



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第12回関数空間セミナー報告集（北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）
Author(s)	宮島, 静雄; 竹尾, 富貴子; 中路, 貴彦
Description	2003年12月24日（水）～12月26日（金）（会場：お茶の水女子大学理学部）北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 80, 1
Issue Date	2004-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/748
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/739
Type	departmental bulletin paper
File Information	80.pdf



第12回 関数空間セミナー報告集

(北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛)

2003年12月24日(水)～12月26日(金)

(会場:お茶の水女子大学理学部)

代表者:宮 島 静 雄 (東理大・理)

竹 尾 富貴子 (お茶大・理)

中 路 貴 彦 (北 大・理)

Series #80. March, 2004

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #53 Y. Giga (Ed.), Proceedings of the 23rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 1998.
- #54 N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 122 pages. 1998.
- #55 T. Ozawa and H.-F. Yamada (Eds.), 1997 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 83 pages. 1998.
- #56 Y. Giga, 界面ダイナミクス-曲率の効果, 講義録, 48 pages. 1998.
- #57 J. Inoue (Ed.), 第 7 回関数空間セミナー報告集, 138 pages. 1999.
- #58 Y. Giga and R. Kobayashi (Eds.), Abstracts of Sapporo Symposium on Anisotropic Effects in a Crystal Growth Problem and its Mathematical Analysis (SAM), 51 pages. 1999.
- #59 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 24th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 61 pages. 1999.
- #60 I. Tsuda and N. Kawazumi (Eds.), 1998 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 55 pages. 1999.
- #61 T. Ozawa (Ed.), Proceedings of Sapporo Guest House Minisymposium on Nonlinear Wave Equations, 67 pages. 1999.
- #62 S. Miyajima, T. Takeo and J. Inoue (Eds.), 第 8 回関数空間セミナー報告集, 96 pages. 2000.
- #63 K. Ono and N. Honda (Eds.), 1999 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 43 pages. 2000.
- #64 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 25th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 55 pages. 2000.
- #65 H. Nakamura (Ed.), ガロア・タイヒミュラー群の LEGO 理論, 37 pages. 2000.
- #66 J. Inoue et al (Eds.), 関数空間セミナー報告集 2000, 134 pages. 2001.
- #67 Y. Giga and H. Yamashita (Eds.), 2000 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 61 pages. 2001.
- #68 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 26th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2001.
- #69 M. Matsumoto, 基本群へのガロア作用, 50 pages. 2001.
- #70 T. Nakazi (Ed.), 第 10 回 関数空間セミナー報告集, 97 pages. 2002.
- #71 Y. Giga (Ed.), Surface Evolution Equations - a level set method, 223 pages. 2002.
- #72 T. Suwa and T. Yamanouchi (Eds.), 2001 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 44 pages. 2002.
- #73 T. Jimbo, T. Nakazi and M. Hayashi (Eds.), 第 11 回 関数空間セミナー報告集, 135 pages. 2003.
- #74 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo and G. Nakamura (Eds.), Partial Differential Equations, 51 pages. 2002.
- #75 D. Matsushita (Ed.), Proceedings of the workshop "Hodge Theory and Algebraic Geometry", 191 pages. 2003.
- #76 M. Hayashi and G. Ishikawa (Eds.), 2002 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 34 pages. 2003.
- #77 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura(Eds.), Proceedings of the 28th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2003.
- #78 S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada (Eds.), The 12th MSJ-IRI "Singularity Theory and Its Applications" ABSTRACTS, 291 pages. 2003.
- #79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 "Evolution Equations", 31 pages. 2003.

第12回 関数空間セミナー報告集

(北大 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛)

2003 年 12 月 24 日 (水) ~ 12 月 26 日 (金)

(会場: お茶の水女子大学理学部)

代表者: 宮島 静雄 (東理大・理)

竹尾富貴子 (お茶大・理)

中路 貴彦 (北大・理)

Seminar on Function Spaces, 2003

CONTENTS

Approximate Solutions of Equations by Using Reproducing Kernel Theory and Tikhonov Regularization	4
S.Saitoh (Gunma University)	
T.Matsuura (Gunma University)	
A linear operator in Hilbert space and its Hyers-Ulam stability	10
G.Hirasawa (Nippon Institute of Technology)	
T.Miura (Yamagata University)	
S.Takahasi (Yamagata University)	
QUASISIMILARITY FOR LOG-HYPONORMAL OPERATORS	16
K.Tanahashi (Tohoku Pharmaceutical University)	
I.H.Jeon (Ehwa Women's University)	
A.Uchiyama (Sendai National College of Technology)	
On ∞ -hyponormal operators	22
S.Miyajima (Tokyo University of Science)	
I.Saito (Tokyo University of Science)	
Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups	27
H.Shindoh (Tokyo University of Science)	

Higher order uniformly elliptic differential operators	32
K.Nagaoka (Tokyo University of Science)	
Relations between two operator inequalities via operator means	36
M.Ito (Tokyo University of Science)	
Relations among operator orders and operator inequalities	42
M.Yanagida (Tokyo University of Science)	
M.Ito (Tokyo University of Science)	
T.Yamazaki (Kanagawa University)	
PARAMETRIC EXTENSIONS OF SHANNON INEQUALITY AND ITS REVERSE ONE IN HILBERT SPACE OPERATORS	48
T.Furuta (Tokyo University of Science)	
SOME EXTENSIONS OF KANTOROVICH TYPE INEQUALITIES	54
M.Giga (Nippon Medical School)	
Hanner-type inequality and uniform non-squareness for Banach spaces	60
Y.Takahashi (Okayama Prefectural University)	
M.Kato (Kyushu Institute of Technology)	
Square-root problem in $C(X)$ and the Čech cohomology	64
S.Miyajima (Tokyo University of Science)	
On the structure of linear isometries between noncommutative L^p spaces (Introduction to results of D. Sherman)	74
K.Watanabe (Niigata University)	
The integration operators on BMOA-type spaces and Dirichlet spaces	80
R.Yoneda (Aichi University of Education)	

Generalized Riesz Projections and Toeplitz Operators	86
T.Nakazi (Hokkaido University)	
T.Yamamoto (Hokkai-Gakuen University)	
Invariant Subspace of Finite Codimension and Uniform Algebras	92
T.Nakazi (Hokkaido University)	
T.Osawa (Asahikawa National College of Technology)	
Estimates of the α -Riesz potentials with weight in metric spaces	96
A.Iwamura (Ochanomizu University)	
H.Watanabe (Ochanomizu University)	
An operator transform from class A to the class of hyponormal operators and its application	101
T.Yamazaki (Kanagawa University)	
M.Chō (Kanagawa University)	
On the Hyers-Ulam-Rassias stability of first order linear differential operator with constant coefficient	107
T.Miura (Yamagata University)	
S.Takahasi (Yamagata University)	
S.M.Jung (Hong-Ik University)	
Which weighted composition operators on uniform algebras have the Hyers-Ulam stability?	112
H.Takagi (Shinshu University)	
T.Miura (Yamagata University)	
S.Takahasi (Yamagata University)	
Semi-commutativity and inequality	117
S.Takahasi (Yamagata University)	
T.Miura (Yamagata University)	

Approximate Solutions of Equations
by Using Reproducing Kernel Theory and Tikhonov
Regularization

(再生核と Tikhonov の正則化法を用いた
方程式の近似解法)

S. Saitoh and T. Matsuura (Gunma University)
(群馬大学工学部 齋藤三郎, 松浦 勉)
e-mail address: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

1 Introduction

In my talk, I will present prototype examples with figures of the general theory in this abstract based on [9,10]. At first, we recall a fundamental theorem for the best approximation by the functions in a reproducing kernel Hilbert space (RKHS) based on [1,3,8].

