_{j-1})_\infty}{(b_j u_j/u_{j-1})_\infty} u_j^{\gamma_j} \quad (u_0 = 1, u_N = \prod_{j=1}^N u_j), \tag{10}$$

とおくと

$$\Psi_0 = \langle \Phi p_0 \rangle,\ \Psi_{j,i} = \langle \Phi p_{j,i} \rangle \quad (1 \le j \le N, 1 \le i \le M), \tag{11}$$

がパフ系の解の基底になる ([4] [5] など). ここで $\langle f(\{u_j\}) \rangle = \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} f(q^{n_j})$ を表し, $p_0 = 1$, $p_{j,i} = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1-x_k u_N}{1-a_k x_k u_N} \cdot \frac{u_{j-1}-b_j u_j}{1-a_i x_i u_N}$ である. 互換 $\sigma_i = \{x_i \leftrightarrow x_{i+1}, a_i \leftrightarrow a_{i+1}\}$ とおくと, 次が成り立つ

$$\sigma_i \begin{bmatrix} p_{j,i} \\ p_{j,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_i - a_{i+1}x_{i+1}} \begin{bmatrix} (1-a_i)x_i & a_i x_i - a_{i+1}x_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & (1-a_{i+1})x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{j,i} \\ p_{j,i+1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\sigma_i(p_{j,k}) = p_{j,k} (k \ne i, i+1). \tag{13}$$

また, 変数 x_M に対する q シフト $T_{x_M}(f(x_M)) = f(qx_M)$ に対して, 次が成り立つ. 互換の積 $\rho = \sigma_M \cdots \sigma_1$ とおくと,

$$\begin{array}{l} T_{x_M}(\Psi_0) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}), \\ T_{x_M}(\Psi_{j,i}) = \rho(\Psi_{j,i+1})\ (i \ne M), \\ T_{x_M}(\Psi_{j,M}) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}). \end{array} \tag{14}$$

$*$ は x_M に関する有理函数を表す. ここで, $\overrightarrow{\Psi} = [\Psi_0, \Psi_{1,1}, \Psi_{1,2}, \cdots, \Psi_{N,M}]$ とおくと, このパフ系は次のように表すことができる

$$T_{x_M} \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} A, \quad A = R_{M-1} R_{M-2} \cdots R_1 Q_M. \tag{15}$$

ここで, 行列 R_i, Q_M は $(MN+1)$ 次正方行列である. 他変数に対する q シフトは, (14) に対して置換 σ_i を用いることによって求められる.

2.2 $\mathcal{F}_{N,M-1}$ が満たすモノドロミー保存変形

(11) の満たすパフ系の係数行列はその作り方から両立条件 $A_j(T_{x_j} A_i) = A_i(T_j A_j)$ を満たす. このことから, それを特殊化して簡約化したものを, あるモノドロミー保存変形のラックス形式と解釈して目標の方程式を得る.

Definition 2.1　行列 $A = A(z,t)$, $B = B(z,t)$ を

$$A = X_1 X_2^{-1} \cdots X_{2M-1} X_{2M}^{-1} d, \tag{16a}$$

$$B = X_{2M}(z/q) \cdot X_{2M-1}(z/q)^{-1} d', \tag{16b}$$

とする. ただし, d, d' は対角行列, $X_i = X_i(z,t) = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} & 1 & & & \\ & u_2^{(i)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_N^{(i)} & 1 \\ z & & & & c_i/\prod_{j=1}^N u_j^{(i)} \end{bmatrix}$ とする. このとき

$$A \cdot B(qz) = B \cdot A(qt), \tag{17}$$

によって定まる方程式系を考える. この方程式系は $2(M-1)N$ 個の変数を持つ.

Remark 2.1　(16) (17) によって定まる方程式系は, 未知関数 $\{u_j^{(i)}\}$ の双有理変換の合成で定まる.

Remark 2.2　$N = 1$ の場合, (16) (17) で定まる方程式系は q-Garnier 系 [7] [8] に相当する [6].

(16) (17) で定まる方程式系に対して, 次のことが成り立つ.

Theorem 2.1　(17) で定義されるモノドロミー保存変形は, $\mathcal{F}_{N,M-1}$ で表される解を持つ.

証明の概要を述べる. (15) に対して, あるパラメーターを特殊化すると, パフ系の未知関数 Ψ_0, $\Psi_{i,j}$ のうち $\Psi_{j,M}$ のみが x_M に依存するようになる. $\Psi_{j,M}$ 以外の未知関数を Ψ_0 の係数に読み替えて, $\frac{\Psi_{j,i}}{\Psi_0}$ $(i \neq M)$ を x_M 以外の変数に依存する関数として $r_{j,i}$ とおくと, 式 (15) は次のように表せる

$$T_{x_M} \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} X'_1 X'^{-1}_2 \cdots X'^{-1}_{2M-1} X'_{2M} d''. \tag{18}$$

ここで $\overrightarrow{\Psi} = [\Psi_0, \Psi_{1,M}, \Psi_{2,M}, \cdots, \Psi_{N,M}]$ とおく. d'' は対角行列, $X'_i = X'_i(z,t) = \begin{bmatrix} u_1'^{(i)} & 1 & & & \\ & u_2'^{(i)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_N'^{(i)} & 1 \\ z & & & & c_i/\prod_{j=1}^N u_j'^{(i)} \end{bmatrix}$ を表し, $u_j'^{(i)}$ は $\{r_{j,i}\}$ の有理函数で表される. これと (16) を見比べて, 結果を得る.

参考文献

[1] E. Heine., (1846) Uber die Reihe..., *Reine.Angew.Math.,* **32** , 210–212.

[2] E. Heine., (1847) Untersuchungen uber die Reihe..., *Reine.Angew.Math.,* **34** , 285–328.

[3] Jimbo M., and Sakai H., (1996) A q-analogue of the sixth Painlevé equation, *Lett. in Math. Phys.*, **38**, 145-154.

[4] Matsuo A., (1993) Jackson integrals of Jordan-Pochhammer type and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations, *Commun. Math. Phys.*, **151**, 263–273.

[5] Mimachi, K., (1996) A solution to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and its application to eigenvalue problems of the Macdonald type, *Duke Math. J.*, **85**, 635–658.

[6] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation, preprint, nlin.SI/1804.08921.

[7] Sakai, H., (2005) A q-Analog of the Garnier System, *Funkcialaj Ekvacioj*, **48**, 273–297.

[8] Sakai, H., (2005) Hypergeometric solution of q-Schlesinger system of rank two, *Lett. Math. Phys.*, **73**, 237–247.

[9] Suzuki, T., (2015) A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, *AMS Contemp. Math.*, **651**, 25–38

[10] Tsuda T., (2012) Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type, *Quart. J. Math*, **63** 489–505.

Mixed Morrey spaces and the boundedness of the maximal operators

首都大学東京大学院　理学研究科数理科学専攻
野ヶ山　徹 (Toru Nogayama) *

概 要

1938 年に楕円型微分作用素の有界性を調べるために C.B.Morrey により Morrey 空間が導入された. 混合 Morrey 空間は Morrey 空間の一つの自然な拡張であり, さらに種々の関数空間（L^p 空間や混合 L^p 空間）の一般化にもなっている. 本講演では, 混合 Morrey 空間の諸性質を述べ, 調和解析で重要である極大作用素の有界性について議論する.

1 Introduction

Lebesgue 空間 L^p は解析学において最も基本的な空間であり, 様々な一般化がこれまでに成されてきている. その中の一つとして, 1961 年に Benedek と Panzone により混合ノルムを備えた Lebesgue 空間 $L^{\vec{p}}$ が導入された [4]. また一方で, 1938 年には楕円型微分作用素の有界性を調べるために C.B.Morrey により Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q$ が導入された [12]. 後に [13, 15, 19] などにおいて, Morrey 空間は盛んに研究されている.

本講演では, この二種類の空間を組み合わせた, 混合モレー空間 $\mathcal{M}^{\vec{p}}_{\vec{q}}$ を導入する. この空間は, Morrey 空間の一つの自然な拡張であり, L^p 空間や $L^{\vec{p}}$ 空間の一般化にもなっている. さらに, 調和解析で重要な作用素である Hardy–Littlewood の極大作用素の混合モレー空間における有界性について議論する.

以下, 次のような記号を用いていく. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \ldots$ は各成分が非負または無限大の n 次元ベクトルを表し, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n), \vec{q} = (q_1, \ldots, q_n), \vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ とする. 定義より, 例えば, $0 < \vec{p} < \infty$ のような不等式は, 各 i に対して, $0 < p_i < \infty$ が成り立つこととする. さらに, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{1}{\vec{p}} = \left(\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\right), \quad \frac{\vec{p}}{r} = \left(\frac{p_1}{r}, \ldots, \frac{p_n}{r}\right), \quad \vec{p'} = (p_1', \ldots, p_n'),$$

のように定める. ここで, $p_j' = \frac{p_j}{p_j - 1}$ は p_j の共役指数である. $Q = Q(x, r)$ で, 中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の n 次元立方体を表し, その各辺は各座標軸に対し平行であるとする. n 次元立方体全体の集合を $\mathcal{Q}$ とかく. また, $|Q|$ は立方体 Q の体積を, $\ell(Q)$ は立方体 Q の辺長をそれぞれ表すとする. 最後に, $A \lesssim B$ で, ある定数 $C > 0$ が存在して, $A \leq CB$ となることを表し, $A \sim B$ は $A \lesssim B$ であり, $B \lesssim A$ でもあることとする.

*toru.nogayama@gmail.com,

2 Preliminaries

この章では, 混合モレー空間を定義するために, モレー空間と混合ルベーグ空間の定義と性質を確認する.

$0 < q \le p \le \infty$ とする. モレーノルム (*Morrey norm*) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}$ を, 可測関数 f に対して,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\left\{ |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} : \ Q \text{ is a cube in } \mathbb{R}^n \right\}$$

のように定義する. モレー空間 (*Morrey space*) $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ が有限であるような可測関数 f 全体の集合とする.

モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $1 < q \le p < \infty$ のとき, Banach 空間になる. Hölder の不等式から, $1 \le q \le r \le p < \infty$ であるとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_1} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_r} \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_p} = \|f\|_p$$

が成り立つことがわかる. つまり,

$$L^p = \mathcal{M}^p_p \hookrightarrow \mathcal{M}^p_r \hookrightarrow \mathcal{M}^p_q \hookrightarrow \mathcal{M}^p_1$$

という包含関係が存在する.

Remark 2.1. 上の包含関係に関して, モレー空間 $\mathcal{M}^p_q$ は, L^p 空間を真に含んでいることが知られている. 実際, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ は L^p 空間の元にはならないが, モレー空間の元になることが簡単な計算でわかる.

また, [4] において, Benedek と Panzone によって, 混合ルベーグ空間が導入された.

Definition 2.2 (*Mixed Lebesgue spaces*)**.** [4] $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \in (0, \infty]^n$ とする. このとき, 混合ルベーグノルム (*mixed Lebesgue norm*) $\|\cdot\|_{\vec{p}}$ もしくは $\|\cdot\|_{(p_1,\dots,p_n)}$ を, 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\vec{p}} &= \|f\|_{(p_1,\dots,p_n)} \\ &\equiv \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^{p_1} \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \mathrm{d}x_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots \mathrm{d}x_n \right)^{\frac{1}{p_n}}\end{aligned}$$

のように定義する. $p_j = \infty$ のときは, j 変数に対して, sup ノルムをとることとする. 混合ルベーグ空間 (*mixed Lebesgue space*) $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = L^{(p_1,\dots,p_n)}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\vec{p}} < \infty$ であるような $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ とする. ここで, $L^0(\mathbb{R}^n)$ は, $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体の集合とする.

Remark 2.3. (i) $\vec{p} \in (0, \infty]^n$, f を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数とする. 各 i について, $p_i = p$ とすると,

$$\|f\|_{\vec{p}} = \|f\|_{(p_1,\dots,p_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

となるので,

$$L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

がわかる.

(ii) $1 \leq \vec{p} \leq \infty$ に対して, $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間になる.

混合ルベーグ空間について, 簡単に例と性質を述べる.

Example 2.4. Q を立方体とする. このとき, $0 < \vec{p} \leq \infty$ に対して,

$$\|\chi_Q\|_{\vec{p}} = |Q|^{\frac{1}{n}(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n})}$$

が成り立つ.

混合ルベーグ空間においても, 古典的なルベーグ空間と同様の性質が成り立つ. 例えば,

Proposition 2.5 (Hölder's inequality)**.** $1 < \vec{p}, \vec{q} < \infty$ とし, $\vec{r}$ を

$$\frac{1}{\vec{p}} + \frac{1}{\vec{q}} = \frac{1}{\vec{r}}.$$

を満たすように定める. もし $f \in L^{\vec{p}}, g \in L^{\vec{q}}$ であれば, $fg \in L^{\vec{r}}$ であり,

$$\|fg\|_{\vec{r}} \leq \|f\|_{\vec{p}} \|g\|_{\vec{q}}$$

が成り立つ.

調和解析において重要な作用素の一つに Hardy–Littlewood の極大作用素が挙げられる. これは関数の立方体上での平均値を考え, 立方体に関して上限をとったものである. 正確な定義を与えよう. 可測関数 f に対して, Hardy–Littlewood の極大作用素 M を以下で定義する.

$$Mf(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y.$$

L^p 空間における有界性はよく知られている.

Theorem 2.6. $1 < p < \infty$ とする. このとき, $f \in L^p$ に対して,

$$\|Mf\|_p \lesssim \|f\|_p$$

が成り立つ. また, $p = 1$ のときは以下の不等式が成り立つ.

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |f(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 \quad (\lambda > 0).$$

1975 年に, Bagby が Hardy–Littlewood の極大作用素の混合ルベーグ空間における有界性を証明している [3].

Theorem 2.7. $1 < \vec{q} < \infty$ とする. このとき, $f \in L^{\vec{q}}$ に対して,

$$\|Mf\|_{\vec{q}} \lesssim \|f\|_{\vec{q}}$$

が成り立つ.

3 Mixed Morrey spaces

この章では, 混合モレー空間を定義し, いくつか性質と例を挙げていく.

Definition 3.1 (*Mixed Morrey spaces*). $\vec{q}=(q_1,\dots,q_n)\in(0,\infty]^n$ とし, $p\in(0,\infty]$ を

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\geq\frac{n}{p}$$

を満たすものとする. このとき, $f\in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して, 混合モレーノルム (*mixed Morrey norm*) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}\equiv\sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}}:\ Q\text{ is a cube in }\mathbb{R}^n\right\}$$

のように定める. 混合モレー空間 (*mixed Morrey space*) $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}<\infty$ となるような $f\in L^0(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合と定義する.

Remark 3.2. $\vec{q}\in(0,\infty]^n$, $f\in L^0(\mathbb{R}^n)$ とする.

(i) 各 i に対して, $q_i=q$ とすると, Remark 2.3 より

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}}=|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}}=|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\chi_Q\|_q.$$

したがって, $\mathbb{R}^n$ の立方体に関して上限をとると,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$$

となり,

$$\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

がわかる.

(ii) また特に, p を

$$p=\frac{n}{1/q_1+\cdots+1/q_n}$$

のようにすると,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}&=\sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}}:\ Q\text{ is a cube in }\mathbb{R}^n\right\}\\&=\sup\left\{\|f\chi_Q\|_{\vec{q}}:\ Q\text{ is a cube in }\mathbb{R}^n\right\}=\|f\|_{\vec{q}}\end{aligned}$$

となるので,

$$L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となることがわかる.

(iii) $1\leq\vec{q}\leq\infty$ と $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\geq\frac{n}{p}$ を満たす p に対して, $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間になる.

Proposition 3.3. $0<\vec{q}\leq\vec{r}\leq\infty$, $0<p<\infty$, $\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_n}\geq\frac{n}{p}$ を仮定する. このとき,

$$\mathcal{M}^p_{\vec{r}}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

いくつか例を挙げる.

Example 3.4. Remark 2.1 でも述べたように, $1 < q < p < \infty$ であるとき, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ ということはよく知られている. $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\tilde{q} = \max(q_1, \dots, q_n)$ とおき, 上の埋め込みを使うことで,

$$\mathcal{M}^p_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_{(\underbrace{\tilde{q}, \dots, \tilde{q}}_{n \text{ times}})}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となる. したがって, もし $\max(q_1, \dots, q_n) = \tilde{q} < p$ であれば,

$$f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となることがわかる.

Example 3.5. $0 < \vec{p} \leq \infty$ とし, $f(x) = \prod_{j=1}^n |x_j|^{-\frac{1}{p_j}}$ とおく. $\vec{q}$ を各 $j = 1, \dots, n$ に対して, $p_j < \infty$ のときは, $q_j < p_j$ とし, $p_j = \infty$ であるときは $q_j \leq \infty$ のようにとる. このとき, p を

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = \frac{n}{p}$$

を満たすようにとると,

$$f(x) = \prod_{j=1}^n |x_j|^{-\frac{1}{p_j}} \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

Example 3.6. Q を立方体, $\vec{q} \in (0, \infty]^n$ とする. このとき,

$$\|\chi_Q\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} = |Q|^{\frac{1}{p}}$$

となる.

4 Boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator in mixed Morrey spaces

この章では, 混合モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素に関する不等式について考える. 次の命題は, モレー空間と混合モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性を示す上で重要である.

Proposition 4.1. ([14, Lemma 4.2]) 可測関数 f と立方体 Q に対して,

$$M[\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 5Q} f](y) \lesssim \sup_{Q \subset R \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(x)| \mathrm{d}x \quad (y \in Q) \tag{1}$$

が成り立つ.

モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性は, 1987 年に Chiarenza and Frasca により証明された [5]. 定理として述べておく.

Theorem 4.2. $1 < q < p < \infty$ とする．このとき，Hardy–Littlewood の極大作用素 M はモレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ 上で有界である．つまり，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が成り立つ．

混合モレー空間における有界性は以下の通りである．

Theorem 4.3. $1 < \vec{q} < \infty$ とする．$1 < p \leq \infty$ を $\frac{n}{p} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}$ をみたすようにとる．このとき，任意の $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．

最後にベクトル値不等式に関する結果も挙げておく．

Theorem 4.4. $1 < \vec{q} < \infty$, $1 < u \leq \infty$ とする．$1 < p \leq \infty$ を $\frac{n}{p} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}$ を満たすものとする．このとき，関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty [Mf_j]^u \right)^{\frac{1}{u}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^u \right)^{\frac{1}{u}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] D. R. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., **42** (1975), 765–778.

[2] K. F. Anderson and R. T. John, *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals*, studia mathematica **69**, (1980), 19–31.

[3] R. J. Bagby, *An extended inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 419–422.

[4] A. Benedek and R. Panzone, *The spaces L^P, with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[5] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function*, Rend. Mat. **7** (1987), 273–279.

[6] G. P. Curbera, J. García-Cuerva, J. M. Martell and C. Pérez, Extrapolation with weights, rearrangement-invariant function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals, Adv. Math. **20** (2006), **203**(1), 256–318.

[7] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*. Translated and revised from the 1995 Spanish original by D. Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[8] C. Fefferman and E. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math, **93** (1971), 107–115.

[9] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathmatics 249, Springer, New York, 2008.

[10] B. Jessen, J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. **25** (1935), 217–234.

[11] F. Liu, R. Torres, Q. Xue and K. Yabuta, Multilinear strong maximal operators on mixed Lebesgue spaces, preprint

[12] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[13] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[14] Y. Sawano, D.I. Hakim and H. Gunawan, *Non-smooth atomic decomposition for generalized Orlicz-Morrey spaces*, Math. Nachr. **288** (2015), no. 14–15, 1741–1775.

[15] Y. Sawano and H. Tanaka, *Morrey spaces for non-doubling measures*, Acta Math. Sinica, **21** (2005), no. 6, 1535–1544.

[16] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[17] B. Stöckert, *Ungleichungen von Plancherel-Polya-Nikol'skij typ in gewichteten L_p^Ω-Räumen mit gemischten Norm*, Math. Nach., **86** (1978), 19–32.

[18] H. Tanaka, *personal communication.*

[19] L. Tang and J. Xu, *Some properties of Morrey type Besov-Triebel spaces*, Math. Nachr. **278** (2005), 904–917.

KMS states on Cuntz–Pimsner algebras associated with self-similar group actions and their GNS representations

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
吉田啓佑 (Keisuke YOSHIDA)

abstract

自己相似群作用から作られる C*-環上の, ゲージ作用に対する KMS 状態についての結果が得られたので発表する. 具体的には, ある条件を満たす自己相似群作用から生成される C*-環については KMS 状態が一意的に定まることを示し, さらに条件を付け加えるとその KMS 状態の GNS 表現からくる von Neumann 環の型が調べられることを述べる.

1 導入

Banach $*$-環 A の任意の元 a について $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ が成り立つとき, A を C*-環と呼ぶ. C*-環の代表例としてコンパクト空間上の連続関数環に上限ノルムを定めたものや, Hilbert 空間上の有界作用素全体に作用素ノルムを定めたもの等が知られている. 逆に, 任意の単位元を持つ可換な C*-環はあるコンパクト空間上の連続関数環と同型であり, 任意の C*-環はある Hilbert 空間上の有界作用素全体の中のノルムで閉じた部分 $*$-環と同型であることが, 基礎的な定理として知られている.

本講演で取り扱う C*-環は Cuntz–Pimsner 環と呼ばれるものの一種である. Cuntz–Pimsner 環について説明するために Hilbert C*-双加群と呼ばれるものを導入しなければならない. それは以下のように定義される.

定義 1.1. A を C*-環とし, $\mathcal{H}$ を A 上の右加群とする.

第二変数について線形な写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to A$ が任意の $x,y\in\mathcal{H}, a\in A$ について以下の条件を満たすとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を A 値の内積と呼ぶ.

- $\langle x,x\rangle \geq 0$.
- $\langle x,x\rangle = 0$ であることと $x=0$ であることは同値.
- $\langle x,y\rangle^* = \langle y,x\rangle$.
- $\langle x,y\rangle a = \langle x,ya\rangle$.

A 値の内積は $\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ によって $\mathcal{H}$ 上のノルムを定める. このノルムによって $\mathcal{H}$ が完備なときに $\mathcal{H}$ を Hilbert A-右加群と呼ぶ.

$A=\mathbb{C}$ の場合は Hilbert 空間そのものであり, A が一般の場合にも Hilbert 空間論と類似した事実がいくつか知られている. 例えば写像 $T\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ で, 随伴 $T^*\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ が存在する (随伴とは任意の $x,y\in\mathcal{H}$ について $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$ となる T^* のことである) ようなものをすべて集めた集合を $L(\mathcal{H})$ とすると, これは Hilbert 空間上の有界線形作用素全体を一般化したものに相当する集合である.

単射 $*$-準同型 $\phi\colon A\to L(\mathcal{H})$ が存在するとき, Hilbert A-右加群に $\phi(a)x$ (ただし $a\in A, x\in\mathcal{H}$) で左演算を定めることができる. こうして得られた A-双加群のことを A 上の Hilbert C*-双加群と呼ぶ. しばしば ϕ を省略して書く. 本レポートでも以降 ϕ は書かずに左演算を単に ax で記述する.

A 上の Hilbert C*-双加群 $\mathcal{H}$ が与えられると, 各演算を保存したまま A と $\mathcal{H}$ を含むようなより大きな C*-環を構成することができる. そのような C*-環は $\mathcal{H}$ の Cuntz–Pimsner 環と呼ばれている. 構成法をここでは解説しない (構成法は例えば [1] にまとめられている) が, $\mathcal{H}$ の Cuntz–Pimsner 環とは A と $\{S_x|x\in\mathcal{H}\}$ から生成されていて, 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$, $x,y\in\mathcal{H}$ 及び $a,b\in A$ について以下を満たすものである.

$$S_{\alpha x+y}=\alpha S_x+S_y,\quad S_{axb}=aS_xb,\quad S_x^*S_y=\langle x,y\rangle.$$

作用素環論には, ある数学の対象から Hilbert C*-双加群及び Cuntz–Pimsner 環を構成し, Cuntz–Pimsner 環の性質がどのようにもとの対象から与えられているかを研究するという話題がある. 例えば複素力学系から Cuntz–Pimsner 環を構成し KMS 状態 (定義は後述する) ともとの力学系の関係性に言及するという先行研究が知られている [4].

本講演では次章で定義する自己相似群作用から与えられる Cuntz–Pimsner 環を取り扱う. この Cuntz–Pimsner 環は V.Nekrashevych によって構成され [7], 例えば K 群にもとの群作用の情報が遺伝していることなどが示されている [8]. この度, あるゲージ作用に対する KMS 状態に元の群作用の情報が残されていることがわかった. 本講演ではその結果について発表する.

2 準備

この章では本公演の主要な話題である, 自己相似群作用とそこから得られる Cuntz–Pimsner 環さらに KMS 状態を定義し, 簡単に解説する. まずは自己相似群作用の定義及び Nekrashvych による Cuntz–Pimsner 環の構成を [7] に基づいて簡単に述べる.

X を $|X|\geq 2$ なる有限集合とし, X^ω を X の元たちから成る片側無限列全体とする. X^ω に離散位相たちの積位相を導入するとカントール集合と同相になる. X 上の重みが均等な数え上げ確率測度から, X^ω 上の積測度が定義される. 今回この測度を μ と書く. $u\in X^n$ としたとき, 筒集合 $uX^\omega:=\{w\in X^\omega\mid w\text{ の最初の }n\text{ 文字が }u\text{ と一致する}\}$ の測度は $\mu(uX^\omega)=|X|^{-n}$ で与えられる.

X^ω 上の自己相似群作用は以下で定義される.

定義 2.1. 群 G の X^ω 上の忠実な作用を考える. 任意の $g\in G$ と $x\in X$ に対し $h\in G$ と $v\in X$ が存在して, 任意の $w\in X^\omega$ について

$$g(xw)=vh(w) \tag{2.1}$$

を満たすとき, この作用を自己相似群作用と呼ぶ.

上の h と v は g と x から一意に定まるので $h = h(g,x), v = v(g,x)$ と書く. 自己相似群作用の例として以下のものが知られている.

例 2.2. $X = \{0,1\}$ とし, g_1 及び g_2 を次で定める X^ω 上の同相写像とする.

$$g_1(0w) = 1w,\ g_2(0w) = 0g_1(w),$$

$$g_1(1w) = 0w,\ g_2(1w) = 1g_2(w),$$

ただし $w \in X^\omega$ は任意で, $w_1 \in X^\omega$ を $1 \in X$ を並べ続けるような列としたとき, $g_2(w_1) = w_1$ と定める. このとき a と b で生成される自己同相群の中の部分群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型であり, この対応によって $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の自己相似群作用が与えられている.

以下では群 G はつねに X^ω に自己相似に作用するとし, X^ω の各元の G による軌道が X^ω で稠密であるとする (上の例もこの仮定を満たす).

続いて Hilbert C*-双加群の構成に移る. Φ_R を群環 X を自由基底に持つ $\mathbb{C}G$ 上の自由右加群とする. Φ_R の任意の元は $\sum_{x\in X} x \cdot a_x$ の形で与えられる (ただし各 a_x は $\mathbb{C}G$ の元). Φ_R に $\mathbb{C}G$ 値の内積を

$$\langle \sum_{x\in X} x \cdot a_x\ , \sum_{x\in X} x \cdot b_x \rangle := \sum_{x\in X} a_x^* b_x$$

で定義する. Φ_R に左演算を自己相似性を用いて

$$g(\sum_{x\in X} x \cdot a_x) := \sum_{x\in X} v(g,x) \cdot (h(g,x)a_x)$$

で与える. Φ_R は双加群になったので R を外し Φ と書く.

C*-環を構成するために $\mathbb{C}G$ の適切な完備化を考えたい. そのために次のように G-ジェネリック点を定義する.

定義 2.3. $g \in G$ に対し, $w \in X^\omega$ が $g(w) \neq w$ であるか g で止まっている w の開近傍が存在するかのいずれかを満たすとき w は g-ジェネリックはであると言う. g-ジェネリックな点全体を $(X^\omega)_{g-\mathrm{gen}}$ と書く. $w \in X^\omega$ がすべての $g \in G$ について g-ジェネリックであるとき w が G-ジェネリックであるという. G-ジェネリックな点全体を $(X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}$ と書く.

以下の記号を準備する.

Notation 2.4. $G(w)$ を $w \in X^\omega$ の G による軌道とする.

$\pi_w \colon \mathbb{C}G \to B(l^2(G(w)))$ を

$$g(\delta_{h(w)}) := \delta_{gh(w)}.$$

によって与えられる G の表現とする. この表現の作用素ノルムによる $\mathbb{C}G$ の閉包を A_w とする. つまり

$$A_w := \overline{\pi_w(\mathbb{C}G)}^{\|\cdot\|}$$

である.

次の結果が [7] で示されている.

(1). $w_1, w_2 \in X^\omega$ を 2 つの G-ジェネリック点とするとき,

$$A_{w_1} \simeq A_{w_2}.$$

(2). $\mathbb{C}G$ 上の双加群 Φ は A_Φ 上の Hilbert C*-双加群に拡張される.

(1) より G-ジェネリック点 w を用いて $A_\Phi := A_w$ と書くとこれは w の選び方に依らないことがわかる. さらに (2) で得られた A_Φ 上の Hilbert C*-双加群も Φ と書くことにし, Φ の Cuntz–Pimsner 環を $\mathcal{O}_\Phi$ と書く. この $\mathcal{O}_\Phi$ が今回取り扱う Cuntz–Pimsner 環である.
$\mathcal{O}_\Phi$ は次のようにとらえることができる.

定理 2.5. $\mathcal{O}_\Phi$ は以下の関係式を満たす A_Φ と $\{S_x \mid x \in X\}$ から生成される不変 C*-環である.

$$S_x^* S_y = \delta_{x,y} \tag{2.2}$$

$$\sum_{x \in X} S_x S_x^* = 1 \tag{2.3}$$

$$aS_x = \sum_{y \in X} S_y \langle y, a \cdot x \rangle \tag{2.4}$$

ただし $\delta_{x,y}$ は Kronecker の δ を意味し, $a \in A_\Phi$, $x, y \in X$ は任意である.

Remark 2.6. [7] においては上記の普遍 C*-環が $\mathcal{O}_\Phi$ の定義であるが, この普遍 C*-環が Φ の Cuntz–Pimsner 環と同型であることは容易に示せる.

これで Cuntz–Pimsner 環 $\mathcal{O}_\Phi$ の定義及び解説を一旦終える. 次に KMS 状態を定義する. まずは一般の状態の定義から始め, 後のために GNS 表現に触れる.

定義 2.7. 単位的 C*-環 A に対し, 任意の $a \in A$ で $\varphi(a^*a) \geq 0$ を満たし, さらに $\varphi(1) = 1$ であるような A 上の線形汎関数を状態と言う. A 上の状態全体の集合を $S(A)$ と書く.

φ が A 上の状態であるとき, $N_\varphi := \{a \in A | \varphi(a^*a) = 0\}$ とすると, $\langle a + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle := \varphi(a^*b)$ は A/N_φ 上の内積になる. ゆえに A/N_φ を完備化すると Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\varphi$ が得られる. $a \in A$ に対して $\pi_\varphi(a) \in B(\mathcal{H}_\varphi)$ を $\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi) := ab + N_\varphi$ で定める. この時, $\pi_\varphi \colon A \to B(\mathcal{H}_\varphi)$ は $*$-準同型である. $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ を状態 φ による A の GNS 表現と言う. GNS 表現は作用素環論において黎明期から知られる基本的な表現であり, 随所で使われる.

Remark 2.8. 表現の直和 $\oplus_{\varphi \in S(A)}(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ を考えると, A を $B(\oplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi)$ に埋め込むことができる. 従って前章で触れたように, 任意の C*-環はある Hilbert 空間上の有界線形作用素全体のなかのノルムで閉じた部分 $*$-環と見なすことができる.

Notation 2.9. $\mathcal{O}_\Phi$ 上の $\mathbb{R}$ のゲージ作用 Γ を

$$\Gamma_t(g) := g, \quad \Gamma_t(S_x) := e^{it} S_x$$

で与える. ただし $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ 及び $x \in X$ は任意.

$a \in \mathcal{O}_\Phi$ を止めておいて, $\Gamma_t(a)$ を $\mathcal{O}_\Phi$ 値の $\mathbb{R}$ 上の関数と見なす. $\Gamma_t(a)$ が $\mathbb{C}$ 上の整関数に拡張されるような a 全体を $(\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ と書く.

一般論から $(\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ は $\mathcal{O}_\Phi$ の稠密な部分 $*$-環である.

上記の記号の下で KMS 状態と呼ばれる特殊な状態は以下のように定義される. 本来より一般の $\mathbb{R}$ 作用に定義されるものだが, ここでは本講演で扱うゲージ作用についてのみ定義する. 詳しくは [9] や [2] などにまとまっている.

定義 2.10. $\beta > 0$ とする. $\mathcal{O}_\Phi$ 上の状態 φ が β-KMS 条件を満たすとは任意の $a \in (\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ と $b \in \mathcal{O}_\Phi$ に対して

$$\varphi(ab) = \varphi(b\Gamma_{i\beta}(a))$$

が成立するときのことを言う. β-KMS 条件を満たす状態を β-KMS 状態と呼び, β-KMS 状態全体の集合を $K_\beta(\Gamma)$ と書く.

定義からわかるように KMS 状態はトレース状態 (トレース状態とは任意の C*-環の 2 元 a, b について $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ となるような状態のことである. 行列の正規化されたトレースの一般化) に似た計算を可能にする. 実際ゲージ作用で止まっている元たちに対しては KMS 状態はトレース状態としてふるまう. これはかなり強力な条件である. そのことは任意の $x, y \in X$ と $g \in G$ に対して

$$\varphi(S_x g S_y^*) = e^{-\beta} \delta_{x,y} \varphi(g)$$

が成り立ち, φ を作用させたときに 0 にならないような元が限定されることなどに見られる. 上記の式を発展させると次の Remark が得られる.

Remark 2.11. 作用の自己相似性と KMS 条件から $\varphi \in K_\beta(\Gamma)$ のすべての元は任意の $g \in G$ について

$$\varphi(g) = e^{-\beta} \sum_{x \in X} \delta_{x, v(g,x)} \varphi(h(g,x)) \tag{2.5}$$

を満たすことがわかる. 特に G の単位元を考えると, $\beta \neq \log |X|$ のときは $K_\beta(\Gamma)$ は空集合である.

3 主結果

この章では本公演の主結果を述べる. まずは必要な補題を述べる. 次の補題は確率測度の簡単な議論から得られる.

補題 3.1. $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) = 1$ であることと, 任意の $g \in G$ について $\mu(X^\omega)^c_{g-\mathrm{gen}}) = 0$ であることは同値である.

主結果のうちのひとつは次の定理である.

定理 3.2. $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) = 1$ のとき $\varphi \in K_{\log|X|}(\Gamma)$ は一意に定まる. この φ は任意の $g \in G$ に対して $\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g)$ により与えられる.

証明の概略は次の通りである.

定理 3.2 の証明. 等式 (2.5) を満たすような A_Φ 上のトレース状態が定まるごとにそれを拡張した $K_\beta(\Gamma)$ の元がただ一つ定まることが [5] にある一般論からわかる.

$\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g)$ によって定義される $\mathbb{C}G$ の線形汎関数は一般論から正定値であり, $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) = 1$ の仮定からノルム連続である. よって φ は A_Φ 上の状態に拡張される. また自己相似性より G の各元は測度を保つので, φ はトレース状態である. (2.5) を満たすことも自己相似性より従う.

(2.5) を満たす A_Φ 上のトレース状態 ψ を任意にとる. 各 $g \in G$ について $|\varphi(g) - \psi(g)|$ を自己相似性を繰り返し用いて計算すると

$$|\varphi(g) - \psi(g)| \leq \mu((X^\omega)^c_{g-\mathrm{gen}})$$

がわかるので前の補題から一意性が言える. □

Remark 3.3. 3.2 の仮定 $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) = 1$ はあまり突飛なものではなく, 多くの場合に成立する. 実際, 例 2.2 など [7] で触れられている自己相似群作用はすべて定理 3.2 の仮定を満たす.

C*-環は Hilbert 空間上有界線形作用素たちの中のノルムで閉じた部分 $*$-環であった. KMS 状態の一意性が言えている場合は, 環の構造が比較的わかりやすい. そのことを観察するためにここで von Neumann 環にも触れておく. 以下 $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間である.

Notation 3.4. $D \subset B(\mathcal{H})$ に対して, $D' := \{a \in B(\mathcal{H}) |$ 任意の $d \in D$ に対して $da = ad\}$ と定める.

定義 3.5. $A \subset B(\mathcal{H})$ を C*-環とする. $A'' := (A')' = A$ となるとき A を von Neumann 環と言う.

定義 3.6. $A \subset B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする. $A \cap A' = \mathbb{C}$ のとき, A を因子環と呼ぶ.

通常, von Neumann 環を表す文字は $\mathcal{M}$ や $\mathcal{N}$ が多いが, 本レポートでは定義以外では一般の von Neumann 環を記述する箇所が少ないので, C*-環と同じ A を用いた. 因子環は von Neumann の最小構成単位であり, von Neumann 環の構造の研究は主に因子環に対して行われる.

再び KMS 状態に話題を移す. $K_\beta(Ga)$ は $S(\mathcal{O}_\Phi)$ の凸部分集合であることはすぐにわかる. [2] にあるような一般論から φ が $K_\beta(\Gamma)$ の端点であることと, $\pi_\varphi(\mathcal{O}_\Phi)''$ が因子環であることは同値である. 従って定理 3.2 の仮定のもとでは, ただ一つ存在する KMS 状態 φ に対して, $\pi_\varphi(\mathcal{O}_\Phi)''$(以降は単に $\mathcal{O}''_\Phi$ と書く) は因子環である.

証明は省くが定理 3.2 は次のように一般化できる.

定理 3.7. $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) \neq 0$ のとき, $\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g \cap (X^\omega)_{g-\mathrm{gen}})$ は KMS 状態を定める. さらに φ は $K_\beta(\Gamma)$ の端点である. 従って $\mathcal{O}_\Phi''$ は因子環である.

定理 3.2 と定理 3.7 に類似の結果は [6] で与えられている. [6] と本レポートとでは群環の完備化の仕方に違いがある. ノルムの大小関係を考えると, [6] の主定理は $\mu((X^\omega)_{G-\mathrm{gen}}) \neq 0$ の仮定の下では定理 3.2 と定理 3.7 から従うことがわかる. また端点に関する記述は [6] にはない.

以降は定理 3.2 の仮定の下で $\mathcal{O}_\Phi''$ の構造に関する結果を述べる.

定義 3.8. 単位元の有限部分射影が 0 以外に存在しない von Neumann 環を III 型 von Neumann 環と呼ぶ.

ここでは定義しないが, I 型 von Neumann 環及び II 型 von Neumann 環と呼ばれるものも存在する. 因子環はこれらのどれかに分類することができ, 型が違う von Neumann 環が同型になることはない. III 型因子環はモジュラースペクトル (定義をするのにかなりの紙幅が必要なので本レポートには定義を書かないが, [10] などに定義が記載されている) と呼ばれるものにより, III_0 型, III_λ 型 $(0 < \lambda < 1)$ 及び III_1 型のいずれかに分類できる. 本公演のもう一つの主結果はある条件下で $\mathcal{O}_\Phi''$ の型を決定したことである.

次の記号を準備する.

Notation 3.9. $w \in X^\omega$ の n 番目の文字までを並べたものを $w^{(n)} \in X^n$ と書く. $e \in G$ を G の単位元とし, $g \in G$ に対し $Y_g^n := \{w \in X^\omega \mid h(g, w^{(n)}) = e\}$ と定める. Y_g^n は単調増加な集合列である. $Y_g := \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_g^n$ と定める.

$\mathcal{O}_\Phi''$ の型は次のように決定される.

定理 3.10. 任意の $g \in G$ について $\mu(Y_g) = 1$ のとき, $\mathcal{O}_\Phi''$ は $\mathrm{III}_{|X|^{-1}}$ 型である.

より一般のゲージ作用に対応する KMS 状態について, 同様の結果が Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$($\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert C*-双加群とみた場合の Cuntz–Pimsner 環. つまり関係式 (2.2) と (2.3) を満たすような S_x たちで生成される普遍 C*-環) の場合に [3] で示されている. [3] で用いられた重要なアイデアを解説するのに次の記号を用意する. Cuntz 環は G が単位元だけから成る自明な群の場合の $\mathcal{O}_\Phi$ と思えるので, $\mathcal{O}_\Phi$ と共通の文字をここでは用いる.

Notation 3.11.

$$\theta := \sum_{x,y\in X} S_x S_y S_x^* S_y^*,$$

$$\sigma(a) := \sum_{x\in X} S_x a S_x^*,$$

$$\theta(n) := \theta\sigma(\theta)\sigma^2(\theta)\cdots\sigma^{n-1}(\theta)$$

と定める. ただし a は [3] では $\mathcal{O}_n$ の元であり, 本レポートでは $\mathcal{O}_\Phi$ の元である.

[3] で (より一般のゲージ作用) について次の補題が示されている. この補題は型の決定において鍵となっている.

補題 3.12. $a \in \mathcal{O}_n''$ をゲージ作用で止まっている元とする. このとき強 $*$ 位相で

$$\sigma(a) = \lim_{n\to\infty} \theta(n) a \theta(n)^*$$

である.

この度次の命題を示すことができた. 次の命題から [3] と同様の議論によって, 定理 3.10 が示される.

命題 3.13. $g \in G$ について, 強 $*$ 位相で

$$\sigma(g) = \lim_{n\to\infty} \theta(n) g \theta(n)^*$$

であることと,

$$\mu(Y_g) = 1$$

であることは同値である.

参考文献

[1] N. P. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations.* Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[2] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.* Second edition. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, (1997). xiv+519 pp.

[3] M. Izumi, *Subalgebras of infinite C-algebras with finite Watatani indices. I. Cuntz algebras.* Comm. Math. Phys. **155** (1993), no. 1, 157–182.

[4] T. Kajiwara, and Y. Watatani, *C*-algebras associated with complex dynamical systems.* Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 3, 755–778.

[5] M. Laca and S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras.* J. Funct. Anal. **211** (2004), no. 2, 457–482.

[6] M. Laca, I. Raeburn, J. Ramagge, M. F. Whittaker, *Equilibrium states on the Cuntz–Pimsner algebras of self-similar actions.* J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 11, 6619–6661.

[7] V. V. Nekrashevych, *Cuntz–Pimsner algebras of group actions.* J. Operator Theory **52** (2004), no. 2, 223–249.

[8] V. V. Nekrashevych, *C*-algebras and self-similar groups.* J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 59–123.

[9] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄, 作用素代数入門： Hilbert 空間より von Neumann 代数, 現代の数学 **23**, 共立出版 (1985)

[10] 生西明夫・中神祥臣, 作用素環入門 I 関数解析とフォン・ノイマン環, 岩波書店 (2007)

Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
三栖邦康 (Kuniyasu MISU)

1 導入

当研究では、未知関数 $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ についての次のような初期値問題を扱います。

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \nu|Du(x,t)| - |Du(x,t)|\mathrm{div}\left(\dfrac{Du(x,t)}{|Du(x,t)|}\right) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで、Du は u の空間についての勾配、div は空間についての発散です。ν は 0 以上の定数で、$u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ です。また外力項 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は局所有界な関数であり、不連続なものも含めます。典型的には $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ ($c > 0$ は定数) の場合を考えます。

方程式 (1.1) の物理的な背景としては、結晶成長現象の二次元核生成があります。二次元核生成とは、飽和溶液中にある真っ平な結晶面に、溶解している結晶分子が一か所に集まって「出っ張り」を形成し、そこを核にしてさらに結晶分子が吸着し、結晶が成長していく現象のことです [8]。方程式 (1.1) をこのような現象のモデルとして見た時、$u(x,t)$ は飽和溶液中の結晶における基準面上の位置 x、時刻 t における結晶の高さを意味します。方程式 (1.1) ($n = 2$) においては、結晶は基準面に対して垂直方向と水平方向に成長します。垂直方向には $f(x)$ の速さで成長し、水平方向の成長速度は u の等高線の外向き法線方向に対して、等高線の平均曲率 κ に一様な速度 $-\nu$ を加えたものになります（図 1、図 2)。

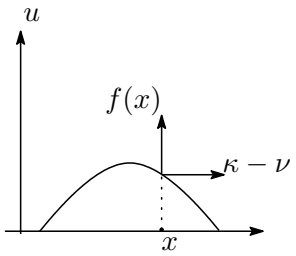


図 1: 垂直方向と水平方向の成長

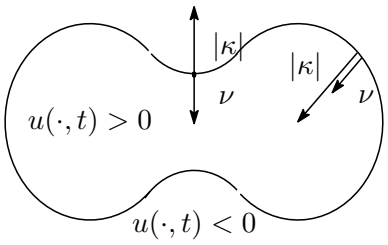


図 2: 等高線の例とその水平方向の成長

2 準備

2.1 粘性解

粘性解とは弱解の一種であり、界面発展を記述する等高面方程式に対する適切な解概念です [5]。一方で、粘性解の概念は元々、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式において、ある種の最適制御問題の値関数を一意的な解として捕捉する解概念として、Crandall、Lions により導入されました [1]。粘性解の概念はアイザック方程式においても有効で、この場合は微分ゲームに現れる値関数を捕捉しています [3]。このことは、後述の「ゲーム解釈」を考える背景となっています。

さて、方程式 (1.1) の粘性解の定義を述べるにあたって、方程式を次のように言い換えます。

$$\begin{cases} u_t(x,t)+\nu|Du(x,t)|+F(Du(x,t),D^2u(x,t))=f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、F は次のように定義されます。

$$F(p,X)=-\mathrm{Tr}\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right),\quad p\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ X\in\mathbb{S}^n.$$

$p\otimes p$ は、$p=(p_i)_{i=1}^n$ に対して、$p\otimes p:=(p_ip_j)_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{S}^n$ で定まるものです。すると、(2.1) に対する粘性解の定義は次のようになります。以降、関数 w に対して、w^*、w_* はそれぞれ w の上半連続包、下半連続包を指します。

定義 2.1 (粘性解)**.** (1) 次の条件を満たす時、関数 u は (2.1) の**粘性劣解**であるという。

(a) $u^*<\infty$.

(b) $\phi(x,t)$ を滑らかな関数とし、$u^*-\phi$ は $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ で極大を持つならば、

$$\phi_t(x_0,t_0)+\nu|D\phi(x_0,t_0)|+F_*(D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0))\le f^*(x_0)$$

が成り立つ。

(c) 任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対し、

$$u^*(x,0)\le u_0(x)$$

が成り立つ。

(2) 次の条件を満たす時、関数 u は (2.1) の**粘性優解**であるという。

(a) $u_*>-\infty$.

(b) $\phi(x,t)$ を滑らかな関数とし、$u_* - \phi$ は $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ で極小を持つならば、

$$\phi_t(x_0,t_0) + \nu|D\phi(x_0,t_0)| + F^*(D\phi(x_0,t_0), D^2\phi(x_0,t_0)) \geq f_*(x_0)$$

が成り立つ。

(c) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$u_*(x,0) \geq u_0(x)$$

が成り立つ。

(3) 関数 u が (2.1) の粘性劣解かつ粘性優解である時、(2.1) の**粘性解**であるという。

2.2 比較原理

初期値問題に対する粘性解の比較原理というのは、初期時刻で $u \leq v$ となる粘性劣解 u と粘性優解 v に対して、時間大域的に $u \leq v$ が成り立つというものです。この主張を通して粘性解の一意性が言えて、さらには解の連続性まで分かります。2 階の方程式に対する比較原理に関しては [2] に詳しく述べられています。ただし、後にも述べますが、通常の比較原理は方程式に連続性を仮定しており、方程式 (1.1) の f が不連続な場合には期待できません。

2.3 ペロンの方法

ペロンの方法とは、劣解 w_1 と優解 w_2 が $w_1 \leq w_2$ を満たしており、またいずれも初期条件（楕円型方程式なら境界条件）を真に満たしている時、$w_1 \leq u \leq w_2$ を満たす解 u が存在するという主張です。このような w_1、w_2 をそれぞれ sub barrier、super barrier と呼びます。粘性解についてのペロンの方法は、[6] で最初に与えられています。

3 結果

3.1 粘性解の一意性

方程式 (1.1) の解の一意性についての結果は、$f(x) = c\chi_\Omega(x)$ の場合で得られました。f の不連続性のため通常の比較原理が期待できないので、弱比較原理として述べています。ここでの弱比較原理の結論は、$u_* \leq v$ と $u \leq v^*$ が成り立つというものです。また、Ω の仮定は、有界開集合かつ星形であるというものです。Ω が星形であるとは次の条件を満たすことを言います。

(H1) ある $\delta > 0$ があって、任意の $\lambda \in (1-\delta, 1)$ に対して、$\overline{\lambda\Omega} \subset \Omega$ が成り立つ。

定理としては次のようになります。

定理 3.1. $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ とし、Ω は有界開集合で、(H1) を満たすとする。u_0 はあるコンパクト集合の外で定数であるとする。$\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ 上の上半連続関数 u と下半連続関数 v はそれぞれ、(1.1) の粘性劣解、粘性優解であるとする。（このとき、定義 2.1 より $u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0)$ が成り立つ。）また、ある $R > 0$ と $a \leq b$ なる定数 a、b が存在して、$u(x,t) = a$ と $v(x,t) = b$ を全ての $x \in B(0,R)^c$、$t > 0$ で満たしているとする。この時、$u_* \leq v$ と $u \leq v^*$ が $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ で成立する。

$u_* \le v$ を示す場合は、粘性劣解 u を $\lambda < 1$ によって、$u_\lambda(x,t) = \lambda^2 u(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)$ とスケーリングします。この時、u_λ と v から出る粘性不等式の外力項 f の部分を比べた時、$\overline{\lambda\Omega} \subset \Omega$ という仮定によって、背理法の矛盾を導くような差を得ます。$u \le v^*$ の場合も同様の証明です。

尚、このスター付きタイプの弱比較原理は、一例として [7, Theorem 1.4] にて、粘性解の意味での境界条件で楕円型の平均曲率流方程式に対して示されています。

通常の比較原理が解の一意性を導くのに対して、定理 3.1 は条件付きで解の一意性を導きます。想定する解のクラスは、定理 3.1 に即して、遠方で定数となるものです。すなわち、

$$\text{ある定数 } R > 0 \text{ と } C \in \mathbb{R} \text{ が存在して、任意の } x \in B(0,R)^c \text{ と } t > 0 \text{ で、} u(x,t) = C \text{ が成り立つ} \tag{3.1}$$

というものです。一意性について述べた主張として次の系が得られます。

系 3.2. $f(x)$、Ω、u_0 は定理 3.1 と同じ仮定を満たすものとする。方程式 (1.1) に対して (3.1) を満たす連続な粘性解 u が存在するならば、(3.1) を満たす粘性解は u のみである。

3.2 解の漸近形

解の漸近形についての結果は $f(x) = c\chi_\Omega(x)$、$u_0 = 0$ の時に得られました。この場合、方程式を改めて書くと次のようになります。

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \nu|Du(x,t)| - |Du(x,t)|\mathrm{div}\left(\dfrac{Du(x,t)}{|Du(x,t)|}\right) = c\chi_\Omega(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.2}$$

漸近形を得る過程で、漸近形を解として持つような次の定常方程式を考えます。

$$\begin{cases} \nu|DU(x,t)| - |DU(x,t)|\mathrm{div}\left(\dfrac{DU(x,t)}{|DU(x,t)|}\right) = c & \text{in } \Omega, \\ U(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

定常解の存在を得るために Ω に対して次の「外部球条件」(図 3) を仮定します。この仮定はペロンの方法の super barrier を構成する際に用います。

(H2) 任意の $z \in \partial\Omega$ に対して、ある $z_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して、$|z - z_0| > \frac{n-1}{\nu}$ と $B(z_0, |z-z_0|) \subset \Omega^c$ が成り立つ。

尚、この仮定はもう少し弱めることができますが、煩雑になるため省略します。定理としては次のようになります。

定理 3.3. (H2) を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の有界開集合 Ω について、以下が成り立つ。

(1) 定常方程式 (3.3) の粘性解 $U \in C(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する。

(2)
$$u(x,t) := \begin{cases} \min\{U(x), ct\} & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$
は (3.2) の連続な粘性解である。さらに Ω が (H1) を満たすならば、この u は一意的な粘性解である。

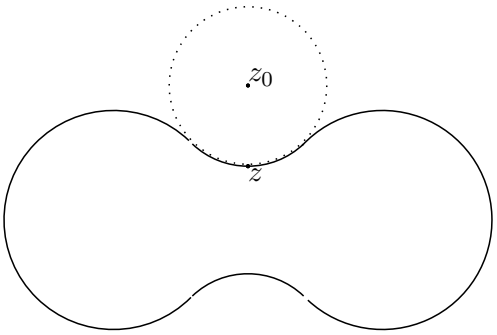


図 3: 外部球条件

3.3 ゲーム解釈

先行研究 [7] では、外力項 f が 0 の場合に、二人のプレイヤーで行われるあるゲームの値関数 $u^\epsilon(x,t)$ が、$\epsilon \to 0$ のとき方程式の解に収束することが示されています。当研究では、不連続外力項付きの方程式 (1.1) に対しても、f をランニングコストとしてゲームに加えることで、対応する値関数が (1.1) の解に収束することが示せました。(1.1)（$n = 2$）に対応するゲームのルールは以下のようになります。

- プレイヤーの名前を Paul、Carol とする。
- $x \in \mathbb{R}^2$、$t > 0$、$\epsilon > 0$ を固定する。x は Paul の初期位置、t はゲームが行われる時間を意味する。
- ゲームの時間を ϵ^2 ごとに区切る。正確には、$N := \lceil \frac{t}{\epsilon^2} \rceil$ ステップに区切る。
- 各ステップ i $(i = 0, 1, \cdots, N-1)$ において

  (1) Paul は v_i、w_i の値をそれぞれ S^1 の元から選択する。

  (2) Carol は Paul の選択が確定してから、b_i の値を $+1$ にするか -1 にするかを選択する。

  (3) 両者の選択に基づいて、次のステップにおける状態を以下のように定める。

$$x_{i+1} = x_i + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i + \nu w_i \epsilon^2,$$

$$y_{i+1} = y_i + \epsilon^2 f(x_i).$$

  ここで、x_i はステップ i における Paul の平面上の位置であり、y_i はステップ i の時点で Paul が積み重ねたコストである。$x_0 = x$ であり、$y_0 = 0$ である。

- ゲームが終了した時点で、コスト y_N に $u_0(x_N)$ を加算し、これをトータルコストとする。Paul は各選択において、このトータルコスト $y_N + u_0(x_N)$ の最小化を、Carol は最大化を目指す。両者が最善の選択をした場合のトータルコストが値関数 $u^\epsilon(x,t)$ である。値関数を定式化すると次のようになる。

$$u^\epsilon(x,t) := \min_{v_0, w_0 \in S^1} \max_{b_0 = \pm 1} \cdots \min_{v_{N-1}, w_{N-1} \in S^1} \max_{b_{N-1} = \pm 1} [y_N + u_0(x_N)] \ (t > 0),$$

$$u^\epsilon(x,0) := u_0(x).$$

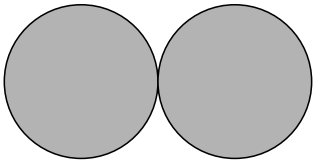


図 4: Ω の形

値関数が解に収束するというのは、正確には次の主張になります。

定理 3.4.

$$\overline{u}(x,t) := \overline{\lim_{\substack{(y,s)\to(x,t)\\ \epsilon\searrow 0}}} u^\epsilon(y,s), \quad \underline{u}(x,t) := \underline{\lim_{\substack{(y,s)\to(x,t)\\ \epsilon\searrow 0}}} u^\epsilon(y,s)$$

とする。この時、$\overline{u}(x,0) = \underline{u}(x,0) = u_0(x)$ であり、$\overline{u}$ と $\underline{u}$ はそれぞれ (1.1) の粘性劣解、粘性優解である。

3.4 ゲーム解釈の応用

先行研究 [4] で研究されている $\nu < 0$ の場合についても、ゲームのルールに若干の修正を加えることで定理 3.4 同様の収束の結果が得られました。Paul と Carol の目的を入れ替える、つまり値関数 $u^\epsilon(x,t)$ として次のものを考えることでゲーム解釈が実現します。

$$u^\epsilon(x,t) := \max_{v_0,w_0\in S^1}\min_{b_0=\pm 1}\cdots\max_{v_{N-1},w_{N-1}\in S^1}\min_{b_{N-1}=\pm 1}[y_N + u_0(x_N)] \ (t>0),$$

$$u^\epsilon(x,0) := u_0(x).$$

ところで、[4] は、$\nu = -1$ の時の解の漸近速度 $\lim_{t\to\infty}\frac{u(x,t)}{t}$ を調べていますが、一例として、$\Omega = \overline{B}((-1,0),1)\cup\overline{B}((1,0),1)$（図 4）の場合を考えています。[4] はこの場合、$u(x,t) = ct\chi_\Omega(x)$ という自明解の他に、漸近速度が平面上の場所によらず 0 より真に大きいような非自明解の存在を示しています [4, Proposition B.2]。

当研究ではこの評価を改良し、次の結果を得ました。

定理 3.5. $\nu = -1$、$u_0 = 0$、$f(x) = c\chi_\Omega(x)$、$\Omega = \overline{B}((-1,0),1)\cup\overline{B}((1,0),1)$ とする。この時、$x\in\mathbb{R}^2$ に関して局所一様に

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(x,t)}{t} = c$$

となるような粘性解 u が存在する。

ここでは、ゲームの値関数を下から評価することで、sub barrier $\overline{u}$ を下から評価し、漸近速度 c の解の存在を得ています。値関数の評価については、Paul が平面上のどの場所からでも Ω 内に入ることのできるような戦略と、一旦 Ω 内に入ってしまえばゲームが終了するまでずっと Ω 内に留まっていられるような戦略を具体的に与えることで実現しました。

参考文献

[1] Crandall, M.G.; Lions, P.L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1–42.

[2] Crandall, M.G.; Ishii, H.; Lions, P.L. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.

[3] Evans, L. C.; Souganidis, P. E. *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*. Indiana University Mathematics Journal. Vol. 33 (1984) no. 5, 773–797

[4] Giga, Y.; Mitake, H.; Tran, H, V. *On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*. SIAM J. Math. Anal. Vol. 48 (2016), no. 5, 3515–3546.

[5] Giga, Y. *Surface Evolution Equations. A Level Set Approach*, Monogr. Math.99, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2006.

[6] Ishii, H. *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Math. J. Vol. 55 (1987), no. 2, 369–384.

[7] Kohn, R. V.; Serfaty, S. *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*. Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 3, 344–407.

[8] Ohara, M.; Reid, R. C. *Modeling Crystal Growth Rates from Solution*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

シュレディンガー方程式の解の H^s 型波面集合について

安部 文人 (Fumihito Abe)
東京理科大学大学院 理学研究科数学専攻 修士課程 2 年

1 導入

偏微分方程式の解の特異性は時間の可逆性と結びついており, 波動方程式の解の特異性は有限の速度で伝播する. 量子力学的波動方程式とよばれるシュレディンガー方程式において, 同様の結果は成り立たず解の特異性の伝播速度は無限大であるという性質をもつ. 粒子の遠方での運動の様子から特異性の解析ができ, 特異性が伝播する様子は波面集合を用いることで詳しく調べることができる. 本研究では, 次の時間に依存する劣 2 次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の初期値問題を考え, その解の H^s 型波面集合を波束変換を用いて考察した.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u = V(t,x)u(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{S}$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ で $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. さらに $V(t,x)$ に対しては以下の仮定をする.

仮定　$V(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ であり, $\rho < 2$ が存在して, 任意の多重指数 α に対して, 定数 C_α が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{\rho-|\alpha|}$$

が任意の $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ について成り立つ.

2 平滑化作用

自由シュレディンガー方程式において,

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\Rightarrow u(t,x) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ が成り立つ. さらにここで初期値に対して $\langle x\rangle\, u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の仮定を加えると , $(x+it\nabla)e^{\frac{i}{2}t\Delta} = e^{\frac{i}{2}t\Delta}x$ より ,

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)\Big((x+it\nabla)u(t,x)\Big) = 0 \\ (x+it\nabla)u(t,x)\big|_{t=0} = xu_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

が成り立つ. したがって $(x+it\nabla)u(t,x) \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ となり, $\nabla u(t,x) \in C(\mathbb{R}; L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ $(t \neq 0)$ がわかる. ここで u_0 になめらかさの条件はつけていないため, u_0 の遠方での減衰から解のなめらかさがしたがっている. このような性質を「平滑化効果」という.

---

*本研究は指導教員である加藤 圭一先生との共同研究に基づくものである.

しかし , これでは t が 0 を離れた瞬間に微分ができるということしかわからない . 方向別に精密化して考えることでより精密な結果が得られる. そこで波面集合を考える.

3 波面集合

関数 $f(x)$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級となることの同値な条件をフーリエ変換を用いて次のように表すことができる.

命題 関数 $f(x)$ が $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在し , 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し , $C_N > 0$ が存在し ,

$$|\widehat{(\chi f)}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}$$

を満たすことである. この命題を方向別に精密化したものが次の C^∞ 型波面集合である.

定義 (C^∞ 型波面集合) $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して
$(x_0, \xi_0) \notin WF_{C^\infty}(f)$
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し , $C_N > 0$ が存在し

$$|\widehat{(\chi f)}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}$$

を満たすことである.
ここで $\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ix\xi} f(x) dx$, ξ_0 の錐近傍 $\Gamma :\Leftrightarrow \xi_0$ の近傍で , $\xi \in \Gamma, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha\xi \in \Gamma$ である.

次に局所ソボレフ空間を定義し, H^s 型波面集合を定義する.

定義 (局所ソボレフ空間) $f \in \mathcal{S}'$, Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合.
$f \in H^s_{loc}(\Omega) :\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して , $\langle \xi \rangle^s \, |\widehat{(\chi f)}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を満たすことである.

この局所ソボレフ空間を方向別に精密化したものが H^s 型波面集合である.

定義 (H^s 型波面集合) $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする.
$(x_0, \xi_0) \notin WF_{H^s}(f)$
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, $\langle \xi \rangle^s \, |\widehat{(\chi f)}(\xi)| \in L^2(\Gamma)$ を満たすことである.

フーリエ変換はなめらかさを減少度に変える変換とみることができ, その方向に関して減衰があれば波面集合に入らないということである. したがって ξ の遠方での減衰をみることで特異性を調べることができる. ここで本研究で用いた波束変換と, 波束変換を用いた波面集合の特徴づけを述べる.

定義 (波束変換)
$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, 窓関数 φ から定まる f の波束変換 $W_\varphi f(x, \xi)$ を

$$W_\varphi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y - x)} f(y) e^{-iy\xi} dy \, , \qquad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

と定義する.

例えば窓関数 φ がコンパクトサポートをもつ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の元であった場合, 点 x 付近で f を切り取ってフーリエ変換している. 次にこの波束変換を用いた波面集合の特徴づけを述べる.

定理　[K.Kato-M.Kobayashi-S.Ito (2017)]

$(x_0,\xi_0)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき (i),(ii) は同値である.

(i)　$(x_0,\xi_0)\notin WF_{C^\infty}(u)$

(ii)　x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ について,$C_{N,a,\phi}>0$ が存在して,

$$|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|\leq C_{N,a,\phi}\lambda^{-N}$$

$(\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma\cap\{\xi\mid\frac{1}{a}\leq|\xi|\leq a\})$

定理　[K.Kato-M.Kobayashi-S.Ito(2017)]

$(x_0,\xi_0)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), u\in H^r(\mathbb{R}^n)$　$(r\geq 0)$ とする. このとき (i),(ii), は同値である.$s>r$ に対して,

(i)　$(x_0,\xi_0)\notin WF_{H^s}(u)$

(ii)　x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ について,

$$\int_1^\infty\lambda^{2s+n-1}\|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)\|^2_{L^2(K\times V)}d\lambda<+\infty$$

これらの定理は ξ で方向を定め, λ の減衰に置き換えて考えているものである. この C^∞ 型波面集合の特徴づけを用い, 劣二次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解の C^∞ 型波面集合の初期データによる特徴づけがなされている.

定理　[K.Kato-S.Ito (2014)]

$u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (S) の解で, $b=\min(\frac{2-\rho}{4},\frac{1}{4})$ とする. このとき x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して, $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在して,

$$(x_0,\xi_0)\notin WF_{C^\infty}[u(t_0)]\Leftrightarrow|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(0;x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi))|\leq C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}$$

$\varphi_{0,\lambda}(x)=\lambda^{\frac{nb}{2}}\varphi_0(\lambda^b x)\quad(\lambda\geq 1),\quad\varphi_\lambda^{(t)}(x)=e^{\frac{i}{2}t\Delta}\varphi_{0,\lambda}(x)$

$x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi)$ は (C) の解

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau) &=\xi(\tau),\quad x(t_0)=x\\ \dot{\xi}(\tau) &=-\nabla V(\tau,x(\tau)),\quad \xi(t_0)=\xi.\end{cases}\tag{C}$$

4　主定理

主定理　$u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (S) の解で, $s\in\mathbb{R}$, $b=\min(\frac{2-\rho}{4},\frac{1}{4})$ とする. このとき x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して,

$$(x_0,\xi_0)\notin WF_{H^s}[u(t_0)]\Leftrightarrow\int_1^\infty\lambda^{2s+n-1}\|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\|^2_{L^2(K\times V)}d\lambda<+\infty$$

運動量の大きいところが特異性に関する部分であり, λ に関する減衰があれば (x_0, ξ_0) を通る古典軌道上の点はすべて波面集合に入らないこと示している. ここで簡単のために $V = 0$ とすると, 特性曲線 (C) は以下のようになる.

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) &= \xi(\tau), \quad x(t_0) = x \\ \dot{\xi}(\tau) &= 0, \quad \xi(t_0) = \xi. \end{cases} \tag{C'}$$

これを解くと $x(t) = x + t\xi$, $\xi(t) = \xi$ となり運動量 ξ は一定であり, 速度は $\dot{x}(t) = \xi$ より運動量に比例する. 主定理より特異性に関係する部分は運動量が大きなところであり, 運動量無限大の粒子は無限大の速度をもち, 瞬時に無限遠に飛び去る. 2 節で t が 0 を離れた瞬間になめらかになることはこのイメージからもわかる.

参考文献

[1] K.Kato, M.kobayashi and S.Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform, arXiv:1408.1370v1.

[2] K.Kato, M.kobayashi and S.Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J. Math. Vol. 47 No.2 (2011), 175-183.

[3] K.Kato and S.Ito, Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with subquadratic potential, SUT J. Math. Vol. 50 No.2 (2014), 383-398

亜群 C*環のアーベル化について

慶應義塾大学理工学研究科基礎理工学専攻
紅村 冬大 *(FUYUTA KOMURA)

概要

本稿ではエタール亜群の商を導入し, 亜群 C*環のアーベル化が亜群の言葉で記述できることを紹介する. また, エタール亜群の full uniqueness property と effectiveness の関係についても述べる.

0 Introduction

C*環論は関数解析学における一分野であり, 無限次元かつ非可換な C*環が主な興味の対象となる. C*環の具体例として, 離散群から得られる群 C*環や離散力学系から得られる接合積, 有向グラフから得られるグラフ C*環がある. これらを一般化する C*環の構成法が, エタール亜群による C*環の構成である. エタール亜群に付随する C*環 (亜群 C*環) の研究は 1980 年に Renault によって始められた [9]. エタール亜群の例には離散群や離散力学系, 有向グラフから得られるものがあるが, それらに付随する亜群 C*環は既知の C*環と一致する. したがって, 亜群 C*環は広いクラスの C*環を含むと考えられている.

エタール亜群と亜群 C*環の関係を調べることは基本的な問題である. ハウスドルフ性を満たすエタール亜群の亜群 C*環については, これまでにすでに多くのことが示されている. ハウスドルフ性を満たすとは限らないエタール亜群に関しては, その亜群 C*環は十分に調べられているとは言えない. しかしながら, Connes や Exel が指摘するように, ハウスドルフ性を満たさないようなエタール亜群は自然に現れる [4],[6]. ハウスドルフ性を満たすエタール亜群に関して知られていた結果が, ハウスドルフでないエタール亜群に関しては成り立たないことがあると Exel によって 2011 年に指摘されている [5].

本稿では, エタール亜群の商を導入し, 亜群 C*環のアーベル化がエタール亜群の言葉で記述できることを紹介する. エタール亜群の商は元のエタール亜群がハウスドルフであってもハウスドルフ性を満たすとは限らないので, 初めからエタール亜群にはハウスドルフ性を仮定せずに議論することが重要となる. エタール亜群の商を用いることで, エタール亜群の full uniqueness property という性質が effective という性質を導くことを紹介する. この結果は, すでに [1] にてハウスドルフ性を満たすエタール亜群に対して示されていた命題であるが, エタール亜群の商を用いるとより直接的な証明が得られる.

次に, 商を用いてエタール亜群のアーベル化を構成し, エタール亜群のアーベル化から得られる亜群

* fuyuta.k@keio.jp

C*環が元の亜群 C*環のアーベル化となることを紹介する. また, エタール亜群のアーベル化が本稿で導入される双対亜群によって記述できることも紹介する.

本稿は主に [7] の内容を元にしている.

1 C*環

本節では C*環の定義や例を紹介する. 詳しくは作用素環論の教科書 [11] や [2] などの教科書を参照せよ.

*-代数とは, 積, 対合 (involution) を持つ $\mathbb{C}$ 線形空間のことである. C*環とは, ノルムを持つ*-代数 A で, 任意の $a, b \in A$ に対し $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ が成り立つもののことである. C*環は必ずしも積の単位元を持っている必要はない.

Example 1.1. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. $C_0(X)$ を X 上の無限遠で消える複素数値連続関数からなる集合とする. ここで, 連続関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ が無限遠で消えるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクト集合となることである. X がコンパクトである時, $C_0(X)$ は X 上の連続関数全体からなる集合 $C(X)$ と一致する.

$C_0(X)$ は各点での演算によって $\mathbb{C}$ 代数となり, 各店での複素共役によって対合が定まり*-代数となる. また, $f \in C_0(X)$ のノルムを $\|f\| := \sup_{x\in X}|f(x)|$ によって定めると, $C(X)$ は C*環となる. Gelfand-Naimark の定理により, 任意の単位的な可換 C*環はある $C(X)$ と同型になる.

Example 1.2. Hilbert 空間 H に対し, H 上の有界線形作用素全体からなる集合を $B(H)$ とする. $B(H)$ は自然な構造によって C*環となる.

A,B を C*環とする. 写像 $\varphi\colon A \to B$ が線形で積, involution を保つ時, φ を*-準同型と呼ぶ. 特に, $B(H)$ への*-準同型を表現と呼ぶことがある.

A を C*環とする. $\{xy - yx \in A \mid x, y \in A\}$ によって生成される A のイデアルを I とし, A のアーベル化を $A^{\mathrm{ab}} := A/I$ と定める. A^{ab} は以下の普遍性を満たす可換 C*環である.

Proposition 1.3. A を C*環, $Q\colon A \to A/I$ を商写像とする. 任意の可換 C*環 B と*-準同型 $\pi\colon A \to B$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & D \\ {\scriptstyle Q}\downarrow & \nearrow_{\tilde{\pi}} & \\ A^{\mathrm{ab}}, & & \end{array}$$

を可換にするような*-準同型 $\tilde{\pi}\colon A^{\mathrm{ab}} \to B$ が一意に存在する.

2 エタール亜群と亜群 C*環

本節ではエタール亜群と亜群 C*環の定義をする. 詳しくは [9] や [10], [8] などのテキストを参照せよ.

亜群とは全ての射が可逆な小圏である. 本稿では次のような記号を用いる;
亜群 G は

- unit space と呼ばれる部分集合 $G^{(0)} \subset G$,
- source map と range map $s, r\colon G \to G^{(0)}$,
- $G^{(2)} \subset G \times G$ 上で定義されている積

$$G^{(2)} := \{(\alpha,\beta) \in G \times G \mid s(\alpha) = r(\alpha)\} \ni (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta \in G$$

で構成され, これらは以下を満たす;

1. 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し, $s(x) = r(x) = x$ が成り立つ,
2. 任意の $(\alpha,\beta) \in G^{(2)}$ に対し, $s(\alpha)\beta = \beta$ と $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ,
3. 任意の $(\alpha,\beta) \in G^{(2)}$ に対し, $s(\alpha\beta) = s(\beta)$ と $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ,
4. 任意の $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma) \in G^{(2)}$ に対し, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ,
5. 任意の $\gamma \in G$ に対し, ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma',\gamma),(\gamma,\gamma') \in G^{(2)}$, $s(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ.

上の 5 における γ' は γ によって一意に決定されるので, γ' を γ^{-1} と表す.

集合 $F \subset G^{(0)}$ に対し, $G_F := s^{-1}(F)$, $G^F := r^{-1}(F)$, と定義する. 特に, $x \in G^{(0)}$ に対し $G_x := G_{\{x\}}$, $G^x := G^{\{x\}}$ と定義する.

積 $G^{(2)} \ni (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta \in G$ と inverse $G \ni \alpha \mapsto \alpha^{-1} \in G$ が連続になる位相を備えた亜群 G を, 位相亜群と呼ぶ. 任意の $\alpha \in G$ に対し $s(\alpha) = \alpha^{-1}\alpha$, $r(\alpha) = \alpha\alpha^{-1}$ が成り立つことから, 位相亜群の source map と range map は連続である.

X, Y を位相空間とし, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. f が局所同相写像であるとは, 任意の $x \in X$ に対し x の開近傍 $U \subset X$ が存在し, $f(U) \subset Y$ が開集合となり, $f|_U$ が像への同相写像となることである. 局所同相写像は開写像となることがわかる.

Definition 2.1. G を位相亜群とする. G がエタールであるとは, $G^{(0)} \subset G$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であり, かつ source map $s\colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像となることである. エタール位相亜群を単にエタール亜群と呼ぶ.

Remark 2.2. G がエタールであることの定義に $G^{(0)} \subset G$ の局所コンパクトハウスドルフ性を含めることは一般的ではない. また, 本稿ではエタール亜群全体のハウスドルフ性は仮定しない.

G をエタール亜群とする. 任意の $\alpha \in G$ に対し $r(\alpha) = s(\alpha^{-1})$ が成り立つことから, $r\colon G \to G^{(0)}$ も局所同相写像となる. また, source map と range map はそれぞれ G から G への写像としても局所同相写像となることが分かる. 特に, $G^{(0)}$ は G の開部分集合となる. 一方, $G^{(0)}$ が G の閉部分集合であることと G が Hausdorff であることが同値となることが知られている.

開集合 $U \subset G$ が bisection であることを, $s|_U, r|_U$ が単射になることと定義する. 定義より, エタール亜群の位相は bisection 全体によって生成されている. 特に, エタール亜群の位相は局所コンパクトハウスドルフである開集合によって生成されている.

エタール亜群は文献によって r-discrete 亜群と呼ばれるが, それは以下の命題が成り立つからであ

ると考えられる.

Proposition 2.3. G をエタール亜群, $x \in G^{(0)}$ とする. このとき, G_x, G^x は相対位相に関し離散集合になる.

Proof. $\alpha \in G_x$ とする. $\alpha \in U$ となる bisection $U \subset G$ をとる. $s|_U$ が単射であることから $U \cap G_x = \{\alpha\}$ となり, G_x は離散集合となる. G^x が離散集合であることも同様に示される. □

一方で, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し G_x と G^x が離散であっても, G がエタールであるとは限らない.

エタール亜群 G に対し, C*環 $C^*(G)$ を構成する. G がハウスドルフ性を満たす時は, G 上のコンパクトサポートを持つ連続関数全体からなるベクトル空間 $C_c(G)$ に積と involution を定め, その完備化として亜群 C*環 $C^*(G)$ を定義する. G がハウスドルフ性を満たさないとき, G 上の連続関数を考えるだけでは G の情報を捉えきることができない. そこで, G 上の "局所的に連続" な関数の集合を考えることが重要となる.

$U \subset G$ を bisection とする. U 上のコンパクト台を持つ複素数値連続関数のなすベクトル空間を $C_c(U)$ と書く. $C_c(U)$ の元 f を, $G \setminus U$ 上で 0 と定義することで G 上の関数と同一視する. G がハウスドルフでないとき, f は G 上の関数として連続であるとは限らない.

$C(G)$ を, $\bigcup_U C_c(U)$ の linear span と定義する. ここで, $\bigcup_U C_c(U)$ は G の bisection 全体に関する和集合を考えている. つまり, $C(G)$ の元 f は G 上の関数であり, ある有限個の bisection $U_j \subset G$ と有限個の関数 $f_j \in C_c(U_j)$ を用いて $f = \sum_j f_j$ と表される. $C(G)$ は関数の和, スカラー倍によってベクトル空間となる. $C(G)$ に*-代数の構造を定めるべく, $C(G)$ の積, involution を定める.

Definition 2.4. G をエタール亜群, $f, g \in C(G)$ とする. f と g の積 $f * g$ と f の involution f^* を以下ように定める;

$$f * g(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta), \quad f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

以上の構造に関して, $C(G)$ は*-代数となる.

$G^0 \subset G$ は bisection であるから, $C_c(G^{(0)}) \subset C(G)$ である. $C(G)$ の積, involution は $C_c(G^{(0)})$ 上では関数の各点での積, 複素共役に一致する. したがって, $C_c(G^{(0)})$ は $C(G)$ の*部分環となる.

$C(G)$ を完備化すべく, $C(G)$ に C*ノルムを定める. $C(G)$ の C*ノルムとして universal ノルムと reduced ノルムがよく用いられるが, 本稿では $C(G)$ の C*ノルムとして universal ノルムしか扱わない.

Definition 2.5. G をエタール亜群とする. $f \in C(G)$ に対し, その universal ノルムを

$$\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi\colon C(G) \to B(H) \text{ は*表現 }\}$$

と定める. $C(G)$ の universal ノルムによる完備化を $C^*(G)$ と書き, G の full 亜群 C*環と呼ぶ.

Remark 2.6. universal ノルムが実際に $C(G)$ の C*ノルムを定めることは非自明な事実である. 詳しくは [8] などを参照せよ.

$\pi\colon C(G) \to B(H)$ を表現とする. universal ノルムの定義から任意の $f \in C(G)$ に対し $\|\pi(f)\| \leq \|f\|$ が成り立つ. したがって, π は $C^*(G)$ 上の表現に拡張される. この事実は断りなく用いることがある.

$C_c(G^{(0)}) \subset C(G)$ という包含関係があったが, これは $C_0(G^{(0)}) \subset C^*(G)$ に拡張される. 特に, $C_0(G^{(0)})$ は $C^*(G)$ の部分 C*環である.

3 Main theorem

本節では, [7] の主結果を紹介する. 前半ではエタール亜群の full uniqueness property について, 後半では亜群 C*環のアーベル化について説明する.

3.1 エタール亜群の商

Definition 3.1. G を亜群, H を部分亜群とする. H が正規であるとは, $G^{(0)} \subset H \subset \mathrm{Iso}(G)$ が成りたち, かつ任意の $\alpha \in G$ に対し $\alpha^{-1}H\alpha \subset H$ が成り立つことと定義する.

Definition 3.2. G を亜群, $H \subset G$ を正規部分亜群, $\alpha, \beta \in G$ とする. $s(\alpha) = s(\beta)$ かつ $\alpha\beta^{-1}$ が成り立つ時, $\alpha \sim \beta$ と書く. この時, $\sim$ は G の同値関係を定める. この同値関係による G の商集合を G/H と書く.

G を亜群, H を正規部分亜群とする. この時, 商写像 $q\colon G \to C/H$ が亜群の準同型となるような G/H の亜群の構造がただ一つ定まる.

G が位相亜群であるとき, G/H の位相は商位相を考える.

Theorem 3.3. G をエタール亜群, H を開正規部分亜群とする. このとき, 以下が成り立つ;

1. G/H はエタール亜群となる.
2. 商写像 $q\colon G \to G/H$ は局所同相写像となる.
3. 以下のエタール亜群の列

$$H \xhookrightarrow{\text{包含写像}} G \xrightarrow{q} G/H$$

は完全となる, つまり $q^{-1}((G/H)^{(0)}) = H$ が成り立つ.

Proposition 3.4. G をエタール亜群, H を開正規部分亜群とする. この時, G/H がハウスドルフ性を満たすことと $H \subset G$ が閉集合であることは同値である.

位相群の部分群は開であったら閉であるが, エタール亜群の部分亜群が開であること, 閉であることに相関はない. したがって, ハウスドルフ性を満たさないエタール亜群はエタール亜群の商として自然に現れる.

エタール亜群の商は, 亜群 C*環に*-準同型を導入する.

Proposition 3.5. G をエタール亜群, $H \subset G$ を開部分亜群, $q\colon G \to G/H$ を商写像とする. $f \in C(G)$ に対し, $\tilde{f}\colon G/H \to \mathbb{C}$ を

$$\tilde{f}(\gamma) = \sum_{q(\alpha)=\gamma} f(\alpha), \quad \gamma \in G/H$$

によって定める. この時, $\tilde{f} \in C(G/H)$ であり, $C(G) \ni f \mapsto \tilde{f} \in C(G/H)$ は全射*-準同型である. したがって, 全射*-準同型 $C^*(G) \to C^*(G/H)$ が導かれる.

Definition 3.6. G をエタール亜群とする. G が full uniqueness property を持つとは, 任意の 0 でないイデアル $I \subset C^*(G)$ に対し $I \cap C_0(G^{(0)}) \neq \{0\}$ が成り立つことである.

G が full uniqueness property を持つことと, G が「表現 $\pi\colon C^*(G) \to B(H)$ に対し, π が単射であることと $\pi|_{C_0(G^{(0)})}$ が単射となることが同値」という条件を満たすことは同値である. Full uniqueness property は, $C^*(G)$ のイデアル構造を調べる際に重要となる. 例えば, $C^*(G)$ が full uniqueness property を持ち, G が minimal ならば $C^*(G)$ は simple となる. したがって, G がいつ full uniqueness property を持つか否かを調べることは重要である.

Full uniqueness property の十分条件について述べる. [1, Proposition 5.5] において, エタール亜群 G に対し, G が full uniqueness property を持つならば G は effective である」という命題が示されている. エタール亜群の商を用いると, 本命題 (Proposition 3.7) が簡単に示されることが [7] にてわかった.

Proposition 3.7. G をエタール亜群, $H \subset G$ を開部分亜群とする. Proposition 3.5 によって導かれる全射*-準同型を $Q\colon C^*(G) \to C^*(G/H)$ と書く. この時, $\ker Q \cap C_0(G^{(0)}) = \{0\}$ である. 特に, G が full uniqueness property を持つならば G は effective, つまり $G^{(0)} = \mathrm{Iso}(G)^\circ$ である.

Full uniqueness property の十分条件について, [1] や [3] の結果を紹介する. G がハウスドルフ性と第二可算公理を満たすとき, effectiveness が full uniqueness property の十分条件となることが [1, Proposition 5.5] で示されている. 近年, [3, Theorem 4.4] において G の被約亜群 C*環 $C^*_\lambda(G)$ が 0 でない “特異な元” を持たず G が effective であるとき, $C^*_\lambda(G)$ が uniqueness property を持つことが示された[*1]. 以上のことを踏まえると, 次の定理を得る (被約亜群 C*環の定義については [8] を参照せよ).

Theorem 3.8 (cf.[3, Theorem 4.4])**.** G を第二可算公理を満たすエタール亜群とする. このとき, G が full uniqueness property を満たすことは以下の 3 条件と同値である;

- $C^*(G)$ が $C^*_\lambda(G)$ と自然な全射*-準同型を通して同型となる,
- G は effective となる,
- $C^*_\lambda(G)$ は 0 でない特異な元を持たない.

3.2 亜群 C*環のアーベル化

G をエタール亜群とする. 本章では, 亜群 C*環 $C^*(G)$ のアーベル化が亜群の言葉で記述できることを紹介する.

離散群に関しては, その full 群 C*環のアーベル化は簡単に計算できる. Γ を離散群とする. full 群 C*環 $C^*(\Gamma)$ のアーベル化は, $C^*(\Gamma^{\mathrm{ab}})$ と同型になる. ここで, Γ^{ab} は Γ の群としてのアーベル化である. また, $\widehat{\Gamma^{\mathrm{ab}}}$ を可換離散群 Γ^{ab} のポントリャーギン双対とすると, $C^*(\Gamma^{\mathrm{ab}})$ は $C(\widehat{\Gamma^{\mathrm{ab}}})$ と同型になる. 本章では, これらの類似現象がエタール亜群に対しても成り立つことを紹介する. [7] では, エタール亜群 G

[*1] 特異な元の定義は [3] を参照せよ.

に対しエタール亜群 G^{ab} やその双対亜群 $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ を導入し, $C^*(G) \simeq C^*(G^{\mathrm{ab}}) \simeq C_0(\widehat{G^{ab}})$ となることを示した. G^{ab} はエタール亜群の商を通して構成されるので, 一般に G^{ab} はハウスドルフ性を満たすとは限らない. 位相を考える必要があまりない離散群の場合と違い, G^{ab} はハウスドルフ性を満たすとは限らず扱いが困難である. [4]

G を, $G = \mathrm{Iso}(G)$ を満たすエタール亜群とする. このとき, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $G_x = G^x = G_x \cap G^x$ が成り立ち, G_x は離散群となる. G の交換子亜群を $[G,G] := \bigcup_{x \in G^{(0)}} [G_x, G_x]$ と定める. ここで, $[G_x, G_x]$ は G_x の交換子群である.

Proposition 3.9. *G を, $G = \mathrm{Iso}(G)$ を満たすエタール亜群とする. $[G,G]$ は G の開正規部分亜群である.*

G を一般のエタール亜群とする. $x \in G^{(0)}$ が G の不動点であるとは, $r(G_x) = \{x\}$ が成り立つことである. G の不動点全体からなる集合を $F \subset G^{(0)}$ とし, $G_{\mathrm{fix}} := G_F$ とする. 不動点の定義から, $G_{\mathrm{fix}} = \mathrm{Iso}(G_{\mathrm{fix}})$ が成り立つ. また, F は $G^{(0)}$ の閉集合となり, G_{fix} は再びエタール亜群となる.

$G^{\mathrm{ab}} = G_{\mathrm{fix}}/[G_{\mathrm{fix}}, G_{\mathrm{fix}}]$ と定義する. 関数の制限 $C(G) \ni f \mapsto f|_{G_{\mathrm{fix}}} \in C(G_{\mathrm{fix}})$ は, 全射*-準同型 $C^*(G) \to C^*(G_{\mathrm{fix}})$ を導く. この全射*-準同型を Proposition 3.5 によって導かれる全射*-準同型 $C^*(G_{\mathrm{fix}}) \to C^*(G^{\mathrm{ab}})$ と合成することで, 全射*-準同型 $\pi\colon C^*(G) \to C^*(G^{\mathrm{ab}})$ を得る. $C^*(G^{\mathrm{ab}})$ は可換 C* 環であることがわかるので, $C^*(G)^{\mathrm{ab}}$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} C^*(G) & \xrightarrow{\pi} & C^*(G^{\mathrm{ab}}) \\ {\scriptstyle Q}\downarrow & \nearrow_{\bar{\pi}} & \\ C^*(G)^{\mathrm{ab}}, & & \end{array}$$

を可換にする*-準同型 $\bar{\pi}\colon C^*(G)^{\mathrm{ab}} \to C^*(G^{\mathrm{ab}})$ が存在する. ここで, $Q\colon C^*(G) \to C^*(G)^{\mathrm{ab}}$ は商写像である. [7] において, 以下の定理を示した.

Theorem 3.10 ([7, Theorem 3.2.4])**.** *$\bar{\pi}\colon C^*(G)^{\mathrm{ab}} \to C^*(G^{\mathrm{ab}})$ は同型写像となる.*

G をエタール亜群とする. Gelfand-Naimark の定理から, $C^*(G^{\mathrm{ab}})$ と $C_0(X)$ が同型になるような局所コンパクトハウスドルフ空間 X が存在する. この X を具体的に計算する.

可換離散群 Γ に対し, その Pontryagin 双対を $\widehat{\Gamma}$ と表す. $\widehat{\Gamma}$ はコンパクト可換群となる.

G を $G = \mathrm{Iso}(G)$ となるエタール亜群とし, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し G_x が可換群になっているとする (このような G をエタール abelian group bundle と呼ぶ). G の双対亜群を, $\widehat{G} := \{(\chi, x) \mid x \in G^{(0)}, \chi \in \widehat{G_x}\}$ と定義する. $\widehat{G}$ は自然な abelian group bundle の構造を持つ. また, $\widehat{G}$ には $f \in C(G)$ による evaluation から定まる位相が定まる (詳しくは, [7, Definition 3.3.3] を参照せよ).

Proposition 3.11 ([7, Proposition 3.3.4])**.** *G をエタール abelian group bundle とする. このとき, $\widehat{G}$ は局所コンパクトハウスドルフ位相亜群となる. また, $C^*(G)$ と $C_0(\widehat{G})$ は同型となる.*

G をエタール亜群とする. このとき, G^{ab} はエタール abelian group bundle になるのであった.

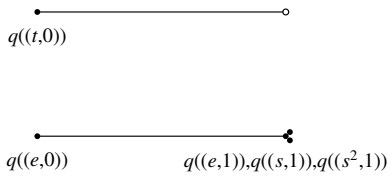
Corollary 3.12 ([7, Corollary 3.3.5])**.** *G をエタール亜群とする. このとき, $C^*(G^{\mathrm{ab}})$ と $C_0(\widehat{G^{\mathrm{ab}}})$ は同型となる.*

以上より, $C^*(G)^{\mathrm{ab}}$ は $C^*(G^{\mathrm{ab}})$, $C_0(\widehat{G^{\mathrm{ab}}})$ と同型になることがわかった.
G^{ab} や $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ の簡単かつ非自明な計算例をあげる.

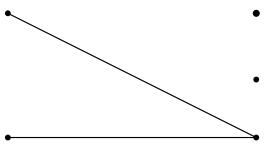
Example 3.13. $\mathfrak{S}_3 = \langle s, t \mid s^3 = t^2 = e, st = ts^2 \rangle = \{e, s, s^2, t, ts, ts^2\}$ を 3 次対称群とする. また, $A_3 := \{e, s, s^2\} \subset \mathfrak{S}_3$ を偶置換がなす $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群とする. エタール亜群 G を, $G := \mathfrak{S}_3 \times [0,1] \setminus \{(t,1) \mid t \notin A_3\}$ と定める. G は, $G = \mathrm{Iso}(G)$ を満たす. G は以下のように書ける;



$[G,G]$ は G の閉でない開集合である. したがって, Proposition 3.4 より $G^{\mathrm{ab}} = G/[G,G]$ はハウスドルフでないエタール亜群となる. 実際, $q\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ を商写像として, G^{ab} は以下のような図になる;



$\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ は以下のようになる;



$\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ はエタールではないことに注意せよ.

本稿では full 亜群 C*環 $C*(G)$ のアーベル化を計算した. 次の課題として, 被約亜群 C*環 $C^*_\lambda(G)$ のアーベル化の計算が挙げられる. 離散群 Γ に関しては, $C^*_\lambda(\Gamma)^{\mathrm{ab}} = C^*(\Gamma)^{\mathrm{ab}}$ であることと Γ が従順群であることは同値である. また, $C^*_\lambda(\Gamma)^{\mathrm{ab}} = \{0\}$ であることと Γ が非従順群であることは同値である (離散群の従順性とその特徴付けについては [2] を参照せよ). これらの現象を鑑みると, 被約亜群 C*環のアーベル化の計算には従順性などの解析的な性質が関わり, full 亜群 C*環の場合より難しいように思われる.

参考文献

[1] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. *Semigroup Forum*, **88**(2):433–452, 2014.

[2] N. P. Brown and N. Ozawa. *C*-algebras and Finite-dimensional Approximations*. Graduate studies

in mathematics. American Mathematical Soc., 2008.

[3] L. O. Clark, R. Exel, E. Pardo, A. Sims, and C Starling. Simplicity of algebras associated to non-Hausdorff groupoids. arXiv:1806.04362, 2018.

[4] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Proc. Sympos. Pure*, volume **38**, pages 521–628, 1982.

[5] R. Exel. Non-Hausdorff étale groupoids. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139**(3):897–907, 2011.

[6] R. Exel and E. Pardo. The tight groupoid of an inverse semigroup. *Semigroup Forum*, 92(1):274–303, Feb 2016.

[7] F. Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C*-algebras. arXiv:1812.07194.

[8] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.

[9] J. Renault. *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.

[10] A. Sims. Hausdorff étale groupoids and their C*-algebras. arXiv:1710.10897v1, 2017.

[11] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

空間非一様な係数を持つ Schnakenberg モデルの対称な多重ピーク定常解の安定性解析

首都大学東京 大学院理学研究科 数理科学専攻
石井裕太 (Yuta ISHII)

1 導入

様々な化学現象及び生命現象におけるパターン形成のメカニズムの解析の中で, 1952 年の A. Turing による拡散誘導不安定性の提言に基づいたパターン形成の数学理論の発展は目覚ましい. 現在までにいくつかの数理モデルに対して数多くの数学解析が行われてるが, 例えば, 生物の形態形成に関する Gierer-Meinhardt 系や微生物と化学物質との走化性相互作用を記述した Chemotaxis 系, 化学現象に関する Gray-Scott 系や Schnakenberg 系などの時空パターンや定常パターンの安定性に関する解析だけでも, 多くの研究結果が得られており, 今なお活発に詳細な解析が進められている. こうした背景の下, 本研究では次に述べる Schnakenberg モデルの定常パターンの存在と安定性に関する厳密な数学解析を行っている.

Schnakenberg モデルは自己触媒反応を記述した化学反応モデルである. 本研究では, 以下の空間非一様な係数を持つ Schnakenberg モデルの定常解 (定常パターン) について考える [2, 3].

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} = d\varepsilon - u + g(x)u^2 v, & x \in (-1,1),\ t > 0, \\ \varepsilon v_t - D v_{xx} = \frac{1}{2} - \frac{c}{\varepsilon} g(x)u^2 v, & x \in (-1,1),\ t > 0, \\ u_x(\pm 1) = v_x(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, D, d, $c > 0$ は ε に無関係な定数で, $g(x)$ は与えられた正値関数である. また, $u(x,t)$ と $v(x,t)$ は時刻 t, 位置 x における生成物の濃度を表し, $\varepsilon^2 > 0$ と $D > 0$ は, それぞれ u と v の拡散係数である. 係数 $g(x)$ は反応速度を表しており, 温度などの影響により, 位置 $x \in (-1,1)$ によって反応速度が変化すると考えられる. 従って, 特に (1.1) は反応速度が場所により異なる数理モデルとなる. ここで, 方程式 (1.1) と元の Schnakenberg モデルの関係について述べる. まず, 元の Schnakenberg モデルは次で与えられる [1].

$$\begin{cases} U_t - D_1 U_{xx} = a - U + g(x)U^2 V, & x \in (-1,1),\ t > 0, \\ V_t - D_2 V_{xx} = b - g(x)U^2 V, & x \in (-1,1),\ t > 0, \\ U_x(\pm 1) = V_x(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

このとき, (1.1) は次のスケール変換によって得られる.

$$U = \frac{1}{2b\varepsilon} u, \quad V = 2b\varepsilon v, \quad D_1 = \varepsilon^2, \quad D_2 = \frac{D}{\varepsilon}, \quad c = \frac{1}{4b^2}, \quad d = ac^{-\frac{1}{2}} = 2ab. \tag{1.3}$$

ここでは, 特に $\varepsilon > 0$ は十分小さいとして扱う. これは (1.1) において, 拡散係数の比 $\frac{D}{\varepsilon^2}$ を大きくし, u と比べて v の反応を速くすることを意味する.

本研究では, 次で定義される各点 x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ でピークを持つ対称な定常解 (対称な N-ピーク解) の安定性について議論する.

$$x_j := -1 + \frac{2j-1}{N}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.4}$$

また, 本研究では, $g(x) > 0$ が次を満たす場合を考える.

$$g \in C^3(-1, 1), \quad g(x) = g(-x), \quad g(x) = g(x + \frac{2}{N}). \tag{1.5}$$

このとき, $g(x)$ の対称性と周期性より次が分かる.

$$g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_N) =: \xi_1, \tag{1.6}$$

$$g''(x_1) = g''(x_2) = \cdots = g''(x_N) =: \xi_2. \tag{1.7}$$

本研究の目的は, (1.5) を満たす対称かつ周期を持った $g(x)$ に対する対称な N-ピーク解の安定性の解析であり, 特に $g(x)$ による解の安定性への影響を明確に解明することである.

主結果を述べるための記号を準備する. まず, いくつかの関数を導入する. w_0 を次の方程式の解とする.

$$\begin{cases} w_0'' - w_0 + w_0^2 = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ w_0 > 0,\ w_0(0) = \max_{\mathbb{R}} w_0,\ \lim_{|y| \to \infty} w_0(y) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

このとき, w_0 は一意的で $w_0(y) = \frac{3}{2}(\cosh \frac{y}{2})^{-2}$ と書けることや $\int_{\mathbb{R}} w_0^2(y) dy = 6$ となることが知られている. w を次の方程式の解とする.

$$\begin{cases} w'' - w + \xi_1 w^2 = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ w > 0,\ w(0) = \max_{\mathbb{R}} w,\ \lim_{|y| \to \infty} w(y) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

このとき, w は (1.8) の解 w_0 を用いて, $w(y) = \xi_1^{-1} w_0(y)$ と書ける. χ は以下を満たすカットオフ関数とする.

$$\chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ ,\ 0 \le \chi_N \le 1\ ,\ \chi_N(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{4N}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2N}. \end{cases}$$

$I := (-1, 1)$ とし, 関数空間 $H_p^2(I)$ を次のように定義する.

$$H_p^2(I) := \left\{ \eta \in H^2(I) \,\middle|\, \eta(x) = \eta(-x), \eta(x) = \eta(x + \frac{2}{N}), \eta'(x_j \pm \frac{1}{N}) = 0, j = 1, 2, \ldots, N \right\}. \tag{1.10}$$

$I_a := (-a^{-1}, a^{-1})$ $(a > 0)$ とし, スケール変換のための記号を関数 $\eta : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\overline{u}(y) := u(\varepsilon y), \quad y \in I_\varepsilon$$

で定義する.

2　主結果

(1.1) の定常問題は次の通りである.

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u'' = d\varepsilon - u + g(x)u^2 v, & x \in (-1,1), \\ -Dv'' = \frac{1}{2} - \frac{c}{\varepsilon} g(x)u^2 v, & x \in (-1,1), \\ u'(\pm 1) = v'(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

まず, N-ピーク解の存在に関する結果を述べる.

定理 2.1（[2]）　$D < +\infty$ を任意に固定する. また, $N \geq 1$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たすとする. このとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, (2.1) は対称な N-ピーク解 $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) \in H_p^2(I) \times H_p^2(I)$ を持ち, $u_\varepsilon(x)$ は $x = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ に集中する. 更に, $u_\varepsilon(x)$ は

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{N} w_{\varepsilon,j}(x) + \phi_\varepsilon(x) \tag{2.2}$$

で与えられる. ここで,

$$w_{\varepsilon,j}(x) := \frac{1}{\xi_0} w\Big(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\Big) \chi_N(x - x_j), \quad \xi_0 := cN\xi_1 \int_{\mathbb{R}} w^2(y)dy \tag{2.3}$$

で定義され, $\phi_\varepsilon(x)$ は剰余項, つまり $\phi_\varepsilon \in H_p^2(I)$ で, $\varepsilon > 0$ に依存しないある定数に対して

$$\big|\big|\overline{\phi_\varepsilon}\big|\big|_{H^2(I_\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \tag{2.4}$$

を満たす. 次に, 各 x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ で $v_\varepsilon(x)$

$$v_\varepsilon(x_j) = \xi_0 + O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ as } \varepsilon \to 0 \tag{2.5}$$

を満たす. 更に, ある弱極限 $v_0 \in H^1(I)$ が存在して $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$ weakly in $H^1(I)$ で v_0 は次を満たす.

$$\begin{cases} -Dv_0''(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_j(x), & x \in (-1,1), \\ v_0(x_j) = \xi_0, \quad v_0'(\pm 1) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで, $\delta_j(x)$ は Dirac のデルタ関数であり, $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して $\langle \delta_j, \varphi \rangle = \varphi(x_j)$ を満たす.

次に, 定理 2.1で与えられた解 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ の安定性について考える. 方程式 (1.1) を $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ で線形化すると次の固有値問題を得る.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_\varepsilon'' - \varphi_\varepsilon + 2g u_\varepsilon v_\varepsilon \varphi_\varepsilon + g u_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, & x \in (-1,1), \\ D\psi_\varepsilon'' - \frac{2c}{\varepsilon} g u_\varepsilon v_\varepsilon \varphi_\varepsilon - \frac{c}{\varepsilon} g u_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon = \varepsilon \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, & x \in (-1,1), \\ \varphi_\varepsilon'(\pm 1) = \psi_\varepsilon'(\pm 1) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

ここで, λ_ε は固有値で, $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \neq (0,0)$ は固有関数である. まず, 1-ピーク解の安定性について, [3] で得られた結果を紹介する .

定理 2.2（[3]）　$D < +\infty$ を任意に固定し, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとする. また, $N = 1$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たす関数とし, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は定理 2.1 の解とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $g''(0) \le 0$ のとき, 任意の $D < +\infty$ で $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は安定となる.

(2) $g''(0) > 0$ のとき, $D < D_1$ であれば, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は安定となり, $D > D_1$ であれば, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は不安定となる. ただし, $D_1 > 0$ は次で与えられる定数である.

$$D_1 := \frac{1}{2c\int_{\mathbb{R}} w_0^2} \cdot \frac{g(0)^2}{g''(0)} = \frac{\xi_1^2}{12c\xi_2}. \tag{2.8}$$

また, $\varepsilon \to 0$ での λ_ε の漸近挙動は次で与えられる.

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{\int_{\mathbb{R}} w^3}{\int_{\mathbb{R}} (w')^2} \Big(- \frac{g(0)}{6D\xi_0} + \frac{g''(0)}{3} \Big) + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}). \tag{2.9}$$

$g(x) = 1$ かつ $d = 0$ の場合は研究は Iron-Wei-Winter [1] によって行われており, 特に, 対称な 1-ピーク解は任意の $D < +\infty$ に対して安定となることが知られている. $g(x) = 1$ の場合と比較して, 定理 2.2 は空間非一様な係数 $g(x)$ が対称な 1-ピーク解の安定性に強く影響を与えること意味する. 定理 2.2 を N-ピーク解へ拡張させた結果が, 本研究によって得られた次の定理である.

定理 2.3 ([2]) $D < +\infty$ を任意に固定し, $\varepsilon > 0$ は十分小さいとする. また, $N \ge 2$ とする. $g(x)$ は (1.5) を満たす関数とし, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は定理 2.1 の解とする. 更に. D_N^1 と $D_N^2(0)$ を次のように定義する.

$$D_N^1 := \frac{\xi_1}{cN^3 \int_{\mathbb{R}} w_0^2 dy (1 + \cos(\frac{\pi}{N}))}, \tag{2.10}$$

$$D_N^2(0) := \frac{\xi_1}{2cN^3 \int_{\mathbb{R}} w_0^2 dy} = \frac{\xi_1}{12cN^3}. \tag{2.11}$$

このとき, 次が成り立つ.

(1) $\xi_2 > 0$ のとき, $0 < D_N^2 < D_N^2(0)$ を満たすある D_N^2 が存在して, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は $D < D_N^2$ 安定となり, $D > D_N^2$ で不安定となる.

(2) $\xi_2 \le 0$ のとき, $D_N^2(0) \le D_N^2 < D_N^1$ を満たすある D_N^2 が存在して, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ は $D < D_N^2$ で安定, $D > D_N^2$ で不安定となる.

$g(x) = 1$ の場合は $D_N^2 = D_N^2(0)$ であり, ピークの個数が安定性へ影響を与えることが [1] で既に知られている. $g(x) = 1$ の場合と比較すると, 定理 2.3 は各 x_j の近くで $g(x)$ が上に凸な関数であればより D の安定領域が増え, 下に凸に関数であればより D の不安定領域が増えることを述べている. 本研究の解析では, $g(x) = 1$ の場合の解 u_ε と $\lambda_\varepsilon = o(1)$ に対する剰余項の評価を [1] よりも厳密に行うことに成功した. 定理 2.1 は [3] における 1-ピーク解の構成に関する結果から容易に導かれる. 定理 2.2 と定理 2.3 の証明は [1] と同じ方針で行うが, 本研究では証明で必要となる重要な評価式を全て明らかにした [2, 3].

参考文献

[1] D. Iron, J. Wei, M. Winter, Stability analysis of Turing patterns generated by the Schnakenberg model, J. Math. Biol. 49, 358—390 (2004)

[2] Y. Ishii, Stability of multi-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with periodic heterogeneity, preprint (2018)

[3] Y. Ishii, K. Kurata, Existence and stability of one-peak symmetric stationary solutions for the Schnakenberg model with heterogeneity, Discrete Contin. Dyn. Syst., to appear.

L^2 boundedness of solutions to the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻

中村憲史 (Kenji Nakamura)

概要

本講演では, Navier-Stokes 方程式及び双曲型 Navier-Stokes 方程式の 2 次元初期値問題について, 初期値のクラスを L^1 として解の $L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ 有界性が得られることを示す. これは, 既存の減衰評価から直接得られる結果ではなく, Hardy 空間を用いることにより得られる結果である. なお, 本研究は小林孝行氏 (大阪大学), 三沢正史氏 (熊本大学) との共同研究に基づく

1 導入

一般に, 水などの非圧縮性粘性流体の運動は次の Navier-Stokes 方程式で記述される:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = \operatorname{Div} 2S & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{NS}$$

ここで, 未知関数 $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$, $\pi = \pi(t,x)$ はそれぞれ流速, 圧力を表す. また, 初期値 $u_0(x)$ は既知関数であり, 非圧縮条件 $\nabla\cdot u_0 = 0$ を満たすものとする. t は時間変数, $x = (x_1, x_2)$ は空間変数を表し,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad \partial_j^k = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\ \ (j = 1,2, k\in\mathbb{N}),\quad \partial_j = \partial_j^1,\quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

とする. さらに, 2 次元ベクトル値関数 $v = (v_1, v_2)$ 及びスカラー関数 f に対して

$$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f),\quad \nabla v = (\nabla v_1, \nabla v_2),\quad \Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2),$$
$$\nabla\cdot v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2,\quad (v\cdot\nabla)v = (v_1\partial_1 v_1 + v_2\partial_2 v_1, v_1\partial_1 v_2 + v_2\partial_2 v_2)$$

とする. なお, 変形テンソル $S = (S_{j,k})_{j,k=1}^2$ は

$$S_{jk} = \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)$$

で与えられ, これを Fourier の法則という. ただし, $\mu > 0$ は流体の粘性係数を表す. テンソルに対する発散は $\operatorname{Div} S = (\sum_{j=1}^2 \partial_j S_{j,k})_{k=1}^2$ で定義され, 非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ から $\operatorname{Div} 2S = \mu\Delta u$ が従い,

次を得る:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{PNS}$$

一方, 変形テンソルに時間遅れを入れた $S(t+\tau,x)$ の Taylor 級数展開において $\tau\to+0$ とすれば

$$\begin{aligned} S_{jk}(t+\tau,x) &= S_{jk}(t,x) + \tau S_{jk}(t,x) + \cdots \\ &= \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $S(t+\tau,x)$ の Taylor 級数展開において, その 1 次近似は

$$S + \tau\partial_t S = \frac{\mu}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j)_{j,k=1}^n$$

であり, これを Cattaneo の法則という. (NS) の第一式に $1+\tau\partial_t$ を施して Cattaneo の法則を適用すれば, 非圧縮条件 $\nabla\cdot u = 0$ から $\operatorname{Div} 2(S+\tau\partial_t S) = \mu\Delta u$ が従い, 次の双曲型 Navier-Stokes 方程式を得る:

$$\begin{cases} \tau\partial_t^2 u - \mu\Delta u + \partial_t u + (1+\tau\partial_t)\nabla\pi = -(1+\tau\partial_t)((u\cdot\nabla)u) & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) & \text{in } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{HNS}$$

Navier-Stokes 方程式は, フランスの技術者 C.L.M.H. Navier により導出され, S.D. Poisson, B.de Saint Venant ら数理物理学者の考察を経て, 最終的に G.G. Stokes により (PNS) の形にまとめられた. 数学的な解析は, J. Leray によって始められて以降数多くの研究がなされてきたが, 未だに 3 次元初期値問題に対する適切性が示されておらず, ミレニアム問題としても有名である.

一方, 双曲型 Navier-Stokes 方程式の数学解析は Racke, Saal[11, 12] により始められ, 彼らは全空間における時間局所解及び小さな初期値に対する時間大域解の一意存在を示した.

以下, $L^p\,(1\le p\le\infty)$, $H^m\,(m\in\mathbb{N})$ などは通常の Lebesgue 空間, Hilbert 空間などを表し, L^2_σ は L^2 で非圧縮条件を満たすクラスとする.

2　2 次元初期値問題における解の L^2 有界性

まず, 本節で重要な役割を果たす Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ を定義しておく.

定義 2.1. $n\ge 2$ とする. $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ が

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\sup_{r>0}|\phi_r * f(x)|dx < \infty$$

となるクラスを Hardy 空間という. ここで, $\phi_r(x) = r^{-n}\phi(r^{-1}x)$ であり, $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\operatorname{supp}\phi\subset B_1(0) = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ を満たすものとする.

2 次元線型熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

において, 初期値が $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のとき

$$\lim_{t\to\infty} t\|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{8\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)dx\right|^2$$

が成り立つ ([4]). したがって, 熱方程式 (2.1) の解に対して, 一般に次の評価は成り立たない:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \le C\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

しかし, 線型熱方程式及び線型消散波動方程式において, 初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ より狭い空間である Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ とすれば, 次の評価を得られる ([4], [7], [10]):

$$\int_0^\infty \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \le C\|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Ogawa, Shimizu[10] において, 彼らは (2.1) の解 u に対して次を示した:

$$\int_0^\infty \|\nabla u(s)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds \le C\|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

このとき, 2 次元における埋め込み $W^{1,1} \subset L^2$ 及び $\mathcal{H}^1 \subset L^1$ から

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds &\le C\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds\\ &\le C\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2 ds\\ &\le C\|u_0\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}^2\end{aligned}$$

となることがわかる.

Navier-Stokes 方程式の初期値問題については, Leray[5], Hopf[3] により弱解の存在が示された. また, Masuda[6] は $t \to \infty$ のとき, 弱解の $L^2(\mathbb{R}^2)$ ノルムが 0 に収束することを示した. その後, Wiegner[13] は初期値が $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のとき, 例えば次の弱解に対する減衰評価を得た:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Miyakawa[8, 9] は, Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ での Stokes 方程式及び Navier-Stokes の考察を行った. そして, 初期値が $u_0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ のとき $\mathcal{L}(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^1)$ となることや, $\|\nabla u(t)\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} = O(t^{-1/2})$ as $t \to \infty$ などの減衰評価を導出した.

双曲型 Navier-Stokes 方程式の初期値問題については, Racke, Saal[11, 12] による以下の時間局所解及び時間大域解に関する結果が知られている.

定理 2.2. (Racke, Saal[11]) $n \ge 2$, $m > n/2$ とする. 初期値が

$$(u_0, u_1) \in (H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \times H^{m+1}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$$

を満たすとき, (HNS) の時間局所解 (u, π) が一意に存在し,

$$\begin{gathered}u \in C^2([0,T], H^m(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{m+1}(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0,T], H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)),\\ (1+\tau\partial_t)\nabla\pi \in C^0([0,T], H^m(\mathbb{R}^n))\end{gathered}$$

となる. ここで, 存在時刻 $T>0$ は

$$T>\frac{1}{1+C(\|u_0\|_{H^{m+2}}+\|u_1\|_{H^{m+1}})}$$

を満たし, $C>0$ は m と n にのみ依存する定数である.

定理 2.3. (Racke, Saal[12]) $m_1\geq 3, m\geq m_1+9, 4<q<\infty, 1/q+1/p=1$ とする. ある $\varepsilon>0$ が存在し,

$$\|(u_0,u_1)\|_{H^{m+2}\times H^{m+1}}+\|(u_0,u_1)\|_{L^1}+\|(u_0,u_1)\|_{W^{m_1+6,p}\times W^{m_1+5,p}}<\varepsilon$$

のとき, (HNS) の時間大域解 (u,π) が一意に存在し,

$$u\in C^2([0,\infty),H^m(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,\infty),H^{m+1}(\mathbb{R}^n))\cap C^0([0,\infty),H^{m+2}(\mathbb{R}^n)\cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)),$$
$$(1+\tau\partial_t)\nabla\pi\in C^0([0,\infty),H^m(\mathbb{R}^n))$$

となる. さらに, T に依らない定数 $M_0>0$ が存在し, 次を満たす:

$$M(T)\leq M_0.$$

ただし,

$$M(T)=\sup_{0\leq t\leq T}\Big\{(1+t)^{1-\frac{2}{q}}\|u(t)\|_{W^{m_1,q}}+(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{q}}\|(\partial_t u(t),\nabla u(t))\|_{W^{m_1,q}}$$
$$+(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_{H^m}+(1+t)\|(\partial_t u(t),\nabla u(t))\|_{H^m}\Big\}.$$

注意 2.1. 定理 2.3 から特に, $t>0$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}},\quad \|(\partial_t u(t),\nabla u(t),\partial_t\nabla u(t))\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-1}$$

が成り立ち, $C>0$ は t に依らない定数である.

我々は, (2.2) や注意 2.1 からは直接得ることができない $L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ 有界性を, Hardy 空間を用いることで導出した. なお, 非圧縮条件により, 初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ とすることができた.

定理 2.4. $u_0\in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$, (u,π) を (PNS) の $(0,T)\times\mathbb{R}^2$ 上弱解とする. すなわち, $u\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^2))$, $\pi\in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ であり, (u,π) は (PNS) を超関数の意味で満たすとする. このとき

$$\int_0^t\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds\leq C$$

が成り立ち, $C>0$ は t に依らない定数である.

定理 2.5. $n=2$, u を定理 2.2 及び定理 2.3 で得られる $(0,T)\times\mathbb{R}^2$ 上 (HNS) の解とする. このとき

$$\int_0^t\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds\leq C$$

が成り立ち, $C>0$ は t に依らない定数である.

3　証明の概要

我々の証明はエネルギー法を基盤とし, Hardy 空間と有界平均振動 (bounded mean oscillation (BMO)) のクラスが双対であることを示す, Fefferman-Stein の不等式を用いることがポイントである. この方法を 2 次元外部領域における熱方程式及び消散波動方程式に適用した結果として [4, 7] が挙げられるが, 大きな違いとして非圧縮条件の存在がある. 我々は特に次の補題を用いることで, 初期値のクラスを $L^1(\mathbb{R}^2)$ とすることができた.

補題 3.1. ([1]) $n \geq 2$ とする. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\nabla \cdot f = 0$ のとき, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$ であり

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fgdx \right| \leq C\|f\|_{L^1}\|\nabla g\|_{L^n}$$

が任意の $g \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ. ここで, C は n にのみ依存する定数である.

なお, 非線型項の評価には次の補題を用いる.

補題 3.2. ([2]) $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla \cdot u = 0$ のとき $(u \cdot \nabla)u \in \mathcal{H}^1$ となり, 次の評価が成り立つ.

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{\mathcal{H}^1} \leq C\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}.$$

参考文献

[1] C. Amrouche, H. H. Nguyen, New estimates for the div-curl-grad operators and elliptic problems with L^1-data in the whole space and in the half-space, J. Differential Equations, **250** (2011), 3150–3195.

[2] R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, J. Math. Pures et Appl. **72** (1993), 247–286.

[3] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. **4** (1951), 213–231.

[4] T. Kobayashi, M. Misawa, L^2 boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations, RIMS Kôkyûroku, **B42** (2013), 1–11.

[5] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[6] K. Masuda, Weak solutions of Navier-Stokes equations, Tôhoku Math. **36** (1984), 623–646.

[7] M. Misawa, S. Okamura, T. Kobayashi, Decay property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations, **24** (2011), 941–964.

[8] T. Miyakawa, Hardy spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations, Kyushu J. Math, **50** (1996), 1–64.

[9] T. Miyakawa, Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in $\mathbf{R^n}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 383–434.

[10] T. Ogawa, S. Shimizu, The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space, J. Funct. Anal. **255** (2008), 1107–1138.

[11] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I: Local well-posedness, Evol. Equ. Control Theory, **1** (2012), 195–215.

[12] R. Racke, J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations II: Global existence of small solutions, Evol. Equ. Control Theory, **1** (2012), 217–234.

[13] M. Wiegner, Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^n$, J. London. Math. Soc. **35** (1987), 303–313.

薄膜コーティング問題における固有値の漸近挙動について

東北大学大学院 情報科学研究科 システム情報科学専攻
谷地村 敏明 (Toshiaki YACHIMURA)

1 導入

本講演では，以下のディリクレ境界条件における二相固有値問題 (P_ε) を考える：

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(Q_\varepsilon \nabla \Phi) = \lambda \Phi & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{P_ε}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ を有界領域とし，その境界 Γ は十分滑らかで連結であるとする．また，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して領域 Σ_ε を

$$\Sigma_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \xi + \tau \nu_\Gamma(\xi), \xi \in \Gamma, 0 < \tau < \varepsilon \right\}$$

とし，領域 Ω_ε を $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup \Sigma_\varepsilon \cup \Gamma$ とする．ここで ν_Γ は Γ における外向き単位法線ベクトルである．さらに，固有値問題 (P_ε) の係数である $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon(x)$ は以下の区分的定数関数であるとする．

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ \sigma_\varepsilon, & x \in \overline{\Sigma}_\varepsilon. \end{cases}$$

以下では，σ_ε を $\sigma_\varepsilon = \alpha\varepsilon$ とし，α は正の実数であるとする (図 1).

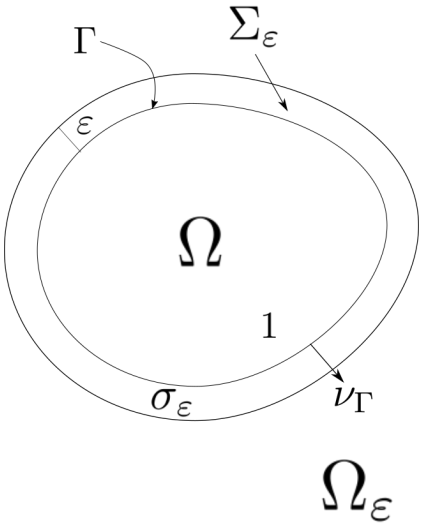


図 1 問題設定

さて，固有値問題 (P_ε) の第一固有値を $\lambda_1(\varepsilon)$ とし，対応する第一固有関数を Φ_ε とする．以下では，第一固有関数は $\|\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$ と正規化し，$\Phi_\varepsilon > 0$ を考える．本問題は，$\varepsilon \to 0$ としたとき領域が摂動すると共に，係数が薄膜領域 Σ_ε において退化する係数の特異摂動固有値問題である．本研究の目的は，$\varepsilon \to 0$ とした際の第一固有値の漸近挙動について明らかにすることである．特に，領域 Ω の幾何学的形状が第一固有値の漸近挙動に対してどのような影響を及ぼすかについて考察する．

2 先行研究

領域の摂動を伴う固有値問題は，Courant–Hilbert のラプラス作用素 (つまり均質媒質) に関する先駆的研究 [2] 以来，スペクトル理論やスペクトル幾何学において重要な課題であり多くの先行研究が存在する (e.g. ダンベル型領域 [1,4,5], 小さな穴を持つ領域 [9,11]，薄膜領域 [7,8,12]). 一方主要

部の係数が区分的な定数関数である場合の楕円型作用素 (複合媒質) の固有値問題は二相固有値問題と呼ばれ，係数の自由度と領域の摂動との関係からラプラス作用素の場合では現れない性質が現れることが知られている (e.g. [6, 10, 13])．特に問題 (P_ε) のような係数の退化と領域の摂動を伴う二相固有値問題は Friedman [3] によって考察された．これはある弾性体を非常に柔らかい物体でコーティングした際に振動数がどのように変化するかを考察したものであり，コーティング問題や補強問題と呼ばれている．

Friedman は境界条件における比較原理等を用いることにより，以下の定理を示した．

定理 2.1 (Friedman [3])．$\lambda_1(\varepsilon)$ を固有値問題 (P_ε) の第一固有値とする．このとき以下が成り立つ．

$$\lambda_1(\varepsilon) = \mu_1 + o(1) \ \ as \ \varepsilon \to 0,$$
$$\Phi_\varepsilon \to w_1 \ \ weakly \ in \ H^2(\Omega),$$

ここで μ_1 は以下のロバン固有値問題の第一固有値であり，w_1 は $\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$ と正規した対応する第一固有関数である：

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & in\ \Omega, \\ \alpha w + \dfrac{\partial w}{\partial \nu_\Gamma} = 0 & on\ \Gamma. \end{cases}$$

この結果から，薄膜領域の厚さと係数のオーダーが等しい場合は境界条件に影響を与え，ディリクレ境界条件における二相固有値問題 (P_ε) の第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ はロバン境界条件におけるラプラス作用素の第一固有値 μ_1 に収束することがわかる．

3 主定理について

第一固有値の漸近挙動に対する領域の収束先 Ω の幾何学的形状の影響を解析するためには，薄膜領域における第一固有関数の詳細な評価を必要とする．このような第一固有関数の評価と薄膜領域におけるリーマン計量の摂動公式といった幾何学的な評価を min-max 原理を用いた変分的手法によって組み合わせることで，固有値のより詳細な漸近挙動を求めることができる．以下が本研究における主定理である．

定理 3.1 ([14])．$\lambda_1(\varepsilon)$ を固有値問題 (P_ε) の第一固有値とする．このとき以下が成り立つ．

$$\lambda_1(\varepsilon) = \mu_1 - \varepsilon \int_\Gamma \left(\alpha H + \frac{\mu_1}{3} \right) w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + o(\varepsilon) \ \ as \ \varepsilon \to 0,$$

ここで H は境界 Γ における主曲率の和として定義される平均曲率である．

この定理から固有値の漸近挙動に対して，領域 Ω の幾何学的形状に関連して平均曲率が現れ，この効果は $\alpha > 0$ でなければ現れないことがわかる．

4 主定理の証明のアイディア

以下では，主結果の証明の方針と概略について述べる．証明の大まかな方針としては，まず第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ がロバン第一固有値 μ_1 に $O(\varepsilon)$ のオーダーで収束することを示す．次に，得られた固有

値の評価を用いることで固有関数のよりよい評価を導出する．特に薄膜領域における接方向に対する勾配評価を導く．そして，接方向に対する勾配評価の他に H^2 評価や伝送条件等と以下のヤコビアンの漸近挙動

$$\sqrt{G(\xi,\tau)} = \sqrt{G_0}(1 - H(\xi)\tau) + O(\tau^2) \text{ as } \tau \to 0$$

を用いることにより，主定理を示すことができる．以下では特に第一固有値 $\lambda_1(\varepsilon)$ がロバン第一固有値 μ_1 に $O(\varepsilon)$ のオーダーで収束することについて詳述する．

4.1 上からの評価

固有値の上からの評価を導く．固有値を変分的に特徴付ける min-max 原理から，

$$\lambda_1(\varepsilon) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\, u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2\, dx}{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2\, dx}.$$

min-max 原理から，適当なテスト関数を代入すれば固有値の上からの評価が得られる．まず，ロバン第一固有関数を薄膜領域において境界の値で拡張することを考える．また，以下のような関数を用意する．

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega, \\ 1 - \dfrac{\tau}{\varepsilon} & \text{in } \overline{\Sigma}_\varepsilon. \end{cases}$$

テスト関数として $\tilde{u} = w_1\phi$ と取れば，

$$\lambda_1(\varepsilon) \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}|^2\, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}|^2\, dx}{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{u}|^2\, dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w_1|^2\, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left|\nabla(w\phi)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega |w_1|^2\, dx + \int_{\Sigma_\varepsilon} |w_1\phi|^2\, dx}.$$

ロバン第一固有関数の正規化と薄膜領域の体積が $O(\varepsilon)$ であることから，

$$\int_\Omega |w_1|^2\, dx + \int_{\Sigma_\varepsilon} |w_1\phi|^2\, dx = 1 + O(\varepsilon).$$

また，$\nabla w_1 \cdot \nabla \phi = 0$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left|\nabla(w_1\phi)\right|^2 dx &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\phi^2 |\nabla w_1|^2 + 2\nabla w_1 \cdot \nabla\phi + w_1^2 |\nabla\phi|^2\right) dx \\ &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi^2 |\nabla w_1|^2\, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla\phi|^2\, dx \\ &= \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla\phi|^2\, dx + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

ここで $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nu_\Gamma = -\nu_\Gamma/\varepsilon$ であり，ヤコビアンの漸近挙動を用いることで

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} w_1^2 |\nabla\phi|^2 \, dx &= \alpha\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_\Gamma w_1(\xi)^2 \cdot \left|\frac{-\nu_\Gamma}{\varepsilon}\right|^2 \sqrt{G_\tau} d\xi d\tau \\ &= \alpha\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \int_\Gamma w_1(\xi)^2 (1 + O(1)\tau) \sqrt{G_0} d\xi d\tau \\ &= \alpha \int_\Gamma w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

を得る．よってこれらを合わせると，固有値の上からの評価が得られる．

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varepsilon) &\leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 \, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla\tilde{u}|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |\tilde{u}|^2 \, dx} \\ &\leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w_1|^2 \, dx + \alpha \int_\Gamma w_1^2 \sqrt{G_0} d\xi + C\varepsilon}{1 - C\varepsilon} \leqslant \mu_1 + C\varepsilon.\end{aligned}$$

4.2 下からの評価

次に固有値の下からの評価を示す．固有値問題 (P_ε) の弱形式は

$$\int_\Omega \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dx = \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \varphi \, dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

である．この弱形式を評価することによって固有値の下からの評価を得ることができる．まずはじめに，固有値の下からの評価を導出するために必要な，固有関数に関する H^1 評価と H^2 評価について述べる．

補題 4.1. 第一固有関数 Φ_ε は以下の評価を満たす．

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\Phi_\varepsilon|^2 \, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla\Phi_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant C, \\ \int_\Omega \left|D^2\Phi_\varepsilon\right|^2 dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left|D^2\Phi_\varepsilon\right|^2 dx \leqslant C,\end{aligned}$$

ここで C は ε に依存しない正の定数である．

証明は固有値の上からの評価と境界評価によるものである．

上からの評価と同様にテスト関数を構成する．任意の $\zeta \in C^1(\overline{\Omega})$ を取り，薄膜領域 Σ_ε において ζ を境界での値で拡張する．弱形式のテスト関数として $\varphi = \zeta\phi$ と取れば

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\zeta \, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\zeta \, dx + \sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \zeta \nabla\Phi_\varepsilon \cdot \nabla\phi \, dx \\ = \lambda_1(\varepsilon) \int_\Omega \Phi_\varepsilon \phi\zeta \, dx + \lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi\zeta \, dx.\end{aligned}$$

それぞれの項を評価する．左辺の第二項目は第一固有関数の H^1 評価と $\zeta \in C^1(\overline{\Omega})$ であることから

$$\begin{aligned}\left|\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \phi \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta \, dx\right| &\leqslant \int_{\Sigma_\varepsilon} \left|\sigma_\varepsilon^{1/2} \nabla \Phi_\varepsilon\right| \cdot \left|\sigma_\varepsilon^{1/2} \nabla \zeta\right| dx \\ &\leqslant \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \zeta|^2 \, dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

次に右辺の第二項目を評価する．固有値の上からの評価から，

$$\begin{aligned}\left|\lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi \zeta \, dx\right| &\leqslant C \int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon||\zeta| \, dx \\ &\leqslant C \left(\int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_\varepsilon} |\zeta|^2 \, dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

ここで，ディリクレ境界条件から

$$\Phi_\varepsilon(\xi, \tau) = -\int_\tau^\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \tau} ds$$

が成り立つ．この等式から，

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} |\Phi_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \tau}\right|^2 ds\right) dx \leqslant C\varepsilon \left(\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \, dx\right)$$

が得られるので，

$$\left|\lambda_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \phi \zeta \, dx\right| \leqslant C\varepsilon$$

となる．左辺の第三項目に関しては，上からの評価と全く同様にして，

$$\sigma_\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \zeta \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \phi \, dx = \alpha \int_\Gamma \Phi_\varepsilon \zeta \sqrt{G_0} d\xi + O(\varepsilon)$$

となるので，全体としては

$$\int_\Omega \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \nabla \zeta dx + \alpha \int_\Gamma \Phi_\varepsilon \zeta \sqrt{G_0} d\xi = \lambda_1(\varepsilon) \int_\Omega \Phi_\varepsilon \zeta dx + O(\varepsilon)$$

が得られる．

固有値の下からの評価をするために，第一固有関数 Φ_ε を以下のロバン固有値問題の固有関数で固有関数展開することを考える．

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{in } \Omega, \\ \alpha w + \dfrac{\partial w}{\partial \nu_\Gamma} = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

ここで $\{\mu_k\}_{k\geqslant 1}$ は $0<\mu_1<\mu_2\leqslant\mu_3\leqslant\cdots\to+\infty$ と番号づけられたロバン固有値であり，$\{w_k\}_{k\geqslant 1}$ は対応する正規化された固有関数である．さて，Φ_ε を以下のように固有関数展開する．

$$\Phi_\varepsilon=\sum_{k\geqslant 1}c_k(\varepsilon)w_k,\quad c_k=\int_\Omega\Phi_\varepsilon w_k dx.$$

テスト関数として $\zeta=c_1w_1$ と取り，固有関数の直交性を用いることにより，

$$(c_1)^2\mu=\lambda_1(\varepsilon)(c_1)^2+O(\varepsilon)$$

が得られる．よって固有値の下からの評価を示すためには，以下の補題を示せばよい．

補題 4.2. 以下の評価が成り立つ．

$$c_1(\varepsilon)=1+o(1)\ \ as\ \ \varepsilon\to 0.$$

証明の概略は以下の通りである．まず Ω における H^1 有界性からレリッヒの定理より，固有関数の収束先 $\widehat{\Phi}$ が捕まる．また，固有値の上からの評価と単純性から，$\widehat{\Phi}$ がロバン第一固有関数であることが示される．したがってレリッヒの定理から得られる L^2 強収束性より，補題の主張が得られる．

以上より固有値の下からの評価が得られるので，上からの評価と合わせることで固有値の漸近挙動

$$\lambda_1(\varepsilon)=\mu_1+O(\varepsilon)\ \ \text{as}\ \ \varepsilon\to 0$$

を得ることができる．

5 主定理について

主定理の証明に関しては，まず固有値の評価を用いることにより，薄膜領域における固有関数のより詳細な評価を導く．特に以下の二つの評価式に関する補題は，薄膜領域における固有関数の挙動を解析するために必要不可欠なものである．

補題 5.1. 第一固有関数 Φ_ε は以下の評価を満たす．

$$\sigma_\varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon}|\nabla_{tan}\Phi_\varepsilon|^2\,dx=O(\varepsilon)\ \ as\ \ \varepsilon\to 0,$$
$$\left\|\Phi_{in,\varepsilon}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Phi_{in,\varepsilon}}{\partial\nu_\Gamma}\right\|^2_{L^2(\Gamma)}=O(\varepsilon)\ \ as\ \ \varepsilon\to 0,$$

ここで $\Phi_{in,\varepsilon}$ は第一固有関数 Φ_ε の領域 Ω における制限である．

下からの評価と同様なテスト関数を取ることにより，

$$\int_\Omega\nabla\Phi_\varepsilon\cdot\nabla\zeta\,dx+\sigma_\varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon}\phi\nabla\Phi_\varepsilon\cdot\nabla\zeta\,dx+\sigma_\varepsilon\int_{\Sigma_\varepsilon}\zeta\nabla\Phi_\varepsilon\cdot\nabla\phi\,dx$$
$$=\lambda_1(\varepsilon)\int_\Omega\Phi_\varepsilon\phi\zeta\,dx+\lambda_1(\varepsilon)\int_{\Sigma_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\phi\zeta\,dx$$

が得られる．これを上記の評価式や伝送条件，H^2 評価，そして薄膜領域におけるヤコビアンの漸近挙動を組み合わせて評価することにより，本研究の主定理を得ることができる．

参考文献

[1] J. Arrieta, Rates of eigenvalues on a dumbbell domain. Simple eigenvalue case, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3503–3531.

[2] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical physics, Vol I, Wiley Interscience, New York, 1953.

[3] A. Friedman, Reinforcement of the principal eigenvalue of an elliptic operator, Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), no.1, 1–17.

[4] S. Jimbo, Perturbation formula of eigenvalues in a singularly perturbed domain, J. Math. Soc. Japan **42** (1993), 339–356.

[5] S. Jimbo, S. Kosugi, Spectra of domains with partial degeneration, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **16** (2009), 269–414.

[6] S. Jimbo, S. Kosugi, Approximation of eigenvalues of elliptic operators with discontinuous coefficients, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 1303–1323.

[7] S. Jimbo, K. Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian with the mixed boundary condition and its application, Indiana Univ. Math. J. **63** (2016), 867–898.

[8] D. Krejčiřík, N. Raymond, M. Tušek, The magnetic Laplacian in shrinking tubular neighborhoods of hypersurfaces, J. Geo. Anal. **25** (2015), 2546–2564.

[9] S. Ozawa, Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, Duke Math. J. **48** (1981), 767–778.

[10] G.P. Panasenko, Asymptotics of the solutions and eigenvalues of elliptic equations with strongly varying coefficients, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 942–947.

[11] J. Rauch, M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, J. Funct. Anal. **18** (1975), 27–59.

[12] M. Schatzman, On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions, Appl. Anal. **61** (1996), No.3–4, 293–306.

[13] T. Yachimura, Two-phase eigenvalue problem on thin domains with Neumann boundary condition, Diff. Integ. Eq. **31** (2018), 735–760.

[14] T. Yachimura, Asymptotic behavior for the principal eigenvalue of a reinforcement problem, Applicable Analysis, (2018), DOI: 10.1080/00036811.2018.1517411.

Kac-Paljutkin Quantum Group as a Quantum Subgroup of $SU_{-1}(2)$

お茶の水女子大学 大学院人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学領域
北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)

概要

Kac-Paljutkin の量子群は，非可換かつ非余可換な 8 次元 Hopf 環として 1960 年代に導入された. 本講演では Kac-Paljutkin の量子群が $SU_{-1}(2)$ の部分量子群であることを示す. 特に，Hopf 環の graded twist を用いることで Hopf 環の間の準同型写像を導く. また，Kac-Paljutkin の量子群の表現圏が，Klein の 4 元群に由来する丹原・山上によるテンソル圏と圏同値であることを利用する.

1 コンパクト量子群

Banach 環が，C*-条件 $\|T^*T\| = \|T\|^2$ をみたすような $*$-演算 $T \mapsto T^*$ を持つとき，C*-環という. 作用素環論において重要な定理のひとつである Gelfand–Naimark の定理によると，可換な単位的 C*-環はあるコンパクト位相空間上の連続関数環と同型になる. このことから，一般の作用素環は “非可換な” コンパクト位相空間上の連続関数環とみなされる. そのような研究対象に “群構造” を与えるのが，Woronowicz によるコンパクト量子群の理論 [4] である。

定義. コンパクト量子群とは，単位的 C*-環 A と，（余積と呼ばれる）単位的 $*$-準同型写像 $\Delta\colon A \to A \otimes A$ の組で，以下をみたすもののことである.

1. $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
2. $(A \otimes 1)\Delta(A) = \{\ (a \otimes 1)\Delta(b) \mid a, b \in A\ \}$, $(1 \otimes A)\Delta(A) = \{\ (1 \otimes a)\Delta(b) \mid a, b \in A\ \}$ は $A \otimes A$ で稠密である.

例. 通常のコンパクト群 G に対して，$C(G)$ を G 上の複素数値連続関数からなる C*-環とする. このとき，$*$-準同型写像 $\Delta\colon C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ を，可換 C*-環 $C(G)$ のテンソル積 $C(G) \otimes C(G)$ は $C(G \times G)$ とみなせることに注意して，以下のように定める.

$$\Delta(f)(g, h) = f(gh) \quad (\forall f \in C(G),\ \forall g, h \in G)$$

すると，$(C(G), \Delta)$ はコンパクト量子群である.

例. 実数 $q \in [-1, 1],\ q \neq 0$ に対し，コンパクト量子群 $SU_q(2)$ は以下のように定める. $C(SU_q(2))$

を，α, γ で生成される普遍的な単位的 C*-環とする．生成元 α, γ は以下の条件をみたす．

$$(u_{ij}^q)_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \text{がユニタリ．}$$

この関係式を書き下すと，

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1,\ \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = 1\, \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*,\ \alpha\gamma = q\gamma\alpha,\ \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha$$

となる．余積 $\Delta\colon C(SU_q(2)) \to C(SU_q(2)) \otimes C(SU_q(2))$ は以下の式で定める．

$$\Delta(u_{ij}^q) = \sum_k u_{ik}^q \otimes u_{kj}^q$$

生成元 α, γ を当てはめると，

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,\ \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$

である．

特に $q = 1$ のとき，$C(SU_1(2))$ は $C(SU(2))$ と同型である．

例. 整数 $n \geq 2$ について $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $F\bar{F} = I_n$ をみたす行列とする．ただし $\bar{F}$ は F の各成分の複素共役をとって得られる行列を表す．この F に対し，自由直交群 O_F^+ は以下のように定める．$C(O_F^+)$ を $u_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ で生成される 普遍的な C*-環とする．生成元 u_{ij} は以下の関係をみたす．

$$U = (u_{ij})_{i,j=1}^n \text{がユニタリ，かつ } U = FU^cF^{-1}$$

ただし $U^c = (u_{ij}^*)_{i,j}$ である．余積は次の式で定める．

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$$

行列 F が単位行列 I_n のとき自由直交群を O_n^+ と表し，これは直交群の定義式から可換性を除いたものとなる．

量子群 $SU_q(2)$ は，この自由直交群の例としてもみることができる．行列 $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を次のようにとればよい．

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{sgn}(q)|q|^{\frac{1}{2}} \\ |q|^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

定義. コンパクト量子群 G の，有限次元ベクトル空間 H への表現とは，可逆な $U \in B(H) \otimes C(G)$ で

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(U) = U_{12}U_{13} \quad \in B(H) \otimes C(G) \otimes C(G)$$

をみたすものである．空間 H が Hilbert 空間かつ U がユニタリ作用素のとき，ユニタリ表現と呼ばれる．

2 Kac-Paljutkin の Hopf 環

Hopf 環 $C(G_{\mathrm{KP}})$ は, 非可換かつ非余可換な, 半単純な Hopf 環の最小の例として Kac と Paljutkin によって導入された [2].

定義. Kac-Paljutkin の Hopf 環 とは，8 次元の単位的 $*$-環

$$C(G_{\mathrm{KP}}) = \mathbb{C}\cdot\epsilon \oplus \mathbb{C}\cdot\alpha \oplus \mathbb{C}\cdot\beta \oplus \mathbb{C}\cdot\gamma \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

と余積 Δ の組からなる Hopf $*$-環である. ここで，$\epsilon, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ射影を表す．これらの射影と行列 $x \in M_2(\mathbb{C})$ に対し余積は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}
\Delta(\epsilon) &= \epsilon\otimes\epsilon + \alpha\otimes\alpha + \beta\otimes\beta + \gamma\otimes\gamma + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2}\epsilon_{ij}\otimes\epsilon_{ij},\\
\Delta(\alpha) &= \epsilon\otimes\alpha + \alpha\otimes\epsilon + \beta\otimes\gamma + \gamma\otimes\beta\\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{22} + i\epsilon_{12}\otimes\epsilon_{21} - i\epsilon_{21}\otimes\epsilon_{12} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{11}),\\
\Delta(\beta) &= \epsilon\otimes\beta + \beta\otimes\epsilon + \alpha\otimes\gamma + \gamma\otimes\alpha\\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{22} - i\epsilon_{12}\otimes\epsilon_{21} + i\epsilon_{21}\otimes\epsilon_{12} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{11}),\\
\Delta(\gamma) &= \epsilon\otimes\gamma + \gamma\otimes\epsilon + \alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha\\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}\otimes\epsilon_{11} - \epsilon_{12}\otimes\epsilon_{12} - \epsilon_{21}\otimes\epsilon_{21} + \epsilon_{22}\otimes\epsilon_{22}),\\
\Delta(x) &= \epsilon\otimes x + \alpha\otimes u_\alpha x u_\alpha^* + \beta\otimes u_\beta x u_\beta^* + \gamma\otimes u_\gamma x u_\gamma^*\\
&\quad + x\otimes\epsilon + \overline{u}_\alpha x\overline{u}_\alpha^*\otimes\alpha + \overline{u}_\beta x\overline{u}_\beta^*\otimes\beta + \overline{u}_\gamma x\overline{u}_\gamma^*\otimes\gamma,
\end{aligned}$$

ただし，ϵ_{ij} は $M_2(\mathbb{C})$ における行列単位を表し，

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix},\ u_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

定理. Hopf $*$-環 $C(SU_{-1}(2))$ から $C(G_{\mathrm{KP}})$ への全射な単位的 $*$-準同型写像が存在する.

定理の主張から，$C(G_{\mathrm{KP}})$ が定める量子群は $SU_{-1}(2)$ の部分量子群である．証明の方針として，Hopf $*$-環の間の準同型写像を構成するために，Hopf 環への群作用から定まる Hopf 環の graded twisting [1] を用いる．また，量子群 G_{KP} の有限次元ユニタリ表現から定める表現圏 $\mathrm{Rep}(G_{\mathrm{KP}})$ は，丹原・山上のテンソル圏 [3] のうち Klein の 4 元群から構成されるもののひとつと圏同値となる.

参考文献

[1] Julien Bichon, Sergey Neshveyev, and Makoto Yamashita. Twist gradué des catégories et des groupes quantiques par des actions des groupes. *Ann. Inst. Fourier*, 66(6):2299–2338, 2016.

[2] G. I. Kac and V. G. Paljutkin. Finite ring groups. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 15:224–261, 1966.

[3] Daisuke Tambara and Shigeru Yamagami. Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *Journal of Algebra*, 209(2):692 – 707, 1998.

[4] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.*, 111:613–665, 1987.

A General Class of Exterior Differential Operators on Boson-fermion Fock Spaces in the Q-space Representation

Yuta Aihara
相原　祐太
北海道大学大学院理学研究院数学部門

1　序

ボソン・フェルミオンフォック空間上の無限次元外微分作用素の理論が [6,7,12] で展開された。そこで理論の基礎となるのは、フォック空間上の生成作用素と消滅作用素の理念であり、理論の展開は Malliavin calculus[14] におけるそれとは独立で、超対称的場の量子論や数論との関係も示され興味深い。また、この理論において、ある基本的なガウス型確率変数の多項式を係数に持つ微分形式の挙動については、多くのことが示され、既にそのような微分形式のクラスのための基礎は完成しているといって良いだろう。そこで、問題となるのは、無限個のガウス型確率変数を持つようなより一般的な微分形式のクラスの挙動を解明することである。ところで、今述べた理論とは別に、[13,15] にあるようなフレッシェ微分の理念を用いた無限次元解析も展開され、実りある結果が得られている。しかし、彼らの関心は L^2- 理論を構築することにはなかったように見える。筆者は [4] において、フレッシェ微分の理念を用いて、[6,7,12] における無限次元解析の理論と整合し得る汎関数的方向微分作用素の L^2- 理論を研究し、この微分作用素について、上述の多項式を含むある一般的な汎関数のクラスに適用可能な部分積分公式を導出した。本報告の目的は、この部分積分公式を基礎にして、[6,7,12] における外微分作用素を包括するようなド・ラーム型のそれを構成することにある。

2　予備的知識

$\mathscr{H}$ を可分な実ヒルベルト空間とする。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ で $\mathscr{H}$ の複素化を表す。$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上のボソンフォック空間と呼ばれる複素ヒルベルト空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{\psi=\{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\;\middle|\;\psi^{(n)}\in\bigotimes_{s}^{n}\mathscr{H}_{\mathbb{C}}, n\geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\|\psi^{(n)}\|^2_{\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}}<\infty\right\},\end{aligned}$$

で定義する。ここで、$\otimes_s^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ は $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ の n 重対称テンソル積である （$\otimes_s^0\mathscr{H}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}$）。$f\in\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ における試験ベクトル f に付随するボソン消滅作用素を $a(f)$ で表す。作用素 $a(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり、その共役 $a(f)^*$ は次の形を取る：

$$(a(f)^*\psi)^{(0)}=0,\ (a(f)^*\psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\psi^{(n-1)}),\ n\geq 1,\ \psi\in D(a(f)^*).$$

ここで、S_n は $\otimes^n\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称化作用素を表す。作用素 $a(f)^*$ は試験ベクトル f に付随する生成作用素と呼ばれる。

A を $\mathscr{H}$ 上の真に正な自己共役作用素とする。$\{\mathscr{H}_s(A)\}_{s\in\mathbb{R}}$ で A に付随するヒルベルトスケールを表す。このとき、すべての $s\in\mathbb{R}$ に対して、$\mathscr{H}_s(A)$ の双対空間 $\mathscr{H}_s(A)'$ は自然に $\mathscr{H}_{-s}(A)$ と同一視される。$\mathscr{H}$ 上のトレースクラスに属する作用素のなすイデアルを $\mathscr{I}_1(\mathscr{H})$ で表す。$\gamma>0$ とし、次を仮定する。

仮定 1.　$A^{-\gamma}\in\mathscr{I}_1(\mathscr{H})$.

ヒルベルト空間 $\mathscr{E}$ を

$$\mathscr{E}:=\mathscr{H}_{\gamma}(A).$$

によって定義する。すると、次が成り立つ。

$$\mathscr{E}'=\mathscr{H}_{-\gamma}(A).$$

以下、集合 X に対して、写像 $F:\mathscr{E}'\longrightarrow X;\ \phi\longmapsto F(\phi)$ を単に $F(\phi)$ と書く。仮定1の下で、$\mathscr{H}$ から $\mathscr{E}'$ への埋め込みはヒルベルト・シュミット作用素である。ゆえに、ミンロスの定理によって、可測空間 $(\mathscr{E}',\mathscr{B})$ 上の確率測度であって、σ-集合体 $\mathscr{B}$ が $\{\phi(f)|f\in\mathscr{E}\}$ で生成され、次の等式が成り立つものがただ一つ存在する。

$$\int_{\mathscr{E}'}e^{i\phi(f)}d\mu(\phi)=e^{-\|f\|^2_{\mathscr{H}}/4},\quad f\in\mathscr{E}.$$

ここで、$\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ は $\mathscr{H}$ のノルムを表す。

$f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$ に対して、$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ で確率変数 $\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n)$ のウィック積を表す。ウィック積 $:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$ は次の漸化式を満たす。

$$:\phi(f_1):=\phi(f_1),$$

$$
\begin{aligned}
:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): &= \phi(f_1):\phi(f_2)\cdots\phi(f_n): \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\langle f_1,f_j\rangle:\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n): \quad n\geq 2,
\end{aligned}
$$

ここで、$\widehat{\phi(f_j)}$ は $\phi(f_j)$ を除くことを意味する。ベクトル $\Omega\in\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ を

$$\Omega := (1,0,0,\cdots),$$

で定義する。ベクトル Ω は $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ におけるフォック真空と呼ばれる。次の事実はよく知られている（例えば、[11,16]）。

定理 2.1. 次を満たすボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$ から $L^2(\mathscr{E}',d\mu)$ へのユニタリー作用素 U が一意的に存在する。

$$U\Omega = 1,$$

$$U(a(f_1)^*\cdots a(f_n)^*\Omega) = (\sqrt{2})^n:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):, \quad f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}$$

定理 2.1 におけるユニタリー作用素 U はボソンフォック空間の Q-空間表現といわれる。ここで構成された $L^2(\mathscr{E}',d\mu)$ を用いた研究として [1,2,6,7,8] がある。また、[9] の理論の無限自由度版はこの表現を用いて記述しうる。

$f\in\mathscr{H}$ に対して、作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := U\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\big(a(f)^*-a(f)\big)}\right)U^{-1}.$$

で定義する。すると、すべての $f\in\mathscr{H}$ に対して、$\pi(f)$ は自己共役作用素になる。

すべての $\mathscr{H}$ に対して、f 方向の汎関数的方向微分作用素と呼ばれる D_f を

$$D_f := i\pi(f)+\phi(f).$$

で定義する。すると、よく知られているように [11]、すべての $f\in\mathscr{H}$ に対して、D_f は $L^2(Q,d\mu)$ 上の可閉線形作用素になる。この汎関数的方向微分作用素に対して、次の部分積分公式が成り立つ。

定理 2.2. [4] $g\in\mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $F,G\in D(D_g)$ に対して、

$$\int_{\mathscr{E}'}(D_gF)(\phi)G(\phi)d\mu(\phi) = \int_{\mathscr{E}'}F(\phi)(2\phi(g)G(\phi)-(D_gG)(\phi))d\mu(\phi). \tag{2.1}$$

ここで、$L^2(\mathscr{E}',d\mu)$ の部分空間を導入する。

定義 2.3. [4] $g\in\mathscr{H}$、 F を $\mathscr{E}'$ 上の可測関数とする。F がフレッシェ微分可能で、すべての $\delta>0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\sup_{|t|\leq\delta}|F(\phi+tg)|e^{\delta|\phi(g)|},\ \sup_{|t|\leq\delta}|F(\phi+tg)|\phi(g)e^{\delta|\phi(g)|}\in L^2(\mathscr{E}',d\mu),\\
&\sup_{|t|\leq\delta}|F'(\phi+tg)(g)|e^{\delta|\phi(g)|}\in L^2(\mathscr{E}',d\mu).
\end{aligned}
$$

を満たすとき、 $F\in\mathscr{D}_g$ という。

すると、次の定理を得る。

定理 2.4. [4] $g \in \mathscr{H}$ とする。このとき、 $\mathscr{D}_g \subset D(\pi(g))$ が成り立つ。さらに、すべての $F \in \mathscr{D}_g$ に対して、

$$(D_g F)(\phi) = F'(\phi)(g), \ \mu - a.e.\ \phi \in \mathscr{E}'. \tag{2.2}$$

定理 2.5. [4] $g \in \mathscr{H}$ とする。このとき、すべての $F, G \in \mathscr{D}_g$ に対して、

$$\int_{\mathscr{E}'} F'(\phi)(g)G(\phi)d\mu(\phi) = \int_{\mathscr{E}'} F(\phi)(2\phi(g)G(\phi) - G'(\phi)(g))d\mu(\phi). \tag{2.3}$$

3 ボソン・フェルミオンフォック空間上のド・ラーム型外微分作用素の構成

すべての $p \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathscr{H}$ 上の連続 p-重線形形式のなすバナッハ空間を $B(\mathscr{H}^p)$ で表す。このとき、自然に $\otimes^p \mathscr{K} \subset B(\mathscr{H}^p)$ を得る ([5])。

定義 3.1. $p \geq 0$, F を $\mathscr{E}'$ から $\otimes^p \mathscr{H}$ への写像とする。F が $B(\mathscr{H}^p)$ の位相に関して C^∞ 級で、すべての $l \geq 0$ と $\phi \in \mathscr{E}'$ に対して

$$F^{(l)}(\phi) \in (\overset{l}{\otimes} \mathscr{E}) \otimes (\overset{p}{\otimes} \mathscr{H}).$$

が成り立つとき、F は強 C^∞ 級であるといわれる。

定義 3.2. $p, l \geq 0$, F を $\mathscr{E}'$ から $(\otimes^l \mathscr{E}) \otimes (\otimes^p \mathscr{H})$ への可測写像とする。F がバナッハ空間 $B(\mathscr{H}^{l+p})$ の位相に関して微分可能で、すべての $\delta > 0$ と $g \in \mathscr{H}$ に対して

$$\sup_{|t| \leq \delta} \|F(\phi + tg)\|_{(\otimes^l \mathscr{E}) \otimes (\otimes^p \mathscr{H})} e^{\delta|\phi(g)|} \in L^2(\mathscr{E}', d\mu),$$
$$\sup_{|t| \leq \delta} \|F(\phi + tg)\|_{(\otimes^l \mathscr{E}) \otimes (\otimes^p \mathscr{H})} \phi(g) e^{\delta|\phi(g)|} \in L^2(\mathscr{E}', d\mu),$$
$$\sup_{|t| \leq \delta} \|F'(\phi + tg)(g)\|_{(\otimes^l \mathscr{E}) \otimes (\otimes^p \mathscr{H})} e^{\delta|\phi(g)|} \in L^2(\mathscr{E}', d\mu).$$

を満たすとき、$F \in \mathscr{D}_{l,p}(\mathscr{E}')$ といわれる。

次の事実に注意する。

$$\mathscr{D}_{l,p}(\mathscr{E}') \subset L^2(\mathscr{E}', d\mu; (\otimes^l \mathscr{E}) \otimes (\otimes^p \mathscr{H})) \subset L^2(\mathscr{E}', d\mu; \otimes^{l+p} \mathscr{H}), \quad l, p \geq 0.$$

定義 3.3. $p \geq 0$, F を $\mathscr{E}'$ から $\otimes^p \mathscr{H}$ への写像とする。F が強 C^∞ 級で、すべての $l \geq 0$ に対して、

$$F^{(l)} \in \mathscr{D}_{l,p}(\mathscr{E}')$$

を満たすとき、$F \in C_p^\infty(\mathscr{E}')$ といわれる。

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、n 変数の多項式の全体を $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ で表す。$L^2(\mathscr{E}', d\mu)$ の稠密な部分空間 $\mathscr{P}(\mathscr{E}')$ を

$$\mathscr{P}(\mathscr{E}') := \{F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) | F \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n), f_j \in \mathscr{E}, j = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

によって定義する。すると、

$$\mathscr{P}(\mathscr{E}') \subset C_0^\infty(\mathscr{E}')$$

が成り立つ。

S を $\mathscr{H}$ 上の閉線形作用素で、$\mathscr{E}$ が $D(S)$ で S の作用素ノルムに関して稠密、$S|_{\mathscr{E}}$ が連続なるものとする。$p \geq 0$ とする。$F \in C_p^\infty(\mathscr{E}')$ に対して、$D_{S,p}F \in L^2(\mathscr{E}', d\mu; \otimes^{p+1} \mathscr{H})$ を

$$(D_{S,p}F)(\phi) := (S \otimes I)(F'(\phi)), \quad \phi \in \mathscr{E}', \ p \geq 1$$

$$(D_{S,0}F)(\phi) := S(F'(\phi)), \quad \phi \in \mathscr{E}'$$

によって定義する。すると、定理 2.5 により、[5] における手法と同様にして、$D_{S,p}$ は $L^2(\mathscr{E}', d\mu; \otimes^p \mathscr{H})$ から $L^2(\mathscr{E}', d\mu; \otimes^{p+1} \mathscr{H})$ への稠密に定義された可閉線形作用素で、次の部分積分公式が成立することを証明できる。

定理 3.4. $p \geq 0$ とする。すべての $F \in C_p^\infty(\mathscr{E}')$, $G \in C_0^\infty(\mathscr{E}')$, $g_j \in D(S^*)$, $j = 1, \cdots, p+1$ に対して、

$$\int_{\mathscr{E}'} \langle (D_{S,p}F)(\phi), G(\phi) \overset{p+1}{\underset{j=1}{\otimes}} g_j \rangle_{\otimes^{p+1}\mathscr{H}} d\mu(\phi) = \int_{\mathscr{E}'} \langle F(\phi), (D^*_{S^*g_1}G)(\phi) \overset{p+1}{\underset{j=2}{\otimes}} g_j \rangle_{\otimes^p \mathscr{H}} d\mu(\phi). \tag{3.1}$$

ここで、$\otimes_{j=2}^1 g_j := 1$ とする。

さて、定理 3.4 の結果を反対称化することにより、ボソン・フェルミオンフォック空間上のド・ラーム型の外微分作用素を構成しよう。すべての $p \geq 0$ に対して、$\wedge^p \mathscr{H}$ を $\mathscr{H}$ の反対称テンソル積、A_p を $\otimes^p \mathscr{H}$ 上の反対称化作用素とする。$\mathscr{H}$ 上のフェルミオンフォック空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})$ で表す。すると、ボソン・フェルミオンフォック空間 $L^2(\mathscr{E}', d\mu; \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H}))$ について、次が成り立つ。

$$L^2(\mathscr{E}', d\mu; \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} L^2(\mathscr{E}', d\mu; \overset{p}{\wedge} \mathscr{H}).$$

$L^2(\mathscr{E}', d\mu; \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H}))$ の閉部分空間 L_p^2 を

$$L_p^2 := L^2(\mathscr{E}', d\mu; \overset{p}{\wedge} \mathscr{H})$$

によって定義する。

すべての $F \in C_p^\infty(\mathscr{E}') \cap L_p^2$ に対して、$d_{S,p}F \in L_{p+1}^2$ を

$$(d_{S,p}F)(\phi) := \sqrt{p+1}A_{p+1}((D_{S,p}F)(\phi)), \quad \phi \in \mathscr{E}',$$

によって定義する。$D(d_{S,p}) := C_p^\infty(\mathscr{E}') \cap L_p^2$.

$\mathscr{H}$ の代数的反対称テンソル積を $\hat{\otimes}_{\mathrm{a}}^p \mathscr{H}$ で表す。このとき、$C_0^\infty(\mathscr{E}')$ と $\hat{\otimes}_{\mathrm{a}}^p \mathscr{H}$ の代数的テンソル積 $(C_0^\infty(\mathscr{E}'))\hat{\otimes}(\hat{\otimes}_{\mathrm{a}}^p \mathscr{H})$ について、

$$(C_0^\infty(\mathscr{E}'))\hat{\otimes}(\overset{p}{\underset{\mathrm{a}}{\hat{\otimes}}}\mathscr{H}) \subset D(d_{S,p})$$

が成り立つ。よって、線形作用素 $d_{S,p}$ は稠密に定義されている。

すべての $L_1 \in \wedge^p\mathscr{H}$, $L_2 \in \wedge^q\mathscr{H}$ に対し、L_1 と L_2 の外積 $L_1 \wedge L_2 \in \wedge^{p+q}\mathscr{H}$ を

$$L_1 \wedge L_2 := \sqrt{\frac{(p+q)!}{p!q!}}A_{p+q}(L_1 \otimes L_2)$$

によって定義する。また、すべての $g_j \in \mathscr{H},\ j = 1, \cdots, p$ に対し、

$$\overset{p}{\underset{j=1}{\wedge}} g_j := g_1 \wedge \cdots \wedge g_p = \sqrt{p!}A_p(\overset{p}{\underset{j=1}{\otimes}} g_j)$$

と定義する。具体的な微分形式に対する $d_{S,p}$ の作用については次が成り立つ。

命題 3.5. すべての $F \in C_0^\infty(\mathscr{E}')$ と $f_j \in \mathscr{H},\ j = 1, \cdots, p$ に対して、

$$d_{S,p}(F(\phi)\overset{p}{\underset{j=1}{\wedge}} f_j) = (d_{S,0}F)(\phi) \wedge (\overset{p}{\underset{j=1}{\wedge}} f_j), \quad \phi \in \mathscr{E}'. \tag{3.2}$$

定理 3.4 を応用することにより、$d_{S,p}^*$ の具体的な微分形式に対する作用について次が得られる。

定理 3.6. すべての $p \geq 0$ に対して、

$$(C_0^\infty(\mathscr{E}'))\hat{\otimes}(\overset{p+1}{\underset{\mathrm{a}}{\hat{\otimes}}} D(S^*)) \subset D(d_{S,p}^*).$$

さらに、すべての $G \in C_0^\infty(\mathscr{E}')$ と $g_j \in D(S^*),\ j = 1, \cdots, p+1$ に対して、

$$d_{S,p}^*(G(\phi)\overset{p+1}{\underset{j=1}{\wedge}} g_j) = \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j-1}(D_{S^*g_j}^* G)(\phi)g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_{p+1} \tag{3.3}$$

定理 3.6 により、$D(d_{S,p}^*)$ は L_{p+1}^2 で稠密であるから、$d_{S,p}$ は可閉である。以下、$\overline{d_{S,p}}$ も単に $d_{S,p}$ と書く。

ガウス型確率変数の多項式に対する $d_{S,0}$ の作用は以下の形をとる。

命題 3.7. $n \in \mathbb{N},\ P \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n),\ f_j \in D(S),\ j = 1, \cdots, n$ とする。このとき、

$$d_{S,0}\left(P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\right) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j P)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) S f_j, \quad in\ L^2 - sense. \tag{3.4}$$

命題 3.7 により、[6,7,12] において導入された外微分作用素は $\overline{d_{S,p}|_{\mathscr{P}(\mathscr{E}')\hat{\otimes}(\hat{\otimes}^p_{\mathrm{a}}\mathscr{H})}}$ であることが分かる。以下、$\overline{d_{S,p}|_{\mathscr{P}(\mathscr{E}')\hat{\otimes}(\hat{\otimes}^p_{\mathrm{a}}\mathscr{H})}}$ を $(d_{\mathscr{P}})_{S,p}$ と書く。すると、

$$(d_{\mathscr{P}})_{S,p} \subset d_{S,p}$$

が成り立つ。自己共役作用素 S^*S のボソンフォック空間 $L^2(\mathscr{E}', d\mu)$ における第 2 量子化作用素を $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)$, 自己共役作用素 SS^* のフェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})$ における第 2 量子化作用素を $d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*)$ と書く。作用素 $d\Gamma^{(p)}_{\mathrm{f}}(SS^*)$ を

$$d\Gamma^{(p)}_{\mathrm{f}}(SS^*) := d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*)|_{D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*))\cap(\wedge^p\mathscr{H})}$$

によって定義する。このとき、[7] によって得られた次の定理が再発見される。$d_{S,-1} := 0,\ (d_{\mathscr{P}})_{S,-1} := 0$ と定義する。

定理 3.8. すべての $p \geq 0$ に対して、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} & 2(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes I \ + \ I \otimes d\Gamma^{(p)}_{\mathrm{f}}(SS^*)) \\ = \ & (d_{\mathscr{P}})^*_{S,p}(d_{\mathscr{P}})_{S,p} + (d_{\mathscr{P}})_{S,p-1}(d_{\mathscr{P}})^*_{S,p-1} \\ = \ & d^*_{S,p}d_{S,p} + d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

等式 (3.5) を踏まえ、作用素付きの無限次元ラプラシアン $\Delta_{S,p}$ を

$$\Delta_{S,p} := d^*_{S,p}d_{S,p} + d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}$$

によって定義する。最も単純な例として、$\gamma = 2,\ S = A^{\frac{1}{2}}$ の場合を考えることができる。

さて、次を証明できる。

命題 3.9. すべての $p \geq 0$ に対して、次が成立する。

(1) $D(d_{S,p-1})$ 上で、

$$d_{S,p}d_{S,p-1} = 0. \tag{3.6}$$

(2)

$$\overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})} \perp \overline{\mathrm{Ran}(d^*_{S,p})}. \tag{3.7}$$

命題 3.9 により、ここでフレッシェ微分の理念を援用し構成した外微分作用素 $\{d_{S,p}\}_{p\geq 0}$ に対しても、次のド・ラーム-ホッジ-小平型の分解定理が成立することが分かる。

定理 3.10. すべての $p \geq 0$ に対して、

$$L^2_p = \overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})} \oplus \overline{\mathrm{Ran}(d^*_{S,p})} \oplus \mathrm{Ker}(\Delta_{S,p}). \tag{3.8}$$

なお、詳細は省略せざるをえないが、ここで展開された実理論は、すべての複素ヒルベルト空間は実ヒルベルト空間の複素化であるという事実をここで現れるヒルベルト空間に対して顕在化することにより、$\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$ に適合した形式で展開できる。また、[3] における複素外微分作用素の取り扱いも、ここで述べた理論を複素化することでより包括的なものに改良し得る。

参考文献

[1] Y. Aihara, Semi-classical asymptotics in an abstract Bose field model, *IJPAM* **85** (2013), 265-284.

[2] Y. Aihara, Semi-classical asymptotic expansions up to any finite orders of the partition function of an abstract Bose field model, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* **19** (2016), 1650028 (16 pages).

[3] Y. Aihara, A functional directional derivative in infinite dimensional spaces and its application to $\bar{\partial}$-equations, *J. Math. Anal. Appl.* **464** (2018), no.1, 231-246.

[4] Y. Aihara, Integration by parts formulae for a general class of functions in Boson Fock spaces, *Hokkaido Univ. Preprint Series.* **1115** (2018).

[5] Y. Aihara, On Closability of Differential Operators Acting in Vector-valued L^2-functions in Fock Spaces, *Hokkaido University Preprint Series* (2018).

[6] A. Arai, Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, *J. Funct. Anal.* **82** (1989), 330-369.

[7] A. Arai, A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index, *J. Functional Analysis*, **105** (1992), 342-408.

[8] A. Arai, Trace formulas, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 510-546.

[9] A. Arai, Functional integral representations and Golden-Thompson inequalities in Boson-Fermion systems, Rev. Math. Phy. **25** (2013), no.8.

[10] 新井朝雄, フォック空間と量子場, 日本評論社, 2000.

[11] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, 2010.

[12] A. Arai and I. Mitoma, De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in ∞-dimensions, *Math. Ann.* **291** (1991), 51-73.

[13] J.F. Colombeau, "Differential Calculus and Holomorphy," North-Holland, 1982.

[14] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer, 1997.

[15] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, 1986.

[16] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Prinston University Press, 1974.

パラレルセッション
会場 D

非可換多様体上のU(1)のインスタントンからのエルミート・アインシュタイン計量を作る

原 健太郎 (東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻)
佐古 彰史 (東京理科大学理学部第ニ部数学科)
Hyun Seok Yang(Center for Quantum Spacetime, Sogang University, Seoul 04107, Korea)

概 要

我々は今回、局所的なエルミート・アインシュタイン計量が"Gravitational instantons from gauge theory," H. S. Yang and M. Salizzoni, Phys. Rev. Lett. (2006) 201602, [hep-th/0512215] で紹介されている写像によって（反）自己双対 2-形式から構成されることを示した。 この方法は元々非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のゲージ理論についてのものであったが、今回に限っては可換空間上の（反）自己双対 2-形式に対しても有効である。我々は今回（反）自己双対 2-形式の具体例として非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンを用いることでエルミート・アインシュタイン計量を構成している。またこのエルミート・アインシュタイン計量がケーラー計量になる条件はある 2-形式がビアンキ恒等式を満たすことである。

1 背景（重力理論・リーマン幾何学）

Definition 1. (M, g) を（準）リーマン多様体とする。レビ・チビタ接続から定義されるリッチ曲率 $R_{\mu\nu}$、スカラー曲率 R が

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

を満たすとき (M, g) をアインシュタイン多様体という。また上記方程式を（真空の）アインシュタイン方程式と呼ぶ。

この方程式は一般相対性理論において最も重要な方程式である。ここにおいて (M, g) は時空であり、ブラックホール周りの粒子の挙動や宇宙膨張の歴史、重力レンズ効果、重力波などの宇宙物理学を記述する。

2 背景（マクスウェル方程式・ゲージ理論）

対称行列全体の集合を $Alt_n(\mathbb{R})$ と表すこととする。つまり

$$Alt_n(\mathbb{R}) := \left\{ F \in M_n(\mathbb{R}) \mid F^T = -F \right\}$$

と定義する。

Definition 2. 線形写像 $* : Alt_4(\mathbb{R}) \longrightarrow Alt_4(\mathbb{R})$ を以下で定義する。

$$* \left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{34} & -\hat{F}_{24} & \hat{F}_{23} \\ -\hat{F}_{34} & 0 & \hat{F}_{14} & -\hat{F}_{13} \\ \hat{F}_{24} & -\hat{F}_{14} & 0 & \hat{F}_{12} \\ -\hat{F}_{23} & \hat{F}_{13} & -\hat{F}_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

次に $\hat{F}$ を $\mathbb{R}^4$ 上の Alt_4 値函数 $\hat{F}(x)$ に格上げし、$\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式

$$\hat{F}(x)_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu,\ \left(*\hat{F}(x)\right)_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu$$

を定義する。ここではアインシュタインの縮約記法を使っている。

$$\hat{F} := \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ -\hat{F}_{12} & 0 & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ -\hat{F}_{13} & -\hat{F}_{23} & 0 & \hat{F}_{34} \\ -\hat{F}_{14} & -\hat{F}_{24} & -\hat{F}_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、

$$\mathrm{d}\left(\hat{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu\right) = 0, \mathrm{d}\left(\left(*\hat{F}\right)_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu\right) = 0$$

を仮定すると、E_μ を電場、B_μ を磁場とするマクスウェル方程式が導出される。前者をビアンキ恒等式と言い、磁場に対するガウスの法則とファラデーの電磁誘導の法則を導く。後者をヤン・ミルズ方程式といい、電場に対するガウスの法則とアンペールの法則を導く。そこで $*\hat{F} = -\hat{F}$ となるような $\hat{F}$ をインスタントンという。

Fact 2.1. $\hat{F}$ がインスタントン条件とビアンキ恒等式を同時に満たすならば、その $\hat{F}$ はヤン・ミルズ方程式の解である。つまり

$$*\hat{F} = -\hat{F}, \mathrm{d}\left(\hat{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu\right) = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}\left(\left(*\hat{F}\right)_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_\nu\right) = 0$$

が成立する。

3 先行研究

[1] においては [2] の結果に基づいて 4×4 反対称行列 $F, \hat{F}, \theta$ の各成分に対して以下のような関係式を与えている。

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{1+F\theta}F\right)_{\mu\nu}$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ であり、

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}$$

である。また対称行列 G, g も

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + (F\theta)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\right)$$

のように与える。するとつまりは

$$g_{\mu\nu} = \left(2\left(E_4 + \hat{F}\theta\right)^{-1} - E_4\right)_{\mu\nu}$$

ということになる。ただし E_4 は 4×4 単位行列であり $F, \hat{F}$ に関してはゲージ曲率、g, G に関しては計量を想定している。

4　主結果

[1] においては F がビアンキ恒等式を満たし、$\hat{F}$ が自己双対であるときの解の一つを用いた場合 g が江口ハンソン計量になることを示している。この計量はよく知られたケーラー・アインシュタイン計量の一例である。F がビアンキ恒等式を満たすとき g がケーラー計量になることは知られていたが、新たに [4] において我々はこの結果の一般化として $\hat{F}$ が自己双対であるときは g がエルミート・アインシュタイン計量になることを示した。つまり

Lemma 4.1. 反対称行列 $\hat{F}^-, \theta \in M_4\mathbb{R}$ に対して対称行列 $g \in M_4\mathbb{R}$ を

$$g = \left(2\left(E_4 + \hat{F}^-\theta\right)^{-1} - E_4\right)$$

で定義する。ただし

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}$$

である。反対称行列 $\hat{F}^-$ を $\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式と思った時のホッジ作用素に対して

$$\star\hat{F}^- = -\hat{F}^-$$

を満たす場合

$$\det[g] = 1$$

となる。

Theorem 4.2. 局所的に $\mathbb{R}^4$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視した場合、エルミート接続に対するリッチ曲率は

$$R_{\bar{j}k} = \partial_{\bar{j}}\partial_k \log(\det[g])$$

で計算される。つまり上記の条件 $\star\hat{F}^- = -\hat{F}^-$ のもとでは g が計量だとすると

$$R_{\bar{j}k} = 0$$

すなわちリッチ平坦・アインシュタイン計量を意味している。

ということを示した。自己双対である $\hat{F}$ の具体例としてはインスタントン解がよく知られており、非可換多様体上のインスタントン解については [3] において計算されている。このインスタントン解に対応するエルミート・アインシュタイン計量が [4] において計算されている。

参考文献

[1] S. Lee, R. Roychowdhury and H. S. Yang, "Test of Emergent Gravity," Phys. Rev. D **88** (2013) 086007 doi:10.1103/PhysRevD.88.086007 [arXiv:1211.0207 [hep-th]].

[2] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP. **9** (1999) 032, [hep-th/9908142].

[3] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, "Elongated U(1) instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$," JHEP **0111** (2001) 068 doi:10.1088/1126-6708/2001/11/068 [hep-th/0109111].

[4] K. Hara, A. Sako and H. S. Yang, "Hermitian-Einstein metrics from noncommutative $U(1)$ instantons," arXiv:1809.02328 [hep-th].

Factorizability of tensoring quantum channels with the completely depolarizing channel

北海道大学大学院理学院 数学専攻
植田 優基 (Yuki UEDA) *

1 はじめに

近年, 量子コンピューターの研究が進み, ベンチャー企業をはじめとする多方向からの関心が高まってきている. それは 2011 年にカナダの企業である D-Wave Systems が量子コンピューター「D-Wave」の建造に成功したと発表したことをきっかけに, Google 社を筆頭とする多くのベンチャー企業が D-Wave 社と協業を開始し, 本格的な量子コンピューター実現の可能性が高まったからだと考えられる. **量子コンピューター**とは, 大雑把に言えば, 量子力学的な状態の重ね合わせを用いて演算の並列性を実現すると期待されるコンピューターのことで, 従来のコンピューターの情報量の単位「ビット」に対応する「量子ビット」と呼ばれる重ね合わせの状態を 1 つの情報量として扱うものである. つまりビットは「0 か 1」といった 2 値を表すいずれかの状態でもつ情報量の単位であるのに対し, 量子ビットは「0 と 1」の両方を確率論的に表現した状態 (重ね合わせの状態) でもつ情報量の単位である. 例えば n ビットの情報を全て解析するには全部で 2^n 通りの演算を行う必要があるが, n 量子ビットであれば 2^n 通りの状態を重ね合わせで表現するため, 1 回の演算 (しかもエネルギーを消費せずに! [1]) で解析することができる. こういった性質をもつことから実現が可能となれば, 現在存在している暗号理論 (RSA 暗号や楕円曲線暗号など) に基づいた暗号化を短時間で解析することができるとされている. そのため, 量子情報理論における研究としては, 量子コンピューターの仕組みについての研究 (実現化に向けた量子力学における概念の整備や量子ゲート方式のような論理ゲートの構築) をはじめとし, 量子コンピューターによる暗号解析に対抗するための量子暗号理論や, 量子状態の通信路 (チャネル) 理論の研究や実験などがある. 本研究は, 主に「量子状態の通信路理論」に相当する領域に関する研究であり, ノイズが入った通信路から得られる結果についてまとめたものとなっている.

2 量子チャネルの定義

この節では, 量子状態の通信路 (量子チャネル) がどういったものかについて解説する. 今後, 以下の記号をよく用いることに注意する.

- M_n: $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列環
- $1_n \in M_n$: n 次単位行列
- $A^* \in M_n$: $A \in M_n$ の転置共役行列
- $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \in M_n$: 対角成分を $x_1, \cdots, x_n$ とする n 次対角行列 (対角ブロック行列を表すこともある)
- I_n: M_n 上の恒等写像, つまり $I_n(x) = x$, $x \in M_n$
- Tr_n: n 次正規化トレース, つまり $\mathrm{Tr}_n(x) = \frac{1}{n}(x_{11} + \cdots + x_{nn})$, $x = (x_{ij}) \in M_n$
- $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$: M_n の (内部) 自己同型群に関する凸包
- $\mathcal{U}(\mathcal{M})$: von Neumann 環 $\mathcal{M}$ 内のユニタリ作用素全体の集合

*yuuki1114@math.sci.hokudai.ac.jp

まずはじめに (有限次元の) 量子チャネルの数学的な定義について述べる. 一般には無限次元の量子チャネルが定義されるが, ここでは有限次元の場合のみに限定する.

定義 2.1. 次の条件を満たす M_n 上の線形写像 $T : M_n \to M_n$ を**量子チャネル**と呼ぶ.
(1) T は**単位的**である, つまり $T(1_n) = 1_n$.
(2) T は**トレース保測**である, つまり, $\mathrm{Tr}_n \circ T = \mathrm{Tr}_n$.
(3) T は**完全正**である, つまり, 全ての自然数 k に対して, $T \otimes I_k : M_n \otimes M_k \to M_n \otimes M_k$ は正写像.

量子コンピュータの動作過程は, 入力した状態の変化を与えるユニタリ変換で表される計算過程と, 送信先で観測し実際に得られた状態が出力される観測過程の 2 つに分けられる. これらの別々の動作過程はどちらとも量子状態の変化として見ることができることから, 同一の数学的モデルで表現できると考えられる. こういった一連の動作過程をまとめて表現したものが量子チャネルであり, 情報 (量子状態) の入力から出力に変換する通信路のような役割を担っている (詳しくは [5] による解説を参照のこと). ここで重要な量子チャネルであるユニタリチャネルについて解説する.

定義 2.2. 線形写像 $T : M_n \to M_n$ がユニタリチャネルであるとは, あるユニタリ行列 $U \in M_n$ が存在し,

$$T(x) = U^* x U, \qquad x \in M_n$$

と表される量子チャネルのことをいう.

ユニタリチャネルは, 入力した状態の変化を与える際に行われる計算過程の部分を表した量子チャネルである. 量子コンピューターを介して起こる状態の変化は確率論的に色々な可能性をもっているため, 量子チャネルの計算過程はユニタリチャネルの重ね合わせで表現される. 例えば,

$$T(x) = \frac{2}{3} U^* x U + \frac{1}{3} V^* x V$$

(ただし U, V はユニタリ行列) と表された量子チャネル T は大雑把に言えば, 出力状態 x が確率 $\frac{2}{3}$ で U^*xU に状態変化が起こり, 確率 $\frac{1}{3}$ で V^*xV に状態変化が起こる計算過程をもった量子チャネルであると考えられる. ところでユニタリチャネルは線形写像の言葉で言えば, 行列環 M_n の内部自己同型であるため, それらの重ね合わせとは凸包 $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ の元であると言える. そのため, 量子チャネルが凸包 $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ に含まれているかどうかは重要な問題である (全ての量子チャネルが $\mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n))$ に含まれるとは限らない).

3 問題設定と主結果

本研究の主結果は [4] による. まず問題設定を述べる前に, Haagerup と Musat が [3] において得られた結果について紹介する.

定理 3.1. [Haagerup, Musat, 2015] $T : M_n \to M_n$ を量子チャネルとし, あるユニタリ行列 U と自然数 k が存在し

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_k)(U^*(x \otimes 1_k)U), \qquad x \in M_n,$$

と表現されているとする. このとき, $T \otimes S_k \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))$ となる.

ここで線形写像 $S_k : M_k \to M_k$ は

$$S_k(x) := \mathrm{Tr}_k(x) 1_k, \qquad x \in M_k$$

で定義される量子チャネルであり, k **次 Completely depolarizing チャネル**と呼ばれる (どのように和訳されるのかは筆者は知らない). 古典 (従来の) コンピューターの場合でもそうだが, ある (量子) 状態を入力系から出力系に送信する際に外部からのノイズを受けることで, 元々想定されていた出力状態と異なる状態が出力される問題が生じる (古典の場合には誤り訂正理論といったノイズを考慮した情報系を解析する理論が存在する). 量子情報系の場合にもこの問題に立ち向かいたい. そこで Completely depolarizing チャネルをテンソル積するという事は, 元々の量子チャネルにある種のノイズ (色々な要因はあるが...) を考慮した, 新たな量子チャネルを解析することに対応する. ではノイズを含んだ量子チャネルから真の量子チャネルを引き出すことはできるのか? この問題は, 「**定理 3.1** の逆は成立するか?」という問題に解釈することができる. 本研究では, まずこの問題が部分的に正しいという事を証明した.

定理 3.2. $T : M_n \to M_n$ を量子チャネルとし,

$$T \otimes S_k(z) = \sum_{i=1}^{N} p_i U_i^* z U_i \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k)), \qquad z \in M_n \otimes M_k$$

を満たすとする. ただし $p_i > 0$ は $p_1 + \cdots + p_N = 1$ を満たす正の有理数とし, $p_i = \frac{L_i}{L}$ ($L_i, L > 0$ は整数) と表されるとする. また $U_i \in M_{nk}$ はすべてユニタリ行列とする. このとき

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_{kL})(U^*(x \otimes 1_{kL})U), \qquad x \in M_n,$$
$$U = \mathrm{diag}(\overbrace{U_1, \cdots, U_1}^{L_1}, \cdots, \overbrace{U_N, \cdots, U_N}^{L_N}) \in \mathcal{U}(M_{nkL})$$

が成立する.

この結果を使う事によって, 限定的な設定になってしまうが, ある種ノイズが加わった量子チャネルから真の量子チャネルを (少ない計算で) 見つけ出すことができる. 例を一つ挙げてみよう.

例 3.3. 2 次 Completely depolarizing チャネル S_2 による T のテンソル量子チャネルが次の表示をもつとする.

$$T \otimes S_2(z) = \frac{2}{5} z + \frac{3}{5} u^* z u, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{U}(M_4).$$

(物理的解釈) $T \otimes S_2$ は, 入力状態 $z \in M_4(\mathbb{C})$ を, 確率 2/5 で状態 z として, 確率 3/5 で状態 $u^* z u$ として, "2 つの状態の重ね合わせ"で出力する通信路である.

定理 3.2 から 2 次元量子チャネル T は次のような表示をもつ.

$$T(x) = (I_2 \otimes \mathrm{Tr}_{10})(U^*(x \otimes 1_{10})U), \qquad x \in M_2,$$
$$U = \mathrm{diag}(1_4, 1_4, u, u, u) \in \mathcal{U}(M_{20}).$$

ここで

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$$

を考えると,

$$T(E_{11}) = \frac{7}{10} E_{11} + \frac{3}{10} E_{22}, \quad T(E_{12}) = \frac{1}{10} E_{12} - \frac{3}{10} E_{21},$$
$$T(E_{21}) = \frac{1}{10} E_{21} - \frac{3}{10} E_{12}, \quad T(E_{22}) = \frac{7}{10} E_{22} + \frac{3}{10} E_{11}.$$

従って $x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22}$ に対して

$$T(x) = x_{11}T(E_{11}) + x_{12}T(E_{12}) + x_{21}T(E_{21}) + x_{22}T(E_{22})$$
$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7x_{11} + 3x_{22} & x_{12} - 3x_{21} \\ -3x_{12} + x_{21} & 3x_{11} + 7x_{22} \end{bmatrix}.$$

よって T は入力状態 x に対して, 上のような出力状態 (行列) を与える量子チャネルであることが解った.

ところで**定理 3.2** は, $T \otimes S_k$ の表現がいくつかのユニタリチャネルの有理係数凸結合であったことで成立したのだが, 有理係数であることが本質的であることを次のような反例を挙げて証明した.

定理 3.4. $0 < \lambda < 1$ を無理数とする, また $T_\lambda : M_3 \to M_3$ は次で定義される量子チャネルとする.

$$T_\lambda(x) := \lambda x + (1 - \lambda) U^* x U, \qquad x \in M_3$$
$$U = \mathrm{diag}(1, i, -1) \in \mathcal{U}(M_3)$$

このとき, T_λ は任意の自然数 N と任意のユニタリ行列 $V \in M_{3N}$ で

$$T_\lambda(x) = (I_3 \otimes \mathrm{Tr}_N)(V^*(x \otimes 1_N)V), \qquad x \in M_3$$

と表すことが出来ない.

4　今後の課題

4.1　ノイズ込みの量子チャネルから真の量子チャネルを求める問題

第 2 節で, $T \otimes S_k$ の表現はユニタリチャネルの有理係数凸結合でなければ, **定理 3.2** は一般には成立しないことが解った. つまり有理係数でなければ, **例 3.3** のような手法で, ノイズが入った量子チャネルから真の量子チャネルを得ることが出来ない. しかし現実的には有理係数以外の場合も扱いたいため, より一般の (有理係数だけでなく無理係数も認める) ノイズ込みの量子チャネルから, 真の量子チャネルを得る別の手法を提示することが今後の課題となる.

4.2　Connes Embedding Problem との関連問題

数学的にも非常に重要な問題が残っている. それは作用素環論における未解決問題である **Connes Embedding Problem** との関連である. Connes Embedding Problem は von Neumann 環の一種である $\mathbf{II}_1$ **型 因子環**と呼ばれるクラスに関連した問題 (ここでは詳しくは解説しない) であり, Connes が 70 年代にこの問題を提起してから未だ未解決である. 多くの数学者がこの問題に取り組んできたが, 今回取り上げたい結果は, 2015 年に Haagerup と Musat によって得られた量子チャネルに関連した問題との同値性である.

定理 4.1 (Haagerup, Musat, 2015)**.** 以下の主張は同値である.
(1) Connes Embedding Problem は正しい.
(2) 全ての自然数 $n \geq 3$ と

$$Tx = (I_n \otimes \tau_{\mathcal{N}})(u^*(x \otimes 1_{\mathcal{N}})u), \qquad x \in M_n \tag{4.1}$$

(ただし, $\mathcal{N}$ はある von Neumann 環, $\tau_{\mathcal{N}}$ は $\mathcal{N}$ 上のある正規忠実トレース, $u \in M_n \otimes \mathcal{N}$ はあるユニタリ作用素) で表現されるすべての量子チャネル $T : M_n \to M_n$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} d_{cb}(T \otimes S_k, \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))) = 0 \tag{4.2}$$

が成立する.

関数 d_{cb} は **cb-ノルム** ($||T||_{cb} := \sup_{k\in\mathbb{N}} ||T \otimes I_k||$) から導かれる M_n 上線形写像全体の集合上の距離を指す. この定理の面白い点は, 一方は無限次元の問題である Connes Embedding Problem と (一部無限次元の可能性がある von Neumann 環を介してはいるが) 有限次元の量子チャネルの問題が同値であるということを主張している点である. さらに発展させて次のような問題が考えられる.

問題 4.2. 量子チャネル T が (4.1) と (4.2) が成立しているならば, ある自然数 k が存在し, $T \otimes S_k \in \mathrm{conv}(\mathrm{Aut}(M_n \otimes M_k))$ は言えるか?

(4.1) において, $\mathcal{N} = M_k$, $\tau_{\mathcal{N}} = \mathrm{Tr}_k$ であれば**定理 3.1** から, **問題 4.2** が肯定的に言えることが解る. また行列環以外の場合にも次のような例もある (証明は [4] を参照).

定理 4.3. 有限次元 von Neumann 環 $\mathcal{N} \simeq M_{k_1} \oplus \cdots \oplus M_{k_d}$ と $\mathcal{N}$ 上のトレース

$$\tau_{\mathcal{N}}(x_1, \cdots, x_d) := \alpha_1 \mathrm{Tr}_{k_1}(x_1) + \cdots + \alpha_d \mathrm{Tr}_{k_d}(x_d), \qquad x_i \in M_{k_i}$$

(ただし $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ は正の有理数で $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ となる) とユニタリ作用素 $u \in M_n \otimes \mathcal{N}$ が存在して, 量子チャネル T が (4.1) と表現されるとき, ある自然数 L とユニタリ行列 $U \in M_n \otimes M_L$ が存在し,

$$T(x) = (I_n \otimes \mathrm{Tr}_L)(U^*(x \otimes 1_L)U), \qquad x \in M_n$$

が成立する.

定理 3.1 を用いれば, この場合の量子チャネルに関しても**問題 4.2** が肯定的に言えることがわかる. このようにいくつかの結果を用いて, 問題 4.2 が正しいかどうかを解決することが今後の課題となる.

謝辞

本研究は, 2016 年度京都大学スーパーグローバル大学創成支援事業「ジャパンゲートウェイ構想」 数学系ユニット (KTGU) による支援を受けています.

参考文献

[1] P. Benioff, The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines, Journal of Statistical Physics, 1980, Volume **22**, Issue 5, pp 563-591.

[2] U. Haagerup, M. Musat, Factorization and dilation problems for completely positive maps on von Neumann algebras. Comm. Math. Phys. **303** (2011), no. 2, 555-594.

[3] U. Haagerup, M. Musat, An asymptotic property of factorizable completely positive maps and the Connes embedding problem. Comm. Math. Phys. **338** (2015), no. 2, 721-752.

[4] Y. Ueda, On tensors of factorizable quantum channels with the completely depolarizing channel, Adv. Oper. Theory **3** (2018) no. 4, 807-815.

[5] 菊池慶一, 渡邉昇, 量子計算過程の量子チャネルによる定式化, 数理解析研究所講究録 **1066**, (1998) 87-94.