Let E be an arbitrary set, and let H_K be a RKHS admitting the reproducing kernel $K(p, q)$ on E . For any Hilbert space \mathcal{H} we first consider a bounded linear operator L from H_K into \mathcal{H} . Then, we shall consider the best approximate problem

$$\inf_{f \in H_K} \|Lf - \mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} \quad (1.1)$$

for a member \mathbf{d} of \mathcal{H} . Then, we have

Proposition 1.1 *For a member \mathbf{d} of \mathcal{H} , there exists a function \tilde{f} in H_K such that*

$$\inf_{f \in H_K} \|Lf - \mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} = \|L\tilde{f} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} \quad (1.2)$$

if and only if, for the RKHS H_k defined by

$$k(p, q) = (L^*LK(\cdot, q), L^*LK(\cdot, p))_{H_K}, \quad (1.3)$$

$$L^*\mathbf{d} \in H_k. \quad (1.4)$$

Furthermore, if the existence of the best approximation \tilde{f} satisfying (1.2) is ensured, then there exists a unique extremal function f^ with the minimum norm in H_K , and the function f^* is expressible in the form*

$$f_{\mathbf{d}}^*(p) = (L^*\mathbf{d}, L^*LK(\cdot, p))_{H_K} \quad \text{on } E. \quad (1.5)$$

In Proposition 1.1, note that

$$(L^*\mathbf{d})(p) = (L^*\mathbf{d}, K(\cdot, p))_{H_K} = (\mathbf{d}, LK(\cdot, p))_{\mathcal{H}}; \quad (1.6)$$

that is, $L^*\mathbf{d}$ is expressible in terms of the known \mathbf{d} , L , $K(p, q)$ and \mathcal{H} . In Proposition 1.1, even when $L^*\mathbf{d}$ does not belong to H_k , the function

$$f_{\mathbf{d}}^{**}(p) = (\mathbf{d}, LL^*LK(\cdot, p))_{\mathcal{H}} \quad (1.7)$$

is still well defined and the function is the extremal function in the best approximate problem

$$\inf_{f \in H_K} \|L^*Lf - L^*\mathbf{d}\|_{H_K}, \quad (1.8)$$

as we see from Proposition 1.1, directly.

Proposition 1.1 is rigid and is not practical in practical applications, because, practical data contain noises or errors and the criteria (1.4) is not suitable.

2 Tikhonov regularization

Let L be a bounded linear operator from a reproducing kernel Hilbert space H_K admitting a reproducing kernel $K(p, q)$ on a set E into a Hilbert space \mathcal{H} . Then, by introducing the inner product, for any fixed positive $\lambda > 0$

$$(f, g)_{H_K(L; \lambda)} = \lambda(f, g)_{H_K} + (Lf, Lg)_{\mathcal{H}}, \quad (2.9)$$

we shall construct the Hilbert space $H_K(L; \lambda)$ comprising functions of H_K . This space, of course, admits a reproducing kernel and we shall denote it by $K_L(p, q; \lambda)$. Then, we first have the elementary properties:

LEMMA 2.1 *The reproducing kernel $K_L(p, q; \lambda)$ is determined as the unique solution $\tilde{K}(p, q; \lambda)$ of the equation:*

$$\tilde{K}(p, q; \lambda) + \frac{1}{\lambda}(L\tilde{K}_q, LK_p)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\lambda}K(p, q) \quad (2.10)$$

with

$$\tilde{K}_q = \tilde{K}(\cdot, q; \lambda) \in H_K \quad \text{for } q \in E. \quad (2.11)$$

Note here, in general, that the norm of the RKHS $H_{\lambda K}$ admitting the reproducing kernel $\lambda K(p, q)$ ($\lambda > 0$) is given by

$$\|f\|_{H_{\lambda K}}^2 = \frac{1}{\lambda}\|f\|_{H_K}^2 \quad (2.12)$$

and the members of functions of $H_{\lambda K}$ are the same of those of H_K .

We shall consider that the reproducing kernel $K(p, q)$ is known and we wish to construct the reproducing kernel $K_L(p, q; \lambda)$. For this construction we can obtain a very effective method by using the Neumann series. We define the bounded linear operator \tilde{L} from H_K into H_K defined by

$$(\tilde{L}f)(p) = (Lf, LK_p)_{\mathcal{H}} = (L^*Lf)(p).$$

Then, from (2.10) we obtain directly

THEOREM 2.2 *If $\|L\| < \lambda$, then $K_L(p, q; \lambda)$ is expressible in terms of $K(p, q)$ by the Neumann series:*

$$K_L(p, q; \lambda) = \left(I + \frac{\tilde{L}}{\lambda} \right)^{-1} \frac{1}{\lambda} K(p, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\tilde{L}}{\lambda} \right)^n \frac{1}{\lambda} K(p, q), \quad (2.13)$$

where $(I + \frac{\tilde{L}}{\lambda})^{-1}$ is a bounded linear operator from H_K into H_K satisfying

$$\left\| \frac{1}{I + \frac{\tilde{L}}{\lambda}} \right\| \leq \frac{1}{1 - \left\| \frac{\tilde{L}}{\lambda} \right\|}.$$

Of course, if the operator \tilde{L} is compact, then we can apply the spectral theory to the equation (2.10) without the restriction $\|L\| < \lambda$. In particular, $(I + \frac{\tilde{L}}{\lambda})^{-1}$ is a bounded linear operator and

$$K_L(p, q; \lambda) = \left(I + \frac{\tilde{L}}{\lambda} \right)^{-1} \frac{1}{\lambda} K(p, q).$$

Furthermore, we can obtain a further related result. See, for example, [2].

We shall consider the best approximation problem, for any given $f_0 \in H_K$ and $\mathbf{d} \in \mathcal{H}$:

$$\inf_{f \in H_K} \{ \lambda \|f_0 - f\|_{H_K}^2 + \|\mathbf{d} - Lf\|_{\mathcal{H}}^2 \}, \quad (2.14)$$

in connection with the Tikhonov regularization for the equation $Lf = \mathbf{f}$. Then, we can obtain, from Proposition 1.1:

THEOREM 2.3 *In our situation, for any given $f_0 \in H_K$ and $\mathbf{d} \in \mathcal{H}$, the generalized solution f^* of the equations*

$$f_0 = f \quad \text{in } H_K$$

and

$$\mathbf{d} = Lf \quad \text{in } \mathcal{H}$$

in the sense

$$\begin{aligned} & \inf_{f \in H_K} \{ \lambda \|f_0 - f\|_{H_K}^2 + \|\mathbf{d} - Lf\|_{\mathcal{H}}^2 \} \\ & = \lambda \|f_0 - f^*\|_{H_K}^2 + \|\mathbf{d} - Lf^*\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

exists uniquely and it is represented by

$$\begin{aligned} & f^*(p) \\ & = \lambda (f_0(\cdot), K_L(\cdot, p; \lambda))_{H_K} + (\mathbf{d}, LK_L(\cdot, p; \lambda))_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

In Theorem 2.3, in particular, we shall consider the best approximating function, for $f_0 = 0$

$$f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p) = (\mathbf{d}, LK_L(\cdot, p; \lambda))_{\mathcal{H}}, \quad (2.17)$$

which is the extremal function in the Tikhonov regularization (2.15) for $f_0 = 0$.

In general, in the Tikhonov regularization, the operator L is compact and the extremal functions are represented by using the singular values and singular functions of the selfadjoint operator L^*L . So, the representations are, in a sense, abstract. From many examples in our situation ([5,6,7]), however we see that

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_L(p, q; \lambda) \quad (2.18)$$

and

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathbf{d}, LK_L(p, q; \lambda))_{\mathcal{H}} \quad (2.19)$$

do, in general, not exist.

3 Limiting Properties

THEOREM 3.1 *For the two best approximate functions $f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p)$ in (2.17) and $f_{\mathbf{d}}^{**}(p)$ in (1.7) we have the estimate*

$$|f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p) - f_{\mathbf{d}}^{**}(p)| \leq \left(\lambda \|L\| + \|LL^*LL^* - I\| \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \right) \sqrt{K(p, p)} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.20)$$

COROLLARY 3.2 *If LL^* is unitary, then we have for the two best approximate functions $f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p)$ in (2.17) and $f_{\mathbf{d}}^{**}(p)$ in (1.7) we have the estimate*

$$|f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p) - f_{\mathbf{d}}^{**}(p)| \leq \lambda \|L\| \sqrt{K(p, p)} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.21)$$

which shows that as λ tends to zero, $f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p)$ tends to $f_{\mathbf{d}}^{**}(p)$ with the order λ and the convergence is uniform on any subset of E satisfying $K(p, p) < \infty$.