非対称細胞分裂における極性パターン形成メカニズムの解明

広島大学大学院 理学研究科 数理分子生命理学専攻
中原智弘 (Tomohiro NAKAHARA)　李聖林 (Sungrim Seirin Lee)

概要

初期発生過程ににおける非対称細胞分裂のメカニズム解明は発生生物学において重要な課題の一つである。非対称細胞分裂の初期段階に細胞は細胞膜、細胞質において自らが持つたんぱく質を左右非対称に局在させ極性パターンを形成する。本研究では空間二次元の移流反応拡散方程式系と Phase-field 法を融合させ細胞の形を反映した数理モデルを構築することにより細胞膜、細胞質における極性パターン形成のメカニズムを解明する。

1　導入

我々ヒトの体は一つの受精卵から始まり、最終的には約 200 種類もの細胞を持つようになる。このような細胞の多様化を可能にする一つの仕組みとして初期発生過程における非対称細胞分裂がある。非対称細胞分裂は細胞分化の根幹となる仕組みの一つであり、そのメカニズムの解明は発生生物学における重要な課題の一つである。非対称細胞分裂では、その初期段階に細胞は自らが持つ様々なたんぱく質を左右非対称に局在させ極性パターンを形成し、その後異なる機能を持った二つの娘細胞に分裂する。初期段階におけるたんぱく質の局在（細胞極性）は娘細胞の大きさやその後の運命を決定するためとても重要なプロセスであり、非対称細胞分裂のメカニズムの解明には細胞極性メカニズムの解明が欠かせない。

これまでにも細胞極性の研究は多くされてきており、モデル生物としてショウジョウバエや線虫が多く用いられてきた。線虫の受精卵は非対称分裂しその際細胞膜と細胞質で様々なたんぱく質を局在させる。細胞膜においては PAR たんぱく質が極性を形成することが知られている。また、細胞膜での PAR 極性の形成と同時に細胞質では MEX-5/6 が極性を形成することが観察されており、Anterior たんぱく質（PAR-3,PAR-6）とは同位相に、Posterior たんぱく質（PAR-1,PAR-2）とは逆位相に極性を形成する（図 1 ）。細胞膜と細胞質の極性形成はどちらも精子からのシグナルを受けることで始まり、精子からのシグナルを受ける前には Anterior たんぱく質は細胞膜で、Posterior たんぱく質と MEX-5/6 は細胞質でそれぞれ一様に分布している。精子からのシグナルを受けると Posterior たんぱく質は細胞膜に広がり始め、Anterior たんぱく質ドメインと Posterior たんぱく質ドメインの境界がだいたい細胞の半分の所に到達するまで広がる。細胞膜と細胞質の極性は分裂が始まるまでの間たもたれる。

PAR たんぱく質と MEX-5/6 は相互に影響し合うことでそれぞれの極性を形成することが実験

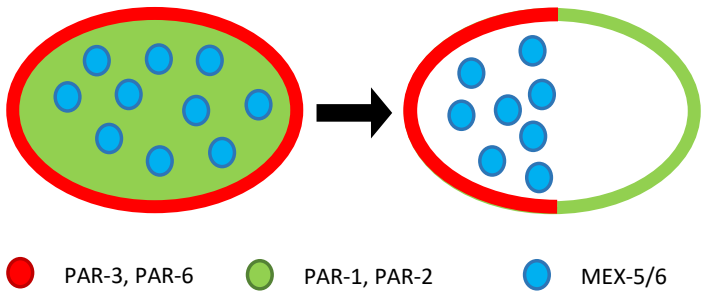


図 1　細胞膜と細胞質での極性

からわかっている。しかし、これまでの理論研究のほとんどは PAR たんぱく質にのみ注目しており、PAR たんぱく質と MEX-5/6 の相互関係について考察したものはない。また、実験においても MEX-5/6 がどのように細胞膜での PAR 極性の形成を制御しているかについては明らかにされていない。

本講演では、細胞膜での PAR 極性と細胞質での MEX-5/6 の極性形成を同時に考察した数理モデルを構築し、さらに構築した数理モデルと Phase-field 法を融合させることで細胞の形を反映した数理モデルを構築する。細胞膜だけでなく細胞質、細胞全体におけるたんぱく質の極性形成のより核となるメカニズムを解明する。

2　数理モデル

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を細胞質、$\partial\Omega \equiv \Gamma$ を細胞膜とする。複数のたんぱく質のダイナミクスを捉えるために以下のような移流反応拡散方程式系を実験の結果をもとに構築した。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial [A_m]}{\partial t} + \nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{v}_m(\mathbf{x},t)[A_m]) = D_m^A \nabla_\Gamma^2 [A_m] + F_{\mathrm{on}}^A(\mathbf{x},t)[A_c] - F_{\mathrm{off}}^A(\mathbf{x},t)[A_m] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
&\frac{\partial [A_c]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_c(\mathbf{x},t)[A_c]) = D_c^A \nabla^2 [A_c] && \text{on } \mathbf{x} \in \Omega \\
&D_c^A \frac{\partial [A_c]}{\partial \mathbf{n}} = -F_{\mathrm{on}}^A(\mathbf{x},t)[A_c] + F_{\mathrm{off}}^A(\mathbf{x},t)[A_m] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\
&\frac{\partial [P_m]}{\partial t} + \nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{v}_m(\mathbf{x},t)[P_m]) = D_m^P \nabla_\Gamma^2 [P_m] + F_{\mathrm{on}}^P(\mathbf{x},t)[P_c] - F_{\mathrm{off}}^P(\mathbf{x},t)[P_m] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
&\frac{\partial [P_c]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_c(\mathbf{x},t)[P_c]) = D_c^P \nabla^2 [P_m] && \text{on } \mathbf{x} \in \Omega \\
&D_c^P \frac{\partial [P_c]}{\partial \mathbf{n}} = -F_{\mathrm{on}}^P(\mathbf{x},t)[P_c] + F_{\mathrm{off}}^P(\mathbf{x},t)[P_m] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
&\frac{\partial [M_f]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_c(\mathbf{x},t)[M_f]) = D_f \nabla^2 [M_f] && \text{on } \mathbf{x} \in \Omega \\
&D_f \frac{\partial [M_f]}{\partial \mathbf{n}} = G_f(\mathbf{x},t)[M_s] - G_s(\mathbf{x},t)[M_f] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\
&\frac{\partial [M_s]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_c[M_s]) = D_s \nabla^2 [M_s] && \text{on } \mathbf{x} \in \Omega \\
&D_s \frac{\partial [M_s]}{\partial \mathbf{n}} = -G_f(\mathbf{x},t)[M_s] + G_s(\mathbf{x},t)[M_f] && \text{on } \mathbf{x} \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

ここで $[A_m](\mathbf{x},t), [A_c](\mathbf{x},t)$ は空間 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ と時間 t における Anterior たんぱく質（PAR-3, PAR-6）の細胞膜と細胞質での濃度を表す。同様に、$[P_m](\mathbf{x},t), [P_c](\mathbf{x},t)$ は Posterior たんぱく質（PAR-1, PAR-2）の細胞膜と細胞質での濃度を表す。$[M_f](\mathbf{x},t), [M_s](\mathbf{x},t)$ は細胞質における MEX-5/6 の濃度を表す。ただし、MEX-5/6 は細胞質において拡散の大きさの異なった形態で存在するため [2]、$[M_f]$ は拡散の速い形態、$[M_s]$ は拡散の遅い形態の濃度を表す。$D_m^A, D_c^A, D_m^P, D_c^P, D_f, D_s$ はそれぞれ拡散係数である。また $\mathbf{n}$ は細胞質から細胞膜向きの法線ベクトルである。

Anterior たんぱく質と Posterior たんぱく質は細胞膜と細胞質の間を行き来することが知られている [3]。$F_{\mathrm{on}}^A(\mathbf{x},t), F_{\mathrm{on}}^P(\mathbf{x},t)$ は Anterior たんぱく質と Posterior たんぱく質の細胞質から細胞膜への移動率を表す on-rate 関数であり、$F_{\mathrm{off}}^A(\mathbf{x},t), F_{\mathrm{off}}^P(\mathbf{x},t)$ は細胞膜から細胞質への移動率を表す off-rate 関数である。on-rate 関数と off-rate 関数にはたんぱく質同士による制御の効果が反映されている。PAR たんぱく質は MEX-5/6 をリン酸化、脱リン酸化することで MEX-5/6 の拡散の大きさを制御することがわかってる [3]。$G_f(\mathbf{x},t), G_s(\mathbf{x},t)$ は PAR たんぱく質による MEX-5/6 の制御の効果を表す関数である。

線虫の受精卵では細胞極性の形成時に、細胞の表層を覆うように存在するアクトミオシンが収縮する。この収縮に伴い細胞の表層と細胞質で移流が起こる [4]。$\mathbf{v}_m(\mathbf{x},t)$ は細胞膜での移流の速度を表し、$\mathbf{v}_c(\mathbf{x},t)$ は細胞質での移流の速度を表す。

この移流反応拡散方程式系に Phase-field 法を [5] を元に融合させることで細胞の形を反映した数理モデルを構築した。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial B(\phi)[A_m]}{\partial t} + \nabla\cdot(B(\phi)\mathbf{v}_m[A_m]) = D_m^A\nabla\cdot(B(\phi)\nabla[A_m]) + B(\phi)\{F_{\mathrm{on}}^A(\mathbf{x},t)[A_c] - F_{\mathrm{off}}^A(\mathbf{x},t)[A_m]\}\\
&\frac{\partial \phi[A_c]}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\mathbf{v}_c[A_c]) = D_c^A\nabla\cdot(\phi\nabla[A_c]) - B(\phi)\{F_{\mathrm{on}}^A(\mathbf{x},t)[P_c] - F_{\mathrm{off}}^A(\mathbf{x},t)[A_m]\}\\
&\frac{\partial B(\phi)[P_m]}{\partial t} + \nabla\cdot(B(\phi)\mathbf{v}_m[P_m]) = D_m^P\nabla\cdot(B(\phi)\nabla[P_m]) + B(\phi)\{F_{\mathrm{on}}^P(\mathbf{x},t)[P_c] - F_{\mathrm{off}}^P(\mathbf{x},t)[P_m]\}\\
&\frac{\partial \phi[P_c]}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\mathbf{v}_c[P_c]) = D_c^P\nabla\cdot(\phi\nabla[P_c]) - B(\phi)\{F_{\mathrm{on}}^P(\mathbf{x},t)[P_c] - F_{\mathrm{off}}^P(\mathbf{x},t)[P_m]\}\\
&\frac{\partial \phi[M_f]}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\mathbf{v}_c[M_f]) = D_f\nabla\cdot(\phi\nabla[M_f]) + B(\phi)\{G_f(\mathbf{x},t)[M_s] - G_s(\mathbf{x},t)[M_f]\}\\
&\frac{\partial \phi[M_s]}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\mathbf{v}_c[M_s]) = D_s\nabla\cdot(\phi\nabla[M_s]) - B(\phi)\{G_f(\mathbf{x},t)[M_s] - G_s(\mathbf{x},t)[M_f]\}
\end{aligned}
$$

ここで ϕ は Phase-field 関数であり、$\phi = 1$ となる空間を細胞質、$\phi = 0$ となる空間を細胞の外、$0 < \phi < 1$ となる空間を細胞膜とする。$B(\phi)$ は ϕ に依存した関数であり、$\phi = 0, 1$ で $B(\phi) = 0$ となり $0 < \phi < 1$ では $0 < B(\phi) < 1$ となる（図 2 ）。

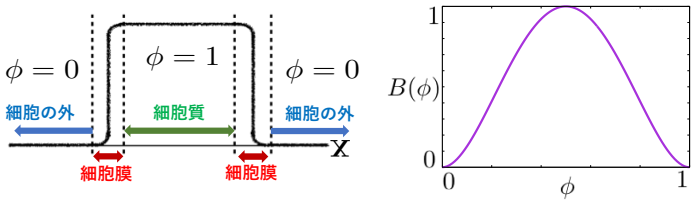


図 2　ϕ と $B(\phi)$ に関する図

3　細胞極性と結果

本研究では構築した数理モデルを用いることで、細胞膜での PAR 極性と細胞質での MEX-5/6 の極性の形成に成功した（図３）。さらに以下のような結果を得た。[6]

- MEX-5/6 の極性は PAR 極性に必ずしも必要ではないが、PAR 極性を制御しうる。
- MEX-5/6 の極性形成において、PAR たんぱく質のバランスの良い制御が重要である。
- 移流は MEX-5/6 の拡散形態の変換を促す。
- 極性の始まる位置は PAR 極性と MEX-5/6 極性の形成に影響を与える。

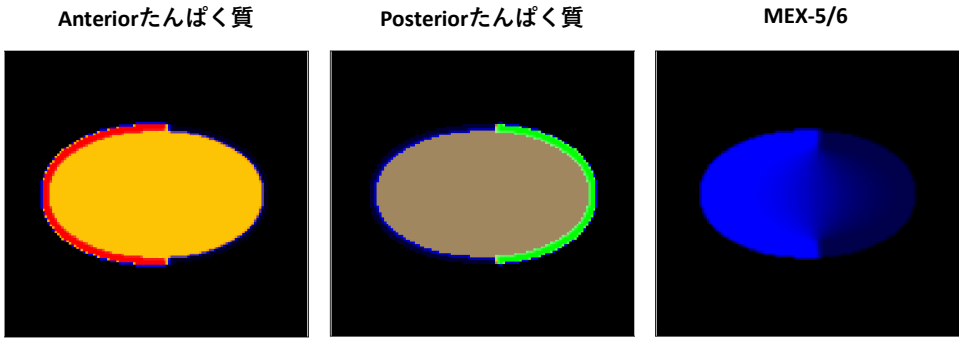


図 3　数値計算から得られた細胞極性

4　結論

本研究では PAR たんぱく質だけでなく細胞質の MEX-5/6 にも注目し数理モデルを構築することで、細胞膜での極性形成と細胞質での極性形成を同時に考察することができた。このことにより、これまで明らかにされていなかった細胞全体での極性形成のよりコアなメカニズムについて提案できた。また、細胞の形を反映した数理モデルを用いたことから細胞質におけるたんぱく質のより正確なダイナミクス、細胞の形の影響などを捉えることができた。本研究のモデリング手法はどんな細胞の形でもそれを反映した上で分子のダイナミクスを考察できるため、極性パターン形成研究の分野における反応拡散方程式のさらなる応用が期待される。

参考文献

[1] Adrian A. Cuenca, Aaron Schetter, Donato Aceto, Kenneth Kemphues, Geraldine Seydoux, Polarization if the C. elegans zygote proceeds via distinct establishment and maintenance phase, Development 130, 2002, 1255-1265.

[2] Brian R. Daniels and Terrence M. Dobrowsky and Edward M. Perkins and Sean X. Sun and Denis Wirtz, MEX-5 enrichment in the *C. elegans* early embryo mediated by differential

diffusion, Development 137, 2010, 2579-2585.

[3] Carsten Hoege and Anthony A. Hyman, Principles of PAR polarity in *Caenorhabditis elegans* embryos, Molecular Cell Biology 14, 2013, 315-322.

[4] Nathan W. Goehring and Philipp Khuc Trong and Justin S. Bois and Debanjan Chowdhury and Ernesto M. Nicola and Anthony A. Hyman and Stephan W. Grill, Polarization of PAR Proteins by Advective Triggering of a Pattern-Forming System, Science 334, 2011, 1137-1141.

[5] Weikang Wang and Kuan Tao and Jing Wang and Gen Yang and Qi Ouyang and Yugang Wang and Lei Zhang and Feng Liu, Exploring the inhibitory effect of membrane tension on cell polarization, PLOS, 2017.

[6] Tomohiro Nakahara, Sungrim Seirin-Lee, The role of cytoplasmic proteins on cell polarity of asymmetric cell devision, *submitted*

機械学習による流体変数の予測

○中井 拳吾 (Kengo NAKAI)* , 齊木 吉隆 (Yoshitaka SAIKI) †

概 要

カオス的なふるまいを示す流体運動のマクロ変数に関する時間発展方程式を流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式から解析的に導出することは困難なことが知られている. 我々は, リザーバーコンピューティングと呼ばれる機械学習手法を用いて, 流体マクロ変数の時系列データの学習に基づいてミクロ変数に立ち戻ることなく数理モデルを構築し, 時間発展を予測することに成功した. 流体運動が示すカオス性 (指数的不安定性) によって、長時間の時間発展予測は必然的に破綻するものの, 得られた数理モデルは統計性質を再現することも確認した.

また, 学習可能な時系列データの数が流体運動の不安定次元より少ない数にとどまる場合にも, 時間遅れ座標を導入することで効率良く数理モデルが構築できることを確認した. 実用上は観測可能な時系列の数は少数に限定されることが通例であるが, そのような場合にも本手法を適用することができる.

1 導入.

機械学習は様々な分野で注目されている. 近年, 機械学習の一種であるリザーバーコンピューティング [1, 2] が時系列データやリャプノフ指数などの予測において有効であることが報告されている [2, 3]. リザーバーコンピューティングにおける学習は入力データから得られたリザーバーベクトルと出力するベクトルを線形にフィッテイングさせることに重点が置かれている. この学習はニューラルネットワーク構造を学習しないためフィッティングにかかる計算コストを減らしている. そこで我々はリザーバーコンピューティングの手法を用いて流体変数の挙動を予測した.

2 章でリザーバーコンピューティング, 3 章で流体の説明をしたのちに, 4 章で流体マクロ変数としてエネルギー関数に対して行った予測について述べる. さらに, 5 章では利用可能な時系列データが流体運動の不安定次元よりも少ない場合の時系列データの予想について述べる.

2 リザーバーコンピューティング.

$d\phi/dt = \mathbf{f}(\phi)$ で表される力学系の変数, $\mathbf{u} = \mathbf{h}_1(\phi) \in \mathbb{R}^M$ と $\mathbf{s} = \mathbf{h}_2(\phi) \in \mathbb{R}^P$ について考える. ただし, ある時刻まで (学習時間と呼ぶ) の入力変数 $\mathbf{u}$, 出力変数 $\mathbf{s}$ の時系列は既知とする. 出力変数 $\mathbf{s}$ の時系列を予測する時刻 (予想時間と呼ぶ) において, 入力変数 $\mathbf{u}$ の時系列データは未知とする. 学習時間において $\mathbf{u}$ を要素分解することで得た高次元ベクトル $\mathbf{r}$ の時系列データに対して出力が $\mathbf{s}$ を近似できるように $\mathbf{r}$ と $\mathbf{s}$ の線形関係を決定する. この決定がリザーバーコンピューティングにおける学習に相当する.

このように物理的な知見を用いずに時系列データの学習のみからモデルを構築する. また, ニューラルネットワークの構造自体を学習する機械学習よりも圧倒的に計算量が少なくて済

*東京大学大学院 数理科学研究科（〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1, E-mail: knakai@ms.u-tokyo.ac.jp）
†一橋大学大学院 経営管理研究科（〒 186-8601 東京都国立市中 2-1, E-mail: yoshi.saiki@r.hit-u.ac.jp）

むため, 代わりにニューラルネットワークの次元を大きく出来きる. そのためたとえダイナミクスが複雑なふるまいを示すとしても, それが決定論的である場合にはこの種の方法が有効である.

予測する時刻に $\mathbf{u}$ の時系列データが既知ではない場合は Pathak らが行った考察 [3, 4] の特殊な場合に相当する.

リザーバーベクトル $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ $(N \gg M)$ は次の式で時間発展させる.

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = (1-\alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}(t)), \tag{1}$$

ただし, Δt は時間ステップ幅を表す. tanh はそれぞれのベクトルの要素を引数とする. また, 行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{W}_{\text{in}}$ は $N \times N$, $N \times M$ の疎行列である. パラメータ α $(0 < \alpha \leq 1)$ は $\mathbf{r}$ の力学系の非線形性を表し, 式 (1) の Δt に依存して決める. リザーバーベクトルは $(0, 1]$ の一様乱数から定めた $\mathbf{r}(-\tau)$ を初期値とする. ただし, $\tau/\Delta t$ $(\gg 1)$ はトランジェント時間に相当する.

行列 $\mathbf{W}_{\text{in}}$ の各列はただ一つの要素のみに $[-\sigma, \sigma]$ の一様乱数から値を与え, それ以外は 0 とする. 行列 $\mathbf{A}$ は $D_1 \times N$ 個の非ゼロの要素を持つ疎行列とする. ただし, $D_1 \times N$ 個の非ゼロ成分は $[-1, 1]$ の一様乱数から値を与える. さらに, 行列 $\mathbf{A}$ については最大固有値が ρ になるように規格化する.

リザーバーベクトル $\mathbf{r}$ は次のようにして得たいベクトル $\hat{\mathbf{s}}(t)$ に変換する.

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(t) + \mathbf{c}. \tag{2}$$

これにより $L = T/\Delta t$ ステップのリザーバーベクトル $\{\mathbf{r}(l\Delta t)\}_{l=1}^{L}$ を得る.

$0 < t \leq T$ (学習時間と呼ぶ) での 時系列 $\hat{\mathbf{s}}$ が既知の時系列 $\mathbf{s}$ の近似になるように $\mathbf{W}_{\text{out}}$ と $\mathbf{c}$ を決定する. この決定がリザーバーコンピューティングの学習に当たる. これは次の二次形式が最小化するように $\mathbf{W}_{\text{out}}$ と $\mathbf{c}$ を決定することに対応する.

$$\sum_{l=1}^{L} \|(\mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(l\Delta t) + \mathbf{c}) - \mathbf{s}(l\Delta t)\|^2 + \beta[Tr(\mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{W}_{\text{out}}^T)], \tag{3}$$

ただし $\mathbf{q}$ に対して $\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}^T\mathbf{q}$ とし, $\beta(\geq 0)$ を含む項は $\mathbf{W}_{\text{out}}$ の過剰適合を避けるために導入している. この決定が妥当であれば, $t > T$ (予測時間と呼ぶ) での $\hat{\mathbf{s}}(t)$ は $\mathbf{s}(t)$ を再現できるはずである. 二次形式 (3) を最小化する解を $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$ と c^* とすると予測時間では

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{W}_{\text{out}}^*\mathbf{r}(t) + c^*, \tag{4}$$

として時系列 $\hat{\mathbf{s}}$ を得る. $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$ と c^* は次のように書くことができることが知られている ([5] P.140):

$$\mathbf{W}_{\text{out}}^* = \delta\mathbf{S}\delta\mathbf{R}^T(\delta\mathbf{R}\delta\mathbf{R}^T + \beta\mathbf{I})^{-1},$$
$$c^* = -[\mathbf{W}_{\text{out}}^*\overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{s}}],$$

ただし, $\overline{r} = \sum_{l=1}^{L}\mathbf{r}(l\Delta t)/\text{L}$, $\overline{s} = \sum_{l=1}^{L}\mathbf{s}(l\Delta t)/L$ とし, $\mathbf{I}$ は $N \times N$ の単位行列, $\delta\mathbf{R}$ (rsp, $\delta\mathbf{S}$) は l 行が $\mathbf{r}(l\Delta t) - \overline{r}$ (rsp, $\mathbf{s}(l\Delta t) - \overline{s}$) となるような行列とする.

ただし, 予測時間 $t > T$ での時系列データ $\mathbf{u}$ は未知であるため, $\mathbf{u}(t)$ として 式 (1) で得た $\hat{\mathbf{s}}(t)$ を用いる:

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = (1-\alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\hat{\mathbf{s}}(t)).$$

学習に用いる変数 $X(t)$ を対等に扱うために正規化した $\tilde{X}(t)$ を使うことにする:

$$\tilde{X}(t) = [X(t) - X_1]/X_2.$$

ただし, X_1 は平均値, X_2 は標準偏差を表す. 予測時間の時系列データ $X(t)$ を $\tilde{X}(t)$ から再現するときは, 学習時間の正規化に用いた X_1 と X_2 を用いる.

3 流体.

周期境界条件の下で 3 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式の直接数値計算によって得られた時系列データをリザーバーコンピューティングの学習データとして用いる:

$$\begin{cases} \partial_t v - \nu\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla\pi = f,\ \nabla\cdot v = 0, & \mathbb{T}^3\times(0,\infty), \\ v\big|_{t=0} = v_0 \quad \text{with } \nabla\cdot v_0 = 0, & \mathbb{T}^3, \end{cases}$$

ただし, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $\nu > 0$ は動粘性, $\pi(x,t)$ は圧力, $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ は速度とする. 切断波数を $(2\times 9+1)^3$ としてフーリエスペクトル法 [6] を用いる. また, 4 次のルンゲクッタ法により時間積分をする. また, 低周波成分のエネルギーが一定になるように毎時刻外力を加える. さらに低周波成分にのみエネルギーを持つように初期値を定める.

流体のマクロ変数としてエネルギー関数を考察する. 粘性は $\nu = 0.058$ とする. 波数 $k \in \mathbb{N}$ におけるエネルギー関数 $E_0(k,t)$ を次で定義する:

$$E_0(k,t) := \frac{1}{2}\int_{D_k}\sum_{\zeta=1}^{3}\left|\mathcal{F}_{[v_\zeta]}(\kappa,t)\right|^2 d\kappa,$$

ただし, $D_k := \{\kappa\in\mathbb{Z}^3 | k-0.5 \le |\kappa| < k+0.5\}$ とする. $\mathcal{F}_{[v_\zeta]}(\kappa,t)$ は v_ζ のフーリエ変換を表す. 微細な振動を除くために短時間の時間平均をとった $E(k,t) = \sum_{s=t-99\Delta t}^{t} E_0(k,s)/100$ を考察する. これによりエネルギー関数の本質的な挙動を見ることができる. これ以降時間平均を取った E をエネルギー関数と呼ぶことにする.

4 エネルギー関数の挙動の予測.

以下のように時系列データ $\mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t)$ を設定し, リザーバーコンピューティングにより学習を行う.

$$\mathbf{u}(t) = (\tilde{E}(1,t), \tilde{E}(2,t), \cdots, \tilde{E}(9,t))^t,$$
$$\mathbf{s}(t) = (\tilde{E}(1,t), \tilde{E}(2,t), \cdots, \tilde{E}(9,t))^t,$$

ただし, パラメータは [7] の表 I (b) を用いる.

$\tilde{E}(1,\cdot)$ から $\tilde{E}(9,\cdot)$ の 9 次元の学習によってエネルギー関数の予測に成功した. 図 1 (左上) (右上) に $\tilde{E}(4,t)$ と $\tilde{E}(9,t)$ の時系列データを書き出した. 流体のカオス性に由来する初期値鋭敏性により長時間時系列の予測が失敗することが予測される. 実際, 図 1 (左下) に書き出したエネルギー関数のエラーの成長は $t-T \lesssim 100$ において指数関数的な増加が確認できた. 一方で, エネルギー関数 $E(k,t)$ 各波数 k の時間平均によって得られるエネルギースペクトル $\overline{E}(k) = \langle E(k,t)\rangle$ について, 時刻 $1000 < t-T < 2000$ の予測した時系列データから再構成することに成功した (図 1) (右下). このことから速度のデータなどの微視的な時系列データを使わずに構成したリザーバーによる力学系は統計量もうまく再現できていることがわかる.

以上のことから, このリザーバーの力学系はエネルギー関数の挙動を表現できているカオス力学系として見ることができることが示唆されている.

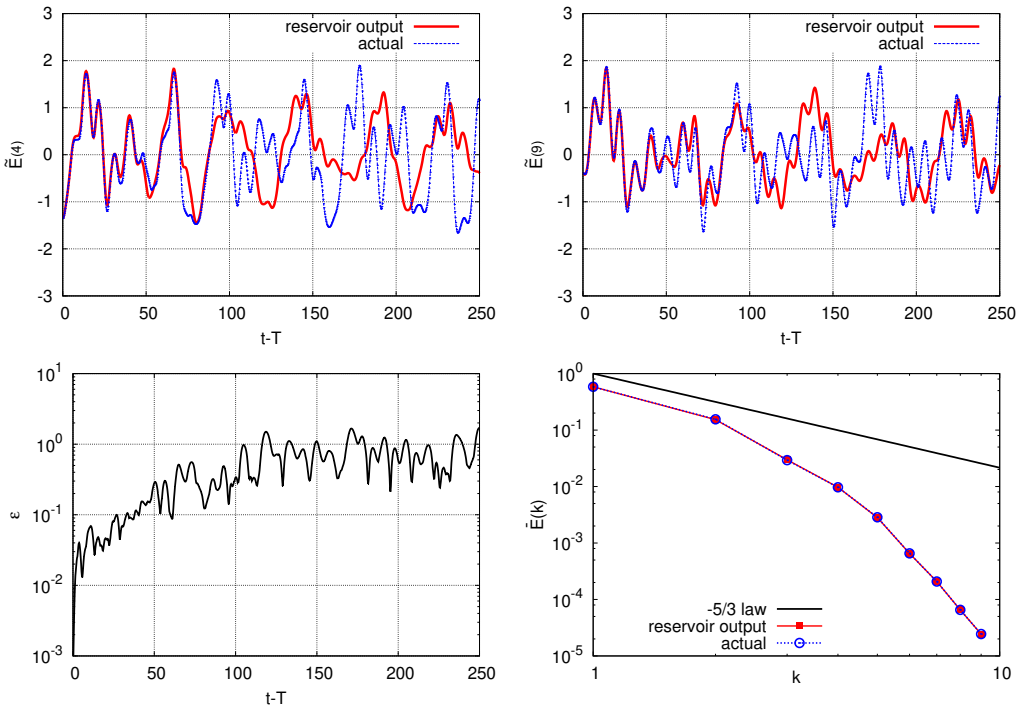


図 1: **流体マクロ変数の時間発展と統計の時系列データの予測.** リザーバーコンピューティングにより $k = 4$ (左上) と 9 (右上) のエネルギー関数 $\tilde{E}(k,t)$ の時系列データの挙動を予測した (赤色). また, 比較のため Navier-Stokes 方程式の直接数値計算により得たエネルギー関数の時系列データも書きだした (青色). これらの結果から時刻 100 程度までは赤色 (リザーバー) 青色 (DNS) は同期している. $\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{N_0} |\tilde{E}(k,t) - \hat{\tilde{E}}(k,t)|/N_0$ $(N_0 = 9)$ で定義される予測の誤差はカオスに見られるように時刻 100 に向かって指数的に大きくなっている (左下). このことから時系列の予測のずれ方がある程度妥当であることがわかる. 予想が直接数値計算の結果からずれた時刻の時系列データを元にエネルギースペクトル $\overline{E}(k)$ を計算した (右下). また, 比較のため Navier-Stokes 方程式の直接数値計算により得たエネルギー関数の時系列データも書きだした. 各波数 k の予測したエネルギースペクトル $\overline{\hat{E}}(k)$ の相対的なエラーは 最大で 1.3% である. このことから時系列の予測がずれているところも統計量の意味で予測がうまく行っていることがわかる.

5 1 変数時系列のみの時間遅れ座標系を用いた予測.

高次元力学系の実験や観測において, 観測できる変数がそのアトラクターのリャプノフ指数よりも少ないことはしばしばある. このような場合に, 時間遅れ座標系 [8, 9] によって得た高次元データ $\mathbf{u}$ を利用することでより効率よく予測することができる. リザーバーベクトル $\mathbf{r}$ は行列 $\mathbf{A}$ によっては過去の入力データ $\mathbf{u}$ の影響を記憶できるが, 計算量が莫大になるのでこの種の手続きは非常に有効である.

ここで, 4 章で考察した同じエネルギー関数 $E(4,t)$ の予測を考察する. ただし, 4 章で学習に用いた $E(k,t)$ $(k = 1, \cdots, 9)$ の中で $E(4,t)$ のみが既知だとする. 遅れ時間 $\Delta\tau = 2.5$ として 36 次元の時間遅れ系を用いる. つまり, 次のようにする.

$$\mathbf{u}(t) = (\tilde{E}(4,t), \tilde{E}(4,t-\Delta\tau), \cdots, \tilde{E}(4,t-35\Delta\tau))^t,$$
$$\mathbf{s}(t) = (\tilde{E}(4,t), \tilde{E}(4,t-\Delta\tau), \cdots, \tilde{E}(4,t-35\Delta\tau))^t.$$

図 2 に予測した $\tilde{E}(4,t)$ の時系列データを書きだした. $\tilde{E}(1,\cdot)$ から $\tilde{E}(9,\cdot)$ の 9 次元の学習によって予測した (図 1) (左上) と同じように成功したのが見て取れる. ただし, パラメータは [7] の表 I (c) を用いる.

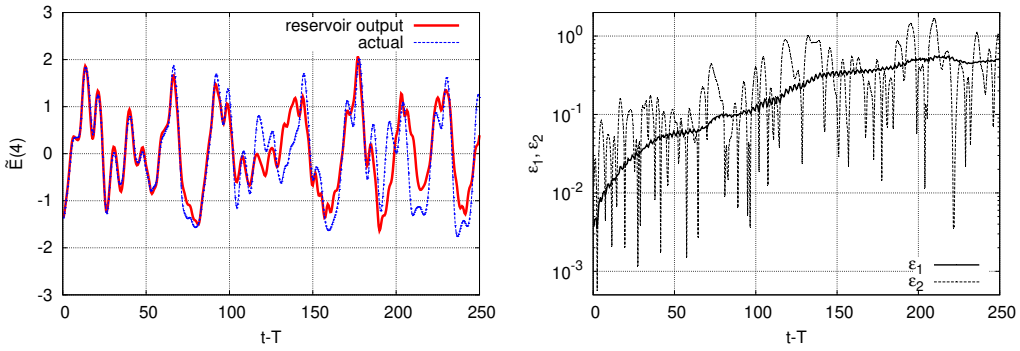


図 2: **時間遅れ座標系を用いたマクロ変数の予測.** エネルギー関数 $\tilde{E}(4,t)$ の時系列のみの学習により図 1 (左上) と同じ時刻の $\tilde{E}(4,t)$ の挙動を予測した (左). 比較のため Navier-Stokes 方程式の直接数値計算により得たエネルギー関数の時系列データも書きだした. $\varepsilon_1(t) = \sum_{n=0}^{35} |\tilde{E}(4,t-n\Delta\tau) - \hat{\tilde{E}}(4,t-n\Delta\tau)|^2/36$ と $\varepsilon_2(t) = |\tilde{E}(4,t) - \hat{\tilde{E}}(4,t)|$ で定義される予測の誤差を書きだした (右).

謝辞 中井は, 東京大学数物フロンティア・リーディング大学院 (FMSP) の助成を受けている. 齊木は, JSPS 科研費 JP17K05360, JST さきがけ JPMJPR16E5 の助成を受けている. また, 本研究でおこなった計算の一部は京都大学のスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性奨励枠) に基づく.

参考文献

[1] Herbert Jaeger and Harald Haas. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication. *Scince*, 304:78–80, 2004.

[2] Zhixin Lu, Jaideep Pathak, Brian Hunt, Michelle Girvan, Roger Brockett, and Edward Ott. Reservoir observers: Model-free inference of unmeasured variables in chaotic systems. *Chaos*, 27:041102, 2017.

[3] Jaideep Pathak, Zhixin Lu, Brian Hunt, Michelle Girvan, and Edward Ott. Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data. *Chaos*, 27:121102, 2017.

[4] Jaideep Pathak, Brian Hunt, Michelle Girvan, Zhixin Lu, and Edward Ott. Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach. *Phys. Rev. Lett.*, 120:024102, 2018.

[5] M. Lukosevivcius and Herbert Jaeger. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*, 3:127–149, 2009.

[6] Keiichi Ishioka. ispack-0.4.1. `http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/,`, 1999. GFD Dennou Club.

[7] Kengo Nakai and Yoshitaka Saiki. Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing. *Phys. Rev. E*, 98:023111, 2018.

[8] F Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980)*, volume 898 of *Lecture Notes in Math.*, pages 366–381. Springer, Berlin-New York, 1981.

[9] T Sauer, J A Yorke, and M Casdagli. Embedology. *J. Stat. Phys.*, 65:579–616, 1991.

E_0-semigroups and product systems of W^*-bimodules

澤田友佑 (Yusuke SAWADA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

量子系の時間発展を考察すると von Neumann 環上の E_0-半群の概念が自然に現れる.

von Neumann 環 M は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の単位的 $*$-部分環であり, 弱位相に関して閉じたもののことである. M 上の $*$-準同型 $\theta_t : M \to M$ $(t \geq 0)$ から成る族 $\theta = \{\theta_t\}_{t\geq 0}$ が $\theta_0 = \mathrm{id}_M, \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$ を満たしパラメータ t に関して σ-弱連続であるとき θ を M 上の E_0-半群と呼ぶ.

Arveson[1] はプロダクトシステムの概念を導入し, I-型因子環 $(= \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ の上の E_0-半群をプロダクトシステムにより分類した. $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_t\}_{t\geq 0}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{E}_t$ $(t > 0)$ から成る族とする. 各 $s, t > 0$ に対して Hilbert 空間の同型 $U_{s,t} : \mathcal{E}_s \otimes \mathcal{E}_t \cong \mathcal{E}_{s+t}$ が存在し, これらの同型が結合律を満たす, すなわち

$$U_{r,s+t}(\mathrm{id}_{\mathcal{E}_r} \otimes U_{s,t}) = U_{r+s,t}(U_{r,s} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}_t}) \qquad (r, s, t \geq 0)$$

を満たすとき, $\mathcal{E}$ を (代数的な) プロダクトシステムと呼ぶ. しばしば $\{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid x \in \mathcal{E}_t\}$ には可測構造が仮定される. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の E_0-半群 θ に対して,

$$\mathcal{E}_t^\theta = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \theta_t(a)x = xa \ (\forall a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))\}$$

によりプロダクトシステム $\mathcal{E}^\theta = \{\mathcal{E}_t^\theta\}$ が対応する. ここで, 各 $\mathcal{E}_t$ は内積 $\langle x, y\rangle = x^*y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})' = \mathbb{C}1$ により Hilbert 空間となる. θ, θ' をそれぞれ $\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 上の E_0-半群としたとき, θ と θ' がコサイクル共役であるための必要十分条件は $\mathcal{E}^\theta$ と $\mathcal{E}^{\theta'}$ が同型であることである. プロダクトシステムの理論は後に E_0-半群の分類理論や CP_0-半群の伸張理論に大きな影響を与えた. Bhat-Skeide[2] は Hilbert 双加群から成るプロダクトシステムを用いて, C*-環上の E_0-半群に対して同様の分類を行った. この理論はさらに一般化され, Hilbert(von Neumann) 加群 E 上の共役可能な右線形有界作用素全体 $\mathcal{B}^a(E)$

上の E_0-半群についての分類が成されている ([7]).

以下, von Neumann 環 M はある忠実正規状態 ϕ を持つと仮定する. ここで, 線型汎関数 $\phi : M \to \mathbb{C}$ が忠実正規状態であるとは, M の正作用素全体 M_+ 上で正値かつ単射であり, σ-弱位相に関して連続であることである. M 自身は内積

$$\langle x, y\rangle = \phi(x^*y) \qquad (x, y \in M)$$

により前 Hilbert 空間となる. この完備化を $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ と書き, $x \in M$ を $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ の元とみなしたものを $x\phi^{\frac{1}{2}}$ と書く. $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ には $a(x\phi^{\frac{1}{2}})$ $(a, x \in M)$ によって M が左から作用している. Tomita-Takesaki 理論を援用することにより, $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ は右 M-加群にもなり, $\overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ は W^*-M-双加群と呼ばれるものになっている. $L^2(M)$ を Haagerup の標準表現空間とすると $L^2(M) = \overline{M\phi^{\frac{1}{2}}}$ が成り立つ. W^*-M-双加群 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ には相対テンソル積 $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ が定義される ([3]). Hilbert 空間のテンソルと異なり, すべての $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して相対テンソル $\xi \otimes^M \eta$ が定義されるわけではない. $\mathcal{H}$ の稠密部分空間 $\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi)$ を

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi(t)x\| \le C\|\phi^{\frac{1}{2}}x\| \ (\exists C \ge 0, \forall x \in M)\}$$

で定義し, その元を ϕ-有界ベクトルと呼ぶ. 相対テンソル積 $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ を $\mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{K}$ を次の内積で完備化したものとして定義する.

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta'\rangle = \langle \eta, (\pi_\phi(\xi)^*\pi_\phi(\xi'))\eta'\rangle \qquad (\xi, \xi' \in \mathcal{D}(\mathcal{H}; \phi),\ \eta, \eta' \in \mathcal{K}).$$

ここで, π_ϕ は ϕ-有界ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\pi_\phi(\xi) : L^2(M) \ni \phi^{\frac{1}{2}}x \mapsto \xi x \in \mathcal{H}$ と定義され, $\pi_\phi(\xi)^*\pi_\phi(\xi') : L^2(M) \to L^2(M)$ は M の元と同一視される. 通常, $\xi \otimes \eta$ を $\xi\phi^{-\frac{1}{2}}\eta$ と書き表し, $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{K}$ は自然な W^*-M-双加群の構造を持つ.

[5] において, Bhat-Skeide[2] と Muhly-Solel[4] の伸張の構成法の関係を明らかにするために W^*-双加群のプロダクトシステムを次のように導入した.

Definition 1. *M を von Neumann 環とし, $\mathcal{H}^\otimes = \{\mathcal{H}_t\}_{t\ge 0}$ を W^*-M-双加群 $\mathcal{H}_t$ $(t \ge 0)$ から成る族で $\mathcal{H}_0 = L^2(M)$ であるものとする. 任意の $s, t \ge 0$ に対して W^*-双加群の同型 $\mathcal{H}_s \otimes^M \mathcal{H}_t \cong \mathcal{H}_{s+t}$ があり, 結合律が成り立つとき, $\mathcal{H}^\otimes$ を M 上の相対プロダクトシステムと呼ぶ.*

この度は, Bhat-Skeide の分類の方法を参考にして, 相対プロダクトシステムによる von Neumann 環上の E_0-半群の分類を行った. 本講演は [6] の結果をもとにしている.

まず, 相対プロダクトシステムのユニットの概念を次のように導入する.

Definition 2. $\mathcal{H}^{\otimes} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ を M 上のプロダクトシステムとし, $\xi^{\otimes} = \{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ を ϕ-有界なベクトル $\xi(t) \in \mathcal{H}_t$ から成る族とする. 各 $s,t \geq 0$ に対して $\mathcal{H}_s \otimes^M \mathcal{H}_t$ と $\mathcal{H}_{s+t}$ を同一視したとき $\xi(s)\phi^{-\frac{1}{2}}\xi(t) = \xi(s+t)$ が成り立つとき, $\xi^{\otimes}$ を $\mathcal{H}^{\otimes}$ のユニットと呼ぶ.

これは Arveson によるユニットの定義と異なる. [5] では CP_0-半群 T(すなわち, $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ は単位的完全正写像 $T_t : M \to M$ から成る半群でパラメータに関して σ-弱連続である) から相対プロダクトシステム $\tilde{\mathcal{H}}^{\otimes}$ とそのユニット $\tilde{\xi}^{\otimes}$ を構成した. 逆に相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ が与えられたとき

$$T_t(x) = \pi_\phi(\xi(t))^*\pi_\phi(x\xi(t)) \qquad (t \geq 0,\ x \in M)$$

により M 上の CP_0-半群 T が得られる.

Theorem 3. 相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ と CP_0-半群 T はユニットを保存する同型を除いて 1 対 1 に対応する.

さて, $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ を相対プロダクトシステムと単位的連続ユニットの組とすると, パラメータ t に関する $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ の帰納極限 $\mathcal{H}$ が右 W^*-M-加群として定義される. 組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する CP_0-半群の伸張として von Neumann 環 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_M)$ 上の E_0-半群 θ が次のように得られる. 各 $t \geq 0$ に対して $\mathcal{H} \otimes^M \mathcal{H}_t$ と $\mathcal{H}$ は右 W^*-M-加群として同一視され,

$$\theta_t(a) = a \otimes^M \mathrm{id}_{\mathcal{H}_t} \qquad (t \geq 0,\ a \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_M))$$

と定義する. θ を組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する E_0-半群と呼ぶ.

Definition 4. θ を *von Neumann* 環 M 上の E_0-半群とする. 族 $w = \{w_t\}_{t\geq 0} \subset M$ が次を満たすとき, w を θ の (右) コサイクルと呼ぶ.

$$w_{s+t} = \theta_t(w_s)w_t \qquad (s,t \geq 0).$$

各 w_t がユニタリであるとき, w をユニタリコサイクルと呼ぶ.

θ のコサイクルと $\mathcal{H}^{\otimes}$ のユニットが次のように対応する.

Theorem 5. θ を組 $(\mathcal{H}^{\otimes}, \xi^{\otimes})$ に対応する E_0-半群とする. このとき θ の *adapted* な縮小コサイクル $w = \{w_t\}_{t\geq 0}$ と $\mathcal{H}^{\otimes}$ の縮小ユニット $\eta^{\otimes} = \{\eta(t)\}_{t\geq 0}$ は次の関係により 1 対 1 に対応する.

$$\eta(t) = \kappa_t^* w_t \kappa_0 \phi^{\frac{1}{2}},\ w_t = \pi_\phi(\kappa_t\eta(t))\pi_\phi(\kappa_0\phi^{\frac{1}{2}})^* \qquad (t \geq 0).$$

ただし, $\kappa_t : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$ は帰納極限の標準的な埋め込みである.

逆に M 上の E_0-半群 θ が与えられたとき, 定理 3 の CP_0-半群としての対応により相対プロダクトシステム $\mathcal{H}^{\theta\otimes}$ とそのユニット $\xi^{\theta\otimes}$ が得られる. 定理 5 の系として Arveson, Bhat-Skeide の分類と同様の分類が次のように得られる.

Theorem 6. θ, θ' を *von Neumann* 環 M 上の E_0-半群とする. それぞれが対応する相対プロダクトシステム $\mathcal{H}^{\theta\otimes}$ と $\mathcal{H}^{\theta'\otimes}$ が同型であるための必要十分条件は, θ, θ' がコサイクル同値となることである, すなわち θ のある強連続なユニタリコサイクル $w = \{w_t\}_{t\geq 0}$ が存在して $\theta'(\cdot) = w_t^*\theta(\cdot)w_t$ が任意の $t \geq 0$ で成り立つことである.

References

[1] W. Arveson, Continuous analogues of Fock space, Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1989), no. 409, iv+66 pp.

[2] B. V. R. Bhat, M. Skeide, Tensor product systems of Hilbert modules and dilations of completely positive semigroups, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 3 (2000), no. 4, 519-575.

[3] A. Connes, Noncommutative Geometry. Academic Press (1994).

[4] P. S. Muhly, B. Solel, Quantum Markov processes (correspondences and dilations), Internat. J. Math. 13 (2002), no. 8, 863-906.

[5] Y. Sawada, Minimal dilations of CP_0-semigroups and product systems of W^*-bimodules, preprint.

[6] Y. Sawada, E_0-semigroups and relative product systems, in preparation.

[7] M. Skeide, Classification of E_0-semigroups by product systems, Mem. Amer. Math. Soc. 240 (2016), no.1137, vi+126 pp.

漸近的に特異な磁場を含む系の物理量の Magnetic Weyl 量子化

奥村聡 (Okumura Satoshi)
北海道大学大学院理学院数学専攻 修士課程 2 年

1 磁場が存在する場合の量子化

外的な磁場が存在する d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ の中を運動する, 電荷 $\lambda \in \mathbb{R}$ の荷電粒子 1 個からなる古典力学系の量子化を考える. d 次の実行列全体 $M_d(\mathbb{R})$ に値をとる, $\mathbb{R}$ 上の有界な C^∞ 級関数の全体を $C_b^\infty(\mathbb{R}, M_d(\mathbb{R}))$ とし，磁場 $B = (B_{j,k})_{j,k=1,\cdots,d}$ はこの関数空間に属するとする. すなわち $B \in C_b^\infty(\mathbb{R}, M_d(\mathbb{R}))$. 磁場 B に対応するベクトルポテンシャルは

$$B_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

をみたす実ベクトル場 $A = (A_j)_{j=1}^d$ として定義される. ただし，ゲージ変換の任意性がある. ここで，$\partial_j := \partial/\partial x_j$，$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ である. このとき，系の量子化は Hilbert 空間 $\mathscr{H}$，$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$，および $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素の集合 $\{Q_j, P_j | j = 1, \cdots, d\}$ からなる三つ組 $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j | j = 1, \cdots, d\})$ で次の二つの性質を持つものによって与えられる:

1. 各 $j = 1, \ldots, d$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(Q_j) \cap D(P_j^A)$ かつ $Q_j\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$, $P_j^A\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$. ここで，Hilbert 空間上の線形作用素 A に対して，$D(A)$ は A の定義域を表す.
2. $\mathscr{D}$ 上で次の交換関係が成立する $([A, B] := AB - BA)$:

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j^A, P_k^A] = i\lambda\hbar B_{jk}, \quad [Q_j, P_k^A] = i\hbar\delta_{jk}, \quad j, k = 1, \cdots, d \tag{1}$$

ただし，i は虚数単位，$\hbar = h/2\pi$(h は Planck 定数で数学的には正のパラメータとみなし,$\hbar = \varepsilon$ と表す. また，δ_{jk} はクロネッカーのデルタである. (1) の関係式を一般化された正準交換関係という．特に正準交換関係のことを CCR と略す. また，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の可閉線形作用素 A の閉包を $\overline{A}$ とする. この三つ組 $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j | j = 1, \cdots, d\})$ の代わりに，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ と Weyl 型の交換関係

$$e^{itQ_j}e^{isP_k^A} = e^{-i\varepsilon ts\delta_{jk}}e^{isP_k^A}e^{itQ_j}, \tag{2}$$

$$e^{itQ_j}e^{isQ_k} = e^{isQ_k}e^{itQ_j}, \qquad (s, t \in \mathbb{R}, 1 \le j, k \le d) \tag{3}$$

$$e^{itP_j^A}e^{isP_k^A} = e^{-i\lambda\int_{[x.x+te_j+s+e_k]}A}e^{isP_k^A}e^{itP_j^A}, \tag{4}$$

をみたす自己共役作用素の組 $\{Q_j, P_j^A\}_{j=1}^d$ の組を考えてもよい. この組 $(\mathscr{H}, \{Q_j, P_j^A\}_{j=1}^d)$ を CCR の Weyl 型表現という. x から y に沿った 1 次微分形式 A の積分は以下のように表す:

$$\Gamma^A[x, y] := \int_{[x,y]} A$$

以下では Hilbert 空間として $L^2(\mathbb{R}^d)$ を, 稠密な部分空間として急減少関数空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ を対応させる. 作用素 Q_j は x_j による掛け算作用素 (位置の作用素) $Q_j = \hat{x}_j$ に, 作用素 P_i^A は運動量作用素 $P_i^A = \overline{-i\hbar\partial_i - \lambda A_i(\hat{x})}$

に対応させることで (1) をみたすような自己共役作用素の組を定めることができる. $\mathbb{R}^d$ の余接バンドル $T^*\mathbb{R}^d$ でシンプレクティック形式 $\sigma = \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j$ を持つものを Ξ と表す. このとき $C^\infty(\Xi, \mathbb{R})$ の元を古典物理量と呼ぶことにする. 以後用いる基本的な道具は磁気的 Weyl 量子化である. 次に，これについて言及する.

2 磁気的 Weyl 量子化

2.1 磁気的 Weyl 量子化の定義

物理量 f の Weyl 量子化は 1927 年に H.Weyl によって [16] において，形式的に

$$\mathfrak{Op}[f] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Xi dY \mathscr{F}_\sigma[f](Y) e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P)} \tag{5}$$

として与えられた. (5) は J. J. Kohn と L. Nirenberg らによって [6] において，

$$(\mathfrak{Op}[f]u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi dy e^{i\frac{(x-y)}{\varepsilon} \cdot \xi} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)$$

として形が得られることが言及されている． この観点から，Weyl 量子化は擬微分作用素の手法を用いることができる．磁気的 Weyl 量子化は M. Măntoiu と R. Purice らによって，以下の形で定義されている．

定義 1. 磁場 $B \in C^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ とベクトルポテンシャル $A \in C^\infty_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ は $B = dA$ をみたすとし，以後断りがない限り，磁場とそのベクトルポテンシャルはこの元とする. 物理量 $f \in \mathscr{S}(\Xi)$ に対して，作用素 $\mathfrak{Op}^A : \mathscr{S}(\Xi) \to B(L^2(\mathbb{R}^d))$ を

$$\mathfrak{Op}^A[f] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Xi dY \mathscr{F}_\sigma[f](Y) e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P^A)}$$

で定める．作用素 $\mathfrak{Op}^A[f]$ を f の磁気的 Weyl 量子化という．ここで，$\mathscr{F}_\sigma[f]$ は f のシンプレクティック Fourier 変換のことで，

$$\mathscr{F}_\sigma[f](Y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_\Xi dY \; e^{i\sigma(Y,Y')} f(Y')$$

である．また

$$W^A_{\varepsilon,\lambda}(Y) := e^{i(\eta \cdot Q - y \cdot P^A)}$$

とする．一般化された CCR の Weyl 型表現は $(L^2(\mathbb{R}^d), \{W^A_{\varepsilon,\lambda}(Y)\}_{Y \in \Xi})$ が定めている．

2.2 磁気的 Wigner 変換

この小節では定義 1 において量子化する対象を広いクラスに拡張する. 量子力学の文脈では状態 ψ をと物理量 $\mathfrak{Op}^A[f]$ を固定したとき ψ に関する期待値を計算することができる. よって，$\mathfrak{Op}^A$ を $\mathscr{S}(\Xi) \times \mathscr{S}(\Xi)$ 上の半双線型形式 $\langle \cdot, \mathfrak{Op}^A[f], * \rangle$ として考える. $\psi, \varphi \in \mathscr{S}(\Xi)$, $f \in \mathscr{S}(\Xi)$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathfrak{Op}^A[f]\psi \rangle &= \int_\Xi dY \mathscr{F}_\sigma[f](Y) \langle \varphi, W^A_{\varepsilon,\lambda}(Y)\psi \rangle \\ &= \int_\Xi dX f(X) \mathscr{F}_\sigma[\langle \varphi, W^A_{\varepsilon,\lambda}(\cdot)\psi \rangle](-X) \end{aligned} \tag{6}$$

を得る.

定義 2. 作用素 $\mathscr{W}^A_{\varepsilon,\lambda} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\Xi)$ を

$$\mathscr{W}^A_{\varepsilon,\lambda}(\psi,\varphi)(x,\xi) := \mathscr{F}_\sigma[\langle\varphi, W^A_{\varepsilon,\lambda}(\cdot)\psi\rangle](-X), \quad (\psi,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)) \tag{7}$$

で定める．これを磁気的 Wigner 変換と呼ぶ.

磁気的 Wigner 変換を定義通りに計算すると，

$$\mathscr{W}^A_{\varepsilon,\lambda}(\psi,\varphi)(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} dy\, e^{-iy\cdot\xi} e^{-i\lambda\Gamma^A\left[x-\varepsilon\frac{y}{2}, x+\varepsilon\frac{y}{2}\right]} \overline{\varphi\left(x-\varepsilon\frac{y}{2}\right)}\psi\left(x+\varepsilon\frac{y}{2}\right)$$

を得る．これはヤコビ行列の値が 1 になるような変数変換をした急減少関数 φ,ψ を変数 ξ に関して部分 Fourier 変換したものである．よって $\mathscr{W}^A_{\varepsilon,\lambda}(\psi,\varphi) \in \mathscr{S}(\Xi)$ である．この議論から，(6) は $f \in \mathscr{S}'(\Xi)$ に対しても意味を持つ.

注 3. (6) は古典物理量 f に $\mathscr{W}^A_{\varepsilon,\lambda}(\psi,\varphi)$ の重みをつけて積分をすると，量子力学的な物理量の行列要素や期待値が出ることを意味する．Wigner 変換は物理的には密度行列と関連が深い．これに関する解説は [4],[7] が詳しい.

(6) を再び変形すると，

$$\langle\varphi, \mathfrak{Op}^A[f]\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d_x} dx\, \overline{\varphi(x)} \times \left\{ \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{R}^d_\xi}\int_{\mathbb{R}^d_y} d\xi dy\, e^{i\frac{(x-y)}{\varepsilon}\cdot\xi} e^{-i\lambda\Gamma^A[x,y]} f\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\psi(y)\right\} \tag{8}$$

を得る．これはシンボルが f の Weyl 型擬微分作用素に磁場の効果の項として

$$e^{-i\lambda\Gamma^A[x,y]}$$

を取り入れたものと解釈できる．擬微分作用素の技術を使うために擬微分作用素で扱う関数のクラスを導入する.

定義 4. $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta \le \rho \le 1, \delta < 1$ とする. C^∞ 級関数 $f : \Xi \to \mathbb{C}$ で任意のマルチインデックス $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$\sup_{(x,\xi)\in\Xi} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)\right| \le C\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

をみたす $C > 0$ が存在する関数の族を Hörmander クラスシンボルと呼び, $S^m_{\rho,\delta}(\Xi)$ と表す. $S^m_{\rho,\delta}(\Xi)$ は可算セミノルム系を

$$|f|_{S^m_{\rho,\delta},N} := \max_{|\alpha|+|\beta|\le N} \sup_{(x,\xi)\in\Xi} \langle\xi\rangle^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)\right|.$$

として持つ. 以降では $S^m_{\rho,0}(\Xi)$ を用いる.

3 積公式, 漸近展開公式, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 有界性

擬微分作用素として $\mathfrak{Op}^A[f]$ を扱うにあたり, 自然な興味として以下の事柄がある.

- シンボルを $f \in S^{m_1}_{\rho,0}(\Xi), g \in S^{m_2}_{\rho,0}(\Xi)$ としたとき，積 $\mathfrak{Op}^A[f]\mathfrak{Op}^A[g]$ は再び擬微分作用素になるか.
- 上で構成した積はシンボル同士の積 fg を主要項に持つような漸近展開の形で表すことができるか.

- $\mathfrak{Op}^A[f]$ が $B(L^2(\mathbb{R}^d))$ の元となる f の条件は何か.

これらの疑問は以下の形で解決されている.

定理 5 (Iftimie-Măntoiu-Purice[15]). $f \in S^{m_1}_{\rho,0}(\Xi), g \in S^{m_2}_{\rho,0}(\Xi)$ に対して磁気的 Weyl product$f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g$ を, 変数 Y, Z の振動積分として,

$$\begin{aligned} f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g(X) &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\mathrm{Os}-\int_\Xi\int_\Xi e^{\sigma(X,Y+Z)}e^{i\frac{\varepsilon}{2}\sigma(Y,Z)}\times \\ &\qquad \times e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\Gamma^B[\langle x-\varepsilon\left(\frac{y+z}{2}\right),x+\varepsilon\left(\frac{y-z}{2}\right),x+\varepsilon\left(\frac{y+z}{2}\right)\rangle]} \\ &\qquad \times \mathscr{F}_\sigma[f](Y)\mathscr{F}_\sigma[g](Z)dYdZ \\ &= \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{2d}}\mathrm{Os}-\int_\Xi\int_\Xi e^{-i\frac{2}{\varepsilon}\sigma(\tilde{Y}-X,\tilde{Z}-X)}\times \\ &\qquad \times e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\Gamma^B[\langle x-\tilde{y}+\tilde{z},-x+\tilde{y}+\tilde{z},x+\tilde{y}+\tilde{z}\rangle]}f(\tilde{Y})g(\tilde{Z})d\tilde{Y}d\tilde{Z} \end{aligned}$$

で定める. このとき, $f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g \in S^{m_1+m_2}_{\rho,0}(\Xi)$ と

$$\mathfrak{Op}^A_{\varepsilon,\lambda}[f]\mathfrak{Op}^A_{\varepsilon,\lambda}[g] = \mathfrak{Op}^A_{\varepsilon,\lambda}[f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g]$$

をみたす.

定理 6 (Lein[10],Lein[11]). $\varepsilon \ll 1, \lambda \ll 1$ とする. このとき $\epsilon \ll 1$ に対して, 臨界指数 n_c, k_c を

$$\varepsilon^{n_c+1} \ll \epsilon \leq \varepsilon^{n_c}, \qquad \lambda^{k_c+1} \ll \epsilon \leq \lambda^{k_c}$$

をみたすものとする. これに対して $N := \max\{n_c, k_c\}$ とする. $f \in S^{m_1}_{\rho,0}(\Xi), g \in S^{m_2}_{\rho,0}(\Xi)$ の磁気的 Weyl product$f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g$ は $\varepsilon \ll 1, \lambda \ll 1$ について漸近展開することができて, $N := \max\{n_c, k_c\}$ として選ぶと,

$$f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^n\lambda^k(f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g)_{(n,k)} + \tilde{R}_N \tag{9}$$

をみたす. ここで (n,k) 次の項 $(f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g)_{(n,k)}$ は $S^{m_1+m_2-(n+k)\rho}_{\rho,0}(\Xi)$ の元で,

$$\begin{aligned} (f\sharp^B_{\varepsilon,\lambda}g)_{(n,k)}(X) = \sum_{k_0+\sum_{j=1}^n jk_j, \sum j=1^n k_j=k} &\frac{i^{k+k_0}}{k_0!k_1!\cdots k_n!}\mathcal{L}_0^{k_0}((\partial_\eta,\partial_y),(\partial_\zeta,\partial_z))\times \\ &\times\prod_{j=1}^n\mathcal{L}_j^{k_j}((x,-i\partial_\eta,-i\partial_\zeta))f(Y)g(Z)\Big|_{Y=X=Z} \end{aligned}$$

をみたす. ただし各 $\mathcal{L}_j$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(Y,Z) &:= \frac{1}{2}\sigma(Y,Z) \\ \mathcal{L}_j(x,y,z) &:= -\frac{1}{j!}\sum_{m_1,\cdots m_{j-1}=1}^{d}\partial_{x_{m_1}}\cdots\partial_{x_{m_{j-1}}}B_{kl}(x)y_kz_l\left(-\frac{1}{2}\right)^{j+1}\frac{1}{(j+1)^2}\times \\ &\quad\times\sum_{c=1}^{j}\begin{pmatrix} j+1 \\ c \end{pmatrix}((1-(-1)^{j+1})c-(1-(-1)^c)(j+1))\times \\ &\quad\times y_{m_1}\cdots y_{m_{c-1}}z_{m_c}\cdots z_{m_{j-1}} \end{aligned}$$

で与えられる. また, 剰余項 $\tilde{R}_N$ は $S^{m_1+m_2-(N+1)\rho}_{\rho,0}(\Xi)$ の元である.

注 7. 式 (9) から擬微分作用素 $\mathfrak{Op}^A[f], \mathfrak{Op}^A[g]$ の積 $\mathfrak{Op}^A[f\sharp^B g]$ の漸近展開は主要項が $\mathfrak{Op}[fg]$ で摂動パラメータを ε または λ として摂動展開したものと解釈できる.

定理 8 (Calderón-Vaillancourt 型の定理 [15]Iftimie-Măntoiu-Purice)**.** $f \in S^0_{\rho,0}(\Xi),\ 0 \le \rho < 1,$ の磁気的 Weyl 量子化は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界線形作用素となる. また,

$$\left\|\mathfrak{Op}^A[f]\right\|_{B(L^2(\mathbb{R}))} \le C \sup_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sup_{(x,\xi)\in\Xi} \langle\xi\rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta f(x,\xi)\right| \tag{10}$$

4 Egorov 型の定理

f が古典物理量であるとき，それに対応する量子力学的な物理量 $\mathfrak{Op}^A[f]$ が磁気的 Weyl 量子化である．ハミルトニアンを h としたとき，古典物理系の時間発展はハミルトンベクトル場 H_h^B によって生成される 1 パラメータ変換群 κ_t^* によって生成される．一方, 量子力学的な時間発展は h の磁気的 Weyl 量子化 $\mathfrak{Op}^A[h]$ を用いて $\exp(i\frac{t}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[h])$ と表すことができる．古典物理量として物理量を時間発展させた場合と，量子力学的な物理量として物理量を時間発展させた場合，これらの間の関係を特徴付けるのが Egorov 型の定理である.

定理 9. Egorov 型の定理 (Lein [10] 2010.) $h \in S^2_{\rho,0}$ は実数値関数で, $\mathfrak{Op}^A[h]$ は $D^A := D(\mathfrak{Op}^A[h]) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素とし，h の生成するハミルトンベクトル場による時間発展を κ_t^* と表す．また，実数値関数 $a \in S^0_{\rho,0}$ に対して,

$$F_{\mathrm{cl}}(t) := \mathfrak{Op}^A[\kappa_t^* a]$$
$$F_{\mathrm{qm}}(t) := e^{i\frac{t}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[h]}\mathfrak{Op}^A[a]e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[h]}$$

このとき，$C_T > 0$ が存在して，任意の $t \in [0,T]$ に対して,

$$\|F_{\mathrm{cl}}(t) - F_{\mathrm{qm}}(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))} \le \varepsilon^2 C_T \tag{11}$$

をみたす.

$F_{\mathrm{cl}}(t) = \mathfrak{Op}^A[\kappa_t^* a]$ は $S^0_{\rho,0}$ の元の実数値関数 a をハミルトンベクトル場 κ_t^* で時間発展させたものを磁気的 Weyl 量子化したものである．一方，$F_{\mathrm{qm}}(t) = e^{i\frac{t}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[h]}\mathfrak{Op}^A[a]e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[h]}$ は量子力学的な物理量 $\mathfrak{Op}^A[a]$ を Heisenberg 描像で時間発展させたものである．(11) はこれらの時間発展の作用素ノルムの差がプランク定数に相当するパラメータの二乗のオーダーで抑えることができることを意味する．以上を受けて修士論文では以下の定理を示した.

定理 10. 主定理 1： Egorov 型の定理 $a, q \in S^0_{0,0}(\Xi)$ は実数値関数とする．量子系としての時間発展は $F(t) := \exp\left(t\frac{i}{\varepsilon}\mathfrak{Op}^A[q]\right)$ によって与えられる．このとき，b_t で任意の $t \in [0,T]$ に対して,

$$F(t)^{-1}\mathfrak{Op}^A[a]F(t) = \mathfrak{Op}^A[b_t] + O_{\|\cdot\|_{B(L^2(\mathbb{R}^d))}}(\varepsilon^\infty) \tag{12}$$
$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (b_t(x,\xi) - (\kappa_t^* a)(x,\xi))| \le C_T \varepsilon^2 \tag{13}$$

と

$$b_t(x,\xi) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} b_n(x,\xi), \quad b_n \in S^0_{0,0}(\Xi)$$

を満たすものが存在する．

定理 10 は物理量の Heisenberg 描像による時間発展 $F(t)^{-1}\mathfrak{Op}^A[a]F(t)$ に対して，これに相当する磁気的 Weyl 量子化のシンボルが漸近級数の意味で存在し，a のハミルトンベクトル場による時間発展 $\kappa_t^* a$ と b_t のシンボルの位相での差がプランク定数に相当するパラメータの二乗のオーダーで抑えることができることを意味する．

5　特異な磁場に対する磁気的 Weyl 量子化

磁場に関する量子力学に関して興味深い現象として Aharonov-Bohm 効果がある．これは平たく言えば，粒子的描像における量子力学的な粒子は，磁場 B が無い領域でも磁場のベクトルポテンシャルの影響を受けて運動する現象であり半古典論の枠組みで調べることは興味深いことに思える．数学的には CCR の Schrödinger 表現とはユニタリ同値にならない CCR の表現が現れることと関連する．

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の中に粒子的描像からみて 1 個の荷電粒子が存在する量子系を考える．ここでは，原点にデルタ関数的に集中した特異な磁場 B を考える．このような磁場 B を実現するベクトルポテンシャル $A_0(x)$ は

$$A_0(x) = \lambda\left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right) \tag{14}$$

である.$A_0(x)$ に漸近するベクトルポテンシャル $A_s(x)$ を以下のように定める．

$$A_s(x) := \lambda\left(-\frac{x_2}{|x|^2+s^2}, \frac{x_1}{|x|^2+s^2}\right). \tag{15}$$

このとき，

$$B_s(x) = \mathrm{rot}A_s(x) = \frac{2s^2}{(|x|^2+s^2)^2}. \tag{16}$$

となるので，$\lim_{s\to 0} B_s(0) = \lim_{s\to 0}\frac{2}{s^2} = \infty$ と $x \neq 0$ に対して，$\lim_{s\to 0} B_s(x) = \frac{0}{|x|^4} = 0$ がわかる．ここでは，$\mathfrak{Op}^A[f]$ を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の双線形形式 $\langle\cdot,\mathfrak{Op}^A[f]\cdot\rangle$ としてみて，$\langle\cdot,\mathfrak{Op}^{A_0}[f]\cdot\rangle$ が $\langle\cdot,\mathfrak{Op}^{A_s}[f]\cdot\rangle$ の極限として存在したことを示した．

定理 11 (主定理 2)**.** $\langle\cdot,\mathfrak{Op}^{A_0}[f]\cdot\rangle$ が $\langle\cdot,\mathfrak{Op}^{A_s}[f]\cdot\rangle$ の極限として存在する．

参考文献

[1] 新井朝雄，" ヒルベルト空間と量子力学"，改訂増補版，共立出版,2014.

[2] 新井朝雄，"量子力学の数学的構造 I，II"，朝倉書店，1999.

[3] 新井朝雄，"量子現象の数理"，朝倉書店，2006.

[4] David J. Tannor 著山下　晃一ほか訳 "入門　量子ダイナミクス（上）, (下)　時間依存の量子力学を中心に"化学同人 2011.

[5] H. Abels，"*Pseudodifferential and Singular Integral Operators*，" De Gruyter，2012.

[6] J. J. Kohn L. Nirenberg *An algebra of pseudo - differential operators* Communications on pure and applied mathematics , vol. XVIII, 269-305.

[7] 小出 昭一郎 "物理現象のフーリエ解析" 筑摩書房 2018.

[8] M. Zworski，"*Semiclassical Analysis*"， American Mathematical Society，2012.

[9] M. Măntoiu and R. Purice，*The magnetic Weyl calculus* Journal of Mathematical Physics 45, 1394 (2004)

[10] M. Lein，"*Semiclassical Dynamics and Magnetic Weyl Calculus*" PhD thesis Technische Universität München, Germany, 2010

[11] M. Lein，“*Two-parameter Asymptotics in Magnetic Weyl Calculus*”， Journal of Mathematical Physics 51, p. 123519, 2010.

[12] M.W.Wong，"*Weyl Transformations*"，Springer，1999.

[13] D. Robert,"*de l'Approximation Semi-Classique*|" Birkhäuser, 1987

[14] 首藤啓，"古典と量子の間"，岩波書店，1999.

[15] V. Iftimie, M. Măntoiu and R. Purice，*"Magnetic Pseudodifferential Operators"*"，RIMS,Kyoto Univ，43，585-623， 2007.

[16] H. Weyl. "*Quantenmechanik und Gruppentheorie*". Zeitschrift für Physik 46, 1-46, 1927.

CAT(1) 空間上での 2 つのリゾルベントによる近似列

笠原 健吾* (Kengo Kasahara)
(東邦大学 大学院理学研究科 情報科学専攻)
木村 泰紀 (Yasunori Kimura)
(東邦大学 理学部)

Abstract

The purpose of this study is finding a common minimizer of two convex functions on a geodesic space. The iterative schemes for this problem have Halpern iteration, contraction projection method, CQ method and so on. To iterative a common minimizer by Mann type iteration, we use properties of the resolvent in this study. In this paper, we show fundamental properties of a CAT(1) space, our theorem and recent results.

1 Introduction

We know that Mann's iterative scheme [10] is a very effective method to find a fixed point of a nonexpansive mapping. By using this scheme, a large number of authors have proved various kinds of theorems. Reich [13] proved a weak convergence theorem for Mann type iteration in a Banach space. Takahashi and Tamura [12] proved weak convergence of an iteration generated by two nonexpansive mappings in a Banach space. Motivated by these results, researchers began to investigate the Mann type scheme defined on geodesic spaces. Dhompongsa and Panyanak [3] proved Δ-convergence of an iteration generated by a nonexpansive mapping in a CAT(0) space. Kimura and Nakagawa [7] proved Δ-convergence of an iteration generated by two quasinonexpansive and Δ-demiclosed mappings in a CAT(1) space. We show the theorem in [7].

Theorem 1.1. (Kimura and Nakagawa [7]) *Let X be a complete CAT(1) space such that for any $u, v \in X, d(u, v) < \pi/2$. Let S and T be quasinonexpansive and Δ-demiclosed mappings from X into itself with $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Let $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ be sequences of $[a, b] \subset]0, 1[$. Define a sequence $\{x_n\} \subset X$ by the following recurrence formula: $x_1 \in X$ and*

$$\begin{cases} u_n = (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n S x_n, \\ v_n = (1 - \gamma_n)x_n \oplus \gamma_n T x_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n \oplus \alpha_n v_n \end{cases}$$

for $n \in \mathbb{N}$. Then $\{x_n\}$ Δ-converges to a common fixed point of S and T.

In this paper, the authors prove Theorem 3.1 based on Theorem 1.1 with the resolvent in a complete CAT(1) space.

The resolvent for a convex function on a Hilbert space is defined as follows: Let f be a proper lower semicontinuous convex function from a Hilbert space H into $]-\infty, \infty]$. The resolvent J_f of f is defined by

$$J_f x = \operatorname*{argmin}_{y \in H} \{ f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \}$$

for all $x \in X$. We know that J_f is a single-valued mapping from H to H. On the other hand, the resolvent on a Hadamard space, a complete CAT(0) space, is proposed by Jost [4] and Mayer [11]. Let X be an Hadamard space. Let f be a proper lower semicontinuous convex function from a Hadamard space X into $]-\infty, \infty]$. The resolvent R_f of f is defined by

$$R_f x = \operatorname*{argmin}_{y \in X} \{f(y) + \frac{1}{2} d(y, x)^2\}$$

for all $x \in X$. We know that R_f is a single-valued mapping from X to X. We also know the definition and some properties of the resolvent in a complete CAT(1) space [5, 6]. We show them in preliminaries.

2 Preliminaries

Let X be a metric space. For $x, y \in X$, a mapping $c : [0, l] \to X$ is called a geodesic if c satisfies

$$c(0) = x, c(l) = y, \text{ and } d(c(u), c(v)) = |u - v|$$

for every $u, v \in [0, l]$. An image $[x, y]$ of c is called a geodesic segment joining x and y. If a geodesic exists for every $x, y \in X$, then we call X a geodesic space.

Let X be a geodesic space. For a triangle $\triangle(x, y, z) \subset X$ such that $d(x, y)+d(y, z)+d(z, x) < 2\pi$, let a comparison triangle $\triangle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in two-dimensional unit sphere $\mathbb{S}^2$ be such that each corresponding edge has the same length as that of the original triangle. X is called a CAT(1) space if for every $x, y, z \in X$ such that $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) < 2\pi$, every $p, q \in \triangle(x, y, z)$ and their corresponding points $\bar{p}, \bar{q} \in \triangle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ satisfy that

$$d(p, q) \leq d_{\mathbb{S}^2}(\bar{p}, \bar{q}),$$

where $d_{\mathbb{S}^2}$ is the spherical metric on $\mathbb{S}^2$.

Let X be a CAT(1) space. For every $x, y \in X$ with $d(x, y) < \pi$ and $\alpha \in [0, 1]$, if $z \in [x, y]$ satisfies that $d(y, z) = \alpha d(x, y)$ and $d(x, z) = (1-\alpha)d(x, y)$, then we denote z by $z = \alpha x \oplus (1-\alpha)y$. A subset $C \subset X$ is called π-convex if $\alpha x \oplus (1 - \alpha)y \in C$ for every $x, y \in C$ with $d(x, y) < \pi$ and $\alpha \in [0, 1]$.

For every $x, y, z \in X$ with $d(x, y)+d(y, z)+d(z, x) < 2\pi$ and $\alpha \in [0, 1]$, the following inequality holds [8]:

$$\cos d(x, w) \sin d(y, z) \geq \cos d(x, y) \sin(\alpha d(y, z)) + \cos d(x, z) \sin((1 - \alpha)d(y, z)),$$

where $w = \alpha y \oplus (1 - \alpha)z$.

A CAT(1) space X is said to be admissible if every $x, y \in X$ satisfy that $d(x, y) < \pi/2$.

Let X be a CAT(1) space and let T be a mapping from X to X such that the set $F(T) = \{z \in X : z = Tz\}$ of fixed points of T is not empty. If $d(Tx, p) \leq d(x, p)$ for every $x \in X$ and $p \in F(T)$, then we call T a quasinonexpansive mapping.

T is said to be strongly quasinonexpansive if T is a quasinonexpansive mapping, and $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ whenever $\{x_n\} \subset X$ satisfies $\sup_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, p) < \pi/2$ and $\lim_{n\to\infty}(\cos d(x_n, p)/\cos d(Tx_n, p)) = 1$ for every $p \in F(T)$.

We also define a strongly quasinonexpansive sequence. A sequence $\{T_n\}$ of mappings from X to X is called a strongly quasinonexpansive sequence if each T_n is a quasinonexpansive mapping, and $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_n x_n) = 0$ whenever $\{x_n\} \subset X$ satisfies $\sup_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, p) < \pi/2$ and $\lim_{n\to\infty}(\cos d(x_n, p)/\cos d(T_n x_n, p)) = 1$ for every $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$; see [1].

Let X be a metric space. An element $z \in X$ is said to be an asymptotic center of $\{x_n\} \subset X$ if

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, z) = \inf_{x\in X} \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x).$$

Moreover, $\{x_n\}$ Δ-converges to a Δ-limit z if z is the unique asymptotic center of any subsequences of $\{x_n\}$.

Let X be a CAT(1) space and let T be a mapping from X to X such that $F(T) \neq \emptyset$. T is said to be Δ-demiclosed if $z \in F(T)$ whenever $\{x_n\}$ Δ-converges to z and $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

We also define a Δ-demiclosed sequence. A sequence $\{T_n\}$ of mappings from X to X is called a Δ-demiclosed sequence if $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ whenever $\{x_n\}$ Δ-converges to z and $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_n x_n) = 0$; see [1].

Let X be a complete CAT(1) space and let $C \subset X$ be a nonempty closed π-convex subset such that $d(x, C) = \inf_{y\in C} d(x, y) < \pi/2$ for every $x \in X$. Then for every $x \in X$, there exists a unique point $x_0 \in C$ satisfying

$$d(x, x_0) = \inf_{y\in C} d(x, y).$$

We define the metric projection P_C from X onto C by $P_C x = x_0$. We know that the metric projection P_C is a strongly quasinonexpansive and Δ-demiclosed mapping such that $F(P_C) = C$ [2, 9].

Let X be an admissible complete CAT(1) space. Let f be a proper lower semicontinuous convex function from X into $]-\infty, \infty]$. The resolvent R_f of f is defined by

$$R_f x = \operatorname*{argmin}_{y\in X}\{f(y) + \tan d(y, x) \sin d(y, x)\}$$

for all $x \in X$ [5]. We know that R_f is a single-valued mapping from X to X. We also know that the resolvent R_f is strongly quasinonexpansive and Δ-demiclosed such that $F(R_f) = \operatorname{argmin}_{x\in X} f$ [5, 6].

We introduce some lemmas and theorem used for our results.

Lemma 2.1. (Kimura and Satô [8]) *Let X be a CAT(1) space. For every $x, y, z \in X$ with $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) < 2\pi$ and $\alpha \in [0, 1]$, the following inequality holds:*

$$\cos d(x, w) \sin d(y, z) \geq \cos d(x, y) \sin(\alpha d(y, z)) + \cos d(x, z) \sin((1 - \alpha)d(y, z)),$$

where $w = \alpha y \oplus (1 - \alpha)z$.

Lemma 2.2. (Kimura and Satô [9]) *Let X be a CAT(1) space. For every $x, y, z \in X$ with $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) < 2\pi$ and $\alpha \in [0, 1]$, the following inequality holds:*

$$\cos d(x, w) \geq \alpha \cos d(x, y) + (1 - \alpha) \cos d(x, z),$$

where $w = \alpha y \oplus (1 - \alpha)z$.

Theorem 2.3. (Espínola and Fernández-León [2]) *Let X be a complete CAT(1) space. Let $\{x_n\}$ be a sequence in X. If $r(\{x_n\}) < \pi/2$, then the following hold:*

(a) *$AC(\{x_n\})$ consists of exactly one point;*
(b) *$\{x_n\}$ has a Δ-convergent subsequence.*

Lemma 2.4. *Let σ be a real number in $]-1, 0[$ and $\{b_n\}, \{c_n\}$ real sequences in $[\sigma, 1]$ and $\liminf_{n\to\infty} b_n c_n \geq 1$. Then $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$.*

Lemma 2.5. *Let s be a real number in $]0, \infty[$ and $\{b_n\}, \{c_n\}$ bounded real sequences such that $b_n \leq 0, s < c_n$ and $\lim_{n\to\infty} b_n/c_n = 0$. Then $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Lemma 2.6. *Let $\{b_n\}, \{c_n\}$ be bounded real sequences such that $\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$. Then $\liminf_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} c_n$.*

3 Main result

To prove this theorem, we employ the technique proposed in [7].

Theorem 3.1. *Let X be an admissible complete CAT(1) space. Let $\{\lambda_n\}$ and $\{\mu_n\}$ be sequences of positive real numbers such that $\inf_n \lambda_n > 0$ and $\inf_n \mu_n > 0$. Let f and g be proper lower semicontinuous convex functions from X into $]-\infty, \infty]$ such that $F = \operatorname{argmin}_X f \cap \operatorname{argmin}_X g \neq \emptyset$. Let $R_{\lambda_n f}$ and $R_{\mu_n g}$ be the resolvents of $\lambda_n f$ and $\mu_n g$, respectively. For a given real number $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, let $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ are sequences in $[a, 1-a]$. Let $\{x_n\}$ be a sequence in X defined by $x_1 \in X$ and*

$$\begin{cases} u_n = \beta_n x_n \oplus (1-\beta_n) R_{\lambda_n f} x_n, \\ v_n = \gamma_n x_n \oplus (1-\gamma_n) R_{\mu_n g} x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n u_n \oplus (1-\alpha_n) v_n \end{cases}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Then $\{x_n\}$ Δ-converges to a point of F.

Proof. Let $z \in F$. By Lemma 2.2, we have

$$\begin{aligned} \cos d(u_n, z) &\geq \beta_n \cos d(x_n, z) + (1-\beta_n) \cos d(R_{\lambda_n f} x_n, z) \\ &\geq \cos d(x_n, z). \end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\cos d(v_n, z) \geq \cos d(x_n, z).$$

By these inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} \cos d(x_{n+1}, z) &\geq \alpha_n \cos d(u_n, z) + (1-\alpha_n) \cos d(v_n, z) \\ &\geq \cos d(x_n, z). \end{aligned}$$

Thus, we have $d(x_{n+1}, z) \leq d(x_n, z)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and there exists

$$D = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z) \leq d(x_1, z) < \frac{\pi}{2}.$$

By Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} &\cos d(u_n, z) \sin d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n) \\ &\quad \geq \cos d(x_n, z) \sin \beta_n d(x_n R_{\lambda_n f} x_n) + \cos d(R_{\lambda_n f} x_n, z) \sin(1-\beta_n) d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n) \\ &\quad \geq 2 \cos d(x_n, z) \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \cos \frac{(2\beta_n - 1) d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Similarly, we get

$$\begin{aligned} &\cos d(v_n, z) \sin d(x_n, R_{\mu_n g} x_n) \\ &\quad \geq \cos d(x_n, z) \sin \gamma_n d(x_n R_{\lambda_n f} x_n) + \cos d(R_{\mu_n g} x_n, z) \sin(1-\gamma_n) d(x_n, R_{\mu_n g} x_n) \\ &\quad \geq 2 \cos d(x_n, z) \sin \frac{d(x_n, R_{\mu_n g} x_n)}{2} \cos \frac{(2\gamma_n - 1) d(x_n, R_{\mu_n g} x_n)}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Let $d_n = d(x_n, z)$, $f_n = d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)/2$ and $g_n = d(x_n, R_{\mu_n g} x_n)/2$ for all $n \in \mathbb{N}$.

If $f_n \neq 0$ and $g_n = 0$, then we have $v_n = x_n$. From (1), (2) and Lemma 2.2, we have

$$\begin{aligned} 2 \cos d_{n+1} \sin f_n \cos f_n &= \cos d_{n+1} \sin 2f_n \\ &\geq \alpha_n \cos d(u_n, z) \sin 2f_n + (1-\alpha_n) \cos d(v_n, z) \sin 2f_n \\ &\geq 2\alpha_n \cos d_n \sin f_n \cos(2\beta_n - 1) f_n + 2(1-\alpha_n) \cos d_n \sin f_n \cos f_n \end{aligned}$$

Dividing by $2\sin f_n > 0$, we obtain

$$\cos d_{n+1}\cos f_n \geq \alpha_n \cos d_n \cos(2\beta_n - 1)f_n + (1-\alpha_n)\cos d_n \cos f_n. \tag{3}$$

If $f_n = 0$ and $g_n \neq 0$, then we have $u_n = x_n$. Similarly, we have

$$\cos d_{n+1}\cos g_n \geq \alpha_n \cos d_n \cos g_n + (1-\alpha_n)\cos d_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n. \tag{4}$$

If $f_n \neq 0$ and $g_n \neq 0$, then from (1), (2) and Lemma 2.2, we have

$$\begin{aligned}
&\cos d_{n+1}\sin 2f_n \sin 2g_n \\
&\quad \geq \alpha_n \cos d(u_n, z)\sin 2f_n \sin 2g_n + (1-\alpha_n)\cos d(v_n, z)\sin 2f_n \sin 2g_n \\
&\quad \geq 4\cos d_n \sin f_n \sin g_n(\alpha_n \cos(2\beta_n - 1)f_n \cos g_n + (1-\alpha_n)\cos f_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n).
\end{aligned}$$

Dividing by $4\sin f_n \sin g_n > 0$, we have

$$\begin{aligned}
&\cos d_{n+1}\cos f_n \cos g_n \\
&\quad \geq \alpha_n \cos d_n \cos(2\beta_n - 1)f_n \cos g_n + (1-\alpha_n)\cos d_n \cos f_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n).
\end{aligned} \tag{5}$$

If $f_n = 0$ and $g_n = 0$, then we also have the inequality (5), and the inequality (5) can be reduced to the inequality (3), (4) for each case. From inequality (5), we have

$$\left(\frac{\epsilon_n \cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\epsilon_n \cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n} - \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}\right) \geq 1,$$

where $\epsilon_n = \cos d_{n+1}/\cos d_n$ for $n \in \mathbb{N}$. It follows that $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = \cos D/\cos D = 1$. Since $\{\alpha_n\} \subset [a, 1-a]$ for all $n \in \mathbb{N}$, we obtain

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n} - \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}\right) \geq 1, \tag{6}$$

We show that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq n_0$,the following hold:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \leq 1 \tag{7}$$

and

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n} - \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \leq 1. \tag{8}$$

We show the second inequality of (7). Since $\{\beta_n\} \subset [a, 1-a]$ for all $n \in \mathbb{N}$, we obtain

$$\frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} = 1.$$

Similarly, we show the second inequality of (8). Next, we show the first inequality of (7). Let

$$\sigma_n = \frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \quad \text{and} \quad \theta_n = \frac{\cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n} - \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}.$$

We assume that the first inequality of (7) does not hold. Then we can get a subsequence $\{\sigma_{n_i}\} \subset \{\sigma_n\}$ such that $\sigma_{n_i} < -1/2$ and $\lim_{i\to\infty}\sigma_{n_i} = \sigma \leq -1/2$. Since $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\} \subset [a, 1-a]$ and $\{g_n\} \subset [0, \pi/4[$, we get $\{g_n\}$ is bounded. Let $\{\theta_{n_{i_j}}\} \subset \{\theta_{n_i}\} \subset \{\theta_n\}$ such that $\{\theta_{n_{i_j}}\}$ converges to $\theta \in \mathbb{R}$. From the inequality (6), we have

$$\sigma\theta = \lim_{j\to\infty}\sigma_{n_{i_j}}\theta_{n_{i_j}} \geq \liminf_{n\to\infty}\sigma_n\theta_n \geq 1.$$

Therefore, we may assume that $\theta_{n_{i_j}} < 0$ for all $j \in \mathbb{N}$. Since $\{f_n\}, \{g_n\} \subset [0, \pi/4[$ and $\{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [a, 1-a]$, we have

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2(1-a)} \leq \frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} \tag{9}$$

and

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2(1-a)} \leq \frac{\cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n}. \tag{10}$$

Let $\rho \in \mathbb{R}$ such that

$$0 < \rho < \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2(1-a)}, \frac{2a}{1-a}\right\}. \tag{11}$$

From the inequalities (9), (10), we have

$$\rho - \frac{\alpha_{n_{i_j}}}{1-\alpha_{n_{i_j}}} \leq \sigma_{n_{i_j}} < 0 \quad \text{and} \quad \rho - \frac{1-\alpha_{n_{i_j}}}{\alpha_{n_{i_j}}} \leq \theta_{n_{i_j}} < 0. \tag{12}$$

From the inequalities (11), (12), we have

$$\begin{aligned}
\sigma_{n_{i_j}}\theta_{n_{i_j}} &\leq \left(\rho - \frac{\alpha_{n_{i_j}}}{1-\alpha_{n_{i_j}}}\right)\left(\rho - \frac{1-\alpha_{n_{i_j}}}{\alpha_{n_{i_j}}}\right) \\
&= \rho^2 - \left(\frac{\alpha_{n_{i_j}}}{1-\alpha_{n_{i_j}}} + \frac{1-\alpha_{n_{i_j}}}{\alpha_{n_{i_j}}}\right)\rho + 1 \\
&\leq \rho^2 - \frac{2a}{1-a}\rho + 1 \\
&= \rho\left(\rho - \frac{2a}{1-a}\right) + 1.
\end{aligned}$$

Then, as $j \to \infty$, we obtain

$$1 \leq \sigma\theta \leq \rho\left(\rho - \frac{2a}{1-a}\right) + 1 < 1.$$

This is a contradiction. Similarly, we obtain the left inequality of (8). From the inequalities (7), (8) and Lemma 2.4, we have

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos g_n}{\alpha_n \cos(2\gamma_n - 1)g_n} - \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}\right) = 1.$$

Hence, we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos f_n - \cos(2\beta_n - 1)f_n}{(1-\alpha_n)\cos(2\beta_n - 1)f_n} = 0.$$

By Lemma 2.5, we get

$$\lim_{n\to\infty}(\cos f_n - \cos(2\beta_n - 1)f_n) = 0.$$

By Lemma 2.6, we have

$$\liminf_{n\to\infty}\cos f_n = \liminf_{n\to\infty}\cos(2\beta_n - 1)f_n = \liminf_{n\to\infty}\cos|2\beta_n - 1|\, f_n.$$

Hence, we obtain

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} (|2\beta_n - 1|\, f_n) \leq \limsup_{n\to\infty} |2\beta_n - 1| \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

Furthermore, we get

$$\liminf_{n\to\infty}(1 - |2\beta_n - 1|) \limsup_{n\to\infty} f_n = \left(1 - \limsup_{n\to\infty} |2\beta_n - 1|\right) \limsup_{n\to\infty} f_n \leq 0.$$

Since $\{\beta_n\} \subset [a, 1-a]$ for all $n \in \mathbb{N}$, we get $\liminf_{n\to\infty}(1 - |2\beta_n - 1|) > 0$ and thus $\limsup_{n\to\infty} f_n = 0$. It implies that $d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n) \to 0$. Similarly, we get $d(x_n, R_{\mu_n g} x_n) \to 0$.

Next, we show $\{x_n\}$ Δ-converges to a point of F. Let $\{x_{n_k}\}$ be a subsequence of $\{x_n\}$. Since $r(\{x_n\}) \leq D < \pi/2$ and Theorem 2.3(a), there exists a unique asymptotic center x_0 of $\{x_{n_k}\}$. Since $r(\{x_{n_k}\}) < \pi/2$ and Theorem 2.3(b), there exists a subsequence $\{x_{n_{k_l}}\}$ of $\{x_{n_k}\}$ such that $\{x_{n_{k_l}}\}$ Δ-converges to $x_0' \in X$. Moreover, since $d(x_{n_{k_l}}, R_{\lambda_{n_{k_l}} f} x_{n_{k_l}}) \to 0$, $d(x_{n_{k_l}}, R_{\mu_{n_{k_l}} g} x_{n_{k_l}}) \to 0$ and $\{R_{\lambda_{n_{k_l}} f}\}, \{R_{\mu_{n_{k_l}} g}\}$ are Δ-demiclosed sequence, we obtain $x_0' \in F = \operatorname{argmin}_X f \cap \operatorname{argmin}_X g$. If $x_0 \neq x_0'$, by Theorem 2.3(a) and the uniqueness of the asymptotic centers, we get

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0) &< \limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0') \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0') \\
&= \limsup_{l\to\infty} d(x_{n_{k_l}}, x_0') \\
&< \limsup_{l\to\infty} d(x_{n_{k_l}}, x_0) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0).
\end{aligned}$$

This is a contradiction. Hence, we have $x_0 \in F = \operatorname{argmin}_X f \cap \operatorname{argmin}_X g$. Let $\{u_k\}, \{v_k\}$ be subsequences of $\{x_n\}$, $u_0 \in AC(\{u_k\})$ and $v_0 \in AC(\{v_k\})$. If $u_0 \neq v_0$, then since $u_0 \notin AC(\{v_k\}), v_0 \notin AC(\{u_k\})$ and by Theorem 2.3(a), we have

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} d(u_k, u_0) &< \limsup_{k\to\infty} d(u_k, v_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, v_0) \\
&= \limsup_{k\to\infty} d(v_k, v_0) \\
&< \limsup_{k\to\infty} d(v_k, u_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, u_0) \\
&= \limsup_{k\to\infty} d(u_k, u_0).
\end{aligned}$$

This is a contradiction. We obtain $u_0 = v_0$, then we have $\{x_n\}$ Δ-converges to a point of $F = \operatorname{argmin}_X f \cap \operatorname{argmin}_X g$. This completes the proof. □

References

[1] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[2] R. Espínola and A. Fernández-León, *CAT(k)-spaces, weak convergence and fixed points*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), 410–427.

[3] S. Dhompongsa and B. Panyanak, *On Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces*, Comput. Math. Appl. **56**(10) (2008), 2572–2579.
[4] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.
[5] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), 93–115.
[6] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Two modified proximal point algorithms in geodesic spaces with curvature bounded above*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), to appear.
[7] Y. Kimura and K. Nakagawa, *Another type of Mann iterative scheme for two mappings in a complete geodesic space*, J. Inequal. Appl. **2014** (2014), 9pages.
[8] Y. Kimura and K. Satô, *Convergence of subsets of a complete geodesic space with curvature bounded above*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 5079-5085.
[9] Y. Kimura and K. Satô, *Halpern iteration for strongly quasinonexpansive mappings on a geodesic space with curvature bounded above by one*, Fixed Point Theory Appl. **2013** (2013), 14pages.
[10] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.
[11] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 199–253.
[12] W. Takahashi and T Tamura, *Convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67**(1) (1998), 45–56.
[13] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

変分法を用いた n 体問題の周期解の存在証明

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
梶原唯加（Yuika Kajihara）

0　準備

（本題に入る前の準備として，オイラー・ラグランジュ方程式ってなんだっけ？という人のために解析力学ついて少し補足をします．解析力学についてある程度学んだことがある人にとっては初歩的な既知な事実ばかりだと思うので読み飛ばしてもらって構いません．）

まず，力学の問題を考える．高校の物理でよく見かけた，万有引力の法則を用いた標準的な問題というのは，一般に次のような形をした微分方程式であった：

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} \quad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d)$$

これに対して，ラグランジアン L を次で定義する：

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) := \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 - V(\boldsymbol{q})$$

このとき，次式をオイラー・ラグランジュ方程式と呼ぶ：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

簡単な計算によって

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

が成り立つことがわかる．

ラグランジアン L に対して微分の操作を施すと，運動方程式が導かれた．では次にこの L の積分を考えてみよう．積分区間を $[a, b]$ として，作用積分 $\mathcal{A}$ を次で定義する：

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}) := \int_a^b L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})dt$$

ここで，次のような記号を定義する．

$$\Omega(A, B) := \{\boldsymbol{l} \colon [a, b] \to \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{l}(a) \in A, \boldsymbol{l}(b) \in B\}$$

一般に $\boldsymbol{q}(a), \boldsymbol{q}(b)$ に対して課す制約条件を境界条件と呼ぶ．例えば，「$\boldsymbol{q}(a)$ が x 軸上にあり，$\boldsymbol{q}(b)$ が y 軸上にある．」という境界条件を課すとすると，A を x 軸の集合，B を y 軸上の点の集合として，関数 $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q} \in \Omega(A, B)$ の中を動くものとみなせる．

変分法と聞くと，ある点から点の最短路を与えるもの，と想像するかもしれないが，後述の n 体問題の周期解の存在証明を行う場合は，こうしたある集合を境界条件に用いることも多い．

汎関数 $\mathcal{A}$ に対して「微分」を次で定義しよう．

$$\mathcal{A}'(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\delta} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{q})}{h}$$

$\mathcal{A}$ の変数である $\boldsymbol{q}$ という関数を $\boldsymbol{\delta}$ 方向に微小にずらしたとき，どのような値をとるかを見る．ただし，$\boldsymbol{\delta}$ は境界条件において 0 を取るような関数とする．つまり，$\boldsymbol{\delta} \in \Omega(\{\boldsymbol{0}\},\{\boldsymbol{0}\})$ である．「微分」が有限次元の微小な変化をみていたのに対して．このような関数（無限次元）の微小な変化を「変分」と呼ぶ．

Remark 1. ここでは，汎関数の変数である関数がどのような関数であるか（連続だとか，微分可能性だとか）については深く言及しないことにする．厳密に汎関数の微分を定義する際はそれではうまくいかない．というのも，滑らかな関数を徐々に尖らせて，極限ではある点で微分が不可能になるような関数列が作れる．だから汎関数の極限操作は，当然ではあるが，有限次元と同じようにはいかない．

任意の $\boldsymbol{\delta}$ に対して $\mathcal{A}'(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\delta} = 0$ となるとき，

$$\mathcal{A}'(\boldsymbol{q}) = 0$$

と表し．このような $\boldsymbol{q}$ を $\mathcal{A}$ の臨界点と呼ぶ．臨界点 $\boldsymbol{q}$ は実はオイラー・ラグランジュ方程式の解になっている，より正確には次の定理が成り立つ．

定理 0.1. $\boldsymbol{q} \in \Omega(\boldsymbol{q}_a, \boldsymbol{q}_b)$ について，次のふたつの条件は同値．

1. $\boldsymbol{q}$ がオイラー・ラグランジュ方程式
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$
を満たす．
2. $\boldsymbol{q}$ が $\mathcal{A}$ の臨界点，つまり，$\mathcal{A}'(\boldsymbol{q}) = 0$ が成り立つ．

Proof. $\boldsymbol{\delta} \in \Omega(0,0)$ とする．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}\mathcal{A}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta})\bigg|_{h=0} &= \int_0^1 \frac{d}{dh} L(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{q}}+h\dot{\boldsymbol{\delta}})dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{d}{dh}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{q}}+h\dot{\boldsymbol{\delta}}) + \frac{d}{dh}(\dot{\boldsymbol{q}}+h\dot{\boldsymbol{\delta}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{q}}+h\dot{\boldsymbol{\delta}}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) dt \\
&= \left[\boldsymbol{\delta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right]_0^1 + \int_0^1 \boldsymbol{\delta} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) dt \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{\delta} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) dt
\end{aligned}$$

これより，$1 \Rightarrow 2$ が成り立つ．$2 \Rightarrow 1$ は，自明ではないが，背理法を用いると比較的容易に導くことができる．ここでは省略する． □

ここまでのまとめ．

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) := \int_0^1 L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{q}}(t)|^2 - V(\boldsymbol{q}(t)) \right) dt$$

とすると，以下の 3 つが同値であることがわかった．

- $\boldsymbol{q}(t)$ が Newton の運動方程式を満たす.
- $\boldsymbol{q}(t)$ が Euler-Lagrange 方程式を満たす.
- $\boldsymbol{q}(t)$ の Lagrangean $\mathcal{A}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ が極値をとる.

この章で扱った内容に関しては，[6] が初学者にもわかりやすく，説明が丁寧.

1 n 体問題

- n 個の物体を用意する.
- i 番目の物体の位置 $\boldsymbol{q}_i \in \mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$，質量 m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

このとき，次式で表される常微分方程式を n 体問題という.（ただし重力定数 G は 1 とする.）

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j\|^3}(\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j)$$

対応するラグランジアンは

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{q}}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|}$$

である.

1.1 n 体問題の例

例 1.1 (ケプラー問題). 次のケプラー問題は質量 k の物体が原点で固定されている 2 体問題の一つとみなせる.

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2} = -\frac{k}{|\boldsymbol{q}|^3}\boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3)$$

ケプラー問題は解ける.

例 1.2 (2 体問題). 一般的な 2 体問題を考えてみよう.

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_1 = -\frac{m_2}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$$
$$\ddot{\boldsymbol{q}}_2 = -\frac{m_1}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1|^3}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1)$$

$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ について

$$\boldsymbol{Q}_1 = m_1\boldsymbol{q}_1 + m_2\boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1$$

と変換してみよう．すると元の方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_1 = m_1\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{q}}_2 = 0$$
$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_2 = \ddot{\boldsymbol{q}}_2 - \ddot{\boldsymbol{q}}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{|\boldsymbol{Q}_2|^3}\boldsymbol{Q}_2$$

となって，ケプラー問題に帰着できる．したがって，2 体問題も一般に解析的に解を求めることができる.

例 1.3. 3 体問題において m_3 の質量が他の m_1, m_2 に対して十分小さく，その影響を無視できる場合（つまり $0 < m_3 \lll m_2 \lll m_1$ の場合）を考えてみよう．$m_3 \approx 0$ と仮定して，$\ddot{\boldsymbol{q}}_1$ と $\ddot{\boldsymbol{q}}_2$ の m_3 についての項を消去すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{q}}_1 &= -\frac{m_2}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) \\
\ddot{\boldsymbol{q}}_2 &= -\frac{m_1}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1|^3}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \\
\ddot{\boldsymbol{q}}_3 &= -\frac{m_1}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3}(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1) - \frac{m_2}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2|^3}(\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2)
\end{aligned}$$

これを制限 3 体問題という．この問題は非可積分であり，解析的には解けないことが知られている．また太陽と木星間に存在する小惑星の運動の解析，ロケットの軌道設計モデルとしても実際に用いられる数理モデルでもある．

前述の 3 体問題を特殊な条件下に制限した問題ですら解けないことからも類推されるように，一般に，$n \geq 3$ の時，n 体問題は解が解析的に求められないことが知られている．一般解を求めることができないので，周期解などの特殊解の解析が新たな目標のひとつとなる．その例を見てみよう．

例 1.4 (8 の字解, [1])**.** n 体問題の周期解として有名なものに 3 体問題の 8 の字解がある．下図のように，3 体が互いに追跡し合いながら 8 の字を描く．*Simó* が数値計算によって見つけていた解である．*2000* 年に *Chenciner* と *Montgomery* が変分法を用いて厳密な存在証明に成功した．

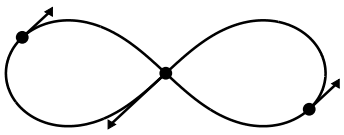


図 1　8 の字解

上図は [4] からの引用である．8 の字解は数値計算上では安定な挙動を示しているが，数学的な証明はまだなされていない．

1.2　制限 3 体問題

制限 3 体問題について，もう少し詳しく見てみよう．$\boldsymbol{q}_1$ と $\boldsymbol{q}_2$ だけ見ると，これは 2 体問題になっている．2 体問題の解として

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_1 &= -\frac{m_2}{(m_1+m_2)^{2/3}}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\mu\cos t \\ -a\mu\sin t\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{q}_2 &= \frac{m_1}{(m_1+m_2)^{2/3}}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(1-\mu)\cos t \\ a(1-\mu)\sin t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を代入してみよう．これを特に平面円制限 3 体問題と呼ぶ．ここで，$a = (m_1+m_2)^{1/3}$, $\mu = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$ である．

$$U(x,y;\mu)=\frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}}+\frac{\mu}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2+y^2}}$$

とおくと，回転座標系でみたときの方程式は

$$\ddot{x}=x+2\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$\ddot{y}=y-2\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}$$

である．ラグランジアンは

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y};\mu)=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+x\dot{y}-y\dot{x}+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U(x,y;\mu)$$

である．実際これは上の運動方程式に対してオイラー・ラグランジュ方程式を満たしている．

その他にも，制限 3 体問題の中には $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ と解として xy 平面を動く楕円軌道をとったものを考える問題も存在する．

2　n 体問題 + 変分法

1 章で，n 体問題の解の例を見てきた．繰り返しになるが，$n\geq 3$ の場合，n 体問題は解けない．したがって，例 1.4 のような周期解（特殊解）を求めることを考えよう．

$\boldsymbol{q}(t)=(\boldsymbol{q}_1(t),\dots,\boldsymbol{q}_n(t))$ とすると，n 体問題の解は次で定義される汎関数 $\mathcal{A}$ の臨界点を求める問題に帰着できる：

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q})=\int_0^T\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i|\dot{\boldsymbol{q}}_i|^2+\sum_{i\neq j}\frac{m_i}{|\boldsymbol{q}_i-\boldsymbol{q}_j|}dt$$

ここで一口に「臨界点」と言っても，微分学において，極小値，極大値，などと言った分類が存在したのと同様に，汎関数の臨界点もただひとつという訳ではない．ここでは汎関数の最小点（minimizer）の存在を示し，それが運動方程式の解のクラスに属することを示すことで n 体問題の特殊解の存在証明を行うことを目標にする．それができれば，汎関数の最小点は元の n 体問題に対して，与えられた境界条件を満たす解であることがわかる．

つまり，ここで扱う問題のゴールは次のようになる．

研究のゴール

汎関数の minimizer が存在し，かつ適切な解のクラスに含まれることを証明し，その解から周期解を構成する．

2.1　ケプラー問題 + 変分法

まず，歴史的な経緯の紹介も兼ねて，変分問題の最小点と n 体問題の解を結びつけた最初の論文と思われる，Gordon の結果を紹介しよう．1977 年，Gordon は原点を周る関数のクラスにおいて，ケプラー問題の解が次式で定義される汎関数

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q})=\int_0^T\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2+\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right)dt$$

の minimizer になっていることを証明した ([2]). より一般的にケプラー問題の解は具体的に計算することができ，下から評価できる．

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}) = \int_0^T \left(\frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 + \frac{r}{\boldsymbol{q}} \right) dt \geq \frac{3}{2}\pi^{2/3}\mu^{1/3}\alpha^{1/3}T^{1/3}$$

計算は少々煩雑なので，ここでは省略する．

ケプラー問題において，注目すべき一つの点として，minimizer を与えるものの中には楕円軌道の解だけでなく，直線ケプラー問題と呼ばれる，原点に衝突するような解も含まれることがあげられる．変分問題において，minimizer の存在が示せても，それが衝突を持たない解であることを示さなければならない．

2.2 n 体問題 + 変分法

前節でケプラー問題の最小点には衝突解が含まれることを述べた．実は特定の条件下で最小点の存在を保証する定理はあるのだが，それは n 体問題においては衝突も含む関数のクラスのもとでの最小点である．

さて，こうした事実を踏まえた上で，変分法を用いて n 体問題の解の存在を示す大まかな流れを見ていこう．主な行程は次の 4 ステップからなる．

1. n 体問題を変分問題として定式化する．
2. 最小点が存在することを示す．
3. 最小点が自明解（自己相似解）でないことを示す．
4. 最小点が衝突解でないことを示す．

各ステップについて，少しコメントしておこう．

本問題において最も重要なのは 1 である．1 の段階で適切な境界条件を選ばなければ，周期解は得られない．1 の境界条件の設定をうまく行えば，2 の最小点の存在証明は容易になる．3 は与えた境界条件によっては自明な単純な軌道や平衡点が解のクラスに含まれてしまっている場合がある．それを取り除くのがステップ 3 の役割である．4 は境界条件の選定の次に困難なポイントだと思われる．ただ，経験的な勘やひらめきに頼らざるをえない部分も多い 1 と違って，4 の衝突解の除去に関してはいくつか評価法が存在する：

- 大域的評価：衝突解 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{col}}$ の作用積分の値をある値 C で下から抑える．その値よりも作用積分の値が小さくなるような関数 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{test}}$（テストパスと呼ばれる）を取って

  $$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{col}}) > C \geq \mathcal{A}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{test}})$$

  を示すことで，衝突解が最小点とは異なることを示す方法．
- 局所的評価：衝突解の衝突部分を局所的に変形させ，その変形させた軌道の方が作用積分値が小さくなることを示す方法．

こうした手法が存在するといっても，大域的評価においてはそもそもどのようにして衝突解を下から抑えるか？が難しい．局所的評価においても，どのように変形させるか？が重要であるし，考える問題設定，境界条件によって，その都度評価法を変えていかなければならない部分も多い．

こうした変分問題や衝突の評価法などについて詳しく書かれている本として，[5] をあげておく．

2.3　周期解の具体例

では「研究のゴール」の最後にあげた「得られた解から周期解を構成する」とはどういうことなのか，具体例を見ていこう．

例 1.4 でとりあげた 8 の字解は実は 1/6 周期分に相当する部分の解の存在を示し，それを滑らかにつなぎ合わせることで 8 の字解の存在を示している．実際の証明は群の作用などを用いており，ここには書ききれないので，もう少し単純な形の解になっている平面 2 中心問題の brake 軌道の例を見てみよう．

例 2.1 (2 中心問題の brake 軌道, [3])**.** n 体問題において，$n-1$ 体が定ベクトルで，お互いに動かず，n 体目だけが他の $n-1$ 体から万有引力を受けて動くとき，どのようなふるまいをするのかを調べる問題を n 中心問題という．平面 2 中心問題を考えよう．$\boldsymbol{a}=(1,0)$ として，次のように汎関数を定めても一般性を失わない．

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q})=\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2+\frac{1}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}|}+\frac{m}{|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{a}|}dt$$

境界条件を次のように定めよう：

$$\boldsymbol{q}(0)\in A:=\{(x,0)\mid -1\le x\le 1\},\ \boldsymbol{q}(T)\in\mathbb{R}^2$$

このとき，既存の定理から，得られる最小点が平衡点でも衝突解でもなければ，図 2 のような，x 軸に直行し，かつ，平面上のどこかで速度が 0 になって止まる（*brake* がかかる）軌道が最小点に対応することがわかる．このような，特定の時刻に速度が 0 になる軌道を *brake* 軌道と呼ぶ．

得られた軌道を x 軸に関して折り返した軌道もまた解であり，これらは滑らかに繋げることができる．このようにして図 3 のような $4T$-周期の軌道が得られる．

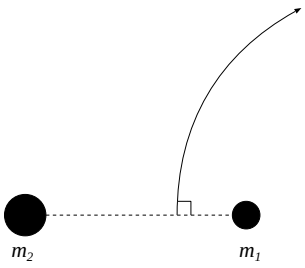


図 2　$\mathcal{A}$ の最小点

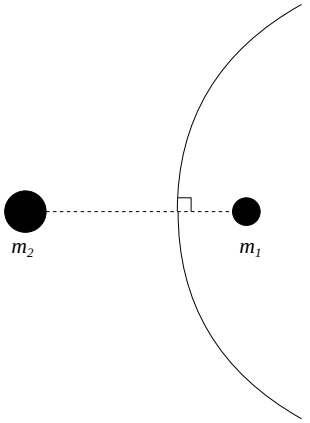


図 3　得られる $4T$-周期の brake 軌道

3　最後に

最後まで目を通していただき，ありがとうございます．恐縮ながら，例 2.1 は私の学部生時代の卒論の結果です．arxiv に載せたかったのですが，載せ方がよくわからず，誰でも見れる状態になっておりませ

ん．すみません．もしもご興味を持って，詳細を知りたいという方がいらっしゃったら，お手数ですが，cajihara@amp.i.kyoto-u.ac.jpまでご連絡ください．それと，ご質問，ご指摘等ありましたら，そちらも遠慮なくご連絡ください．

参考文献

[1] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.*, **152** (2000), 881–901.

[2] W. B. Gordon, A minimizing property of Keplerian orbits, *Amer. J. Math.*, **99** (1977), 961–971.

[3] Y. Kajihara and M. Shibayama, Variational proof of the existence of brake orbits in the planar 2–center problem, submitted.

[4] 柴山允瑠, 重点解説 ハミルトン力学系, サイエンス社, 2016.

[5] 田中和永, 変分問題入門, 岩波書店, 2008.

[6] 深谷賢治, 解析力学と微分形式, 岩波書店, 2004.

2 自由度ハミルトン系における横断的なヘテロクリニック軌道の存在と非可積分性

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
山中祥五 (Shogo YAMANAKA)

概要

本講演では，不変平面上にサドル・センターを連結するヘテロクリニックをもつ 2 自由度ハミルトン系を取りあげる．メルニコフ型の手法を用い，平衡点の近傍にある周期軌道に対する横断的ヘテロクリニック軌道の存在条件を求め，Morales-Ramis 理論による非可積分であるための条件との関係性を明らかにする．さらに，具体的な適用例を示し，得られた結果の有用性を確認する．

1 導入

微分方程式の可積分性を調べる問題は古くから重要な問題であったが，特定の微分方程式の非可積分性は Ziglin の定理 [11] や Morales-Ramis 理論 [6] によって調べることが可能になった．これらの手法により，エノン・ハイレス系や剛体の運動など多くの力学系に対して可積分性を決定する問題が解かれた．一方で，非可積分であることと力学系的な性質の関係は明らかではない．特に，カオス的な系が非可積分であることから，非可積分性を示すことで力学系の解の複雑であることが明らかになると期待されるが，限られた場合を除いてそのことは数学的に示されてはいない．

本講演では，非可積分であるための十分条件が成り立てば，ある意味で解が複雑であること明らかにする．2 節では可積分性に関する基本事項を紹介する．3 節でヘテロクリニック軌道を持つ一般的な力学系の非可積分性の十分条件をモノドロミー行列により与える．4 節でヘテロクリニック軌道を持つハミルトン系に対しては，モノドロミー行列により与えられる非可積分性の条件と，周期軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差するための条件の関係を明らかにする．最後に 5 節で具体例を通してこれらの結果の有用性を明らかにする．

2 可積分性

古典的には可積分条件はハミルトン系に対してのみ考えられていた．ハミルトニアンを $H\colon \mathbb{C}^{2m} \to \mathbb{C}^{2m}$ とする m 自由度ハミルトン系を考える．

$$\dot{z} = J_m DH(z), \quad z = (q, p) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \tag{1}$$

ここで，E_m を m 次単位行列として J はシンプレクティック行列

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$$

とする．また，本稿では H は $\mathbb{C}^{2m}$ 上で有理型関数の場合を考える．ここで，Liouville 括弧

$$\{F, G\}(z) := \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

を用いれば，方程式 (1) は

$$\dot{z_i} = \{z_i, H\}$$

と書くことができ，また，関数 F が方程式 (1) の保存量であることは $\{F, H\} = 0$ と同値になる．

Definition 1 (Liouville 可積分)．m 自由度ハミルトン系が ***Liouville* 可積分**であるとは，m 個の有理型関数 $H_1 = H, H_2, \ldots, H_m$ が存在して，$DH_1(z), \ldots, DH_m(z)$ がほとんど至る所一次独立であり，任意の $i, j = 1, \ldots, m$ に対して $\{H_i, H_j\} = 0$ となることをいう．

Liouville 可積分であり，さらに，$H_1, \ldots, H_m$ が正則関数で $DH_1(z), \ldots, DH_m(z)$ が至る所一次独立の場合には方程式 (1) はトーラス上の線形流に変換されることが分かる（Arnold-Liouville の定理）．つまり，Liouville 可積分の時には力学系は非常に単純である．

一般の微分方程式に対しては，Liouville 可積分性の概念を一般化した可積分条件が Bogoyavlenski により定式化されている．次の一般的な形の n 次元微分方程式系を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{2}$$

ここで, $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は有理型関数とする．

Definition 2 (可積分 [2])．自然数 p, q を $p \geq 1, q \geq 0, p + q = n$ となるものとする．n 次元微分方程式 (2) が $(p.q)$**-可積分**であるとは，p 個のベクトル場 $f_1 (= f)$, f_2, ... , f_p と q 個の関数 H_1, ... , H_q が存在し, 以下が成り立つことをいう*:*

(1) ベクトル場 $f_1(x)$, ... , $f_p(x)$ はほとんど至る所一次独立，かつ，$DH_1(x), \ldots, DH_q(x)$ がほとんど至る所一次独立．

(2) ベクトル場 f_1, ... , f_p は可換, すなわち, $[f_i, f_j](x) := Df_j(x)f_i(x) - Df_i(x)f_j(x) = 0\,(i, j = 1, \ldots, p)$ が成立．

(3) 関数 $H_1, \ldots, H_q$ はベクトル場 $f_1, \ldots, f_q$ の保存量, すなわち, $\mathcal{L}_{f_i}(H_j)(x) := f_i(x) \cdot DH_j(x) = 0\,(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q)$ が成立する．

方程式 (2) が ***Bogoyavlenski* の意味で可積分**あるいは単に**可積分**であるとは，ある p, q で (p, q) 可積分であることをいう．

Bogoyavlenski の意味での可積分性は様々な意味での可積分の概念を含むものになっている．例えば，n 次元微分方程式は $n - 1$ 個の保存量を持つとき可積分であると言われるがこれは $(1, n-1)$-可積分に対応する．また，方程式 (2) が線形で $\dot{x} = Ax$ と書けるとき解が $x = e^{At}$ と書けるが，このとき n 個の可換なベクトル場を持つので $(n, 0)$-可積分に対応する．さらに，ハミルトン系 (1) が Liouville 可積分なら $f_1(z) := JDH_1(z), \ldots, f_m := JDH_m(z)$ とおけば (m, m)-可積分になる．

話題を非可積分性判定に移す．ある意味での非可積分性の証明は Poincaré が行なっているが，本稿で定義した Liouville の意味での非可積分性を示すことは長らくの問題であった．Ziglin [11] 以降，Morales-Ramis 理論 [6] や Ayoul-Zung の定理 [1] によって強力な非可積分性判定の方法が確立した．微分方程式 (2) の特解を $x = \hat{x}(t)$ とする．以下の線形微分方程式を特解 $\hat{x}(t)$ 周りの (2) の変分方程式という．

$$\dot{\xi} = Df(\hat{x}(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n \tag{3}$$

線形微分方程式に対してはモノドロミー行列や微分ガロア群が定義できる．

Theorem 1. 方程式 (2) が可積分であるとき，変分方程式 (3) の微分ガロア群 G の単位成分 G^0 が可換である．

この定理の対偶をとれば，G^0 が非可換であることを示すことで (2) が非可積分であることを証明できる．ハミルトン系の Liouville 可積分性に対しては，Ziglin がモノドロミー行列，Morales-ruiz と Ramis が微分ガロア群による判定法を与えたが，Ayoul と Zung により Theorem 1 の形に一般化された．

3　モノドロミー行列による非可積分判定

本稿の目的は非可積分性と力学系の性質，特に，カオスとの関係を調べることである．前節では微分ガロア理論による非可積分判定の手法を紹介したが，力学系の性質との関係を調べるには微分ガロア群よりもモノドロミー行列を使う方が良い．ハミルトン系の場合には Ziglin によりモノドロミーによる非可積分性条件が与えられているが，本節では一般的な微分方程式に対して結果を拡張することを考える．

以下の一般的な実力学系を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

式 (4) に対して以下のことを仮定する．

(A1) $(n-2)$ 次元の境界付き解析的局所不変多様体 $\mathscr{N}$ でその内部 $\mathscr{N} \setminus \partial\mathscr{N}$ が二つの平衡点 $x_\pm$ とヘテロクリニック軌道 $\hat{x}(t)$ で $\lim_{t\to\pm\infty} \hat{x}(t) = x_\pm$ となるものが存在するとする．

(A2) 2 つの 1 次元の境界付き局所不変多様体 $\mathscr{C}_\pm$ で $x_\pm \in \mathscr{C}_\pm \setminus \partial\mathscr{C}_\pm$ かつ十分大きい $T > 0$ で $|t| > T$ に対して $\hat{x}(t) \in \mathscr{C}_\pm$ となるものが存在するとする．

仮定 (A1) において $x_+ = x_-$ かつ $\hat{x}(t)$ がホモクリニック軌道となる場合も許す．

ヤコビ行列 $Df(p_\pm)$ に対して，$\lambda_\pm$ は $\mathscr{C}_\pm$ に接する固有ベクトルに対する固有値であり，$\mu_\pm$, $\nu_\pm$ は $\mathscr{N}$ に直交する固有ベクトルに対する固有値とする．以下の条件を考える．

(A3) $\lambda_\pm \neq 0$ かつ $\dfrac{\mu_\pm - \nu_\pm}{\lambda_\pm} \notin \mathbb{Q}$;

(A4) $\dfrac{\mu_\pm + \nu_\pm}{\lambda_\pm} \in \mathbb{Z}$;

(A5) $\dfrac{\mu_+}{\lambda+} - \dfrac{\mu_-}{\lambda_-} \in \mathbb{Z}$.

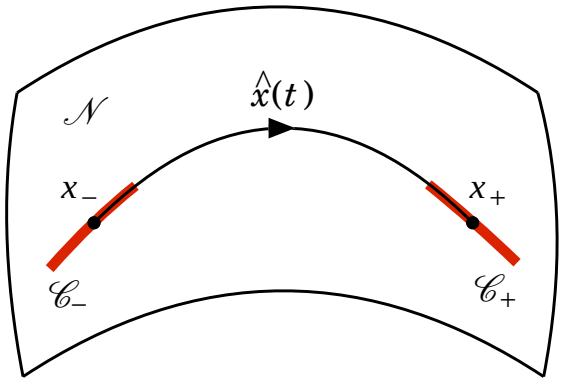


図 1: Assumptions (A1) and (A2).

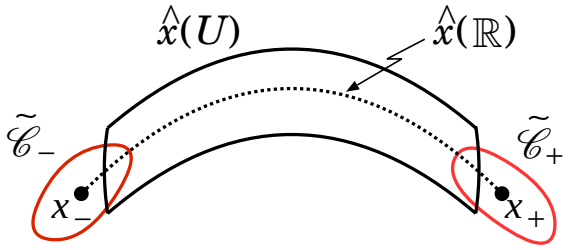


図 2: Riemann surface $\Gamma = \hat{x}(U) \cup \tilde{\mathscr{C}}_+ \cup \tilde{\mathscr{C}}_-$.

式 (4) および多様体 $\mathscr{N}$, $\mathscr{C}_\pm$ を複素化する. 特に, 式 (4) は $\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された複素微分方程式系となる. ヘテロクリニック軌道 $\hat{x}(t)$ まわりの変分方程式において, 仮定 (A1) の不変多様体 $\mathscr{N}$ の直交方向を考えることで, 次の 2 次元直交変分方程式

$$\frac{d\eta}{dt} = A(t)\eta, \quad t \in \Gamma$$

が定義できる. ただし, Γ は解 $\hat{x}(t)$ の定めるリーマン面と複素化した $\mathscr{C}_\pm$ から定義されるリーマン面であり, $p_\pm$ に対応する点 $0_\pm$ のみを特異点に含むようにしたものである. ここで, 直交変分方程式は $0_\pm$ を原点とする局所座標 $s_\pm$ によって局所的に

$$\frac{d\eta}{ds_\pm} = \frac{A_\pm(s_\pm)}{\lambda_\pm s_\pm}\eta$$

と書ける. ここで, $A_\pm(s_\pm)$ は正則関数を成分にもつ 2 次正方行列である. この直交変分方程式は $0_\pm$ に確定特異点を持ち, この特異点についてのモノドロミー行列を $M_\pm$ とする. 以下の結果を得る.

Theorem 2 ([10]). *(A1)-(A3)* の仮定の下, 式 (5) が可積分であるならば, M_+ と M_- は同時三角化可能となる.

Theorem 3 ([10]). *(A1)-(A4)* の仮定の下, 式 (4) の複素化が可積分であるなば, M_+ と M_- は同時対角化可能となる．さらに, *(A6)* が成り立つときならば, $M_+M_- = \mathrm{Id}_2$ または $M_+ = M_-$ となる．

証明には Theorem 1 を用いる．Theorem 2 や 3 の前半はハミルトン系の場合は Ziglin の定理の帰結である．また，ホモクリニック軌道の場合，つまり，$x_+ = x_-$ の場合は Yagasaki[9] で示されている．

4　非可積分判定と横断的ヘテロクリニック軌道の存在の関係

前節で与えたモノドロミー行列による非可積分の条件と力学系的な性質の関係を 2 自由度のハミルトン系に対して考える．

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1 D_x H(x,y), \\ \dot{y} = J_1 D_y H(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

ここで，ハミルトニアン $H\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は解析的とする．以下を仮定する．

(B1) x 平面 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ は不変である．

(B2) x 平面上には 2 つのサドル・センター型の平衡点 $(x,y) = (x_\pm, 0)$ が存在し，$JD_x^2 H(x_\pm, 0)$ は 1 組の実固有値 $\lambda'_\pm, -\lambda'_\pm$ $(\lambda'_\pm > 0)$，$JD_y^2 H(x_\pm, 0)$ は 1 組の純虚固有値 $i\omega_\pm, -i\omega_\pm$ $(\omega_\pm > 0)$ を有する．

(B3) x 平面上にサドル・センター $(x_-, 0)$ から $(x_+, 0)$ へのヘテロクリニック軌道 $(x,y) = (x^{\mathrm{h}}(t), 0)$ が存在する．Fig. 3 を参照せよ．

Lyapunov の中心定理 [4] により，サドル・センター $(x_\pm, 0)$ の近傍には，$\alpha_\pm \to 0$ のとき $(x_\pm, 0)$ に漸近する，周期軌道の 1 パラメータ族 $\gamma_\pm^{\alpha_\pm}$ $(\alpha_\pm \in (0, \alpha_\pm^0]$，$\alpha_\pm^0 > 0)$ が存在する．Fig. 4 を参照せよ．ヘテロクリニック軌道 $(x^h(t), 0)$ 側の，$\gamma_-^{\alpha_-}$ の不安定多様体と $\gamma_+^{\alpha_+}$ の安定多様体の分枝を，それぞれ，$W_{\mathrm{r}}^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_{\ell}^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha_+})$ と表す．Fig. 5 を参照せよ．

$W_{\mathrm{r}}^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_{\ell}^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha_+})$ が横断的に交差するときには，力学系は複雑になることが期待される．特に，$\gamma_+^{\alpha_+}$ の不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(\gamma_+^{\alpha_+})$ と $\gamma_-^{\alpha_-}$ の安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ も横断的に交差するとき，すなわ

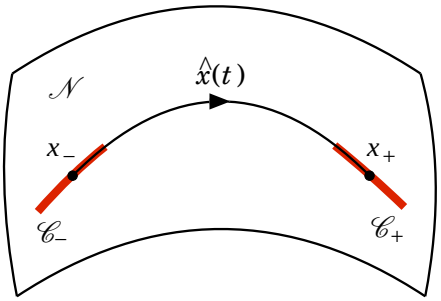


図 3: 仮定 (A2) と (A3)

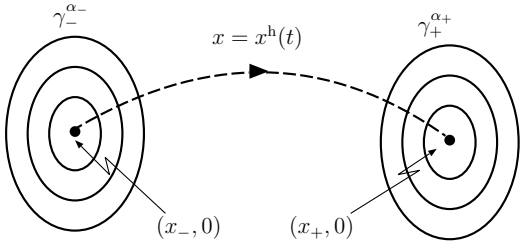


図 4: Lyapunov の中心定理により存在が保証される周期軌道の族

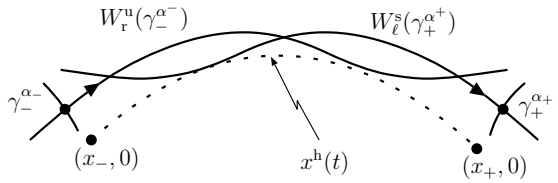


図 5: $\gamma_-^{\alpha_-}$ の不安定多様体の分枝 $W_{\mathrm{r}}^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $\gamma_+^{\alpha_+}$ の安定多様体の分枝 $W_{\ell}^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha_+})$

ち，$\gamma_-^{\alpha_-}$ と $\gamma_+^{\alpha_+}$ の横断的なヘテロクリニック・サイクルが存在するとき，$\gamma_-^{\alpha_-}$ および $\gamma_+^{\alpha_+}$ の横断的なホモクリニック軌道が存在し，ハミルトン系 (5) は Poincaré 写像がその上で馬蹄写像と位相共役となる不変集合を有し，非可積分となる [3, 7]．解が $x^{\mathrm{h}}(t)$ がホモクリニック軌道の場合にもこのような状況になる．

$W_{\mathrm{r}}^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_{\ell}^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha_+})$ の横断的な交差の存在を示すことができる Melnikov 型手法に関する文献 [8] の概要を述べる．ヘテロクリニック軌道 $(x, y) = (x^{\mathrm{h}}(t), 0)$ 周りの直交変分方程式

$$\dot{\eta} = J_1 D_y^2 H(x^{\mathrm{h}}(t), 0)\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

とサドル・センター $(x_\pm, 0)$ 周りの直交変分方程式

$$\dot{\eta} = J_1 D_y^2 H(x_\pm, 0)\eta \tag{7}$$

の基本行列を，それぞれ，$\Psi(t)$ と $\Phi_\pm(t)$ とおく．式 (7) は $q_\pm(\eta) = \frac{1}{2}\eta^{\mathrm{T}} D_y^2 H(x_\pm, 0)\eta$ をハミルトニアンとする線形ハミルトン系である．ここで，$^{\mathrm{T}}$ は転置演算を表す．このとき，極限

$$B_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} \Phi_\pm(-t)\Psi(t)$$

が存在し．$B_0 = B_+ B_-^{-1}$ とおく．非零のベクトル $\eta_0 \in \mathbb{R}^2$ に固定して，Melnikov 関数を次式で定義する．

$$M(t_0) = q_-(\eta_0) - q_+(B_0 \Phi_-(t_0)\eta_0)$$

直感的にメルニコフ関数は $M(t_0)$ は $x^{\mathrm{h}}(t_0)$ 付近での $W_{\mathrm{r}}^{\mathrm{u}}(\gamma_-^{\alpha_-})$ と $W_{\ell}^{\mathrm{s}}(\gamma_+^{\alpha_+})$ の距離を表す関数である．よって，$M(t_0)$ が零点を持てばそこで交差が起こり，零点を持たなければ交差が起こらないことが期待される．実際以下が示された．

Theorem 4 ([8])**.** $M(t_0)$ が単純零点をもつならば, $H(\gamma_-^{\alpha-}) = H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たす十分小さい $\alpha_\pm > 0$ に対して，$W_{\rm r}^{\rm u}(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^{\rm s}(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する．

一方，仮定 (B1)-(B3) の仮定の下で Theorem 2,3 を用いると，以下が分かる．

Corollary 1 ([10])**.** ハミルトン系 (5) が有理型的に可積分と仮定する．このとき，M_+ と M_- は可換である．さらに，$\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ ならば，$M_+ = M_-^{-1}$ または $M_+ = M_-$ である．

以上により，既存の結果から非可積分性に関する条件 Collorary 1 と安定多様体と不安定多様体の横断的交差の条件 theorem 4 が得られた．これらの条件の関係を調べることで，非可積分性と力学系的な性質の関係を理解することができる．

主結果を述べるために細かい仮定をおく．$D_y^2 H(x_\pm, 0)$ の固有値を $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$ とおく．$\sigma_1^\pm \sigma_2^\pm = \omega_\pm^2$ であるから $\sigma_1^\pm$ と $\sigma_2^\pm$ は同符号となる．σ_1^+ が σ_1^- が異符号のとき，十分小さい $\alpha_\pm > 0$ に対して $H(\gamma_-^{\alpha-}) \neq H(\gamma_+^{\alpha+})$ となることが示され，安定多様体と不安定多様体の交差は起こらない．よって，σ_1^+ が σ_1^- が同符号の場合のみが問題となり，以下ではこれを仮定する．

Collorary 1 と theorem 4 といくつかの計算により以下を得ることができた．

Theorem 5. $\alpha_\pm > 0$ は $H(\gamma_-^{\alpha-}) = H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たし，十分小さいものとする．

(i) $\omega_+ = \omega_-$ かつ M_+ と M_- が非可換ならば，$W_{\rm r}^{\rm u}(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^{\rm s}(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する．
(ii) $\omega_+ \neq \omega_-$ ならば，$W_{\rm r}^{\rm u}(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^{\rm s}(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差するか，2 次的に接するか，交わらないかのいずれかである．

Theorem 6. 定理 *2* の条件に加えて，$\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ と仮定する．

(i) $\omega_+ = \omega_-$ かつ $M_+ \neq M_-^{-1}$ が非可換ならば，$W_{\rm r}^{\rm u}(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^{\rm s}(\gamma_+^{\alpha+})$ は横断的に交差する．
(ii) $\omega_+ \neq \omega_-$ かつ $M_+ = M_-^{-1}$ ならば，$W_{\rm r}^{\rm u}(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^{\rm s}(\gamma_+^{\alpha+})$ は交わらない．

Theorem 5, 6 の (i) は，$(x^{\rm h}(t), 0)$ がホモクリニック軌道となる $x_+ = x_-$ の場合に対する文献 [5, 9] の結果の一般化である．

状況は $\omega_+ = \omega_-$ の場合と $\omega_+ \neq \omega_-$ の場合で大きく異なる．$\omega_+ = \omega_-$ の場合，非可積分の条件が横断的な交差の条件を導く．一方，一般に $\omega_+ \neq \omega_-$ の場合には，非可積分の条件と横断的な交差の条件には関係がない．ただし，$\omega_+ \neq \omega_-$ に加えて $\lambda'_+/\omega_+ = \lambda'_-/\omega_-$ ならば，非可積分だと判定できない場合に交差が起こらないということが分かり，二つの条件には関係があることが分かった．

5 具体例

5.1 STF 流れの非可積分性

以下の微分方程式系を考える．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z - 8xy \\ 11x^2 + 3y^2 + z^2 + \beta xz - 3 \\ -\alpha x + 2yz - \beta xy \end{pmatrix} \tag{8}$$

式 (8) はある定常ストークス流れを表し, STF 流れと呼ばれている．Theorem 3 を適用すると,

$$\frac{\sqrt{25-\alpha(\alpha\pm\beta)}}{3}\notin\mathbb{Q}\quad\text{かつ}\quad\frac{\sqrt{25-\alpha(\alpha+\beta)}-\sqrt{25-\alpha(\alpha-\beta)}}{6}\in\mathbb{Z}$$

のとき, 式 (8) は非可積分となることが分かる.

5.2 4 次のポテンシャルを持つハミルトン系

ハミルトン関数を

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2)+\frac{1}{2}(x_1^2+\omega^2y_1^2)\\&-\frac{1}{4}(x_1^4+y_1^4)-\frac{1}{2}\beta_1x_1y_1^2-\frac{1}{2}\beta_2x_1^2y_1^2\end{aligned}$$

とする，次の 2 自由度ハミルトン系を考える:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\quad\dot{y}_1=y_2\\&\dot{x}_2=-x_1+x_1^3+\frac{1}{2}\beta_1y_1^2+\beta_2x_1y_1^2,\\&\dot{y}_2=-\omega^2y_1+\beta_1x_1y_1+\beta_2x_1^2y_1-y_1^3\end{aligned}\tag{9}$$

x 平面は不変平面であり，$(x,y)=(\pm1,0,0,0)$ は平衡点である．$\omega^2-\beta_2>|\beta_1|$ のとき，それらはサドルセンターとなり，仮定 (B1)-(B3) が満たされる．特に，一組のヘテロクリニック軌道

$$x_\pm^{\mathrm{h}}(t)=\left(\tanh\left(\pm\frac{t}{\sqrt{2}}\right),\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech}^2\left(\pm\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

が存在する．また，$\omega_+=\omega_-$ となるのは $\beta_1=0$ のときである．

直交変分方程式のモノドロミー行列を計算することにより以下を得る．

Lemma 1. $\omega^2-\beta_2>|\beta_1|$ とする．M_+ と M_- が可換であれば, $\beta_1=0$ かつ $\beta_2=\frac{1}{2}n(n-1),n\in\mathbb{Z}$ であり，$M_+=M_-^{-1}$ となる．

よって，Theorem 5 より次の結果を得る．

Theorem 7. $\omega^2-\beta_2>|\beta_1|$ とする．$\beta_1\neq0$ または $\beta_2\neq\frac{1}{2}n(n-1),n\in\mathbb{Z}$ ならば，ハミルトン系 (9) は有理型的に非可積分である．さらに，$\beta_1=0$ かつ $\beta_2\neq\frac{1}{2}n(n-1),n\in\mathbb{Z}$ ならば，$H=H(\gamma_-^{\alpha-})=H(\gamma_+^{\alpha+})$ を満たす十分小さい $\alpha_\pm>0$ に対して，不安定多様体と安定多様体の分枝 $W_{\mathrm{r}}^u(\gamma_-^{\alpha-})$ と $W_\ell^s(\gamma_+^{\alpha+})$ および $W_\ell^u(\gamma_+^{\alpha+})$ と $W_{\mathrm{r}}^s(\gamma_-^{\alpha-})$ は横断的に交差する．

参考文献

[1] M. Ayoul and N.T. Zung, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **348** (2010), 1323–1326.

[2] O.I. Bogoyavlenski, Comm. Math. Phys., **196** (1998), 19–51.

[3] J. Guckenheimer and P.J. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983.

[4] K.R. Meyer, G.R. Hall and D. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, Springer, New York, 2009.
[5] J.J. Morales-Ruiz and J. M. Peris, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **8** (1999) 125–141.
[6] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Methods, Appl. Anal., **8** (2001), 33–96.
[7] J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
[8] T. Sakajo and K. Yagasaki, J. Nonlinear Sci., **18** (2008), 485–525.
[9] K. Yagasaki, Nonlinearity, **16** (2003), 2003–2012.
[10] K. Yagasaki and S. Yamanaka, J. Differential Equations, **263** (2017) 1009–1027.
[11] S. L. Ziglin, Funct. Anal. Appl. **16** (1983) 8–23.

連続力学系の可積分性とその周辺

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
本永翔也 (Shoya MOTONAGA)

本稿では分野外の方向けに可積分判定およびその周辺の入門的な内容を紹介する．不十分な議論や不正確な記述が多くなるが，その点はご容赦願いたい．

1　可積分性についての導入と歴史

常微分方程式 (ODE) を「解く」ことを考える．次の事実は基礎的だが重要である．

定理 1 (ODE の初期値問題の局所解の存在と一意性)．常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

に対して，f が x についてリプシッツ連続ならば時間局所解は存在して一意的である．

より正確な主張や詳細については常微分方程式の教科書を参照されたい．この定理は局所解についてしか存在と一意性を保証しないが，発見的に大域解を見つけた場合には，上の定理によって一意性は従う．

一般解を求めることを考えよう．そのためにいくつかの基本的な例を復習しておく．

例 1. $\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
は $\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$ より $t + C = \int \frac{dx}{f(x)}$ （C：任意定数）．$F(x) := \int \frac{dx}{f(x)}$ とし，逆関数 F^{-1} を許せば

$$x = F^{-1}(t + C)$$

と解くことができる．

例 2. $\dot{x} = x/t, \quad x \in \mathbb{R}, t \neq 0$
は $u = x/t$ と置くことで $u + t\dot{u} = u$ となるので $u = C$（C:任意定数）となり一般解 $x = Ct$ である．
(注意：変数分離法でも解くことができる．)

例 3. $\ddot{x} = x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$
は両辺に $\dot{x}$ をかけて積分すると，$H(x,\dot{x}) = \frac{1}{4}(2\dot{x}^2 - 2x^2 + x^4)$ とおけば方程式の解 x に対して $H(x,\dot{x}) = C$（C：任意定数）となる．$\dot{x}$ について整理すれば $\dot{x} = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$ という一階の微分方程式になり，例 1 に帰着される．$H(x,\dot{x})$ のように，方程式の解に対し一定であるような関数を**保存量**または**第一積分**と呼ぶ．

例 1,2,3 は代表的な「解くことができる」例といえる．参考として「素朴には解けない」例もあげておこう．どのような意味で「解けない」のか，なぜ「解けない」のかについてはここでは省略する．

例 4. *Airy* 方程式：$\ddot{x} = tx, \quad x \in \mathbb{R}$.

例 5. *Duffing* 方程式：$\ddot{x} = x - x^3 + \varepsilon \cos t, \quad x \in \mathbb{R}$. ここで ε は微小パラメータ．

1.1 可積分性

常微分方程式が解けることの背景の一つとして例 2 のように保存量を見つけることにより，一つの変数について解く（保存量が定める超曲面に方程式を制限して考える）ことで方程式の次元を下げることが考えられる．また，例 3 のような変数変換の背景には対称性があり，これを見つけることでやはり方程式の次元を下げることができる．これらによって方程式の次元が 1 次元にまで下がれば，例 1 より，方程式は解けるといえる．さらに，ハミルトン系と呼ばれる数理物理学的に自然な方程式系（これは偶数次元の系になっている）では保存量の存在と対称性の存在が対応していることが知られており（Noether の定理），そのため方程式の次元を 1 次元まで下げるには，方程式の次元の半分の保存量があればよい．簡単のためユークリッド空間に限って，これを定式化しよう．

関数 $H(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ に対する**ハミルトンベクトル場**とは次式で与えられるものである：

$$X_H(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_m}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial x_m} \right)^\top.$$

このとき，H は**ハミルトニアン**と呼ばれ，ハミルトンベクトル場で定まる力学系（微分方程式系）を**ハミルトン系**という．

定義 1. ハミルトンベクトル場 X_H が **Liouville 可積分**
$:\Leftrightarrow$ m 個の関数 $F_1 = H, ..., F_m$ が存在して次を満たす：

- $\{F_i, F_j\} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \right) = 0.$
- $dF_1, ..., dF_n$ は稠密な開集合上一次独立である．

また F_i が全て解析関数である場合には解析的可積分と呼ぶなど，関数のクラスに応じて可積分性のクラスを定義する．

ハミルトンベクトル場が Liuouville 可積分であるとき，この方程式は求積法によって解くことができることが知られており，これは幾何学的には解軌道がトーラス上の線形フローに変換可能なこととして捉えられることが知られている（Liouville-Arnold の定理 [1]）．また，

- $\{F_i, F_j\} = X_{F_i}(F_j) = -X_{F_j}(F_i).$
- $[X_{F_i}, X_{F_j}] = X_{\{F_i, F_j\}}$

であるので，$\{F_i, F_j\} = 0$ は

- 関数 F_j はハミルトンベクトル場 X_{F_i} の保存量であり，かつ関数 F_i はハミルトンベクトル場

X_{F_j} の保存量である．

- ハミルトンベクトル場 X_{F_i} と X_{F_j} は Lie 括弧の意味で可換である．つまり X_{F_i} の定めるフローと X_{F_j} の定めるフローは互いに可換である．

ということを意味する．定義のうちの一次独立性に関する条件は，例えば $H(x,y) = const$ と $H^2(x,y) = const$ は方程式の次元を下げる上では本質的に同じものであるので，そのようなものを避けるために課す条件である．歴史的な流れとしては随分と後になるが，ハミルトン系の Liouville 可積分性を一般の自律的力学系に拡張したものとして，しばしば Bogoyavlenskij [3] による次の可積分性も用いられる．

定義 2. n 次元可微分多様体上の滑らかなベクトル場 X が定める自律的力学系 $\dot{x} = X(x)$ が **Bogoyavlenskij の意味で可積分**である [3] とは次の条件を満たすベクトル場 $X_1 = X, ..., X_r$ と関数 $F_1, ..., F_{n-r}$ が存在することをいう：

(i) $[X_i, X_j] = 0$ であり $X_1, ..., X_r$ は稠密な開集合上一次独立である．
(ii) $X_i(F_j) = 0$ であり $dF_1, ..., dF_{n-r}$ は稠密な開集合上一次独立である．

特に，ハミルトンベクトル場が Liouville 可積分であるときには，$n = 2m$ として，$r = m$ かつ X_i が F_i に対するハミルトンベクトル場であるとすれば，Bogoyavklenskij 可積分である．この意味で Bogoyavklenskij 可積分性は Liouville 可積分性の拡張になっている．また，Bogoyavlenskij 可積分であるときには Liouville-Arnold の定理と同様の主張も成り立つことが知られている．

1.2 Poincaré による制限三体問題の研究

与えられた系に対して可積分性を考えるのは自然な問であるが，それに答えるのは非常に難しい．可積分であることを示すには保存量あるいは可換なベクトル場を見つければよいが，一般に見つけるのは困難であるし，逆に可積分でないことを示すにはどんな関数やベクトル場も保存量や可換なベクトル場にはなり得ないことを確認しなければならないためである．どんな系も実は可積分であるか，あるいは非可積分な系が存在するのかさえ全くわかっていない状況の中，当時大きな関心が寄せられていた多体問題に対し Poincaré は制限三体問題の非可積分性を証明した [7]．実際には，可積分な 2 自由度ハミルトン系が摂動を受ける場合に対して，摂動パラメータについて解析的な第一積分で，ハミルトニアンと独立なものが存在しないことを一般的な条件のもとで示し，制限三体問題にこれを適応している．これは，摂動を受けるハミルトン系の可積分性に関する代表的な結果のひとつであり，非摂動系における第一積分や対応する可換なハミルトンベクトル場が，一般的に摂動によって失われることを意味する．

また，解析的なアプローチだけでなく，解軌道の挙動に着目して現在でいうところの力学系的な観点から制限三体問題を考えていくことで，Poincaré は安定多様体と不安定多様体の横断的交差という現象に至った．これは現在ではカオスと呼ばれる現象の一つとして知られており，この振る舞いのメカニズムを簡略化したものの一つとして馬蹄写像というものが知られている．対象の系がこのようなカオスの機構を持つことを解析する手法として代表的なものの一つに以下のメルニコフの方法が知られている．

1.3 メルニコフの方法

ここでは横断的ホモクリニック軌道の存在を解析するための手法として知られるメルニコフの方法について概説する．その標準的な方法 [4,8] では，次のような 1 自由度ハミルトン系が周期的摂動を受ける場合が取り扱われる．

$$\dot{x} = X_H(x) + \varepsilon g(x,\theta), \quad \dot{\theta} = 1 \tag{1}$$

ここで，ε は微小パラメータを表し，$x = (x_1, y_1)^\top \in \mathbb{R}^2$，$\theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ($T > 0$ は定数) である．また，$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ および $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ は，それぞれ，C^3 級および C^2 級である．$H(x)$ が非摂動系のハミルトニアンである．次を仮定する．

(M) $\varepsilon = 0$ のとき，式 (1) においてホモクリニック軌道 $q^0(t)$ を有する双曲的鞍点 p が存在する．すなわち，

(i) $X_H(p) = 0$

(ii) 行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} \end{pmatrix}(p)$ は実部が正の固有値と実部が負の固有値を一つずつ持つ．

(iii) $q^0(t) \to p \quad (t \to \pm\infty)$

このとき，ホモクリニック軌道に対する**メルニコフ関数**

$$M(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} DH(q^0(t)) \cdot g(q^0(t), t+\tau) dt \tag{2}$$

が単純な零点をもつならば，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，式 (1) において横断的ホモクリニック軌道が存在する [4]．これは系の軌道の中に馬蹄写像が埋め込まれており，軌道がカオス的に振る舞うことを意味している．

また，余談であるが，これと類似した手法により，摂動系における周期軌道の存在を示すこともできる．条件 (M) の代わりに，次を仮定する．

(M') $\varepsilon = 0$ のとき，式 (1) は周期 T^α の周期軌道の 1 パラメータ族 $q^\alpha(t)$，$\alpha \in (-1, 0)$，をもつ．

このとき，$lT^\alpha = mT$ ($l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素) を満たし，周期軌道に対する**メルニコフ関数**

$$M^{m/l}(\tau) := \int_0^{mT} DH(q^\alpha(t)) \cdot g(q^\alpha(t), t+\tau) dt \tag{3}$$

が単純な零点をもつならば，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，式 (1) において周期 mT の周期軌道 (m 次分数調波または m/ℓ 次超分数調波) が存在する [4,8]．

Poincaré は制限三体問題の研究でカオス現象に出会っていたわけであるが，実現象においてカオス挙動が広く知られるにはコンピュータシミュレーションの発達を待つ必要があった．コンピュータシミュレーションによってようやくカオス挙動が視覚化されたのである．

一方で，カオス的に振る舞う系の多くは非可積分であることが知られており，非可積分であればカオス挙動を示すことが期待されるため，カオス挙動のような複雑な挙動を捕えるにあたって，系の非可積分性を示すことも重要であると考えられるようになってきた．

2　可積分判定手法

連続力学系の可積分性を判定する方法は現在ではいくつかの方法が知られているが，ここでは変分方程式に着目した手法を紹介する．

2.1　変分方程式

自律的な n 次元連続力学系を考える：

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{K}^n \tag{4}$$

ただし $f = (f_1, ..., f_n)^\top : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ は適当な滑らかさを持つベクトル場であり，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である．(4) が特解 $x = \phi(t)$ を持つとする．このとき (4) の $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式とは次式で与えられる時間依存する係数行列を持つ線形微分方程式系である：

$$\dot{\xi} = Df(\phi(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{K}^n \tag{5}$$

ただし

$$Df(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\phi(t)).$$

変分方程式 (5) は元の方程式 (4) において $x(t) = \phi(t) + \varepsilon\xi(t) + O(\varepsilon^2)$ としたときの ε についての一次の項がしたがう方程式である．変分方程式は元の方程式の性質をよく反映しており次のようなことがしたがう．

命題 1. 連続力学系 (4) が保存量（第一積分）$F(x)$ を持つとする．このとき (4) の $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式 (5) は時間依存する第一積分 $DF(\phi(t)) \cdot \xi$ を持つ．

一般に，時間依存する線形微分方程式の解析も難しいが，非線型方程式を解析するよりは容易であることが期待される．このような性質に着目し，さらに複素化して特異点解析の視点に立ったハミルトン系の可積分判定手法として，モノドロミー群を用いた Ziglin 解析や，その延長として微分 Galois 群を用いた Morales-Ramis 理論 [6]，これを一般の自律的力学系に拡張した Ayoul-Zung による結果 [2] などが知られている．

定理 2 (Morales-Ramis, Ayoul-Zung)**.** 連続力学系 (4) が有理型可積分であるならば，(4) の特解 $x = \phi(t)$ まわりの変分方程式 (5) の微分 Galois 群 $G = DGal(L/\mathcal{M}(\phi(t)))$ の単位成分は可換である．ここで L は (5) の Picard-Vessiot 拡大，$\mathcal{M}(\phi(t))$ は $\phi(t)$ が定める Riemann 面上の有理型関数体である．

微分ガロア群と Picard-Vessiot 拡大の定義は [6] を参照されたい．この定理により，可積分性の障害を微分ガロア群によって見つけられる．こうした可積分判定手法は強力であるものの，現在でも系の可積分性の分類は一般には分かっていない（部分的な結果として斉次ポテンシャル系の可積分性は分類されている）．

また，Morales-Ruiz [5] は，式 (1) が $\varepsilon > 0$ のときも (非自励的な) ハミルトン系となる場合に対して，ホモクリニック軌道まわりの変分方程式の微分ガロア群が可換になるならば，ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数 (2) が恒等的に零となることを示している．

3 第一積分，周期軌道，可換なベクトル場の保存

以上のようなことから，一般に解析的に解くことが不可能で，カオスのような複雑な挙動を示す可能性のある力学系に対して，周期軌道やホモクリニック軌道，第一積分や可換なベクトル場を求める，あるいはそれらの存在を示すことは力学系の研究において基本的かつ重要な問題の一つといえる．最近 (1) のような摂動系のように，周期軌道あるいはホモクリニック軌道と，第一積分あるいは可換なベクトル場をもつ微分方程式系が摂動を受けるとき，それらが微小変化を許して存在し続けるための必要条件，すなわち，それらが保存されないための十分条件が得られたので，以下ではその結果を紹介する．

$\mathscr{M}$ を向きづけられたパラコンパクトな C^3 級 n 次元実多様体とする．以下では，ベクトル場はすべて $\mathscr{M}$ 上で C^2 級，第一積分は C^3 級とする．また，パラメータ ε に依存する場合は，それらは ε について C^2 級とする．

X_ε を $\mathscr{M}$ 上のベクトル場で， $X_\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + O(\varepsilon^2)$ であるとする．

3.1 周期軌道

以下を仮定する．

(A1) 定数 $T > 0$ に対して X^0 は T-周期軌道 $\gamma(t)$ をもつ．
(A2) X^0 は定数でない第一積分 F をもつ．

$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, T]\}$ とする．また，次の積分を定義する：

$$\mathscr{I}_{F,\gamma} := \int_0^T dF(X^1)(\gamma(t))dt \tag{6}$$

定理 3. 条件 (A1) と (A2) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において第一積分 $F_\varepsilon = F + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\mathscr{I}_{F,\gamma} = 0$ が成立する．

定理 4. 条件 (A1) と (A2) を仮定する．X_ε が周期 $T_\varepsilon = T + O(\varepsilon)$ の周期軌道 γ_ε で $\gamma_0 = \gamma$ を満たすものをもつならば，$\mathscr{I}_{F,\gamma} = 0$ が成立する．ここで，$\varepsilon = 0$ のときの γ_ε を γ_0 とする．

定理 3 と定理 4 は，$\mathscr{I}_{F,\gamma} \neq 0$ であるならば摂動系において第一積分 F と周期軌道 $\gamma(t)$ が保存していないことを意味する．

条件 (A1) と (A2) に加えて，次を仮定する．

(A3) X^0 は可換なベクトル場 Z をもつ．

次の積分を定義する：

$$\mathscr{J}_{F,Z,\gamma} := \int_0^T dF([X^1, Z])(\gamma(t))dt$$

ここで，$[\cdot,\cdot]$ はリー括弧である．

定理 5. 条件 (A1)，(A2) と (A3) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において可換なベクトル場 $Z_\varepsilon = Z + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\mathscr{J}_{F,Z,\gamma} = 0$ が成立する．

3.2 周期軌道に対するホモクリニック軌道

条件 (A1) の代わりに次の条件を考える：

(A1)' X^0 は周期軌道 $\gamma(t)$ に対するホモクリニック軌道 $\gamma^{\mathrm{h}}(t)$ をもつ．

$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ および $\Gamma^{\mathrm{h}} := \Gamma \cup \{\gamma^h(t) : t \in \mathbb{R}\}$ とする．まず $\gamma(t)$ が平衡点 x_0 であるときには形式的な積分 $\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ を

$$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0} := \int_{-\infty}^{\infty} dF(X^1)(\gamma^{\mathrm{h}}(t))dt.$$

と定め，$\gamma(t)$ が平衡点でないときには，点 $x_0 \in \Gamma$ における周期軌道 $\gamma(t)$ に対するポアンカレ断面 Σ を固定し，形式的な積分 $\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ を

$$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0} := \lim_{k,l\to+\infty} \int_{T_{-k}^{x_0}}^{T_l^{x_0}} dF(X^1)(\gamma^{\mathrm{h}}(t))dt. \tag{7}$$

と定める．ただし，$\{T_i^{x_0}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ は，$\gamma^{\mathrm{h}}(t)$ が断面 Σ を交差する時刻列を表し，$T_i^{x_0} \to \pm\infty (i \to \pm\infty)$ である．

定理 6. 条件 (A1)' と (A2) を仮定する．X_ε が Γ の近傍において第一積分 $F_\varepsilon = F + O(\varepsilon)$ をもつならば，$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ は 0 に収束する．

定理 7. 条件 (A1)' と (A2) を仮定し，さらに X_ε が周期軌道 γ_ε で $\gamma_0 = \gamma$ を満たすものを持つと仮定する．このとき，X_ε が周期軌道 γ_ε に対するホモクリニック軌道 $\gamma_\varepsilon^{\mathrm{h}}$ で $\gamma_0^{\mathrm{h}} = \gamma^{\mathrm{h}}$ を満たすものをもつならば，$\tilde{\mathscr{I}}_{F,\gamma^{\mathrm{h}},x_0}$ は 0 に収束する．

4 メルニコフの方法との関係

再び，式 (1) を考える．条件 (M) の下で，$lT^\alpha = mT$ $(l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素$)$ ならば，$\varepsilon = 0$ のとき，任意の $\tau \in [0, T]$ に対して，$\hat{\gamma}_\tau^{m/l}(t) = (q^\alpha(t), t + \tau)$ は mT-周期軌道となる．定理 3 における積分 (6) は

$$\mathscr{I}_{H,\hat{\gamma}_\tau^{m/l}} = \int_0^{mT} DH(q^\alpha(t)) \cdot g(q^\alpha(t), t + \tau)dt$$

となり，式 (3) で定義された，周期軌道に対するメルニコフ関数 $M^{m/\ell}(\tau)$ に一致する．定理 3 より次を得る．

定理 8. 条件 (M) を仮定する．式 (1) が第一積分 $H_\varepsilon = H + O(\varepsilon)$ をもつならば，$M^{m/\ell}(\tau)$ は恒等的に零である．

また，条件 (M') の下で，$\varepsilon = 0$ のとき，任意の $\tau \in [0, T]$ に対して，$\hat{\gamma}_\tau(t) = (q^0(t), t + \tau)$ は周期軌道 $(x, \theta) = (p, t + \tau)$ に対するホモクリニック軌道となる．定理 6 における積分 (7) は

$$\mathscr{I}_{H,\hat{\gamma}_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} D_x H(q^0(t)) \cdot g(q^0(t), t + \tau) dt$$

となり，式 (2) で定義された，ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数 $M(\tau)$ に一致する．よって，定理 8 と同様に次が成り立つ．

定理 9. 条件 (M)' を仮定する．式 (1) が第一積分 $H_\varepsilon = H + O(\varepsilon)$ をもつならば，$M(\tau)$ は恒等的に零である．

参考文献

[1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[2] M. Ayoul and N.T. Zung, Galoisian Obstructions to Non-Hamiltonian Integrability, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2010, vol. 348, nos. 23-24, 1323–1326.

[3] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 196 (1998), 19–51.

[4] J. Guckenheimer and P.J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.

[5] J.J. Morales-Ruiz, A note on a connection between the Poincaré-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiot theory, *in Differential Galois theory, T. Crespo and Z. Hajto (eds.), Banach Center Publ. 58, Polish Acad. Sci. Inst. Math.*, 2002, pp. 165–175.

[6] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods, Appl. Anal.*, 8 (2001), 33–96.

[7] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).

[8] K. Yagasaki, The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, 56 (1996), no. 6, 1720–1765.

σ-finite invariant densities for essentially conservative Markov operators via the induced operators

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
豊川永喜 (Hisayoshi TOYOKAWA)

概要

力学系に対する不変測度の存在は，その力学系の統計的性質を調べる上で必要不可欠なものでありエルゴード理論の基本的な問題の一つである．本レポートでは，確率空間上の可測力学系に対して，その台がほとんど全ての軌道を吸引する不変確率測度または σ-有限不変測度が存在するための必要十分条件について新たに得られた結果，さらにランダム力学系に応用可能なマルコフ作用素に対して拡張した結果について報告する．

1 導入

(離散) 力学系とは集合 X(相空間) と写像 $T : X \to X$(変換) の組 (X, T) である．特に $(X, \mathscr{F}, m)$ が確率空間 (すなわち $\mathscr{F}$ は X の σ-代数，m は $(X, \mathscr{F})$ 上の確率測度) で変換 T が可測 (すなわち $A \in \mathscr{F}$ であれば $T^{-1}A \in \mathscr{F}$) であるとき力学系 $(X, \mathscr{F}, m, T)$ を可測力学系と呼ぶ．ここで観測可能性を意味する確率測度 m は多くの場合ルベーグ測度など自然に導入される測度が想定されており，基本測度と呼ばれる．力学系では初期点 $x_0 \in X$ を与えた時の軌道 $\{T^n x_0\}_{n\geq 0}$ (ただし $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$: n 回合成) の長期予測を基礎におく．しかし当然 X 上の全ての初期点から出発する軌道を全て観測することは多くの場合難しく，その代わりに初期分布をひとつ与えた時にその分布が力学系の時間発展によって漸近的にどのように遷移していくかを考察する．すなわちその力学系において多くの軌道はどこに高い頻度で滞在しているかを統計的に調べることが重要となる．まず初めに力学系の統計的性質に関する基本的な性質を述べるために必要な定義を与える．

定義 1.1. 力学系 $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ が**保測力学系**である (または μ が**不変測度**である) とは，任意の $A \in \mathscr{F}$ で $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ が成立することをいう．また，力学系 $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ が**エルゴード的**であるとは，$T^{-1}E = E$ なる集合 $E \in \mathscr{F}$ は必ず $\mu(E) = 0$ または $\mu(E^c) = 0$ を満たすことをいう．

注意 1.1. エルゴード性は力学系が次の意味で分解不可能であることを保証している．すなわち，ある可測集合 E があって $T^{-1}E = E$ が成立しているとする．この時，$T^{-1}E^c = E^c$ でもあるから相空間は $X = E \cup E^c$ とふたつの T-不変集合に分割されることを意味する．しかし系がエルゴード的である時 E または E^c は零集合であるから，このように相空間を互いに影響を与え合わない不変集合によって分解することは測度の意味で出来ないということである．

保測力学系の基本的な性質として，以下に Boltzmann のエルゴード仮説の数学的な定式化である

Birkhoff の個別エルゴード定理を述べる．

定理 1.1 (Birkhoff の個別エルゴード理論)**.** 保測力学系 $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ について，$\mu(X) = 1$ とする．この時任意の $f \in L^1(\mu)$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$$

がほとんど至る所の $x \in X$ について存在する．さらに系がエルゴード的である時，任意の $f \in L^1(\mu)$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \int_X f d\mu$$

がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する．□

上述のエルゴード定理は決定論的な力学系に対して大数の法則を保証する定理である．実際，定理内で $f = 1_A$(可測集合 A の定義関数) とすると，主張は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_{T^{-i}A}(x) = \mu(A)$$

となり，T によって A を訪れる頻度は A の起こる確率に一致することを意味する．

例 1.1 (2 進展開)**.** $X = [0, 1]$, $\mathscr{B}$ を X のボレル集合族，λ を X 上のルベーグ測度とする．この空間 $(X, \mathscr{B}, \lambda)$ 上で次の変換を考える：

$$Tx = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

この力学系は実数の 2 進展開の表現となっている．すなわち任意の $x \in X \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]}$ は一意の 2 進展開

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots \quad (x_i \text{は } 0 \text{ または } 1)$$

をもつが，今，$[0] \coloneqq [0, 1/2), [1] \coloneqq [1/2, 1]$ とおくと，$x \in X \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]}$ について $T^{n-1}x \in [0]$ であれば x の 2 進展開の n 桁目 x_n が 0，$T^{n-1}x \in [1]$ であれば x の 2 進展開の n 桁目 x_n が 1 となる．さらに簡単な計算から $(X, \mathscr{B}, \lambda, T)$ はエルゴード的な保測変換となることが確認できる．そして上述の Birkhoff の個別エルゴード定理の主張から，ルベーグ測度についてほとんど至る所の $x \in X$ は，2 進展開した時に出現する数が 0 である頻度も 1 である頻度もそれぞれ共に 1/2 に収束していくことがわかる．

不変測度が σ-有限な無限測度となる場合についても Hurewicz のエルゴード定理というものが知られており ([1] 参照)，それ故，力学系の統計的性質を調べる上で不変確率測度，または σ-有限な不変測度は不可欠となるものである．しかし一般に確率空間上の変換が与えられた時，不変測度が存在する保証はない．そのため基本測度に絶対連続な不変確率測度，σ-有限不変測度はいつ存在するかという問題は古くから研究されてきた ([2, 3, 5, 6, 8, 10] 参照)．ここで測度 μ が測度 m に絶対連続であるとは $m(A) = 0$ であれば必ず $\mu(A) = 0$ が成立することを指すが，この絶対連続性は基本測度 m で測って起こらない事象は不変測度 μ で測っても起こらないという自然な要請をしているものである．

本レポートの以下の節では基本測度に絶対連続な不変確率測度または σ-有限な不変測度が存在するための必要十分条件について述べる．

2　準備

この節では，力学系の時間発展を表す転送作用素，マルコフ作用素の定義と必要な道具となる誘導作用素およびジャンプ作用素について紹介する．

確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の可測変換 T が $m(A) = 0$ である可測集合 A に対し $m(T^{-1}A) = 0$，すなわち確率測度 $m \circ T^{-1}$ が基本測度 m に絶対連続であるとき，T を非特異 (non-singular) 変換と呼ぶ．非特異な変換について，次のようにして転送作用素 (transfer operator/Perron-Frobenius operator) を定義できる．

定義 2.1. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \to X$ に関する**転送作用素** P とは，

$$\int_X Pf \cdot g dm = \int_X f \cdot g \circ T dm \quad \left(f \in L^1,\ g \in L^\infty\right)$$

によって定まる L^1 上の有界線型作用素である．

非特異変換に関する転送作用素 P は力学系による分布の時間発展を表す作用素であり，$P^n f$ は与えられた初期分布 f の n-単位時間後の分布関数そのものである．

次に非特異変換に関する転送作用素の一般化であるマルコフ作用素の定義を与える．

定義 2.2. 線型作用素 $P : L^1 \to L^1$ が**マルコフ作用素**であるとは，P が非負なる $f \in L^1$ に対し $Pf \geq 0$ かつ $\|Pf\|_1 = \|f\|_1$ を満たすものである時にいう．

注意 2.1. 上述の非特異変換に関する転送作用素は特にマルコフ作用素である．さらに，確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上で遷移確率 $P(x, A)$ $(x \in X,\ A \in \mathscr{F})$ で定まるマルコフ過程が与えられた時，その遷移確率が $m(A) = 0$ であればほとんど全ての $x \in X$ で $P(x, A) = 0$ を満たすならば，ラドン-ニコディム微分

$$Pf(x) = \frac{d\int_X f(y)P(y, \cdot)dm(y)}{dm}(x) \quad \left(f \in L^1\right)$$

によってマルコフ作用素 P を定めることができる．よってマルコフ作用素を考えることによって決定論的な力学系のみならずマルコフ過程で表されるランダム力学系に対しても本レポートでの結果を応用することが可能となる．

注意 2.2. マルコフ作用素 $P : L^1 \to L^1$ が与えられた時，その共役作用素 P^* が L^∞ 空間上で以下の関係式で定まる:

$$\int_X Pf \cdot g dm = \int_X f \cdot P^* g dm \quad \left(f \in L^1,\ g \in L^\infty\right).$$

特にマルコフ作用素が非特異変換 T で定まる転送作用素である時，$P^* g = g \circ T$ $(g \in L^\infty)$ で与えられる．

注意 2.3. 簡単な計算から基本測度 m に絶対連続な不変確率測度 μ を求めることは，転送作用素 P について非負 L^1 関数なる不動点 $\frac{d\mu}{dm}$(すなわち $P\frac{d\mu}{dm} = \frac{d\mu}{dm}$ なる関数) を求めることと同値であることがわかる．この対応は絶対連続な σ-有限な不変測度についても成立する．すなわち P は定義域を

$\mathscr{M}_+^\sigma = \{f$: 非負可測関数で $\int_\cdot f dm$ が σ-有限測度 $\}$ に拡張することが可能であり，絶対連続な σ-有限不変測度の存在は，$\mathscr{M}_+^\sigma$ 内における P の不動点の存在と等価である．

次に，σ-有限不変測度を構成する際によく使われる誘導変換 (induced transformation)，ジャンプ変換 (jump transformation)，さらにその一般化である誘導作用素，ジャンプ作用素について紹介する．誘導作用素に関する詳細は [4]，ジャンプ変換に関する詳細は [10] を参照されたい．

定義 2.3. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \to X$ について，ある可測集合 E が存在し $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}E = X \pmod m$ が成立する時，E への**誘導変換** T_E は次のようしてほとんど至る所で定義される:

$$T_E x = T^{\tau_E(x)}x \quad (\text{ただし } \tau_E(x) = \min\{n \geq 1 : T^n x \in E\}).$$

注意 2.4. 誘導変換は，定義内の変換を E へ制限したもの $T_E|_E$ で定義される (そのため仮定も弱く $E \subset \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}E$ としたもの) ことが多いが本レポートでは不変測度に関する台の性質を導出する観点から X のほとんど至る所で定義されているものとする．

定義 2.4. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \to L^1$ についてある可測集合 E が存在し $\lim_{n\to\infty}(P^* I_{E^c})1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する時，E への**誘導作用素** P_E は次のようにして L^1 上で定義される:

$$P_E = I_E P \sum_{n=0}^{\infty} (I_{E^c} P)^n \quad (\text{ただし } I_E f = f \cdot 1_E : \text{制限作用素}).$$

注意 2.5. 誘導作用素は L^1 空間上のマルコフ作用素である．さらに誘導変換 T_E に関する転送作用素は誘導作用素 P_E と一致している:

$$\int_X f \cdot g \circ T_E dm = \int_X P_E f \cdot g dm \quad \left(f \in L^1,\ g \in L^\infty\right).$$

すなわち誘導作用素は誘導変換の一般化である．

定義 2.5. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の非特異変換 $T : X \to X$ について，ある可測集合 E が存在し $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}E = X \pmod m$ が成立する時，E に関する**ジャンプ変換** T^* は次のようしてほとんど至る所で定義される:

$$T^* x = T^{e(x)+1}x \quad (\text{ただし } e(x) = \min\{n \geq 0 : T^n x \in E\}).$$

定義 2.6. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \to L^1$ についてある可測集合 E が存在し $\lim_{n\to\infty}(P^* I_{E^c})1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立する時，E に関する**ジャンプ作用素** $\hat{P}$ は次のようにして L^1 上で定義される:

$$\hat{P} = P I_E \sum_{n=0}^{\infty} (P I_{E^c})^n.$$

注意 2.6. ジャンプ作用素は L^1 空間上のマルコフ作用素である．さらにジャンプ変換 T^* に関する転送作用素はジャンプ作用素 $\hat{P}$ と一致している:

$$\int_X f \cdot g \circ T^* dm = \int_X \hat{P} f \cdot g dm \quad \left(f \in L^1,\ g \in L^\infty\right).$$

すなわちジャンプ作用素はジャンプ変換の一般化である．

3　主結果

この節では確率空間上のマルコフ作用素に対する σ-有限不変密度関数，または非特異変換に対する絶対連続な σ-有限不変測度の存在のための必要十分条件に関して得られた結果をそれぞれ述べる．まず初めにマルコフ作用素に対する不変確率密度関数の存在に関する結果を述べる．

定義 3.1. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \to L^1$ が**弱概周期的** (weakly almost periodic) であるとは，任意の $f \in L^1$ に関して $\{P^n f\}_{n\geq 0}$ が弱位相で相対コンパクト (つまり任意の部分列 $\{n_k\}_k$ に対しさらなる部分列 $\{n_{k_i}\}_i$ が取れて，任意の $g \in L^\infty$ に対し $\lim_{i\to\infty} \int_X P^{n_{k_i}} \cdot g dm$ が L^1 内に収束先を持つということ) である時にいう．また，マルコフ作用素 P が**平均エルゴード的** (mean ergodic) であるとは，任意の $f \in L^1$ に関して $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P^i f$ が L^1-ノルムで収束することを言う．

定理 3.1 (T1)**.** 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1(m) \to L^1(m)$ について以下は同値である：

1 $Ph = h$ なる $h \in L^1_+$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} P^{*n} 1_{[h>0]}(x) = 1$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立；
2 $\{P^n 1_X\}_{n\geq 0}$ が弱位相で相対コンパクト；
3 P が平均エルゴード的；
4 P が弱概周期的．□

特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時，上記の定理は次のように書き換えられる．

系 3.2 (T2)**.** 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の非特異な変換 $T : X \to X$ について以下は同値である：

1 絶対連続な不変確率測度 μ が存在し $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}[\frac{d\mu}{dm} > 0] = X \mod m$ を満たす；
2 任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ が存在し，$m(A) < \delta$ ならば $\sup_{n\geq 0} m(T^{-n}A) < \varepsilon$ を満たす；
3 各 $E \in \mathscr{F}$ について，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m \circ T^{-i}(E)$ が存在．□

注意 3.1. 系 3.2 内の条件 1 は絶対連続な不変確率測度の台がほとんど全ての T による軌道を最終的に吸引することを主張している．この条件は力学系 $(X, \mathscr{F}, m, T)$ がエルゴード的である時は必ず満たされる条件である．

次に定理を述べるために必要な保存領域 (conservative part) と散逸領域 (dissipative part) の定義を与える．

定義 3.2. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1 \to L^1$ に対し，その**保存領域** $\mathfrak{C}$ は

$$\mathfrak{C} = \left\{ x \in X : \sum_{n=0}^{\infty} P^n 1_X(x) = \infty \right\}$$

で与えられ，**散逸領域** $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D} = X \setminus \mathfrak{C}$ で与えられる．

注意 3.2. 特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時，その散逸領域 $\mathfrak{D}$ は $T^{-i}W \cap T^{-j}W = \emptyset\ (i \neq j)$ となるような可測集合 W(このような W を遊走集合 (wandering set) と呼ぶ)たちの和集合で与えられることが知られている．

定義 3.3. 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素に対する保存領域 $\mathfrak{C}$，散逸領域 $\mathfrak{D}$ について，$X = \mathfrak{C}$ の時その系を**保存的** (conservative)，$X = \mathfrak{D}$ の時その系を**散逸的** (totally dissipative) とそれぞれ呼ぶ．また $P^*1_{\mathfrak{C}} \geq 1_{\mathfrak{C}}$ という性質から**本質的に保存的** (essentially conservative) という定義を，m に関してほとんど至る所の $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} P^{*n}1_{\mathfrak{C}}(x) = 1$ が成立している時に与える．

注意 3.3. 非特異変換 T を考えた時，全体空間 X は

$$X = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}\mathfrak{C} \cup \bigcap_{n\geq 0} T^{-n}\mathfrak{D}$$

と分割されるが，$X = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}\mathfrak{C}$ であることが本質的に保存的であることと同値である．

注意 3.4. マルコフ作用素に非負なる不動点 $h \in L^1$ が存在する場合，h の台について $[h > 0] \subset \mathfrak{C}$ が成立する．よって定理 3.1，系 3.2 の条件が成立する時，系は本質的に保存的である．

最後に主結果であるマルコフ作用素に対する σ-有限不変密度関数の存在に関する結果を述べる．

定理 3.3 (T3)**.** 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上のマルコフ作用素 $P : L^1(m) \to L^1(m)$ について以下は同値である：

1. $Ph = h$ なる $h \in \mathscr{M}_+^\sigma$ と可測集合 $A \subset [h > 0] \cap \mathfrak{C}$ が存在し，$\int_A h dm < \infty$ を満たし更に，$\lim_{n\to\infty} (P^* I_{A^c})^n 1_X(x) = 0$ がほとんど至る所の $x \in X$ で成立；
2. ある可測集合 E 上の誘導作用素 P_E に対し $P_E h_0 = h_0$ なる $h_1 \in L^1_+$ が存在し，$[h_0 > 0] = E$ を満たす；
3. ある可測集合 E に関するジャンプ作用素 $\hat{P}$ が弱概周期的．□

注意 3.5. 定理 3.3 の条件 1，2 が成立する時，系は本質的に保存的である．

特にマルコフ作用素が非特異変換に関する転送作用素である時，上記の定理は以下のようにかける．

系 3.4 (T4)**.** 確率空間 $(X, \mathscr{F}, m)$ 上の非特異な変換 $T : X \to X$ について以下は同値である：

1. 絶対連続な σ-有限不変測度 μ と可測集合 $A \subset [\frac{d\mu}{dm} > 0] \cap \mathfrak{C}$ が存在し，$\mu(A) < \infty$ を満たし更に，$\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}A = X \mod m$ を満たす；
2. ある可測集合 E 上の誘導変換 T_E に対し $m|_E$ に同値な不変確率測度が存在；
3. ある可測集合 E に関するジャンプ変換 T^* が絶対連続な不変確率測度 ν を持ち，$\bigcup_{n\geq 0} T^{*-n}[\frac{d\nu}{dm} > 0] = X \mod m$ が成立．□

注意 3.6. 定理 3.3 および系 3.4 内の条件 3 はジャンプ作用素，ジャンプ変換に対し定理 3.1，系 3.2 内の同値条件をそれぞれ満たすことと対応している．

定理 3.3，系 3.4 は本質的に保存的である系の絶対連続な σ-有限不変測度の存在に関する主張であるが，今後の展望として，散逸領域が残り続ける系 (すなわち $\bigcap_{n\geq 0} T^{-n}\mathfrak{D}$ が正の測度で存在する系) について，絶対連続な σ-有限不変 (無限) 測度が存在するための必要十分条件について考察していく．

4 具体例

この節では，得られた結果を応用することが可能なランダム力学系の具体例を与える．

例 4.1. 単位区間のルベーグ空間 $([0,1],\mathscr{B},\lambda)$ 上の非特異変換 $T:[0,1]\to[0,1]$ を任意に与えた時，この力学系に加法的ノイズを与えたランダム力学系 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega,\mathscr{A},\nu)$ 上の確率変数として次のように考える：

$$X_{n+1}(\omega) = TX_n(\omega) + \xi_n(\omega) \mod 1$$

($\omega\in\Omega,\ n\geq 0$)．ただし，$X_0,\xi_0,\xi_1,\dots$ は独立な $[0,1]$ 値確率変数で 初期分布 X_0 は確率密度関数 f_0 に，ノイズの列 $\xi_0,\xi_1,\dots$ は同じ確率密度関数 g にそれぞれ従うとする．この時，

$$\nu\left(\{\omega\in\Omega : X_n(\omega)\in A\}\right) = \int_A P^n f_0 d\lambda \quad (A\in\mathscr{A})$$

の意味で時間発展を表すマルコフ作用素は次のように与えられる：

$$Pf(x) = \int_{[0,1]} f(y)\left(\sum_{i=0}^{1} g(x-Ty+i)\right)d\lambda(y).$$

[9] の結果から，このマルコフ作用素 P は弱概周期的であることがわかる．よって定理 3.1 からこのマルコフ作用素 P は不変確率密度関数 h を持ち，h の台は $\lim_{n\to\infty} P^{*n}1_{[h>0]} = 1$ を満たす．

例 4.2. 単位区間のルベーグ空間 $([0,1],\mathscr{B},\lambda)$ 上のふたつの非特異変換 $T_1,T_2:[0,1]\to[0,1]$ を次で与える：

$$T_1x = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & x\in[0,1/2) \\ -2x+2 & x\in[1/2,1], \end{cases}$$

$$T_2x = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & x\in[0,1/2) \\ 2x-1 & x\in[1/2,1]. \end{cases}$$

このふたつの変換から次のマルコフ過程の遷移確率を考える：

$$P(x,A) = p1_{T_1^{-1}A}(x) + (1-p)1_{T_2^{-1}A}(x) \quad (x\in[0,1],\ A\in\mathscr{B}).$$

ただし $0\leq p\leq 1$ はパラメータであり，$p=0$ または 1 の時は決定論的な力学系となり λ に同値な σ-有限不変無限測度をそれぞれ持つことが知られている ([10] 参照)．このランダム力学系は，確率 p で T_1 を，確率 $1-p$ で T_2 をそれぞれ選択し反復していく系である．[7] の結果からこのランダム力学系を表すマルコフ作用素 P について，集合 $[1/2,1]$ に関するジャンプ作用素が弱概周期的となることがわかる．すなわち定理 3.3 の具体例となることがわかる．すなわち σ-有限不変密度関数 h を持ち集合 $A=[1/2,1]\subset[h>0]\cap\mathfrak{C}$ が $\lim_{n\to\infty} P^{*n}1_{A^c} = 0$ を満たす．

参考文献

[1] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, American Mathematical Society (1997).

[2] David W. Dean, and L. Sucheston, *On Invariant Measures for Operators*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **6** (1966): 1-9.

[3] Eduard Yu. Emel'yanov, *Invariant Densities and Mean Ergodicity of Markov Operators*, Israel Journal of Mathematics, **136** (2003): 373-379.

[4] S. R. Foguel, *The Ergodic Theory of Markov Processes*, Van Nostrand Mathematical Studies 21 (1969).

[5] A. Hajian, and S. Kakutani, *Weakly wandering sets and invariant measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964): 136-151.

[6] P. R. Halmos, *Invariant measures*, Annals of Math. **48** (1947): 735-754.

[7] T. Inoue, *Invariant measures for position dependent random maps with continuous random parameters*, Studia Math. **208** (2012): 11-29.

[8] Y. Ito, *Invariant Measures for Markov Processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964): 152-184.

[9] Y. Iwata, and T. Ogihara, *Random perturbations of non-singular transformation on [0,1]*, Hokkaido Math. Jornal **42** (2013): 269-291.

[10] M. Thaler, *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel J. Math. **37** No.4 (1980): 303-314.

[11] H. Toyokawa, *Asymptotic behavior of the iterates of weakly almost periodic Markov operators and invariant densities*, preprint.

調和解析的視点による有限群の部分集合による近似

Approximation of finite groups by their subsets from the viewpoint of Harmonic analysis

広島大学大学院 理学研究科 数学専攻
梶浦 大起 (Hiroki KAJIURA)

概要

濃度が大きな有限群 G 上の複素数値函数 f の平均 $I_G(f) := (1/\#G)\sum_{x\in G} f(x)$ は数値計算する場合に時間がかかる。そこで，方針として G の濃度が小さな “よい部分集合”X による平均 $I_X(f) := (1/\#X)\sum_{x\in X} f(x)$ で近似すること，つまり，様々な函数 f の近似誤差 $\mathrm{Err}_X(f) := |I_G(f) - I_X(f)|$ が小さくなる X で計算をしたい。我々は近似誤差を f の尺度 $V_G(f)$ と X の尺度 $\mathfrak{d}(X)$ を定義し $\mathrm{Err}_X(f) \leq V_G(f)\mathfrak{d}(X)$ と上から抑えられることを示した。本講演では，① $\mathfrak{d}(X)$ と G の difference set との関係や②不等式の背景を紹介する予定である。

0 記号のお約束

G を有限群，$X \subset G$（構造には頓着しないことに注意），$f \in \mathbb{C}^G$（すなわち，G 上の複素数値函数），χ_ρ を（通常）表現 ρ に対応する指標，$\widehat{G}$ を G の既約表現の同型類全体，1_G を（既約な）自明表現とする。

1 本講演の問題と予備知識

最初に，標語的な形で本講演で紹介する問題とその（部分的な）答えを述べる:

本講演の問題と答え

問題 G **上の平均**を X **上の平均**で近似するとき, G の近似しやすさを決定する G の性質は何か？

答え X の近似の上手さに関する尺度をひとつ定義し，次のような性質を満たすことを示した:

共役類が多い G **は近似しやすい。**

もう少し詳細に問題を述べる。G **上の平均** $I_G(f)$ と X **上の平均** $I_X(f)$ は次で定義される:

$$I_G(f) := \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G} f(x), \quad I_X(f) := \frac{1}{\#X}\sum_{x\in X} f(x).$$

このとき，$I_G(f)$ を $I_X(f)$ で近似するときの誤差，すなわち

$$\mathrm{Error}_X(f) := |I_G(f) - I_X(f)|$$

がより小さくなるのはどのような群 G か？ という問題である。

$\mathrm{Error}_X(f)$ は f と X どちらにも依存するため，誤差にどれくらい X の近似の上手さが寄与するかを考えることが難しい。そこで，少々技巧的であるが，Peter–Weyl の定理による分解 $f = \sum_{\rho\in\widehat{G}} f_\rho$ を考え，自明表現に対応する部分[*1]以外の L^2-ノルムの和 $\|f\|_{\widehat{G}}$ を f の尺度とする[*2]。

このとき，次の定理から我々は X の近似の上手さに関する尺度をひとつ定義することができる:

定理 1（有限群上の Koksma-Hlawka 型不等式） $f \in \mathbb{C}^G$ と $X \subset G$ について，次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{Error}_X(f) \le \|f\|_{\widehat{G}}\mathfrak{d}(X).$$

ここで，$\|f\|_{\widehat{G}}$ と $\mathfrak{d}(X)$ は次で定義される:

$$\|f\|_{\widehat{G}} := \sum_{\substack{\rho\in\widehat{G}\\ \rho\neq 1_G}} \dim\rho\|f_\rho\|, \quad \mathfrak{d}(X) := \max_{\substack{\rho\in\widehat{G}\\ \rho\neq 1_G}} \sqrt{\frac{1/\dim\rho}{\#X^2}\sum_{x,y\in X}\chi_\rho(xy^{-1})}.$$

また，f_ρ は f の Peter-Weyl の定理による分解 $f = \sum_{\rho\in\widehat{G}} f_\rho$ とする。

この結果から，本講演では**「G を上手く近似できる X」とは「同濃度の部分集合の中で $\mathfrak{d}(X)$ が最小になるもの」である**と考え，その尺度を使って G を上手く近似できる X を調べる。

2 近似しやすい G の性質について

$\mathfrak{d}(X)$ の下限について次のような定理を示した:

定理 2 $X \subset G$ について次の不等式が成り立つ:

$$\mathfrak{d}(X) \ge \sqrt{\frac{1/\#X - 1/\#G}{\#G - 1}}.$$

また，X **が difference set**[*3]ならば等号が成立する（特に，G が可換群ならその時に限る[*4]）。

この不等式から，「有限群 G そのものに関する G の近似しやすさ」みたいなものを理解する尺度が考えられる。具体的にいうと，G の共役類が多ければ多いほど $\mathfrak{d}(X)$ の下限が小さくなり，$\mathfrak{d}(X)$ がより小さい X（つまり，上手に近似できる X）が存在する可能性があるということがわかる。実験的にも $\mathfrak{S}_3$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の方がより近似しやすい（つまり，同濃度では $\mathfrak{d}(X)$ が小さくなることが多い）ことを示した。

3 本講演の背景

ここでは，Koksma-Hlawka 型の不等式がどこからでてきたのか？ という背景について述べる。詳細な証明などは [1] や [2] などを参照されたい。まず最初に，区間 $[0,1)^s$ 上の “よい” 実函数空間 H

[*1] すなわち，定数函数部分であり，$I_G(f)$ と一致する。

[*2] これは f の「変動」のようなものがどれくらい大きいかということを表すような尺度であると思える。

[*3] X が difference set であるとは，任意の単位元以外の G の元 a に対して，$\#\{(x,y)\in X\times X \mid a = xy^{-1}\}$ が一定となることである。

[*4] 非可換群であれば G が difference set でなく最良の場合が見つかっている。

(少なくとも，可積分性は要求されているものとする）における Monte Carlo 積分を以下で定義する:

定義 3（Monte Carlo 積分） $f \in H$ について，f の Monte Carlo 積分 $I(f)$ を次で定義する:

$$I_X(f) := \sum_{x \in X} f(x)$$

ここで，X は $[0,1)^s$ 上で “ランダムに選んだ” 点集合である。

Monte Carlo 積分は金融工学などにおけるシミュレーション等で様々な工学領域に応用されている。MonteCarlo 積分の収束の速さについて，次のような定理が一般に知られている:

事実 4（Monte Carlo 積分の収束の速さ [2]） $\left| \int_{[0,1)^2} f(x)dx - I_X(f) \right| = O(\#X^{-1/2})$

つまり十分な精度を出したいときに点集合を “ランダムに選んだ” 場合，真の積分値との誤差を 1 桁減らすためには 100 倍の点集合が必要である。これは実用上大きな痛手となりやすい。そのため，“ランダムに選ぶ” のではなく，都合が良く積分できる点集合を決定論的に選ぶ。そうすることで，より高速な収束を実現することを目標とする **quasi-Monte Carlo 積分（QMC）**という分野がある。

最後に，この分野で知られている古典的な定理として Koksma-Hlawka の不等式を紹介し，ひとつふたつの余談を述べておわる。:

事実 5（Koksma-Hlawka の不等式 [1]） H を区間 $[0,1)$ 上の “全変動有界” な関数のなす空間とする。また，$X \subset [0,1)$ を有限部分集合としたとき，任意の $f \in H$ に対して，

$$\left| \int_{[0,1)^2} f(x)dx - I_X \right| \leq V(f)D^\star(X)$$

ここで，$V(f)$ は f の “全変動”，$D^\star(X)$ は star-Discrepancy と呼ばれる X に関する尺度である。

この定理に関して，充分に濃度が大きな X について，$D^\star(X) = O((\log \#X)^s/\#X)$ を満たす点列（すなわち，“ランダムに選ぶ” より効率の良い点列）の構成法などが示されている [1]。さらに H を再生核 Hilbert 空間などに限定することで，再生核を用いてより精密な Koksma-Hlawka 型の不等式を示すことなども広く研究されている [2]。

参考文献

[1] H. Niederreiter, *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[2] J. Dick and F. Pillichshammer, *Digital Nets and Sequences: Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press,2010.

フラクタル次元を用いた素数の無限性の証明

齋藤 耕太 (Kota Saito)

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
博士前期課程 2 年

m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

概 要

本講演では素数の無限性をフラクタル次元の一種である upper box 次元を用いて証明する。

論文 [S] に基づき，素数の無限性をフラクタル次元を用いて証明することを目標とする。自分自身と 1 のみを約数にもつ 2 以上の自然数を素数という。例えば，

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \cdots$$

が素数の例としてあげられる。最も古い素数についての結果は，約 2300 年前の紀元前 300 年，Euclid が素数の無限性と素因数分解の一意性を証明したものである。 ここでは次の結果についてフラクタル次元を用いた別証明を与える。

定理 1 (Euclid [H, Book IX Proposition 20])**.** 素数は無限個存在する。

彼のオリジナルの証明について述べよう。まず，素数が有限個と仮定し，それらの積に 1 を足したものを P とおく。自然数 P は 2 以上で自分自身と 1 でしか割り切れない。よって，素数の定義から P は素数ということが帰結されるが，P の定義から P はどの素数とも等しくない。これは矛盾である。

この証明は素数の無限性の代数的な証明の 1 つである。近年，非常に多くの素数の無限性の証明が知られている。[M] によると，驚くことにその数は少なくとも 183 通りある。ここでは新しい素数の無限性の証明を与える。手法は主に，2 以上の任意の自然数は素数の積でかけることと (一意性は必要ない)，フラクタル次元の一種の upper box 次元を用いる。その手法は Euler の素数の逆数和発散のアイデアに近い。彼は $\sum_{p:\text{ prime}} 1/p = \infty$ と $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/n = \infty$ が同値であることを証明した [E, pp. 172-174] ([D, pp. 1-2])。このことから，素数が有限個と仮定すると，自然数のサイズが小さいことが導かれる。これと同様にして，素数が有限個と仮定すると，自然数の逆数の upper box 次元が 0 となってしまい，矛盾する。

では，upper box 次元を定義しよう。集合 $F \subset \mathbb{R}$ を有界とし，δ を正の数とする。 集合族 $\{U_j\}_{j=1}^N$ が $F \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_j$ と $d(U_j) \leq \delta$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ を満たすとき， $\{U_j\}_{j=1}^N$ を F の (有限)δ-被覆という。ただし， 任意の有界集合 U に対して，$d(U) = \sup_{x,y \in U} |x - y|$ と定義し，$d(U)$ を U の直径という。 このとき，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to +0} \frac{\log N(F, \delta)}{-\log \delta}$$

を F の upper box 次元という。ただし，$N(F, \delta)$ は F の δ-被覆の濃度のうち最小のものとする。すなわち，

$$N(F, \delta) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \{U_j\}_{j=1}^N \text{ が } F \text{ の } \delta\text{-被覆} \right\}$$

と定義する。より詳しい upper box 次元についての性質は [F, R] を見よ。

定理 1 を証明するため，次の補題を証明する。

補題 2. 集合 $C, D \subset \mathbb{R}$ を有界とする。このとき，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} (CD) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} C + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} D$$

が成り立つ。ただし，$CD = \{cd \in \mathbb{R} : c \in C,\ d \in D\}$ と定める。

数学的帰納法と補題 2 を用いることで，任意の有界集合 $C_1, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} (C_1 \cdots C_n) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} C_1 + \cdots + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} C_n, \tag{1}$$

がなりたつ。この式 (1) を用いて素数の無限性を証明する。

補題 2 を仮定したときの定理 1 の証明. まず，$1/\mathbb{N} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ とおく。 [F, Example 3.5] により，$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} (1/\mathbb{N}) = 1/2$ が成り立つが，証明では片側の不等式だけ示せれば十分であるので，ここでは

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} (1/\mathbb{N}) \geq 1/2 \tag{2}$$

を示そう。実数 $0 < \delta < 1/2$ を固定し， 自然数 $k \geq 2$ を $1/(k(k+1)) \leq \delta < 1/((k-1)k)$. を満たすものとする。集合 $U \subset \mathbb{R}$ を $d(U) \leq \delta$ を満たすものとしたとき， U は集合 $\{1, 1/2, \ldots, 1/k\}$ と高々1 点交わりをもつ。この事実は， 仮に $1/s,\ 1/t \in U$ がある $1 \leq s < t \leq k$ に対して成り立ったとき，

$$d(U) \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \geq \frac{1}{st} \geq \frac{1}{k(k-1)} > \delta$$

が成り立ってしまい条件 $d(U) \leq \delta$ と矛盾することから従う。 したがって， $1/\mathbb{N}$ の任意の δ-被覆 $\{U_j\}_{j=1}^N$ を取ったとき， $N \geq k$, が成り立つ。よって，

$$N(1/\mathbb{N}, \delta) \geq k \geq \frac{(k(k+1))^{1/2}}{2} \geq \frac{\delta^{-1/2}}{2}$$

を得る。ゆえに，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,(1/\mathbb{N}) = \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log N(1/\mathbb{N},\delta)}{-\log\delta} \geq \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log(\delta^{-1/2}/2)}{-\log\delta} = 1/2$$

が従う。次に，任意の素数 p に対して $A(p) = \{1/p^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ とおき，$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,A(p) = 0$ が成り立つことを示す。任意の $0 < \delta < 1/2$ に対して，

$$A(p) \subseteq [-\delta/2, \delta/2] \cup \bigcup_{0\leq k\leq \frac{\log(2/\delta)}{\log p}} [-\delta/2 + 1/p^k, \delta/2 + 1/p^k].$$

が成り立つ。よって，$N\big(A(p),\delta\big) \leq 2 + \frac{\log(2/\delta)}{\log p}$, が成り立ち，

$$0 \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,A(p) = \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log N\big(A(p),\delta\big)}{-\log\delta} \leq \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log\left(2 + \frac{\log(2/\delta)}{\log p}\right)}{\log(1/\delta)} = 0. \tag{3}$$

が従う。

では，素数が有限個と仮定して，矛盾を導こう。有限個の素数を $p_1, \ldots, p_n$ と書く。このとき，2 以上の自然数は素数の積で書けることから，　$1/\mathbb{N} = A(p_1)\cdots A(p_n)$ が成り立つ。したがって，式 (1), (2), (3) により，

$$1/2 \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,1/\mathbb{N} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,(A(p_1)\cdots A(p_n)) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,A(p_1) + \cdots + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,A(p_n) = 0$$

が成り立つ。これは矛盾である。 □

補題 2 の証明. 実数 $0 < \delta < 1/2$ を固定し，$C \subseteq [-R, R]$ と $D \subseteq [-R, R]$ を満たす十分大きい実数 R をとる。集合族 $\{U_i\}_{i=1}^{N_C}$ と $\{V_j\}_{j=1}^{N_D}$ を C と D をそれぞれ $\delta/(2R)$-被覆とする。ただし，$N_C = N(C, \delta/(2R))$ とおき，$N_D = N(D, \delta/(2R))$ とおく。このとき，$\{U_iV_j\}_{1\leq i\leq N_C, 1\leq j\leq N_D}$ が CD の δ-被覆になることを証明する。自然数 $1 \leq i \leq N_C$ と $1 \leq j \leq N_D$ を固定する。このとき，任意の $c_1, c_2 \in U_i$ と任意の $d_1, d_2 \in V_j$ に対して，

$$|c_1\cdot d_1 - c_2\cdot d_2| \leq |c_1||d_1 - d_2| + |d_2||c_1 - c_2| \leq R\cdot\delta/(2R) + R\cdot\delta/(2R) = \delta \tag{4}$$

が成り立つ。ゆえに，U_iV_j の直径は高々 δ である。さらに，

$$CD \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq N_C, 1\leq j\leq N_D} U_iV_j$$

は明らかに成り立つ。よって，

$$N(CD,\delta) \leq N_C\cdot N_D = N(C,\delta/(2R))\cdot N(D,\delta/(2R))$$

を得る。以上から，

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,(CD) &= \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log N(CD,\delta)}{-\log\delta}\\ &\leq \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log N(C,\delta/(2R))}{-\log(\delta/2R) - \log(2R)} + \limsup_{\delta\to+0}\frac{\log N(D,\delta/(2R))}{-\log(\delta/2R) - \log(2R)}\\ &= \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,C + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,D\end{aligned}$$

が従う。 □

上の証明はフラクタル幾何学の専門的な知識を特に必要としないが，upper box 次元の典型的な性質を使うことでよりシンプルに証明することができる。

補題 2 の別証明. 写像 $\phi : C \times D \to \mathbb{R}$ を $\phi(c,d) = cd$ と定める。ただし，$C \times D = \{(c,d) \in \mathbb{R}^2 : c \in C, d \in D\}$ である。写像 ϕ が Lipschitz 連続であることを証明する。まず，$C \subseteq [-R,R]$ と $D \subseteq [-R,R]$ を満たす実数 R をとる。このとき，三角不等式から

$$|\phi(c_1,d_1) - \phi(c_2,d_2)| = |c_1||d_1 - d_2| + |d_2||c_1 - c_2| \leq 2R\|(c_1,d_1) - (c_2,d_2)\|$$

が任意の $c_1, c_2 \in C$ と任意の $d_1, d_2 \in D$ に対して成り立つ。ただし，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^2$ 上の Euclid ノルムとする。 したがって， ϕ は Lipschitz 連続である。よって，[F, Proposition 2.5 and Product formula 7.5] により，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,(CD) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,\phi(C \times D) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,(C \times D) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,C + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,D$$

が成り立つ。

□

参考文献

[D] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd edn., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74 (Springer, 1980) revised by H. L. Montgomery.

[E] L. Euler, Variae observationes circa series infinitas, *Comment. Acad. Sci. Petropol.*, **9** (1744), 160?188. [In Opera omnia I.14, 216?244, Teubner, Lipsiae et Berolini, 1924.]

[F] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, (2014).

[H] T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclids Elements, vol. 2, University Press, Cambridge, 1908; 2nd edition. reprinted by Dover, New York, (1956).

[M] R. Meštrović, Euclid's theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proofs (300 B.C.-2017) and another new proof, *preprint*, (2018), https://arxiv.org/abs/1202.3670.

[R] J. C. Robinsion. *Dimensions, Embeddings, and Attractors,* Cambridge University Press, (2011).

[S] K. Saito, A fractal proof of the infinitude of primes, *(preprint)*, available at https://arxiv.org/abs/1810.05955.