For the best approximate function $f_{\mathbf{d}}^{**}(p)$ when there exists, we have

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{d}}^{**}(p) &= (L^* \mathbf{d}, L^* LK(\cdot, p))_{\mathcal{H}_K} \\ &= (L^* LL^* \mathbf{d})(p). \end{aligned} \quad (3.22)$$

For the image of $f_{\mathbf{d}}^{**}(p)$, we thus obtain the estimate

$$\|L f_{\mathbf{d}}^{**} - \mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} \leq \|LL^*LL^* - I\| \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.23)$$

The quantity $\|LL^*LL^* - I\|$ may be understood as a distance of the operator LL^* from being unitary..

THEOREM 3.3 *If L is a compact operator, then for the Moore-Penrose generalized inverse $f_{\mathbf{d}}^*$,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p) = f_{\mathbf{d}}^*(p), \quad (3.24)$$

uniformly on any subset of E satisfying $K(p, p) < \infty$.

COROLLARY 3.4 *If $g \in \mathcal{N}(L)^\perp$, then*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{\lambda, Lg}^*(p) = f_{Lg}^*(p) = g(p) \quad (3.25)$$

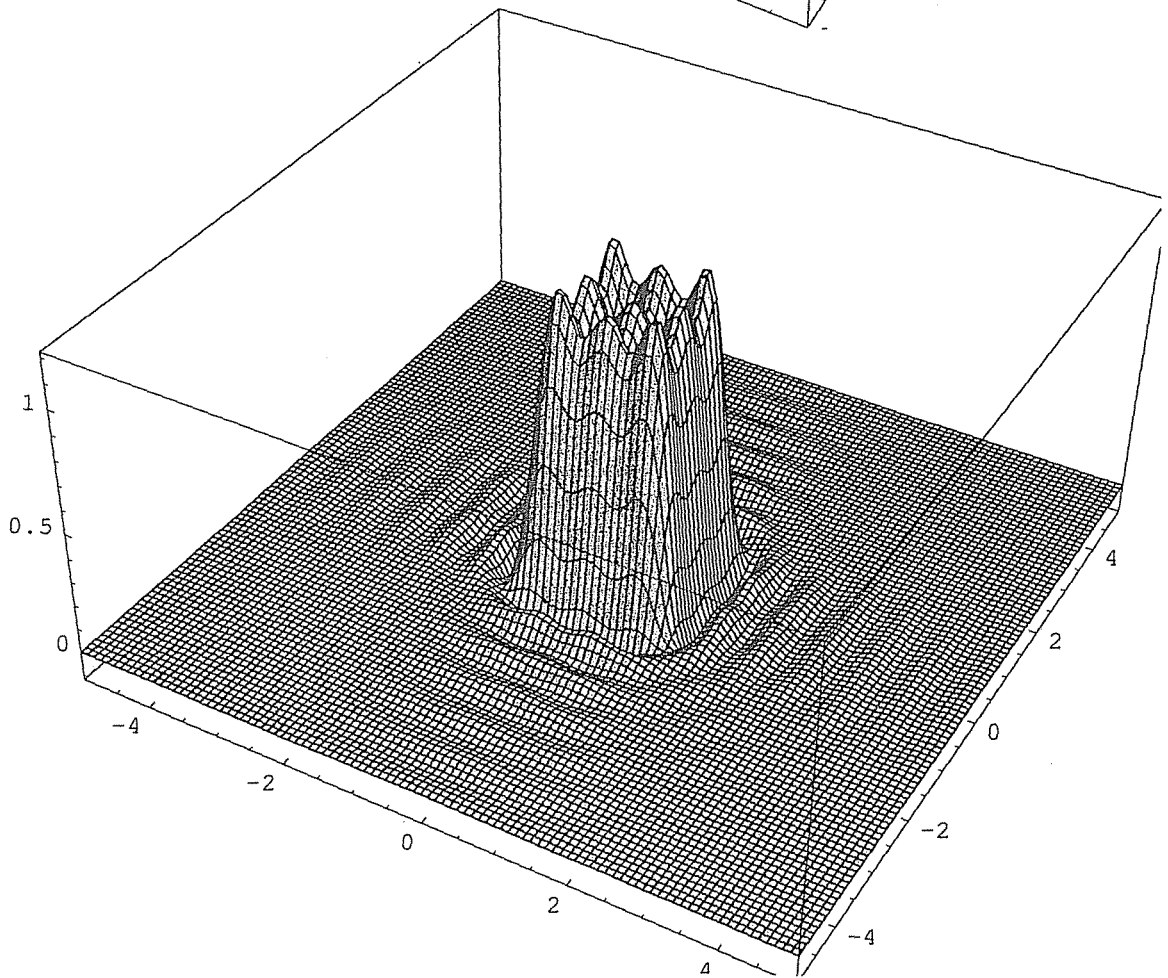
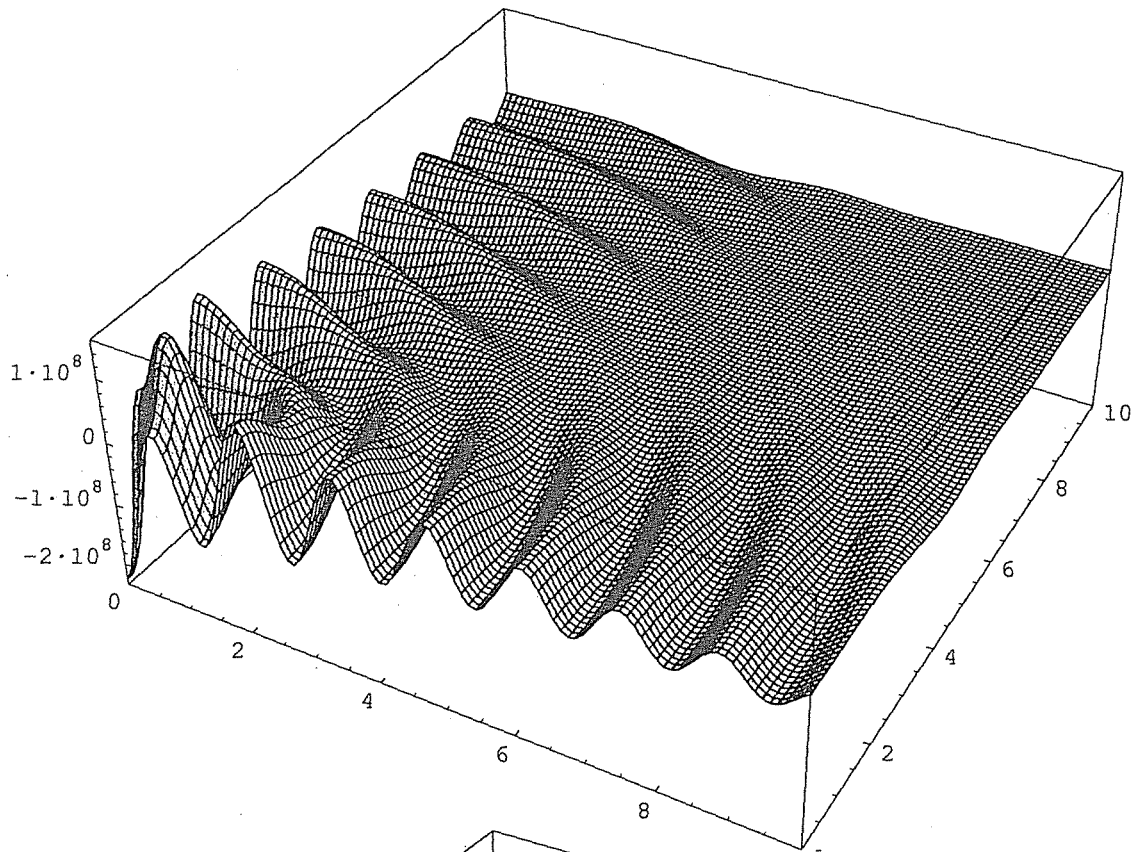
uniformly on any subset of E satisfying $K(p, p) < \infty$.

COROLLARY 3.5 *If $\mathbf{d} \in \mathcal{H}$ belongs to $\mathcal{R}(H_K)$, then*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Lf_{\lambda, \mathbf{d}}^*(p) = \mathbf{d} \quad \text{in } \mathcal{H}. \quad (3.26)$$

References

- [1] D.-W. Byun and S. Saitoh, *Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland (1994), 55–61.
- [2] C. W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1993).
- [3] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd (1997), UK.
- [4] S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels, Analysis and Applications - ISAAC 2001* (H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.N. Wong (eds.)), Kluwer (2003).
- [5] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, *Applicable Analysis* (to appear).
- [6] S. Saitoh, T. Matsuura and M. Asaduzzaman, *Operator Equations and Best Approximation Problems in Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, *J. of Analysis and Applications* (to appear).
- [7] S. Saitoh, *Constructions by Reproducing Kernels of Approximate Solutions for Linear Differential Equations with L_2 Integrable Coefficients*, *International J. of Math. Sci.* (to appear).
- [8] 斎藤 三郎、「再生核の理論入門」、(2002) 牧野書店。
- [9] Asaduzzaman, M., Matsuura, T. and Saitoh, S., *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).
- [10] Saitoh, S., *Applications of Reproducing Kernels to Best Approximations, Tikhonov Regularizations and Inverse Problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).



$t = 1$ 後の温度分布が $g(x_1, x_2) = \chi_{[-1,1]}(x_1) \times \chi_{[-1,1]}(x_2)$ on \mathbf{R}^2 となるための我々の公式による初期温度分布関数とその初期温度分布の $t = 1$ 後の温度分布関数 ($\lambda = 10^{-90}$)

A linear operator in Hilbert space and its Hyers-Ulam stability

Go Hirasawa¹

Takeshi Miura²

Sin-Ei Takahasi³

Abstract

This note is argued with the Hyers-Ulam stability of a linear operator (closed operator) in Hilbert space, and we also handle a stability problem concerning a (bounded) normal operator: if

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \varepsilon,$$

then, is there exist a constant $K > 0$ such that

$$\|T - N\| \leq K\varepsilon \text{ for some normal operator } N?$$

1 Hyers-Ulam-Rassias stability について

1940 年に S. M. Ulam が次の問題を提出した.

Ulam's Problem E_1, E_2 を実 Banach 空間, $f: E_1 \rightarrow E_2$ を *approximately linear map* とする. このとき, f の近くに線形写像 $T: E_1 \rightarrow E_2$ が存在するための条件とは何か.

D. H. Hyers は 1941 年にこの問題に対する 1 つの解答を与えた. また, Th. M. Rassias は 1978 年に D. H. Hyers の結果を次のように一般化した.

Theorem 1.1 (D.H.Hyers, Th.M.Rassias)

$\varepsilon > 0, p \in [0, 1)$ とし, E_1, E_2 を実 Banach 空間 とする. 写像 $f: E_1 \rightarrow E_2$ がすべての $x, y \in E_1$ に対して

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

を満たすならば,

$$\|f(x) - Tx\| \leq \frac{2}{|2-2^p|} \varepsilon \|x\|^p, \quad (x \in E_1)$$

を満たす *additive map* $T: E_1 \rightarrow E_2$ が一意に存在する. さらに, 各 $x \in E_1$ に対し写像 $t \rightarrow f(tx), (t \in \mathbb{R})$ が連続であれば, T は線形写像になる.

Remark 1.2 上の定理の証明は $p < 0$ でも通用する. また, $p > 1$ のケースでも成立することを 1991 年に Z.Gajda が示し, さらに $p = 1$ では定理が成立しないことを示した.

¹ Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology, Miyashiro, Saitama 345-8501, Japan

² Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japan

³ Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japan

以上のような関数方程式に関する安定性のことを, Hyers- Ulam- Rassias stability と呼ばれている.

一方, 1998 年, Alsina-Ger が微分方程式 $f' = f$ に関する次のような安定性の結果を得ている.

Theorem 1.3 (Alsina-Ger) $\varepsilon > 0$, J を \mathbb{R} の開区間,
 $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能とする. このとき, 任意の $t \in J$ に対して,

$$|f(t) - f'(t)| \leq \varepsilon$$

ならば

$$g = g' \quad \text{かつ} \quad |f(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon, \quad (t \in J)$$

を満たす微分可能な関数 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する.

この定理を線形作用素の立場から捉えて, 線形作用素の Hyers-Ulam stability を定義してみたいと思う. $D = d/dt$ を微分作用素とし, I を恒等作用素とするととき Alsina-Ger の結果は次のように言い表せる.

$$|(I - D)f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{ならば} \quad (I - D)g = 0 \quad \text{かつ} \quad |f(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon,$$

を満たす 微分可能な関数 g が存在する, となる.

これは $T := I - D$ の安定性を示しているように考えられる. これをもとに, Banach 空間上の線形作用素の Hyers-Ulam stability を定義しよう.

次の $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ は線形作用素 T の定義域, 値域を表す.

Definition 1.4 X, Y を Banach 空間とする.

線形作用素 $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ が Hyers-Ulam stability をもつとは, 次の条件を満たすような定数 $K \geq 0$ が存在することである:

$$\|Tx - y\|_Y \leq \varepsilon$$

を満たす任意の $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in \mathcal{R}(T)$, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$T\bar{x} = y \quad \text{かつ} \quad \|x - \bar{x}\|_X \leq K\varepsilon$$

となる $\bar{x} \in \mathcal{D}(T)$ が存在する.

このとき, このような定数 K を a HUS constant と言い, その下限 K_T を the HUS constant と言う.

Remark 1.5 上の定義は次と同値である.

$$\exists K \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(T), \exists \bar{x} \in \ker T; \|x - \bar{x}\|_X \leq K\|Tx\|_Y$$

有界線形作用素の Hyers-Ulam stability について次の結果がある.

Theorem 1.6 (H.Takagi, T.Miura, S.E.Takahasi)

Let X and Y be Banach spaces and T be a bounded linear operator from X into Y . Then the following statements are equivalent.

(i) T has the Hyers-Ulam stability.

(ii) T has closed range.

(iii) \bar{T}^{-1} is bounded.

Moreover, if one of (hence all of) the conditions (i), (ii) and (iii) is true, then we have $K_T = \|\bar{T}^{-1}\|$.

Remark 1.7 \bar{T}^{-1} は $\bar{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ の逆写像のことである.

そこで、有界とは限らない線形作用素の代表例である定義域が Hilbert 空間 H の中で稠密な閉作用素の Hyers-Ulam stability の特徴付けを考えていくことにする.

まず、閉作用素の特徴の 1 つは、閉作用素 T の定義域がグラフノルムで連続的に埋め込まれた Hilbert 空間 $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ になることである.

その空間から Hilbert 空間 H への有界作用素と考えたときの作用素

$$T_0 : (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow H$$

が Hyers-Ulam stability をもつことと T が Hyers-Ulam stability をもつことは同値か？

Proposition 1.8 *Let T be a closed operator in Hilbert space. The following conditions are equivalent.*

(i) T has the Hyers-Ulam stability.

$$(\exists K \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(T), \exists \tilde{x} \in \ker T ; \|x - \tilde{x}\| \leq K\|Tx\|)$$

(ii) T_0 has the Hyers-Ulam stability.

$$(\exists K \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(T), \exists \tilde{x} \in \ker T ; \|x - \tilde{x}\|_T \leq K\|Tx\|)$$

さて、次に Kaufman の表現定理との関係について調べてみる。グラフノルムによる Hilbert 空間に対して、

$$(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) = (\mathcal{M}(A), \|\cdot\|_A), \text{ (de Branges space)}$$

(isometrical isomorphism) を満たす $A \geq 0$ が一意に存在する。この A を用いて T を次の作用素商

$$T = B/A = B/(1 - B^*B)^{1/2}, \quad T : Au \rightarrow Bu, \quad u \in H,$$

で表現したのが Kaufman の表現定理である。

Theorem 1.9 (W.Kaufman) *Let T be a densely defined and closed operator in a Hilbert space H . Then there uniquely exists a pure contraction B*

($\ker(1 - B^*B) = \{0\}$, $\|B\| \leq 1$) *such that*

$$T = B/(1 - B^*B)^{1/2},$$

and conversely, such a contraction B uniquely gives a densely defined and closed operator T .