量子 XXZ 鎖に対する厳密な Bethe 量子数と Bethe 根

東京大学大学院 総合文化研究科 広域科学専攻　相関基礎科学系
井元隆史 (Takashi Imoto)

概要

Spin-1/2 の XXX 鎖及び XXZ 鎖の Hamiltonian の固有ベクトルを構成する方法として Bethe 仮説が知られている [1]。この Bethe 仮説を用いて固有ベクトルを求めるには Bethe 仮説方程式を解くことが必要であり、現在これは近似的にしか解かれていない。今回我々は two-down-spin のセクターに限定した場合を考える。XXX 鎖については Bethe 仮説方程式の対数関数の分岐を指定する Bethe 量子数を用いた Deguchi-Giri の手法 (文献 [2]) が知られており、今回はこの手法を用いて XXZ 鎖の厳密な Bethe 量子数と Bethe 根について議論する。本研究は佐藤純氏、出口哲生氏との共同研究である [3]。

1　はじめに

一般に量子多体系を数学的に厳密に計算することは非常に困難である。数値的にも厳密対角化といった直接的な手法を用いた場合はサイト数を増やすことによって指数関数的に計算量が増えてしまうため、本来の物理的な興味の対象である大きな系の解析を行うことは困難である。

そのなかで、すべての固有値、固有ベクトルを計算できる量子系の模型として一次元量子可積分系がある。その代表的な解析手法が Bethe 仮説がある。Bethe 仮説は 1931 年に Bethe よって XXX 鎖に対して導入されたもので、模型に対する Bethe 仮説方程式と呼ばれる方程式の解を求めることにより、もともとの模型のエネルギー固有値と固有ベクトルが求まるというものである [1]。ただし、一般に Bethe 仮説方程式を解くことは非常に困難であり、2018 年現在でも真には解けてはいない。一方で 1971 年に高橋が string 仮説と呼ばれる仮定を Bethe 仮説方程式の解に適応することによって自由エネルギーを計算した [4, 5]。ただし、この XXX 鎖および、massless-XXZ 鎖においては string 仮説が破れることが知られている。

Bethe 仮説方程式を数値的の解くための方法として、Bethe 仮説方程式の両辺を対数を取るやり方がある。このとき、対数関数の分岐を指定するものを Bethe 量子数と呼ぶ。再帰的に Bethe 仮説方程式の解を求めるためには各解の形ごとの個数が必要となる。XXX 鎖の two-down-spin sector の Bethe 仮説方程式に対しては出口-Giri によって厳密な Bethe 量子数、各解の形ごとの個数、完全性についての議論がある [2]。

本講演および本稿では Bethe 量子数を用いて massive-XXZ 鎖における、two-down-spin sector の Bethe 仮説方程式の解について議論する。

2　XXZ Heisenberg 鎖と Bethe 仮説方程式

2.1　XXZ Heisenberg 鎖

本稿で扱う XXZ 鎖とその Bethe 仮説方程式について解説する。つぎに、周期境界条件の spin-1/2 の反強磁性 XXZ 鎖の Hamiltonian$H_N^{XXZ} : \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2 \to \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ を次のように定義する。

$$H_N^{XXZ} := \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sigma_k^X\sigma_{k+1}^X + \sigma_k^Y\sigma_{k+1}^Y + \Delta(\sigma_k^Z\sigma_{k+1}^Z - \mathbb{1}_N)\Big). \tag{1}$$

ただし、Δ を異方性パラメータとし、スピン作用素 σ^a $(a = X, Y, Z)$ を

$$\sigma^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

とし、σ_k^a を

$$\sigma_k^a = \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\underbrace{\sigma^a}_{k\text{ 番目}}\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \tag{3}$$

とする。XXZ 鎖の相互作用の異方性の度合いをパラメータ Δ であらわす。$\Delta = 1$ の等方的な場合が XXX 鎖に相当する。$|\Delta| < 1$ の場合は系の性質は、XXX 鎖の場合と同様にその基底状態と励起状態の間にギャップない。これを massless あるいは gapless な場合と呼ぶ。一方、$\Delta > 1$ の場合には基底状態は Ising 的な長距離秩序を示し、励起様態との間に有限ギャップを持っており、これを massive あるいは gaped な場合と呼ぶ。

2.2　Bethe 仮説方程式

本節では、Bethe 仮説方程式と Bethe 仮説方程式の両辺に対数を取った対数形式をそれぞれ紹介する。量子化軸を z 方向に取ったとき、系の磁化は保存量であるため、解空間も磁化の値に応じて sector に分割される。そのなかで下向きスピンが M 個の sector を M-down-spin sector と呼ぶ。M-down-spin sector における Bethe 仮説方程式の解を $\{\lambda_j\}_{j=1,\cdots,M}$ とする。

異方性ごとの XXZ 鎖に対応する Bethe 仮説方程式は次のように表記される。

- $\Delta = 1$ の場合:XXX 鎖 down-spin の数を M とすると

$$\left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2}\right)^N = \prod_{k\neq j,k=1}^{M}\frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i}\ (j = 1, 2, \cdots, M) \tag{4}$$

となる。これを対数形式にすると

$$2\tan^{-1}(2\lambda_i) = \frac{2\pi}{N}Ji + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M}2\tan^{-1}(\lambda_i - \lambda_k) \tag{5}$$

となる。J_i は対数関数の分岐を指定するものであり、Bethe 量子数と呼ばれる。

- $|\Delta| < 1$ の場合:massless(gapless)-XXZ 鎖 down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cos\zeta$ と表し、

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_j + i\zeta/2)}{\sinh(\lambda_j - i\zeta/2)}\right)^N = \prod_{k\neq j,k=1}^{M} \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \tag{6}$$

となる。これを対数形式にすると

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tanh\lambda_i}{\tan(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N}J_i + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M} 2\tan^{-1}\left(\frac{\tanh(\lambda_i - \lambda_k)}{\tan\zeta}\right) \tag{7}$$

となる。

- $|\Delta| > 1$ の場合:massive(gaped)-XXZ 鎖 down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cosh\zeta$ と表し、

$$\left(\frac{\sin(\lambda_j + i\zeta/2)}{\sin(\lambda_j - i\zeta/2)}\right)^N = \prod_{k\neq j,k=1}^{M} \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \tag{8}$$

となる。これを対数形式にすると

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tan\lambda_i}{\tanh(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N}J_i + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M} 2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_i - \lambda_k)}{\tanh\zeta}\right) \tag{9}$$

となる。

Bethe 仮説方程式の解の性質として、1986 年に Vladimirov によって Bethe 仮説方程式の解の実部が等しいときに虚部の和が 0 になる性質:

$$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_M^*\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M\} \tag{10}$$

が知られている [6]。Two-down-spin sector においては、上記の性質によって Bethe 仮説方程式の解の組は二つとも実数となる実解と、Hermite 共役の組となる複素解の二つのタイプの解が存在する。XXX 鎖の two-down-spin sector ではサイト数を大きくすると string 仮説で予想される複素解が実解に潰れてしまう現象が起こることが Essler-Korepin-Schoutens によって報告されている [7]。この現象は collapse と呼ばれる。サイト数が大きくなると collapse する複素解の個数も増えていく。具体的に two-down-spin sector においてサイト数と collapse する複素解の個数の具体的な関係は出口-Giri によって求められている [2]。

2.3 String 仮説

一般に、Bethe 仮説方程式を解くことはできていないが高橋によって string 仮説と呼ばれる解の形と各解の形の個数を仮定することによって有限温度の熱力学極限の物理量が求められた [4, 5]。ここでは、XXX 鎖の string 仮説が要請する仮定について解説する。

まず、Bethe 仮説方程式の解の形を

$$\lambda_j = x_\alpha + \frac{1}{2}(n + 1 - 2k)i + O(e^{-dN}),\ k = 1, \cdots, n \tag{11}$$

と仮定する。この解を n-string 解と呼ぶ。ただし、x_α を string センターと呼び、$O(e^{-dN})$ を string からのずれと呼ぶ。また、$d > 0$ とする。また、string のずれがない $\lambda_j = x_\alpha + (n+1-2k)i,\ k = 1, \cdots, n$ を完全 string 解と呼ぶ。次に Takahashi 量子数という量を次のように定義する。$N - M_n$ が奇数 (偶数) であるときに Takahashi 量子数 I_α^n を次の条件を満たす整数 (半整数) とする:

$$|I_\alpha^n| \leq \left(N - 1 - \sum_{k=1} [2\min(n,k) - \delta_{n,k}] M_k \right). \tag{12}$$

ここで、M_n を一組の Bethe 仮説方程式の解の中の n-string の個数とする。したがって、$M = \sum_{n=1}^{\infty} nM_n$ となることに注意する。(12) を満たす個数から Bethe 仮説方程式の解の各形ごとの個数を予言する。

これらの string 仮説を仮定することにより自由エネルギーは

$$f = \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) - T \int s(x) \ln(1 + \eta_1(x)) dx \tag{13}$$

で表される。ただし、η_n は次の方程式で決定される。

$$\ln \eta_1(x) = \frac{2\pi J}{T} s(x) + s * \ln(1 + \eta_2(x)), \tag{14}$$

$$\ln \eta_n(x) = s * \ln(1 + \eta_{n-1}(x))(1 + \eta_{n+1}(x)), \tag{15}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \eta_n}{n} = \frac{2h}{T}. \tag{16}$$

ここで、$s(x)$ と $s * f(x)$ を

$$s(x) = \frac{1}{4} \mathrm{sech}\left(\frac{\pi \mathrm{x}}{2} \right), \tag{17}$$

$$s * f(x) = \int s(x-y) f(y) dy \tag{18}$$

と定義する。

ただし、string 仮説は XXX 鎖および、massless-XXZ 鎖では string 仮説が破れることが知られている。しかし、厳密には string 仮説が成り立たなくとも string 仮説から求まる物理量は近似的に正しいと信じられている。

3 Massive-XXZ 鎖に対する two-down-spin sector における Bethe 仮説方程式

3.1 Bethe 量子数を用いた解析の手法

本節では本研究の手法の概要について述べる。まず、massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector における Bethe 仮説方程式は

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh \zeta/2} \right) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{2}{N} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh \zeta} \right) \tag{19}$$

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_2)}{\tanh \zeta/2} \right) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{2}{N} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tanh \zeta} \right). \tag{20}$$

となる。次に複素解を次のように置く。

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta,\ \lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\zeta\ (x,\ \delta \in \mathbb{R}) \tag{21}$$

ただし、x:string センター、δ:string のずれとする。ここで、$\delta > -\zeta/2$ であることに注意する。w を次のように導入する。

$$w \equiv \frac{\tanh(\zeta/2 + \delta)}{\tanh(\zeta/2)}. \tag{22}$$

この w を用いて counting function を

$$2\pi Z_1(w) \equiv 2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\zeta/2)}\right) - \frac{2}{N}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh\zeta}\right) \tag{23}$$

を満たすように定義する。このとき、Bethe 仮説方程式は

$$Z_1(w) = \frac{J_1}{N} \tag{24}$$

と表せる。このとき、counting function $Z_1(w)$ の形が求まると、Bethe 量子数 J_1 を指定したときに Bethe 仮説方程式の解である $w(\geq 0)$ を求めることができる。また、量子数 J_1 がわかれば、もう一方の量子数 J_2 の値も、対数形式の Bethe 仮説方程式 (20) に対する解析を使って求めることができる。本研究ではこの counting function $Z_1(w)$ の性質を調べることによって two-down-spin sector の複素解の個数、サイト数 N を大きくしたときの複素解の振る舞いを中心に解析した。

3.2 今回の結果

今回の解析によって複素解の個数に関しては次のような結果が得られた [3]。Conjecture となっているのは counting function $Z_1(w)$ の一部の単調性が示せていないためであり、この部分に関しては数値的に確認した。

Conjecture 1　N、ζ が

$$\tanh^2(\zeta/2) < \frac{1 - (N-1)\tan^2\Big(\pi(1+2m)/2N\Big)}{(N-1) - \tan^2\Big(\pi(1+2m)/2N\Big)} \tag{25}$$

を満たすとき、m 組の collapse が起こる。

Conjecture 2　N、ζ が

$$\tanh^2(\zeta/2) > \frac{1 - (N-1)\tan^2\Big(\pi/2N\Big)}{(N-1) - \tan^2\Big(\pi/2N\Big)} \tag{26}$$

を満たすとき、一組の extra two-string 解が存在する。

この extra-two-string 解は XXX 鎖では実現しない解である。

Conjecture 1 と Conjecture 2 の結果を $\tanh^2\zeta/2$ とサイト数 N に関するグラフで表すと図 1 になる。ただし、異方性パラメータと ζ の関係は $\Delta=\cosh\zeta$ であることに注意する。また、$N\to\infty$ と極限を取ったときを考えると (25) の右辺は、

$$\frac{1-(N-1)\tan^2\Big(\pi(1+2m)/2N\Big)}{(N-1)-\tan^2\Big(\pi(1+2m)/2N\Big)}\to 0\ (N\to\infty) \tag{27}$$

であり、(26) の右辺は、

$$\frac{1-(N-1)\tan^2\Big(\pi/2N\Big)}{(N-1)-\tan^2\Big(\pi/2N\Big)}\to 0\ (N\to\infty) \tag{28}$$

となる。したがって、$N\to\infty$ とした場合には異方性パラメータが $\Delta>0$(すなわち $\zeta>0$) であるときには extra-two-string 解を持つことがわかる。また、$\zeta\to 0$ としたときに collapse の現れる個数の条件は XXX 鎖の場合 (文献 [2]) と一致した。

Counting function $Z_1(w)$ の定義域が指数関数的に小さくなることから次のような結果が得られた。

Theorem 3.1　$\tanh^2(\zeta/2)>\dfrac{1}{N-1}$ であるとき、two-down-spin sector の Bethe 仮説方程式の複素解が次のように string 仮説で予言される完全 string 解 (11) に指数関数的に近づく。

$$\lambda_1=x+\frac{i}{2}\zeta+O(e^{-dN}),\ \lambda_2=x-\frac{i}{2}\zeta+O(e^{-dN}). \tag{29}$$

ただし、$d>0$ とする。

4　まとめ

- String 仮説が予言する複素解の個数と実際の解の個数の関係を求めた。
- 複素解の個数が増える、XXX 鎖では存在しない現象を発見した。この新たな複素解を extra-two-string 解と命名して、出現領域をサイト数と異方性によって特定した。
- サイト数 N が大きい場合、N が大きくしていくにしたがって複素数が指数関数的に完全 string 解に近づくことを解析的に示した。

ただし、この結果の一部分に関しては数値的に確認した部分が含まれている。

参考文献

[1] H. A. Bethe, 1931 *Z.Phys.,***71** 205-26.

[2] T. Deguchi and P. R. Giri, 2016 *J. Phys. A:Math. Theor.,***49** 174001.

[3] T. Imoto, J. Sato, T. Deguchi, 2018 arXiv:1807.08885v1: *J. Phys. A:Math. Theor* より出版予定 https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aaf29f

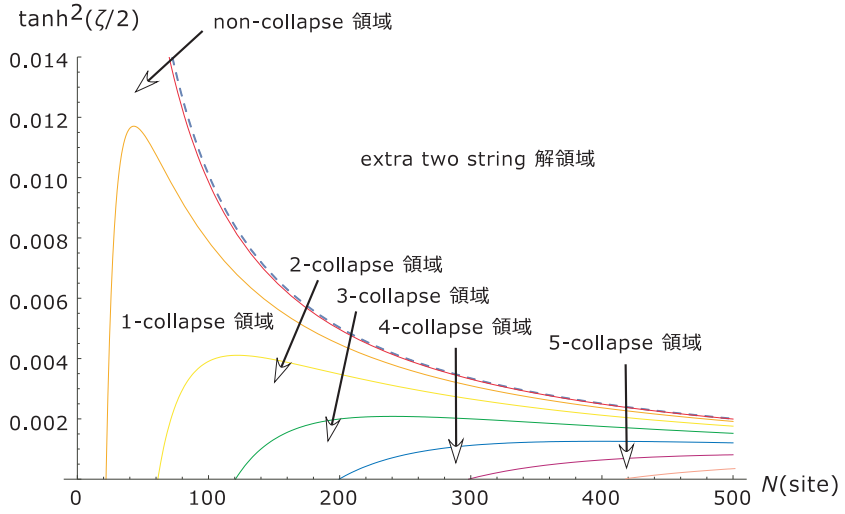


図 1　extra-two-string 解の collapse する複素解の組の個数。図中の m-collapse 領域は collapse した複素解の組が m 個であることを表している。縦軸は、XXZ 鎖の相互作用 J の z 軸方向の異方性を表すパラメータ $\Delta = \cosh\zeta$ に関連した、$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$ 、横軸はサイト数 N である。$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = 0$ が XXX 鎖の場合に相当し、$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \infty$ が Ising 鎖の場合に相当する。また、$N \to \infty$ としたときは異方性パラメータ $\Delta > 1$(すなわち $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) > 0$) の領域はすべて、extra-two-string 解を持つ領域になる。破線より上の領域では複素解が string 仮説によって予言される完全 string 解との差が $O(\exp(-dN))$ となる。

[4] M. Takahashi, 1971 *Prog. Theor. Phys.,***46** 401.

[5] M. Takahashi, 1999 *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models,*Cambridge: Cambridge University Press.

[6] A. A. Vladimirov, 1986 *Theor. Math. Phys.,***66** 102.

[7] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and, K. Schoutens, 1992 *J. Phys. A:Math. Gen,***25** 4115.

量子ラビ模型のスペクトル解析

草本舜輔 (Shunsuke KUSAMOTO) *
九州大学大学院 数理学府 数理学専攻修士課程 2 年

概要

量子計算機の基本素子を与える量子ラビ模型は，Rabi により 1937 年に提出された準古典的模型が，1963 年に Jaynes と Cummings により量子化されたものである。2011 年に Braak による大きな進展があったものの依然としてスペクトルの完全な記述は出来ていない。また，量子ラビ模型は，数論的に見ても興味深い対象であり，表現論を用いた研究がなされている。本講演では，量子ラビ模型のハミルトニアン (非可換係数を持つ微分作用素) のスペクトルゼータ関数についてのある性質について紹介したい。

1 導入

ハミルトニアンのスペクトルは，古くから物理 (特に量子力学) 及び数学 (特にスペクトル理論) で研究されている。多くの場合ハミルトニアン H は，$H = H_0 + H_1$ の形で表される。ここで，H_0 は，スペクトルがよく分かっている自己共役作用素である。H が物理量としての意味を持つためには自己共役作用素であることが要求されるが，一般にこれは非自明である。そのため，ハミルトニアンの解析をするためには，自己共役性を示すことと，そのスペクトルの性質を調べるということが重要である。

次に，(量子) ラビ模型の歴史について，廣川 ([H]) に沿って，簡単に振り返っておく。

ラビ模型とは，1937 年の論文 [R] において Isac Rabi により光と物質の相互作用を記述するモデルとして定式化されたものである。これは，準古典的モデルであったが，その後，Jaynes と Cummings([JC]) により photon 部分も量子化され，**量子ラビ模型 (Quantum Rabi model ; QRM)** が定式化された。QRM のハミルトニアンは，次で記述される。(詳細は次節)

$$H_{\mathrm{Rabi}}/\hbar := \omega a^\dagger a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \Delta \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \sigma_z + g\sigma_x \otimes (a^\dagger + a)$$

しかしながら，QRM は積分可能系であることは期待されず，最近になるまで，その**回転波近似 (Rotating Wave Approximation ; RWA)** として定義されたジェインズ-カミングス模型 (Jaynes-Cummings model ; JCM)

$$H_{\mathrm{JC}} := \omega a^\dagger a + \Delta\sigma_z + g(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger), \quad (\sigma^\pm := (\sigma_x \pm \sigma_y)/2)$$

* Kyushu University, e-mail : ma217045@math.kyushu-u.ac.jp

が実験的にも十分に満足できる模型だと考えられていた。実際,

$$N_{\mathrm{JC}} := a^{\dagger}a + \frac{1}{2}(\sigma_z + \mathbb{1})$$

と可換になることから，可積分性が従う。なお，JCM は固有状態も明示的に記述できる。

ところが，実験技術が飛躍的に進み，強結合状態 (g や Δ などのパラメータの関係の大小) においては，JCM では実験結果と理論の整合性が取れない状況が現れて，QRM に向き合う状況が生まれた。そのような折に，ブレークスルーとされる研究が現れた。2011 年，Rabi による定式化から 70 年余り不明であった解析的解の存在を記述して QRM の可積分性を示した Braak による論文 ([B]) である。最近の関連する進展状況については，[XZBL] を参考にされたい。これにより，スペクトルの具体的明示は，出来ていないが，次のような分類が可能になった。量子ラビ模型のスペクトル全体を $\mathrm{Spec}\,(H_{\mathrm{Rabi}})$ と書くと,

$$\mathrm{Spec}\,(H_{\mathrm{Rabi}}) = \{\text{ 正則固有値 }\} \coprod \{\text{ 例外型非退化固有値 }\} \coprod \{\text{ 例外型退化固有値 }\}$$

と出来る。

また，$g \gg 1$ のとき，量子ラビ模型のスペクトルは，$\{n - g^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ の形に二重縮退していることが，数値計算上分かっている。本研究は，理論的にもこのことが成立していることを示したものである。

2 準備

以下，主結果を説明するためにいくつか用語や記号を導入する。

2.1 QRM

QRM のハミルトニアンは，数学的には次のように解釈できる。

Definition 2.1.

$$H_{\mathrm{Rabi}}/\hbar := \omega a^{\dagger}a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \Delta \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \sigma_z + g\sigma_x \otimes (a^{\dagger} + a)$$

は，Hilbert 空間 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2 (\simeq L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \simeq L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}))$ 上の作用素である。

ここで，$\hbar > 0$ は Dirac 定数,

$$a^{\dagger} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}\frac{d}{dx}\right),\ a := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

は，角振動数 $\omega > 0$ の bosonic mode に対する生成消滅作用素,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は，2 準位系に対する Pauli 行列，$g \geq 0$ は 2 準位系と bosonic mode の間の結合強度，$2\Delta \geq 0$ は 2 準位間のエネルギーの差である。

以下，$\hbar = \omega = 1$ としても一般性を失わない。

Proposition 2.2. 作用素 H_{Rabi} は，$\mathcal{H}$ 上の下に有界な稠密に定義された自己共役作用素である。

Proof.

$$A := a^\dagger a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \Delta \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \sigma_z,\ B := g\sigma_x \otimes (a^\dagger + a)$$

として，**Kato-Rellich の定理**を適用すれば良い。([A] や [RS-II] を参照) □

Proposition 2.3. 作用素 H_{Rabi} のすべての固有値 λ は，$\lambda \geq -g^2 - \Delta$ を満たす。特に，$\tau > g^2 + \Delta$ を満たすような $\tau \in \mathbb{R}$ に対しては，作用素 $H_{\mathrm{Rabi}} + \tau \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ は非負である。

Proof. [S] の [Proposition2.2] を参照せよ。 □

2.2 スペクトルゼータ関数

Definition 2.4 (**スペクトルゼータ関数**). $\mathbb{C}$-Hilbert 空間 V 上の稠密に定義されている線型作用素 $A : V \to V$ について，A が離散スペクトルしかもたない場合を考える。A のスペクトル λ_n を小さい順に並べたものを $\mathrm{Spec}\,(A)$ とかく。つまり，

$$\mathrm{Spec}\,(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lambda_n \leq \lambda_{n+1}\ (n \in \mathbb{N})$$

である。このとき，

$$\zeta_A(s) := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} \frac{1}{\lambda^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

を A の**スペクトルゼータ関数 (spectral zeta function)** という。ただし，$s \in \mathbb{C}$ は意味をなす範囲で定義するものとする。

また，$\tau \in \mathbb{C}$ に対して，$A + \tau \mathbb{1}_V$ のスペクトルゼータ関数を特に，$\zeta_A(s;\tau)$ とかいて，**フルヴィッツ型スペクトルゼータ関数 (Hurwitz-type spectral zeta function)** という。すなわち，

$$\zeta_A(s;\tau) := \zeta_{A+\tau\mathbb{1}_V}(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} \frac{1}{(\lambda + \tau)^s}$$

である。

Example 2.5 (**調和振動子のスペクトルゼータ関数**). $h_0 = a^\dagger a + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$ で定義される**調和振動子 (harmonic oscillator)** は，$L^2(\mathbb{R})$ 上の稠密に定義された自己共役作用素としてよく知られている。スペクトルも具体的に明示出来て，

$$\mathrm{Spec}\,(h_0) = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

となることから，h_0 のスペクトルゼータ関数は，

$$\zeta_{h_0}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} = (2^s - 1)\zeta(s)$$

となる。ここで，$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は，リーマンゼータ関数である。

Remark 2.6. スペクトルゼータ関数は，2 つの解釈が出来ることについて述べておく。

(1)　作用素 A^{-s} のトレース

A がトレース型作用素のとき，V のある完全正規直交系 (CONS)$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて，

$$\mathrm{Tr}\,(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n,\, Ae_n \rangle_V$$

で定まる量を A のトレースという。特に，A が自己共役でもあるとき，A の固有値を λ_n とすると，

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

と表せる。

このことを用いて，

$$\zeta_A(s) = \mathrm{Tr}\left(A^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle e_n,\, A^{-s}e_n \right\rangle_V$$

と解釈できる。

(2)　作用素 A の半群 $\{e^{-tA}\}_{t>0}$ のメリン変換

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \mathrm{Tr}\left(e^{-tA}\right) dt$$

とも解釈できる。

3　主結果

示したいことは，$g \gg 1$ のとき，$\mathrm{Spec}\,(H_{\mathrm{Rabi}}) = \{n - g^2\}_{n=1}^{\infty}$ となることである。

これは，予め g^2 を H_{Rabi} に加えておいたもの，すなわち，

$$H_g := H_{\mathrm{Rabi}} + g^2 \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} = a^\dagger a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \Delta \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \sigma_z + g\sigma_x \otimes (a^\dagger + a) + g^2 \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$$

の固有値が，$g \gg 1$ のとき，$\mathrm{Spec}\,(H_g) = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ となることを示すことと同じである。

固有値は，ユニタリ変換で不変であることに注意すると，

$$\begin{aligned} H_g &\sim \begin{pmatrix} a^\dagger a + \sqrt{2}gx + g^2 & O \\ O & a^\dagger a - \sqrt{2}gx + g^2 \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: H_g' \\ &\sim \begin{pmatrix} a^\dagger a & O \\ O & a^\dagger a \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} O & e^{-2\sqrt{2}g\frac{d}{dx}} \\ e^{2\sqrt{2}g\frac{d}{dx}} & O \end{pmatrix} =: H_g'' \end{aligned}$$

と出来る。ここで，

$$H_g' = U H_g U^{-1}, \quad U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_g'' = V_g H_g' V_g^{-1}, \quad V_g := \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}g\frac{d}{dx}} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}g\frac{d}{dx}} \end{pmatrix}$$

である。よって，以下，H_g' または H_g'' の固有値を考えれば良い。

Proposition 3.1. H_g' のすべての固有値 λ_n' について，$\Delta < 1$ のとき，

$$n - \frac{1}{c} \leq \lambda_n' \leq n + \frac{1}{c}, \quad (c > 1)$$

が成立する。

Proof. [A] の [定理 5.19] を改良したものである。

H_g' を Δ を変数とした作用素 $H(\Delta)$ に見做す。すなわち，

$$H(\Delta) = H_0 + H_1(\Delta) := \begin{pmatrix} a^\dagger a + \sqrt{2}gx + g^2 & O \\ O & a^\dagger a - \sqrt{2}gx + g^2 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\{H_1(\Delta)\}_{\Delta \in [0,\,1)}$ は対称作用素の族で次の 3 条件を満たす。

(1) すべての $\Delta \in [0,\,1)$ に対して，$D(H_0) \subset D(H_1(\Delta))$ かつ $H_1(0) = O$ である。

(2) $\Delta \in [0,\,1)$ に依存しうる定数 $a(\Delta),\, b(\Delta) \geq 0$ が存在して，

$$\|H_1(\Delta)\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq a(\Delta)\|H_0\Psi\|_{\mathcal{H}} + b(\Delta)\|\Psi\|_{\mathcal{H}}, \quad \Psi \in D(H_0)$$

が成り立つ。

(3) $a(0) = 0,\, b(0) = 0$ かつ $\Delta \in [0,\,1)$ の関数として，$a(\Delta),\, b(\Delta)$ は連続である。

実際，$a(\Delta) = 0,\, b(\Delta) = \Delta$ として成立している。$\mathrm{Spec}(H_0) = \mathrm{Spec}\left(a^\dagger a\right) \cup \mathrm{Spec}\left(a^\dagger a\right)$ であることに注意して，H_0 の重複度 2 の離散固有値 $E_0 \in \mathbb{N}$ を固定する。

このとき，$\delta := \inf_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H_0)\setminus\{E_0\}} |\lambda - E_0| = 1 > 0$ とし，$c > 1$ に対し，$\varepsilon := \dfrac{\delta}{c}$ とおくと，中心 E_0，半径 ε の円周

$$K_\varepsilon := \{E \in \mathbb{C} \mid |E - E_0| = \varepsilon\}$$

は，$K_\varepsilon \subset \rho(H_0)$ を満たす。さて，$K_\varepsilon \subset \rho(H(\Delta))$ となるような条件を考察する。先の $\Delta \in [0,\,1)$ と ε に対して，定数

$$r(\Delta) := a(\Delta) + \frac{(E_0 + \varepsilon)a(\Delta) + b(\Delta)}{\varepsilon}$$

を導入すると，実際は $r(\Delta) = c\Delta$ より，$r(\Delta) < c$ を満たす。このとき，$H(\Delta)$ は自己共役であり，$K_\varepsilon \subset \rho(H(\Delta))$ となり，かつ

$$\left\|(H(\Delta) - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{r(\Delta)}{\varepsilon(1 - r(\Delta))} \cdots ①$$

が成り立つ。

また，このとき，

$$P(\Delta) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varepsilon} (H(\Delta) - E)^{-1} dE, \quad E \in K_\varepsilon$$

で定義される作用素は，正射影作用素となることが分かる。ここで，$P(0)$ は，H_0 の固有空間 $\mathrm{Ker}\,(H_0 - E_0\mathbb{1})$ への正射影作用素であることが分かる。さて，容易に示される不等式

$$\|P(\Delta) - P(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|(H(\Delta) - E_0 - \varepsilon e^{i\theta})^{-1} - (H_0 - E_0 - \varepsilon e^{i\theta})^{-1}\right\| d\theta$$

および，① によって，

$$\|P(\Delta) - P(0)\| < 1$$

を得る。このことから，$\dim \mathrm{Ran}\,(P(\Delta)) = \dim \mathrm{Ran}\,(P(0)) = 2$ を得る。これは，題意の成立を意味する。 □

Theorem 3.2 (主定理). $(0 <)\Delta < 1$ のとき，$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ 上の自己共役作用素 $H_g = a^\dagger a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} + \Delta\mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \sigma_z + g\sigma_x \otimes (a^\dagger + a) + g^2\mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R})} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$ のスペクトルゼータ関数は，$g \to \infty$ のとき，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $H_0 = a^\dagger a \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$ のスペクトルゼータ関数になる。すなわち，

$$\lim_{g\to\infty} \zeta_{H_g}(s;\,\tau) = \zeta_{H_0}(s;\,\tau) \quad (s > 1)$$

である。

Proof. 以下，証明の概略を述べる。$2 \leq s$ と $1 < s < 2$ の場合に分けて考える。

(1) $s \geq 2$ の場合

$$\zeta_{H_g}(s;\,\tau) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(H_g)} \frac{1}{(\lambda+\tau)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle e_n,\, (H_g+\tau)^{-s} e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} \quad (\{e_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathrm{CONS})$$

と解釈し，$\langle e_n,\, (H_g+\tau)^{-s}e_n\rangle_{\mathcal{H}}$ を g に依らない可積分関数で上から押さえ，Lebesgue の優収束定理を適用する。

(2) $1 < s < 2$ の場合

$$\zeta_{H_g}(s;\,\tau) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(e^{-t(H_g+\tau\mathbb{1}_{\mathcal{H}})}\right) dt$$

と解釈する。$\mathrm{Tr}\left(e^{-t(H_g+\tau\mathbb{1}_{\mathcal{H}})}\right)$ の収束については，任意の $\varepsilon > 1$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(e^{-t(H_g+\tau\mathbb{1})}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t(\lambda_n+\tau)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{(1+\varepsilon)/e\}^{1+\varepsilon}}{\{(\lambda_n+\tau)t\}^{1+\varepsilon}} \cdots ② \\ &= \{(1+\varepsilon)/e\}^{1+\varepsilon}\zeta_{H_g}(1+\varepsilon;\,\tau)t^{-1-\varepsilon} < \infty\end{aligned}$$

となることから従う。

ここで，② は，不等式 $e^{-b} \leq (a/e)^a b^{-a}$ $(a,\, b > 0)$ を $a = 1+\varepsilon$, $b = (\lambda_n+\tau)t$ として用いた。

結局の所，

$$\left|\int_0^{\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(e^{-t(H_g+\tau\mathbb{1}_{\mathcal{H}})}\right) dt - \int_0^{\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(e^{-t(H_0+\tau\mathbb{1}_{\mathcal{H}})}\right) dt\right| \to 0 \quad (g\to\infty)$$

となることを示せば良いが，積分区間を $R > 0$ を用いて $\int_0^R$ と $\int_R^\infty$ に分けて，今までに示してきたことを適用することで示せる。

□

参考文献

[R] I.Rabi:Space quantization in a gyrating magnetic field, Phys.Rev., **51** (1937), 652-654.

[JC] E.T.Jaynes and F.W.Cummings: Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE **51** (1963), 89-103.

[B] D. Braak: On the Integrability of the Rabi model, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 100401-100404.

[RS-I] M. Reed, B. Simon: METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS I: FUNCTIONAL ANALYSIS, Academic Press (2009).

[RS-II] M. Reed, B. Simon: METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS II: FOURIER ANALYSIS, SELF-ADJOINTNESS, Academic Press (2009).

[RS-IV] M. Reed, B. Simon: METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS IV: ANALYSIS OF OPERATORS, Academic Press (2009).

[IW] T. Ichinose and M. Wakayama: Zeta functions for the spectrum of the non commutative harmonic oscillators, Commun. Math. Phys. **258** (2005), 637-739.

[S] S. Sugiyama: Spectral zeta functions for the quantum Rabi models, Nagoya Math. J. **229** (2018), 52-98.

[XZBL] Q.-T. Xie, H.-H. Zhong, M.T. Batchelor and C.-H. Lee: The quantum Rabi model: solution and dynamics, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017), 113001.

[P] A. Parmeggiani: Spectral Theory of Non-Commutative harmonic oscillators; An Introduction, Lecture Note in Mathematics **1992**, Springer (2010).

[H] 廣川真男: 数物系に向けたフーリエ解析とヒルベルト空間論:量子力学への誘い, SGC ライブラリ **135**, サイエンス社 (2017).

[AE-I] 新井朝雄, 江沢洋: 朝倉物理学大系 7 「量子力学の数学的構造 I」, 朝倉書店 (2001).

[AE-II] 新井朝雄, 江沢洋: 朝倉物理学大系 8 「量子力学の数学的構造 II」, 朝倉書店 (2001).

[A] 新井朝雄: 朝倉物理学体系 12「量子現象の数理」, 朝倉書店 (2006).

量子 Ising 模型における平均場臨界現象

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)*†

概要

強磁性体の相転移を記述するモデルに古典 Ising 模型がある．量子 Ising 模型はこれのスピン変数を Pauli 行列で置き換え，横磁場を印加したモデルである．量子 Ising 模型の高次元臨界現象は温度を固定し相互作用係数や横磁場を変化させた場合について調べられている．一方で，温度を変化させた場合の振舞は知られていない．この問題について，講演者らは帯磁率に関する不等式を得た．なお，本研究は半田悟氏と坂井哲准教授（両北海道大学）との共同研究である．

1 導入

1.1 動機

水 (H_2O) は 0 °C で氷に変化し，100 °C で水蒸気に変化する．これは相転移と呼ばれる現象の一例である．一般に，物質などの物理系のパラメータを操作することで，その巨視的な振る舞いが著しく変化する現象を相転移という．同様の現象は鉄やコバルトなどの強磁性体でも起こる．例えば，鉄 (Fe) は常温では強磁性を示す（平たく言えば，強い磁場を掛けることによって磁石になる）が，770 °C を境に常磁性を示す（磁石ではなくなる）．このような強磁性体の相転移を記述するモデルに Ising 模型がある．

古典 Ising 模型は有限格子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 上のスピン配置 $\sigma = \{\sigma_x\}_{x\in\Lambda} \in \{-1,+1\}^\Lambda$ が確率測度

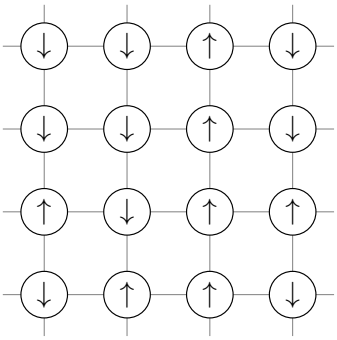
$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\sigma)}}{\sum_{\tau\in\{-1,+1\}^\Lambda} \mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\tau)}}, \qquad \text{ここで} \quad H^{\mathrm{cl}}(\sigma) = -\sum_{x,y\in\Lambda} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y - h\sum_{x\in\Lambda}\sigma_x \tag{1}$$

によってランダムに与えられるとするモデルである（図 1a）．ただし，相互作用係数 $J_{x,y}$，外部磁場の強さ h および逆温度 β は正の実数であり，$H^{\mathrm{cl}}(\sigma)$ を Hamiltonian 関数と呼ぶ．古典 Ising 模型は直感的には格子点の上に（上向きか下向きのみの）棒磁石のようなものが乗っていると思えばよい．その棒磁石の平均的な向き（磁化）を調べることによって，系がどの程度磁石になっているかがわかる．具体的には，確率測度 $\mathbb{P}$ による $A\colon \{-1,+1\}^\Lambda \to \mathbb{R}$ の期待値を

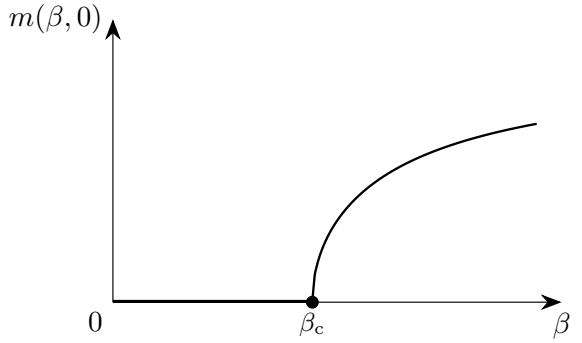
$$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle_{\beta,h;\Lambda} = \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda} A(\sigma)\mathbb{P}(\sigma)$$

と定義し，自発磁化を $\lim_{h\downarrow 0} m(\beta,h) = |\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}\langle\!\langle\sigma_x\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}$ で定義する．温度を下げていったと

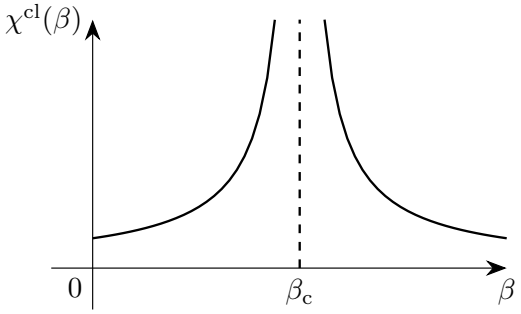
* 北海道大学大学院理学院数学専攻博士後期課程
† kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp



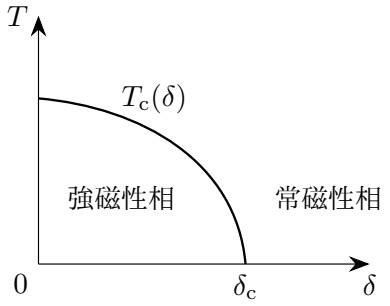
(a) Ising 模型の概念図．上向きが $+1$，下向きが -1 に対応する．



(b) 古典 Ising 模型での自発磁化の振る舞い．臨界点を境に立ち上がる．



(c) 古典 Ising 模型での帯磁率の振る舞い．臨界点で発散する．



(d) 量子 Ising 模型の相図．温度変化のみでなく，横磁場の変化でも相転移を起こす．

図 1: Ising 模型における様々なグラフ．逆温度 β は温度 T と $\beta \propto T^{-1}$ の関係がある．

き，常磁性相では自発磁化が 0 になり，強磁性相では 0 から立ち上がる（図 1b）．この 0 から立ち上がる温度 β_c を臨界点と呼ぶ．温度変化に対して自発磁化が急激に変化するという特異な振る舞いをすることは，モデルの定義からはすぐに理解することができない，非自明な問題である．このような臨界点付近で起こる特異な現象の総称を臨界現象と呼ぶ．

また，磁化を磁場で微分した量を帯磁率 $\chi^{cl}(\beta) = \partial m/\partial h|_{h=0}$ といい，これは外部磁場を変化させたときの感受率（どの程度変化しやすいか）を意味している．臨界点 β_c の直上では外部磁場に対する磁化のゆらぎが非常に大きくなるため，帯磁率は発散する（図 1c）．特に，β_c の近傍では帯磁率が $\chi^{cl} \asymp |\beta_c - \beta|^{-\gamma}$ のように冪的に振る舞うと信じられている[1)2)]．ここに現れた指数 γ を臨界指数と呼ぶ．

現実の実験によると，臨界指数はあらゆる物質や現象で限られた値しか取り得ないことが確認されている．つまり，相互作用の形などのモデルの詳細に依らずに，空間次元や対称性などの少数の要素のみで決まると信じられている．この普遍性を解明することは統計物理学における重要な課題の一つである．

---

1) 実関数 f と g に対して，$t \to \alpha$ のとき $f(t) \asymp g(t)$ とは，$\exists c_1, c_2 < \infty$ s.t. $c_1 g(t) \le f(t) \le c_2 g(t)$.

2) 図 1c では物理学の文献に合わせて臨界点の両側のグラフを描いたが，本稿では β_c の左側（高温相）のみを扱う．

1.2 高次元臨界現象

格子の次元 d が十分大きいとき，臨界指数はスピン同士の相互作用が無いモデルのそれに一致すると予想されている．例えば，相互作用係数が $J_{x,y} = \mathbb{1}_{\{\, x \text{ と } y \text{ は隣接点} \,\}}$（最近接相互作用．後の脚注 6) も参照）の場合を考えよう．分配関数を計算するには (1) の二体相互作用の項を個別に足し合わせる必要がある．しかし，一般にその計算を実行するのは困難である．物理学的には格子点 x での局所的な Hamiltonian H_x^{cl} を次のように置き換えることによって，一体相互作用に帰着させる手法が考えられている：

$$H_x^{\mathrm{cl}}(\sigma) = -\sum_{y\colon x \text{ の隣接点}} \sigma_x\sigma_y - h\sigma_x \longrightarrow -2d \left\langle\!\!\left\langle \sum_{y\colon x \text{ の隣接点}} \sigma_y \right\rangle\!\!\right\rangle_{\beta,h;\Lambda} \sigma_x - h\sigma_x = -\left(2dm + h\right)\sigma_x.$$

つまり，x における周りの点からの寄与を平均値（磁化）で置き換える．このような近似を平均場近似と呼び，これが十分高次元で有効なのは大数の法則から明らかだろう．平均場近似から求められる臨界指数 ($\gamma = 1$) を平均場臨界指数と呼ぶ．

一般の次元では平均場近似は正しい結果を与えない．実際，2 次元では $\gamma > 1$ であることが知られている．そこで，平均場近似が有効になるぎりぎりの次元を上部臨界次元と呼ぶ．古典 Ising 模型の上部臨界次元は 4 と予想されている．この予想が正しいことは，格子が $\mathbb{Z}^d$ のとき[3)]には既に証明されており，その手法を以下に示す．

古典 Ising 模型の臨界指数が平均場臨界指数に退化することの十分条件として，赤外評価がある：4 次元より大きい次元 d に対して，

$$\exists C \in [0,\infty), \quad \forall \beta < \beta_{\mathrm{c}}, \quad 0 \le \hat{G}_\beta(k) \coloneqq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \langle\!\langle \sigma_o\sigma_x \rangle\!\rangle_\beta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \le \frac{C}{\hat{J}_0 - \hat{J}_k}. \tag{2}$$

ここで，$\hat{J}_k$ は $J_{o,x}$ の Fourier 変換 $\hat{J}_k = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} J_{o,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ を意味する．もし (2) が成り立てば，次の不等式 [1] から $\gamma = 1$ が導かれる．

$$\exists C_1(\beta), C_2(\beta, B^{\mathrm{cl}}) \in [0,\infty), \quad \frac{C_1(\beta)}{\beta_{\mathrm{c}} - \beta} \le \chi^{\mathrm{cl}}(\beta) \le \frac{C_2(\beta, B^{\mathrm{cl}})}{\beta_{\mathrm{c}} - \beta} \quad \left(B^{\mathrm{cl}} \coloneqq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \langle\!\langle \sigma_o\sigma_x \rangle\!\rangle_\beta^2 \right). \tag{3}$$

実際，Parseval の等式により $B^{\mathrm{cl}} = \int_{[-\pi,\pi]^d} \hat{G}_\beta(k)^2 \, \mathrm{d}^d k$ であるから，(2) を適用して積分を計算[4)]すれば $B^{\mathrm{cl}} < \infty$ がわかる．

1.3 量子 Ising 模型

古典 Ising 模型は格子点上のスピン——現実の物質では結晶を構成している原子に相当——の方向だけを考慮したモデルであった．その一方で，現代物理学の教えるところによれば，実際の原子の振る舞いは量子力学的に扱われるべき対象である．そこで，古典 Ising 模型のスピンを量子力学におい

3) かつ鏡映正値性（[7, 付録 B] などを参照）が満たされるような相互作用係数とき．

4) d 次元単純ランダムウォークの再帰確率の計算と殆ど同じ．

て対応する作用素で置き換え，横磁場を印加する（ここの詳しい定義や横磁場を加えることの意味については次節を参照）．このようにして得られるモデルが量子 Ising 模型である．量子 Ising 模型は古典のそれと異なる興味深い性質を示すことが知られている．例えば，温度を固定しても横磁場の強さを変化させることによって相転移を起こす（図 1d）．これに関連する数学的な結果は Björnberg [3] によって得られている．そこでは，高次元の量子 Ising 模型において，温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させると帯磁率が平均場臨界指数に従って発散することが示されている．

その一方で，特に，講演者らは横磁場を加えたときにその高次元での振る舞いが古典系からどの程度ずれるかということに興味がある．問題設定としてはよく似ているものの，Björnberg の結果は温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させた場合であって，温度変化は考慮されていない．古典系からのずれという観点からは相互作用係数を固定したときに温度や横磁場の強さを変化させた場合の応答を調べたい．講演者らは現在までに，ある条件の下，古典系の (4) に対応する不等式を得た．以下では量子 Ising 模型の詳しい定義を述べたあと，その不等式の証明の概略を説明する．

2　モデルの定義

有限格子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対して，古典 Ising 模型では Hamiltonian が $\{-1,+1\}^\Lambda$ 上の関数として 1 で与えられた．量子 Ising 模型では Hamiltonian がテンソル空間 $\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ 上の作用素になる．その定義や性質を述べるために，Pauli 行列とブラ・ケット記法を導入する．

2 次正方行列の組[5)]

$$S^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad S^2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad S^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を Pauli 行列と呼び，それらと単位行列 I によるテンソル積を

$$S_x^i \coloneqq \underbrace{I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overset{x}{\overbrace{S^i}}\otimes I\otimes\cdots\otimes I}_{|\Lambda|\text{ 個}} \qquad (i=1,2,3,\ x\in\Lambda)$$

$$S_x^iS_y^j \coloneqq \underbrace{I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overset{x}{\overbrace{S^i}}\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overset{y}{\overbrace{S^j}}\otimes I\otimes\cdots\otimes I}_{|\Lambda|\text{ 個}} \qquad (i,j=1,2,3,\ x,y\in\Lambda)$$

と書く．S^3 の固有値 ±1 に対応する固有ベクトル（縦ベクトル）を $|\pm1\rangle$，この転置共役を $\langle\pm1|$ と記す：

$$|1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\overset{\text{転置共役}}{\longleftrightarrow}\langle1|=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix},\quad |-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\overset{\text{転置共役}}{\longleftrightarrow}\langle-1|=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}.$$

$|\bullet\rangle$ をケットベクトル，$\langle\bullet|$ をブラベクトルという．ケットベクトルのテンソル積全体 $\{\bigotimes_{x\in\Lambda}|\sigma_x\rangle \mid \sigma_x=\pm1\}$ はテンソル空間 $\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ の基底になる．

---

5) 「Pauli 行列」というとこの 3 つを指すので，一応 S^2 も書いた．しかし，後で使うのは S^1 と S^3 のみで S^2 は使わない．添字はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に対応しており，Pauli 行列の固有値は各軸に対してスピンの向きを観測したときの物理量に相当する．

以上の準備の下，量子 Ising 模型の Hamiltonian と分配関数 ((1) の確率測度の規格化定数に相当) を次のように定義する．

定義 1. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ を有限格子とする．量子 Ising 模型の Hamiltonian 作用素とはテンソル空間 $\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ 上の作用素

$$H = -\sum_{x,y\in\Lambda} J_{x,y} S_x^3 S_y^3 - h\sum_{x\in\Lambda} S_x^3 - \delta\sum_{x\in\Lambda} S_x^1$$

である．ここで，$J_{x,y}\in\mathbb{R}$ を相互作用係数，$h>0$ を外部磁場の強さ，$\delta>0$ を横磁場の強さと呼ぶ．また，逆温度 $\beta\in(0,\infty]$ と $A\colon \bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2 \to \bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ に対して，行列のトレースを用いて分配関数 Z と作用素 A の期待値 $\langle A\rangle$ を

$$Z(\beta,\delta,h) = \operatorname{Tr}\left[\mathrm{e}^{-\beta H}\right], \qquad \langle A\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda} = \frac{\operatorname{Tr}\left[A\mathrm{e}^{-\beta H}\right]}{Z(\beta,\delta,h)}$$

と定義する．

注意 2. 以下では有限格子 Λ に周期境界条件を課してトーラスとみなす．また，相互作用係数には並進対称性 $\{J_{x,y}\}_{x,y\in\Lambda} = \{J_{o,y-x}\}_{x,y\in\Lambda}$ を仮定し，常に $J_{x,y}>0$（強磁性）とする．なお，$\lambda\in\mathbb{R}$ について相互作用係数が特に $J_{x,y} = \lambda\mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$ という形[6]をしているとき，その $\{J_{x,y}\}_{x,y\in\Lambda}$ を最近接相互作用という．

例 3. $\delta=0$ とし，$|\Sigma\rangle = \bigotimes_{x\in\Lambda}|\sigma_x\rangle$ とおく．このとき，各 $|\sigma_x\rangle$ が S^3 の固有ベクトルであることに注意して分配関数を計算すると

$$\begin{aligned} Z(\beta,0,h) &= \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda} \langle\Sigma|\,\mathrm{e}^{-\beta H}\,|\Sigma\rangle \overset{\text{可換性}}{=} \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda} \langle\Sigma|\prod_{x,y\in\Lambda}\mathrm{e}^{\beta J_{x,y}S_x^3S_y^3}\prod_{x\in\Lambda}\mathrm{e}^{\beta h S_x^3}\,|\Sigma\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda}\prod_{x,y\in\Lambda}\mathrm{e}^{\beta J_{x,y}\sigma_x\sigma_y}\prod_{x\in\Lambda}\mathrm{e}^{\beta h\sigma_x}\,\langle\Sigma\,|\,\Sigma\rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda}\mathrm{e}^{\beta\sum\limits_{x,y\in\Lambda}J_{x,y}\sigma_x\sigma_y}\mathrm{e}^{\beta h\sum\limits_{x\in\Lambda}\sigma_x} = \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda}\mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\sigma)} \end{aligned}$$

となって，古典 Ising 模型の分配関数に一致する．ただし，3 番目の等号は指数関数を級数展開してからテンソル積の計算を実行することで導かれる．このようなわけで，横磁場の項は「量子効果」を表している．直感的にも，S^1 は状態を反転させる：$S^1|\sigma\rangle = |-\sigma\rangle$ $(\sigma=\pm1)$ ので，δ が大きいほど反転しやすい——ゆらぎが大きくなることがわかる．

古典 Ising 模型では Helmholtz 自由エネルギーから熱力学的な量（マクロな，目に見えるようなスケールで観測される量）を定義する．量子 Ising 模型でもそれに倣って Helmholtz 自由エネルギーに基づいて磁化と帯磁率を定義する．すなわち，Helmholtz 自由エネルギー（密度）を

$$f(\beta,\delta,h) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\frac{-1}{\beta|\Lambda|}\log Z(\beta,\delta,h)$$

---

[6] $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$ に対して，$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d|x_i|$ である．$\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$ は $\bullet$ が真なら 1，偽なら 0 を返す定義関数である．

とした上で，磁化と帯磁率をその微分によって，

$$m(\beta,\delta,h) \coloneqq -\frac{\partial f(\beta,\delta,h)}{\partial h} \overset{\text{周期性}}{=} \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} \left\langle S_o^3 \right\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda}, \qquad \chi(\beta,\delta) \coloneqq \left.\frac{\partial m(\beta,\delta,h)}{\partial h}\right|_{h=0}$$

と定義する．ただし，m の等号のところでは Λ がトーラスであることを用いて表式を書き替えた．また，臨界点を $\beta_{\mathrm{c}}(\delta) = \inf\{\,\beta>0 \mid \chi(\beta,\delta)=\infty\,\}$ で定義する．

3 主結果

3.1 準備

主結果の主張を述べる前に，必要な記号や先行研究の結果について言及する．

3.1.1 鈴木-Trotter 変換

d 次元量子 Ising 模型は次の意味で $d+1$ 次元古典 Ising 模型と等価であることが知られている．以下では，長さ l のトーラスを $[l]=\{0,1,\dots,l-1\}$ と記す．

定理 4 ([9])**.** 有限格子 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ 上の量子 Ising 模型の分配関数 Z に対して，

$$Z(\beta,\delta,h) = \lim_{l\uparrow\infty}\left(\frac{1}{2}\sinh\frac{2\beta\delta}{l}\right)^{\frac{|\Lambda|l}{2}} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{-1,+1\}^{\Lambda\times[l]}} \mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}$$

が成り立つ．ただし，$K_l = 2^{-1}\log\coth(\beta\delta/l)$ とおいたとき，$\Lambda\times[l]$ 上の古典的な Hamiltonian 関数を

$$H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma}) = -\sum_{x,y\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}\frac{\beta J_{x,y}}{l}\sigma_{x,t}\sigma_{y,t} - \sum_{x\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}K_l\sigma_{x,t}\sigma_{x,t+1} - \sum_{x\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}\frac{\beta h}{l}\sigma_{x,t}$$

とした．

証明の要旨． 例 3 と同様に，$|\Sigma\rangle = \bigotimes_{x\in\Lambda}|\sigma_x\rangle$ とおく．Trotter の公式により，

$$\begin{aligned}
Z &= \mathrm{Tr}\left[\exp\Bigg(\underbrace{\sum_{x,y}\beta J_{x,y}S_x^3S_y^3 + \beta h\sum_x S_x^3}_{=A} + \underbrace{\beta\delta\sum_x S_x^1}_{=B}\Bigg)\right] \\
&= \lim_{l\uparrow\infty}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathrm{e}^{A/l}\mathrm{e}^{B/l}\right)^l\right] = \lim_{l\uparrow\infty}\langle\Sigma|\underbrace{\left(\mathrm{e}^{A/l}\mathrm{e}^{B/l}\right)\dots\left(\mathrm{e}^{A/l}\mathrm{e}^{B/l}\right)}_{l\text{ 個}}|\Sigma\rangle \\
&= \lim_{l\uparrow\infty}\prod_{j=0}^{l-1}\langle\Sigma_j|\,\mathrm{e}^{A/l}\mathrm{e}^{B/l}\,|\Sigma_{j+1}\rangle \quad \left(\because I=\sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda}|\Sigma\rangle\langle\Sigma| \text{ を } l-1 \text{ 個挿入}\right) \\
&= \lim_{l\uparrow\infty}\prod_{j=0}^{l-1}\exp\left(\sum_{x,y}\frac{\beta J_{x,y}}{l}\sigma_{x,j}\sigma_{y,j} + \beta h\sum_x\sigma_{x,j}\right)\langle\Sigma_j|\,\mathrm{e}^{\frac{\beta\delta}{l}\sum_x S_x^1}\,|\Sigma_{j+1}\rangle\,.
\end{aligned}$$

ただし，各 $|\Sigma_j\rangle$ はテンソル空間 $\bigotimes_{x\in\Lambda} C^2$ の基底であり，特に $|\Psi_l\rangle = |\Psi_0\rangle$ と表記した．最後の因子は

$$\langle\Sigma_j|\,\mathrm{e}^{\beta\delta\sum_x S^1_x}\,|\Sigma_{j+1}\rangle = \langle\Sigma_j|\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathrm{e}^{\beta\delta S^1}\,|\Sigma_{j+1}\rangle = \prod_{x\in\Lambda}\langle\sigma_{x,j}|\,\mathrm{e}^{\beta\delta S^1}\,|\sigma_{x,j+1}\rangle$$

と書き替えられる．最後の内積を計算すれば，定理の表式を得る． □

実空間 Λ に新たに座標軸を加えた $\Lambda\times[l]$ を時空間と称する．このような名称は $t\in[l]$ を虚数時間と解釈できることを由来とする[7)]．時空間のスピン配置を $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{x,t}\}_{x\in\Lambda,t\in[l]} \in \{-1,+1\}^{\Lambda\times[l]}$ とすると，定理 4 から，S^3_o の期待値と帯磁率に対する次の表式が導かれる：

$$\left\langle S^3_o\right\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda} = \lim_{l\uparrow\infty}\left\langle\!\left\langle\sigma_{o,0}\right\rangle\!\right\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda,l} \coloneqq \frac{\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\sigma_{o,0}\mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}}{\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}},$$

$$\chi(\beta,\delta) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\lim_{l\uparrow\infty}\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta) \coloneqq \beta\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\lim_{l\uparrow\infty}\frac{1}{l}\sum_{(x,t)\in\Lambda\times[l]}\left\langle\!\left\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\right\rangle\!\right\rangle_{\beta,\delta,0;\Lambda,l} \quad (\because \text{周期性}).$$

3.1.2 時空間の Ising 模型における相関不等式

この節と 3.3 節では $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ の添え字を省略する．また，$\langle\!\langle f;g\rangle\!\rangle \coloneqq \langle\!\langle fg\rangle\!\rangle - \langle\!\langle f\rangle\!\rangle\langle\!\langle g\rangle\!\rangle$ と書き，これを連結二点相関関数と呼ぶ．古典 Ising 模型においては連結二点相関関数に対する様々な不等式が知られている．その一部を以下に列挙する．

Griffiths 第 1・第 2 不等式 [4, 5, 6] 任意の $A,B\subset\Lambda\times[l]$ と $X,Y\in\Lambda\times[l]$ に対して，

$$\left\langle\!\!\left\langle\prod_{X\in A}\sigma_X\right\rangle\!\!\right\rangle \geq 0, \quad \left\langle\!\!\left\langle\prod_{X\in A}\sigma_X;\prod_{Y\in B}\sigma_Y\right\rangle\!\!\right\rangle \geq 0.$$

Lebowitz の不等式 [8] $W,X,Y,Z\in\Lambda\times[l]$ に対して，

$$\langle\!\langle\sigma_W\sigma_X;\sigma_Y\sigma_Z\rangle\!\rangle \leq \langle\!\langle\sigma_W\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_X\sigma_Z\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\sigma_W\sigma_Z\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_Y\sigma_X\rangle\!\rangle.$$

Aizenman-Graham の不等式 [2] $W,X,Y,Z\in\Lambda\times[l]$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\sigma_W\sigma_X;\sigma_Y\sigma_Z\rangle\!\rangle \geq{}& \langle\!\langle\sigma_W\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_X\sigma_Z\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\sigma_W\sigma_Z\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_Y\sigma_X\rangle\!\rangle\\ &- \sum_{U,V\in\Lambda\times[l]}(\tanh\tilde{J}_{U,V})\langle\!\langle\sigma_W\sigma_X;\sigma_U\sigma_V\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_Y\sigma_V\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_Z\sigma_V\rangle\!\rangle\\ &- \langle\!\langle\sigma_W\sigma_X\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_W\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_W\sigma_Z\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\sigma_W\sigma_X\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_X\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_X\sigma_Z\rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

ただし，$X=(x,s)$, $Y=(y,t)$ と表したとき，$\tilde{J}_{X,Y} \coloneqq \beta J_{x,y}l^{-1}\mathbb{1}_{\{s=t\}} + K_l\mathbb{1}_{\{x=y\ \&\ t=s+1\}}$ である．

次の補題は Lebowitz の不等式の特別な場合である．すなわち，虚数時間軸上の隣り合う点に対しては l^{-1} という因子が取り出せることを意味する．この事実は主結果を証明する上で重要である．

[7)] スピンが虚時間 $\mathrm{i}t$ で時間発展させたように書けるため．例えば，[10, 14.3 節] を参照．

補題 5 (半田，K.，坂井)**.** $u, x \in \Lambda$ と $s, t \in [l]$ に対して，

$$\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t}; \sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle \leq \frac{4\beta\delta}{l}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{x,t} \rangle\!\rangle \Big).$$

補題の証明にはランダム・カレント表現（[7, 付録 A] を参照）を用いるが，本稿の紙面の都合上省略する．

3.2 主張

時空間のバブルと呼ばれる量を $B_{\Lambda,l} \coloneqq l^{-1} \sum_{(x,t)\in\Lambda\times[l]} \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t} \rangle\!\rangle^2_{\beta,\delta;\Lambda,l}$ と定義する．このとき，帯磁率に対して，古典 Ising 模型の (3) に対応する次の不等式評価が成り立つ．この定理によって，ある条件下では $\gamma = 1$ であることがわかる．

定理 6 (半田，K.，坂井)**.** 最近接強磁性量子 Ising 模型において，$B_{\Lambda,l} < \infty$ かつ $\delta \ll 1$ とする．このとき，$0 < \beta < \beta_{\mathrm{c}}(\delta)$ に対して，$C(\beta, B_{\Lambda,l}) \in (0, \infty)$ が存在して，

$$\frac{\beta}{4d(\beta_{\mathrm{c}} - \beta)} \leq \chi(\beta, \delta) \leq \frac{C(\beta, B_{\Lambda,l})}{\beta_{\mathrm{c}} - \beta}.$$

3.3 証明

まず, 有限体積での帯磁率 $\chi_{\Lambda,l}(\beta, \delta)$ に対して, 次の微分不等式を示す．すなわち, $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ が存在して

$$0 \leq\ C_1 \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} \right)^2 \leq \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} \leq C_2 \left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} \right)^2 \tag{4}$$

を満たすことを示す．実際，この両辺を $(\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)/\beta)^2$ で割って，$0 < \beta_1 < \beta_{\mathrm{c}} < \beta_2$ なる β_1 から β_2 まで積分すると，

$$C_1 (\beta_2 - \beta_1) \leq \frac{\beta_1}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_1,\delta)} - \frac{\beta_2}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_2,\delta)} \leq C_2 (\beta_2 - \beta_1)$$

となる．極限 $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ および $l \uparrow \infty$ をとれば，β_2 の定義と $\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)$ の広義単調性によって主結果の不等式を得る．

3.3.1 微分不等式の上界

帯磁率の微分は

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} = \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda \\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2} \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t}; \sigma_{u,s}\sigma_{v,s} \rangle\!\rangle + \sum_{\substack{u,x\in\Lambda \\ s,t\in[l]}} \frac{1}{l} \frac{\partial K_l}{\partial\beta} \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t}; \sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle \tag{5}$$

と書ける．ここで，$\partial K_l/\partial\beta = -\delta/(l \sinh(2\beta\delta/l))$ となって，第 2 項は負になることに注意されたい．(5) の第 1 項に Lebowitz の不等式を，第 2 項に Griffths 第 2 不等式を適用すると，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} \le \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)$$
$$\overset{\text{対称性}}{=} \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{2J_{u,v}}{l^2}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle \overset{\text{最近接}}{=} 4d\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta}\right)^2$$

となって，(4) の上界を得る． □

3.3.2 微分不等式の下界

(5) の第 1 項に Aizenman-Graham の不等式を適用して，Schwarz の不等式を用いると，

$$\sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle \overset{\text{AG}}{\ge} \underbrace{\sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{v,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)}_{=4d\chi_{\Lambda,l}(\beta)^2/\beta^2}$$
$$- \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2} \sum_{X,Y\in\Lambda\times[l]} (\tanh\tilde{J}_{X,Y})\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_X\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{v,s}\sigma_Y\rangle\!\rangle$$
$$- \underbrace{\sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\Big)}_{\le 4dB_{\Lambda,l}\chi_{\Lambda,l}(\beta)/\beta}.$$

この右辺第 3 項は $X=(w,s')$, $Y=(y,t')$ の値に応じて分類する．すなわち，$s'=t'$ のときには等式 (5) を用いて

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{w,x,y\in\Lambda\\ t,s'\in[l]}} \underbrace{\tanh\frac{\beta J_{w,y}}{l}}_{\le\beta J_{w,y}/l} \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{w,s'}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in\Lambda\\ s\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l}\langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{v,s}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle}_{\le 2dB_{\Lambda,l}}$$
$$\le 2d\beta B_{\Lambda,l}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta} - 2d\beta B_{\Lambda,l}\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{1}{l}\frac{\partial K_l}{\partial\beta}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle \quad (6)$$

と評価し，$w=y$ かつ $t'=s'+1$ のときには $\tanh K_l=(1-\tanh(\beta\delta/l))/(1+\tanh(\beta\delta/l))$ を用いて

$$\underbrace{\frac{1-\tanh(\beta\delta/l)}{1+\tanh(\beta\delta/l)}}_{\le 1}\frac{1}{l}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\ s',t\in[l]}}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{y,s'}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in\Lambda\\ s\in[l]}}\frac{J_{u,v}}{l}\langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{v,s}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle}_{\le 2dB_{\Lambda,l}} \quad (7)$$

と評価する．残りの (5) の第 2 項と (6) と (7) は補題 5 によって，例えば

$$\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{1}{l}\frac{\partial K_l}{\partial\beta}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle = -\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{\delta}{l^2\sinh(2\beta\delta/l)}\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle$$

$$\geq -\frac{4\beta\delta^2}{l^3\sinh(2\beta\delta/l)}\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)$$

$$= -\frac{8\beta\delta^2}{l\sinh(2\beta\delta/l)}\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta}\right)^2 \geq -4\delta\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta)}{\beta}\right)^2$$

となる．以上の評価を整理すれば，(4) の下界を得る． □

参考文献

[1] M. Aizenman. Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. *Commun. Math. Phys.* **86** (1982): 1–48.

[2] M. Aizenman and R. Graham. On the renormalized coupling constant and the susceptibility in ϕ^4_4 field theory and the Ising model in four dimensions. *Nucl. Phys.* **B225** [FS7] (1983): 261–288.

[3] J.E. Björnberg. Infrared bound and mean-field behaviour in the quantum Ising model. *Commun. Math. Phys.* **323** (2013): 329–366.

[4] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets I. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 478–483.

[5] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets II. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 484–489.

[6] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets III. *Commun. Math. Phys.* **6** (1967): 121–127.

[7] 田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版株式会社，2015 年）

[8] J.L. Lebowitz. GHS and other inequalities. *Commun. Math. Phys.* **35** (1974): 87–92.

[9] M. Suzuki. Relationship between d-Dimensional Quantal Spin Systems and $(d+1)$-Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *PTP.* **56** (1976): 1454–1469.

[10] 高橋和孝，西森秀稔『相転移・臨界現象とくりこみ群』（丸善出版株式会社，2017 年）

On a two-phase overdetermined problem of Serrin type

東北大学大学院 情報科学研究科 システム情報科学専攻
Lorenzo CAVALLINA

1 What are overdetermined problems?

Before stating our results on two-phase overdetermined problems, we would like to first give a brief introduction concerning elliptic overdetermined problems in general and how they are related to symmetry.

Let us start by introducing maybe the most famous example of overdetermined problem in the realm of elliptic PDE's. Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) with sufficiently smooth, say $\mathcal{C}^2$, boundary $\partial\Omega$ and consider the following boundary value problem

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{1.1}$$

It is well known that such a problem admits a unique solution of class $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ independently of the shape of the domain Ω. In particular, if Ω is a ball, then, we obtain that the unique solution of (1.1) must be radial and hence, its outward normal derivative $\partial_n u$ verifies

$$\partial_n u = d \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \text{for some } d \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

It is natural to ask, whether the ball is the only domain Ω for which the solution of (1.1) satisfies (1.2) as well. We say that (1.2) is a so-called *overdetermined condition* (or simply *overdetermination*) and a problem such as (1.1)-(1.2) is called an *overdetermined problem*. It is clear that, unlike usual boundary value problems, overdetermined problems might not be solvable in general. One of the basic questions in the study of overdetermined problems lies in asking for which particular domains a specific overdetermined problem (i.e. any pair of the form "boundary value problem"+"overdetermination") admits a solution. We will say that such domains are the *solutions* of the overdetermined problem in question.

As far as the overdetermined problem (1.1)-(1.2) is concerned, Serrin proved the following result.

Theorem 1.1 (Radial symmetry, [Se])**.** *The overdetermined problem* (1.1)-(1.2) *admits a solution* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ *if and only if* Ω *is a ball of radius* $-Nd$.

The original proof of Serrin employs the use of the so-called *method of moving planes*, a refinement of *Aleksandrov's reflection principle* (see [Al]).

We remark Theorem 1.1 makes no assumptions on the eventual holes that the domain Ω might have. In particular, Theorem 1.1 says something more than the mere radial symmetry of Ω: if the same constant d is chosen for all connected components of $\partial\Omega$ (which is precisely the point of the overdetermined condition (1.2)), then, no annular domains, not even radially symmetrical ones, are allowed as a solution.

This raises the question, whether more complicated solutions can be obtained if we impose an overdetermined condition on only part of the boundary, say, one of its connected components. The answer is affirmative and is given by the so-called *Bernoulli overdetermined problem*. In what follows we will briefly describe the problem setting for the Bernoulli overdetermined problem.

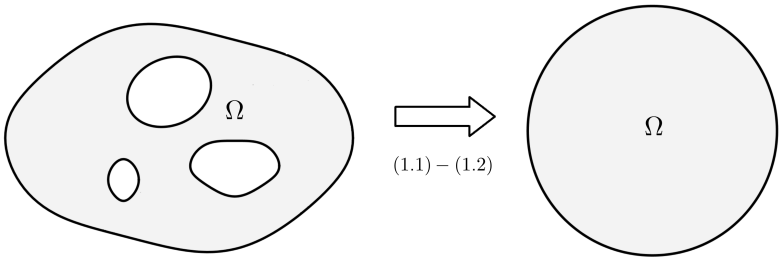


Figure 1: Serrin's symmetry result

Let K and Ω be sufficiently smooth, simply connected, bounded domains of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) that satisfy $\overline{K} \subset \Omega$. For a given constant $d \in \mathbb{R}$, the classical Bernoulli overdetermined problem reads:

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \setminus \overline{K}, \quad u = 1 \text{ on } \partial K, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad \partial_n u = d \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Such an overdetermined problem arises naturally as optimality condition when searching for a domain Ω of a given volume, that minimizes the relative capacity $\mathrm{cap}_\Omega(K)$. The existence of solutions to the overdetermined problem (1.3) is therefore studied by means of the (somewhat) easier task of finding minimizers of the capacity functional $\Omega \mapsto \mathrm{cap}_\Omega(K)$ for a given K, under volume constraint. In particular, the shape of the solution Ω depends on both the shape of the hole K and the constant d.

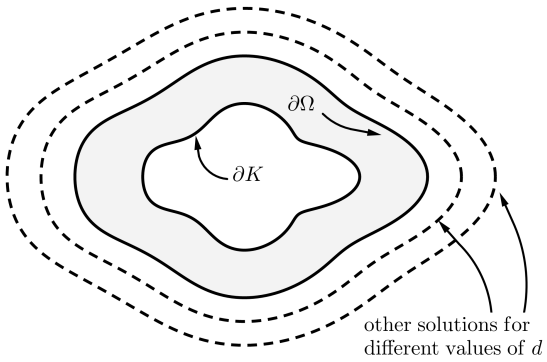


Figure 2: A family of non symmetric solutions of the Bernoulli overdetermined problem

We refer to [HP, pp. 249–262], where some geometrical properties of the solution Ω are examined, such as convexity, the sign of the mean curvature of the boundary and star-shapedness.

2 A two-phase overdetermined problem

As shown in the end of the previous section, we can say that the Bernoulli overdetermined problem admits non symmetric solutions because, despite the overdetermination on part of its boundary, it has a degree of freedom left (namely the shape of the hole K). There is a way of ensuring a degree of freedom (and thus non symmetric solutions) even though the overdetermination is assumed on the whole boundary, namely replacing the Laplacian by a two-phase operator in divergence form.

Let D and Ω be two sufficiently smooth bounded domains of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) that satisfy $\overline{D} \subset \Omega$.

Moreover, let $\sigma = \sigma(x)$ be the piecewise constant function given by

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_c & \text{in } D, \\ 1 & \text{in } \Omega \setminus D, \end{cases}$$

where σ_c is a positive constant such that $\sigma_c \neq 1$.

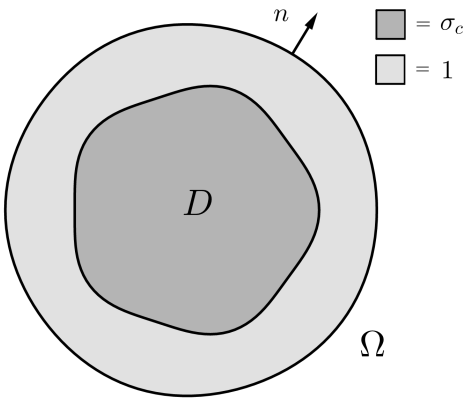


Figure 3: Problem setting for a two-phase overdetermined problem

We consider the following two-phase counterpart of (1.1):

$$-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 1 \quad \text{in } \Omega, \tag{2.4}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2.5}$$

where the solution u is defined weakly, as the unique function $u \in H_0^1(\Omega)$ that satisfies

$$\int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla \psi = \int_\Omega \psi \quad \text{for all } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Moreover, we consider the following overdetermined condition on the boundary:

$$\partial_n u = d \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \text{for some } d \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

We notice that, if (D, Ω) is a solution of the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6), then integration by parts shows that the constant d is linked to the geometry of Ω by the formula

$$d = d(\Omega) = -\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{2.7}$$

If D and Ω are concentric balls, then the unique solution of (2.4)-(2.5) is radial and so it satisfies (2.6) for some d. In what follows we will refer to any pair of concentric balls as a *trivial solution* of the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6).

Since the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6) has one degree of freedom, it is natural to expect it to admit nontrivial (i.e. non symmetric) solutions just like the Bernoulli overdetermined problem does. The search for nontrivial solutions can be divided in the so-called inner and outer problems.

Problem 1 (Inner problem)**.** *For a given domain Ω and a real number $0 < V_0 < |\Omega|$, find a domain $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ with volume $|D| = V_0$, such that the pair (D, Ω) is a solution of the overdetermined problem* (2.4)-(2.5)-(2.6)*.*

Problem 2 (Outer problem)**.** *For a given domain D and a real number $V_0 > |D|$, find a domain $\Omega \supset \overline{D}$ with volume $|\Omega| = V_0$, such that the pair (D, Ω) is a solution of the overdetermined problem* (2.4)-(2.5)-(2.6)*.*

In what follows we will state the main results concerning the existence of nontrivial solutions for the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6), framed for both inner and outer problem. For a given $R \in (0,1)$ let $D_0 \subset \Omega_0$ denote two concentric balls with radii R and 1 respectively whose common center can be thought to be the origin. Notice that any trivial solution coincides with (D_0, Ω_0) modulo a suitable translation and dilation.

The following theorems show the existence of nontrivial solutions as suitable perturbations of the trivial one (D_0, Ω_0).

Theorem I (Local unique solvability for the inner problem, [CMS])**.** *For every domain Ω of class $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ sufficiently close to Ω_0, there exists a domain D of class $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ sufficiently close to D_0 such that the outer problem of the overdetermined problem* (2.4)-(2.5)-(2.6) *admits a solution for the pair (D, Ω).*

Theorem II (Local unique solvability for the outer problem, [CY])**.** *Let us define*

$$\begin{aligned} s(k) &= \frac{k(N+k-1) - (N+k-2)(k-1)R^{2-N-2k}}{k(N+k-1) + k(k-1)R^{2-N-2k}} \text{ for } k \in \mathbb{N}, \\ \Sigma &= \{s \in (0,\infty) \ : \ s = s(k) \text{ for some } k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

If $\sigma_c \notin \Sigma$, then for every domain D of class $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ sufficiently close to D_0, there exists a domain Ω of class $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ sufficiently close to Ω_0 such that the outer problem of the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6) *admits a solution for the pair (D, Ω).*

To our knowledge, [CMS] and later [CY] are the only works concerning nontrivial solutions for the overdetermined problem like (2.4)-(2.5)-(2.6), although the study of symmetry results analogous to Theorem 1.1 in a two-phase setting (for both elliptic and parabolic boundary value problems) is a bit older (see for example [Sa1] and [Sa2]).

3 Two main tools

The proof of Theorems I and II is based on a perturbation argument in which the degree of freedom coming from the two-phase setting is fully exploited. In what follows, we will introduce the two main tools used: the implicit function theorem and shape derivatives.

3.1 Implicit function theorem

We first recall the definition of Fréchet derivative for a general functional between Banach spaces. Let V and W be Banach spaces (whose norms will be indistinctly denoted by $\|\cdot\|$) and let $U \subset V$ be an open subset of V. A function $F : U \to W$ is said to be Fréchet differentiable at $x_0 \in U$ if there exists a bounded linear operator $A : V \to W$ such that

$$\lim_{x \to 0} \frac{\big\|F(x_0 + x) - F(x_0) - Ax\big\|}{\|x\|} = 0.$$

It is easy to show that, when such an operator A exists, then it is also unique. This bounded linear operator will be denoted by $F'(x_0)$ and referred to as the Fréchet derivative of F at x_0 (the term "differential" is also commonly used in this case).

In the particular case when the domain of F is a product of two Banach spaces $V = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, then we can define the *partial Fréchet derivatives* of F at $(x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ as follows:

$$\partial_x F(x_0, y_0) : \mathcal{X} \to W, \quad x \mapsto F'(x_0, y_0)(x, 0),$$
$$\partial_y F(x_0, y_0) : \mathcal{Y} \to W, \quad y \mapsto F'(x_0, y_0)(0, y).$$

The following version of the implicit function theorem will play a fundamental role in proving Theorems (I) and (II).

Theorem 3.1 (Implicit function theorem, [Ni]). *Suppose that $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ and $\mathcal{Z}$ are three Banach spaces, $\mathcal{U}$ is an open subset of $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, and $\Psi : \mathcal{U} \to \mathcal{Z}$ is a Fréchet differentiable mapping such that $\Psi(x_0, y_0) = 0$. Assume that the partial derivative $\partial_y \Psi(x_0, y_0)$ with respect to the variable y at (x_0, y_0) is a bounded invertible linear transformation from $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{Z}$. Then there exists a neighborhood $\mathcal{U}_0$ of x_0 in $\mathcal{X}$ and a unique continuous function $g : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{Y}$ such that $g(x_0) = y_0$, $(x, g(x)) \in \mathcal{U}$ and $\Psi(x, g(x)) = 0$ for all $x \in \mathcal{U}$. Moreover, the function g is Fréchet differentiable in $\mathcal{U}_0$ and its Fréchet differential g' can be written as*

$$g'(x) = -\partial_y \Psi(x, g(x))^{-1} \, \partial_x \Psi(x, g(x)) \quad \text{for } x \in \mathcal{U}_0.$$

3.2 Shape derivatives

Our aim is to apply the functional machinery developed in the previous subsection in order to find a solution to the two-phase overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6). The first difficulty lies in the fact that the set of "shapes", where the solution belongs, is not endowed with a linear structure in any natural way. In what follows we will overcome this obstacle by introducing the so-called *shape derivative*.

We first need some basic notation. Let $\omega \subset \mathbb{R}^N$ be a smooth domain at which we will compute the derivative of a real valued shape functional J (we will therefore require $J(\widetilde{\omega})$ to be defined at least for all domains $\widetilde{\omega}$ "sufficiently close" to the reference domain ω). Let φ be an element of a Banach space V of vector fields from $\mathbb{R}^N$ to itself. For $\|\varphi\|$ small enough, the perturbation of the identity $\mathrm{Id} + \varphi$ is a diffeomorphism of $\mathbb{R}^N$ into itself. Let then $\omega_\varphi = (\mathrm{Id} + \varphi)(\omega)$ denote the deformed domain and set $\mathcal{J}(\varphi) = J(\omega_\varphi)$, whenever the right hand side is well defined. Notice that, by hypothesis, the functional $\mathcal{J}$ is well defined in a neighborhood of $0 \in V$. The shape derivative of J at ω with respect to the direction φ is then defined as a Fréchet derivative:

$$J'(\omega)(\varphi) := \mathcal{J}'(0)(\varphi). \tag{3.9}$$

Of course, the definition above can be extended to functionals that take several domains as input as well.

The concept of shape derivative can be applied to shape functionals that take values in a general Banach space too. A fairly common example is given by a smoothly varying family of smooth functions $u_\varphi : \omega_\varphi \to \mathbb{R}$. In many practical applications u_φ is the solution to some boundary value problem defined on the perturbed domain ω_φ and the shape derivative of u_φ is then defined as the Fréchet derivative of the function $\varphi \mapsto u_\varphi$, as before.

We refer to [HP, Chapter 5] for a self-contained introduction on the topic of shape derivatives and their computation.

4 Sketch of the proofs of Theorems I and II

The proofs of Theorems I and II rely on a perturbation argument based on the implicit function theorem (Theorem 3.1). We will construct a functional Ψ in such a way that its zeros are in a one-to-one correspondence with the solutions of the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6) (near the trivial solution (D_0, Ω_0)).

4.1 The functional Ψ

In what follows we will introduce the preliminary notations in order to define Ψ. For $\alpha \in (0,1)$, let $\varphi \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ be a sufficiently small perturbation field such that the map $\mathrm{Id}+\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a diffeomorphism that satisfies

$$\varphi = fn \quad \text{on } \partial D_0 \quad \text{and} \quad \varphi = gn \quad \text{on } \partial\Omega_0,$$

where f and g are given functions of class $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ and n indistinctly denotes the outward unit normal to both D_0 and Ω_0. Next we define the perturbed domains

$$D_f = (\mathrm{Id}+\varphi)(D_0) \quad \text{and} \quad \Omega_g = (\mathrm{Id}+\varphi)(\Omega_0).$$

We will also require f and g to be sufficiently small, so that the inclusion $\overline{D}_f \subset \Omega_g$ holds and so the boundary value problem (2.4)-(2.5) is well defined for the pair (D_f, Ω_g). In order to apply the implicit function theorem (Theorem 3.1), we consider the following Banach spaces (equipped with the standard norms):

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C^{2+\alpha}(\partial D_0) \ : \ \textstyle\int_{\partial D_0} f \ = 0 \right\}, \quad \mathcal{G} = \left\{ g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega_0) \ : \ \textstyle\int_{\partial\Omega_0} g \ = 0 \right\},$$
$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega_0) \ : \ \textstyle\int_{\partial\Omega_0} h \ = 0 \right\}.$$

Finally, we define the map $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ by

$$\Psi(f,g) = \partial_{n_g} v_{f,g} - \frac{1}{|\partial\Omega_0|} \int_{\partial\Omega_0} \partial_{n_g} v_{f,g} \quad \text{for } (f,g) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{4.10}$$

Here $v_{f,g}$ denotes the solution of the boundary value problem (2.4)-(2.5) corresponding to the deformed configuration (D_f, Ω_g), similarly n_g denotes the outer normal of Ω_g. Moreover, by a slight abuse of notation, the notation $\partial_{n_g} v_{f,g}$ is used to represent the function of value

$$\nabla v_{f,g}\big(x + g(x)\, n(x)\big) \cdot n_g(x + g(x)\, n(x)) \quad \text{at any } x \in \partial\Omega_0. \tag{4.11}$$

Remark 4.1. *It is clear that $\Psi(f,g) = 0$ if and only if the quantity defined in* (4.11) *is constant on $\partial\Omega_0$, that means if and only if the pair (D_f, Ω_g) is a solution to the overdetermined problem* (2.4)-(2.5)-(2.6)*. In particular, we know that $\Psi(0,0) = 0$.*

4.2 Applying the implicit function theorem

The Fréchet differentiability of the map Ψ in a neighborhood of $(0,0) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ can be proved in a standard way by combining the ideas of [HP, Theorem 5.3.2, pp. 183-184] with the Schauder's theory for elliptic operators with piecewise constant coefficients.

Again, by standard computations based on the Hadamard formula ([HP, Theorem 5.2.2, p. 172]) we obtain the following explicit formulas for the two partial Fréchet derivatives of the functional Ψ.

Lemma 4.2 ([CY])**.** *The map $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ defined by* (4.10) *is Fréchet differentiable in a neighborhood of* $(0,0)$*. Moreover, for all $(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, its partial Fréchet derivatives are:*

$$\partial_f \Psi(0,0)(f) = \partial_n v'_-, \qquad \partial_g \Psi(0,0)(g) = \partial_n v'_+ + \partial_{nn} v \, g,$$

where the functions $v'_\pm$ are the solutions to the following transmission problems.

$$\begin{cases} \Delta v'_- = 0 \quad \text{in } D_0 \cup (\Omega_0 \setminus \overline{D_0}), \\ [\sigma\, \partial_n v'_-] = 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ [v'_-] = -[\partial_n v] f \quad \text{on } \partial D_0, \\ v'_- = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} \Delta v'_+ = 0 \quad \text{in } D_0 \cup (\Omega_0 \setminus \overline{D_0}), \\ [\sigma\, \partial_n v'_+] = 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ [v'_+] = 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ v'_+ = -\partial_n v\, g \quad \text{on } \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{4.13}$$

In the above, v is the solution of (2.4)-(2.5)*, and square brackets are used to denote the jump of a function across the interface ∂D_0.*

A careful analysis of the expressions for $\partial_f \Psi(0,0)$ and $\partial_g \Psi(0,0)$ by means of the spherical harmonic expansions of the functions $v'_\pm$ yields the following theorems.

Theorem 4.3 ([CMS])**.** *The map $\partial_f \Psi(0,0) : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ is a bounded invertible linear transformation.*

Theorem 4.4 ([CY])**.** *Let Σ be the set defined by* (2.8) *and suppose that $\sigma_c \notin \Sigma$. Then, the map $\partial_g \Psi(0,0) : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ is a bounded invertible linear transformation.*

As stated in Remark 4.1, $\Psi(f,g) = 0$ if and only if (D_f, Ω_g) is a solution to the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6). Moreover, we know that $\Psi(0,0) = 0$ and that Ψ is Fréchet differentiable in a neighborhood of $(0,0) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Therefore, in order to apply the implicit function theorem to Ψ, we just need to study the invertibility of the partial Fréchet derivative. Now, in the light of the above, by taking $\mathcal{X} = \mathcal{G}$ and $\mathcal{Y} = \mathcal{F}$ in Theorem 3.1, we see that Theorem 4.3 implies Theorem I. On the other hand, by taking $\mathcal{X} = \mathcal{F}$ and $\mathcal{Y} = \mathcal{G}$ in Theorem 3.1, we see that Theorem 4.4 implies Theorem II.

5 Numerical simulation for the outer problem

In [CY], we also present a numerical algorithm to find an approximate solution of Problem 2. For a given D, we consider the following Kohn–Vogelius functional (we refer to [KV], where a similar functional was first introduced in the study of electrical impedance tomography):

$$\Phi(\Omega) = \int_\Omega \sigma |\nabla v - \nabla w|^2,$$

Here, v is the solution to the Dirichlet boundary value problem (2.4)-(2.5) and w is the solution to the Neumann boundary value problem (2.4)-(2.6), where the constant $d = d(\Omega)$ is the one defined by (2.7) and the solution w is normalized in such a way that $\int_{\partial\Omega} w = 0$. By definition, it is clear that $\Phi(\Omega) = 0$ if and only if the pair (D, Ω) solves the overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6). Moreover, if (D, Ω) is not a solution, then $\Phi(D, \Omega) > 0$. This means that, under the hypothesis of Theorem II (i.e. when D and σ_c are such that we have existence of a nontrivial solution), the following constrained minimization problem is equivalent to Problem 2:

$$\min_{|\Omega| = V_0} \Phi(\Omega), \tag{5.14}$$

where the minimization is considered among all sets Ω that contain the closure of D. This observation is at the heart of the iterative algorithm introduced in [CY].

In what follows, we will give a brief description of the algorithm. Starting from a given initial shape Ω_0, we compute the steepest descent with respect to the functional Φ and then iteratively update Ω accordingly. This gives rise to a sequence $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ of domains that converges to the desired solution of Problem 2. In order to find the steepest descent of the Kohn–Vogelius

functional Φ, one computes the shape derivative of Φ with respect to the perturbation $x \mapsto x + \varphi(x)$ acting on the subdomain $\Omega \setminus \overline{D}$. Using the same notation of (3.9), we can write (after some lengthy calculations)

$$\Phi'(\Omega)(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \{-|\nabla w|^2 + 2(1 + d(\Omega)H)w - |\nabla v|^2 + 2d(\Omega)^2\}\varphi \cdot n,$$

where H is the sum of the principal curvatures of $\partial\Omega$ (here we adopt the convention that H is nonnegative if Ω is convex). Therefore, the steepest descent of the functional Φ is given by:

$$x \mapsto x - \left(-|\nabla w|^2 + 2(1 + d(\Omega)H)w - |\nabla v|^2 + 2d(\Omega)^2\right) n, \quad \text{for } x \in \partial\Omega. \tag{5.15}$$

Remark 5.1. *In reality, the actual implementation of the iterative algorithm we discussed above is a bit more complicated. First of all, since* (5.14) *is a constrained minimization problem, we need to introduce a so-called* augmented Lagrangian *(see [NW, Sections 17.3 and 17.4]). By employing the use of the augmented Lagrangian, we turn* (5.14) *into an equivalent (but unconstrained) minimization problem.*

There is yet another subtle point, that has to be addressed when considering the numerical implementation of such an algorithm. The explicit formula (5.15) *for the steepest descent of* Φ *is only defined on the boundary* $\partial\Omega$*. The choice of a well-behaved extension of the descent direction is a crucial part of the numerical implementation. Indeed, a poor choice of the extension is likely to result in a pathologic behavior when updating the mesh according to the descent direction (see [AP] where some standard extension methods are presented).*

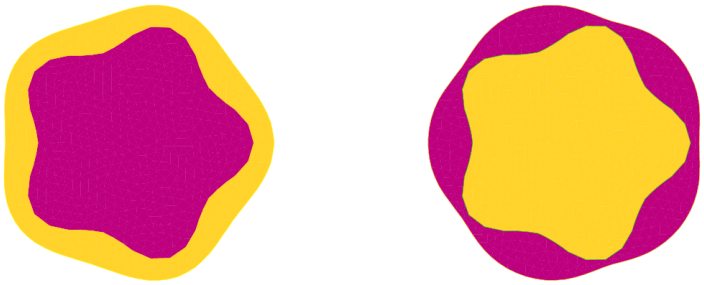


Figure 4: The solution Ω inherits the geometry of D, but in different ways depending on the value of σ_c. The computed solutions for $\sigma_c > 1$ on the left, $\sigma_c < 1$ on the right.



Figure 5: When the influence of D is small, the two-phase overdetermined problem (2.4)-(2.5)-(2.6) can be approximated by the Serrin overdetermined problem (1.1)-(1.2). Here, the computed solutions Ω when D is small (on the left) and when σ_c is close to 1 (on the right). In both cases, the computed Ω is virtually indistinguishable from a ball.

References

[Al] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large V*. Vestnik Leningrad Univ., 13 (1958): 5–8(English translation: Trans. Amer. Math. Soc., 21 (1962), 412–415).

[AP] G. Allaire, O. Pantz, *Structural optimization with freefem++*. Struct. Multidisc. Optim., 32 (2006): 173–181.

[CMS] L. Cavallina, R. Magnanini, S. Sakaguchi, *Two-phase heat conductors with a surface of the constant flow property*. arXiv:1801.01352

[CY] L. Cavallina, T. Yachimura, *On a two-phase Serrin-type problem and its numerical computation*. arXiv:1811.07156

[DFOP] C. Dapogny, P. Frey, F. Omnès, Y. Privat, *Geometrical shape optimization in fluid mechanics using Freefem++*. Struct. Multidisc. Optim., (2018). https://doi.org/10.1007/s00158-018-2023-2

[EH] K. Eppler, H. Harbrecht, *On a Kohn–Vogelius like formulation of free boundary problems*. Comput. Optim. Appl. 52 (2012): 69–85.

[FR] M. Flucher, M. Rumpf, *Bernoulli's free boundary problem, qualitative theory and numerical approximation*. J. Reine Angew. Math. 486 (1997): 165–204.

[He] F. Hecht, *New development in freefem++*. J. Numer. Math., 20 (2012):no. 3-4, 251–265.

[HP] A. Henrot, M. Pierre, Variation et optimisation de formes. Mathématiques & Applications. Springer Verlag, Berlin (2005).

[KV] R.V. Kohn, M. Vogelius, *Relaxation of a Variational Method for Impedance Computed Tomography*. Comm. Pure Appl. Math., 40 (1987): 745–777.

[Ni] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis, Revised reprint of the 1974 original. Courant Lecture Notes in Mathematics, 6, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[NW] J. Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization, Springer, (2006).

[Sa1] S. Sakaguchi, *Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 48 (2016), 167–187.

[Sa2] S. Sakaguchi *Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface and their related elliptic overdetermined problems*, arXiv:1705.10628v2, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, to appear.

[Se] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (1971): 304–318.

Metric algebroid における Double 構造

北里大学大学院理学研究科分子科学専攻
森 遥 (Haruka MORI)

概要

Metric algebroid とは，Courant algebroid の拡張として定義される新しい代数構造であり，物理的には Double Field Theory (DFT) におけるゲージ対称性と関連する事が知られている．本研究では，metric algebroid が Courant algebroid を経由しなくても 2 つの Lie algebroid から直接構成できることを新たに確かめた．また，この 2 つの Lie algebroid は Lie bialgebroid から derivation 条件を緩めたものである事がわかった．

1 はじめに

弦理論は，「物理現象を記述する基本要素は，1 次元の広がりを持った弦である」という仮定のもとで考えられた理論であり，量子化された重力を記述する理論の有力な候補として非常に重要な理論である．弦理論の大きな特徴としては，T 双対性の存在があげられる．これは，弦が円周にコンパクト化された空間に巻きつけられることに由来し，巻きついた弦の半径を R として組み立てても，その逆数 $1/R$ として組み立てても同じ理論が得られるということを意味している．

Double Field Theory (DFT) は，T 双対性を明示的に含んだ重力理論である．これは、通常は d 次元の時空座標を，倍の $2d$ 次元にすることで実現されている．DFT におけるゲージ対称性の記述方法は，主に [1, 2] で調べられており，C-bracket と呼ばれる括弧積が与えられている．

C-bracket の特徴は，**Jacobi 恒等式を満たさない**という点である．したがって，DFT のゲージ対称性の背景にある代数構造は，少なくとも Lie algebra ではない別の構造である．C-bracket によって生成される数学的構造が何であるかについては主に [3, 4, 5] で議論されており，[5] の著者である Vaisman は，この構造を metric algebroid と呼んでいる．詳細は後述するが，metric algebroid は Courant algebroid を定義する関係式のうち，いくつかを緩めたものとして定義される．

Metric algebroid は，本来は物理的な需要から提示された構造であり，数学として他の構造との間にどのような関係があるのかはあまり調べられてこなかった．Metric algebroid を定義する際に基礎となる Courant algebroid に立ち返ってみると，Courant algebroid は，Lie bialgebroid の Drinfel'd double として得られる構造であることが示されている [6]．これは，Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ の Drinfel'd double として Lie algebra $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ を構成する一連の手順を，Lie bialgebroid の場合へと一般化したものである．したがって，metric algebroid も，何らかの algebroid の double として得られるのではないかと考えられる．本研究では，metric algebroid が，2 つの Lie algebroid (注: Lie bialgebroid **ではない**) の double によって与えられることを明らかにした．

本稿では，はじめに基本となる Lie bialgebra やその Drinfel'd double についてまとめる．次に，Lie (bi)algebroid と Courant algebroid の定義を与え，Lie bialgebroid の Drinfel'd double について述べる．最後に，本題となる metric algebroid と，その背景にある algebroid 構造について述べる．

2 Lie bialgebra と Drinfel'd double

2.1 Lie bialgebra

V をベクトル空間，$[\cdot,\cdot]: V\times V\to V$ を反対称で双線型な括弧積 (Lie bracket) として，体 K 上の Lie algebra (代数) $\mathfrak{g}$ を $(V,[\cdot,\cdot])$ で与える．このとき，Lie bracket $[\cdot,\cdot]$ は **Jacobi 恒等式を満たしている**．V がベクトル空間であることから，その双対空間 V^* に対しても，双対な Lie bracket $[\cdot,\cdot]^*$ を与えることで，$\mathfrak{g}$ と双対な Lie algebra $\mathfrak{g}^*$ を定義することができる．また，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の間に自然に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定義できる．

$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ の co-bracket を $\delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ とする．δ が以下の 1-cocycle 条件を満たすのであれば，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\delta)$ は Lie bialgebra となる．ただし，$x,y\in\mathfrak{g}$ であり，ad_x は x の adjoint 表現[*1]である:

$$\delta([x,y])=\mathrm{ad}^{(2)}_x\delta(y)-\mathrm{ad}^{(2)}_y\delta(x). \tag{1}$$

$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\delta)$ が揃っていれば，$(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]^*,\mu^*)$ は内積を通して誘導できるので，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\delta)$ だけで Lie bialgebra を定義できる[*2]．また，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\delta)$ が Lie bialgebra であれば，$(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]^*,\mu^*)$ も Lie bialgebra である．言い換えれば，$[\cdot,\cdot]^*$ の co-bracket を考えても Lie bialgebra を与えられる[*3]．以降，Lie bialgebra のことを $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ と表記する．

2.2 Drinfel'd double

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の直和 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ を考える．$x,y\in\mathfrak{g},\xi,\eta\in\mathfrak{g}^*$ としたとき，$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ 上に非退化な双線型形式 $(\cdot,\cdot):\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*\to K$ を

$$(x,y)=(\xi,\eta)=0,\quad (x,\xi)=\langle x,\xi\rangle. \tag{2}$$

のように定義できる．また，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を subalgebra とするような Lie algebra $\mathfrak{d}$ を定義できる．$[\cdot,\cdot]_\mathfrak{d}$ は次のように与えられる[*4]:

$$[x,y]_\mathfrak{d}=[x,y],\quad [\xi,\eta]_\mathfrak{d}=[\xi,\eta]^*,\quad [x,\xi]_\mathfrak{d}=-\mathrm{ad}^*_\xi x+\mathrm{ad}^*_x\xi. \tag{3}$$

$(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{d}$ 上の Lie bracket $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{d}$ に対して不変であり，次の式が成立する:

$$(x,[y,\xi]_\mathfrak{d})=([x,\xi]_\mathfrak{d},y). \tag{4}$$

[*1] $\mathrm{ad}_x:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ であり，$x,y\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}_x(y)=[x,y]$.

[*2] $[\cdot,\cdot]^*$ を δ の転置 $\delta^*:\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ として与えればよい.

[*3] $[\cdot,\cdot]^*$ の co-bracket として $\mu^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ を与え，その転置 μ として Lie bracket $[\cdot,\cdot]$ を与えても Lie bialgebra $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]^*,\mu^*)$ を得ることができる.