In this case,

$$T^* = B^*/(1 - BB^*)^{1/2},$$

and T is positive selfadjoint, selfadjoint, normal, quasi-normal, then B is so, the converse is also true.

この定理と関連させて閉作用素の Hyers-Ulam-stability を考察してみよう。

Theorem 1.10 Let T be a densely defined and closed operator in a Hilbert space H . It is uniquely represented by a quotient

$$T = B/(1 - B^*B)^{1/2}.$$

Then the following conditions are equivalent.

- (i) T has the Hyers-Ulam stability.
- (ii) T_0 has the Hyers-Ulam stability.
- (iii) T has closed range.
- (iv) B has the Hyers-Ulam stability.

In this case, the HUS constant $K_{T_0} = K_B$.

Remark 1.11 Inclusion map $J_B : \mathcal{M}(B) \rightarrow H$ を用いると

$$K_B = \|J_B^{-1}\|.$$

the HUS constant $K_{T_0} = K_B$ の証明

定理 1.6 の H.Takagi, T.Miura, S.E.Takahasi の結果より, $K_{T_0} = \|\tilde{T}_0^{-1}\|$ を計算すればよい. そこで,

$$T_0 = B/A : \mathcal{M}(A) \rightarrow H, \quad (\ker T_0)^{\perp A} = A(\ker B)^{\perp}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} K_{T_0} &= \|\tilde{T}_0^{-1}\| \\ &= \sup_{h \in \text{ran } T_0} \frac{\|\tilde{T}_0^{-1} h\|_A}{\|h\|} \\ &= \sup_{g \in (\ker T_0)^{\perp A}} \frac{\|g\|_A}{\|T_0 g\|} \\ &= \sup_{g=Au, u \in (\ker B)^{\perp}} \frac{\|Au\|_A}{\|Bu\|} \\ &= \sup_{u \in (\ker B)^{\perp}} \frac{\|u\|}{\|Bu\|} \quad (= \|\tilde{B}^{-1}\| = K_B), \quad (\ker B)^{\perp} \subseteq (\ker A)^{\perp} \\ &= \sup_{u \in H} \frac{\|Bu\|_B}{\|J_B(Bu)\|}, \quad J_B : \mathcal{M}(B) \hookrightarrow H \\ &= \|J_B^{-1}\| \end{aligned}$$

2 正規行列とその Hyers-Ulam-Rassias stability について

Hilbert 空間 H 上の正規作用素の Hyers-Ulam-Rassias stability を考えてみよう.

問題設定.

T を有界作用素とし, $p \in \mathbf{R}$ とする.

$$\|T^*Tx - TT^*x\| \leq \varepsilon\|x\|^p, \quad x \in H \quad (\varepsilon > 0)$$

ならば, ある正規作用素 N が存在して

$$\|Tx - Nx\| \leq K\varepsilon\|x\|^p, \quad x \in H$$

を満たす定数 $K \geq 0$ が存在するか?

これに関して次が分かる.

Proposition 2.1 *Let T be a bounded linear operator on a Hilbert space H . If T satisfies that*

$$\|T^*Tx - TT^*x\| \leq \varepsilon\|x\|^p, \quad x \in H \tag{1}$$

for some $\varepsilon > 0$, $p \neq 1$, then T is normal.

Pick $x \in H \setminus \{0\}$ and fix $n \in \mathbf{N}$ arbitrarily.

Put $s = |1 - p|/(1 - p)$. It follows from (1) that

$$\|T^*T(n^s x) - TT^*(n^s x)\| \leq \varepsilon\|n^s x\|^p.$$

The linearity of T and T^* implies that

$$\|T^*Tx - TT^*x\| \leq \varepsilon n^{s(p-1)}\|x\|^p.$$

Since $s(p-1) < 0$, taking $n \rightarrow \infty$, we obtain $T^*T = TT^*$.

よって本質的な部分は $p = 1$ である. すなわち,

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \varepsilon,$$

ならば, ある正規作用素 N が存在して

$$\|T - N\| \leq K\varepsilon,$$

を満たす定数 $K \geq 0$ が存在するか?

これは, 有界作用素 T と正規作用素のクラスとの距離の問題に関係していると思われます. (正規作用素との距離については昔から多くの数学者によって研究されている.) そこで, 我々はまず有限次元 \mathbf{R}^2 上での正規行列から考察してみました.

Theorem 2.2 *If T is a 2×2 -matrix over \mathbf{R} , then there exists a 2×2 -normal matrix N_0 such that*

$$\|T^*T - TT^*\| = 2\|T - T^*\|\|T - N_0\|.$$

Remark 2.3 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ならば

$$N_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(T + \tilde{T})$$

これより, T が自己共役でなければ,

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \varepsilon,$$

ならば, ある正規作用素 N_0 が存在して

$$\|T - N_0\| \leq \frac{1}{2\|T - T^*\|} \varepsilon,$$

を満たす.

上の N は T が自己共役でなければ正規行列のクラスへの最短距離を与えている.

Proposition 2.4 If $N = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, where $x, y \in \mathbf{R}$

($y \neq 0$), then

$$\begin{aligned} \|T - N\|^2 &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b-c}{2}\right)^2 \\ &+ \sqrt{(a-d)^2 + (b-c)^2} \sqrt{\left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b-c}{2}\right)^2} \\ &+ \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\|T - N\|^2 \geq \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4}$$

for every $N = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

References

- [1] C. Alsina and R. Ger, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. Inequal. Appl. **2** (1998), 373-380.
- [2] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431-434.
- [3] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222-224.
- [4] T. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.
- [5] H. Takagi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *Essential norm and stability constant of weighted composition operators on $C(X)$* , preprint.
- [6] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York-London 1960.

QUASISIMILARITY FOR LOG-HYPONORMAL OPERATORS

Kôtarô Tanahashi

Department of Mathematics, Tohoku Pharmaceutical University

In Ho Jeon

Department of Mathematics, Ehwa Women's University

Atsushi Uchiyama

Sendai National College of Technology

Abstract In this paper we show that the normal parts of quasisimilar log-hyponormal operators are unitarily equivalent, Fuglede-Putnam type theorem for log-hyponormal operators, log-hyponormal operator quasisimilar to an isometry is unitary, and a log-hyponormal spectral operator is normal.

\mathcal{H} , \mathcal{K} をヒルベルト空間とする. $T \in L(\mathcal{H})$ (*resp.* $L(\mathcal{K})$) が $(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$ ($p > 0$) を満たすとき p -hyponormal 作用素といい, $\log(T^*T) \geq \log(TT^*)$ を満たすとき log-hyponormal 作用素という. 可逆な p -hyponormal 作用素は log-hyponormal 作用素であるが, 逆は成立しない ([16]). しかし, ([16, 17]) で log-hyponormal は 0-hyponormal とみなせるという興味深い指摘がなされている.

作用素 $T = U|T|$ に対し, $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ を Aluthge 変換という. また, \tilde{T} の Aluthge 変換 (T の 2 回 Aluthge 変換) を \hat{T} で表す. log-hyponormal 作用素と Aluthge 変換については, 棚橋の "log-hyponormal 作用素の Aluthge 変換は $\frac{1}{2}$ -hyponormal (故に, 2 回 Aluthge 変換は hyponormal)" が有名である.

定義 $X \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が quasiaffinity であるとは, X が単射でかつ dense range を持つことである. $T \in L(\mathcal{H})$, $S \in L(\mathcal{K})$ が quasisimilar であるとは quasiaffinity $X \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ および $Y \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ が存在し, $XT = SX$ かつ $TY = YS$ を満たすことである.

Jeon-Duggal [13] は quasisimilar である 2 つの p -hyponormal 作用素の normal part は unitarily equivalent, isometry に compactly quasisimilar な p -hyponormal は normal, p -hyponormal spectral 作用素は normal であることを示した.

この講演では, 上記の Jeon-Duggal の結果が log-hyponormal 作用素についても成立することを報告する.

1. log-hyponormal 作用素の normal part

定理 1. \mathcal{M} が log-hyponormal 作用素 T の不変部分空間で, T の \mathcal{M} への制限 $T_{\mathcal{M}}$ が可逆ならば, $T_{\mathcal{M}}$ もまた log-hyponormal 作用素である.

Proof. $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ とおく.

(M. Uchiyama) 任意の positive invertible operator X について

$$\log X = \lim_{p \downarrow 0} \frac{X^p - 1}{p}.$$

従って,

$$\begin{aligned} P(\log T^*T)P &= \lim_{p \downarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{(T^*T)^p - 1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\leq \lim_{p \downarrow 0} \frac{1}{p} \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^p - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \lim_{p \downarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{(A^*A)^p - 1}{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \text{(Hansen's inequality [10] より)} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} P(\log TT^*)P &= \lim_{p \downarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{(TT^*)^p - 1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\geq \lim_{p \downarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\left(T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^* \right)^p - 1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \text{(Löwner-Heinz's inequality ([11, 14]) より)} \\ &= \lim_{p \downarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{(AA^*)^p - 1}{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, T は log-hyponormal なので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \log AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\leq P(\log TT^*)P \\ &\leq P(\log T^*T)P \leq \begin{pmatrix} \log A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに, $A = T|_{\mathcal{M}}$ もまた log-hyponormal. □

補題 [18, lemma 2]. $T \in L(\mathcal{H})$ は log-hyponormal, \mathcal{M} はその不変部分空間とする. このとき, $T|_{\mathcal{M}}$ が normal ならば, \mathcal{M} は T の reducing subspace である.

上の補題から直ちに次の定理が導かれる.

定理 2. $T \in L(\mathcal{H})$ が log-hyponormal ならば, $T = T_1 \oplus T_2$ on $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ と直和分解出来る. ここで, T_1 は normal, T_2 は pure な log-hyponormal, (i.e., $T_2|_{\mathcal{M}}$ が normal になるような T_2 の不変部分空間 \mathcal{M} は存在しない) である.

次の補題は dominant operator の場合 [15, Theorem 1] や p -hyponormal operator の場合 [13] に示されている. ここで, 作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が dominant operator であるとは, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $M_\lambda > 0$ が存在して, $\|(T - \lambda)^*x\| \leq M_\lambda \|(T - \lambda)x\|$ for all $x \in \mathcal{H}$ を満たすことである. また, この M_λ が有界であるとき, T を M -hyponormal という.

補題 2. $T \in L(\mathcal{H})$ は log-hyponormal, $S \in L(\mathcal{K})$ は normal とする. このとき, $TX = XS$ を満たし dense range を持つ $X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ が存在すれば T は normal である.

Proof. $TX = XS$ より $\tilde{T}|T|^{\frac{1}{2}}X = |T|^{\frac{1}{2}}XS$, ここで $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は T の Aluthge 変換とする. $W = |T|^{\frac{1}{2}}X$ は dense range を持ち, \tilde{T} は semi-hyponormal なので \tilde{T} は normal, よって T は normal [16, Theorem 7]. □

命題 (Williams [19]) $T \in L(\mathcal{H})$, $S \in L(\mathcal{K})$ が normal, $X \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $Y \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ が単射で $XT = SX$, $TY = YS$ を満たすならば, T と S は unitarily equivalent.

Conway [4] は quasisimilar な 2 つの subnormal operator の normal part が unitarily equivalent であることを示した. この結果は dominant [15] や p -hyponormal [13] の場合へ拡張されている. この結果は, log-hyponormal の場合へも拡張される.

定理 3. T_1, T_2 をそれぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の log-hyponormal operator とする. $T_i = N_i \oplus V_i$ on $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i1} \oplus \mathcal{H}_{i2}$ を T_i の normal + pure への分解とする. このとき, T_1 と T_2 が quasisimilar ならば, N_1 と N_2 は unitary equivalent である.

系 1. T_1, T_2 が log-hyponormal で, かつ, T_1 と T_2 が quasisimilar とする. このとき, T_1 が pure ならば T_2 も pure である.

系 2. T_1 が log-hyponormal, T_2 が normal で, かつ, T_1 と T_2 が quasisimilar とする. このとき, T_1 と T_2 は unitarily equivalent な normal operator である.

2. log-hyponormal 作用素の Fuglede-Putnam 型定理

Fuglede-Putnam の定理 $T \in L(\mathcal{H}), S \in L(\mathcal{K})$ が normal, $X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ とする. このとき, $TX = XS$ ならば $T^*X = XS^*$.

この Fuglede-Putnam の定理は T, S^* が normal よりも広い様々なクラスの作用素の場合でも成立することが多数の研究者によって示されている. 我々は, T, S^* が p -hyponormal, または log-hyponormal の場合まで Fuglede-Putnam の定理を拡張することが出来た.

定理 4. $T \in L(\mathcal{H}), S \in L(\mathcal{K}), X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ とする. T, S^* が log-hyponormal または p -hyponormal で, $TX = XS$ ならば $T^*X = XS^*$. さらに, $\overline{R(X)}$ は T を, $N(X)^\perp$ は S をそれぞれ reduce し, $T|_{\overline{R(X)}}$ と $S|_{N(X)^\perp}$ は unitarily equivalent な normal operator.

Remark. $T = U|T|$ を極分解, \tilde{T} を T の Aluthge 変換とすると, $T^* = |T|U^* = U^*U|T|U^* = U^*|T^*|$ なので, $\tilde{T}^* = |T^*|^{\frac{1}{2}}U^*|T^*|^{\frac{1}{2}} = U(\tilde{T})^*U^*$, $(\tilde{T})^* = U^*\tilde{T}^*U$. よって, \tilde{T}^* が log-hyponormal (resp., p -hyponormal) である必要十分条件は $(\tilde{T})^*$ が log-hyponormal (resp., p -hyponormal) である.

系 3. $T \in L(\mathcal{H})$ が dominant, $S^* \in L(\mathcal{K})$ が log-hyponormal $X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ とする. このとき, $TX = XS$ ならば $T^*X = XS^*$. さらに, $\overline{R(X)}$ は T を, $N(X)^\perp$ は S をそれぞれ reduce し, $T|_{\overline{R(X)}}$ と $S|_{N(X)^\perp}$ は unitarily equivalent な normal operator.

定理 4 において X が quasiaffinity とすると $\overline{R(X)} = \mathcal{H}$ and $N(X)^\perp = \mathcal{K}$. ゆえに, T と S は unitarily equivalent な normal operator.

系 4. $T \in L(\mathcal{H})$ が dominant, $S^* \in L(\mathcal{K})$ が log-hyponormal, $X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ が quasiaffinity とする. このとき, $TX = XS$ ならば $T^*X = XS^*$. さらに, T と S は unitarily equivalent な normal operator.

系 4 の S を isometry や spectral operator にした場合を考える.

定理 5. $T \in L(\mathcal{H})$ が log-hyponormal, $S \in L(\mathcal{K})$ は isometry とする. T と S が quasisimilar ならば T と S は unitarily equivalent な unitary operator.

M -hyponormal spectral operator や p -hyponormal spectral operator は normal であることが知られている [8, 13].

定理 6. $T \in L(\mathcal{H})$ が log-hyponormal, $S \in L(\mathcal{K})$ は spectral operator とする. このとき, quasiaffinity $X \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ で $TX = XS$ を満たすものがあれば T は normal, S は scalar operator, T と S は similar である.

系 5. $T \in L(\mathcal{H})$ が log-hyponormal spectral operator ならば T は normal operator.