[*4] ad^*_ξ は，$\langle\mathrm{ad}_\xi\eta,x\rangle=-\langle\eta,\mathrm{ad}^*_\xi x\rangle$ となるように定義する．すなわち，$\mathrm{ad}_\xi\eta=[\xi,\eta]^*$.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ に対して，$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ に Lie bracket が定義されたものを $\mathfrak{g}$ の Drinfel'd double と呼び，一般に $\mathfrak{d}$ や，$\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ と表す．本文中では $\mathfrak{d}$ と表記する．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*, \mathfrak{d})$ の組を Manin triple という．

3 Lie bialgebroid と Drinfel'd double

3.1 Lie algebroid

Lie algebroid は，底空間 M と，その上のベクトル束 L，anchor map と呼ばれる写像 $a : L \to TM$ の組 (M, L, a) として定義される．一般的に，あるベクトル束からベクトル場を取り出す操作は切断と呼ばれるが，これを本文中では Γ で表すことにする．TM の切断で得られるベクトル場 $\Gamma(TM)$ に対して，Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ が定義できるのと同じように，L の切断で得られるベクトル場 $\Gamma(L)$ に対して新たに Lie algebroid bracket $[\cdot, \cdot]_L$ を定義することができる．このとき，anchor map は $[\cdot, \cdot]$ に対して準同型である．すなわち，$[\cdot, \cdot]$ と $[\cdot, \cdot]_L$ は以下のように対応する．$X, Y \in \Gamma(L)$ とすると，

$$a[X, Y]_L = [a(X), a(Y)]. \tag{5}$$

また，$f \in C^\infty(M)$ とすると，$[\cdot, \cdot]_L$ における Leibnitz rule は以下のように定義される:

$$[X, fY]_L = f[X, Y]_L + (a(X)f)Y. \tag{6}$$

底空間 M が 1 点しかない多様体の場合，Lie algebroid は Lie algebra となる．

L に双対なベクトル束 L^* に対しても，同様に (L と双対な) Lie algebroid を定義することができる．L^* 側で定義した Lie algebroid における anchor map を $a_* : L^* \to TM$， Lie algebroid bracket を $[\cdot, \cdot]_{L^*}$ と表記する．(5) と同様に，$\xi, \eta \in \Gamma(L^*)$ としたとき

$$a_*[\xi, \eta]_{L^*} = [a_*(\xi), a_*(\eta)] \tag{7}$$

が成立する．また，$[\cdot, \cdot]_{L^*}$ に対する Leibnitz rule は以下のように定義される:

$$[\xi, f\eta]_{L^*} = f[\xi, \eta]_{L^*} + (a_*(\xi)f)\eta. \tag{8}$$

Lie algebra の時と同様に，L と L^* の間には自然に内積が定義できる．また，$\Gamma(\wedge^p TM)$ や $\Gamma(\wedge^q T^*M)$ における (multi)vector や form の一般化として，$\Gamma(\wedge^p L)$ や $\Gamma(\wedge^q L^*)$ 上にも外積代数を考えることができる．Lie algebroid derivative $\mathrm{d} : \Gamma(\wedge^p L^*) \to \Gamma(\wedge^{p+1} L^*)$ は以下のように定義される[*5]．$\xi \in \Gamma(\wedge^p L^*), X_i \in \Gamma(L)$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-)^{i+1} a(X_i)\big(\xi(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_p + 1)\big) \\ &+ \sum_{i<j} (-)^{i+j}\big(\xi([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{p+1})\big). \end{aligned} \tag{9}$$

同様に，Lie 微分や内部積も定義でき，$\Gamma(\wedge^p L^*)$ 上の外積代数は $\Gamma(\wedge^q T^*M)$ 上の外積代数とほとんど同じように扱うことができる．

[*5] 双対な Lie algebroid derivative $\mathrm{d}_* : \Gamma(\wedge^p L) \to \Gamma(\wedge^{p+1} L)$ も同様に与えられる．

3.2 Lie bialgebroid

Lie algebroid と，双対な Lie algebroid の組 (L, L^*) に対して，Lie bialgebroid を定義できる．(L, L^*) が Lie bialgebroid であれば，以下の derivation 条件を**必ず満たす**[*6]．これは，Lie bialgebra における 1-cocycle 条件 (1) に対応する:

$$\mathrm{d}_*[X,Y]_L = [\mathrm{d}_*X, Y]_L + [X, \mathrm{d}_*Y]_L. \tag{10}$$

底空間 M が 1 点しかない多様体の場合，Lie bialgebroid は Lie bialgebra となる．

3.3 Courant algebroid

Courant algebroid は，底空間 M 上の ベクトル束 E に対して，以下の 5 つの関係式

$$[[e_1,e_2]_{\mathrm{C}},e_3]_{\mathrm{C}} + \text{c.p.} = \mathcal{D}T(e_1,e_2,e_3); \tag{i}$$
$$\rho[e_1,e_2]_{\mathrm{C}} = [\rho(e_1),\rho(e_2)]; \tag{ii}$$
$$[e_1,fe_2]_{\mathrm{C}} = f[e_1,e_2]_{\mathrm{C}} + (\rho(e_1)f)e_2 - (e_1,e_2)_+\mathcal{D}f; \tag{iii}$$
$$(\mathcal{D}f,\mathcal{D}g) = 0; \tag{iv}$$
$$\rho(e)(h_1,h_2) = ([e,h_1]_{\mathrm{C}} + \mathcal{D}(e,h_1),h_2) + (h_1,[e,h_2]_{\mathrm{C}} + \mathcal{D}(e,h_2)) \tag{v}$$

を満たすような，

1. 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot,\cdot)_+$,
2. 括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{C}}$,
3. anchor map $\rho : E \to TM$

の組 $(E,(\cdot,\cdot)_+,[\cdot,\cdot]_{\mathrm{C}},\rho,M)$ として定義される．(i) は，括弧積の Jacobi 恒等式が 0 にならないという性質を表し，Lie algebra (あるいは Lie algebroid) とは明らかに異なる構造であることを示している．(ii) は，ρ が $\Gamma(TM)$ 上の Lie 代数に対して準同型であることを意味する．(iii) は Leibnitz rule を表している．(v) は，双線型形式と anchor map が両立することを意味する．

Courant algebroid は，そのひとつの実例として，Lie bialgebroid の Drinfel'd double によって得られる構造であることが知られている [6]．Lie bialgebra の時と同様に，L と L^* の直和により新たなベクトル束 $E = L \oplus L^*$ を導入する．$e_i \in \Gamma(E)$，すなわち $e_i = X_i + \xi_i$ としたとき，$\Gamma(E)$ 上の非退化な双線型形式 $(\cdot,\cdot)_\pm$ は

$$(e_1,e_2)_\pm = \frac{1}{2}(\langle\xi_1,X_2\rangle \pm \langle\xi_2,X_1\rangle) \tag{11}$$

のように定義される．ρ は以下のように定義する:

$$\rho(e_i) = a(X_i) + a_*(\xi_i). \tag{12}$$

また，$\mathcal{D} : C^\infty(M) \to \Gamma(E)$ は

$$(\mathcal{D}f,e_i) = \frac{1}{2}\rho(e_i)f \tag{13}$$

[*6] この条件は $[\cdot,\cdot]_{L^*}$ 側で定義してもよい．(10) 式は，$\mathrm{d}[\xi,\eta]_{L^*} = [\mathrm{d}\xi,\eta]_{L^*} + [\xi,\mathrm{d}\eta]_{L^*}$ と等価である．

のように定義する．上述の ρ の定義と合わせると，$\mathcal{D} = \mathrm{d} + \mathrm{d}_*$ と表すことができる．この場合の Courant algebroid を定義する括弧積として，Courant bracket $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{C}}$

$$\begin{aligned}[e_1, e_2]_{\mathrm{C}} = [X_1, X_2]_L + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - \mathrm{d}_*(e_1, e_2)_- \\ + [\xi_1, \xi_2]_{L^*} + \mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1 + \mathrm{d}(e_1, e_2)_-. \end{aligned} \tag{14}$$

を導入する．この括弧積は，[6] で与えられたものであり，C-bracket と形式的には同じ形である[*7]．$(L, L^*, L \oplus L^*)$ の組は，上述の Lie algebra での Manin triple の，algebroid への拡張となっている．

4 metric algebroid

Metric algebroid は，2012 年に Vaisman によって提唱された新しい algebroid 構造である [5]．Courant algebroid と比較すると，

1. 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot,\cdot)_+$,
2. 括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$,
3. anchor map $\rho : E \to TM$

の組 $(E, (\cdot,\cdot)_+, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho, M)$ として定義される点は同じだが，これらが満たす関係式は前述の Courant algebroid を定義する関係式のうち，(iii) と (v) の **2 式のみでよい**．この意味で Courant algebroid をさらに一般化したものであると捉えることができる．

5 結果

まず，$[e_1, e_2]_{\mathrm{C}}$ に基づいて Courant algebroid の関係式を改めて確認してみると，各関係式を導く過程で，derivation 条件を使うものと使わないものに分けることができた．具体的には，関係式 (i), (ii) と (v) を導く過程では derivation 条件を必ず用いており，(iii) と (v) は derivation 条件とは無関係な条件式である．metric algebroid が満たすべき関係式は　(iii) と (v) となっていることから，図 1 に示すように，その double が metric algebroid になるような algebroid は，Lie bialgebroid から derivation 条件だけを緩めたような 2 つの Lie algebroid の組であることがわかった．したがって，metric algebroid を定義する際に必要となる括弧積は，(14) で例示した Courant bracket と全く同じ形となる．表記上 metric algebroid の括弧積であると明確にするために，$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ と表す．その具体的な表記は

$$\begin{aligned}[e_1, e_2]_{\mathrm{V}} = [X_1, X_2]_L + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - \mathrm{d}_*(e_1, e_2)_- \\ + [\xi_1, \xi_2]_{L^*} + \mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1 + \mathrm{d}(e_1, e_2)_- \end{aligned} \tag{15}$$

のように与えられる．この 2 つの Lie algebroid と metric algebroid の組は，Manin triple のさらなる一般化とみることができる．

[*7] この括弧積は，時系列としては先に [6] で定義された．Courant algebroid の歴史に関しては，[7] にまとめられている．

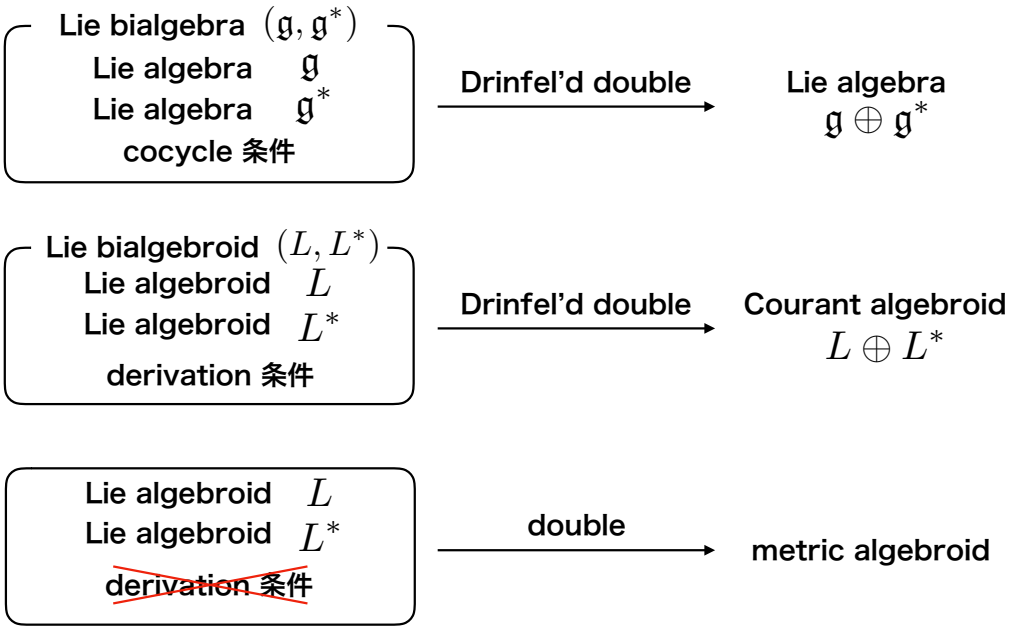


図 1　ここまでの algebra や algebroid のつながりを図にするとこのようになる．double をとることで metric algebroid を構成するような別の構造がないのかを調べた結果，鍵は derivation 条件の有無にあることが明らかとなった．

また，この結果に関連して，実際に DFT における C-bracket が metric algebroid の括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ そのものであることを示した．これは，metric algebroid が表れるひとつの例となっている．はじめに述べた通り，DFT のゲージ対称性は倍化された時空間上の C-bracket で記述される．倍化された時空間として，偶数次元の para-Hermitian 多様体 $\mathcal{M}$ を導入すると，para-complex 構造によって接束 $T\mathcal{M}$ は $L \oplus \tilde{L}$ の形に分割される．$L, \tilde{L}$ 上にはそれぞれ Lie algebroid を定義できるが，これらの Lie algebroid の間には derivation 条件は成立していないことが確かめられる．すなわち，$(L, \tilde{L})$ は Lie bialgebroid にはなっていない．したがって，$L \oplus \tilde{L}$ 上には metric algebroid を定義でき，C-bracket が生成する代数構造は metric algebroid であるといえる．加えて，これらの構造を手がかりに，DFT において強い拘束条件 (strong constraint) を課すということは，数学的にどのような操作に対応するのかを探ることができる．以上の議論は，[8] で行った．

参考文献

[1] C. Hull and B. Zwiebach, "The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets," *JHEP* **0909** (2009) 090 [arXiv:0908.1792].

[2] O. Hohm and B. Zwiebach, "Large Gauge Transformations in Double Field Theory," *JHEP* **1302** (2013) 075 [arXiv:1207.4198].

[3] O. Hohm and B. Zwiebach, "Towards an invariant geometry of double field theory," *J. Math. Phys.* **54** (2013) 032303 [arXiv:1212.1736].

[4] A. Deser and C. Sämann, "Derived Brackets and Symmetries in Generalized Geometry and

Double Field Theory," *PoS CORFU* **2017** (2018) 141 [arXiv:1803.01659].

[5] I. Vaisman, "On the geometry of double field theory," *J. Math. Phys.* **53** (2012) 033509 [arXiv:1203.0836].

[6] Z.-J. Liu, A. Weinstein and P. Xu, "Manin Triples for Lie Bialgebroids," *J. Differential Geom.* **45** (1997) 547 [arXiv:dg-ga/9508013].

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach, "Courant Algebroids. A Short History," *SIGMA* **09** (2013) 014 [arXiv:1212.0559].

[8] H. Mori, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Doubled Aspects of Vaisman Algebroid and Gauge Symmetry in Double Field Theory," arXiv:1901.04777.

ポスターセッション
会場 E

Graded $\mathbb{E}_\infty$-rings and projective spectral schemes

信州大学理学部 博士研究員
小原 まり子 / Mariko Ohara

本研究は $\mathbb{E}_\infty$-環上に次数 (特に $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$) の概念を適切に定義し, 射影スペクトラルスキームを開被覆により定式化し, 最終的に Serre の定理を証明するものである. しかし今回のテクニカルレポートでは余白が狭すぎるため, 次数付き加群までを説明する.

次数付き $\mathbb{E}_\infty$-環というものは, 学部生を経た人は概ね知っている存在である. 今回の研究は, 次数付きという概念を一般の圏に定義するのに, 何が適切なのかを考えた, というものである.

その結果, 対称モノイダル圏 $\{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ から得られる無限オペラドと, そこからの関手のなす無限圏に Day convolution を入れたものを用いるのが良いことに気が付いた. そして我々はその無限圏に於いて, 次数 0 への制限および一元局所化が $\mathbb{E}_\infty$-環構造を落とさずに定式化出来ることを示した. また, この結果は古典の場合においても (次数付き環や加群を元を用いて表示しないという意味で) 今までの理論の refinement を与えている.

1 無限圏とその写像空間

$n \geq 0$ に対し, $[n]$ を有限順序集合 $\{0, \cdots, n\}$ とする. 射 $[m] \to [n]$ は順序を保つ射とする. Δ を対象は有限順序集合, 射は順序を保つ射からなる圏とする.

Δ^{op} を Δ の反対圏とする. 単体的集合とは反変関手 $S : \Delta^{op} \to \mathrm{Sets}$ のことである, ここで Sets は $\mathbb{U}$-small な集合のなす圏である. S の n-単体を S_n とかく.

順序を保つ写像 $d^i : [n-1] \to [n]$

$$d^i(k) = \begin{cases} k & (k < i), \\ k+1 & (k \geq i). \end{cases}$$

から決まる射 $d_i : S_n \to S_{n-1}$ を face という.

順序を保つ写像 $s^i : [n+1] \to [n]$

$$s^i(k) = \begin{cases} k & (k \leq i), \\ k-1 & (k > i). \end{cases}$$

から決まる射 $s_i : S_n \to S_{n+1}$ を degeneracy という.

我々は Set_Δ という記号で単体的集合のなす圏を考える.

T, S, M, N を単体的集合とする. 次の実線からなる図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & S \\ \downarrow{\scriptstyle p} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle q} \\ N & \longrightarrow & M. \end{array}$$

$p : T \to N$ (resp. $q : S \to M$) が q (resp. p) に対して左 (resp. 右) 持ち上げ性質を持つとは破線の矢印があり, 図式が可換になるときに言う.

Definition 1.1 (cf. [2], Definition 1.1.2.4)**.** S と M を単体的集合とする. $p : S \to M$ を単体的集合の間の射とする. S が無限圏とは以下の実線の図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_i & \longrightarrow & S \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n, & & \end{array}$$

に対して破線の矢印が存在し, 図式が $0 < i < n$ に対して可換になること. S が Kan 複体であるとは上の実線の図式に対して破線の矢印が $0 \leq i \leq n$ の範囲で存在し図式が可換になるときに言う.

Example 1.2. Kan 複体は定義より勿論無限圏であるが, 通常の圏のナーブは無限圏である.

さて無限圏は単体的集合の一種であった. しかし圏というからにはその頂点を対象とみなし何か写像の族を考えたい. その写像の族は高次の射の構造も持っているべきである.

単体的集合 S とその頂点 x と y に対し, 単体的集合 $\mathrm{Map}_S(x, y)$ を以下のように定義する.

Definition 1.3 (無限圏における写像空間)**.** S を単体的集合とし S^{Δ^1} を $[n]$ を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(\Delta^1 \times \Delta^n, S)$ に送る対応により定まる単体的集合とする. $s, t : [0] \to [1]$ を $s(0) = 0$ と $t(0) = 1$ により定まる写像とする. 頂点 $x, y \in S$ をとる. x から y への写像空間 $\mathrm{Map}_S(x, y)$ を以下の pullback で定める;

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_S(x, y) & \longrightarrow & S^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s,t)} \\ * & \xrightarrow{(x,y)} & S \times S, \end{array}$$

ここで射の組 (s,t) は, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(\{0\}\times\Delta^n,\, S)$ を第一成分の n-単体 S_n に送り $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(\{1\}\times\Delta^n,\, S)$ を第二成分の n-単体 S_n に送るもので, 射 (x,y) は $*$ を $(x,y)\in S\times S$ に送るものである.

もし S が無限圏なら $\mathrm{Map}_S(x,\, y)$ は Kan 複体になる.

2　対称モノイダル圏と無限オペラド

$\langle n\rangle = \{*,\, 1,\, 2, \ldots,\, n\}$ とする. $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ を基点付き有限集合とする. $\langle n\rangle$ の基点は $*$. $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ の射とは基点付き有限集合の射, 基点を保つ射のことである.

対称モノイダル無限圏とは余カルテジアンファイブレーション $p : \mathcal{C}^\otimes \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ で, Segal 条件を満たすもののことを言う [3, Definition 2.0.0.7].

Example 2.1. 一点からなる対称モノイダル圏 [0] を考えよう. この積構造は $\{0\}\subset\mathbb{Z}$ を対称モノイダル圏の充満部分圏と見た時に入れることが出来る. 包含写像 $\{0\}\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ は対称モノイダル関手になっている. このとき, 我々は忘却関手により [0] から Segal category $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ へ圏同型を得る.

Example 2.2. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ および整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は足し算 $+$ により対称モノイダル圏とみなすことが出来る. ここで, 射は同型射に限ることとする.

対称モノイダル無限圏 $p : \mathcal{C}^\otimes \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ に対して そこにおける可換環対象を, p の切断で惰性射を惰性射に移すものと定める [3, Definition 2.1.2.7].

Remark 2.3 ([3], Remark 2.0.0.5, Construction 2.1.1.7). 対称モノイダル圏から無限オペラドを作る手順がある. $(\mathcal{C},\otimes)$ を対称モノイダル圏とする. このとき新たな圏 $\mathcal{C}^\otimes$ を次のように定義する [3, 2.0.0.1, Example 2.1.1.5]

$$\mathrm{Mul}_{\mathcal{C}}(\{X_i\}_{i\in I},\, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\otimes_{i\in I}X_i, Y).$$

一般的な射の族の構成 [3, Construction 2.1.1.7] より, 縁付きオペラド $\mathcal{O}$ から新たな圏 $\mathcal{O}^\otimes$ ができる.

Definition 2.4. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ および整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は足し算 $+$ により対称モノイダル圏とみなすことが出来る. ここで, 射は同型射に限ることとする. 射の集合を $M\!ul(\{X_i\}_{i\in I},\, Y) = \mathrm{Hom}(\otimes_{i\in I}X_i,\, Y)$ と定める. Remark 2.3 よりこの対称モノイダル圏か

ら縁付きオペラドができる. そして縁付きオペラドのナーブを取ることにより対称モノイダル無限圏 $N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{N}}^{\otimes}) \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ と $N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\otimes}) \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ が得られる. これは本稿で用いる無限オペラドの一種である. またそのベースとなる無限圏は $N_\Delta(\mathbb{N})$ および $N_\Delta(\mathbb{Z})$ となる.

2.1 $\mathrm{Fun}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathrm{Sp})$ 上の積構造; Day convolution

ここで無限圏上の Day convolution について復習する.

Definition 2.5. $\mathcal{C}^{\otimes} \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ を対称モノイダル無限圏とする. 関手 $N_\Delta(\mathbb{Z})$ から $\mathcal{C}$ へのなす無限圏 $\mathrm{Fun}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathcal{C})$ を考える.

[8, Proposition 2.11] における構成および [8, Lemma 2.13] より, 我々は $N_\Delta(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{\otimes})$ と $\mathcal{C}^{\otimes}$ の対称モノイダル構造と Day convolution $\hat{\otimes}$ による積を持つ, 対称モノイダル無限圏 $\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathcal{C})^{\hat{\otimes}} \to N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)$ を得る.

Proposition 2.6 ([8], Lemma 2.13)**.** 対称モノイダル圏 $\mathcal{C}^{\otimes}$ および $\mathcal{D}^{\otimes}$ のテンソル積が順極限と各成分ごとに可換ならば, $\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(\mathcal{C}, \mathcal{D})^{\hat{\otimes}}$ に入っている *Day convolution* もまた各成分ごとに順極限と可換になる.

Example 2.7. Mandell-May-Schwede-Shipley は $\mathcal{D}$-スペクトラムの圏において対称モノイダル構造を定義している. それは Day convolution で与えられている (cf. [7, Definition 1.9, Definition 21.4]). この理論は $\mathbb{Z}$ で添字付けられたスペクトラム達の理論にも使える. またその積を coend で以下のように定義していた

$$(X \hat{\otimes} Y)_c = \int^{(c_1,c_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(c_1 + c_2, c) \otimes X_{c_1} \otimes Y_{c_2},$$

and the inner hom $[X,\, Y]_{\hat{\otimes}}$ by the end

$$([X,\, Y]_{\hat{\otimes}})_c = \int_{(c_1,c_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathrm{Map}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(c_1 + c,\, c_2), \mathrm{Map}(X_{c_1}, Y_{c_2})).$$

X を無限圏 $\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}),\, \mathcal{C})^{\hat{\otimes}}$ の対象とする. このとき記号 X_i により $i \in \mathbb{Z}$ における X の値を表すこととする.

3　次数$\mathbb{Z}$(または$\mathbb{N}$) $\mathbb{E}_\infty$-環と 次数$\mathbb{Z}$加群

我々は$\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{M})$という記号を無限オペラドのファイブレーション$\mathcal{M} \to \mathcal{O}$と無限オペラド$\mathcal{O}' \to \mathcal{O}$により得られる環対象に対して使う [3, Definition 2.1.3.1].

Definition 3.1.　(i) 次数$\mathbb{Z}$付き$\mathbb{E}_\infty$-環のなす無限圏を

$$\mathrm{Alg}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)/N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathrm{Sp})^{\hat{\otimes}}),$$

と定める. その対象を次数$\mathbb{Z}$付き$\mathbb{E}_\infty$-環という.

(ii) 包含写像$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$は対称モノイダル圏であった. 誘導された無限オペラドの射を$N_\Delta(\mathcal{O}^\otimes_{\mathbb{N}}) \to N_\Delta(\mathcal{O}^\otimes_{\mathbb{Z}})$とする. $\mathbb{E}_\infty$-環Rに対しR上の次数$\mathbb{Z}$付き$\mathbb{E}_\infty$-環とは

$$\mathrm{Alg}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)/N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}), \mathrm{Mod}_R)^{\hat{\otimes}}).$$

さて, 我々が見知った次数付き環や加群は直和の格好をしていた. ところがいま扱っているのは関手である. 環っぽくはない. これを我々の見知った形に関連付けるのが次の命題である.

Definition 3.2. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} N_\Delta(\mathcal{O}^\otimes_{\mathbb{Z}}) & \xleftarrow[0]{} & N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*) \\ \downarrow{\scriptstyle A} & \swarrow{\scriptstyle A_0} & \\ \mathrm{Sp}^\otimes & & \end{array} .$$

$$\begin{array}{ccc} N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*) & \xleftarrow{i} & N_\Delta(\mathcal{O}^\otimes_{\mathbb{Z}}) \\ & \searrow^{A(\infty)} & \downarrow{\scriptstyle A} \\ & & \mathrm{Sp}^\otimes \end{array} .$$

ここで0は対称モノイダル包含写像$\{0\} \to \mathbb{Z}$で$\mathbb{Z}$の部分と同一視している. またiは無限オペラドの構造射である. ここで$A(\infty)$はiに沿ったAのオペラディックな左Kan拡張より得られた. またA_0は0との合成により得られる.

このとき

Proposition 3.3. *Aが次数$\mathbb{Z}$付き$\mathbb{E}_\infty$-環なら,*

(i) *A_0は$\mathbb{E}_\infty$-環,*

(ii) $A(\infty)$ は $\mathbb{E}_\infty$-環.

とくに $(-)_0$ は積と可換.

Definition 3.4. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$-環 A と $\mathbb{E}_\infty$-環 R に対して,

(i) 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A-加群のなす無限圏を

$$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}),\, \mathrm{Sp})^{\hat{\otimes}}),$$

(ii) 同様に R 上の次数 $\mathbb{Z}$ 付き A-加群のなす無限圏を

$$\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Fun}_{N_\Delta(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)}(N_\Delta(\mathbb{Z}),\, \mathrm{Mod}_R)^{\hat{\otimes}})$$

と定める.

Remark 3.5. Day convolution はフィルター付き順極限と成分ごとに可換なため我々は弱対称モノイダル関手 $\mathrm{Mod}^{Agr^{\mathbb{Z}}} \to \mathrm{Mod}_{A(\infty)}$ を得る, 即ち, 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A-加群は $A(\infty)$-加群 $M(\infty)$ を与える.

3.1 有限表示条件

まずは $\mathbb{E}_\infty$-環上の加群に対する条件の定義を振り返る.

(i) $\mathbb{E}_\infty$-環 R が連接とは任意の $\pi_0 R$ のイデアルが有限表示かつ $\pi_n R$ が $\pi_0 R$ 上有限表示加群.

(ii) R を連接 $\mathbb{E}_\infty$-環とする. R 加群 M が準完全とは $\pi_i M \simeq 0$ が十分小さい $i \in \mathbb{Z}$ で成り立つ事であり, かつ $\pi_n M$ が $\pi_0 R$ 上有限表示加群である事である.

(iii) 連接 $\mathbb{E}_\infty$-環上の加群 M が完全とは準完全かつ有限 Tor 次元を持つ事である. ここで $\mathbb{E}_\infty$-環 R 上の加群が有限 Tor 次元を持つとはある整数 n が存在し, 任意の $\pi_k(N) \neq 0$ なる R 加群 N に対し $k \geq n$ なら $\pi_k(M \otimes_R N) = 0$.

A を次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$-環とする. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群 M が局所完全とは $\pi_0 A$ の斉次元 a に対し任意の $M[a^{-1}]_0$ が完全 $A[a^{-1}]_0$ 加群である事.

Definition 3.6 (有限表示条件)**.** $\mathbb{E}_\infty$-環 R 上の次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$-環 A と R 上の次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群が有限表示条件を満たすとは

(i) A は次数 $\mathbb{N}$ コンパクト R-加群; 即ち各 A_i がコンパクトスペクトラムで, 更に局所完全かつ連結な $\mathbb{E}_\infty$-環. ここで R は正則 $\mathbb{E}_\infty$-環.

(ii) ある $x_1, \cdots, x_n$ が存在してファイブレーション $A_0\{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathrm{Sym}_{A_0}(A_1)$ が取れる. ここで x_i は $A_0\{x_1, \cdots, x_n\}$ の頂点で $\pi_0(A_0\{x_1, \cdots, x_n\}) \simeq \pi_0(A_0)[x_1, \cdots, x_n]$ の不定元に対応するもの.

(iii) ファイブレーション $\mathrm{Sym}_{A_0}(A_1) \to A(\infty)$ が存在する.

(iv) 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群 M が局所コンパクトとはある $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在し, M を与える関手との合成 $N_\Delta(\mathbb{Z}_{\geq n_0}) \to N_\Delta(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}$ が局所完全であるときに言う. ここで, $N_\Delta(\mathbb{Z}_{\geq n_0})$ とは $N_\Delta(\mathbb{Z})$ の充満部分無限圏であって頂点 $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$ で生成されているものである. $\mathrm{Mod}_R^{fcptAgr\mathbb{Z}}$ を上述の R 上の次数 $\mathbb{N}$ コンパクト $\mathbb{E}_\infty$-環上の局所コンパクト次数 $\mathbb{Z}$ コンパクト A 加群のなす無限圏とする.

k を体とする. Eilenberg-MacLane スペクトラム Hk は連接 $\mathbb{E}_\infty$-環. 更に正則である. 従って Hk 上の準完全な加群は完全である.

球面スペクトラム上の完全加群の K 理論と連接加群の K 理論一致しないため, 球面スペクトラム $\mathbb{S}$ は正則ではない.

この条件のもと, 我々は代数幾何学において Serre の定理と呼ばれる定理 (Proposition 3.7) の, 無限圏への一般化を考えた. この非可換幾何学においても Serre の定理の類似の結果が得られている.

k を体, A を k 上有限型の可換環とする. この時 A 加群の圏は $\mathrm{Spec}\, A$ 上の準連接加群層に同値である事はよく知られていた.

Proposition 3.7. k 上有限生成で更に A は A_0 上 A_1 で生成されている可換次数付き環 $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ の場合は $\mathrm{Proj}\, A$ 上の準連接層の圏は準有限次数付き A 加群の圏を有限個の 0 でない正の因子を持つ A 加群のなす部分圏で割った圏と圏同値である.

我々は無限圏の設定のもと以下の定理を得た.

Theorem 3.8 (主結果)**.** R を $\mathbb{E}_\infty$-環とし A を R 上の次数 $\mathbb{N}$ 付き $\mathbb{E}_\infty$-環とする. 有限表示条件が成り立つと仮定する. $\mathrm{Mod}_R^{fcpt,Agr\mathbb{Z}}$ を局所完全で R 上 $\mathbb{Z}$-コンパクトな次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群のなす無限圏とする. 次数 $\mathbb{Z}$ 付き加群の射のクラスで十分大きな正の因子に対して同値を誘導するものを考え, *Dwyer-Kan* 局所化を考える. その無限圏を $\mathrm{Mod}_R^{fcpt,Agr\mathbb{Z}}/Nil_R^A$

と置く事にする. この時, $\mathcal{F}$ を大域切断の *Serre* 捻りに関する余積 $\coprod_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathrm{Proj}\,A,\mathcal{F}[n])$ に送る関手

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj}\,A)^{perf}\to \mathrm{Mod}_R^{fcpt,Agr\mathbb{Z}}/Nil_R^A$$

は無限圏の同値を与える.

参考文献

[1] B Day, *On closed categories of functors*, Lecture notes in Math. **137** (1970), 1–38.

[2] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

[3] ———, *Higher algebra*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2011).

[4] ———, *Rotation invariance in algebraic K-theory*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2015).

[5] ———, *Spectral Schemes*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2011).

[6] ———, *Spectral Algebraic Geometry*, Preprint, available at www.math.harvard.edu/lurie (2017).

[7] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, and B. Shipley, *Model categories of diagram spectra*, Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), no. 2, 441–512.

[8] S. Glasman, *Day convolution for ∞-categories*, Preprint, available at arXiv : 1308.4940v4 (2016).

[9] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278 (French).

[10] A. B. Verëvkin, *Injective Serre sheaves*, Mat. Zametki **52** (1992), no. 4, 35–41, 128 (Russian, with Russian summary); English transl., Math. Notes **52** (1992), no. 3-4, 1016–1020 (1993).

有限体上の概均質ベクトル空間における Fourier 変換

石本 和基 (Kazuki Ishimoto)
神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻 D2

1 はじめに

K を体, $\overline{K}$ を K の代数閉包とする. V を K 上の有限次元ベクトル空間とし, K 上の簡約代数群 G が V に作用しているとする. $V(\overline{K})$ の $G(\overline{K})$-軌道で, Zariski 位相で稠密であるものが存在するとき, (G,V) を概均質ベクトル空間という. 概均質ベクトル空間における Fourier 変換は, ゼータ関数の関数等式の決定や代数体に関する密度定理に深い関係があり, 整数論において重要な研究対象である. 例えば, 谷口氏と Thorne 氏により次の密度定理が示されている.

定理 1 ([1])**.** 3 次体 F の判別式を $\mathrm{Disc}(F)$ とし, $X \in \mathbb{R}$ に対して $N_3^{\pm}(X)$ を $0 < \pm\mathrm{Disc}(F) < X$ を満たす F の個数とする. $K^+ = 1, K^- = \sqrt{3}, C^+ = 1, C^- = 3$ とすると, 次が成り立つ.

$$N_3^{\pm}(X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K^{\pm}\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon})$$

この定理は概均質ベクトル空間 $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ (p は素数) における Fourier 変換の値を用いて証明される. 概均質ベクトル空間が有限体上で定義されているとき, その Fourier 変換は指数和の形で表される. 筆者は有限体上の概均質ベクトル空間における Fourier 変換の研究を行っている. 谷口氏と Thorne 氏による先行研究 ([2]) では, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$ における Fourier 変換の明示公式が与えられた. 筆者は他のいくつかの概均質ベクトル空間において, 軌道と部分空間の共通部分の元の個数を数えることにより, Fourier 変換の明示公式を求めた. 本稿では明示公式の求め方と, 著者の研究結果について述べる.

1.1 Fourier 変換

p を奇素数, $\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^n$ の有限体とする. V を $\mathbb{F}_q$ 上の有限次元ベクトル空間とし, 有限群 G が V に線型に作用しているとする. そして (G,V) が以下の条件を満たしているとする.

条件 2. G の位数 2 の自己同型 $\iota : G \ni g \mapsto g^{\iota} \in G$ と V 上の双線型形式 $\beta : V \times V \mapsto \mathbb{F}_q$ で, 次を満たすものが存在する.

$$\beta(gx, g^{\iota}y) = \beta(x,y) \quad (x,y \in V, g \in G)$$

関数 $\phi : V \to \mathbb{C}$ に対して, その Fourier 変換 $\widehat{\phi} : V \to \mathbb{C}$ を以下で定義する.

$$\widehat{\phi}(y) := |V|^{-1}\sum_{x\in V}\phi(x)\exp\left(\frac{2\pi i\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\beta(x,y))}{p}\right) \tag{1}$$

ここで,

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$$

はトレース写像である. $\mathcal{F}_V^G$ を V 上の G-不変な $\mathbb{C}$ 値関数全体の集合, つまり

$$\mathcal{F}_V^G := \{\phi : V \to \mathbb{C} \mid \phi(gx) = \phi(x) \ \ (g \in G, x \in V)\}$$

とする. $\mathcal{F}_V^G$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる. $\phi(x) \in \mathcal{F}_V^G$ に対して, $\widehat{\phi}$ もまた $\mathcal{F}_V^G$ の元になる. さらに, Fourier 変換写像 $\mathcal{F}_V^G \ni \phi \mapsto \widehat{\phi} \in \mathcal{F}_V^G$ は線型写像になる. この写像の明示公式を求めることが目的である.

計算には以下の命題を用いる.

命題 3 ([2])**.** $\mathcal{O}_i\,(1 \le i \le r)$ を V の G-軌道とし, $e_i\,(1 \le i \le r)$ を $\mathcal{O}_i$ の指示関数とする. W を V の部分空間とし, $W^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in W, \beta(x,y) = 0\}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W|}{|\mathcal{O}_i|} \widehat{e_i} = \frac{|W|}{|V|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W^\perp|}{|\mathcal{O}_i|} e_i$$

$e_1, \ldots, e_r$ は $\mathcal{F}_V^G$ の $\mathbb{C}$-基底となる. したがって $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_r}$ の Fourier 変換が求められれば, 任意の $\phi \in \mathcal{F}_V^G$ の Fourier 変換が求められる. 命題 3 より, V の部分空間を一つ選ぶと, $\widehat{e_i}$ と e_i の線型結合の等式を一つ得る. したがって r の相異なる部分空間を選び, 得られる r 個の等式が線型独立ならば, 明示公式が導かれる.

2 主結果

筆者は以下の概均質ベクトル空間について指数和を計算した.

(ア) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$

(イ) $V = \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 3 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(ウ) $V = \mathbb{F}_q^4 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 4 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(エ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^3$ (3 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(オ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ (2 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$

(カ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ (3 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{q^2})$

(キ) $V =$ binary tri-Hermitian form のなす空間, $G = \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^3})$

(ク) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^4)$ (4 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(ケ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^6)$ (6 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_6(\mathbb{F}_q)$

本稿では例として (ア) における結果についてのみ述べる.

$V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2, G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ とする. V の元 x を 2 次正方行列の対

$$(A, B) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

と表すことにする. また, G の元 g を (g_1, g_2, g_3) と書く. G は V に

$$gx = (g_1 A g_2^T, g_1 B g_2^T) g_3^T$$

で作用している. V 上の双線型形式 β を

$$\beta((A_1, B_1), (A_2, B_2)) = \mathrm{Tr}(A_1 A_2^T + B_1 B_2^T)$$

で定め, G の自己同型 ι を

$$(g_1, g_2, g_3)^\iota = ((g_1^T)^{-1}, (g_2^T)^{-1}, (g_3^T)^{-1})$$

で定める. この β と ι が条件 2 を満たすことは容易に確かめられる.

命題 4. V の軌道分解は以下のとおりである.

軌道	代表元	元の個数
$\mathcal{O}_1$	$(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix})$	1
$\mathcal{O}_2$	$(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})$	$[1,0,3]$
$\mathcal{O}_3$	$(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix})$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_4$	$(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_5$	$(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_6$	$(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix})$	$[3,1,3]$
$\mathcal{O}_7$	$(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})$	$\frac{1}{2}[2,3,3]$
$\mathcal{O}_8$	$(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&-1\\\mu_0&\mu_1\end{bmatrix})$	$\frac{1}{2}[4,3,1]$

ただし, $[a,b,c] = (q-1)^a q^b (q+1)^c$ とし, μ_1, $\mu_0 \in \mathbb{F}_q$ は $X^2 + \mu_1 X + \mu_0 \in \mathbb{F}_q[X]$ が既約になるようなものとする.

選んだ部分空間は以下のとおりである.

$$W_1 = 0, W_2 = (\begin{bmatrix}0&0\\0&*\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&*\end{bmatrix}), W_3 = (\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}*&**&*\end{bmatrix}), W_4 = (\begin{bmatrix}0&0*&*\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_5 = (\begin{bmatrix}0&*\\0&*\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&*\\0&*\end{bmatrix}), W_6 = (\begin{bmatrix}0&0\\0&*\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&**&*\end{bmatrix}), W_7 = (\begin{bmatrix}0&**&*\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&**&*\end{bmatrix}), W_8 = V$$

ここで, 例えば, $(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}*&**&*\end{bmatrix})$ は $\left\{ (\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}) \in V \,\middle|\, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{F}_q \right\}$ を表す.

直交補空間は $W_1^\perp = W_8$, $W_2^\perp = W_7$, $W_3^\perp = W_3$, $W_4^\perp = W_4$, $W_5^\perp = W_5$, $W_6^\perp = W_6$ となっている.

命題 5. 各軌道と各部分空間の共通部分の元の個数 $|\mathcal{O}_i \cap W_j|$ は以下で与えられる.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8
$\mathcal{O}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{O}_2$	0	$[1,0,1]$	$[1,0,2]$	$[1,0,2]$	$[1,0,2]$	$[1,0,0](3q+1)$	$[1,0,1](2q+1)$	$[1,0,3]$
$\mathcal{O}_3$	0	0	$[2,1,1]$	0	0	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_4$	0	0	0	$[2,1,1]$	0	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_5$	0	0	0	0	$[2,1,1]$	$[2,1,0]$	$[2,1,1]$	$[2,1,2]$
$\mathcal{O}_6$	0	0	0	0	0	$[3,1,0]$	$[3,1,1]$	$[3,1,3]$
$\mathcal{O}_7$	0	0	0	0	0	0	$[2,3,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,3]$
$\mathcal{O}_8$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[4,3,1]$

これらの結果を命題 3 に適用することで, Fourier 変換の明示公式を得る.

定理 6. 基底 $e_1, ..., e_8$ における Fourier 変換写像の表現行列は以下で与えられる.

$$\frac{1}{q^8}\begin{pmatrix}
1 & [1,0,3] & [2,1,2] & [2,1,2] & [2,1,2] & [3,1,3] & \frac{1}{2}[2,3,3] & \frac{1}{2}[4,3,1] \\
1 & c_1 & [1,1,0]b_1 & [1,1,0]b_1 & [1,1,0]b_1 & -[2,1,0]a_1 & \frac{1}{2}[1,3,0]b_2 & -\frac{1}{2}[3,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & qc_2 & -[1,1,1] & -[1,1,1] & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & -[1,1,1] & qc_2 & -[1,1,1] & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & [0,0,1]b_1 & -[1,1,1] & -[1,1,1] & qc_2 & [1,1,1] & -\frac{1}{2}[1,3,1] & \frac{1}{2}[2,3,0] \\
1 & -a_1 & q & q & q & qc_3 & -\frac{1}{2}[1,3,0] & -\frac{1}{2}[1,3,0] \\
1 & b_2 & -[1,1,0] & -[1,1,0] & -[1,1,0] & -[2,1,0] & q^3 & 0 \\
1 & -[0,0,2] & [0,1,1] & [0,1,1] & [0,1,1] & -[0,1,2] & 0 & q^3
\end{pmatrix}$$

ここで, $[a,b,c] = (q-1)^a q^b (q+1)^c$, $a_1 = 2q+1$, $b_1 = q^2-q-1$, $b_2 = q^2-2q-1$, $c_1 = 2q^3-2q-1$, $c_2 = q^3-q^2+1$, $c_3 = q^3-q^2-1$ とする.

参考文献

[1] T. Taniguchi and T. Frank, Secondary terms in counting functions for cubic fields, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508.

[2] T. Taniguchi and T. Frank, Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces, preprint, 2016, arXiv:1607.07827.

A unique pair of triangles

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
松村英樹 (Hideki Matsumura)

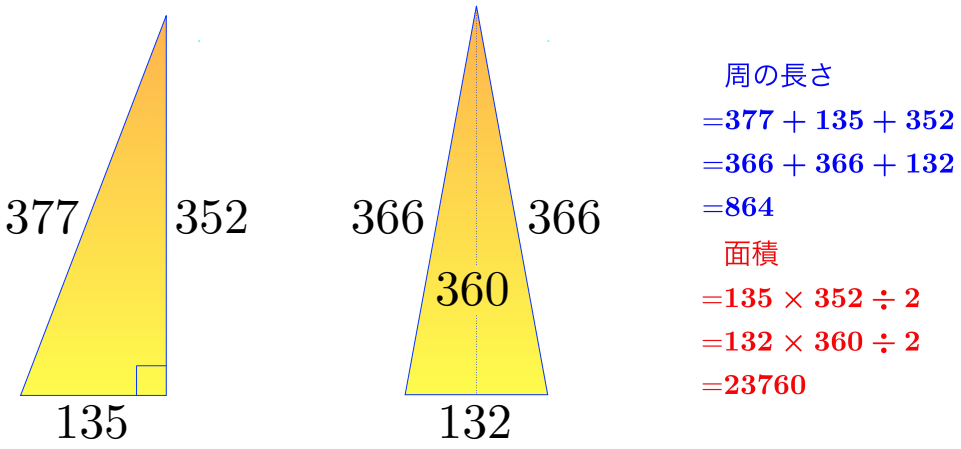
概要

「辺の長さと面積が全て有理数であるような三角形」を有理三角形と呼ぶ. この発表では, 「有理直角三角形と有理二等辺三角形の組の中には, 周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい組が相似を除いてただ 1 組しか存在しない」という定理を紹介する. この定理の証明は, 超楕円曲線上の有理点集合の決定に帰着される. 超楕円曲線上の有理点集合を決定する際, Chabauty-Coleman 法と降下法が中心的な役割を果たす. また, 降下法は MAGMA を用いて実行される. 本研究は平川義之輔氏との共同研究である. 本稿の前半では定理の証明の概略を述べ, 後半では降下法のアイデアを説明する.

1 主定理

古代ギリシャ時代以来, 何人もの数学者達が「辺の長さと面積が全て有理数であるような三角形」を探求してきた. このような三角形を「有理三角形」と呼ぶ. 数論的な観点から, 周の長さと面積は有理三角形の基本的な不変量であり, 有理三角形を周の長さと (または) 面積で分類するという問題が考えられてきた. 例えば, 周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい有理三角形の組が無限に多く構成されている ([Bre06], [vL07] やその参考文献を参照). 本稿で紹介する定理は次の通りである.

定理 1.1 ([HM19, Theorem 1.1])**.** 周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい有理直角三角形と有理二等辺三角形の組は相似を除いて以下の組しかない.



この定理の証明は種数 2 の超楕円曲線の有理点集合の決定に帰着される. 超楕円曲線の有理点集合の決定には, 以下の **Chabauty-Coleman 法**を用いる.

定理 1.2 (Chabauty-Coleman 法, [Cha41], [Col85], [MP12, Theorem 5.3 (b)])**.** C を $\mathbb{Q}$ 上の種数 $g \geq 2$ の曲線[*1]とし, J を C の Jacobi 多様体, p を素数とする. C が $p > 2g$ で良い還元を持ち, $J(\mathbb{Q})$ **の Mordell-Weil rank** [*2]**が** g **より小さい**とき, 以下の不等式が成立する.

$$\#C(\mathbb{Q}) \leq \#C(\mathbb{F}_p) + (2g - 2).$$

有理三角形に関する先行研究はいくつかあるが, 筆者の知る限り, 超楕円曲線の理論を使う研究は [ZP17] のみである. ここでは周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい有理二等辺三角形とある条件を満たす有理菱形の組が存在しない事が証明されている.

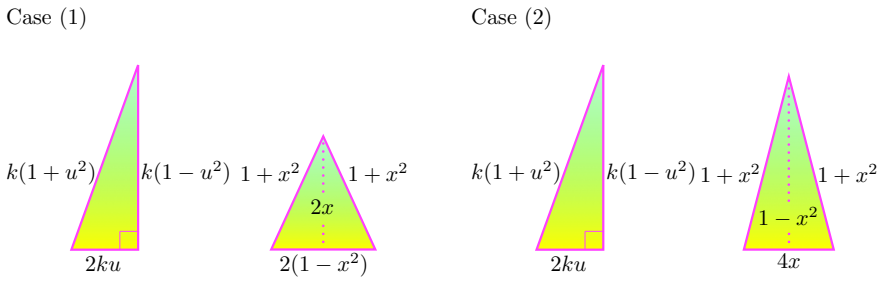
注意 1.3. (1) 周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい直角三角形[*3] の組は全て合同な組である.

(2) 周の長さ同士が等しく, また面積同士も等しい合同でない有理二等辺三角形の組は相似を除いて無限に多く存在する.

2 証明の概略

定理 *1.1* の証明. Step (1): 三角形の組を全て超楕円曲線でパラメータ付けする.

Pythagoras の定理と素因数分解の一意性より, 三角形の組の辺の長さはある正の有理数 x, u, k を用いて以下のように表される事が分かる.



Case (1) では以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} k + ku = 2 \\ k^2u(1-u^2) = 2x(1-x^2). \end{cases}$$

[*2] $\mathbb{Q}$ 上の曲線とは Spec($\mathbb{Q}$) 上の 1 次元の滑らかな射影幾何的整 scheme の事である.

[*2] 有理点を持つ曲線の有理点集合は Jacobi 多様体という代数多様体の有理点集合に埋め込める. Jacobi 多様体の有理点集合は有限生成 Abel 群をなす (Mordell-Weil 群). この Mordell-Weil 群の rank を Mordell-Weil rank という.

[*3] 有理直角三角形とは限らない.

1 番目の方程式より, $u = 2/k - 1$ を得る. これを 2 番目の方程式に代入して整理すると, k に関する 2 次方程式

$$2k^2 - (x^3 - x + 6)k + 4 = 0$$

を得る. k は有理数なので, 左辺の判別式はある有理数 y を用いて y^2 と表される. すなわち,

$$y^2 = (x^3 - x + 6)^2 - 32$$

を得る. C をこの方程式で定義される affine 曲線の滑らかな compact 化とすると, これは超楕円曲線を定める. 無限遠点 2 点と $(x, y) = (0, \pm 2), (1, \pm 2), (-1, \pm 2), (5/6, \pm 217/216)$ は C の有理点である. 最初の 8 点は三角形の組に対応しない[*4] . さらに, $(x, y) = (5/6, 217/216)$ と $(5/6, -217/216)$ より, それぞれ $(k, u, x) = (27/16, 5/27, 5/6)$ と $(32/27, 11/16, 5/6)$ を得る. ここから, 定理の三角形の組が得られる.

Step (2): Step (1) を踏まえると, あとは $\#C(\mathbb{Q}) \leq 10$ を示せば良い事が分かる. 実際, 以下のように $\#C(\mathbb{Q}) \leq 10$ を証明できる.

C の種数は 2 であり, $p = 5$ で良い還元を持ち, $\#C(\mathbb{F}_5) = 8$ となる. また, **降下法**より, C の Jacobi 多様体の $\mathbb{Q}$ 上の Mordell-Weil rank は 1 以下である事が分かる[*5]. 従って, **Chabauty-Coleman 法** (定理 1.2) より, 所望の不等式 $\#C(\mathbb{Q}) \leq 10$ を得る.

Case (2) も同様に, 超楕円曲線[*6] の有理点集合の決定に帰着されるが, この超楕円曲線の有理点に対応する三角形の組は存在しない事が分かる. □

3 降下法のアイデア

Chabauty-Coleman 法における Mordell-Weil rank の条件を示すために, **降下法**を用いて **Mordell-Weil rank r を上から抑える**. 降下法の計算は, ある特定の代数体の**イデアル類群**や**単数群**という, より古典的な数論的不変量の計算に帰着される. この節では, [FPS97], [PS97], [Sto01] による降下法のアイデアを説明する[*7]. 以下, C を $y^2 = f(x)$ で定義される $\mathbb{Q}$ 上の超楕円曲線, $\deg f = 6$ とし, J を C の Jacobi 多様体とする.

(1) $J(\mathbb{Q})$ は有限生成 Abel 群なので, $r = \dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q}) - \dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})[2]$ となる. 2-ねじれ部分 $J(\mathbb{Q})[2]$ の次元は容易に計算できる. 我々の超楕円曲線 C の場合は, $\dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})[2] = 1$ である. 次に, $J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q})$ の次元を上から抑える.

(2) $J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q})$ から $J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x - T)$ という $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間へ全射が存在し, その核は 0 または $\mathbb{F}_2$ である (cf. [FPS97, Proposition 5]) [*8]. 我々の超楕円曲線 C の場合は $J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q})$ と $J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x - T)$ は同型であるので, $\dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x - T)$ となる.

(3) また, $J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x - T)$ は **fake 2-Selmer 群**という $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間に埋め込める[*9]. よっ

[*4] 実際, $(x, y) = (0, \pm 2)$ のとき, 二等辺三角形の高さ $2x$ が 0 となり, $(x, y) = (1, \pm 2), (-1, \pm 2)$ のとき, 二等辺三角形の底辺の長さ $2(1 - x^2)$ が 0 となる.

[*5] Magma Calculator を用いた. 実際には, Mordell-Weil rank が 1 である事も分かる.

[*6] C と同型である.

[*7] この節の内容は C が有理点を持たない場合にも成り立つ.

[*8] $x - T$ 写像の定義は後述.

[*9] Fake 2-Selmer 群の定義は後述.

て, $\dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ となる.

(4) 以上より, $\boldsymbol{r \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \mathbf{Sel}^{(2)}_{\mathbf{fake}}(\mathbb{Q}, J) - \dim_{\mathbb{F}_2} J(\mathbb{Q})[2]}$ となる.

我々の超楕円曲線 C の場合は, $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J) = 2$ なので, $\boldsymbol{r \leq 1}$ である事が証明できる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 \text{ or } \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & J(\mathbb{Q})/2J(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 \text{ or } \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Sel}^{(2)}(\mathbb{Q}, J) & \longrightarrow & \mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

注意 3.1. (1) Fake 2-Selmer 群の計算は, $f(x)$ の既約因子の分解体の**イデアル類群**や**単数群**という, より古典的な不変量の計算に帰着される. 現在, 降下法は計算代数システム MAGMA に実装されている.

(2) 2-Selmer 群から fake 2-Selmer 群へ全射が存在し, その核も 0 または $\mathbb{F}_2$ である (cf. [PS97, Theorem 13.2]). 我々の超楕円曲線 C の場合は $\mathrm{Sel}^{(2)}(\mathbb{Q}, J)$ と $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ は同型である.

Mordell-Weil rank を上から抑えるためには, $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ の次元を計算できれば十分である. 以下, $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ を集合として明示するアイデアを述べる.

まず, $x-T$ 写像を定義する.

定義と命題 3.2 (cf. [FPS97, Proposition 1, 2])**.** K を $\mathbb{Q}$ の拡大体, $L_K := K[T]/(f(T))$ とする. $J(K)$ の代表元をうまく取る事により, 次の写像が well-defined な群準同型写像になる.

$$\begin{array}{rccc}
x-T: & J(K) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Ker}(N_K : L_K^{\times}/{L_K^{\times}}^2 K^{\times} \to K^{\times}/{K^{\times}}^2) \\
 & \cup & & \cup \\
 & [D := \Sigma_P n_P P] & \longmapsto & \prod_P (x_P - T)^{n_P}
\end{array}$$

ここで, N_K はノルム写像から誘導される写像, x_P は P の x 座標である.

$J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T)$ の次元を上から抑えるために, $J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T)$ を fake 2-Selmer 群に埋め込み, fake 2-Selmer 群を集合として明示する.

$L := \mathbb{Q}[T]/(f(T))$, $L_{\mathbb{Q}_p} := \mathbb{Q}_p[T]/(f(T))$, $S := \{p \in \mathbb{Z} : \text{素数} \mid p \text{ は } f \text{ の判別式を割る}\} \cup \{2, \infty\}$ とすると, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T) & \xrightarrow{x-T} & L^{\times}/{L^{\times}}^2\mathbb{Q}^{\times} \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \prod_{p\in S} \mathrm{res}_p} \\
0 & \longrightarrow & \prod_{p\in S} J(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{Ker}(x-T)_p & \xrightarrow[\prod_{p\in S}(x-T)_p]{} & \prod_{p\in S} {L_{\mathbb{Q}_p}}^{\times}/{L_{\mathbb{Q}_p}}^{\times 2}{\mathbb{Q}_p}^{\times}.
\end{array}$$

水平方向の写像は $x-T$ 写像から誘導され, 垂直方向の写像は対角写像である.

f を $f = f_1 \cdots f_m$ と $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式の積に分解し, $L_i := \mathbb{Q}[T]/(f_i(T))$ とおく. また, α_i を以

下のように自然な商写像が誘導する同型を通じて定義される L_i の元とする.

$$\begin{array}{ccc} L = \mathbb{Q}[T]/(f(T)) & \simeq & \prod_i L_i \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha_i) := (\alpha)_i. \end{array}$$

定義 3.3. (1) $\alpha \in L^\times$ とする. この時, α が S の外不分岐であるとは, 任意の $1 \leq i \leq m$ に対し, $L_i(\sqrt{\alpha_i})/L_i$ が S の上の素イデアルの外で不分岐拡大になる事である.

(2) $\alpha \in L^\times/{L^\times}^2$ とする. この時, α が S の外不分岐であるとは, α の代表元が S の外不分岐である事である[*10].

(3) $L^\times/{L^\times}^2$ の $\mathbb{F}_2$-部分ベクトル空間 H を次のように定義する.

$$H := \{\alpha \in L^\times/{L^\times}^2 \mid \alpha \text{ は } S \text{ の外不分岐 }\}.$$

(4) H' を H の ${L^\times}^2/{L^\times}^2\mathbb{Q}^\times$ における像とする.

(5) **fake 2-Selmer 群**を以下のように定義する.

$$\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J) := \{\alpha \in H' \mid \Pi_{p\in S}\mathrm{res}_p(\alpha) \in \mathrm{Im}(\Pi_{p\in S}(x-T)_p)\} \cap \mathrm{Ker}(N_{\mathbb{Q}}).$$

命題 3.4 ([FPS97, Proposition 3])**.** $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ は $\mathrm{Im}(x-T)(\simeq J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T))$ を含む H' の $\mathbb{F}_2$-部分ベクトル空間である.

従って, $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ を集合として明示する事で, $J(\mathbb{Q})/\mathrm{Ker}(x-T)$ の次元を上から抑える事ができる. H を集合として明示できれば, H' を集合として明示できる. また, $\mathrm{Ker}(N_{\mathbb{Q}})$ や $x-T$ 写像の像も集合として明示できるので (cf. [Sto01]), $\mathrm{Sel}^{(2)}_{\mathrm{fake}}(\mathbb{Q}, J)$ を集合として明示でき, Mordell-Weil rank の具体的な上界が得られる. 最後に, H を集合として明示するアイデアを述べる.

$I(L_i)$ を L_i の分数イデアルのなす群, $I(L) := \prod_{i=1}^m I(L_i)$ とし, 素数 $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $I_p(L) := \prod_{i=1}^m I_p(L_i)$, $I_p(L_i) :=< p \text{ の上の } L_i \text{ の素イデアル} >_{\mathbb{Z}}$, $I^S(L) := I(L)/\prod_{p\in S} I_p(L)$ とおくと, 次のような図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathcal{O}_L[\frac{1}{S}]^\times & \longrightarrow & \mathcal{O}_L[\frac{1}{S}]^\times & \longrightarrow & H & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & L^\times & \xrightarrow{2} & L^\times & \longrightarrow & L^\times/{L^\times}^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^S(L) & \xrightarrow{2} & I^S(L) & \longrightarrow & I^S(L)/I^S(L)^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & I^S(L)/L^\times & \longrightarrow & I^S(L)/L^\times & & & &
\end{array} .$$

[*10] この概念は α の $L^\times/{L^\times}^2$ における像のみに依存しており, well-defined である.

蛇の補題より, 次のような短完全列が存在する.

$$1 \to \mathcal{O}_L\left[\frac{1}{S}\right]^{\times}/\mathcal{O}_L\left[\frac{1}{S}\right]^{\times 2} \to H \to (I^S(L)/L^{\times})[2] \to 0.$$

H の両側の $\mathbb{F}_2$ ベクトル空間は集合として明示できる[*11] ので, H も集合として明示できる.

謝辞

発表の機会をくださった「第 15 回数学総合若手研究集会」の世話人の皆様に感謝申し上げます.

参考文献

[Bre06] Andrew Bremner, *On Heron triangles*, Ann. Math. Inform. **33** (2006), 15–21. MR2385463

[Cha41] Claude Chabauty, *Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité*, C. R. Acad. Sci. Paris **212** (1941), 882–885 (French). MR0004484

[Col85] Robert F. Coleman, *Effective Chabauty*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 3, 765–770, DOI 10.1215/S0012-7094-85-05240-8. MR808103

[FPS97] E. V. Flynn, Bjorn Poonen, and Edward F. Schaefer, *Cycles of quadratic polynomials and rational points on a genus-2 curve*, Duke Math. J. **90** (1997), no. 3, 435–463, DOI 10.1215/S0012-7094-97-09011-6. MR1480542

[HM19] Yoshinosuke Hirakawa and Hideki Matsumura, *A unique pair of triangles*, J. Number Theory **194** (2019), 297–302, DOI 10.1016/j.jnt.2018.07.007. MR3860476

[MP12] William McCallum and Bjorn Poonen, *The method of Chabauty and Coleman*, Explicit methods in number theory, Panor. Synthèses, vol. 36, Soc. Math. France, Paris, 2012, pp. 99–117 (English, with English and French summaries). MR3098132

[PS97] Bjorn Poonen and Edward F. Schaefer, *Explicit descent for Jacobians of cyclic covers of the projective line*, J. Reine Angew. Math. **488** (1997), 141–188, DOI 10.1515/crll.1997.488.141. MR1465369

[Sto01] Michael Stoll, *Implementing 2-descent for Jacobians of hyperelliptic curves*, Acta Arith. **98** (2001), no. 3, 245–277, DOI 10.4064/aa98-3-4. MR1829626

[vL07] Ronald van Luijk, *An elliptic K3 surface associated to Heron triangles*, J. Number Theory **123** (2007), no. 1, 92–119, DOI 10.1016/j.jnt.2006.06.006. MR2295433

[ZP17] Yong Zhang and Junyao Peng, *Heron triangle and rhombus pairs with a common area and a common perimeter*, Forum Geom. **17** (2017), 419–423. MR3733032

[*11] S-単数群 $\mathcal{O}_L[\frac{1}{S}]^{\times}$ が有限生成なので $\mathcal{O}_L[\frac{1}{S}]^{\times}/\mathcal{O}_L[\frac{1}{S}]^{\times 2}$ は有限であり, イデアル類群の有限性より $L^{\times}/I^S(L)[2] \subset \mathrm{Cl}[2]$ も有限である. これらの計算方法は古典的に知られている.

有向グラフに対する一般荷重ゼータの伊原表示

横浜国立大学大学院 理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA)

概要

伊原表示とはグラフゼータ関数における行列式表示の一種であり, 中でも佐藤 [5] による第二種荷重ゼータの伊原表示は今野, 佐藤 [2] によって量子ウォークとの興味深い関係が示された. しかし, 現存する様々なグラフ上で定義された多岐にわたるゼータの多くは, 同様の議論により伊原表示を導出しているにも関わらず, 一般化した表示は導出されていない. 本講演では, まず伊原ゼータをはじめとする幾つものゼータを包括する “一般佐藤ゼータ” を紹介する. さらに, 対象とするグラフを一般の有限有向グラフとし, 言わば既存のグラフゼータの伊原表示を一般化した表示を導出したので紹介する. なお, 本研究は森田英章氏 (室蘭工業大学), 佐藤巌氏 (小山工業高等専門学校) との共同研究である.

1 定義

ある集合 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ に対し, A を順序対の集合 $\{(v,w)|v,w\in V\}$ の部分集合とする. このとき, $\Delta=(V,A)$ を有向グラフといい, V, A の元をそれぞれ頂点, アークと呼ぶ. アーク $a=(v,w)$ に対し,v を a の尾, w を a の頭といい, それぞれ $\mathfrak{t}(a)$, $\mathfrak{h}(a)$ と書く. また, アーク (v,v) をループという. アークの列 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ が $\mathfrak{h}(a_i)=\mathfrak{t}(a_{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ を満たすとき, x を Δ 上の道, m をその長さと呼ぶ. 特に $\mathfrak{t}(a_1)=\mathfrak{h}(a_m)$ となるとき, x を閉路という. さらに, 道 x が任意の i に対して $\mathfrak{t}(a_i)\neq\mathfrak{h}(a_{i+1})$ を満たすとき, x は被約であるという.

$\Delta=(V,A)$ をループや多重辺を含む有限有向グラフとする. 頂点 $v,w\in V$ に対し, A の部分集合 $\mathfrak{A}_{v,w},\mathfrak{A}(v,w)$ を以下で定める:

$$\mathfrak{A}_{v,w}=\{a\in A|\mathfrak{t}(a)=v,\mathfrak{h}(a)=w\},\quad \mathfrak{A}(v,w)=\mathfrak{A}_{v,w}\sqcup\mathfrak{A}_{w,v}.$$

R を可換 $\mathbb{Q}$ 代数とし, 写像 $\tau,\upsilon:A\to R$ をアークの重みとする. このとき, 写像 $\theta:A\times A\to R$ を以下で定める:

$$\theta(a,a')=\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}-\upsilon(a')\delta_{a^{-1}a'}.$$

ここで, δ はクロネッカーのデルタである. ただし, $\forall a\in\mathfrak{A}_{vw},\forall b\in\mathfrak{A}_{wv}$ に対し, $b=a^{-1}$ と定めている. Δ 上の道 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ に対し, その重みを $\chi(x)=\theta(a_1,a_2)\theta(a_2,a_3)\cdots\theta(a_m,a_1)$ で定める. $N_m(\chi)$ を Δ 上長さ m の被約閉路の重みの和とし, Δ に対するゼータ関数 $Z_\Delta(t)$ を以下で定める:

$$Z_\Delta(t):=\exp\left(\sum_{m\geq1}\frac{N_m(\chi)}{m}t^m\right).$$

Δ が有限対称有向グラフの場合, $\upsilon = 1$ としたものが第一種荷重ゼータ, $\tau = \upsilon$ としたものが第二種荷重ゼータ, $\tau = \upsilon = 1$ としたものが伊原ゼータである. すなわち, 一般佐藤ゼータはこれらを包括する枠組みを与える. それぞれの伊原表示は順に水野-佐藤 [3], 佐藤 [5], 伊原 [1] で得られている. 次節では $Z_\Delta(t)$ の伊原表示を導出する.

2 概要

$M := (\theta(a, a'))_{a,a' \in A}$ と置くと,

$$Z_\Delta(t) = \frac{1}{\det(I - tM)}$$

が成り立つ [4]. ここで, $H := (\tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')})_{a,a' \in A}$, $J := (\upsilon(a')\delta_{a^{-1},a'})_{a,a' \in A}$ により $M = H - J$, $K := (\delta_{\mathfrak{h}(a)v})_{a \in A, v \in V}$ $L := (\tau(a')\delta_{v\mathfrak{t}(a')})_{v \in V, a' \in A}$ により, $H = KL$ と表せる. したがって,

$$Z_\Delta(t)^{-1} = \det(I - tM) = \det(I - tL(I + tJ)^{-1}K) \det(I + tJ)$$

となる. 各 2 点間 $v, w \in V$ の部分グラフ $(V, \mathfrak{A}(v, w))$ における $J \in \mathrm{Mat}(\#\mathfrak{A}(v, w); R)$ を J^{vw} と置くと, $J = J^{v_1v_2} \oplus J^{v_3v_4} \oplus \cdots$ が成り立つ. K, L に対し, $K^{vw} \in \mathrm{Mat}(\#\mathfrak{A}(v, w), \#V; R), L^{vw} \in \mathrm{Mat}(\#V, \#\mathfrak{A}(v, w); R)$ を同様に定義すると, $K = (K^{v_1v_2}, K^{v_3v_4}, \cdots)^T$ $L = (L^{v_1v_2}, L^{v_3v_4}, \cdots)$. これにより, $L(I + tJ)^{-1}K$ は

$$\begin{aligned} L(I + tJ)^{-1}K &= \sum_{\{v,w\} \in V^2} L^{vw}(I + tJ^{vw})^{-1}K^{vw} \\ &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2 \\ \mathfrak{A}(v,w) \neq \phi}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}K^{vw} - t \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2, v \neq w \\ \#\mathfrak{A}_{vw}\#\mathfrak{A}_{w,v} \neq 0}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}J^{vw}K^{vw} \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} A_\theta &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2 \\ \mathfrak{A}(v,w) \neq \phi}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}K^{vw}, \\ D_\theta &= \sum_{\substack{\{v,w\} \in V^2, v \neq w \\ \#\mathfrak{A}_{vw}\#\mathfrak{A}_{w,v} \neq 0}} \frac{1}{\det(I + tJ^{vw})} L^{vw}J^{vw}K^{vw} \end{aligned}$$

とおくと, A_θ, D_θ はそれぞれ“重み付き隣接行列”, “重み付き次数行列”と呼ぶにふさわしい行列となっている. 以上の結果から, 次の定理が得られる.

定理 1 (石川, 森田, 佐藤)**.** 一般有限有向グラフ Δ 上の一般佐藤ゼータの伊原表示は以下で与えられる*:*

$$Z_\Delta(t) = \frac{1}{\det(I + tJ) \det(I - tA_\theta + t^2D_\theta)}$$

これが冒頭に述べた既存のグラフゼータ関数の伊原表示を一般化した表示である.

参考文献

[1] Y. Ihara. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18(3):219–235, 1966.

[2] N. Konno and I. Sato. On the relation between quantum walks and zeta functions. *Quantum Information Processing*, 11(2):341–349, 2012.

[3] H. Mizuno and I. Sato. Weighted zeta functions of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 91(2):169–183, 2004.

[4] H. Morita. Ruelle zeta functions for finite digraphs. *preprint*.

[5] I. Sato. A new bartholdi zeta function of a graph. *Int. J. Algebra*, 1:269–281, 2007.

グラフのラプラシアンから生じる線形符号の性質

名古屋工業大学 大学院工学研究科 情報工学専攻 情報数理分野
早田 裕貴 (Yuki Hayata)

概要

グラフのラプラシアンを二元体上の線形写像とみなし、その像と核を線形符号と考える。本発表では、まず頂点数が n のパスグラフ $\mathbf{P}_n$ とサイクルグラフ $\mathbf{C}_n$ の場合に、これらの符号の重み多項式を紹介する。またデカルト積 $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$ の場合に、小さい n に対しては重み多項式を計算し、大きい n に対しては重み多項式の最初のいくつかの係数を求めた。その計算結果から発見した、n を変えたときの重み多項式の係数や最小距離の関係を紹介する。

1 導入

本研究の動機であるライツアウトパズルの説明から始める。$m \times n$ ライツアウトは縦に m 個、横に n 個の長方形に並べられたライト付きのボタンからなるパズルである。ボタンを押すとそのボタンについたライトとその上下左右の合わせて最大 5 つのライトの点灯と消灯の状態が入れ替わる仕組みである。日本では、5×5 ライツアウトがタカラ (現タカラトミー) から発売された。例えば図 a のような初期状態の 4×4 ライツアウトを考える。ただしライトの点灯状態を「$\star$」で表す。図 a の丸で囲まれてる位置のライトに付けられたボタンを押すと図 b の状態となる。同様に図 b の丸の位置のボタンを押すと図 c になり、図 c の丸の位置のボタンを押すと図 d つまり全消灯の状態となりゲーム終了である。このときに押した 3 つのボタンをライツアウトの解という。図 a のように解が存在する初期状態を解くことができる初期状態という。ここで、初期状態において点灯しているライトの数を初期状態の重みと呼ぶことにする。図 a の初期状態では重みは 9 である。

図 a

$\star$	$\star$	$\star$	
$\star$		$\circledast$	$\star$
$\star$	$\star$		
	$\star$		

図 b

$\circledast$	$\star$		
$\star$	$\star$		
$\star$	$\star$	$\star$	
	$\star$		

図 c

	$\star$		
$\star$	$\circledast$	$\star$	
	$\star$		

図 d

このパズルは、ライトが点灯している状態を 1 とし消灯している状態を 0 とすることで、ライトの点灯状態を $\mathbb{F}_2$ 上の $m \times n$ 行列として表現することができる。実際に図 a,b,c,d の状態はそれぞれ以下の行列 B_a, B_b, B_c, B_d で表すことができる。

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般に初期状態 $\mathbf{b}$ に対する解 $\mathbf{x}$ は、連立方程式 $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解くことにより求めることができる。上の例の場合、

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となっている。列ベクトル $\mathbf{b}$ は行列 B_a の行を一行に並べて転置をとったものである。$\mathbf{x}$ は $\mathbf{b}$ の解の一例であり、押すボタンの位置の成分のみが 1 の行列と対応している。また、行列 $\mathcal{A}$ は以下で説明するラプラシアンの特別な場合である。

ライツアウトパズルは線形代数初学者に娯楽的題材として導入されることも多いが、グラフ理論、離散調和解析、力学系、セルオートマトンなどの観点からの研究も盛んである。先行研究として例えば [1] を挙げておく。

ライツアウトをトーラス上で実現したパズルをトーラスライツアウトという。本研究では $n \times n$ のライツアウトとトーラスライツアウトに対して、重み i の初期状態で解くことのできるものの個数が n によってどのように変化するかを調べる。

2　符号とグラフ

2.1　符号

符号理論の用語と記号は参考文献 [3] に従う。

二元体 $\mathbb{F}_2$ 上の (n,k) 線形符号 $\mathcal{C}$ とは $\mathbb{F}_2^n$ の k 次元部分空間のことを言う。$\mathcal{C}$ の元を符号語といい、符号語における成分 1 の数をハミング重みという。線形符号において非零の符号語のハミング重みを最小距離という。

(n,k) 線形符号 $\mathcal{C}$ に対し、

$$A_i := \#\{\text{ ハミング重みが } i \text{ の } \mathcal{C} \text{ の元 }\}$$

と定義し、$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$ を符号 $\mathcal{C}$ の重み分布という。また、多項式

$$W_{\mathcal{C}}(x,y) := \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} y^i \tag{2}$$

を $\mathcal{C}$ の重み多項式という。本研究では Macwilliams が発見した以下の定理が有用である。

定理 2.1 (MacWilliams)**.** (n,k) 符号 $\mathcal{C}$ の双対符号 ($\mathcal{C}$ の $\mathbb{F}_2^n$における直交補空間) を $\mathcal{H} = \mathcal{C}^{\perp}$ とする。$\mathcal{C}$ と $\mathcal{H}$ のそれぞれの重み多項式の間には以下の等式が成立する。

$$W_{\mathcal{H}}(x,y) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} W_{\mathcal{C}}(x+y, x-y)$$

2.2　グラフのラプラシアンの定める符号

有限無向グラフ $\Gamma = (V,E)$ $(|V| = n)$ に対して、$\mathcal{F} := \mathrm{Map}(V, \mathbb{F}_2)$ とし、Γ のラプラシアン $\Delta_\Gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を次で定義する。

$$(\Delta_\Gamma f)(v) := f(v) + \sum_{(w,v)\in E} f(w) \qquad (v, w \in V, f \in \mathcal{F}) \tag{3}$$

頂点集合 V に順序を導入することにより同型 $\mathcal{F} \simeq \mathbb{F}_2^n$ が成立するので、Δ_Γ は $\mathbb{F}_2^n$ から $\mathbb{F}_2^n$ への線形写像とみなすことができる。これにより $\mathrm{Im}\,\Delta_\Gamma, \mathrm{Ker}\,\Delta_\Gamma$ は線形符号とみなすことができ、$(\mathrm{Im}\,\Delta_\Gamma)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\Delta_\Gamma$ が成立する。以下 $\mathcal{C} = \mathrm{Im}\,\Delta_\Gamma, \mathcal{H} = \mathrm{Ker}\,\Delta_\Gamma$ と記す。

定義 2.2. 以下のようにパスグラフとサイクルグラフを定義する。

(1)　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ であり、$1 \le i \le n-1$ に対し v_iと v_{i+1} が隣接していて、それ以外に隣接する頂点の組が存在しないグラフをパスグラフといい $\mathbf{P}_n$ と表す。

(2)　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ であり、$1 \le i \le n$ に対し v_iと $v_{(i \pmod n)+1}$ が隣接していて、それ以外に隣接する頂点の組が存在しないグラフをサイクルグラフといい $\mathbf{C}_n$ と表す。

ここでグラフのデカルト積 $\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n$(定義は省略) を考えると、(1) の行列 $\mathcal{A}$ は $\Delta_{\mathbf{P}_4 \times \mathbf{P}_4}$ の行列表示である。したがって、$\mathrm{Im}\,\Delta_{\mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_n}$ は解くことのできる $m \times n$ ライツアウトの初期状態の全体と

みなすことができる。同様に $\mathrm{Im}\,\Delta_{\mathbf{C}_m\times\mathbf{C}_n}$ は解くことのできる $m\times n$ トーラスライツアウトの初期状態の全体とみなすことができる。$\mathcal{C}=\mathrm{Im}\,\Delta_\Gamma$ を線形符号とみなしたとき、ライツアウトの初期状態の重みはハミング重みと一致する。ゆえに、本研究の目的を符号理論の用語で述べると、符号 $\mathcal{C}$ の重み多項式の係数 A_i が n によってどのように変化するのかを調べることに他ならない。

3 $\mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n$ のラプラシアンから生じる線形符号の重み多項式

$\Gamma=\mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n$ のとき、$\mathcal{H}=\mathrm{Ker}\,\Delta_\Gamma$ の次元が小さく基底を具体的に求めることができるので $W_{\mathcal{H}}(x,y)$ が容易に求まり、MacWilliams の定理から $\mathcal{C}$ の重み多項式は以下のように求まる。

命題 3.1. $\Gamma=\mathbf{P}_n$ のとき、$\mathcal{C}$ の重み多項式は以下の通りである。

$$W_{\mathcal{C}}(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n & (n\not\equiv 2 \pmod 3)\\ \frac{1}{2}(x+y)^m((x+y)^{2m+2}+(x-y)^{2m+2}) & (n\equiv 2 \pmod 3, n=3m+2)\end{cases}$$

系 3.2. $n=3m+2$ のとき $0\le k\le 3m+2$ に対して以下が成立する。

$$A_k=\sum_{0\le i\le m+1, 0\le j\le m, 2i+j=k}\binom{2m+2}{2i}\binom{m}{j}$$

命題 3.3. $\Gamma=\mathbf{C}_n$ のとき、$\mathcal{C}$ の重み多項式は以下の通りである。

$$W_{\mathcal{C}}(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n & (n\not\equiv 0 \pmod 3)\\ \frac{1}{4}(x+y)^m((x+y)^{2m}+3(x-y)^{2m}) & (n\equiv 0 \pmod 3, n=3m)\end{cases}$$

系 3.4. $n=3m$ のとき $0\le k\le 3m$ に対して以下が成立する。

$$A_k=\sum_{0\le i\le 2m, 0\le j\le m, i+j=k}\frac{1+3(-1)^i}{4}\binom{2m}{i}\binom{m}{j}$$

4 $\mathbf{P}_n\times\mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n\times\mathbf{C}_n$ のラプラシアンから生じる線形符号の性質

以下、$\Gamma_n=\mathbf{P}_n\times\mathbf{P}_n, \mathbf{C}_n\times\mathbf{C}_n$ に対して $\mathcal{C}_n=\mathrm{Im}\,\Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n=\mathrm{Ker}\,\Delta_{\Gamma_n}$ を考える。また、$\mathcal{C}_n, \mathcal{H}_n=\mathcal{C}_n^\perp$ の重み多項式をそれぞれ以下のように記す。

$$W_n(x,y)=\sum_{i=0}^n A_i(n)x^{n-i}y^i,\quad W_n^\perp(x,y)=\sum_{i=0}^n A_i^\perp(n)x^{n-i}y^i$$

このとき定理 2.1 より、

$$W_n^\perp(x,y)=\frac{1}{|\mathcal{C}_n|}W_n(x+y,x-y)$$

と記すことができる。また符号 $\mathcal{C}_n$ の最小距離を d_n とする。

4.1 $\Gamma_n=\mathbf{P}_n\times\mathbf{P}_n$ のとき

$\Gamma_n=\mathbf{P}_n\times\mathbf{P}_n$ に対して、$\mathcal{C}_n=\mathrm{Im}\,\Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n=\mathrm{Ker}\,\Delta_{\Gamma_n}$ を定義する。このとき $1\le n\le 80$ において求めた $\mathcal{C}_n$ の重み多項式の係数 $A_1(n)$ や $\dim\mathcal{C}_n, \dim\mathcal{H}_n$ および最小距離 d_n の値を表 1 に示す。以下、これらのデータの観察から得られた結果を紹介する。

表 1　$\Delta_{\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n}$ のラプラシアンから生じる線形符号の次元および $A_1(n), d_n$ の値

n	$A_1(n)$	$\dim \mathcal{C}_n$	$\dim \mathcal{H}_n$	d_n
1	1	1	0	1
2	4	4	0	1
3	9	9	0	1
4	0	12	4	2
5	5	23	2	1
6	36	36	0	1
7	49	49	0	1
8	64	64	0	1
9	1	73	8	1
10	100	100	0	1
11	9	115	6	1
12	144	144	0	1
13	169	169	0	1
14	52	192	4	1
15	225	225	0	1
16	0	248	8	2
17	109	287	2	1
18	324	324	0	1
19	1	345	16	1
20	400	400	0	1
21	441	441	0	1
22	484	484	0	1
23	9	515	14	1
24	176	572	4	1
25	625	625	0	1
26	676	676	0	1
27	729	729	0	1
28	784	784	0	1
29	53	831	10	1
30	0	880	20	2
31	961	961	0	1
32	0	1004	20	2
33	1	1073	16	1
34	372	1152	4	1
35	217	1219	6	1
36	1296	1296	0	1
37	1369	1369	0	1
38	1444	1444	0	1
39	1	1489	32	1
40	1600	1600	0	1

n	$A_1(n)$	$\dim \mathcal{C}_n$	$\dim \mathcal{H}_n$	d_n
41	701	1679	2	1
42	1764	1764	0	1
43	1849	1849	0	1
44	640	1932	4	1
45	2025	2025	0	1
46	2116	2116	0	1
47	9	2179	30	1
48	2304	2304	0	1
49	401	2393	8	1
50	196	2492	8	1
51	2601	2601	0	1
52	2704	2704	0	1
53	1189	2807	2	1
54	980	2912	4	1
55	3025	3025	0	1
56	3136	3136	0	1
57	3249	3249	0	1
58	3364	3364	0	1
59	53	3459	22	1
60	3600	3600	0	1
61	1	3681	40	1
62	0	3820	24	2
63	3969	3969	0	1
64	0	4068	28	2
65	1	4183	42	1
66	4356	4356	0	1
67	1	4457	32	1
68	4624	4624	0	1
69	841	4753	8	1
70	4900	4900	0	1
71	361	5027	14	1
72	5184	5184	0	1
73	5329	5329	0	1
74	1876	5472	4	1
75	5625	5625	0	1
76	5776	5776	0	1
77	2549	5927	2	1
78	6084	6084	0	1
79	1	6177	64	1
80	6400	6400	0	1

4.1.1 $\mathcal{H}_n$ に関する性質

$\dim \mathcal{H}_n$ について以下が示せる。

定理 4.1. 任意の自然数 n に対して以下の 2 つが成立する。

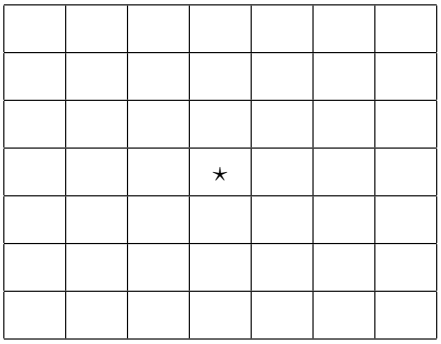
(1) $\dim \mathcal{H}_n$ は偶数である。
(2) 以下の 2 つは同値である。
  (i) $\dim \mathcal{H}_n$ は 4 の倍数である。
  (ii) $n+1$ は奇数であるか 3 で割り切れない整数である。

4.1.2 $\mathcal{C}_n$ に関する性質

$\mathcal{C}_n$ の符号語、つまり解くことができる $n \times n$ ライツアウトの初期状態について見つけた性質を紹介する。

定理 4.2 ([2])**.** n が奇数のとき、中心の 1 個 ($n \times n$ 行列とみなしたときの $(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2})$ 成分) のみが点灯している初期状態は解くことができる。図 1 に $n = 7$ の場合を示す。

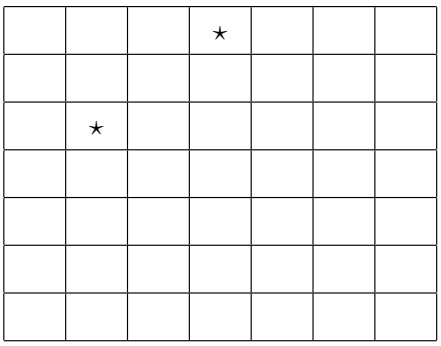
図 1



これにより n が奇数のとき $d_n = 1$ が成立することが分かる。

定理 4.3. $n \geq 4$ のとき、$n \times n$ 行列表示をしたときの $(1,4),(3,2)$ 成分のライトが点灯している初期状態は解くことができる。図 2 に $n = 7$ の場合を示す。

図 2



証明. 初期状態を $n \times n$ 行列表示したときの $(1,1),(1,2),(1,3),(2,2)$ 成分のボタンを押すとすべてのライトが消灯状態となる。 □

これにより任意の n について $d_n \leq 2$ が成立することが分かる。
次に、表 1 から考えられる予想を紹介する。

予想 4.4. 以下の 2 つが成立する。

(1) 以下の 2 つが同値である。ただし $n = 2, 6, 8, 14$ は除く。
  (i) $A_1(n) = 0$
  (ii) $n + 1 = 2^s \pm 1$
(2) 以下の 2 つは同値である。
  (i) $A_1(n) = 0$ または $A_1(n) = 1$
  (ii) $A_1(2n + 1) = 1$

4.2 $\Gamma_n = \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$ のとき

$\Gamma_n = \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n$ に対して、$\mathcal{C}_n = \operatorname{Im} \Delta_{\Gamma_n}, \mathcal{H}_n = \operatorname{Ker} \Delta_{\Gamma_n}$ を定義する。このときも同じように $\mathcal{C}_n$ の重み多項式の係数 $A_1(n), A_2(n)$ や $\dim \mathcal{C}_n, \dim \mathcal{H}_n$ および最小距離 d_n の値を求めることができる。以下、そのデータの観察から得られた結果を紹介する。

4.2.1 $\mathcal{H}_n$ に関する性質

$\mathcal{H}_n$ の重み多項式について以下を示すことができる。

定理 4.5. 任意の自然数 p に対して以下の 2 つは同値である。

(1) $\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{H}_{pn}$
(2) $W_{pn}^{\perp}(x, y) = W_n^{\perp}(x^{p^2}, y^{p^2})$

また定理 4.1 と似た以下の性質を示すことができる。

定理 4.6. 任意の自然数 n に対して以下の 2 つが成立する。

(1) $\dim \mathcal{H}_n$ は 4 の倍数である。
(2) 以下の 2 つは同値である。
  (i) $\dim \mathcal{H}_n$ は 8 の倍数である。
  (ii) n は偶数であるか 3 で割り切れない整数である。

4.2.2 $\mathcal{C}_n$ に関する性質

このときの $\mathcal{C}_n$ の最小距離について以下が証明できる。

定理 4.7. 任意の自然数 n に対して、$d_{2n} \leq d_n$が成立する。

次に、研究結果より考えられる予想を紹介する。

予想 4.8. 以下の 3 つが成立する。

(1) 任意の自然数 n に対して以下の 2 つが同値である。
  (i) $A_i(n) = 0$
  (ii) $A_i(2n) = 0$
(2) $\dim \mathcal{H}_n \neq 0$ のとき、$A_2(2n) = 4A_2(n)$ が成立する。
(3) 任意の自然数 n に対して $d_{2n} = d_n$ が成立する。

定理 4.6 が証明できているので、予想の (1) を証明することができれば (3) が成立する。

参考文献

[1] Goshima, Masato; Yamagishi, Masakazu. On the dimension of the space of harmonic functions on a discrete torus. Experiment. Math. 19 (2010), no. 4, 421–429.

[2] Hayata, Yuki; Yamagishi, Masakazu. On weight one solvable configurations of the Lights Out puzzle. Involve, 掲載決定.

[3] 平松豊一, 応用代数学, 裳華房, 1997.

古典幾何における内接多角形の面積公式

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理学専攻
梅澤瑠奈 (Runa UMEZAWA)

1 はじめに

ユークリッド幾何では三角形のとき Heron の公式, 内接四角形のとき Brahmagupta の公式など、面積をその辺の長さとべき根で表す公式 (以下面積公式とかく) が知られている. 松本幸夫先生達はユークリッド幾何で円に内接する n 角形の面積公式が、$n \geq 5$ だと存在しないことをガロア理論を用いて示した. 一方、双曲幾何や球面幾何でも三角形や内接四角形の面積公式が知られている. そこで松本先生達の結果の拡張として、双曲幾何や球面幾何でも円に内接する n 角形の面積公式が $n \geq 5$ だと存在しないことを、早稲田大学教育学部の小森洋平先生と教育学研究科修士 1 年の安井拓朗さんとの共同研究で示した.

2 ユークリッド内接多角形のとき

三角形や円に内接する四角形は辺の長さの四則演算とべき根を使って面積を表す公式が知られている.

円に内接する三角形 ABC の面積 S は Heron の公式として知られていて $s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と表せる.

また四角形 ABCD の面積 S は Brahmagupta の公式として知られていて $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

と表せる.

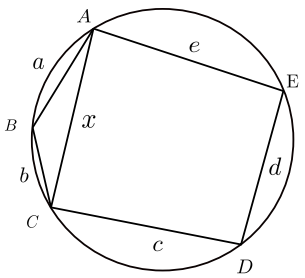
松本先生達は論文 [2] で次の定理を示した.

定理 1. 任意の *5* 以上の自然数 n に対して面積を辺の長さの四則演算とべき乗で表す公式が存在しない.

松本先生達は $n = 5$ の場合と $n \geq 6$ のときに場合分けをして示した.

$n = 5$ のときをまず示す. 円に内接する五角形に面積公式が存在しないことは次の補題より分かる.

補題 1. *[2, lemma1]* 対角線 AC の長さを x, また S を五角形の面積とすると x は $\mathbb{Q}(a, b, c, d, e, S)$ 係数の *4* 次式を満たす.



補題 2. *[2, lemma2]* 対角線 AC の長さ x は $\mathbb{Q}(a,b,c,d,e)$ 係数の 7 次式を満たす. 特に $a=b$ とすれば $x=AC$ は $\mathbb{Q}(a,c,d,e)$ 係数の 5 次式を満たす.

補題 3. 辺の長さが $(a,b,c,d,e)=(1,1,2,3,4)$ の円に内接する五角形が存在する *[2, Proposition 4]*。この時、対角線 $x=AC$ は 5 次方程式

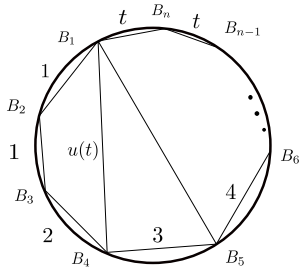
$$f(x)=8x^5+81x^4+200x^3-114x^2-864x-723=0$$

とおく. このとき $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で $f(x)$ のガロア群は S_5 と同型になり, 可解群でない.*[2, lemma3]*

これらの補題から $n=5$ のときの定理 1 の証明ができる.

証明. 背理法で示す. 五角形の面積 S が $\mathbb{Q}(a,b,c,d,e)$ の四則演算とべき根で表されると仮定する. 補題 1 より $x=AC$ は $\mathbb{Q}(S,a,b,c,d,e)$ 係数の 4 次式の根であるからガロア理論の結果より x の $\mathbb{Q}(S,a,b,c,d,e)$ 上の最小多項式のガロア群は可解群になる. よって x は S,a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せる. 最初の仮定より S も a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せると仮定したので x も a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せることになる. つまり x の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式のガロア群は補題 3 より可解群でないことに矛盾する. □

次に $n\geq 6$ のときを示す. 辺の長さが $1,1,2,3,4,t,\dots t$ の n 角形の面積公式を $F(t)=F(1,1,2,3,4,t,\dots t)$ とする.



証明に必要な命題を準備しておく.
$F(t)$ がピュイズー級数の比で表される理由が次の命題である.

命題 1. *[2, prop 7]* $F(t)$ が $\mathbb{Q}(t)$ のべき根拡大に含まれるとする. また $F(t)$ は恒等的に 0 でなく, 有限個の $\mathbb{Q}$ 係数多項式に $+,-,\times,$ と k 乗根を使って得られるとする. 単連結, かつ分岐点集合との共通部分が空集合である $D\subset\mathbb{C}$ が $(0,\varepsilon)$ を含むと仮定する. ただし D は 0 を含まず ε は十分小さくとる. このとき $F(t)$ の D 上の各分岐に対して $D_\varepsilon:=\{\{t\in\mathbb{C}\mid |t|<\varepsilon\}\cap D$ の連結成分で $(0,\varepsilon)$ を含むものとする $\}$ と定義する.
$t\in D_\varepsilon$ に対して

$$F(t)=c_0+c_1t^{\frac{1}{p}}+\dots$$

を満たす $p\in\mathbb{N}$ が存在する. ただし c_i は $\mathbb{Q}$ のべき根拡大である.

$$F(t)=\frac{c_i+c_{i+1}t^{\frac{1}{p}}+c_{i+2}t^{\frac{2}{p}}+\dots}{d_j+d_{j+1}t^{\frac{1}{q}}+d_{j+2}t^{\frac{2}{q}}+\dots}$$

ならば

$$\lim_{t\to+0}F(t)=\frac{c_i}{d_j}$$

ただし c_i,d_j は $\mathbb{Q}$ 上べき根拡大の元.

命題 2. *[2, prop 7]*

$$\lim_{t\to+0}F(t)=S(1,1,2,3,4)$$

証明. n 角形の面積公式が存在したと仮定して矛盾を導く.

命題 1 より n 角形の面積公式 $F(t)$ がべき根拡大の元で表せることが分かった. 一方で命題 2 より $S(1,1,2,3,4)$ という辺の長さの四則演算とべき根で表せないことが証明されている五角形の面積であるから矛盾する. □

3　双曲・球面内接五角形

双曲内接 n 角形や球面内接 n 角形に対しても同様に $n = 3, 4$ のときは面積公式が存在するが $n \geq 5$ のとき存在しないことをこの章で述べる.

ユークリッド幾何での Heron の公式や Brahmagupta の公式にあたる同様の三角形や内接四角形の面積公式が双曲幾何や球面幾何の場合にもある. 以下のことが成り立つ.

双曲内接三角形, 四角形の面積公式
Billinski の公式 (論文 [4] より)
辺の長さが a, b, c, d の円に内接する双曲四角形の面積 S に対して次の式が成り立つ. $s(a) = \sinh(\frac{a}{2})$ と省略する. (例えば $d = 0$ のとき三角形の面積公式が成り立つ)

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{4 - 2(\sinh^2(\frac{a}{2}) + \sinh^2(\frac{b}{2}) + \sinh^2(\frac{c}{2}) + \sinh^2(\frac{d}{2}) - 4\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\sinh\frac{d}{2})}{4\sqrt{1+\sinh^2\frac{a}{2}}\sqrt{1+\sinh^2\frac{b}{2}}\sqrt{1+\sinh^2\frac{c}{2}}\sqrt{1+\sinh^2\frac{d}{2}}}$$

球面幾何の場合も類似の関係が論文 [3] より成り立つ.

球面内接三角形, 四角形の面積公式
論文 [3] より辺の長さが a, b, c, d の円に内接する球面四角形の面積 S に対して次の式が成り立つ. $s(a) = \sin a$ と省略する. (例えば $d = 0$ のとき三角形の面積公式が成り立つ)

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{4 + 2(\sin^2(\frac{a}{2}) + \sin^2(\frac{b}{2}) + \sin^2(\frac{c}{2}) + \sin^2(\frac{d}{2}) - 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})}{4\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2}}\sqrt{1-\sin^2\frac{b}{2}}\sqrt{1-\sin^2\frac{c}{2}}\sqrt{1-\sin^2\frac{d}{2}}}$$

ユークリッドのときは辺の長さで面積を直接表せたが双曲幾何のときは辺を 2 で割って sinh したものの四則演算で面積を 2 で割った cos が表される.

以下双曲幾何・球面幾何での松本先生達の論文の流れを見ていく.

補題 4 (補題 1 の双曲版)**.** 円に内接する双曲五角形 $ABCDE$ の面積を S, 対角線 AC の長さを x とすると $s(x) = \sinh\frac{x}{2}$ は $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos\frac{S}{2})$ の四則演算とべき根で表される四次式の根になる.

補題 5 (補題 1 の球面版)**.** 円に内接する球面五角形 $ABCDE$ の面積を S, 対角線 AC の長さを x とすると $s(x) = \sin\frac{x}{2}$ は $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos\frac{S}{2})$ の四則演算とべき根で表される四次式の根になる.

証明. 松本先生達の論文に基づいて円に内接する五角形を三角形 A と四角形 B に分割する. 五角形の面積を S とすると Bilinski の公式や球面での面積公式を使って計算すれば証明できる. □

補題 2 の議論の際に必要なユークリッド距離と双曲・球面距離それぞれの関係が [1] の論文より成り立つ.

補題 6. ユークリッド距離と双曲距離の関係について

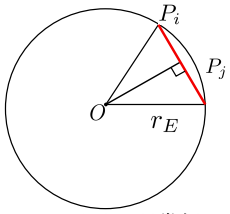
$$\sinh\frac{d_h(P_iP_j)}{2} = \frac{1}{1-r_E^2}d_E(P_iP_j)$$

が成り立つ.

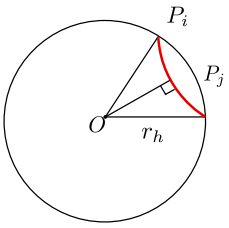
証明. 双曲幾何 (円盤モデル) において $r_E = \tanh\frac{r_h}{2}$ という関係が成り立つことから

$$\sinh\frac{|P_iP_j|_h}{2} = \frac{1}{1-r_E^2}|P_iP_j|_E$$

となりユークリッド半径 r_E で決まることが分かった. □



ユークリッド幾何



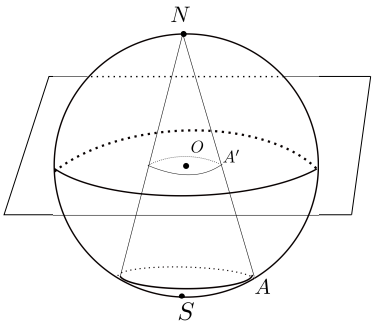
双曲幾何

補題 7. 球面距離とユークリッド距離について

$$\sin\frac{d_s(P_i'P_j')}{2} = \frac{1}{1+r_E^2}d_E(P_iP_j)$$

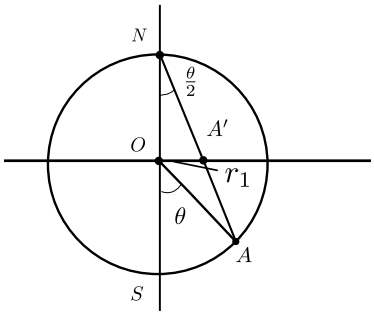
が成り立つ.