REFERENCES

- [1] A. Aluthge, *On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307–315.
- [2] A. Aluthge and D. Wang, *An operator inequality which implies paranormality*, Math. Inequalities and Applications, **2** (1999), 113–119.
- [3] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math., **33** (1972), 169–178.
- [4] J. Conway, *On quasisimilarity for subnormal operators*, Illinois Jour. Math., **24**(1980), 689–702.
- [5] B. P. Duggal, *Quasi-similar p -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **26** (1996), 338–345.
- [6] B. P. Duggal, *On dominant operators*, Arch. Math., **46** (1986), 353–359.
- [7] D. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators, Part III: Spectral operators*, Interscience, New York, 1971.

- [8] C. K. Fong, *On M -hyponormal operators*, *Studia Math.*, **65**(1979), 1-5.
- [9] M. Fujii, C. Himeji and A. Matsumoto, *Theorems of Ando and Saito for p -hyponormal operators*, *Math. Japonica*, **39** (1994), 595–598.
- [10] F. Hansen, *An inequality*, *Math. Ann.*, **246** (1980), 249–250.
- [11] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415–438.
- [12] T. B. Hoover, *Quasimilarity of operators*, *Illinois Jour. Math.*, **16**(1972), 678-686.
- [13] I. H. Jeon and B. P. Duggal *P -hyponormal operators and quasimilarity*, *Integr. Equat. Oper. Th.*, (to appear).
- [14] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen*, *Math. Z.*, **38** (1934), 177–216.
- [15] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, *An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operators*, *Indiana Univ. Math. Jour.* **25**(1976), 359-365.
- [16] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, *Integr. Equat. Oper. Th.*, **34** (1999), 364–372.
- [17] K. Tanahashi, *Putnam's inequality for log-hyponormal operators*, *Integr. Equat. Oper. Th.*, to appear.
- [18] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Fuglede-Putnam's theorem for p -hyponormal or log-hyponormal operators*, (to appear).
- [19] L. R. Williams, *Quasimilarity and hyponormal operators*, *Jour. Oper. Th.*, **5**(1981), 127-139.
- [20] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [21] T. Yoshino, *The p -hyponormality of the Aluthge transform*, *Interdisciplinary Information Sciences*, **3** (1997), 91–93.

Kôtarô Tanahashi
 Department of Mathematics
 Tohoku Pharmaceutical University
 Sendai 981-8558, Japan

In Ho Jeon
 Department of Mathematics
 Sungkyunkwan University
 Suwon 440-764, Korea

Atsushi Uchiyama
 Sendai National College of Technology
 Sendai 989-3128, Japan

On ∞ -hyponormal operators

Shizuo Miyajima
Isao Saito

Tokyo University of Science
Tokyo University of Science

Abstract. A bounded linear operator T is called ∞ -hyponormal if T is p -hyponormal for every $p > 0$. We show that the outer boundary of the spectrum of a pure ∞ -hyponormal operator T is a circle (see [2] for details). Note that the authors have obtained in [1] the same conclusion under the additional condition that T has dense range and no nontrivial reducing subspace.

Hilbert 空間上の有界線形作用素 T が $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ ($p > 0$) をみたすとき p -hyponormal であると言い、様々な結果が得られている。いま $p \rightarrow \infty$ としたときについて考え、次のように定義する。

Definition 任意の $p > 0$ に対して $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ となるとき T を ∞ -hyponormal operator という。

具体例としては、unilateral shift, quasi-normal operator, hyponormal weighted shift などがある。また ∞ -hyponormal operator は次のような性質を満たす。([1])

- T が可逆な ∞ -hyponormal operator ならば T^{-1} も ∞ -hyponormal である。
- T が ∞ -hyponormal operator ならば任意の自然数 n に対して T^n は hyponormal である。
- S, T が ∞ -hyponormal operator で $ST = TS, S^*T = TS^*$ が成立するなら ST も ∞ -hyponormal である。
- T が ∞ -hyponormal operator ならば T は non-trivial invariant subspace をもつ。

上で述べた ∞ -hyponormal operator の具体例ではスペクトルは原点に関して circularly symmetric であるが、一般にも次の結果が成立する。

Theorem A ([1]) T が pure な (normal part をもたない operator を pure という) ∞ -hyponormal operator で 稠密な値域をもち、non-trivial reducing subspace をもたないものとする。このとき $\sigma(T) \supseteq \{z; |z| = \|T\|\} \cup \{z; |z| = \alpha\}$ となる。ただし $\alpha := \min\{|z|; z \in \sigma(T)\}$ とする。

この結果が、 T が稠密な値域をもち non-trivial reducing subspace をもたないという仮定がなくても成立すること、つまり pure な ∞ -hyponormal operator のスペクトルの外側の境界と（存在すれば）内側の境界が原点を中心とする円周となることを示す。

Theorem ([2]) T が pure な ∞ -hyponormal operator とする。このとき $\sigma(T) \supseteq \{z; |z| = \|T\|\} \cup \{z; |z| = \alpha\}$ となる。ただし $\alpha := \min\{|z|; z \in \sigma(T)\}$ とする。

証明の概略を示す。証明には次の定理を用いる。

Theorem (Olson) A, B を positive operators, $A = \int \lambda dP(\lambda)$, $B = \int \lambda dQ(\lambda)$ を A, B の spectral resolutions とする。このとき $A^n \geq B^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) となるための必要十分条件は $P(\lambda) \leq Q(\lambda)$ ($\forall \lambda \geq 0$) となることである。

この定理より次が得られる。

Theorem 1. T を pure operator, $T = U|T|$ を T の polar decomposition, そして $|T| = \int \lambda dP(\lambda)$ を T の spectral resolution とする。このとき

$$Q(\lambda) := \begin{cases} UP(\lambda)U^* + I - UU^* & (\lambda \geq 0) \\ 0 & (\lambda < 0) \end{cases}$$

とするとき $Q(\lambda)$ は $|T^*|$ の spectral measure となる。よって T が ∞ -hyponormal operator となるための必要十分条件は $P(\lambda) \leq Q(\lambda)$ ($\forall \lambda \geq 0$) となることである。

さらに次の補題が成立する。

Lemma 2. T を ∞ -hyponormal operator, $P(\lambda), Q(\lambda)$ を上の定理のものとし、ある $\lambda_0 < \|T\|$ が存在して、任意の $\lambda \geq \lambda_0$ に対し $P(\lambda) = Q(\lambda)$ が成立とする。このとき $\|T_0\| = \|T\|$ となる quasinormal operator T_0 が存在して $T = T_0 \oplus T_1$ となる。よって $\sigma(T) = \{z; |z| \leq \|T\|\}$ が成立する。

この補題の証明の概略を述べる。 $\lambda \geq \lambda_0$ とし $T = U|T|$ を T の極分解とする。 T が pure より単射となり U は isometry で

$$P(\lambda) = Q(\lambda) = UP(\lambda)U^* + I - UU^*$$

が成立する。これより

$$UP(\lambda) = (UP(\lambda)U^*)U = (P(\lambda) - I + UU^*)U = P(\lambda)U$$

となる。よって $U^*P(\lambda) = P(\lambda)U^*$ となり $H_0 := \mathcal{R}(I - P(\lambda_0))$ は U の non-zero reducing subspace となる。

$T_0 := T|_{H_0} = U_0|T_0|$ を T_0 の極分解とすると

$$U_0 = U|_{H_0}, \quad |T_0| = |T||_{H_0}$$

$$\|T\| = \||T|\| = \||T_0|\| = \|T_0\|$$

が成立し $U_0|T_0| = |T_0|U_0$ から

$$T_0|T_0| = U_0|T_0| \cdot |T_0| = |T_0|U_0|T_0| = |T_0|T_0$$

となり T_0 は quasinormal となる。さらに

$$\sigma(T) \supseteq \sigma(T_0) = \{z; |z| \leq \|T_0\|\} = \{z; |z| \leq \|T\|\}$$