証明. 半径 1 の球の $(1,0,0)$ の点 N とするとき球面上の点 A を xy 平面上に立体射影した時の点を A' とする.



$$r_1 = r_E = \tan\frac{\theta}{2}$$

が分かる.



S 中心球面距離の半径 r_s = 弧 AS であるから $r_s = \theta$ が成り立つので

$$r_E = \tan\frac{r_s}{2}$$

よって

$$\sin\frac{d_s(P,Q)}{2} = \frac{1}{1+r_E^2} d_E(P'Q')$$

よってユークリッド距離 $a:b:c:d:e = 1:1:2:3:4$ に対して $s(a):s(b):s(c):s(d):s(e) = 1:1:2:3:4$ となる球面五角形が存在することがわかる. □

補題 8 (補題 2 の双曲版)**.** 双曲内接五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ に対して $s(P_1P_3)$ は $\mathbb{Q}(s(P_1P_2), s(P_2P_3), s(P_3P_4), s(P_4P_5), s(P_5P_1))$ 係数の 7 次式を満たす.
とくに $s(P_1P_2) = s(P_2P_3)$ のとき $\mathbb{Q}(s(P_1P_2) = s(P_2P_3), s(P_3P_4), s(P_4P_5), s(P_5P_1))$ 係数の 5 次式を満たす.

証明. 松本先生達の論文よりユークリッド距離が 1,1,2,3,4 である辺をもつ五角形が内接するような円が存在することが分かった. その円の半径を r とすると補題 6 よりある m が存在して $\sinh(\frac{P_1P_2}{2}) = \sinh(\frac{P_2P_3}{2}) = \frac{1}{m}, \sinh(\frac{P_3P_4}{2}) = \frac{2}{m}, \sinh(\frac{P_4P_5}{2}) = \frac{3}{m}, \sinh(\frac{P_5P_1}{2}) = \frac{4}{m}$ となる双曲五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ が円に内接するように半径 r' がとれる. ただし $r' < 1$ である.

$x = \sinh(\frac{P_1P_3}{2})$ とおくと松本先生達の論文の辺 a, b, c, d, e に対して $a = \sinh(\frac{P_1,P_2}{2}) = b = \sinh(\frac{P_2,P_3}{2}), c = \sinh(\frac{P_3,P_4}{2}) =, d = \sinh(\frac{P_4,P_5}{2}), e = \sinh(\frac{P_5,P_1}{2}), x = \sinh(\frac{P_1P_3}{2})$ とすれば $\sinh(\frac{P_1P_3}{2})$ についての 5 次式となることが分かる. □

補題 9 (補題 2 の球面版)**.** 球面内接五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ に対して $s(P_1P_3)$ は $\mathbb{Q}(s(P_1P_2), s(P_2P_3), s(P_3P_4), s(P_4P_5), s(P_5P_1))$ 係数の 7 次式を満たす. とくに $s(P_1P_2) = s(P_2P_3)$ のとき $\mathbb{Q}(s(P_1P_2) = s(P_2P_3), s(P_3P_4), s(P_4P_5), s(P_5P_1))$ 係数の 5 次式を満たす.

補題 10 (補題 3 の双曲・球面版)**.** 松本先生の論文の $f(x)$ に対して x を $s(x)$ に置き換えた式が成り立つ. ガロア群は S_5 になる.

4 双曲・球面内接 n 角形 ($n \geq 6$ のとき)

松本先生達の論文 [2] と同様の流れで示す.

内接 n 角形の面積を S としたときその辺の長さ $a_1, \ldots a_n$ に対して $\cos\frac{S}{2}$ を $s(a_1), \ldots s(a_n)$ の四則演算とべき根のみで表せる面積公式が存在すると仮定する. それを $F(t)$ とする.

命題 3. $F(t)$ はピュイズー級数の比で表される.

十分小さい t に対して $(s(a_1):s(a_2):s(a_3):s(a_4):s(a_5):s(a_6):\cdots s(a_n)) = (1:1:2:3:4:t\cdots t)$ となる内接 n 角形が存在する.

命題 4.

$$\lim_{t\to+0}\cos\frac{S}{2} = \cos\frac{S(1,1,2,3,4)}{2}$$

よって矛盾が生じる.

References

[1] R. Guo and N. Sönmez: Cyclic polygons in classical geometry, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 64:2 (2011), 185–194.

[2] Y. Matsumoto, Y. Matsutani, M. Oka, T. Sakai and T. Shibuya: On the area of a polygon inscribed in a circle, L'Enseignement Mathématique (2) 53 (2007), 127 –153.

[3] W. M'Clelland and T. Preston: A Treatise on Spherical Trigonometry with application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II, London: Macmillian and Co., 1886.

[4] A. Mednykh: Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterials in the hyperbolic plane. Sib. Èlektron. Mat. Izv. 9 (2012), 247–255.

切除多項式環の代数的 K 群とそれに付随する Verschiebung 射

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
堀内遼
Horiuchi Ryo

1 序

このポスター発表では TR と呼ばれる環スペクトラムのホモロジー論を使った代数的 K 群の計算を紹介する。本稿では他分野あるいは初学者の方が読まれる事を想定し、発表内容とは必ずしも直接的に関連しないものも含めて基礎的な事実や有名な定理をいくつか紹介する。またこの分野に興味を持たれた方の便宜のためにやや多めに参考文献を引くことにする。

スペクトラムとは基点付き空間の列のようなものであり、スペクトラムの圏は対称モノイダル構造を持っている（この辺りの話は [28]、[29]、[23] などがまとまっていると思う）。各次元の球面よりなる球面スペクトラム $\mathbb{S}$ は特に重要で、その対称モノイダル構造の単位対象にもなっている。この対称モノイダル構造におけるモノイド対象のことを環スペクトラムと呼ぶ。Eilenberg-MacLane 空間を使うと、加法群のなす圏からスペクトラムのなす圏に関手が構成できるが、それは環の圏から環スペクトラムの圏への関手を誘導する。つまりこの意味で、イニシャルな環 $\mathbb{Z}$ はイニシャルな環スペクトラム $\mathbb{S}$ 上の代数とみなされる。基礎環が $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{S}$ に下ろされた新しい代数を研究しようという提案が 80 年代に Waldhausen によってなされ、長らく研究されてきた。つまり、円とか球という幾何的に最も基本的らしきものが整数という代数側で最も基本的らしきものより代数として深い、という立場による研究領域があるということである。

そういった研究の一つの大きな道具として、Bökstedt[5] により導入された位相的 Hochschild ホモロジー THH がある。当初は主に代数的 K 理論を計算するための道具として研究されていたようである（[9] や [24] などに詳しい）。この THH から派生していくつかのホモロジー論（TF、TR、TC、TP、TC^- など）が知られているが、本発表は TR に関するものである。他のホモロジー論も重要であり、例えば最近では [1] や [10] など数論幾何学方面で使われているようである。古典的なところでは [6] が TC と K 理論、あるいは A 理論を比較している。

2 背景

定義 1. A を環スペクトラムとする。上述のモノイダル構造による A の巡回バー構成を $\mathrm{THH}(A)$ と書く。これは A の位相的 Hochschild ホモロジーと呼ばれる。

余極限があるような対称モノイダル圏があって、そのモノイド対象があれば、巡回バー構成を考え

て諸々ひとまずホモロジー論に持ち込むというのは常套手段だろうが、THH もその一例である。通常の Hochschild ホモロジー HH もその類であるし、THH は HH のスペクトラム的一般化とも思える（[18] や [26] に詳しい）。この意味で THH は環スペクトラムを考えたい時に自然に現れる基本的な不変量であると言える。なおこの定義は [5] のものと少し違うが、同等のものである（[27] 参照）。

THH はその構成から、円周群 $\mathbb{T}$ の作用を受ける（[8]、[19]、[30] など参照）。この自然な作用が THH の解析や TR などの他のホモロジー論の構成には重要である。

正の自然数 n に対し C_n で n 次巡回群を表し、$\mathbb{T}$ の部分群と思う。よって X が $\mathbb{T}$-作用のあるスペクトラムであったら、$\mathbb{T}$-作用の制限として X は C_n の作用も受ける。その作用に関するノルム射のコファイバーを X^{tC_n} と書く。

定義 2 ([15], [26])**.** X を $\mathbb{T}$-作用のあるスペクトラムとする。任意の素数 p に対して、$\mathbb{T} \cong \mathbb{T}/C_p$-同変なスペクトラムの射

$$X \longrightarrow X^{tC_p}$$

が存在する時、X は円分スペクトラムであるという。

円分スペクトラムは元々 [15] で導入された概念であり、同変直交スペクトラムの言葉で定義されていた。それを最近、より簡単に高次圏の言葉を使って [26] が再導入した。なお、ある整数より低い次数のホモトピー群が全て消えているスペクトラムに対しては、この二つの定義は一致する（[26, Theorem 1.4] 参照）。

定理 1 ([15])**.** 任意の環スペクトラム A に対し、THH(A) は円分スペクトラムである。

実際は THH の研究の中で円分スペクトラムという概念が導入されたわけだが、この定理の直接的なご利益の一つとして不変部分スペクトラムの間の射が挙げられる。以下に見るように、それは高次代数的なものと数論幾何的なものの直接的な比較を与え、最近ようやく広まり始めたホモトピー論と数論幾何の交錯する研究の口火を切った。

THH(A) には次の三つの射の族が定義されるが、F と V は $\mathbb{T}$ の作用から得られ、R は円分構造を使って定義される（詳しくは [15, §3.3] や [11] 等参照）。THH(A)^C は THH(A) の C-作用による不変部分スペクトラムである。

$$F_n : \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_m}$$
$$V_n : \mathrm{THH}(A)^{C_m} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}}$$
$$R_n : \mathrm{THH}(A)^{C_{mn}} \longrightarrow \mathrm{THH}(A)^{C_m}$$

記号から察せられるように、これは Witt ベクトルの Frobenius 射、Verschiebung 射、制限射に対応している（Witt ベクトルの歴史は長いが、新しい文献としては [2] や [4] などがある）。具体的には以下の定理がある。$\mathbb{W}_{\langle n \rangle}$ は n の約数のなす切除集合に付随する Witt ベクトルである。

定理 2 ([15])**.** 可換環 R と任意の自然数 $n \geq 1$ に対し、自然な環同型

$$\pi_0(\mathrm{THH}(R)^{C_n}) \cong \mathbb{W}_{\langle n \rangle}(R)$$

がある。さらにこの同型は Frobenius 射、Verschiebung 射、制限射とも整合的である。[*1]

[*1] この定理は非常に重要で、例えば [22] では a very beautiful result と紹介されているし、円分構造と λ-構造を結びつ

3　主結果

環スペクトラム A に対し、$\mathrm{TR}^n(A) := \mathrm{THH}(A)^{C_n}$ と置く。[12, §5] で正則な $\mathbb{F}_p$-代数に対しての $\mathrm{TR}^\bullet$ と de Rham-Witt 複体の比較がされている。ここで詳しく述べることはできないが、それは定理 2 の一つの発展形と見なす事もできる。de Rham-Witt 複体に関しては、[14] で詳しく調べられている。

以下が本講演の主結果である。

定理 3 ([17])**.** A を環とする。素数 p が A において冪零である時、以下の長完全列の間の射がある。

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\lim_R \mathrm{TR}^{i/k}_{q-\lambda_{d_{i,k}}}(A) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \lim_R \mathrm{TR}^{i/kn}_{q-\lambda_{d_{i,kn}}}(A) \\
\downarrow{\scriptstyle V_{k*}} & & \downarrow{\scriptstyle V_{kn*}} \\
\lim_R \mathrm{TR}^{i}_{q-\lambda_{d_{i,k}}}(A) & \xrightarrow{V_{n*}} & \lim_R \mathrm{TR}^{i}_{q-\lambda_{d_{i,kn}}}(A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{q+1}(A[x]/(x^k),(x)) & \xrightarrow{v_n} & K_{q+1}(A[x]/(x^{nk}),(x)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
\quad ,
$$

ここで $\lambda_{d_{i,k}}$ は $(i-1)/k$ の整数部分の 2 倍、V_{n*} は Verschiebung 射に誘導される射を表し、v_n は $x \mapsto x^n$ で誘導される射であり、$\lim_R$ は円分構造から定まる制限射による極限である。

この縦の長完全列は [16] によって得られている。また、標準的な射影

$$A[x]/(x^m) \to A[x]/(x^n)$$

により誘導される射

$$K_*(A[x]/(x^m),(x)) \to K_*(A[x]/(x^n),(x))$$

に付随する長完全列の射は [12, Theorem A] において解析されている。こういった切除多項式環の K 群の THH を用いた解析において鍵となるのは [15, THEOREM 7.1] である。この定理は元々位相幾何的に証明されたが、最近 Speirs[31] により [26] の言葉で再証明された。

けた初めての定理と思われる。さらには非可換環への拡張 [13] もあり、[21] や [25] などのように展開されている。また、Witt ベクトルの理論は [2] で半環に対してまで拡張されている（[3]、[4]、[20] も参照されたい）。実は ∞-亜群のホモトピー論を使わずにスペクトラムを構成すれば、$\mathbb{S}$ は自然数のなすイニシャルな半環 $\mathbb{N}$ よりも深い代数であることもわかる（例えば [7] では Boolean 半体 $\mathbb{B} = \{0,1\}$ の Eilenberg-MacLane スペクトラムについて調べられている）。しかし、ホモトピー “群”が一般に（群ではない）モノイドになりうるようなものの幾何学はおそらくまだなく、定理 2 の $\mathbb{N}$-代数への拡張は知られていない。

正則な $\mathbb{F}_p$-代数に対しては、[12] による $\mathrm{TR}^\bullet$ と de Rham-Witt 複体の対応を使って上の図式を de Rham-Witt 複体で書き換えることができる。

系 4 ([17])**.** p を素数とし、A を正則な $\mathbb{F}_p$-代数とする。 この時、以下の長完全列の間の射がある。

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{l\geq 0} \mathbb{W}_{l+1}\Omega_A^{q-2l} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \bigoplus_{l\geq 0} \mathbb{W}_{l+1}\Omega_A^{q-2l} \\
\downarrow{\scriptstyle V_{k*}} & & \downarrow{\scriptstyle V_{kn*}} \\
\bigoplus_{l\geq 0} \mathbb{W}_{k(l+1)}\Omega_A^{q-2l} & \xrightarrow{V_{n*}} & \bigoplus_{l\geq 0} \mathbb{W}_{kn(l+1)}\Omega_A^{q-2l} \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{q+1}(A[x]/(x^k),(x)) & \xrightarrow{v_n} & K_{q+1}(A[x]/(x^{nk}),(x)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array} ,$$

ここで、$\mathbb{W}_{(-)}\Omega_A^*$ は A 上の de Rham-Witt 複体であり、添字 $m(l+1)$ は切除集合 $\{1,2,...,m(l+1)\}$ を表し、V_{n*} は Verschiebung 射に誘導される射である。

この系において、$A=\mathbb{F}_p$ とすると次が得られる。

系 5. 自然数 $j\geq 1$ に対し、

$$K_{2j-1}(\mathbb{F}_p[x^{1/p^\infty}],(x)) = \mathrm{colim}_n(\mathbb{W}_{jp^n}(\mathbb{F}_p)/V_{p^n}\mathbb{W}_j(\mathbb{F}_p)),$$

さらに偶数次の K 群は自明である。

実はもう少し一般の環に対しても系 5 は成り立つ ([17, Corollary 4.7, 4.8]) が、この形が最も基本的だと思う。

参考文献

[1] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze, Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory, arXiv:1802.03261, 2018.

[2] J. Borger, Witt vectors, semirings, and total positivity, Absolute Arithmetic and F1-Geometry. EMS Publishing House, 2016

[3] J. Borger, D. Grinberg, Boolean Witt vectors and an integral Edrei-Thoma theorem, Selecta Mathematica 22(2) (2016), pp 595-629.

[4] J. Borger, B. Wieland, Plethystic algebra. Adv. Math. 194 (2005), 246-283.

[5] M. Bökstedt, Topological Hochschild homology, Bielefeld preprint (1985).

[6] M. Bökstedt, W.C. Hsiang and I. Madsen The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces Invent. Math., 111, 1993, p. 465-539.

[7] A. Connes, C. Consani, Absolute algebra and Segal's Γ-rings: au dessou de Spec(Z). To appear in Journal of Number Theory.

[8] V. Drinfeld, On the notion of geometric realization, Moscow Mathematical Journal Volume 4, Number 3, July-September 2004, Pages 619-626

[9] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, The local structure of algebraic K-theory. Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[10] L. Hesselholt, Periodic topological cyclic homology and the Hasse-Weil zeta function, An Alpine Bouquet of Algebraic Topology (Saas Almagell, Switzerland, 2016), pp. 157-180, Contemp. Math. 708, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 2018.

[11] L. Hesselholt, K-theory of truncated polynomial algebras, Handbook of K-theory, vol. 1, pp. 71-110, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[12] L. Hesselholt, The tower of K-theory of truncated polynomial algebras, J. Topol. 1 (2008), 87-114.

[13] L. Hesselholt, Witt vectors of non-commutative rings and topological cyclic homology, Acta Math. 178 (1997), no. 1, 109-141. MR 1448712

[14] L. Hesselholt, The big de Rham-Witt complex, Acta Math. 214 (2015), 135-207.

[15] L. Hesselholt, I. Madsen, On the K-theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields. Topology 36 (1997), no. 1, 29-102.

[16] L. Hesselholt, I. Madsen, Cyclic polytopes and the K-theory of truncated polynomial algebras, Invent. Math. 130 (1997), 73-97.

[17] R. Horiuchi, Verschiebung maps among K-groups of truncated polynomial algebras, arXiv:1712.03189

[18] M. Hoyois, The fixed points of the circle action on Hochschild homology, arXiv:1506.07123.

[19] J.D.S. Jones, Cyclic homology and equivariant homology, Invent. Math. 87, 403-423 (1987)

[20] A. Joyal. δ-anneaux et vecteurs de Witt. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 7(3):177-182, 1985.

[21] D. Kaledin, Hochschild-Witt complex, arXiv:1604.01588

[22] A. Krause, T. Nikolaus, Lectures on topological Hochschild homology and cyclotomic spectra, https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/index.html

[23] J. Lurie, Higher algebra, http://www.math.harvard.edu/ lurie/

[24] I. Madsen, Algebraic K-theory and traces, Current Developments in Mathematics, 1995

[25] A. Mathew, Kaledin's degeneration theorem and topological Hochschild homology, arXiv:1710.09045

[26] T. Nikolaus, P. Scholze, On topological cyclic homology, arXiv:1707.01799

[27] I. Patchkoria, S. Sagave, Topological Hochschild homology and the cyclic bar construction in symmetric spectra, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 9, 4099-4106.

[28] S. Schwede, Symmetric spectra, http://www.math.uni-bonn.de/ schwede/

[29] S. Schwede, Lecture notes on equivariant stable homotopy theory, http://www.math.uni-bonn.de/ schwede/

[30] J. Spalinski, Strong homotopy theory of cyclic sets, J. of Pure and Appl. Alg. 99 (1995), 35-52.

[31] M. Speirs, On the algebraic K-theory of coordinate axes and truncated polynomial algebras, Ph.D. thesis, 2018.

散逸を伴った無限成分 Dicke Model について

興川 遼大 (ryota kyokawa)
金沢大学大学院 自然科学研究科 機械科学専攻

１．緒論

近年, 量子コンピュータが注目されている．従来型のコンピュータでは解答に膨大な時間を要する種類の問題を，量子コンピュータは瞬時に解くことができるためである．そのため量子コンピュータは期待されているが，実現に至るまでには課題も多い．量子コンピュータは量子状態を利用して計算を行うが，量子状態は壊れやすく, 維持が困難である．そのため量子状態を素早く制御することが求められる．光子は量子情報の送信に関して優れているが，熱などの外部の環境に影響され，散逸に敏感であるとされている．本研究では Dicke モデルと呼ばれる．量子状態を表す簡単なモデルに注目した．Dicke モデルで扱われる調和振動子 (光子) と無限成分スピン (原子の集合) について数学的に調べ，外部の熱や散逸などの影響を考察することを目的とし，無限成分 Dicke モデルの数学的解析を行う．

２．シュレーディンガー方程式

量子力学では物理的状態はヒルベルト空間の元で表される．物理量としては演算子が扱われる．量子力学で最も重要とされる方程式は物理的状態の時間発展を与えるシュレーディンガー方程式である：

$$i\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \tag{0.1}$$

３．調和振動子

3.1 ハミルトニアン　調和振動子の場合ヒルベルト空間の基底状態は $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...$ と書かれる．ハミルトニアン H は次のようになる．

$$H = \omega a^\dagger a \tag{0.2}$$

ここで ω:角振動数 ($\omega > 0$)，$a^\dagger$:生成演算子，a:消滅演算子である．生成演算子，消滅演算子の $|n\rangle$ への作用と，$a^\dagger$ と a の交換関係は次のようになる．

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{0.3}$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{0.4}$$

3.2 マスター方程式　シュレーディンガー方程式 ($i\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle$) はベクトル $|\psi\rangle$ を扱った方程式だが，ここで密度行列を扱った方程式も考えたい．そこで密度行列 $\rho(t)$ を次のように置く．

$$\rho(t) = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{0.5}$$

この $\rho(t)$ を微分すると

$$i\partial_t\rho(t) = H\rho(t) - \rho(t)H = [H, \rho(t)] \tag{0.6}$$

この式に外部の熱浴との相互作用を表す項を次のように加えることができる．

$$\partial_t\rho(t) = (-iK_H + \sum_i (\alpha_i D_{A_i o A_i^\dagger} + \beta_i D_{A_i^\dagger o A_i}))\rho(t) \equiv L\rho(t) \tag{0.7}$$

この式 (0.7) をマスター方程式と呼ぶ.
但し，$K_H = [H, \rho]$
$D_{A_i o A_i{}^\dagger}(\rho) = 2A_i \rho A_i{}^\dagger - A_i{}^\dagger A_i \rho - \rho A_i{}^\dagger A_i$
$D_{A_i{}^\dagger o A_i}(\rho) = 2A_i{}^\dagger \rho A_i - A_i A_i{}^\dagger \rho - \rho A_i A_i{}^\dagger$ である
ここで $A_i = a$ という簡単な場合を考える

$$\partial_t \rho(t) = (-iK_H + (\alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa}))\rho(t) \tag{0.8}$$

α と β は

$$\alpha = \frac{\gamma_i e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1}, \beta = \frac{\gamma_i}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{0.9}$$

とパラメトライズする．右辺の β は外部の逆温度である．
次のようなことが導かれる．

- $\Psi_{n,m} = K_a^n K_{a^\dagger}^m |0><0|$ とおくと $(\Psi_{n,m})_{n,m \geqq 0}$ は $C_1(H)$ を張る．
- $D_{a^\dagger oa}\Psi_{n,m} = -(n+m)\Psi_{n,m}$ より $\Psi_{n,m}$ は $D_{aoa^\dagger}$ の固有値 $-(n+m)$ を持つ固有ベクトルである．
- $e^{D_{a^\dagger oa}}(\Psi_{0\,0}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n}|n><n|/Z$ は Gibbs 分布．(ここで $\beta = -\frac{1}{\omega}\log(1 - e^{-2t}), Z = e^{2t}, t = -\frac{1}{2}\log(1 - e^{-\omega\beta})$)
- $e^{tD_{a^\dagger oa}}\Psi_{n,m}$ は $e^{2t}D_{a^\dagger oa} + (e^{2t} - 1)D_{a^\dagger oa}$ の固有値 $-(n + m)$ に属する固有ベクトルである $(n, m = 0, 1, 2, ...)$

４．無限成分スピン

4.1 無限成分スピンの導入　　スピン j をもつスピン系のヒルベルト空間の基底状態は $|j, -j), ..., |j, 0), ..., |j, j)$ となる．スピンの上昇演算子の作用を表す式は次のようになる．

$$J_+|j, m) = \sqrt{(j - m)(j + m + 1)}|j, m + 1), (-j < m < j) \tag{0.10}$$

整数 m を止めて j を ∞ にすると，$(j-m)(j+m+1)$ の m は無視できるので l_+ を $l_+ = J_+/\sqrt{j(j+1)}$ と定義して j を ∞ とし，$|z) = \lim_{j\to\infty}|j, z)$ と置けば

$$l_+|z) = |z + 1), (z = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{0.11}$$

が得られる．同様に l_- も定義すると

$$l_\pm|z) = |z \pm 1), (z = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{0.12}$$

これを無限成分スピンと呼ぶ.

4.2 マスター方程式　無限成分スピンでのマスター方程式は

$$\partial_t \rho(t) = L\rho(t) \tag{0.13}$$

となり，ジェネレータ L は次のようなものを考える．

$$L = -i\mu K_M + \alpha D_{l_- o l_+} + \beta D_{l_+ o l_-} \tag{0.14}$$

ここで $\mu > 0$ であり，$S = \alpha D_{l_- o l_+} + \beta D_{l_+ o l_-}$ とおく．また，M は $M|z) = z|z)$ である．
調和振動子のときに $e^{\alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa}}$ について考えたのと同様にスピンのとき $e^{\kappa S}(\rho)$ を考えると次のようになる．

$$e^{\kappa S}(\rho) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-2(\alpha-\beta)\kappa)^2}{4\kappa(\alpha+\beta)}}}{\sqrt{2\pi\kappa(\alpha+\beta)}} l_-^z \rho l_+^z \tag{0.15}$$

この結果から調和振動子で得られた Gibbs 分布とは異なり，スピン系では分布が収束せずに広がっていく様子が見られる．

５．無限成分 Dicke モデル

5.1 RWA　散逸を伴う無限成分 Dicke モデルを扱う前に，まず，散逸の伴わない系である RWA の下での Dicke モデルを考える．それは調和振動子（光子）と無限成分スピン（原子の集合）が相互作用している系をモデル化したものである．ここで考えるヒルベルト空間は調和振動子のものとスピン系のものとのテンソル積である．そこでの基底状態は

$$|n\rangle \otimes |k), (n = 0, 1, 2, ..., k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{0.16}$$

で与えられる．ここで扱うハミルトニアン H_{RWA} は次のようになる．

$$H_{RWA} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(al_+ + a^\dagger l_-) \tag{0.17}$$

ここで $a^\dagger a$ は $a^\dagger a \otimes 1$,al_+ は $a \otimes l_+$,$a^\dagger l_-$ は $a^\dagger \otimes l_-$ の略号である．
ユニタリー変換

$$U(\epsilon) = e^{\epsilon(a^\dagger l_- - a l_+)} \tag{0.18}$$

の下で，ハミルトニアン H_{RWA} は対角化することができ

$$H_{RWA} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(al_+ + a^\dagger l_-) = U^{-1}\Big(\omega a^\dagger a + \mu M - \frac{\lambda^2}{\omega - \mu}\Big)U \tag{0.19}$$

となる．ここで，$\lambda = \epsilon(\omega - \mu)$ である．
5.2 RWA ではない場合　次に，散逸の伴わない系の RWA を用いないハミルトニアンの下で調和振動子（光子）と無限成分スピン（原子の集合）が相互作用している系を考える．RWA のときと同様にヒルベルト空間は調和振動子のものとスピン系のものとのテンソル積である．ここで扱うハミルトニアン H_{Full} は次のようになる．

$$H_{Full} = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-) \tag{0.20}$$

H_{RWA} のときの $\lambda(al_+ + a^\dagger l_-)$ の項が H_{Full} の場合 $\lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-)$ となっている．
ここでは，ユニタリー変換

$$U = \exp[-\Big(\frac{\lambda}{\omega + \mu}(al_- - a^\dagger l_+) + \frac{\lambda}{\omega - \mu}(al_+ - a^\dagger l_-)\Big) + \frac{\omega\lambda^2}{2\mu(\omega^2 + \mu^2)}(l_+^2 - l_-^2)] \tag{0.21}$$

の下で，対角化することができ

$$H = \omega a^\dagger a + \mu M + \lambda(a + a^\dagger)(l_+ + l_-) = U^{-1}\Big(\omega a^\dagger a + \mu M - \frac{\omega\lambda^2}{2\mu(\omega^2 + \mu^2)}\Big)U \tag{0.22}$$

となる．
5.3 散逸を伴う無限成分 Dicke モデル　最後に散逸を伴った無限成分 Dicke モデルを考える．ここで考えるハミルトニアンは RWA のときの式 (0.17) を考える．マスター方程式のジェネレータ L は次のようになる．

$$L = -i\mu K_{H_{RWA}} + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} \tag{0.23}$$

ここで $U(t)$ を

$$U(t) = \exp[t((\omega - \mu)(K_{a^\dagger l_-} - K_{al_+}) - i(\alpha D_{l_- oa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger o l_-} - \alpha D_{aol_+} - \beta D_{l_+ oa}))] \tag{0.24}$$

と置くと

$$U(t)^{-1}\Big(-i(\omega K_{a^\dagger a} + \mu K_M) + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} + \frac{\lambda^2 S}{(\omega - \mu)^2 + (\alpha - \beta)^2}\Big)U(t) = -i\mu K_{H_{RWA}} + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} = L \tag{0.25}$$

となり対角化できた．ここで，

$$t = \frac{\lambda}{(\omega-\mu)^2+(\alpha-\beta)^2} \tag{0.26}$$

と置けばよい．
ここで対角化する前と後で光子 (photon) とスピン (spin) がどのように変化していいるか図に示した．(Fig1)
この図 (Fig1) の上の部分が対角化する前の式に対応しており，下の部分が対角化した後の式に対応している．

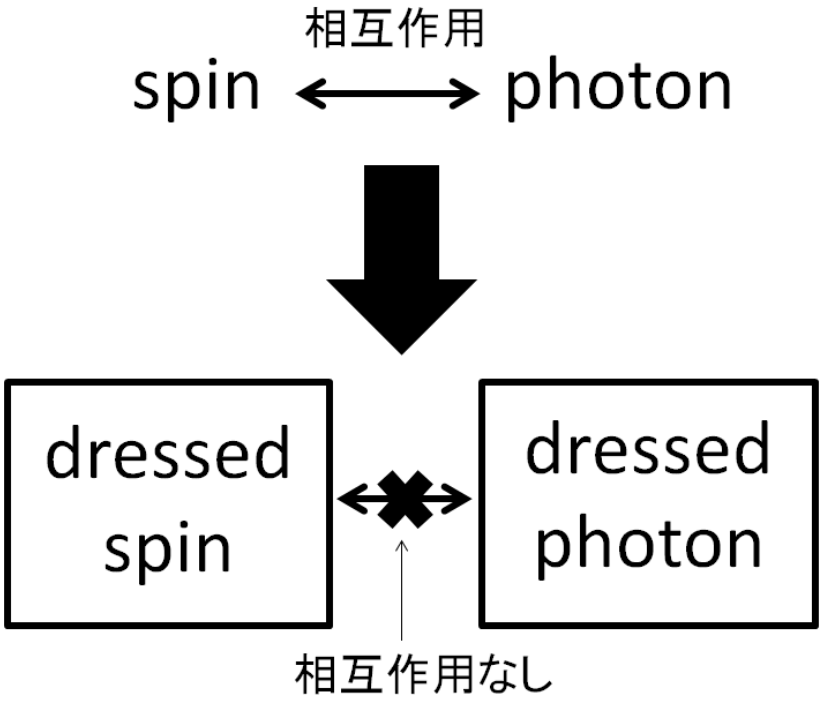


Figure 1: dressed photon,dressed spin

(補足)
散逸を伴った無限成分 Dicke モデルでハミルトニアンを Full のときに用いた式 (0.20) として考えた場合，マスター方程式のジェネレータ L は次のようになる．

$$L = -i\mu K_{H_{Full}} + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} \tag{0.27}$$

U と V を

$$U = \exp[\lambda(\frac{(\omega-\mu)(K_+ - K_-) - i(D_+ - D_-)}{(\omega-\mu)^2+(\alpha-\beta)^2} + \frac{(\omega+\mu)(K_{2+} - K_{2-}) - i(D_{2+} - D_{2-})}{(\omega+\mu)^2+(\alpha-\beta)^2})] \tag{0.28}$$

$$V = \exp[\frac{\lambda^2\omega(\omega^2-\mu^2+(\alpha-\beta)^2)(K_{l_+^2} - K_{l_-^2})}{2\mu((\omega-\mu)^2+(\alpha-\beta)^2)((\omega+\mu)^2+(\alpha-\beta)^2)} + \frac{\lambda^2(\alpha+\beta)(\omega^2+\mu^2)(D_{l_+ol_+} - D_{l_-ol_-})}{2\mu((\omega-\mu)^2+(\alpha-\beta)^2)((\omega+\mu)^2+(\alpha-\beta)^2)}] \tag{0.29}$$

と置くと

$$V^{-1}U^{-1}\Big(-i(\omega K_{a^\dagger a} + \mu K_M) + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} + \frac{\lambda^2 S}{(\omega-\mu)^2+(\alpha-\beta)^2} + \frac{\lambda^2 \tilde{S}}{(\omega+\mu)^2+(\alpha-\beta)^2}\Big)UV = -i\mu K_{H_{Full}} + \alpha D_{aoa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger oa} = L \tag{0.30}$$

となり対角化できる.
U と V に使った記号は以下のようになっている.

$$K_- = K_{al_+}, K_+ = K_{a^\dagger l_-}, K_{2-} = K_{al_-}, K_{2+} = K_{a^\dagger l_+},$$
$$D_- = \alpha D_{aol_+} + \beta D_{l_+oa}, D_+ = \alpha D_{l_-oa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger ol_-},$$
$$D_{2-} = \alpha D_{aol_-} + \beta D_{l_-oa}, D_{2+} = \alpha D_{l_+oa^\dagger} + \beta D_{a^\dagger ol_+}$$

6．結言

・調和振動子と無限成分スピンについて調べた.
・スピンと光子が相互作用する散逸系を伴う Dicke モデルは対角化でき，dressed spin と dressed photon が独立に散逸している状況を確認することができた.

参考文献

[1]Daigo Honda, Hiromichi Nakazato, and Motoyuki Yoshida,Spectral resolution of the Liouvillian of the Lindblad master equation for a harmonic oscillator (2010).
[2]H. J. Briegel, B. G. Englert, Phys. Rev. A 47, 3311 (1993).
[3]Davies E.B.，”The infinite atom Dicke maser model II”，Communications in Mathematical Physics, 34，(1973).
[4]S. Chaturvedi, V. Srinivasan, Phys. Rev. A 43, 4054 (1991).
[5]R. Endo, K. Fujii, T. Suzuki, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 5, 653, (2008).
[6]B. A. Tay, T. Petrosky, J. Math. Phys. 49, 113301 (2008).
[7]D.R ベス,“現代量子力学入門”, 丸善プラネット株式会社, (2009).

フーリエ級数の収束問題に関するフェイエールの定理の拡張可能性について

今川和人 (Kazuto Imagawa)
金沢大学大学院 自然科学研究科 機械科学専攻

1. 緒論

本論文では，フーリエ級数の基礎を学び，フェイエールの定理の拡張可能性について考察することを主目的とする．関数が十分滑らかであれば，そのフーリエ級数は収束し，元の関数に一致することが容易に確かめられるが，関数が連続というだけの条件下におけるフーリエ級数の収束問題は，長い間未解決であり，１８７６年にデュボアレイモンが 1 点でフーリエ級数が発散するような連続関数を具体的に構成したことは，フーリエ級数の収束問題が複雑怪奇であることを意味することとなった．他方，フーリエ級数の総和の意味を, 級数の相加平均を用いて定義されるチェザロ総和法と呼ばれる総和法に置き換えてフーリエ級数の収束問題を捉えなおすことにより，すべての連続関数に対してチェザロの意味においてフーリエ級数は収束することが知られている．この総和法の代替により，連続関数のフーリエ級数の収束可能性を保証するものがフェイエールの定理である．しかし，一口に総和法と言っても，種々の総和法が知られており，これらの総和法を復習し，比較することにより，上述のフェイエールの定理の最適性を再検証することがこの論文の主題である．

2. フェイエールの定理

2.1 フーリエ級数

f が $[-\pi,\pi]$ 上の可積分関数のとき, f の第 n フーリエ係数は

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta,\quad n\in\mathbb{Z}$$

で定義され, f のフーリエ級数は形式的に

$$f(\theta)\simeq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{in\theta},\quad \theta\in[-\pi,\pi]$$

と書ける．また, $N=0,1,2,\cdots$ に対し,

$$S_N[f](\theta)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{in\theta},\quad \theta\in[-\pi,\pi]$$

とおき, これを f の第 N 部分和という．フーリエ級数が通常の意味で収束するとは，$N\to\infty$ のとき, この第 N 部分和 $S_N[f]$ が f に $[-\pi,\pi]$ 上の各点で収束することを意味する．

2.2 ディリクレ核

2 つの関数の畳み込みを用いて, フーリエ級数の部分和 $S_N[f]$ は次のように表現される :

$$S_N[f](\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy \right) e^{in\theta}$$
$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{in(\theta-y)}dy = (f * D_N)(\theta). \tag{0.1}$$

ここで, $D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $N = 0, 1, 2\cdots$ はディリクレ核と呼ばれ, 上式 (0.1) は, $S_N[f]$ が f とディリクレ核 D_N との畳み込みで表現できることを意味し, D_N の振るまいがフーリエ級数の収束問題に影響を与えると考えることは自然であろう. また, D_N は $D_N(\theta) = \dfrac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$ と表すことができ, この表現は, 後述するフェイエール核が良い核の列であることを示す際に有用である.

2.3 良い核の定義と近似単位元収束定理

単位円周上の関数列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 次の 3 つの性質をもつとき良い核の列であるという : (a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta = 1$, (b) $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\theta)|d\theta \leq M$, (c) $\lim_{n\to\infty} \int_{\{\delta \leq |x| \leq \pi\}} |K_n(\theta)|d\theta = 0$. ここで, M は n に依らないある正定数であり, δ は任意の正定数である. $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を良い核の列とするとき, 次の収束定理が成り立つという意味において, 同列は近似単位元であると呼ばれる : f を単位円周上の可積分関数とするとき, f が点 θ で連続ならば,

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(\theta) = f(\theta)$$

が成り立つ. また, f が単位円周全体で連続であるとき, 上記の収束は θ に関して一様となる [1,6]. したがって, ディリクレ核が良い核の列であるならば, 任意の連続関数に対し, そのフーリエ級数は一様収束することとなるが, 実際にはディリクレ核は性質 (b) を満たさないことが分かり, それゆえ連続関数のフーリエ級数に対して, 上記の近似単位元収束定理を直接適用することはできない.

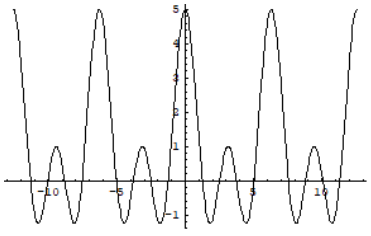


図 1　ディリクレ核 ($N = 2$)

Fig1 は, ディリクレ核 D_2 のグラフの概形であるが, これを見ると, その関数の値は正負の値を繰り返しながら振動していることが分かり, このことは $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ が良い核の列の性質 (a) は満たすが, (b) を満たさない要因である [1,2,3]. このディリクレ核の最大の欠点を補填し, 連続関数に対するフーリエ級数の収束性を復活させる目的において, チェザロ総和法及びフェイエール核を次節以降で導入する.

2.4 チェザロ総和法

通常の総和法では, 複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を考えるとき, その第 n 部分和を $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ と置くと, $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ であれば, この級数は収束し, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$ と書くのが一般的である. 以下で定義されるチェザロ総和法は, 通常の総和法を真に拡張した総和法であり, 以下のように定義される. $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 n 部分和で定義される数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, その相加平均を用いて新しい数列 $\{\sigma_N\}_{N=1}^{\infty}$ を $\sigma_N = \frac{S_0+S_1+\cdots+S_{N-1}}{N}$ で定義する. σ_N は数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 N チェザロ平均, あるいは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ の第 N チェザロ部分和と呼ばれる. $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma$ であるとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は σ にチェザロ総和可能であるという. 考える級数が関数項級数の場合は, 関数列 $\{\sigma_N\}_{N=1}^{\infty}$ の収束の仕方に応じ, 各点でチェザロ総和可能, 一様にチェザロ総和可能などという. チェザロ総和法が通常の総和法の真なる拡張であることは, 例えば $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ を考えればよい. 実際, この級数は明らかに通常の意味においては収束しないが, チェザロ総和可能であり, その和は $\frac{1}{2}$ となる [4].

2.5 フェイエールの定理

f を単位円周上の可積分関数とするとき, f のフーリエ級数の第 N チェザロ平均 $\sigma_N[f]$ は

$$\sigma_N[f](\theta) = f * \frac{D_0(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta)}{N} = (f * F_N)(\theta)$$

となる. ここで, $F_N(\theta) = \dfrac{D_0(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta)}{N}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $N = 1, 2, \cdots$, はフェイエール核と呼ばれる. また, ディリクレ核の三角関数を用いた表現により, フェイエール核は $F_N(\theta) = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin^2(\frac{N\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$ と表すことができる. この表現を用いると, ディリクレ核の場合と異なり, フェイエール核は良い核の列であることが示される [1,5]. 2 つの核, D_N と F_N の最も大きな違いは, 前者は上述したように関数の値が正負の値を繰り返しながら振動しているのに対し, 後者は常に正値であり, このことは $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ は良い核の列の性質 (b) を満足しないのに対し, $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ は性質 (b) を満足することの本質的な要因であると考えられる. 実際に $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ が良い核の列であることの証明の概略を以下で述べる [1]. まず,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi N}\sum_{n=0}^{N-1} 2\pi = 1\end{aligned}$$

となり, 性質 (a) が確かめられる. 性質 (b) は, 性質 (a) と F_N が正値であることから直ちに示される. 最後に, 性質 (c) を示そう. $\delta \le |\theta| \le \pi$ のとき, $\sin^2(\frac{\theta}{2}) \ge c_\delta$ となる $c_\delta > 0$ が存在するから,

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{N\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \le \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \le \frac{1}{Nc_\delta}$$

と評価される. これを用いて,

$$\int_{\delta\le|\theta|\le\pi} F_N(\theta)d\theta \le \int_{\delta\le|\theta|\le\pi}\frac{1}{Nc_\delta}d\theta \le \frac{2\pi}{Nc_\delta} \to 0 \quad (N\to\infty)$$

となり, 性質 (c) が示される. $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ が良い核の列であることより, 同核の列に対して近似単位元収束定理が適用可能であるから, 次の定理が直ちに得られる.

フェイエールの定理 : f を単位円周上の可積分関数とする. f のフーリエ級数は, f が連続である

点で f にチェザロ総和可能である. とくに, f が単位円周上で連続ならば, f のフーリエ級数は f に一様にチェザロ総和可能である.

3. テプリッツの定理

2.4 節では, チェザロ総和法について述べたが, 本論文の主題であるフェイエールの定理の拡張可能性を考察する目的において, チェザロ総和法を含む総和法のメタ定理を以下に述べる. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ とその部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ を考える. また, 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\cdots}$ は以下の 3 つの条件を満たすとする: (i) 各 k について $\phi_{n,k} \to 0\,(n \to \infty)$ が成り立つ, (ii) 各 n について k に関する和 $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_{n,k}|$ が収束し, $\sigma_n \leq M$ を満たす n に無依存な正定数 M が存在する, (iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} = 1$ である. このとき, $S_n \to s\,(n \to \infty)$ ならば $t_n \to s\,(n \to \infty)$ が成り立つ. 上記の総和法に関するメタ定理はテプリッツの定理と呼ばれ, 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\cdots}$ を適当な関数とするとき, 通常の総和法, チェザロ総和法, アーベル総和法などを再現することが可能である [4].

4.α 次チェザロ総和

$0 < \alpha < 1,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，α 次第 n チェザロ総和平均を

$$\sigma_n^{\alpha} := \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\alpha\Gamma(n)\Gamma(\alpha+n-\nu-1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(n-\nu)} S_{\nu}$$

で定義する. 本論文では $0 < \alpha < 1$ の場合を主に考察するが, 上式において, $\alpha = 1$ とおくと, 通常の第 n チェザロ総和平均が得られることに注意する. また, 適当な 2 重数列 $\{\phi_{n,k}\}_{n,k=0,1,2,\cdots}$ を選択することにより, α 次チェザロ総和法はテプリッツの定理の枠組みに属することが確認される. また, α 次総和法は α に関して単調にその収束概念を拡張したものであり, 特に, α 次総和可能な級数は, 通常の意味においてもチェザロ総和可能であることが分かる [4].

5.α 次フェイエール核

ディリクレ核, フェイエール核の導出と同様にして, フーリエ級数を α 次チェザロ総和を用いて表現するとき, 対応する α 次フェイエール核 F_n^{α} は

$$\sigma_n^{\alpha}[f](\theta) = f * \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\alpha\Gamma(n)\Gamma(\alpha+n-\nu-1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(n-\nu)} D_{\nu}(\theta) = f * F_n^{\alpha}(\theta)$$

と表される. 前述したように, 通常のフェイエール核は良い核の列となり, フェイエールの定理が成立するが, 本論文では α 次フェイエール核も良い核の列であるかどうかを検証した. もし α 次フェイエール核が良い核の列であれば, 近似単位元収束定理の帰結として, α 次フェイエール型定理が成立することとなり, このことは, α 次チェザロ総和法が通常のチェザロ総和法の真なる拡張である事実を考慮し, 古典的なフェイエールの定理の拡張版が成立することを意味する.

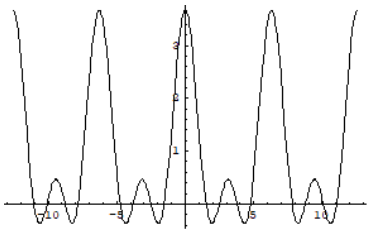


図 2　α 次フェイエール核 $(n = 3)$

しかしながら, α 次フェイエール核はディリクレ核, フェイエール核と比較して, その関数形は複雑であり, 同核が良い核の列であるかどうかを検証することは非常に困難であった. 他方, Fig2

より, α 次フェイエール核は正負の値を繰り返しながら振動することが観察され, この挙動はディリクレ核のものと同じであることに注意する. この状況を踏まえ, α 次フェイエール型定理の不成立という否定的結論を想定するならば, フェイエール核に対し, 良い核の列の 3 条件を確認することはあまり得策ではないと考えられる. なぜならば, 一般の関数核に対し, それが良い核の列であるということは, 同核が単位近似元であるための十分条件であるが必要条件ではないからである. したがって, デュボアレイモンが提示した連続関数でありながら, ある 1 点でそのフーリエ級数が発散するような関数を, α 次フェイエール核を通して定まる α 次フーリエ級数に直接代入し, 同級数が発散するかどうかを検証した. デュボアレイモンが提示した連続関数は

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin a_n x \quad (\frac{\pi}{a_n}<x<\frac{2^n}{a_n}\pi,\ \ n=1,2,\cdots),\\ -\frac{1}{\sqrt{n}}\sin a_n x \quad (-\frac{2^n}{a_n}\pi<x<-\frac{\pi}{a_n},\ \ n=1,2,\cdots),\\ 0\ \ (\frac{2^{n+1}}{a_{n+1}}\pi\le|x|\le-\frac{\pi}{a_n},\ \ n=1,2,\cdots),\\ 0\ \ (x=0,\frac{2}{a_1}\pi\le|x|\le\pi),\end{cases} \tag{0.2}$$

で与えられる [6]. このとき, 直接計算より, f の α 次フーリエ級数のある部分級数が存在して, その部分級数は,

$$\frac{\alpha\Gamma(n)}{\pi\Gamma(\alpha+n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{\Gamma(n-k)}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{k-3}{6}\geqq C\sqrt{n}\to\infty\quad(n\to\infty)$$

と評価されることが確認された. ここで, C は n に無依存な正定数である. 上記の評価は, f の α 次フーリエ級数全体に対するものではないため, 同評価により, $\sigma_n^{\alpha}[f](0)\to\infty\ (n\to\infty)$ と結論付けることは早計であるが, α 次フェイエール型定理の不成立を証明する際の重要な不等式の 1 つであると言える.

6. 結言

デュボアレイモンの提示した関数を用いて, α 次フェイエール型定理の不成立を強く予測させる事象を観察した. すなわち, α 次フェイエール型定理の不成立を期待する根拠の 1 つを得ることに成功し, このことは通常のフェイエールの定理の最適性を示唆するものと考えられる.

参考文献

[1] エリアス・M・スタイン、ラミ・シャカルチ「フーリエ解析入門」(新井仁之、杉本充、高木啓行、千原浩之訳)、日本評論社、２００７.

[2] G.E.Andrews.Number theory.Dover Publications, New York, 1994.Corrected reprint of the 1971 originally published by W.B.Saunders Company.

[3] C.Blingham and J.W.Tukey.Fourier methods in the frequency analysis of data. The Collected Works of John W Tukey, Volume II Times Series:1965-1984(Wadsworth Advanced Books & Software), 1984.

[4] 梅田亨、「徹底入門　解析学」、日本評論社、２０１７.

[5] S.Bochner.The role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.(訳:S. ボホナー、科学史における数学、村田全訳、みすず書房、1970)

[6] T.W.Körner. Fourier Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, UK,v 1988.(訳:T.W. ケルナー、フーリエ解析大全、上、下、高橋陽一郎監訳、朝倉書店、1996)

クラウド量子コンピュータを用いた量子アルゴリズムの実装について

Implementation of quantum algorithm by cloud quantum computer

桜井　一誓（信州大学大学院 総合理工研究科 工学専攻 機械システム工学分野）

Kazutoshi Sakurai
Department of Engineering,
Graduate School of Science and Technology,
Shinshu University

1. 緒言

カナダの企業D-wave Systemが開発した「D-Wave」に始まり，最近ではIBMが開発したクラウド上で利用できる「The IBM Q Experience」など今日，量子コンピュータを誰でも利用することが可能である．古典的コンピュータでは，１ビットで２進数表記で０か１の状態のどちらか１つの状態のみを計算できる．量子コンピュータでは，１量子ビットで，０と１の重ね合わせ状態を取れるので，２つ以上の状態を同時に演算可能である．したがって，古典的コンピュータよりも演算処理を高速で行うことができるとされている．量子コンピュータの演算を行うアルゴリズムとして「グローバのアルゴリズム」や「ドイチ・ジョサ問題」が代表的な例である．

2. 実験装置

本研究ではクラウド上で利用可能な量子コンピュータ「IBM量子体験（IBM Quantum Experience）」（http://quantumexperience.ng.bluemix.net/qstage/）を利用する．IBM Qの解説書として中山[2]がある。IBM Qは量子ゲート方式であり，ここでは最大５量子ビットの「量子シミュレーションを用いた理論値計算（Simulate)」および「実際の量子コンピュータを用いた量子計算（Run）」の2つを行うことができる．理論値計算では100回，実際の量子計算では$2^0, 2^{10}, 2^{12}, 2^{13}$回のいずれかの回数の試行回数を行った結果を出すことができる．本研究では特別な場合を除き，実際の量子計算は2^{10}（1024）回の試行回数の結果を以下で示す．実際の計算では量子ビットの振幅が一定ではなくノイズが生じるため理論値計算と実際の量子計算では誤差が生じる．本研究では理論値計算と実際の量子計算の結果を比較し「量子テレポーテーション」が実装が可能かどうかとどの程度の誤差が生じるか，また誤差が生じた原因の考察を行う．

2.1 本研究で使用するゲート

１ビットに作用するユニタリゲートU_3は３つのパラメータθ, ϕ, λを用いて

$$U_3(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\lambda+\phi)}cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

と定義されている．本研究で用いるビット反転ゲートX，位相反転ゲートZ，アダマールゲートHは３つのパラメータθ, ϕ, λに具体的な数値を代入することで表現でき，

$$X = U_3(\pi, 0, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = U_3(0, 0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = U_3\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．また，２ビットに作用する制御NOTゲート$CNOT$は

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

3. 解析理論

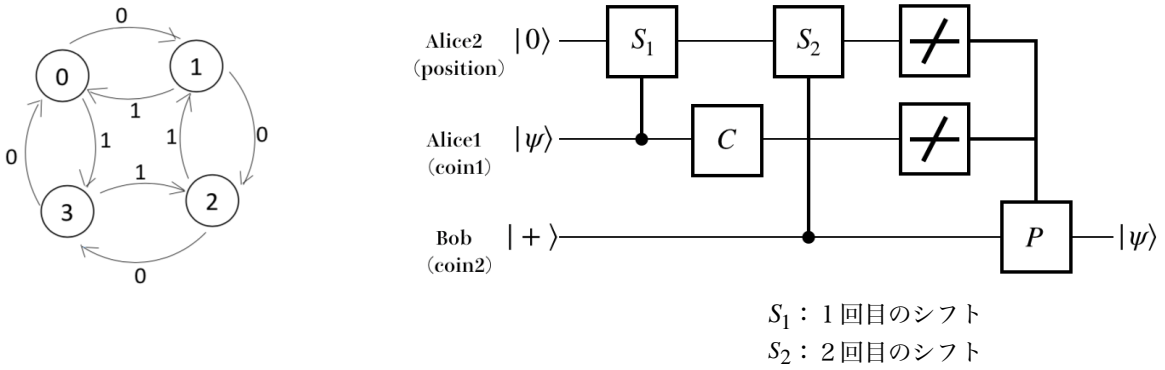


Fig.1 大木[1]による４頂点サイクルの量子テレポーテーションモデルと量子回路のモデル

Wangら[4]は量子レポーテーションのモデルとして，４頂点サイクル上の量子ウォークを利用することを提案した([4] p.5 Fig.3)．大木[1]はこのモデルの１回目シフトS_1と２回目のシフトS_2の間に

$$C = \begin{pmatrix} \rho & \sqrt{1-\rho^2} \\ \sqrt{1-\rho^2} & -\rho \end{pmatrix}$$

をCoinとするユニタリ行列Cを加える(Fig.1)．送りたい情報$|\psi\rangle$を

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

とし，AliceからBobに送りたいものとする．Alice2が持っている$|0\rangle$はpisitionを表す空間ベクトルであり，その空間の観測は0,1,2,3である．また，その観測基底をFIg.1 のグラフに対応させて考える．ボブの持っている$|+\rangle$は，

$$|+\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

で定義される。S_1とS_2はそれぞれAlicw1(Coin1)とBob(Coin2)の状態に応じて、$|0\rangle$ のときは時計回りに $|1\rangle$のときは反時計回りに動くことに対応し ている．この操作は

$$S = \sum_{k=0}^{2} |k+1\rangle\langle k| \otimes |0\rangle\langle 0| + \sum_{k=0}^{3} |k-1\rangle\langle k| \otimes |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 3| \otimes |0\rangle\langle 0| + |3\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|$$

で定義され，テンソル積の左側の$|k\rangle(k = 0,1,2,3)$はpositionに，右側の$|0\rangle$と$|1\rangle$はCoinの基底に対応している．以下の計算は大木[1]に負う．アリスとボブの量子情報の初期状態は，

$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |+\rangle$$

とおく．$|\Psi_0\rangle$にS_1, C, S_2を作用させると

$$|\Psi_2\rangle = |2+\rangle \otimes \left(\frac{a}{\sqrt{2}}C_+|0\rangle - \frac{b}{\sqrt{2}}C_-|1\rangle\right) + |2-\rangle \otimes \left(\frac{a}{\sqrt{2}}C_-|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}C_+|1\rangle\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+|0+\rangle\otimes\left(\frac{a}{\sqrt{2}}C_+|1\rangle-\frac{b}{\sqrt{2}}C_-|0\rangle\right)+|0-\rangle\otimes\left(\frac{a}{\sqrt{2}}C_-|1\rangle+\frac{b}{\sqrt{2}}C_+|0\rangle\right)\\
&=\sum_{k,j}|k,j\rangle\otimes|\psi_{kj}\rangle
\end{aligned}
$$

となる．ここで、

$$
C_\pm=\frac{\rho\pm\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2}},\quad D_\pm=\frac{\mp\rho+\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2}}
$$

である。今、Alice2，Alice1を状態$|\Psi_2\rangle$で観測すると,それぞれの確率は

$$
\begin{aligned}
P_{|\Psi_2\rangle}(2,+)&=\frac{|aC_+|^2}{2}+\frac{|bC_-|^2}{2}=\frac{1+2\rho\sqrt{1-\rho^2}(|a|^2-|b|^2)}{4}\\
P_{|\Psi_2\rangle}(2,-)&=\frac{|aC_-|^2}{2}+\frac{|bC_+|^2}{2}=\frac{1-2\rho\sqrt{1-\rho^2}(|a|^2-|b|^2)}{4}\\
P_{|\Psi_2\rangle}(0,+)&=\frac{|aC_+|^2}{2}+\frac{|bC_=|^2}{2}=\frac{1+2\rho\sqrt{1-\rho^2}(|a|^2-|b|^2)}{4}\\
P_{|\Psi_2\rangle}(0,-)&=\frac{|aC_-|^2}{2}+\frac{|bC_+|^2}{2}=\frac{1-2\rho\sqrt{1-\rho^2}(|a|^2-|b|^2)}{4}
\end{aligned}
$$

となる．大木[1]では、$\rho=-1,0,1$の場合に再構成の手続きが与えられている。

[A] $\rho=1$ の場合，再構成するためのユニタリ行列Pは以下の通りである．

[A1] $(k,j)=(2,+1)$のとき

$$
Z|\psi_{2+}\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[A2] $(k,j)=(2,+1)$のとき

$$
I|\psi_{2-}\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[A3] $(k,j)=(0,+1)$のとき

$$
ZX|\psi_{2+}\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[A4] $(k,j)=(0,-1)$のとき

$$
X|\psi_{0-}\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[B] $\rho=0$ の場合，再構成するためのユニタリ行列Pは以下の通りである．

[B1] $(k,j)=(2,+1)$のとき

$$
I|\psi_{2+}\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[B2] $(k,j)=(2,+1)$のとき

$$
Z|\psi_{2-}\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[B3] $(k,j)=(0,+1)$のとき

$$
X|\psi_{0+}\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=a|0\rangle+b|1\rangle=|\psi\rangle
$$

[B4] $(k, j) = (0, -1)$のとき

$$ZX|\psi_{0-}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

[C] $\rho = -1$の場合，再構成するためのユニタリ行列は以下の通りである．

[C1] $(k, j) = (2, +1)$のとき

$$Z|\psi_{2+}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

[C2] $(k, j) = (2, +1)$のとき

$$I|\psi_{2-}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

[C3] $(k, j) = (0, +1)$のとき

$$ZX|\psi_{2+}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

[C4] $(k, j) = (0, -1)$のとき

$$X|\psi_{0-}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

3. 1 量子テレポーテーションの実装

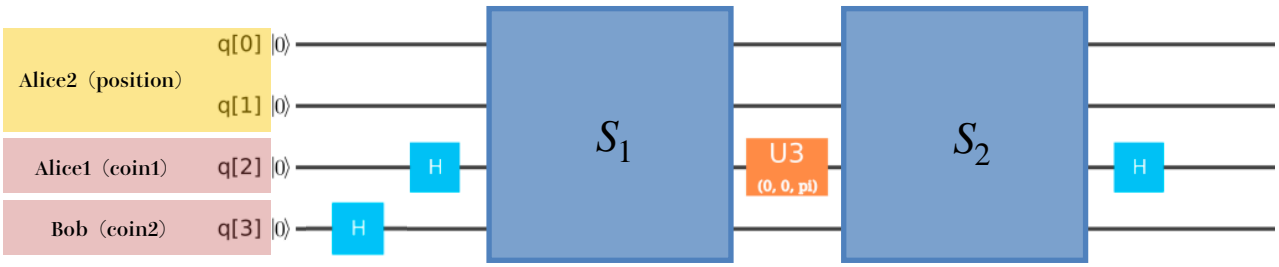


Fig.2 花岡[3]が考案した４頂点サイクル上の量子ウォークのシフトを利用した量子テレポーテーションの量子回路

本研究では花岡[3]が考案した４頂点サイクルの量子ウォークのシフトを利用して大木[1]の量子テレポーテションを実装する(Fig.2)．q[0]，q[1]をAlice2，q[2]をAlice1，q[3]をBobにそれぞれ対応させる．花岡[3]ではCoin空間が１つの場合のシフトを実装したが、今回はCoin空間が２つあるため、Coin1とCoin2とのそれぞれのシフトを置いている。Alice1に関して１回目のシフトS_1の前にあるアダマールゲートは，送りたい情報$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|0\rangle$に対応させるためにおき，今回送りたい情報$|\psi\rangle$を

$$|\psi\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

とする．２回目のシフトS_2の後のアダマールゲートはAlice1での観測を$+, -$から0,1に変更させるためである．また、コイン行列として

$$u_3(\pi,0,0) = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

を置いている．Baluら[4]においてもそうであるように、シフトを実装するには制御NOTゲートが用いられる。IBM Quantum Experienceでは配置できない制御NOTゲートがいくつかあるためAlice2，Alice1，Bobのqubitの位置を入れ替える必要がある．Alice2をq[2]とq[3]，Alice1をq[4]，Bobをq[1]に対応させる（Fig.3).

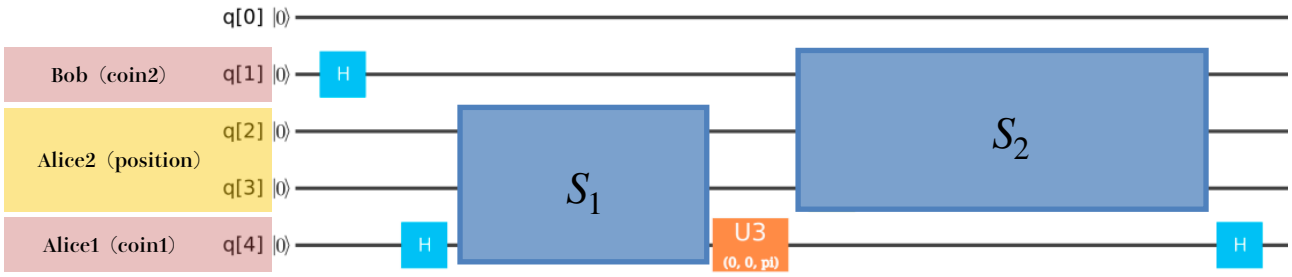


Fig.3 IBM Qで実装する量子テレポーテーションの量子回路

4. 実験結果

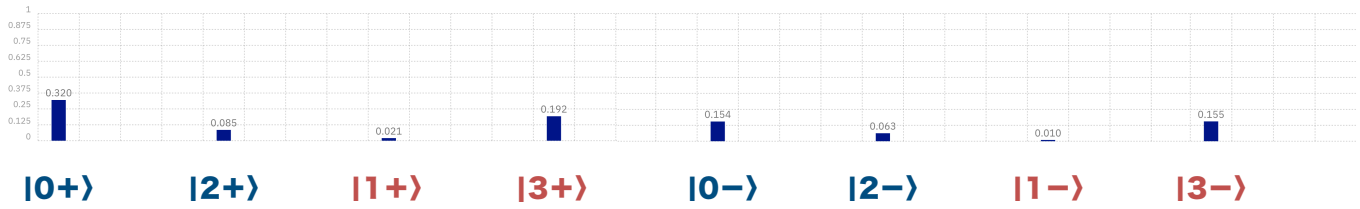


Fig.5 Fig.3の量子回路の実際の量子コンピュータを用いた量子計算（Run）の確率分布

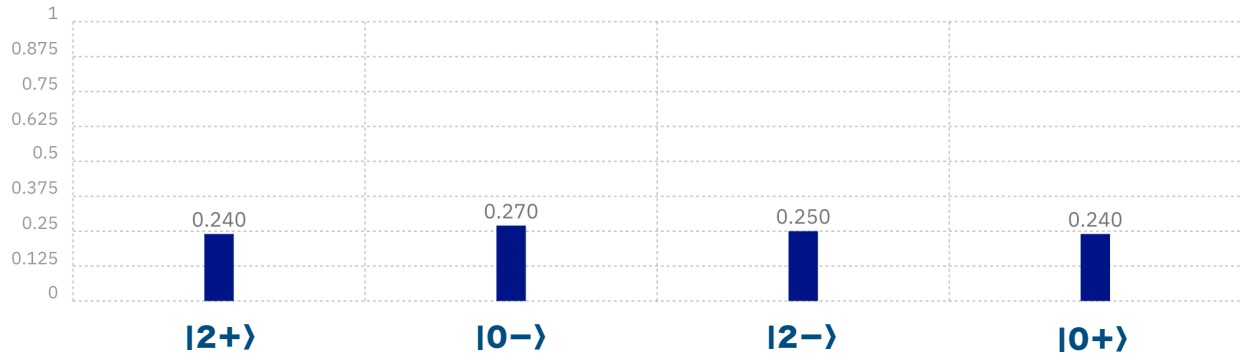


Fig.4 Fig.3の量子回路の量子シミュレーションを用いた理論値計算（Simulate)での確率分布

Fig.5の量子回路の量子シミュレーションを用いた理論値計算（Simulate)での確率分布（Fig.4）と実際の量子コンピュータを用いた量子計算（Run）での確率分布（Fig.5）を示す．実際の計算のAlice2の観測結果に注目すると，それぞれの観測した確率の大小関係は

$$P_{|\Psi_2\rangle}(0,\pm) > P_{|\Psi_2\rangle}(3,\pm) > P_{|\Psi_2\rangle}(2,\pm) > P_{|\Psi_2\rangle}(1,\pm)$$

である．理論値計算の結果では，positionが$|k\rangle = |0\rangle, |2\rangle$のときに確率が均等になっている．理論値計算のように$|k\rangle = |0\rangle, |2\rangle$のときが高くなってほしいが，実際の計算では，$|k\rangle = |2\rangle$の確率よりも$|k\rangle = |3\rangle$の観測が高くなっている．したがって，Fig.5の量子回路では量子テレポーテションを実装は難しいと言える．

5. 結論

本実験では，１量子ビットを送るのに２つのコイン空間を使う２コイン量子ウォークの２ステップでテレポーテーションができた．実験結果から今回の量子回路では量子テレポーテーションの実装はまだ難しい言える．IBM Quantum Experienceでは1qubitに作用するゲートよりも2qubitに作用する制御NOTゲートの方が誤差が大きくなる傾向があり，今回の量子回路では制御NOTゲートが４つ使われていたことが誤差が大きくなった要因の１つだと考えられる．

Wangら[4]では，今回使用した４頂点のサイクルモデルの他にサイクルを２頂点にしたモデルや直線に置き換えたモデルもある．特にサイクルを２頂点にしたモデルはAlice2が1qubitで表すことが可能なため，他のモデルでの量子テレポーテーションの実装も考えられる．

参考文献

[1] 大木純平, 量子テレポーテーションを用いた通信法の検討, 信州大学卒業論文 (2018)

[2] 中山茂, クラウド量子計算入門IBMのシミュレーションと量子コンピュータ, カットシステム (2016)

[3] 花岡遼大, 量子ウォークの量子コンピュータでの実装, MITA02, 神奈川大学 (2018)

[4] R.Balu, D.Castillo, G.Siopsis, Physical realization of topological quantum walks on IBM-Q and beyond, *Quantum Science and Technology*, **3**, 035001 (2017)

[5] Y. Wang, Y. Shang, P. Xue, Generalized teleportation by quantum walks, *Quantum Inf. Process.* , **16** (2017)

Mathai-Quillen formalism によるグラスマン多様体 $G(2,N)$ の Euler 標数の計算

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
今西 翔一郎 (Shoichiro IMANISHI)

概要

Mathai-Quillen formalism は有限次元ベクトル束の Euler 類の構成手法であり，無限次元の底空間が群作用の下での対称性を持つ場合へと拡張すれば，位相的場の理論へ応用できる事が知られている [Atiyah-Jeffrey,1990]．本発表では，群作用のある有限次元多様体と同一視できるグラスマン多様体 $G(2,N)$ に対して，この手法を用いる事で Euler 標数が計算できる事を紹介する．

1 導入

Mathai-Quillen formalism[5]（MQ formalism）は，有限次元ベクトル束 $\pi : E \to X$ に対して，ファイバーに沿って Gaussian 的に急減少する Thom 類（Gaussian shaped Thom form）を構成する手法である．この Thom 類はコホモロジー類としては通常の Thom 類と同じであるが，一般の切断 $s : X \to E$ によって引き戻した Euler 類を考える時に，その真価が発揮される．この MQ formalism によって得られる Euler 類は，コホモロジー類としては切断 s の取り方に依らないという性質を持ちながら，露わに書き下した時には s に依存する項が表れる，という性質を持っている．その為，Euler 標数の計算をする際に都合の良い s の選び方をする事ができ，曲率項の積分で Euler 標数を得る Gauss-Bonnet の定理のような計算や s の零点の公点数を数え上げる事で Euler 標数を得る Poincaré-Hopf の定理のような計算ができる．実際に，S^2 のように局所座標を書き下す事が容易な有限次元多様体の場合には，MQ formalism で s の取り方を様々に変えても Euler 標数の計算ができる事が分かっている [3]．さらに，曲率形式のパフィアン等が定義できない無限次元のベクトル束に対しても，それらに頼らず切断 s のみを用いて Euler 類を構成する手法を与える，という利点もある．この利点を活かし，MQ formalism を位相的ゲージ場の理論のラグランジアンの構成に用いたが，MQ formalism の Atiyah-Jeffrey 解釈 [1] である．[1] では，ゲージ場の理論へ応用を行う為に，ベクトル束の底空間が商多様体である場合へと拡張を行い，formalism に従ってラグランジアンの構成を行った．

本発表では，MQ formalism の Atiyah-Jeffrey 解釈を有限次元商多様体の一例であるグラスマン多様体 $G(2,N)$ に対して用いる事で，その Euler 標数の計算が可能である事を紹介する．また，formalism を用いて構成した Euler 類と，普遍束の Chern 類を用いた代数幾何学的な Euler 類の計算との対応関係についても紹介する．

2 Mathai-Quillen formalism について

2.1 Mathai-Quillen formalism のアイデア

$\pi : E \to X$ を n 次元多様体 X 上の向き付け可能なランク $2m$ のベクトル束とする．零切断 $i : X \to E$ による E の Thom 類 $\Phi(E) \in H^*_{cv}(E)$ の引き戻し $i^*\Phi(E)$ は，E の Euler 類 $e(E)$ を与える，という性質を持つ．

$$e(E) = i^*\Phi(E) \tag{1}$$

また，互いにホモトピックな写像同士はコホモロジー類の引き戻しを与えるという性質から，一般の切断 $s : X \to E$ による引き戻し写像に拡張する事もできる．

$$s^*\Phi(E) = e(E) \tag{2}$$

Thom 類 $\Phi(E)$ として E の接続 ∇ に依存する $\Phi_\nabla(E)$ を取る事ができれば，切断 $s : X \to E$ を用いて引き戻す事で，切断 s 及び接続 ∇ の両者に依存する Euler 類 $e_{s,\nabla}(E)$ を構成する事ができる．また，$e_{s,\nabla}(E)$ は E の Euler 類であるから，底空間 X 上で積分する事で E の Euler 標数 $\chi(E)$ を得る事ができる．これが **Mathai-Quillen formalism** のアイデアである．

$$e_{s,\nabla}(E) = s^*\Phi_\nabla(E), \qquad \chi(E) = \int_X e_{s,\nabla}(E) \tag{3}$$

また，Mathai-Quillen formalism は，Thom 類の引き戻しに用いる切断 $s : X \to E$ として特定のものを選ぶ事で，よく知られた Gauss-Bonnet の定理及び Poincaré-Hopf の定理に帰着する，という性質を持つ．

2.2 Mathai-Quillen の Euler 類 $e_{s,\nabla}(E)$

∇, Ω_∇ を各々 E の接続及び曲率とする．この時，Chern-Weil 理論の結果から E の Euler 類 $e_\nabla(E)$，すなわち E のトップ Chern 類は以下のように表せる．

$$\begin{aligned} e_\nabla(E) &= (2\pi)^{-m}\mathrm{Pf}(\Omega_\nabla) \\ &= (2\pi)^{-m}\int \mathcal{D}\chi \exp\left(\frac{1}{2}{}^t\chi\Omega_\nabla\chi\right) \end{aligned} \tag{4}$$

ただし，2 行目の等式はグラスマン変数 χ の積分による表記を用いた．尚，グラスマン変数 χ の積分 $\int \mathcal{D}\chi$ は，被積分関数を展開し，グラスマン変数に関してトップの次数である $\chi^1 \wedge \ldots \wedge \chi^{2m}$ の係数を取り出す，という意味を持つ．Mathai-Quillen formalism はこの被積分関数をヒントに，$e_{s,\nabla}(E)$ の構成を行っている．

π による E から E 自身への引き戻し π^*E を考える．普遍束（tautological bundle）$\pi^*E \to E$ は各点 $\xi \in E$ において自然なファイバー ξ を持つ．この時，Mathai-Quillen の Thom 類 Φ_∇ は，以下の経路積分で与えられる．

$$\Phi_\nabla(E) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}H \exp\left(-\frac{1}{2}\|H - i\xi\|^2 - \frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{1}{2}{}^t\chi\Omega_\nabla\chi + i^t(\nabla\xi)\chi\right) \tag{5}$$

ただし，$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$: E のファイバー座標，$\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^{2m})$: グラスマン変数，$H = (H^1, \ldots, H^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ であり，∇, Ω_∇ は各々 $\pi^* E$ 上に引き戻された E の接続及び曲率とした．また ${}^t\xi\xi =: \|\xi\|^2$ とし，ξ の共変外微分を $\nabla\xi$ と表記した．

ここで，以下のような次数付き演算子 δ による変換 δ を用意する．

$$\delta\xi^a = \nabla\xi^a, \quad \delta\chi^a = H^a, \quad \delta H^a = \Omega_\nabla^{ab}\chi_b \tag{6}$$

$\Phi_\nabla(E)$ 中の指数の冪は δ 変換を用いる事で以下のように表す事もできる．（すなわち，TQFT の作用汎関数として見る事ができる．）

$$-\delta\Psi := -\delta\left\langle \chi, \frac{H}{2} - i\xi \right\rangle = -\frac{1}{2}\|H - i\xi\|^2 - \frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{1}{2}{}^t\chi\Omega_\nabla\chi + i^t(\nabla\xi)\chi \tag{7}$$

ただし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は通常の Euclid 内積を表す．$e_{s,\nabla}(E) = s^*\Phi_\nabla(E)$ は，$\Phi_\nabla(E)$ 中の変数 ξ を $s(x), (x \in X)$ で置き換えることで得られる．

$$e_{s,\nabla}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\int \mathcal{D}\chi\mathcal{D}H \exp\left(-\delta\left\langle \chi, \frac{H}{2} - is(x)\right\rangle\right) \tag{8}$$

さらに，$e_{s,\nabla}(E)$ は E の Euler 類であるから，底空間 X 上で積分する事で X の Euler 標数 $\chi(X)$ が得られる．

$$\chi(X) = \int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\, e_{s,\nabla}(E) \tag{9}$$

ただし，$x = (x^1, \ldots, x^{2m})$: X 上の座標，$\psi(= \delta x) = (\psi^1, \ldots, \psi^{2m})$: グラスマン変数である．

2.3 Gauss-Bonnet の定理/Poincaré-Hopf の定理との対応

この節では，(8) で得られた Mathai-Quillen の Euler 類 $e_{s,\nabla}$ において，特別な s の選び方をする事で Gauss-Bonnet の定理及び Poincaré-Hopf の定理が再現される事を示す．

ベクトル束が接束の場合 $(E = TX)$ について，具体計算を行う事で二つの定理が再現される事を示す．X をリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ が入った $2m$ 次元リーマン多様体とする．都合上，切断 s を実数パラメータ $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いたベクトル場 $\gamma V : X \to TX$ と表記する事にする．

$$\chi_\gamma(X) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H \exp\left(-\delta\left\langle \chi, \frac{H}{2} - i\gamma V(x)\right\rangle\right) \tag{10}$$

また δ 変換は，共変外微分を ∇，リーマン曲率を $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$，クリストッフェル記号を $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ と表記すると，以下のように書く事ができる．

$$\begin{aligned}
&\delta x^\mu = \psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu = 0, \quad \delta V^\mu = \nabla V^\mu = \left(\partial_\nu V^\mu + V^\lambda\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)\psi^\nu, \\
&\delta\chi^\mu = H^\mu, \quad \delta H^\mu = R^{\mu\nu}\chi_\nu = \frac{1}{2}R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\psi^\rho\psi^\sigma\chi_\nu
\end{aligned} \tag{11}$$

ただし，$x = (x^1, \ldots, x^{2m})$: X 上の座標，$\psi(= \delta x) = (\psi^1, \ldots, \psi^{2m})$: グラスマン変数，$\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^{2m})$: グラスマン変数，$H = (H^1, \ldots, H^{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ である．この δ 変換の下で分配関数 $\chi_\gamma(X)$ の指数の冪を書き下すと，以下を得る．

$$\delta\left\langle \chi, \frac{H}{2} - i\gamma V(x)\right\rangle = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(H^\mu - i\gamma V^\mu\right)\left(H^\nu - i\gamma V^\nu\right)$$

$$+\frac{\gamma^2}{2}g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - i\gamma\nabla_\nu V^\mu\psi^\nu\chi_\mu - \frac{1}{4}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\chi_\rho\chi_\sigma\psi^\mu\psi^\nu \tag{12}$$

補助場 H の経路積分はガウス積分として実行でき，Euler 標数 $\chi_\gamma(X)$ の表示は以下のように変わる．

$$\chi_\gamma(X) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu + i\gamma\nabla_\nu V^\mu\psi^\nu\chi_\mu + \frac{1}{4}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\chi_\rho\chi_\sigma\psi^\mu\psi^\nu\right) \tag{13}$$

まず，$\gamma = 0$ と取った時の Euler 標数の表示 $\chi_{\gamma=0}(X)$ を考える．

$$\chi_{\gamma=0}(X) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi \exp\left(\frac{1}{4}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\chi_\rho\chi_\sigma\psi^\mu\psi^\nu\right) \tag{14}$$

経路積分を実行すると，以下の関係式を得る．

$$\chi_{\gamma=0}(X) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_X \mathrm{Pf}(R) = \int_X e(X) = \chi(X) \tag{15}$$

これはまさに，Euler 類 $e(X)(= e(TX))$ を X 上で積分する事で Euler 標数 $\chi(X)$ を得るという，Gauss-Bonnet の定理を再現している．

次に，$\gamma \to \infty$ の極限における Euler 標数の表示 $\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X)$ を考える．都合上，ベクトル場 V は孤立零点 p_k（すなわち，$V^\mu(p_k) = 0$ が成り立つ）を持つものを取ることにする．この時、経路積分に鞍点が存在するから、$\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X)$ は鞍点 p_k に関する和で表す事ができ、各鞍点に関して摂動的に展開する事ができる。x^μ を p_k の近傍における座標とし、V^μ を p_k の近傍で展開する。

$$V^\mu(x) = \sum_{n=1}^{2m}\frac{1}{n!}\partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_n}V^\mu(p_k)x^{\alpha_1}\dots x^{\alpha_n} \tag{16}$$

ここで，以下のように変数のリスケールを行う．

$$x \to \gamma^{-1}x, \quad \psi \to \gamma^{-1/2}\psi, \quad \chi \to \gamma^{-1/2}\chi \tag{17}$$

この操作により，$\gamma \to \infty$ 極限で x, ψ, χ を含む高次の項は減衰する為，経路積分はガウス積分に変わる．これらの項を落とすと，分配関数 $\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X)$ は以下のように書き直す事ができる．

$$\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X) = \sum_{p_k}\frac{1}{(2\pi)^m}\int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi \exp\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}H^{(k)\mu}_\alpha H^{(k)\nu}_\beta x^\alpha x^\beta + iH^{(k)\nu}_\mu\chi_\nu\psi^\mu\right) \tag{18}$$

ただし，以下のように Hesse 行列を H と表記した．

$$H^{(k)\mu}_\sigma = \partial_\sigma V^\mu|_{p_k} \tag{19}$$

また，この分配関数 $\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X)$ の各項の積分は，ガウス積分またはフェルミオン積分として実行する事ができる．

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to\infty}\chi_\gamma(X) &= \sum_{p_k}\frac{1}{(2\pi)^m}\int_X \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\frac{1}{(2m)!}\left(iH^{(k)\nu}_\mu\chi_\nu\psi^\mu\right)^{2m}\exp\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}H^{(k)\mu}_\alpha H^{(k)\nu}_\beta x^\alpha x^\beta\right)\\ &= \sum_{p_k}\frac{1}{(2\pi)^m}\sum_{\sigma'\in S_{2m}}\mathrm{sgn}(\sigma)H^{(k)1}_{\sigma(1)}\dots H^{(k)2m}_{\sigma(2m)}\int_X\exp\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}H^{(k)\mu}_\alpha H^{(k)\nu}_\beta x^\alpha x^\beta\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{p_k} \frac{\det(H^{(k)})}{|\det(H^{(k)})|} = \chi(X) \tag{20}$$

最終行に着目すれば，ベクトル場 V の零点に対して交点数を数え上げる事で Euler 標数 $\chi(X)$ を得るという，Poincaré-Hopf の定理を再現している事が分かる．

3 Atiyah-Jeffrey 解釈

この節では，Atiyah-Jeffrey 解釈と呼ばれる，対象とするベクトル束の底空間がある Lie 群の作用の下で対称性を持つ場合の Mathai-Quillen formalism について述べる．

ゲージ群を G とする．Mathai-Quillen formalism で扱うベクトル束 $\pi : E \to X$ を $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$ と置く．ただし，$\mathcal{A}$ は切断 $s : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \mathcal{E}$ の零点である場が成す多様体 $\mathcal{A} = \left\{s^{-1}(0)\right\}$ であり，$\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ の場に対するゲージ変換群である．底空間にゲージ対称性がある場合には，超対称変換 δ は冪零ではなくなり，ゲージ変換の作用による変換分が残る．

$$\delta^2 = \delta_\phi \tag{21}$$

ただし，δ_ϕ はゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の変換パラメータ ϕ による無限小ゲージ変換作用素を表すとする．

この性質を反映し，ラグランジアン中の各々の場に対する δ 変換は以下のように置き換わる．

$$\delta x = \psi, \quad \delta\psi = \delta_\phi x, \quad \delta\chi = H, \quad \delta H = \delta_\phi \chi, \quad \delta\phi = 0 \tag{22}$$

ただし，ϕ : ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の変換パラメータ，$x : \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の座標，$\psi : \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上のフェルミオン座標（グラスマン変数），$\chi : \mathcal{E}$ のファイバー上のフェルミオン座標，$H : \mathbb{R}^{2m}$ 上の座標とした．

一般の Mathai-Quillen formalism の場合に，Euler 標数 $\chi(X)$ はベクトル束 $E \to X$ の Euler 類 $e_{s,\nabla}(E)$ を底空間 X 上で積分する事で得られていた．この節の設定では，$e_{s,\nabla}(\mathcal{E})$ の底空間 $X = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上での積分に置き換えて実行する事で，Euler 標数 $\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ が得られる．また商空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上での積分は，被積分関数にゲージ水平方向への射影演算子 $\exp(-\delta\Psi_{\mathrm{proj}})$（$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$ の射影演算子）を掛ける事で，$\mathcal{A}$ 上の積分として実行できる．

$$\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} e_{s,\nabla}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{A}} \exp\left(-\delta\left(\Psi + \Psi_{\mathrm{proj}}\right)\right) \tag{23}$$

以下で，Ψ_{proj} を構成する．多様体 X 上の G-主束 $P \to X$ を考えると各点 $p \in P$ において，群 G の作用が与えられている．この時，C を P の各点 $p \in P$ 上の群作用の微分 $C : \mathfrak{g} \to T_pP$ として定義する．ただし，$\mathfrak{g}$ は G の Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G)$ とする．θ をゲージ変換のパラメータとすると，$C\theta$ は以下のように書くことができる．

$$C\theta = \delta_\theta x \tag{24}$$

また，$C^\dagger$ を C の随伴作用素として定義しておく．

$$\left\langle C^\dagger\psi, \theta\right\rangle = \langle\psi, C\theta\rangle \tag{25}$$

この時，$C^\dagger$ の核 $\mathrm{Ker}C^\dagger \subset \mathcal{A}$ はゲージ変換と直交する水平方向である．実際に任意元 $\psi \in \mathrm{Ker}C^\dagger$ に対して，以下の性質が成り立つ．

$$C^\dagger\psi = 0 \iff 0 = \left\langle C^\dagger\psi, \theta\right\rangle = \langle\psi, C\theta\rangle = \langle\psi, \delta_\theta x\rangle \tag{26}$$

この性質を用いて Ψ_{proj} を作る．すなわち，経路積分を $\mathrm{Ker}C^\dagger$ に制限するものが欲しい射影演算子 $\exp\left(-\delta\Psi_{\mathrm{proj}}\right)$ である．Ψ_{proj} を構成する為に，ボソン場 $\bar{\phi}$ とフェルミオン場 η を導入する．また，これらに対する δ 変換は以下のように定義する．

$$\delta\bar{\phi} = \eta, \quad \delta\eta = \delta_\phi\bar{\phi} \tag{27}$$

ただし，ϕ はゲージ変換パラメータである．これらの場を用いて Ψ_{proj} を以下のように置けば良い．

$$\Psi_{\mathrm{proj}} := \left\langle \psi, C\bar{\phi} \right\rangle \tag{28}$$

演算子 $\exp\left(-\delta\Psi_{\mathrm{proj}}\right)$ が，ゲージ水平方向への射影演算子 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$ の働きをする事を確認しておく．$\delta\Psi_{\mathrm{proj}}$ の η 変分計算から，以下が得られる．

$$\frac{\delta}{\delta\eta}\delta\Psi_{\mathrm{proj}} = 0 \iff C^\dagger\psi = 0 \tag{29}$$

ゆえに，演算子 $\exp\left(-\delta\Psi_{\mathrm{proj}}\right)$ を掛けておく事で，経路積分をゲージ水平方向の部分空間である $\mathrm{Ker}C^\dagger$ に射影する事ができる．

ここまでの内容を要約しておくと，ゲージ対称性を持つ多様体 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の Euler 標数 $\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ は Mathai-Quillen formalism を用いる事で，以下のように TQFT の分配関数と見る事ができる．

Mathai-Quillen formalism による Euler 標数の表式

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{A}/\mathcal{G}) &= \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\eta \exp\left(-\mathcal{L}_{MQ}\right), \\
\mathcal{L}_{MQ} &= \delta\left\langle \chi, \frac{H}{2} - is \right\rangle + \delta\left\langle \psi, C\bar{\phi} \right\rangle
\end{aligned} \tag{30}$$

δ 変換

$$\begin{aligned}
&\delta x = \psi, \quad \delta\psi = \delta_\phi x, \quad \delta\chi = H, \quad \delta H = \delta_\phi\chi, \\
&\delta\phi = 0, \quad \delta\bar{\phi} = \eta, \quad \delta\eta = \delta_\phi\bar{\phi}, \quad \delta s = \nabla s
\end{aligned} \tag{31}$$

4 Mathai-Quillen formalism による $G(2,N)$ の Euler 標数の計算

4.1 $G(2,N)$ の Mathai-Quillen ラグランジアン

底空間にゲージ対称性（Lie 群の作用の下での対称性）がある場合の Mathai-Quillen formalism（Atiyah-Jeffrey 解釈）を用いて，グラスマン多様体 $G(2,N)$ の Euler 標数 $\chi(G(2,N))(=\binom{N}{2})$ を計算する．Mathai-Quillen formalism の枠組みで扱う為，$G(2,N)$ を同相な商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ と同一視する．

$$\begin{aligned}
&G(2,N) \simeq V_2(\mathbb{C}^N)/U(2) = \mu^{-1}(0)/U(2), \\
&\mu = \left(\mu^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 2}, \quad \mu^{ij} = \sum_{s=1}^{N} \bar{z}_s^i z_s^j - r^2\delta^{ij} \equiv \left(z^i, z^j\right) - r^2\delta^{ij}
\end{aligned} \tag{32}$$

ただし，$(\cdot,\cdot)$ はエルミート内積を意味する．$V_2(\mathbb{C}^N)=\{\mu^{-1}(0)\}$ は Stiefel 多様体と呼ばれる．

Euler 標数は位相不変量であるから $\chi(G(2,N))=\chi(V_2(\mathbb{C}^N)/U(2))$ であり，結局ゲージ対称性のある場合の Mathai-Quillen formalism を商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ 上の接束 $T(V_2(\mathbb{C}^N)/U(2))\to V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ に対して考える事で，$\chi(G(2,N))$ が得られる．Mathai-Quillen のラグランジアン (30) を書き下す為には，δ 変換を具体的に構成する必要がある．

Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)\subset\mathbb{C}^{2N}$ 上の点 z の近傍における局所座標を以下のように表記する．

$$z:=(z^1,z^2)=(\begin{pmatrix}z_1^1\\z_2^1\\\vdots\\z_N^1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1^2\\z_2^2\\\vdots\\z_N^2\end{pmatrix})\in V_2(\mathbb{C}^N)\subset\mathbb{C}^{2N} \tag{33}$$

また，$U(2)$ 変換 U はエルミート行列 $\phi\in M_2(\mathbb{C})$ を用いて次のように表す事ができる．

$$z\mapsto Uz,\quad U=e^{i\phi},\quad \phi=\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2+i\phi_3\\ \phi_2-i\phi_3 & \phi_4\end{pmatrix} \tag{34}$$

この変換式から，変換パラメータ ϕ による無限小ゲージ変換を以下のように得る．

$$\begin{cases}\delta_\phi z_s^1=i\phi_1 z_s^1+(i\phi_2-\phi_3)z_s^2,\\ \delta_\phi z_s^2=(i\phi_2+\phi_3)z_s^1+i\phi_4 z_s^2\end{cases}\qquad(s=1,\dots,N) \tag{35}$$

計算の都合上，$z_s^1=:x_s^1+ix_s^2, z_s^2=:x_s^3+ix_s^4$ と局所座標 $(x_s^1,x_s^2,x_s^3,x_s^4)\in\mathbb{R}^4$ を用いて置き直し，実表示に直しておく．

$$\begin{cases}\delta_\phi x_s^1=-\phi_1x_s^2-\phi_3x_s^3-\phi_2x_s^4,\\ \delta_\phi x_s^2=+\phi_1x_s^1+\phi_2x_s^3-\phi_3x_s^4,\\ \delta_\phi x_s^3=+\phi_3x_s^1-\phi_2x_s^2-\phi_4x_s^4,\\ \delta_\phi x_s^4=+\phi_2x_s^1+\phi_3x_s^2+\phi_4x_s^3\end{cases}\qquad(s=1,\dots,N) \tag{36}$$

得られた無限小変換 δ_ϕ を用いる事で，以下のように各場に対する δ 変換を得る．

δ 変換

$$\begin{aligned}&\delta x=\psi,\quad \delta\psi=\delta_\phi x,\quad \delta\chi=H,\quad \delta H=(iI_{2N}+\delta_\phi)\chi,\\ &\delta\phi=0,\quad \delta\bar\phi=\eta,\quad \delta\eta=-i[\phi,\bar\phi]\end{aligned} \tag{37}$$

ただし，$H,\bar\phi$ はボソン場，ψ,χ,η はフェルミオン場であり，各々以下のように表記している．

$$\begin{aligned}&x\equiv(x_s^i)_{1\le i\le4,1\le s\le N},\quad \psi\equiv(\psi_s^i)_{1\le i\le4,1\le s\le N},\\ &\bar\phi\equiv\begin{pmatrix}\bar\phi_1 & \bar\phi_2+i\bar\phi_3\\ \bar\phi_2-i\bar\phi_3 & \bar\phi_4\end{pmatrix},\quad \eta\equiv\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2+i\eta_3\\ \eta_2-i\eta_3 & \eta_4\end{pmatrix}\\ &\chi\equiv\begin{pmatrix}\chi^1\\\chi^2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}{}^t(\chi_1^1 & \chi_2^1 & \cdots & \chi_N^1)\\ {}^t(\chi_1^2 & \chi_2^2 & \cdots & \chi_N^2)\end{pmatrix},\quad H\equiv\begin{pmatrix}H^1\\H^2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}{}^t(H_1^1 & H_2^1 & \dots & H_N^1)\\ {}^t(H_1^2 & H_2^2 & \dots & H_N^2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{38}$$

これらを用いて，$V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)(=G(2,N))$ に対する Mathai-Quillen のラグランジアンを書き下すと以下のようになる．

$$\mathcal{L}_{MQ}=\delta\left\langle\chi,\frac{H}{2}-is\right\rangle+\delta\left\langle\psi,C\bar\phi\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
\to & -i\langle H,V\rangle + i\langle \chi,\delta V\rangle + \frac{1}{2}\langle H,H\rangle - \frac{i}{2}\left\langle \chi,\left(I_{2N}+\phi\right)\chi\right\rangle \\
& + r^2\phi_1\bar{\phi_1} + 2r^2\phi_2\bar{\phi_2} + 2r^2\phi_3\bar{\phi_3} + r^2\phi_4\bar{\phi_4} \\
& + \left((x^2,\psi^1)-(x^1,\psi^2)\right)\eta_1 + \left((x^4,\psi^1)-(x^3,\psi^2)+(x^2,\psi^3)-(x^1,\psi^4)\right)\eta_2 \\
& + \left((x^3,\psi^1)+(x^4,\psi^2)-(x^1,\psi^3)-(x^2,\psi^4)\right)\eta_3 + \left((x^4,\psi^3)-(x^3,\psi^4)\right)\eta_4 \\
& + 2(\psi^1,\psi^2)\bar{\phi_1} + 2\left((\psi^1,\psi^4)-(\psi^2,\psi^3)\right)\bar{\phi_2} + 2\left((\psi^1,\psi^3)+(\psi^2,\psi^4)\right)\bar{\phi_3} + 2(\psi^3,\psi^4)\bar{\phi_4}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

ここで，以下のようなゲージ場 A とフェルミオン場 ψ_A を導入する．

$$
A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad \psi_A \equiv \begin{pmatrix} \psi_A^1 & \psi_A^2 \\ \psi_A^3 & \psi_A^4 \end{pmatrix} \tag{40}
$$

これらの場は δ 変換の下で以下のように変換されるとする．

$$
\delta A = \psi_A, \quad \delta\psi_A = \delta_\phi A = A + [\phi, A] \tag{41}
$$

$\delta^2 = \delta_\phi$ であり，商多様体 $V_2(\mathbb{C}^N)/U(2)$ 上では冪零の性質を満たすから，ラグランジアンに $\delta^2(-)$ の形の項を加えても，分配関数（すなわち，Euler 標数 $\chi(X)$ の積分表示）は不変に保たれる．都合上，以下の項をラグランジアンに加えておく．

$$
\delta^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A^\dagger A)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(A^\dagger A + A^\dagger[\phi, A]\right) \tag{42}
$$

ゆえに，$G(2,N)$ の Mathai-Quillen のラグランジアン $\mathcal{L}_{G(2,N)}$ は以下で得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{G(2,N)} = & -i\langle H,V\rangle + i\langle \chi,\delta V\rangle + \frac{1}{2}\langle H,H\rangle - \frac{i}{2}\left\langle \chi,\left(I_{2N}+\phi\right)\chi\right\rangle \\
& + r^2\phi_1\bar{\phi_1} + 2r^2\phi_2\bar{\phi_2} + 2r^2\phi_3\bar{\phi_3} + r^2\phi_4\bar{\phi_4} \\
& + \left((x^2,\psi^1)-(x^1,\psi^2)\right)\eta_1 + \left((x^4,\psi^1)-(x^3,\psi^2)+(x^2,\psi^3)-(x^1,\psi^4)\right)\eta_2 \\
& + \left((x^3,\psi^1)+(x^4,\psi^2)-(x^1,\psi^3)-(x^2,\psi^4)\right)\eta_3 + \left((x^4,\psi^3)-(x^3,\psi^4)\right)\eta_4 \\
& + 2(\psi^1,\psi^2)\bar{\phi_1} + 2\left((\psi^1,\psi^4)-(\psi^2,\psi^3)\right)\bar{\phi_2} + 2\left((\psi^1,\psi^3)+(\psi^2,\psi^4)\right)\bar{\phi_3} + 2(\psi^3,\psi^4)\bar{\phi_4} \\
& + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(A^\dagger A + A^\dagger[\phi, A]\right)
\end{aligned}
\tag{43}
$$

4.2 Euler 標数の計算

Euler 標数 $\chi(X)$ はベクトル場 V の取り方に依らない為，$V(x) = 0, (\forall x \in V_2(\mathbb{C}))$ を満たすベクトル場を用いる．Mathai-Quillen formalism によれば，Euler 標数 $\chi(G(2,N))$ は以下のようなラグランジアン (43) の経路積分で得られる．

$$
\begin{aligned}
& \frac{4}{(2\pi)^{4N+8}r^4}\int_{V_2(\mathbb{C}^N)} \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\mathcal{D}A \\
& \quad \times \left((x^1,\psi^1)+(x^2,\psi^2)\right)\left((x^4,\psi^1)-(x^3,\psi^2)-(x^2,\psi^3)+(x^1,\psi^4)\right) \\
& \quad \times \left((x^3,\psi^1)+(x^4,\psi^2)+(x^1,\psi^3)+(x^2,\psi^4)\right)\left((x^3,\psi^3)+(x^4,\psi^4)\right) \\
& \quad \times \exp\left(-\mathcal{L}_{G(2,N)}|_{V=0}\right)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

ただし，被積分関数に接空間 $T_xV_2(\mathbb{C}^N)$ への射影子を掛けている．

$$\frac{2}{r}\left((x^1,\psi^1)+(x^2,\psi^2)\right),\quad \frac{1}{r}\left((x^4,\psi^1)-(x^3,\psi^2)-(x^2,\psi^3)+(x^1,\psi^4)\right),$$
$$\frac{1}{r}\left((x^3,\psi^1)+(x^4,\psi^2)+(x^1,\psi^3)+(x^2,\psi^4)\right),\quad \frac{2}{r}\left((x^3,\psi^3)+(x^4,\psi^4)\right) \tag{45}$$

(44) の経路積分を $\bar{\phi},\chi,\eta,H,A$ に関して実行する事で，以下を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4(2\pi)^{2N}r^4}\int_{V_2(\mathbb{C}^N)}\mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\phi\,\psi_1^1\psi_2^1\psi_1^2\psi_2^2\psi_1^3\psi_2^3\psi_1^4\psi_2^4\\
&\quad\times\delta\left(\phi_1+\frac{2}{r^2}(\psi^1,\psi^2)\right)\delta\left(\phi_2+\frac{1}{r^2}\left((\psi^1,\psi^4)-(\psi^2,\psi^3)\right)\right)\\
&\quad\times\delta\left(\phi_3+\frac{1}{r^2}\left((\psi^1,\psi^3)+(\psi^2,\psi^4)\right)\right)\delta\left(\phi_4+\frac{2}{r^2}(\psi^3,\psi^4)\right)\\
&\quad\times\frac{(1+\mathrm{tr}(\phi)+\det(\phi))^N}{1-\mathrm{tr}(\phi)+4\det(\phi)}\\
&\equiv\left\langle\frac{(1+\mathrm{tr}(\phi)+\det(\phi))^N}{1-\mathrm{tr}(\phi)+4\det(\phi)}\right\rangle
\end{aligned}\tag{46}$$

$\left\langle\det(\phi)^{N-2}\right\rangle=1$ という規格化条件を課す事で，(46) から Euler 標数 $\chi(G(2,N))$ を得る事ができる．

$$\left\langle\frac{(1+\mathrm{tr}(\phi)+\det(\phi))^N}{1-\mathrm{tr}(\phi)+4\det(\phi)}\right\rangle=\binom{N}{2}=\chi(G(2,N)) \tag{47}$$

5 $G(2,N)$ の Chern 類との対応

得られた Euler 類が，普遍束の Chern 類を用いた通常の計算と対応している事を確認しておく．

$G(2,N)$ 上の普遍束（tautological bundle）を S とすると，接束 $TG(2,N)$ に対して $TG(2,N)=(S^*)^{\oplus N}/(S^*\otimes S)$ が成立する．（S^* は S の双対束を表す．）全 Chern 類を $c_t(\cdot)=1+tc_1(\cdot)+t^2c_2(\cdot)+\ldots$ と表すとする．Euler 類はトップ Chern 類によって得られるから，以下の関係式が成立する．

$$e(TG(2,N))=c_t(TG(2,N))|_{\mathrm{top}}=\left.\frac{c_t(S^*)^N}{c_t(S^*\otimes S)}\right|_{\mathrm{top}} \tag{48}$$

$c_t(S^*)=:(1+tx)(1+ty)$ と置くと，$e(TG(2,N))$ は以下のように書き下す事ができる．

$$e(TG(2,N))=\left.\frac{(1+tx)^N(1+ty)^N}{1-t^2(x-y)^2}\right|_{t^{2N-4}} \tag{49}$$

$t(x+y)\leftrightarrow\mathrm{tr}(\phi),t^2xy\leftrightarrow\det(\phi)$ と対応させる事で，得られた Euler 類 (46) が確かに Chern 類による計算と対応する事が分かる．

$$\frac{(1+tx)^N(1+ty)^N}{1-t^2(x-y)^2}=\frac{(1+t(x+y)+t^2xy)^N}{1-t(x+y)^2+4t^2xy}\leftrightarrow\frac{(1+\mathrm{tr}(\phi)+\det(\phi))^N}{1-\mathrm{tr}(\phi)+4\det(\phi)} \tag{50}$$

参考文献

[1] M. F. Atiyah and L. Jeffrey, Topological Lagrangians and cohomology, *J. Geom. Phys.*, **7**, 119-136 (1990).

[2] M. Blau, The Mathai-Quillen formalism and topological field theory, *J. Geom. Phys.*, **11**, 95-127 (1993).

[3] J. M. F. Labastida, Lectures on Topological Quantum Field Theory, hep-th/9709192.

[4] M. Marino, Topological Lagrangians and cohomology, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 463001 (2011).

[5] V. Mathai and D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, *Topology*, **25**, 85-110 (1986).

[6] M. Nakahara, Geometry, topology and physics, (2nd ed., Institute of Physics Publishing, 2003).

[7] 佐古 彰史, 超対称ゲージ理論と幾何学–非摂動的アプローチ, (第 1 版, 日本評論社, 2007).

[8] E. Witten, The Verlinde Algebra And The Cohomology Of The Grassmannian, *Geometry, topology,* & *physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 357-422 (1995).

質量保存を伴う反応拡散系のパルス解の相互作用

○祐川翼 [*a], 栄伸一郎 [b], 石井宙志 [a], 李聖林 [c]
Tsubasa SUKEKAWA, Shin-Ichiro EI, Hiroshi ISHII, S.Seirin LEE
a 北海道大学大学院理学院数学専攻, b 北海道大学大学院理学研究院数学部門
c 広島大学理学部数学科

概要

真核細胞や細胞性粘菌などの特定の細胞には外部からの何らかの刺激により細胞内に一様に分布していた分子が移動し, 濃度分布を局在化させる現象がある. これを細胞極性といい細胞の機能発現の基盤となっている. この現象を数学的に記述するために細胞膜を円周と考え, 質量保存則をもつ円周上の反応拡散系が提案された. 本研究はそれに習い, 2 つの異なる円周上の反応拡散系で特定の相互作用をしているモデル方程式を考察し , 局在パターンの運動方程式の導出と解析を行った .

1 はじめに

真核細胞や細胞性粘菌などの特定の細胞には, 外部からの何らかの刺激により細胞内に一様に分布していた分子が移動し, 濃度分布を局在化させる働きがある. これを細胞極性といい, 細胞の機能発揮の基盤となっている. 特に哺乳類の細胞においては, 走化性に関わる物質の多くが明らかにされてきており, その中でも低分子量 GTP アーゼ Rho ファミリー (Cdc42, Rac, RhoA) と呼ばれる分子群が細胞極性の中心にあることがこれまでの研究でわかっている [2]. それらの分子は, 外部刺激がないときは細胞膜に一様に分布しているが, 細胞外の光源やエサ等の外部刺激を感受することによって,PI3K, PIP_3, Cdc42, Rac, F-actin 等の分子は外部刺激の方向に局在し, PTEN, RhoA 等の分子は外部刺激の反対側に局在する.

このような現象を記述するために, [2] では細胞極性の概念モデルとして 2 つの成分 u, v からなる 1 次元反応拡散系が扱われた.

$$\begin{cases} u_t &= d_1 u_{xx} - f(u,v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + f(u,v). \end{cases}$$

ただし u, v はそれぞれ, 時刻 t, 位置 x における化学物質 U, V の濃度を表している. ここで, 境界条件としては周期境界条件を課す. これは細胞膜, 細胞質を共に円周とみなしてモデル化したことから従う境界条件である. d_1, d_2 はそれぞれ U, V の拡散係数である. U は細胞膜内に存在し, V は細胞質内に存在する物質であり, 細胞質のほうが細胞膜より空間的自由度が高いため細胞質の拡散係数の方が大きいとする.

$$0 < d_1 < d_2$$

より一般に以下の方程式について考察する.

$$\begin{cases} u_t &= d_1 u_{xx} - \gamma_1 f(u,v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + \gamma_2 f(u,v) \end{cases}$$

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士課程 1 年 mail:sukekawa-tsubasa@eis.hokudai.ac.jp

γ_1, γ_2 は正の定数である．上の方程式を変数変換することで以下の方程式が得られる．

$$\begin{cases} u_t &= du_{xx} - \gamma f(u,v), \\ v_t &= v_{xx} + f(u,v) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $d := d_1/d_2, \gamma := \gamma_1/\gamma_2$ であり，拡散係数の仮定から $0 < d < 1$ である．本稿では (1.1) を 1 次元区間 $I := (-K/2, K/2)$ 上で考え，周期境界条件を課すものとする．K は正の定数で区間長を表す．このとき，(1.1) の任意の滑らかな解 $(u(x,t), v(x,t))$ は時間変数 t によらない保存量 $\int_I (u + \gamma v)dx$ をもつ．実際，周期境界条件から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_I (u(x,t) + \gamma v(x,t))dx &= \int_I (u_t(x,t) + \gamma v_t(x,t))dx = \int_I (du_{xx}(x,t) + \gamma v_{xx}(x,t))dx \\ &= [du_x(x,t) + \gamma v_x(x,t)]_{-K/2}^{K/2} = 0, \end{aligned}$$

$f(u,v)$ は反応項であり，大辻 [2] では以下のものが考案された．

$$f(u,v) = a_1 \left[\frac{u+v}{\{a_2(u+v)+1\}^2} - v \right] \quad (a_1, a_2 > 0), \tag{1.2}$$

$$f(u,v) = -b_1(u+v)[(u+v)(du+v) - b_2] \quad (b_1, b_2 > 0). \tag{1.3}$$

例として (1.2) を用いて (1.1) の数値シミュレーションを行うと単峰形のパターンが観測され (図 1)，細胞極性の性質の多くを再現するようなシミュレーション結果が得られている [2]．

本研究では単独の反応拡散系 (1.1) を以下のように異なる円周上で定義された 2 つの反応拡散系に拡張

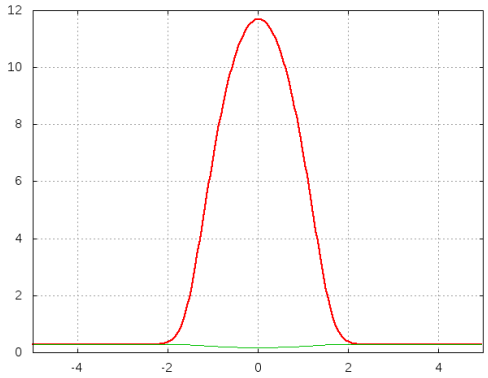


図 1　赤線は $u(x)$，緑線は $v(x)$ を表している．初期値は $(u_0(x), v_0(x)) = (2.0 + \varepsilon_1(x), 1.0 + \varepsilon_2(x))$ で与えた．ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は擬似乱数で $-0.005 < \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) < 0.005$ $(x \in I)$ で与えている．

する．

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1) + \varepsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_2) + \varepsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) \end{cases} \qquad (0 < \varepsilon \ll 1) \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{u}_i := \begin{pmatrix} u_i(x,t) \\ v_i(x,t) \end{pmatrix}, \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) \\ \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t) \end{pmatrix}, \mathcal{L}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} du_{xx} - \gamma f(u,v) \\ v_{xx} + f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) := g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix},$$

上のモデル方程式の生物学的意味について説明する．便宜上 2 つの細胞を C1, C2 と呼称し，これらは細胞としては全く同じ成分と性質をもつものとする．従って細胞膜と細胞質の拡散係数の比 d や反応項の時定数の比 γ なども全く同じ値を取るものとする．u_1, v_1 は C1 内に存在する化学物質 U_1, V_1 の濃度

を表し, U_1 は C1 の細胞膜に, V_1 は C1 の細胞質に存在する. u_2, v_2 も同様に, C.2 内にある化学物質 U_2, V_2 の濃度を表している. ここで, U_1, U_2 は同じ化学物質であるが, C1 に存在するか C2 に存在するかで添字を使い分けている. V_1, V_2 についても同様である. C1, C2 はどちらも円周としてモデル化する.

g は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の相互作用の効果を表しており, 広島大学の李聖林氏により次のような関数が提案された.

$$g(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = \alpha u_1 u_2 - \beta v_1 v_2 \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.5}$$

(1.5) の生物学的意味については, 係数 α の項は U_1, U_2 が細胞膜上で何らか化学物質を介して互いを抑制しており, 係数 β の項も同様に V_1, V_2 が化学物質を介して互いを活性する効果を表している. 数学的により一般な g の仮定は 1 章で述べる. (1.4) は各 $\boldsymbol{u}_i$ について保存量をもつ. 実際 $\int_I (u_i + \gamma v_i) dx$ は時間によらない定数となる. (1.4) において初期条件として定常パルス解 $S(x - l_1(0)), S(x - l_2(0))$ を各円周に配置する. ここで $l_1(t), l_2(t)$ は時刻 $t \geq 0$ において各パルスの u 成分が最大値をとる x 座標とする. もとのパルス解 S が平行移動を除いて安定であるならば, $0 < \varepsilon \ll 1$ であるとき $\boldsymbol{G}$ の効果が十分小さいので, 各パルスは形をほとんど変えずに動くことが予想される. このとき各パルスの挙動を調べるには $l_1(t), l_2(t)$ の挙動を調べればよいことが予想される. ここで, $l_1(t), l_2(t)$ を各パルスの時刻 t における位相と呼ぶことにする. (図.2) は以上のイメージ図である.

以上の直感的な説明は, [1] によって一般の反応拡散系において数学的に証明されており, 細胞極性モデルにおいても安定な定常パルス解が存在するという仮定のもと, 外部刺激が最大になる点にパルスが移動することが数学的に示されている [3], [4].

本稿では, [3] の手法を参考に, 各パルスの位相 l_1, l_2 の差を $h(t) := l_2(t) - l_1(t)$ とし h の運動方程式 $\dfrac{dh}{dt}(t)$ を求めることでパルスの挙動を調べた. その結果, 定常解と相互作用の項に一般的な仮定をおいた状況で, $h = 0$ が不安定平衡点, $h = \pm K/2$ が安定平衡点になることが分かった. 便宜上, 本研究では $h = 0$ のときを同位相と呼称する. これは各パルスの位相が等しくなるからである. 反対に $h = \pm K/2$ のときは, 各パルスの位相が丁度反対側に位置することになるので反位相と呼称する.

各章の構成を説明する. 1 章では必要な仮定を準備する. 2 章では [3] と同様の手法で位相差の運動方程式を導出する. 3 章では主結果と数値計算例を紹介する. 4 章で主結果の証明を述べる.

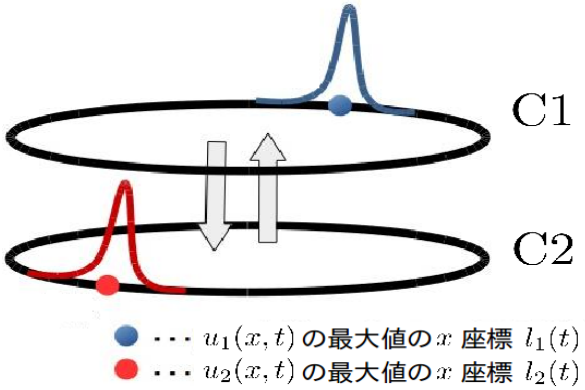


図 2　細胞の相互作用のイメージ図

1.1 準備

1.1.1 定常解

(1.1) に対し定常解の存在を仮定する.

Assumption 1. (1.1) は定常解 $S(x) = (\overline{u}(x), \overline{v}(x))$ を持ち，以下を満たすとする.
(i) $\bar{u}(x) \geq 0, \bar{v}(x) \geq 0 (x \in I)$
(ii) $\overline{u}(x), \overline{v}(x)$ は偶関数であり，周期 K の周期関数である.
(iii) $\overline{u}(x), \overline{v}(x)$ はそれぞれ $0 \leq x \leq K/2$ 上で狭義単調減少，狭義単調増加である.

上の仮定は, (図 1) のようなパルス状の定常解の存在を意味する. ここで, 定常解について以下の補題を紹介する [3].

Lemma 1.1.

$$d\bar{u}(x) + \gamma\bar{v}(x) = Const. \quad (x \in I)$$

Lemma 1.2. $w(x) := \frac{1}{\gamma}\bar{u}_x(x)$ と定めると, w は I 上奇関数で, $w(x) < 0$ $(x \in (0, K/2))$ であり, 以下が成り立つ.

$$S_x(x) = w(x)\begin{pmatrix}\gamma \\ -d\end{pmatrix}$$

1.1.2 定常解の安定性

定常解 $S(x)$ 周りでの線形化作用素を L とする $(L : L^2(I) \times L^2(I) \to L^2(I) \times L^2(I))$. 線形化方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{dt} = L\boldsymbol{v} := D\partial_x^2\boldsymbol{v} + F(S)\boldsymbol{v}, \tag{1.6}$$

ここで

$$D := \begin{pmatrix}d & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, F(S) := \begin{pmatrix}-\gamma\bar{f}_u & -\gamma\bar{f}_v \\ \bar{f}_u & \bar{f}_v\end{pmatrix},$$
$$\bar{f}_u := f_u(\bar{u}, \bar{v}), \bar{f}_v := f_v(\bar{u}, \bar{v}),$$

${}^tF(S)$ を $F(S)$ の転置行列とする. L の共役作用素を L^* とおくと

$$L^* = D\partial_x^2 +^t F(S).$$

摂動項 $\boldsymbol{v}$ として保存量に影響を与えないもののみを考えるため以下の関数空間を定義する.

$$X_\xi := \{\boldsymbol{u} \in L^2(I) \times L^2(I); \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle = \xi\}, (\xi \in \mathbb{R})$$
$$X := \{\boldsymbol{u} \in L^2(I) \times L^2(I); \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle = 0\}.$$
$$\boldsymbol{a} := \frac{1}{\sqrt{K(1+\gamma^2)}}\begin{pmatrix}1 \\ \gamma\end{pmatrix}, \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 1.$$

ここで, $\langle\ ,\ \rangle$ は $L^2(I) \times L^2(I)$ の内積であり.

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle := \int_I (u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x))dx$$
$$(\boldsymbol{u} = (u_1(x), u_2(x)), \boldsymbol{v} = (v_1(x), v_2(x)), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^2(I) \times L^2(I)),$$

いま $S \in X_\xi$ とし, ξ を解のパラメータとみなして $S = S(x; \xi)$ とかく. 線形化作用素 L を X に制限したものを $\widetilde{L} := L_{|X}$ と定める. $\sigma(\widetilde{L})$ を $\widetilde{L}$ のスペクトルとする. $\widetilde{L}$ について以下を仮定する.

Assumption 2.
(i) $0 \in \sigma(\widetilde{L})$ であり, 0 は $\widetilde{L}$ の単純固有値である.
(ii) ある正の定数 δ が存在し $\sigma(\widetilde{L}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; Re(\lambda) < -\delta\} \cup \{0\}$ がなりたつ.

上の仮定は定常解が保存量 0 の摂動に対し, 平行移動を除いて線形安定であることを表している. Lemma.2 より $\langle S_x, \boldsymbol{a} \rangle_{L^2} = 0$ がなりたつ. よって $S_x \in X$ である. また, S は定常解なので $\mathcal{L}(S) = 0$. 両辺 x で微分することで $LS_x = 0$. よって

$$LS_x = \widetilde{L}S_x = 0$$

が成り立つ. 特に S_x は $\widetilde{L}$ の 0 固有値に対応する固有関数である. $\widetilde{L}$ が固有値 0 をもつので, $\widetilde{L}^*$ も固有値 0 をもつ. 対応する固有関数を $\Phi^* = \Phi^*(x;\xi) = (\varphi_1^*(x;\xi), \varphi_2^*(x;\xi))$ とおく. 先行研究 [3] より, Φ^* は S によって具体的に計算することができ

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \dfrac{-w(x;\xi) + \varphi_2^*(x;\xi))}{\gamma} \\ \varphi_2^*(x;\xi) \end{pmatrix} \in X$$

と表される. ただし

$$\varphi_2^*(x;\xi) = h_1(x;\xi) + Ax$$
$$h_1(x;\xi) := \int_0^x \int_0^y h_2(s;\xi) ds dy, \quad A := \int_0^{K/2} \left(\frac{2y}{K} - 1 \right) h_2(y;\xi) dy,$$
$$h_2(x;\xi) := -f_v(\bar{u}(x;\xi), \bar{v}(x;\xi)),$$

1.1.3 結合項の仮定

結合項の関数 g に以下の仮定をおく. 以下, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す.

Assumption 3. $g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = p(u_1)u_2 + q(v_1)v_2$. ただし, p, q は $\mathbb{R}$ 上実数値関数で $p(u) > 0, q(v) < 0$ $(u > 0, v > 0)$ をみたす.

上の仮定は (1.5) の一般化の 1 つとなっている. 実際 (1.5) が上の仮定を満たすことは明らかである. Assumption3 の代わりに次の仮定を採用することも可能である.

Assumption 4. $g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = p(u_2)u_1 + q(v_2)v_1$. ただし, $p(u)$,$q(v)$ は $\mathbb{R}$ 上実数値関数でそれぞれ u, v に関して狭義単調増加, 狭義単調減少である.

これらの仮定は $\boldsymbol{u_1}$ と $\boldsymbol{u_2}$ のどちらを p, q の変数にするかで明確な違いがある. Assumption3 では自身の成分 u_1, v_1 が変数になり, Assumption4 では相手の成分 u_2, v_2 が変数になっている. (1.5) ではどちらの仮定も満たすが, p, q が 2 次以上の多項式であったり, 分数形であるような場合ではどちらの仮定で方程式をたてるか注意が必要と考えられる.

2 位相差の運動方程式の導出

2.1 運動方程式の導出

$\boldsymbol{u}^i$ が安定定常解 $S(x, \xi_i) \in X_{\xi_i}$ に十分近いと仮定し, 次のように表す.

$$\boldsymbol{u}_1(x,t) = S(x - l_1(t); \xi_1) + V_1(x - l_1(t), t) = S(z_1; \xi_1) + V(z_1; \xi_1),$$
$$\boldsymbol{u}_2(x,t) = S(x - l_2(t); \xi_2) + V_2(x - l_2(t), t) = S(z_2; \xi_2) + V(z_2; \xi_2),$$
$$(z_i := x - l_i, V_i \in X, \boldsymbol{u}_i \in X_{\xi_i} \quad (i = 1, 2)).$$

ここで, V_i, l_i に関わる項は十分小とし, $\|V_i\|, \|V_{i,t}\|, \|V_{i,x}\|, |\frac{dl_i}{dt}| \ll 1 \ \ (i = 1, 2)$ とする. 方程式の各項に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} &= -\frac{dl_i}{dt}\{S_{z_i}(z_i) + V_{i,z_i}(z_i, t)\} + V_{i,t}(z_i, t) \\
&= -\frac{dl_i}{dt}S_{z_i}(z_i) + V_{i,t}(z_i, t) + O(\|V_{i,z_i}\|^2 + |\frac{dl_i}{dt}|^2) \\
\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_i) &= \mathcal{L}(S(z_i; \xi_i) + V_i(z_i, t)) \\
&= LV_i + O(\|V_i\|^2) \quad (\because \mathcal{L}(S(z_i; \xi_i) = 0) \\
\varepsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) &= \varepsilon \boldsymbol{G}(S(z_i; \xi_i) + V_i(z_i, t), S(z_j \xi_j) + V_j(z_j, t)) \ \ (i, j = 1, 2 \ i \neq j) \\
&= \varepsilon \boldsymbol{G}(S(z_i; \xi_i), S(z_j \xi_j)) + O(\varepsilon^2 + \|V_i\|^2 + \|V_j\|^2)
\end{aligned}$$

2 次以上の微小項を無視して整理すると以下の方程式を得られる.

$$\begin{cases}
V_{1,t} &= LV_1 + \dfrac{dl_1}{dt} S_{z_1}(z_1; \xi_1) + \varepsilon \boldsymbol{G}(S(z_1; \xi_1), S(z_1 - h; \xi_2)), \\
V_{2,t} &= LV_2 + \dfrac{dl_2}{dt} S_{z_2}(z_2; \xi_2) + \varepsilon \boldsymbol{G}(S(z_2; \xi_2), S(z_2 + h; \xi_1)).
\end{cases}$$

ここで $h = h(t) = l_2(t) - l_1(t)$ である. 上の方程式をそれぞれ $\Phi^*(z_1; \xi_1), \Phi^*(z_2, \xi_2)$ で内積を取ると.

$$\begin{cases}
\dfrac{dl_1}{dt}(t) = -\varepsilon \dfrac{\langle \boldsymbol{G}(S(z_1; \xi_1), S(z_1 - h(t); \xi_2)), \Phi^*(z_1; \xi_1) \rangle_{L^2}}{\langle S_{z_1}(z_1; \xi_1), \Phi^*(z_1; \xi_1) \rangle_{L^2}}, & \text{(2.1a)} \\
\dfrac{dl_2}{dt}(t) = -\varepsilon \dfrac{\langle \boldsymbol{G}(S(z_2; \xi_2), S(z_2 + h(t); \xi_1)), \Phi^*(z_2; \xi_2) \rangle_{L^2}}{\langle S_{z_2}(z_2; \xi_2), \Phi^*(z_2; \xi_2) \rangle_{L^2}}. & \text{(2.1b)}
\end{cases}$$

ただし, $\langle \ , \ \rangle_{L^2}$ は $L^2(I)$ 内積を表す. (2.1a),(2.1b) の右辺は h について閉じた式になっているので, 以後 z_1, z_2 ともに z とおく. $M_0(\xi) := -1/\langle S_z(z; \xi), \Phi^*(z; \xi) \rangle_{L^2}$ とおくと,

$$\begin{cases}
\dfrac{dl_1}{dt} = \varepsilon M_0(\xi_1) \langle \boldsymbol{G}(S(z; \xi_1), S(z - h; \xi_2)), \Phi^*(z; \xi_1) \rangle_{L^2} =: \varepsilon H_1(h; \xi_1, \xi_2), & \text{(2.2a)} \\
\dfrac{dl_2}{dt} = \varepsilon M_0(\xi_2) \langle \boldsymbol{G}(S(z; \xi_2), S(z + h; \xi_1)), \Phi^*(z; \xi_2) \rangle_{L^2} =: \varepsilon H_2(h; \xi_1, \xi_2) & \text{(2.2b)}
\end{cases}$$

ここで, 先行研究 [3] から $\langle S_z(z; \xi), \Phi^*(z; \xi) \rangle_{L^2} < 0$ であることを用いた. 位相差 h の運動方程式は以下のようになる.

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon(H_2(h; \xi_1, \xi_2) - H_1(h; \xi_1, \xi_2)) =: \varepsilon H(h; \xi_1, \xi_2). \tag{2.3}$$

Φ^* を計算することで H_1 は以下のように展開できる.

$$\begin{aligned}
H_1(h; \xi_1, \xi_2) &= M_0(\xi_1) \langle \boldsymbol{G}(S(z; \xi_1), S(z - h; \xi_2)), \Phi^*(z; \xi_1) \rangle_{L^2} \\
&= M_0(\xi_1) \int_I \left\langle g(S(z; \xi_1), S(z - h; \xi_2)) \begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}(-w(x; \xi_1) + \varphi_2^*(z; \xi_1)) \\ \varphi_2^*(z; \xi_1) \end{pmatrix} \right\rangle dz \\
&= M_0(\xi_1) \int_I w(z; \xi_1) g(S(z; \xi_1), S(z - h; \xi_2)) dz
\end{aligned}$$

H_2 も同様にして

$$\begin{cases}
H_1(h; \xi_1, \xi_2) &= M_0(\xi_1) \int_I w(z; \xi_1) g(S(z; \xi_1), S(z - h; \xi_2)) dz, \\
H_2(h; \xi_1, \xi_2) &= M_0(\xi_2) \int_I w(z; \xi_2) g(S(z; \xi_2), S(z + h; \xi_1)) dz
\end{cases} \tag{2.4}$$

3 主結果

前節で一般的な相互作用項における位相差 h の運動方程式 $H(h)$ を導出した. 運動方程式をより詳しく解析するためには H_1, H_2 に含まれる g に具体的な関数を適用すればよく, ここでは Assumption3, Assumption4 の場合で解析した場合の結果を述べる.

Theorem 3.1. 方程式 (1.1) が *Assumption1, Assumption2* を満たし, (1.4) が *Assumption3, Assumption4* のいずれかを満たすとする. このとき運動方程式 (2.3) の平衡点は $h = 0, \pm K/2$ のみで, $h = 0$ は不安定平衡点であり, $h = \pm K/2$ は安定平衡点である.

定理の証明については 4 章で説明する. 上の定理から, 各パルス解が同位相になるときが不安定であり, 反位相となるときが安定であることが示唆される. 本節の残りで以上の結果を数値計算で確かめる. 数値計算には [3] の Example5.2 を参考にした.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= d_1 u_{xx} - \gamma_1 f(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= d_2 v_{xx} + \gamma_2 f(u,v), \end{cases} \qquad x \in I := (-K/2, K/2),\ t > 0. \tag{3.1}$$

ただし

$$f(u,v) = F(u+v) - v, \qquad F(s) = s/(1+a_0 s)^2,$$
$$a_0 = 0.7, \gamma_1 = \gamma_2 = 2.5, d_1 = 0.01, d_2 = 1.0, K = 10.0\ .$$

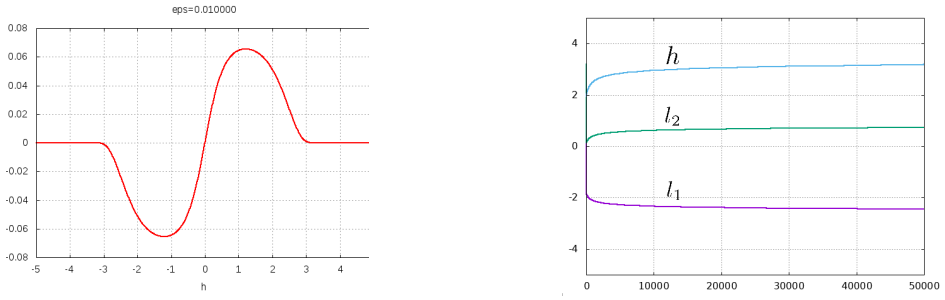
方程式 (3.1) について擬スペクトル法を用いて数値計算を行ったところ定常パルス波が観測された (図 1). このパルス波を用いてパルス波の相互作用のシミュレーションを実行した. パラメータ及び関数は以下のものを採用した.

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1) + \varepsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_2) + \varepsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} du_{xx} - f(u,v) \\ v_{xx} + f(u,v) \end{pmatrix}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \alpha u_1 u_2 - \beta v_1 v_2 \quad (\alpha, \beta > 0),$$
$$\gamma = 1.0, d = 0.01, \alpha = 2.0, \beta = 1.0\ .$$

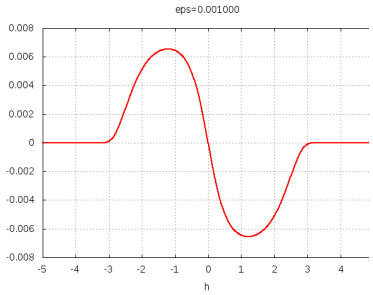
上のパラメータで位相差の運動方程式 $H(h)$ と位相差の時間変化を計算した結果が次のグラフである (図.3).

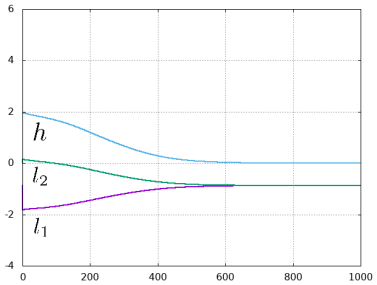
また, α, β の符号を変えることで, 同位相と逆位相の安定性を反対にできる. (図.4) は方程式系 (3.2) において $\alpha = -2.0, \beta = -1.0$ としたときの位相差の時間変化である.



[A] [B]

図 3 [A] 位相差 h の運動方程式 $H(h)$ の図. 横軸は h で縦軸で $H(h)$ をプロットしている. $h = 0$ が不安定で $h = \pm K/2$ が安定平衡点であることが示唆される. [B] $t = 0$ から $t = 50000$ までの位相差の時間推移. $\alpha = 2.0, \beta = 1.0$ 横軸は時刻 t. 水色線は位相差 $h(t)$. 紫線, 緑線は各位相 $l_1(t), l_2(t)$ を表している. 位相差が時間経過で $h = K/2$ に漸近していく傾向が確認できる.





[C] [D]

図 4　[C] 位相差 h の運動方程式 $H(h)$ の図. 横軸は h で縦軸で $H(h)$ をプロットしている. $h=0$ が安定で $h=\pm K/2$ が不安定平衡点であることが示唆される. [D] $t=0$ から $t=1000$ までの位相差の時間推移. ただし, $\alpha=-2.0, \beta=-1.0$ としている. 水色線は位相差 $h(t)$. 紫線, 緑線は各位相 $l_1(t), l_2(t)$ を表している. 位相差が時間経過で $h=0$ に漸近していく傾向が確認できる.

4　主結果の証明

この章では本研究の主結果である Theorem3.1 を証明する. Assumption3 の場合で H_1, H_2 を計算すると

$$\begin{cases} H_1(h;\xi_1,\xi_2) = M_0(\xi_1)\displaystyle\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z;\xi_1))\overline{u}(z-h;\xi_2)+q(\overline{v}(z;\xi_1))\overline{v}(z-h;\xi_2))dz, \\ H_2(h;\xi_1,\xi_2) = M_0(\xi_2)\displaystyle\int_I w(z;\xi_2)(p(\overline{u}(z;\xi_2))\overline{u}(z+h;\xi_1)+q(\overline{v}(z;\xi_2))\overline{v}(z+h;\xi_1))dz \end{cases}$$

また $\bar{u}, \bar{v}$ が偶関数かつ w が奇関数であるので H_1 は以下のように式変形できる.

$$\begin{aligned} H_1(h;\xi_1,\xi_2) &= M_0(\xi_1)\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z;\xi_1))\overline{u}(z-h;\xi_2)+q(\overline{v}(z;\xi_1))\overline{v}(z-h;\xi_2))dz \\ &= -M_0(\xi_1)\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z;\xi_1))\overline{u}(z+h;\xi_2)+q(\overline{v}(z;\xi_1))\overline{v}(z+h;\xi_2))dz \ (\because z\to -z). \end{aligned}$$

これより

$$\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j) := \int_I w(z;\xi_i)(p(\overline{u}(z;\xi_i))\overline{u}(z+h;\xi_j)+q(\overline{v}(z;\xi_i))\overline{v}(z+h;\xi_j))dz \tag{4.2}$$

と定めると

$$H(h;\xi_1,\xi_2) = M_0(\xi_2)\tilde{H}(h;\xi_2,\xi_1)+M_0(\xi_1)\tilde{H}(h;\xi_1,\xi_2). \tag{4.3}$$

次に, Assumption4 の場合で g を計算すると

$$\begin{cases} H_1(h;\xi_1,\xi_2) = M_0(\xi_1)\displaystyle\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z-h;\xi_2))\overline{u}(z;\xi_1)+q(\overline{v}(z-h;\xi_2))\overline{v}(z;\xi_1))dz, \\ H_2(h;\xi_1,\xi_2) = M_0(\xi_2)\displaystyle\int_I w(z;\xi_2)(p(\overline{u}(z+h;\xi_1))\overline{u}(z;\xi_2)+q(\overline{v}(z+h;\xi_1))\overline{v}(z;\xi_2))dz \end{cases}$$

となる. 同様に H_1 を式変形すると

$$\begin{aligned} H_1(h;\xi_1,\xi_2) &= M_0(\xi_1)\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z-h;\xi_2))\overline{u}(z;\xi_1)+q(\overline{v}(z-h;\xi_2))\overline{v}(z;\xi_1))dz \\ &= -M_0(\xi_1)\int_I w(z;\xi_1)(p(\overline{u}(z+h;\xi_2))\overline{u}(z;\xi_1)+q(\overline{v}(z+h;\xi_2))\overline{v}(z;\xi_1))dz \ (\because z\to -z) \end{aligned}$$

$$\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j)=\int_I w(z;\xi_i)(p(\overline{u}(z+h;\xi_j))\overline{u}(z;\xi_i)+q(\overline{v}(z+h;\xi_j))\overline{v}(z;\xi_i))dz \tag{4.5}$$

と定めると (4.3) と同様の式が得られる. また, 証明のために以下の補題を紹介する [3].

Lemma 4.1. $\overline{u}(x-y)>\overline{u}(x+y)$, $\overline{v}(x+y)>\overline{v}(x-y)$ $(0<x,y<K/2)$ が成立する.

Proof of Theorem3.1. 以下の常微分方程式の平衡点とその安定性を調べる.

$$\frac{dh}{dt}(t)=\varepsilon H(h;\xi_1,\xi_2)=\varepsilon\{M_0(\xi_2)\tilde{H}(h;\xi_2,\xi_1)+M_0(\xi_1)\tilde{H}(h;\xi_1,\xi_2)\}.$$

Lemma.1 より w は奇関数である. 偶奇性から $\tilde{H}(h;\xi_1,\xi_2)$ は h に関して奇関数であり, $h=0,\pm K/2$ のとき $\tilde{H}(h;\xi_1,\xi_2)=0$ である.

次に, (Assumption3 の場合) (4.2) を式変形すると

$$\begin{aligned}\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j)&=\int_I w(z;\xi_i)(p(\overline{u}(z;\xi_i))\overline{u}(z+h;\xi_j)+q(\overline{v}(z;\xi_i))\overline{v}(z+h;\xi_j))dz\\&=\int_0^{K/2} w(z;\xi_i)p(\overline{u}(z;\xi_i))(\overline{u}(z+h;\xi_j)-\overline{u}(z-h;\xi_j))dz\\&\quad+\int_0^{K/2} w(z;\xi_i)q(\overline{v}(z;\xi_i))(\overline{v}(z+h;\xi_j)-\overline{v}(z-h;\xi_j))dz.\end{aligned}$$

Assumption3 より $p(\overline{u}(z;\xi_i))>0, q(\overline{v}(z;\xi_i))<0$ $(0<z<K/2)$. Lemma1.2 より $w(z;\xi_i)<0$ $(0<z<K/2)$. さらに, Lemma4.1 をもちいれば $\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j)>0$ がなりたつ.

(Assumption4 の場合) (4.5) を式変形すると

$$\begin{aligned}\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j)&=\int_I w(z;\xi_i)(p(\overline{u}(z+h;\xi_j))\overline{u}(z;\xi_i)+q(\overline{v}(z+h;\xi_j))\overline{v}(z;\xi_i))dz\\&=\int_0^{K/2} w(z;\xi_i)\{p(\overline{u}(z+h;\xi_j))-p(\overline{u}(z-h;\xi_j)\}\overline{u}(z;\xi_i)dz\\&\quad+\int_0^{K/2} w(z;\xi_i)\{q(\overline{v}(z+h;\xi_j))-q(\overline{v}(z-h;\xi_j))\}\overline{v}(z;\xi_i)dz.\end{aligned}$$

Assumption4 より, p,q はそれぞれ狭義単調増加, 狭義単調減少関数なので Lemma4.1 から

$$\begin{aligned}p(\overline{u}(z+h;\xi_j))-p(\overline{u}(z-h;\xi_j))<0\quad(0<z,h<K/2),\\q(\overline{v}(z+h;\xi_j))-q(\overline{v}(z-h;\xi_j))>0\quad(0<z,h<K/2).\end{aligned}$$

さらに Lemma1.2 より $w(z;\xi_i)<0\quad(0<z<K/2)$. これより $\tilde{H}(h;\xi_i,\xi_j)>0$ がなりたつ.

$\tilde{H}(h,\xi_i,\xi_j)$ は奇関数なので, $\tilde{H}(h,\xi_i,\xi_j)<0$ $(-K/2<h<0)$ となる. 従って $h=0,\pm K/2$ 以外に平衡点は存在せず, $h=0$ が不安定平衡点, $h=\pm K/2$ が安定平衡点になる. 以上より Theorem3.1 が示された. □

以上の証明から, α,β の符号をどちらも負にした際に, 平衡点の安定性が入れ替わることも明らかである.

5 まとめ・今後の展望

本研究では細胞が 2 つ存在する場合の極性の相互作用を, 異なる円周上で定義された反応拡散系でモデル化し, パルス状の定常解を極性に見立て, 一般の相互作用項におけるパルスの運動方程式を導出した. また, ある相互作用項においては同位相が不安定で反位相が安定になることが示された.

ここでは定常解の各成分が非負の場合のみについてのみ考察したが (Assumption1), 一般には定常解が負値をとる場合もありうる. 実際, 反応項として (1.3) を用いた場合, 定常解を具体的に計算することができ, 区間長が大きい場合には定常解が負値をとることがわかっている [2]. そのような定常解に対しては Theorem3.1 が成り立つとは限らず, より詳細な解析が必要である. また, 実際の実験で今回の結果を再現できるかどうかも今後の課題である.

参考文献

[1] S.I.Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems, J. Dynam. Diff. Eqns 14 (2002), 85-137.

[2] Mikiya Otsuji,Shuji Ishihara,Carl Co,Kozo Kaibuchi,Atsushi Mochizuki,Shinya Kuroda, A Mass Conserved Reaction-Diffusion System Captures Properties of Cell Polarity, PLoS Comp. Biol. 3 (2007) e108.

[3] Masataka Kuwamura, Sungrim Seirin-Lee, Shin-ichiro Ei: Dynamics of localized unimodel patterns in reaction diffusion systems related to cell polarization by by extracellular signaling.

[4] 河野 航, 栄 伸一郎 (2017) 細胞極性による分子局在の外部刺激による移動についての数学的考察

コヒーレント状態を用いた量子古典対応

大妻女子大学 社会情報学部
弓林　司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)

概要

本発表では、可積分場の理論に於ける量子古典対応に就いて、“場の理論に於ける coherent 状態” を構成し、議論する。場の理論に於ける coherent 状態とは、場の演算子に対する期待値が、古典 soliton（一般には任意の関数）に一致する状態のことである。特に、この状態に対する量子古典時間発展を定義し、量子効果、及び、非線型性に由来する不安定性を議論した。

1　導入

量子論の基礎が完成して以来、量子論と古典論の対応は如何様に与えられる可きかという事に就いて議論が続いて来た。量子論と古典論の対応を与える方法に就いては、Ehrenfest の定理、WKB 解析等が挙げられるだろう。特に、確率解釈に於いては、古典論的な物理量は期待値として現れるということも。従って、量子古典的対応に於ける本質的な問いは、正準変数（作用素）の期待値が古典論（的振る舞い）に対応する様な、「良い」量子状態を見つける問題へと還元される。

本発表では可積分場理論における量子古典対応について考察する。特に本発表では、最も単純で重要な例は、接触相互作用を持つ 1 次元 Bose 気体の Hamiltonian

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(-\partial_j^2\right) + \sum_{1 \le j < k \le N} 2c\delta(x_j, x_k), \tag{1}$$

によって記述される。ここで、N は粒子数、c は結合定数、$\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ である。この系は量子可積分系である。即ち、厳密な固有状態と固有 enargy が、Bethe 仮設法によって与えられる [2]。この多体系を第二量子化し、場の理論として焼き直すと、場の演算子は量子非線形 Schrödinger（NLS）方程式に従い。更に、平均場近似を行う事で、場の演算子は、可換複素 scalar 場へ置き換えられる。こうして得られる、古典 NLS 方程式は、soliton 解を持ち古典可積分系であることが知られている [3]。この様に、量子可積分系であり、かつ、その古典極限が古典可積分系である様な系に対し、古典 soliton に対応する量子状態を同定する問題は、長らく論じられてきた $(c < 0)$[4, 5]$(c > 0)$[6, 7]。

本発表では「coherent 状態」[8] を用いた量子古典対応に就いて議論する。coherent 状態は正準変数の期待値が古典的な振る舞いを持つ量子状態である。例えば、調和振動子の場合、coherent 状態（の位置表示波動関数）は、局在波を形成し、その形を変えることなく、古典的な粒子と正確に同じ周波数で振動することが知られている [9]。

本発表では、場の理論に於ける coherent 状態を定義し、この状態の量子古典時間発展を定義、それらの間の差を調べる事で、coherent 状態が与える量子古典対応の安定性に就いて議論した。

本発表は東大先端研佐藤純氏との共同研究 [1] に基づく。

2 準備

2.1 量子場

まず量子場を準備する。

1 次元 Bose 気体を表す「場の作用素 $\psi(x,t)$」は以下の「同時刻交換関係」を満たす[*1] 。

$$[\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}^\dagger(y,t)]=\delta(x-y), \tag{2}$$
$$[\hat{\psi}(x,t),\hat{\psi}(y,t)]=[\hat{\psi}^\dagger(x,t),\hat{\psi}^\dagger(y,t)]=0. \tag{3}$$

「真空状態 $|\,0\,\rangle$」は以下を満たす。

$$\hat{\psi}(x,t)|\,0\,\rangle=0,\quad \langle\,0\,|\hat{\psi}^\dagger(x,t)=0,\qquad \langle 0|0\rangle=1. \tag{4}$$

「状態空間」は真空 $|\,0\,\rangle$ に「生成作用素 $\hat{\psi}^\dagger(x)$」を以下の様に作用する事で得られる。

$$|\varphi_N\rangle=\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\varphi_N(x_1,\cdots,x_N)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|\,0\,\rangle.$$

$\varphi_N(x_1,\cdots,x_N)$ は N 体波動関数に対応する。

上記の量子場作用素の Hamiltonian は、Hamiltonian (1) を「第 2 量子化」し、以下の様与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}}=\int \mathrm{d}x\left[-\hat{\psi}^\dagger\partial_x^2\hat{\psi}+c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}\right]. \tag{5}$$

Heisenberg 描像において、場の作用素 $\hat{\psi}(x,t)$ は以下の運動方程式に従う。

$$\mathrm{i}\partial_t\hat{\psi}=[\hat{\psi},\hat{\mathcal{H}}]=-\partial_x^2\hat{\psi}+2c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\psi}, \tag{6}$$

これは「量子非線型 Schrödinger（NLS）方程式」と呼ばれる。この方程式の「形式解」は以下で与えられる。

$$\hat{\psi}(x,t)=e^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}\hat{\psi}(x)e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}. \tag{7}$$

[*1] $[A,B]=AB-BA$.

2.2 古典場

次に古典場を準備する。

量子場作用素 $\hat{\psi}(x,t)$ 及び $\hat{\psi}^\dagger(x,t)$ を、可換な複素 scalar 場（古典場）$f(x,t)$ 及び $f^*(x,t)$ に置き換えることを「古典化」と呼ぶことにする。

古典化に対し、量子 NLS 方程式 (6) は、以下の様に書き換えられる。

$$\mathrm{i}\partial_t f = -\partial_x^2 f + 2cf^* ff. \tag{8}$$

これは「古典 NSL 方程式」と呼ばれる。

「Energy 汎関数」は、Hamiltonian (5) を古典化し、以下で与えられる。

$$E[f,f^*] = \int \mathrm{d}x \left[-f^*\partial_x^2 f + cf^* f^* ff \right], \tag{9}$$

この Energy 汎関数から「Poisson 括弧」

$$\{F,G\} := \frac{1}{\mathrm{i}} \int \mathrm{d}x \left(\frac{\delta F}{\delta f}\frac{\delta G}{\delta f^*} - \frac{\delta G}{\delta f}\frac{\delta F}{\delta f^*} \right). \tag{10}$$

を用いて、古典 NLS 方程式 (8) は、

$$\partial_t f = \{f, E\}, \quad \partial_t f^* = \{f^*, E\}, \tag{11}$$

と書き換えられる。

特に、Poisson 括弧に対し、古典場 $f(x,t)$ 及び $f^*(x,t)$ は、「同時刻正準交換関係」

$$\{f(x,t), f^*(y,t)\} = \frac{1}{\mathrm{i}}\delta(x-y) \tag{12}$$

を満たす。

2.3 Coherent 状態

$f(x,t)$ を古典 NLS 方程式 (8) の soliton 解とする。ここでは初期時刻 $t=0$ で soliton 解に対応する量子状態を準備する。

この量子状態は、本発表の主対象である「場の理論に於ける coherent 状態 [10]」で、以下で定義される。

$$|f\rangle := e^A |\,0\,\rangle, \quad A := \int \mathrm{d}x \left[f(x)\hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x)\hat{\psi}(x) \right], \tag{13}$$

ここで $f(x) := f(x,t=0)$ とした。また、規格化を $\langle f|f\rangle = 1$ とし、$A^\dagger = -A$ を満たす。

Coherent 状態は、量子場作用素、古典場に対し、以下の関係式を満たす。

$$[\hat{\psi}(x), A] = f(x), \quad [\hat{\psi}^\dagger(x), A] = f^*(x), \tag{14}$$

$$\{f(x), A\} = \mathrm{i}\hat{\psi}(x), \quad \{f^*(x), A\} = \mathrm{i}\hat{\psi}^\dagger(x). \tag{15}$$

以上の定義、関係式より、この coherent 状態は量子場の作用素 $\hat{\psi}(x)$ の固有値 $f(x)$ に対応する固有 vector と成っている事が分かる。

$$\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x)|f\rangle. \tag{16}$$

更に、この期待値は、以下で与えられる。

$$\langle f|\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x), \quad \langle f|\hat{\psi}^\dagger(x)|f\rangle = f^*(x), \tag{17}$$

以上依り coherent 状態は量子場作用素 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ を古典場 f, f^* へ古典化する事が分かる。

2.4 量子古典時間発展

ここでは coherent 状態の時間発展に就いて議論する。量子論に於いて、coherent 状態 $|f\rangle$ の時間発展は、

$$|f,t\rangle := e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t}|f\rangle = e^{A(-t)}|\,0\,\rangle, \tag{18}$$

で定義される。ここで

$$A(t) := \int \mathrm{d}x \left[f(x)\hat{\psi}^\dagger(x,t) - f^*(x)\hat{\psi}(x,t) \right]. \tag{19}$$

と置いた。この時、時刻 t に於ける量子場作用素に対する期待値は、

$$\langle f,t|\hat{\psi}(x)|f,t\rangle = \langle f|\hat{\psi}(x,t)|f\rangle, \tag{20}$$

を満たすが、これは $f(x,t)$ とは等しくない。

そこで、この「量子時間発展」に対し、coherent 状態の「古典時間発展」$|\widetilde{f,t}\rangle$ を以下で定義し、これらの間のズレを議論しよう。

$$|\widetilde{f,t}\rangle := e^{\widetilde{A}(t)}|\,0\,\rangle, \tag{21}$$

$$\widetilde{A}(t) := \int \mathrm{d}x \left[f(x,t)\hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x,t)\hat{\psi}(x) \right], \tag{22}$$

この状態の時刻 t に於ける期待値は

$$\langle \widetilde{f,t}|\hat{\psi}(x)|\widetilde{f,t}\rangle = f(x,t). \tag{23}$$

となり、$f(x,t)$ に完全に一致する。

これらの状態は初期時刻 $t=0$ で等しい。

$$A(0) = \widetilde{A}(0) = A, \quad |f,t=0\rangle = |\widetilde{f,t=0}\rangle = |f\rangle. \tag{24}$$

これらの時間発展は関係式

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}[A, \hat{\mathcal{H}}], \quad \partial_t \widetilde{A}(t) = \{A, E\}. \tag{25}$$

に依り与えられる。

「coherent 状態の量子古典時間発展の差」を表す量 $r(t)$ を

$$r(t) := \langle f, t | \widetilde{f, t} \rangle = \langle\, 0\, | e^{-A(-t)} e^{\widetilde{A}(t)} |\, 0\, \rangle, \tag{26}$$

で定義すると、$t = 0$ で 1、そこから徐々に減退して行く。

これを微小時間 Δt で評価すると、

$$A(-\Delta t) = A - \Delta t \frac{1}{\mathrm{i}}[A, \hat{\mathcal{H}}] =: A - \Delta t F, \tag{27}$$

$$\widetilde{A}(\Delta t) = A + \Delta t \{A, E\} =: A + \Delta t G. \tag{28}$$

及び、Baker-Campbell-Hausdorff の公式に依り、

$$r(\Delta t) = 1 - \mathrm{i}c\Delta t \int |f|^4 \mathrm{d}x + c\,\mathcal{O}(\Delta t^2). \tag{29}$$

であることがわかる。これは 1 次の項が純虚数であるため $|r(\Delta t)|^2$ は 1 となる。即ち、coherent 状態は、微小時間の範囲、または、弱結合 $c << 1$ の範囲で「良い量子古典対応」を与える事が分かる。

参考文献

[1] J. Sato, and T. Yumibayashi, “Quantum-classical correspondence via coherent state in integrable field theory”, [arXiv: 1811.03186]

[2] E.H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963); E.H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).

[3] V.E. Zakharov, A. B. Shabat, Sov. Phys.-JETP **34**, 62 (1972).

[4] C. R. Nohl, Ann. Phys. **96**, 234 (1976);

[5] M. Wadati, A. Kuniba, T. Konishi, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 1710 (1985);

[6] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, and T. Deguchi, Phys. Rev. Lett. **108**, 110401 (2012).

[7] J. Sato, R. Kanamoto, E. Kaminishi, T. Deguchi, New J. Phys. **18**, 075008 (2016).

[8] J.R. Klauder, Ann. Phys. (U.S.A.) (11) 123 (1960).
S. Schweber, J. math. Phys. (3) 831 (1962).

[9] R.J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[10] S. Aoyama, Y. Kodama, Progr. Theor. Phys. **56**, (6) 1970 (1976).

球面上における分化の波の数値計算

○石井宙志 (Hiroshi Ishii)*　　栄伸一郎 (Shin-Ichiro Ei)†
佐藤純 (Makoto Sato)‡　　八杉徹雄 (Tetsuo Yasugi)‡

概 要

ショウジョウバエの視覚中枢形成時には，神経上皮細胞から神経幹細胞への分化が波のように伝搬していく現象が観察されており，記述する数理モデルの 1 つとして合成積を用いた数理モデルが提案されている．これまでの数理モデルは技術的困難もあり平面上でのみ考察されてきたが, 実際のショウジョウバエの視覚中枢系は球面上に配置されていると考えられることから, 本講演ではより現実的な問題を考えるために球面上における数値計算法を説明し，現象の再現を試みる．

1　はじめに

ショウジョウバエは人間と脳の構造が類似しており，遺伝子操作が簡単であることから，生物学的実験に良く用いられる．生物の脳の神経の構造や発生機構の解明においても，ショウジョウバエを用いた研究は数多くの重要な知見を生み出してきた．その中で，ショウジョウバエの視覚中枢形成時に，神経上皮細胞から神経幹細胞への分化が波のように伝搬していく現象が観察されている．この現象は proneural wave（以降，PW）と呼ばれ，人間の脳の形成過程を理解する上で重要な現象である [3, 9]．2016 年，佐藤らにより平面上において連続系と離散系を組み合わせた PW の数理モデルが提案され，得られていた実験結果と比較して再現度が良いことが報告された [4, 7, 8]．また，離散部分が含まれる数理モデルでは現象やパターンの形成機構を解析的に調べるには困難なことが多いため，現在では離散系を合成積を用いることで連続化した数理モデルが提案されている [6].

これまでの数理モデルは技術的困難もあり，平面上でのみ考察されてきた．しかし，ショウジョウバエの視覚中枢系は球面上に配置されていると考えられることから，より現実的な数理モデルを構成するためには球面上で考えるのが妥当であり，球面上で数値計算する方法を考える必要があった．2018 年，Slevinsky らは固有値・固有関数を用いるスペクトル法を用いて，球面上の合成積を含めた反応拡散方程式が数値計算できることを示した [1, 5]．これにより，球面上における PW の数理モデルの数値計算が可能になった．

本稿では球面上での数値計算法の 1 つとして，上記のスペクトル法について言及し，第 2 章においてスペクトル法に関するアイデアを紹介する．また，第 3 章では球面上における合成積を数値計算する方法について説明する．さらに一例として，第 4 章では PW に関する数理モデルについて説明し，球面上における数値計算結果を示す.

2　球面上のスペクトル法について

この節では単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上での拡散方程式を例にとり，スペクトル法について説明する．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathbb{S}^2} u \quad \text{in } \mathbb{S}^2 \tag{1}$$

*北海道大学大学院 理学院数学専攻　E-mail：hiroshi-ishii@eis.hokudai.ac.jp
†北海道大学大学院 理学研究院数学部門
‡金沢大学 新学術創性研究機構 数理神経科学ユニット

を考える．ただし，$x \in \mathbb{S}^2$ は球面座標系 $(\lambda,\theta) \in (-1,1)\times(0,2\pi)$ を用いて，$x = (\sqrt{1-\lambda^2}\cos\theta, \sqrt{1-\lambda^2}\sin\theta,\lambda)$ と表すことにする．このとき，$\mathbb{S}^2$ 上のラプラス・ベルトラミ作用素 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ は以下のように表される：

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} u = \frac{1}{1-\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{(1-\lambda^2)\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right\}.$$

作用素 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ の固有関数として球面調和関数 $Y_l^m = Y_l^m(\lambda,\theta)$ $(l = 0, 1, 2\cdots, |m| \le l)$ が知られており，本稿では以下のように定める．

$$\begin{aligned} Y_l^m(\lambda,\theta) &:= \frac{C_l^{|m|}}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} P_l^{|m|}(\lambda), \\ P_l^m(\lambda) &:= \frac{1}{2^l l!}(1-\lambda^2)^{m/2}\frac{d^{m+l}}{d\lambda^{m+l}}\left[(\lambda^2-1)^l\right], \quad (m \ge 0), \\ C_l^m &:= \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad (m \ge 0). \end{aligned}$$

$P_l^m(\lambda)$ はルジャンドル陪関数と呼ばれる特殊関数であり，C_l^m は $C_l^m := \left(||P_l^m||_{L^2(-1,1)}\right)^{-1/2}$ を満たす定数である．球面調和関数について，以下の性質が知られている．

命題 2.1. ($\Delta_{\mathbb{S}^2}$ と Y_l^m の関係) *[1]*
- $\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m$.
- $\{Y_l^m\}$ は $L^2(\mathbb{S}^2)$ 上の完全な正規直交基底である．

この命題より，$u(t,x) \in L^2([0,\infty)\times\mathbb{S}^2)$ を球面調和関数を用いて展開すると

$$u(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} u_l^m(t)Y_l^m(x) \simeq \sum_{l=0}^{M}\sum_{m=-l}^{l} u_l^m(t)Y_l^m(x) \tag{2}$$

と表すことができる．ただし，M は十分大きな自然数であり，$u_l^m(t) = \langle u(t), Y_l^m\rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}$ である．命題 2.1. より (1) を解くためには，

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{S}^2} u \simeq \sum_{l=0}^{M}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\frac{du_l^m}{dt}(t) + l(l+1)u_l^m(t)\right\}Y_l^m(x)$$

であることから，(1) は

$$\frac{du_l^m}{dt} = -l(l+1)u_l^m, \quad (l = 0, 1, 2\cdots, M, |m| \le l)$$

を解く問題に帰着される．このように適切な固有関数系が存在すれば，偏微分方程式を解く問題が常微分方程式を解く問題に簡略化することができる．これがスペクトル法の特徴の 1 つである．

3 球面上における積分核の数値計算について

この章では，以下の発展方程式を数値計算する方法について紹介する：

$$\frac{du}{dt} = K *_{\mathbb{S}^2} u := \int_{\mathbb{S}^2} K(|x-y|)u(y)d\Omega(y). \tag{3}$$

ただし，$|\cdot|$ は 3 次元ユークリッド距離であり，$K : [0,2] \to \mathbb{R}$，$K(\sqrt{2(1-\cdot)}) \in L^1(-1,1)$，$d\Omega$ は $\mathbb{S}^2$ 上の測度とする．まず，ルジャンドル多項式 $P_l(x) = P_l^0(x)$ と球面調和関数との関係について紹介し，(3) をスペクトル法で計算する方法について説明する．

3.1 球面調和関数の性質

球面調和関数には次の加法定理と呼ばれる性質が知られている．

定理 3.1.（球面調和関数の加法定理）*[1]*

$$P_l(x\cdot y)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{k=-l}^{l}Y_l^k(x)\overline{Y_l^k(y)},\quad (x,y\in\mathbb{S}^2) \tag{4}$$

ただし，$x\cdot y$ は 3 次元ユークリッド内積とする．

(4) を用いることで，$l\geq 0, |m|\leq l, x\in\mathbb{S}^2$ について

$$\begin{aligned}Y_l^m(x)&=\sum_{k=-l}^{l}\left\langle Y_l^m, Y_l^k\right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)}Y_l^k(x)\\&=\sum_{k=-l}^{l}\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(y)Y_l^k(x)\overline{Y_l^k(y)}d\Omega(y)\\&=\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(y)\left(\sum_{k=-l}^{l}Y_l^k(x)\overline{Y_l^k(y)}\right)d\Omega(y)\\&=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(y)P_l(x\cdot y)d\Omega(y)\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$Y_l^m(x)=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(y)P_l(x\cdot y)d\Omega(y) \tag{5}$$

を得る．(5) は球面調和関数の積分表示として知られている．最後にルジャンドル多項式に関して，以下の Func-Hecke の公式が知られている．

定理 3.2. (*Func-Hecke* の公式) *[1]*
$f\in L^1(-1,1)$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbb{S}^2}f(x\cdot z)P_l(y\cdot z)d\Omega(z)=2\pi\beta_l P_l(x\cdot y), \tag{6}$$

ただし，$\beta_l=\int_{-1}^{1}f(t)P_l(t)dt$ である．

3.2 合成積のスペクトル法

合成積を含む発展方程式について，スペクトル法を適用する方法について説明する．

$x,y\in\mathbb{S}^2$ のとき，$|x-y|^2=|x|^2-2x\cdot y+|y|^2=2(1-x\cdot y)$ であることから，$\tilde{K}(x\cdot y):=K(|x-y|)=K(\sqrt{2(1-x\cdot y)})$ と定める．このとき，(5) を使うと

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2}K(|x-y|)Y_l^m(y)d\Omega(y)&=\int_{\mathbb{S}^2}\tilde{K}(x\cdot y)Y_l^m(y)d\Omega(y)\\&=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\tilde{K}(x\cdot y)\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(z)P_l(y\cdot z)d\Omega(z)d\Omega(y)\end{aligned}$$

となるが，積分の順序交換より，

$$=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}Y_l^m(z)\int_{\mathbb{S}^2}\tilde{K}(x\cdot y)P_l(y\cdot z)d\Omega(y)d\Omega(z)$$

を得る．ここで，(6) を用いることで，

$$\begin{aligned}&= 2\pi\beta_l \frac{2l+1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} Y_l^m(z)P_l(x\cdot z)d\Omega(z)\\ &= 2\pi\beta_l Y_l^m(x),\end{aligned}$$

ただし，$\beta_l = \int_{-1}^{1}\tilde{K}(t)P_l(t)dt = \int_{-1}^{1}K(\sqrt{2(1-t)})P_l(t)dt$ である．したがって，

$$\int_{\mathbb{S}^2} K(|x-y|)Y_l^m(y)d\Omega(y) = 2\pi\beta_l Y_l^m(x) \tag{7}$$

を得る．これにより，(3) を計算するには (2) より，次の常微分方程式を解く問題に帰着される．

$$\frac{du_l^m}{dt} = 2\pi\beta_l u_l^m, \quad (l = 0, 1, 2\cdots, M, |m| \le l)$$

また，K の情報は β_l に含まれていることがわかる．

4　球面上における分化の波の数値計算について

4.1　PW の数理モデル

この節では，PW の数理モデルに関する先行研究を紹介する [4, 6, 8]．近年，生物学的実験や数理モデルとを組み合わせた研究から，PW において主要な働きを持つシグナルや相互作用などの伝搬機構が明らかになりつつある [3, 4, 7, 8]．中でも分化を促進する上皮成長因子（以降，EGF），分化を抑制する Delta/Notch シグナル，分化の度合いを表す転写因子の AS-C が主要なものとして挙げられている．EGF は細胞表面において拡散することにより遠距離に情報伝達をする機能を持つ．Delta/Notch シグナルは，ある細胞で AS-C が発現すると，その周辺の細胞の AS-C の発現を抑制する機能を持つ．細胞間の相互作用と実験的に確認されている性質をもとに，2016 年に佐藤らによって以下の連続系と離散系を組み合わせたモデルが提案された [4].

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial t} &= d_e\Delta E - k_e E + a_e A(A_0 - A),\\ \dfrac{dN_{i,j}}{dt} &= -k_n N_{i,j} + d_t \displaystyle\sum_{(l,m)\in\Lambda_{i,j}} D_{l,m} - d_c N_{i,j} D_{i,j},\\ \dfrac{dD_{i,j}}{dt} &= -k_d D_{i,j} + a_d A_{i,j}(A_0 - A_{i,j}),\\ \dfrac{dA_{i,j}}{dt} &= e_a(A_0 - A_{i,j})\max\{E_{i,j} - N_{i,j}, 0\},\end{cases} \qquad x\in\Omega,\ t>0, \tag{8}$$

ここで，時刻 $t > 0$ で，計算領域は L_x, L_y を正の数として，$\Omega = [0, L_x]\times[0, L_y]$ であり，$E = E(x, y, t)$ は EGF の濃度，$N_{i,j} = N_{i,j}(t)$，$D_{i,j} = D_{i,j}(t)$ と $A_{i,j} = A_{i,j}(t)$ は，i, j 番目の細胞領域（Ω を格子上に分割したときの正方領域）における，Notch のシグナル量と Delta の発現量，AS-C の発現度とし，$d_e, k_e, a_e, k_n, d_t, d_c, k_d, a_d, e_a, A_0$ は正定数である．さらに，$\Lambda_{i,j}$ は i, j 番目の細胞領域に隣接する細胞領域の添え字の集合である．また，添え字なしの場合の未知変数は，各細胞がもつ値を領域全体へと結合した量，$E_{i,j}$ は 1 つの細胞内の E の平均の量とする．

(8) は今まで得られた実験結果の再現と整合性があり，さらに新たな現象の存在を示唆し，それが実験により確認されたことから，非常に再現度の良いモデルであると考えられる．一方で，ノイズに対しての脆弱性，離散系であることに起因する解析の困難が問題点として挙

げられた．ノイズに対しての脆弱性に関して，実際の細胞内にあるタンパク質 JAK/STAT にノイズを制御する効果があることから，数理モデルに JAK/STAT の効果を加え，よりノイズに強いモデルが提案された [7, 8, 9]．一方，連続化を行うためには N の時間発展に含まれる第 2 項を空間連続な項にしなければならない．そこで，細胞 1 つの直径を h と考え，隣接する細胞から影響を受ける Delta の範囲の幅を σ と考えることで積分核によって記述できる．これにより，以下の 4 成分系の連続系の数理モデルが提案されている [6]．

$$
(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} &= d_e \Delta E - k_e E + a_e A(A_0 - A), \\ \dfrac{dN}{dt} &= -k_n N + d_t K * D - d_c N D, \\ \dfrac{dD}{dt} &= -k_d D + a_d A(A_0 - A), \\ \dfrac{dA}{dt} &= e_a (A_0 - A) \max\{E - N - J, 0\} \end{cases} \qquad \text{in } \Omega
$$

ただし，$J = J(x, y)$ は JAK/STAT の濃度であり，外から与えられているものとする．また，積分核 K は以下のように定める．

$$
K(x) = \begin{cases} 1 & x \in B(x, h + \sigma) \backslash B(x, h), \\ 0 & otherwise. \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^2
$$

今回は (8) で考えられている問題点を解消した，耐摂動性を有し，連続化されたモデル (9) を球面上で数値計算する．

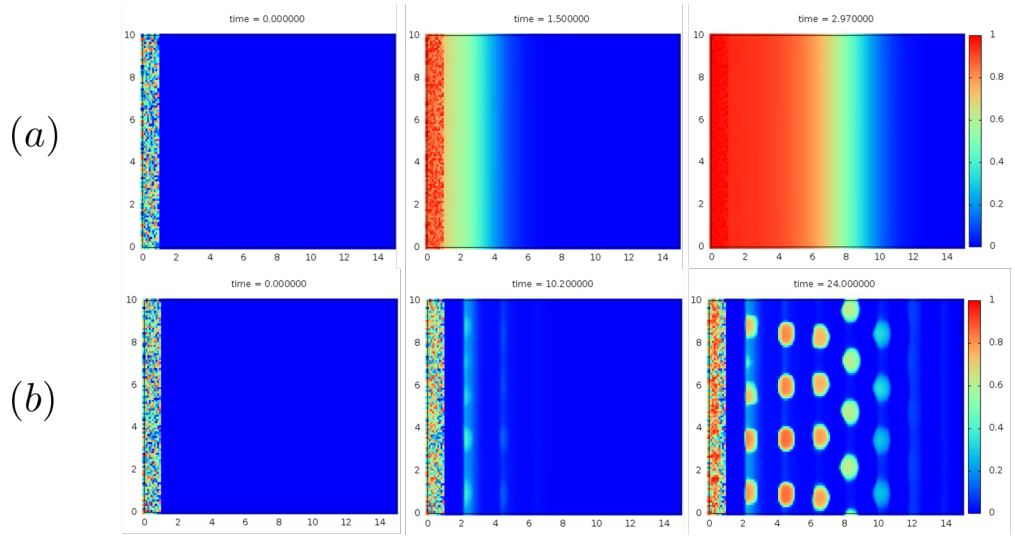


図 1:　2 次元領域 Ω における (9) の A の数値計算結果．左図から右図にかけて時間発展をしており，赤色が高濃度，青色が低濃度を表す．また，x 方向 (左右) は左側が斉次ノイマン条件，右側は斉次ディリクレ条件，y 方向（上下）は周期境界条件である．パラメーターは $d_e = 2.0$, $k_e = 1.0$, $k_n = 3.0$, $d_t = 2.0$, $d_c = 0.5$, $k_d = 1.5$, $a_d = 1.0$, $e_a = 10.0$，$A_0 = 1.0$, $h = 1$, $\sigma = 0.25$，$J \equiv 0$ となっている．(a) $a_e = 2.0$, PW モード．(b) $a_e = 0.5$, ごま塩モード．

4.2 球面上における数値計算結果

以下の方程式の数値計算法について検討する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} = d_e \Delta_{r\mathbb{S}^2} E - k_e E + a_e A(A_0 - A), \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = -k_n N + d_t K *_{r\mathbb{S}^2} D - d_c N D, \\ \dfrac{\partial D}{\partial t} = -k_d D + a_d A(A_0 - A), \\ \dfrac{\partial A}{\partial t} = e_a (A_0 - A) \max\{E - N - J, 0\} \end{cases} \quad \text{in } r\mathbb{S}^2$$

ただし，$r\mathbb{S}^2$ は半径 $r > 0$ の球面，K は $K : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ の関数であり，

$$K(x) = \begin{cases} 1 & h < x \le h + \sigma \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

と置く．このとき，

$$\begin{aligned} \Delta_{r\mathbb{S}^2} &= \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^2}, \\ K *_{r\mathbb{S}^2} u &= \int_{r\mathbb{S}^2} K(|x - y|) u(y) d\Omega_r(y) \\ &= r^2 \int_{\mathbb{S}^2} K(r|x - y|) u(y) d\Omega(y) \end{aligned}$$

であるから，$K_r(|\cdot|) := K(r|\cdot|)$ と定めることで，単位球面上での数値計算に帰着する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} = \dfrac{d_e}{r^2} \Delta_{r\mathbb{S}^2} E - k_e E + a_e A(A_0 - A), \\ \dfrac{dN}{dt} = -k_n N + d_t r^2 K_r *_{\mathbb{S}^2} D - d_c N D, \\ \dfrac{dD}{dt} = -k_d D + a_d A(A_0 - A), \\ \dfrac{dA}{dt} = e_a (A_0 - A) \max\{E - N - J, 0\}, \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{S}^2. \tag{10}$$

方程式 (10) の空間相互作用は第 1 式の EGF の拡散，第 2 式の Delta の合成積の部分だけである．つまりは，E，N の時間発展はスペクトル法で，D，A の時間発展はオイラー法で計算すれば十分であることがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} E_l^m(t) Y_l^m(x), & N(t,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} N_l^m(t) Y_l^m(x) \\ D(t,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} D_l^m(t) Y_l^m(x), & ND(t,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} S_l^m(t) Y_l^m(x) \\ A(A_0 - A)(t,x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} F_l^m(t) Y_l^m(x), \end{aligned}$$

とおくことにより，(10) の第 1 式，第 2 式は各時間ステップにおいて以下の常微分方程式を解く問題に帰着される．

$$\begin{cases} \dfrac{dE_l^m}{dt} = -\left\{ \dfrac{d_e}{r^2} l(l+1) + k_e \right\} E_l^m + a_e F_l^m, \\ \dfrac{dN_l^m}{dt} = -k_n N_l^m + 2\pi \beta_l d_t r^2 D_l^m - d_c S_l^m \end{cases} \tag{11}$$

ただし，$\beta_l = \int_{-1}^{1} K_r(\sqrt{2(1-t)})P_l(t)dt$ である．実際に数値計算をすることにより，(図 1) と同様のパターンを球面上でも再現できていることがわかる．(図 2)

5　まとめと展望

第 2 章，第 3 章では球面上のスペクトル法について，簡易的な例で議論を行ったが，球面調和関数の性質を用いることで，合成積を含む反応拡散方程式でも数値計算可能であることがわかる．これにより，多くのモデルが球面上で数値計算可能となり，その一例として第 4 章で分化の波のモデルを数値計算し，今までの結果と整合性があることを示した．実際のショウジョウバエの視覚中枢は球面であると考えられることから，より現象に近いモデルを考えられるようになったといえる．

一方，実現象では細胞分裂することにより，初期の視覚中枢と終期の視覚中枢は約 5 倍ほどサイズが変わるため，視覚中枢の大きさにより PW が曲率の影響を受けることが予想される．このことから，球面の半径が時間発展するような数値計算方法について考察し，実現象に示唆を与えるものについて考えていきたい．また，PW は半球面で観察されていることから，より実験結果に合わせたモデルにするために，境界条件を課したうえで半球面上における数値計算を行いたい．

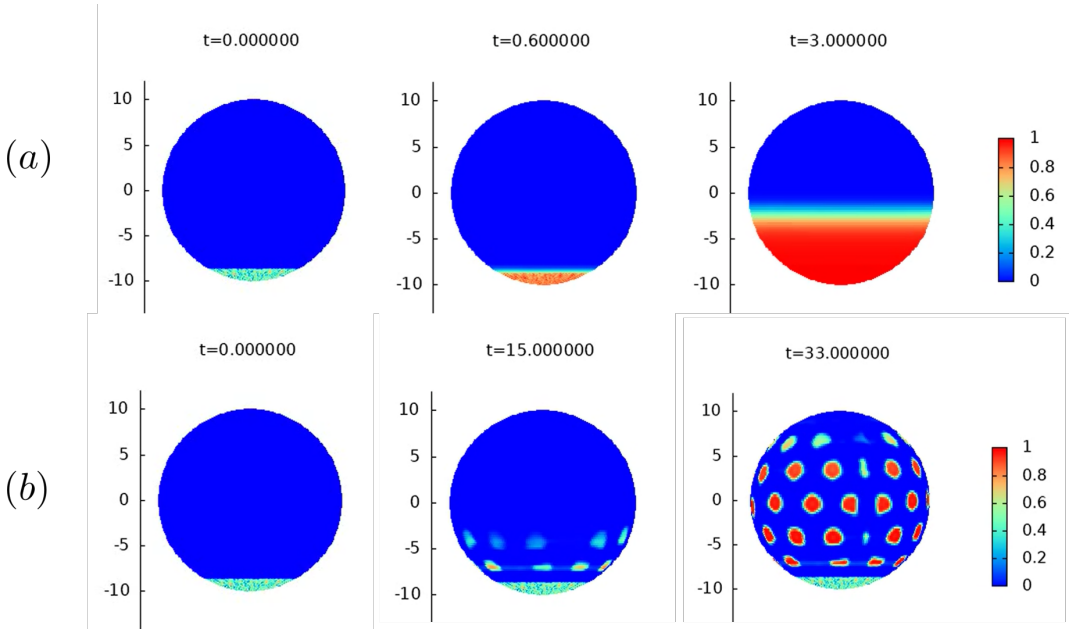


図 2:　$\mathbb{S}^2$ における (10) の A の数値計算結果．左図から右図にかけて時間発展をしており，赤色が高濃度，青色が低濃度を表す．パラメーターは $d_e = 2.0$, $k_e = 1.0$, $k_n = 3.0$，$d_t = 1.0$, $d_c = 0.5$, $k_d = 1.5$, $a_d = 1.0$, $e_a = 10.0$，$A_0 = 1.0$, $h = 2$, $\sigma = 0.5$，$r = 10.0$，$J \equiv 1.0 \times 10^{-3}$ として与えている．(a) $a_e = 5.0$，PW モード．(b) $a_e = 0.5$, ごま塩モード．

参考文献

[1] K. Atkinson, W. Han，Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction，*Springer*, Berlin (2012)

[2] 石岡圭一，スペクトル法による数値計算入門，東京大学出版会 (2004)

[3] M. Sato, T. Suzuki, Y. Nakai, Waves of differentiation in the fly visual system, *Developmental Biology*, Vol. 380, pp. 1-11 (2013)

[4] M. Sato, T. Yasugi, Y. Minami, T. Miura, and M. Nagayama, Notch-mediated lateral inhibition regulates proneural wave propagation when combined with EGF-mediated reaction diffusion, *Proc Natl Acad Sci USA Published online*, pp. E5153-E5162 (2016)

[5] R. M. Slevinsky, H. Montanelli, Q. Du A spectral method for nonlocal diffusion operators on the sphere. *J. Comp. Phys.* ,372, 893911. (2018)

[6] 田中吉太郎，八杉徹雄，佐藤純，栄伸一郎，分化の波に対する数理モデルの連続化と Planar 進行波解への数理解析，第 14 回数学総合若手研究集会 Hokkaido university technical report series in mathematics, 173, p447-456 (2018)

[7] 田中吉太郎，八杉徹雄，佐藤純，長山雅晴，栄伸一郎, 分化の波のノイズ抑制機構に対する数理モデリングと実験からのアプローチ, 計算工学講演会論文集 Vol. 22 (2017 年)

[8] Y. Tanaka, T. Yasugi, M. Nagayama, M. Sato, and Shin-Ichiro Ei, JAK/STAT guarantees robust neural stem cell differentiation by shutting off biological noise, *Scientific reports, 8, online* (2018).

[9] T. Yasugi, D. Umetsu, S. Murakami, M. Sato and T. Tabata, Drosophila optic lobe neuroblasts triggered by a wave of proneural gene expression that is negatively regulated by JAK/STAT, *Development*, Vol. 135, pp.1471-1480 (2008)

量子可積分系におけるダイナミクスの厳密計算

佐藤 純 (Jun Sato)
東京大学 先端科学技術研究センター

概 要

本レポートでは，量子可積分系として知られる XXZ 模型を例にとって，局所物理量の実時間ダイナミクスを厳密に計算する試みについて紹介する．XXZ 模型は，ベーテ仮説法によって系統的に厳密なエネルギー固有状態が構成される．有限温度の性質については，ストリング仮説を用いた熱力学的ベーテ仮説や，虚時間経路積分の方法を用いた量子転送行列法による解析がよく知られている．一方，開放端 XXZ 鎖は，境界ヤンバクスター方程式の解を用いた代数的ベーテ仮説により対角化可能である．最近，実時間の量子転送行列法と，境界ヤンバクスター方程式の手法を合わせ，ある特定の初期状態からの物理量のダイナミクスを厳密に計算する手法が発展している．本レポートでは，これらの研究成果について簡単な解説を試みる．

1 はじめに

実験室内に箱が置かれ，その中に気体が閉じ込められているとする．気体は最初，温度分布，分子数密度分布が不均一な非平衡状態にあったとしよう．すると，しばらく観察すれば，気体分子同士の衝突などによる相互作用により，数密度は一様となる．また，箱の壁を通して外界と熱的な相互作用することにより，気体の温度分布もまた室温と同じ値に一様となるであろう．すなわち，系は非平衡な初期状態から平衡状態へと緩和する．従来の平衡統計力学はこのような平衡状態にある系を解析の対象とし，数々の成功を収め磐石な基盤の元に確立した理論体系を為している．それに対し，興味ある現象のほとんどは非平衡であるにも関わらず，非平衡統計力学は磐石な体系化からは程遠いのが現状である．

ここでは簡単のため，外界と相互作用しない孤立した系を考える．量子力学の基本原理により時間発展する孤立量子系を考えると，通常の意味での緩和は起こらない．ところが，局所的な物理量に注目すると，注目する部分系にとって周囲の全系が「熱浴」として作用し，その期待値はある値に緩和することが期待される．ミクロな力学法則により時間発展した後に到達する定常状態が，平衡統計力学の枠組みで記述されるのか，という観点から，孤立量子系のダイナミクスが近年活発に研究されている．一方，相互作用する量子多体系において，物理量の時間発展を精度よく計算することは困難を極める．本研究では，厳密計算の可能性を秘めた量子可積分系を取り扱う．

有限自由度のハミルトン力学系の場合，自由度と同じ数の保存量があれば運動方程式は積分可能となり，古典可積分系と呼ばれる．量子系の場合には，可積分の定義は古典系の場合ほど明確ではない．しかし，厳密に系統的に対角化可能で無限個の保存量を有した一連の量子多体系が存在し，それを量子可積分系と呼ぶ．本レポートでは，代表的な量子可積分系である XXZ 模型を例にとって，量子ダイナミクスの厳密計算の研究を紹介する．

2 XXZ 模型とベーテ仮説

2.1 XXZ 模型

複素 2 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ 上の Hermite 線形作用素であるスピン $S^\alpha : V \to V$ $(\alpha = x, y, z)$ を

$$S^x := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad S^z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

で定める．行列 X, Y に対する交換子積を $[X, Y] := XY - YX$ で定める．これらの 2×2 行列は角運動量の交換関係

$$[S^x, S^y] = \mathrm{i}S^z, \quad [S^y, S^z] = \mathrm{i}S^x, \quad [S^z, S^x] = \mathrm{i}S^y \tag{2.2}$$

を満たす．V はひとつのスピン空間を表す．これが，1 列に L 個並んだ空間，すなわち V を L 個テンソル積した空間 $V^{\otimes L} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{L \text{ 個}}$ を考える．この上の作用素として，$S_n^\alpha : V^{\otimes L} \to V^{\otimes L}$ $(\alpha = x, y, z)$ を

$$S_n^\alpha := \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{n-1 \text{ 個}} \otimes S^\alpha \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{L-n \text{ 個}} \tag{2.3}$$

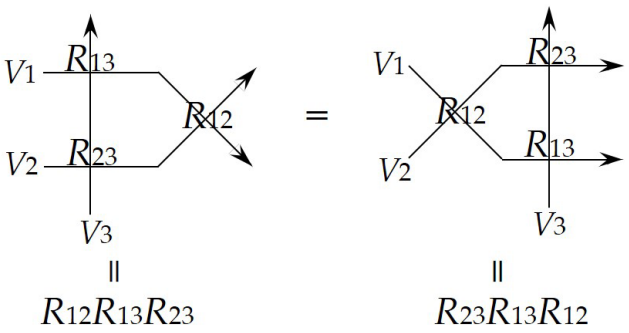


図 1: Yang-Baxter 関係式

で定める．ただし，$\mathbb{1}$ は 2×2 の単位行列 $\mathbb{1}:=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である．すなわち，S_n^α は，n 番目のスピン空間に S^α として作用し，その他の空間には恒等演算子として作用する．

1 次元スピン 1/2 ハイゼンベルク XXZ 模型は，1 次元格子に並んだ L 個のスピン $\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2,\cdots,\mathbf{S}_L$ が最近接で交換相互作用する模型であり，以下のハミルトニアンで与えられる

$$\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}=\sum_{n=1}^{L}(S_n^xS_{n+1}^x+S_n^yS_{n+1}^y+\Delta S_n^zS_{n+1}^z). \tag{2.4}$$

ただし，周期境界 $S_{L+1}^\alpha=S_1^\alpha$ であるとする．隣同士のスピンの交換相互作用は $\mathbf{S}_n\cdot\mathbf{S}_{n+1}$ と内積の形で書けるが，これを z 成分だけ異方性パラメータ Δ で歪めたような模型になっている．

2.2 ベーテ仮説

ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}$ は $V^{\otimes L}$ 上の作用素であり，$2^L\times 2^L$ という巨大行列であるが，ベーテ仮設と呼ばれる方法により系統的に厳密に対角化される [1, 2, 3]．以下，簡単に流れを記述する．まず，$V_j\otimes V_k$(j 番目と k 番目のスピン) 上の作用素である R 行列を

$$R_{jk}(\lambda_j,\lambda_k):=\begin{pmatrix}a(\lambda_j,\lambda_k)&0&0&0\\0&b(\lambda_j,\lambda_k)&c(\lambda_j,\lambda_k)&0\\0&c(\lambda_j,\lambda_k)&b(\lambda_j,\lambda_k)&0\\0&0&0&a(\lambda_j,\lambda_k)\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

で定める．ただし，

$$\begin{aligned}a(\lambda_j,\lambda_k)&:=\sinh(\lambda_j-\lambda_k+\eta),\\ b(\lambda_j,\lambda_k)&:=\sinh(\lambda_j-\lambda_k),\\ c(\lambda_j,\lambda_k)&:=\sinh\eta\end{aligned} \tag{2.6}$$

であり，η は

$$\cosh\eta=\Delta \tag{2.7}$$

で決まる異方性パラメータである．これは，$V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 上の作用素として，関係式

$$R_{12}(\lambda_1,\lambda_2)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{23}(\lambda_2,\lambda_3)=R_{23}(\lambda_2,\lambda_3)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{12}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{2.8}$$

を満たす (図 1 を参照)．これを Yang-Baxter 関係式と言う [4, 5, 6]．そして，モノドロミー行列 $\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)$ を図 2 で定義する．具体的に式で書くと，

$$\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)=R_{0L}(\lambda,\xi_L)\cdots R_{02}(\lambda,\xi_2)R_{01}(\lambda,\xi_1) \tag{2.9}$$

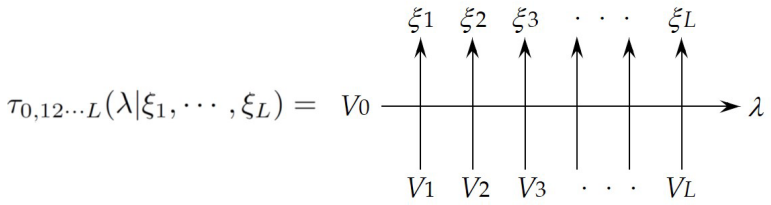


図 2: モノドロミー行列

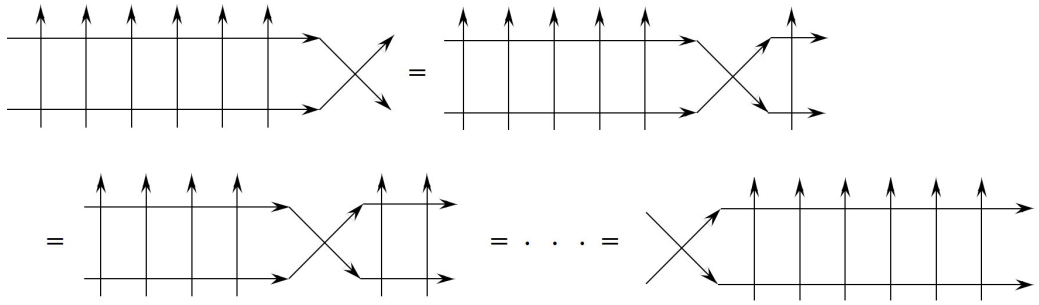


図 3: Yang-Baxter 関係式を次々と適用することによって，両者は等しいことが分かる．

となる．$\tau_{0,12\cdots L}$ の下の添え字 $0,12\cdots L$ は，$\tau_{0,12\cdots L}$ が空間 $V_0\otimes V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_L$ に作用する演算子であることを表している．次に，転送行列 T を，モノドロミー行列において空間 V_0 でトレースを取ったもので定義する：

$$T_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) := \mathrm{tr}_0\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) \tag{2.10}$$

$T_{12\cdots L}$ の下の添え字 $12\cdots L$ は，$T_{12\cdots L}$ が空間 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_L$ に作用する演算子であることを表している．ここで，空間 V_0 を補助空間，空間 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_L$ を量子空間という．後者は量子ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}$ が作用する空間であることが名前の由来である．すると，Yang-Baxter 関係式の帰結として，関係式

$$R_{00'}(\lambda,\mu)\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu) = \tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu) \tag{2.11}$$

が得られ (図 3)，異なるパラメータを持つ転送行列が交換すること

$$\begin{aligned} T_0(\lambda)T_{0'}(\mu) &= \mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu)\right] \\ &= \mathrm{tr}_{00'}\left[R_{00'}(\lambda,\mu)^{-1}\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu)\right] \\ &= \mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu)R_{00'}(\lambda,\mu)^{-1}\right] \\ &= \mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)\right] \\ &= T_{0'}(\mu)T_0(\lambda) \end{aligned} \tag{2.12}$$

が分かる．すなわち，我々は任意パラメータ λ を含んだ可換な行列 $T_0(\lambda)$ を得たことになる．これを λ で展開することにより，互いに可換な演算子の列を無限個得ることができる．実はその最初の 2 つが，運動量とハミルトニアンであり，我々はハミルトニアンと互いに可換な演算子，すなわち保存量を無限に得たことになる．ハミルトニアンは転送行列を使って

$$\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}} = \frac{\varphi(\eta)}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\log T(\lambda)\Big|_{\lambda=\eta/2} \tag{2.13}$$

と書かれる．

さて，モノドロミー行列 $\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)$ を補助空間 V_0 で 2×2 の行列で表示して，その 4 つの行列要素を A,B,C,D と書こう：

$$\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) = \begin{pmatrix} A_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) & B_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) \\ C_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) & D_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) \end{pmatrix}_0. \tag{2.14}$$

以下，量子空間の添え字はしばしば省略して $A(\lambda)=A_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)$ 等と書く．すると，転送行列 $T_0(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda)$ の固有ベクトルが，$\prod_{\ell=1}^N B(z_\ell)|0\rangle$ によって構成されることが示される．より正確に言うと，N 個のパラメータ $z_1,\cdots,z_N$ がベーテ方程式

$$\prod_{n=1}^{L}\frac{\sinh(z_j-\xi_n+\eta)}{\sinh(z_j-\xi_n)}=\prod_{\ell\neq j}^{N}\frac{\sinh(z_j-z_\ell+\eta)}{\sinh(z_j-z_\ell-\eta)}\quad\text{for}\quad j=1,2,\cdots,N \tag{2.15}$$

を満たすとき，N 粒子状態 $\prod_{\ell=1}^N B(z_\ell)|0\rangle$ および $\langle 0|\prod_{\ell=1}^N C(z_\ell)$ は転送行列 $T(\lambda)$ の固有ベクトルとなり，固有方程式は

$$\begin{aligned}T(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}B(z_\ell)\right)|0\rangle&=t(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}B(z_\ell)\right)|0\rangle,\\ \langle 0|\left(\prod_{\ell=1}^{N}C(z_\ell)\right)T(\lambda)&=t(\lambda)\langle 0|\left(\prod_{\ell=1}^{N}C(z_\ell)\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

で与えられる．ただし，固有値を

$$t(\lambda):=a(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}f(z_\ell,\lambda)\right)+d(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}f(\lambda,z_\ell)\right), \tag{2.17}$$

$$a(\lambda)=a_{1\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)=\prod_{n=1}^{L}a(\lambda,\xi_n), \tag{2.18}$$

$$d(\lambda)=d_{1\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)=\prod_{n=1}^{L}b(\lambda,\xi_n) \tag{2.19}$$

と書いた．このようにして転送行列が，すなわちハミルトニアンが対角化された．

3　量子ダイナミクスの厳密計算

量子ダイナミクスの最も簡単な例として，ここではロシュミットエコー

$$\langle\Psi_0|\exp[-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}]|\Psi_0\rangle \tag{3.1}$$

を考えよう [7]．すなわち，ある非平衡な初期状態 $|\Psi_0\rangle$ からスタートし，ユニタリ時間発展作用素 $\exp[-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}]$ により時間 t だけ発展した後，もとの状態に戻ってくる (エコー) ような確率振幅である．ここで，時間発展を経路積分表示で

$$\begin{aligned}\exp[-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}]&=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}}{N}\right)^N\\ &=\lim_{N\to\infty}\frac{[T_0(-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)T_0(-\eta+\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)]^N}{\sinh(\eta-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)^{2LN}}\end{aligned} \tag{3.2}$$

と表そう．すると，実時間の量子転送行列法により，ロシュミットエコーは

$$\langle\Psi_0|\exp[-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}]|\Psi_0\rangle=\lim_{N\to\infty}\mathrm{tr}\mathcal{T}^{L/2},\quad \mathcal{T}:=\frac{\langle\psi_0|T^{\mathrm{QTM}}(0)\otimes T^{\mathrm{QTM}}(0)|\psi_0\rangle}{\sinh(\eta-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)^{2LN}} \tag{3.3}$$

と書かれる．ただし，初期状態 $|\Psi_0\rangle$ は 2 スピンのテンソル積 $|\Psi_0\rangle=(|\psi_0\rangle)^{\otimes L/2}$ で書けるとし，T^{QTM} は量子転送行列 (Quantum Transfer Matrix)

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{QTM}}(u):&=R_{2N,0}(u-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)R_{2N-1,0}(u+\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N-\eta)\cdots\\ &\times R_{2,0}(u-\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N)R_{1,0}(u+\mathrm{i}t\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}\sinh\eta/4N-\eta)\end{aligned} \tag{3.4}$$

である．行列 $\mathcal{T}$ の対角化は，境界 Yang-Baxter 方程式 [8, 9]

$$R_{12}(\lambda_1-\lambda_2)K_1(\lambda_1)R_{12}(\lambda_1+\lambda_2)K_2(\lambda_2)=K_2(\lambda_2)R_{12}(\lambda_1+\lambda_2)K_1(\lambda_1)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2) \tag{3.5}$$

と境界転送行列

$$T(u) = \mathrm{tr}_0\{K_1(u)T_1(u)K_2(u)T_2(u)\} \tag{3.6}$$

により行うことができる．ただし，$K_j(u)$ は境界反射行列であり，初期状態 $|\psi_0\rangle$ ごとに選ばれる．以上の方法により，ロシュミットエコーの計算が，境界転送行列の最大固有値の計算に帰着した．考える初期状態ごとにこの計算が実行出来れば，厳密なロシュミットエコーが得られることになる．

4 まとめ

本レポートではまず，XXZ 模型のベーテ仮説による厳密解を紹介した．その後，量子転送行列法と境界 Yang-Baxter 関係式を合わせた手法によるロシュミットエコーの計算方法を簡単に紹介した．ロシュミットエコーに関しては長時間の具体的計算も含めて急速に研究が進展している [7] が，相関関数の時間発展に関しては全くの手付かずであり，今後の重要な研究課題として残されている [10]．

参考文献

[1] H.A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.

[2] M. Takahashi, "*Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*", Cambridge University Press, 1999.

[3] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, "*Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*", Cambridge University Press, 1993.

[4] C.N. Yang, Phys. Rev. **168** (1968) 1920.

[5] R.J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832.

[6] R.J. Baxter, "*Exactly solved models in statistical mechanics*" (Academic Press, London, 1982)

[7] L. Piroli, B. Pozsgay, E. Vernier, J. Stat. Mech. (2017) 023106.

[8] E.K. Sklyanin J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) 2375.

[9] N. Kitanine, K.K. Kozlowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov and V. Terras J. Stat. Mech. P10009 (2007).

[10] J. Sato, in preparation.

索 引

■ア行
相原 祐太, 403
浅尾 泰彦, 271
浅野 喜敬, 217
安部 文人, 365
新井 裕太, 325
石井 宙志, 631
石井 裕太, 379
石川 彩香, 563
石本 和基, 553
伊勢 彩夏, 223
伊東 良純, 109
伊縫 寛治, 305
今川 和人, 593
今西 翔一郎, 605
井元 隆史, 499
植田 優基, 419
梅澤 瑠奈, 575
榎吉 奏子, 169
大山 人紀, 197
奥村 聡, 441
乙戸 勇大, 183
小原 まり子, 545
■カ行
笠原 健吾, 449
梶浦 大起, 491
梶原 唯加, 457
数川 大輔, 207
上島 芳倫, 515
Cavallina Lorenzo, 525
北川 めぐみ, 399
喜多 航佑, 319
興川 遼大, 587
行田 康晃, 83
草本 舜輔, 507
久保田 匠, 21
神代 真也, 103
紅村 冬太, 369
小林 和志, 247
■サ行
齋藤 耕太, 495
桜井 一誓, 599
佐竹 翔平, 79
佐藤 純, 639
佐藤 雄一郎, 173
佐藤 悠介, 151
佐野 薫, 71
更科 明, 75
澤田 友佑, 437
白川 匠, 191
祐川 翼, 615
須田 智晴, 3
鷲見 拳, 257
須山 雄介, 43
宋 珠愛, 115
■タ行
田内 大渡, 281
高橋 典寿, 277
土谷 昭善, 125
寺本 圭佑, 11
照屋 靖志, 201
豊川 永喜, 483
Tran Tan Nhat, 93
■ナ行
中井 拳吾, 431
中原 智弘, 425
中村 憲史, 385
中屋敷 亮太, 295
永井 渡, 237
野ヶ山 徹, 339
■ハ行
早田 裕貴, 567
原 健太郎, 415
朴 佳南, 333
福田 瑞季, 229
藤田 直樹, 63
藤原 祥吾, 147
堀内 遼, 581
■マ行
松坂 俊輝, 53
松村 英樹, 557
三浦 達彦, 31
三栖 邦康, 357
水上 雅昭, 289
水野 勇磨, 263
向井 重雄, 119
本永 翔也, 475
森 章, 161
森 遥, 535

■ヤ行
矢澤 明喜子, 139
谷地村 敏明, 391
山中 祥五, 465
弓林 司, 625
吉川 翔, 135
吉田 啓佑, 347
■ラ行
■ワ行
渡邉 天鵬, 313