より $\sigma(T) = \{z; |z| \leq \|T\|\}$ となる。

上の補題より任意の $\lambda < \|T\|$ に対し、ある $\lambda' \geq \lambda$ が存在して $P(\lambda') < Q(\lambda')$ が成立するとしてよい。($A < B$ は $A \leq B$ かつ $A \neq B$ が成立することをいう)

$|\lambda| = \|T\|$ となる任意の λ が T の approximate point spectrum となることを示す。

N を任意の自然数, $\varepsilon_N := \|T\|/(N\sqrt{N+1})$ とする。上で述べたことより、ある $\lambda_N > \|T\| - \varepsilon_N$ が存在して

$$P(\lambda_N) < Q(\lambda_N) = UP(\lambda_N)U^* + I - UU^*$$

となるので

$$U(I - P(\lambda_N))U^* < I - P(\lambda_N)$$

$$U^{n+1}(I - P(\lambda_N))U^{*n+1} < U^n(I - P(\lambda_N))U^{*n}$$

が成立し $\{P_n\}_n := \{U^n(I - P(\lambda_N))U^{*n}\}_n$ は strictly decreasing sequence of orthogonal projections となる。よって $x \in \text{Ran}(P_0) \cap \text{Ran}(P_1)^\perp$ となる unit vector x がとれて $\{U^n x\}_n$ は orthonormal system となり

$$\sum_{n=0}^N \frac{\|T\|^n U^n x}{\lambda^n} = \sqrt{N+1}$$

となる。 $y \in \mathcal{R}(P_0) = \mathcal{R}(I - P(\lambda_N))$ に対し

$$\begin{aligned} \|(|T| - \|T\|)y\| &\leq \left\| \int_{\lambda \geq \lambda_N} |\lambda - \|T\|| dP(\lambda)y \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\lambda \geq \lambda_N} (\|T\| - \lambda_N) dP(\lambda)y \right\| \\ &= (\|T\| - \lambda_N)\|y\| < \varepsilon_N\|y\| \end{aligned}$$

となるので

$$\|Tx - \|T\|Ux\| = \|U(|T| - \|T\|)x\| = \|(|T| - \|T\|)x\| < \varepsilon_N\|x\| = \varepsilon_N$$

となる。帰納法より

$$\|T^n x - \|T\|^n U^n x\| < n\varepsilon_N \|T\|^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N})$$

が示され

$$\left\| \sum_{n=0}^N \frac{T^n x}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^N \frac{\|T\|^n U^n x}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{\sqrt{N+1}}{2}$$

となる。よって

$$\frac{1}{2} < \left\| \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N \frac{T^n x}{\lambda^n} \right\| < \frac{3}{2}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} \left\| (T - \lambda) \left(\frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N \frac{T^n x}{\lambda^n} \right) \right\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{N+1}} \frac{T^{N+1}x}{\lambda^N} - \frac{\lambda x}{\sqrt{N+1}} \right\| \\ &\leq \frac{2\|T\|}{\sqrt{N+1}} \end{aligned}$$

が成立する。したがって λ が T の approximate point spectrum となる。よって $\sigma(T) \supseteq \{z; |z| = \|T\|\}$ が示された。

$\sigma(T) \supseteq \{z; |z| = \alpha\}$, $\alpha := \min\{|z|; z \in \sigma(T)\}$ については、 T が可逆で ∞ -hyponormal operator ならば T^{-1} も ∞ -hyponormal となるということと、spectral mapping theorem より証明される。

また任意の $p > 0$ に対して $(T^*T)^p \leq (TT^*)^p$ となるとき T を ∞ -cohyponormal operator とよぶ。この ∞ -cohyponormal operator について次が成立する。

Theorem T が pure な ∞ -cohyponormal operator とする。このとき

$$\sigma(T) \supseteq \{z; |z| = \|T\|\} \cup \{z; |z| = \alpha\}$$

となる。ただし $\alpha := \min\{|z|; z \in \sigma(T)\}$ とする。

参考文献

[1] S. Miyajima and I. Saito, *∞ -hyponormal operators and their spectral properties*, Acta Sci. Math. (Szeged), **67** (2001), 357–371.

[2] S. Miyajima and I. Saito, *A remark on the spectra of ∞ -hyponormal operators*, to appear in Acta Sci. Math. (Szeged)

Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups

Hisakazu Shindoh (Graduate School of Mathematics, Tokyo University of Science)

1 問題の設定及び定理の陳述

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合とする. 各 $p \in [1, \infty)$ に対し, $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ は $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群とし, A_p をその生成作用素とする. ここで更に, 任意の $p, q \in [1, \infty)$ に対し, T_p と T_q は consistent であると仮定する. T_p と T_q が consistent とは, 任意の $t \geq 0$ と任意の $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ に対し,

$$T_p(t)f = T_q(t)f$$

が成り立つこととする.

このとき, スペクトルの不変性:

$$\sigma(A_p) = \sigma(A_2) \quad (p \in [1, \infty))$$

が成り立つと期待しても, 不自然ではない.

しかし, 一般には, スペクトルの不変性は成り立たない (W. Arendt [2, Section 3]). そこで, スペクトルの不変性を導くため, T_2 に条件を付ける.

$S = (S(t))_{t \geq 0}$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の positive な C_0 -半群とする (positive 性の定義については, 後述を参照). このとき, T_2 が S により essentially dominate されるとは,

$$\exists M > 0 \exists \omega \in \mathbb{R} \exists b > 0 : |T_2(t)f| \leq M e^{\omega t} S(bt)|f| \quad (\forall t \geq 0, \forall f \in L^2(\Omega))$$

が成り立つことと定義する. 但し, $f \in L^2(\Omega)$ は, $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ では値が 0 である関数として, $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ とみなす. この “essentially dominate される” という概念は, S. Miyajima and M. Ishikawa [3, Definition 2.1] で導入された.

ここで, 先行研究を紹介する. その後, 今回得られた定理を述べる.

以下, Δ は, $H^2(\mathbb{R}^N)$ を定義域とする Laplacian とする. $S(t) = e^{t\Delta}$ により, T_2 が essentially dominate されることと, T_2 が upper Gaussian estimate (cf. [2, Definition 4.1]) を持つことは同値である.

次の定理を W. Arendt は示した ([2, Theorem 4.2]): T_2 が upper Gaussian estimate を持つとき, $\rho_\infty(A_p) = \rho_\infty(A_2)$ ($p \in [1, \infty)$) が成り立つ. 但し, $\rho_\infty(A_p)$ は, $\rho(A_p)$ の連結成分のうち, ある $w \in \mathbb{R}$ に対し, 右半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > w\}$ を含むものである.

任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対し, $\mathcal{S}_\alpha = (\mathcal{S}_\alpha(t))_{t \geq 0}$, $\mathcal{S}_\alpha(t) := e^{-t(I-\Delta)^\alpha}$ ($t \geq 0$) とおく. \mathcal{S}_α は $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の positive な C_0 -半群であることが, [3, Proposition 2.3] で示されている.

S. Miyajima と M. Ishikawa は, W. Arendt の示した定理を次のように拡張した ([3, Theorem 2.7]): T_2 が, ある $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ に対し, \mathcal{S}_α により essentially dominate されていれば, 前述の W. Arendt の結果と同じ結論が成り立つ.

$\alpha = 1$ の場合, この結果は, W. Arendt の示した定理と同値である. α の範囲が, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ となっているが, 今回, $\alpha \in (0, 1]$ にできることが分かった.

定理. $T = (T(t))_{t \geq 0}$ を $L^2(\Omega)$ 上の C_0 -半群とする. ある $\alpha \in (0, 1]$ に対し, T は \mathcal{S}_α により essentially dominate されると仮定する. このとき, 任意の $p \in [1, \infty)$ に対し, T と consistent な $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在して, $T_2 = T$, 及び, 次を満たす:

$$\rho_\infty(A_p) = \rho_\infty(A_2).$$

但し, A_p は T_p の生成作用素であり, $\rho_\infty(A_p)$ は, 前述の通り, $\rho(A_p)$ の連結成分のうち, ある $w \in \mathbb{R}$ に対し, 右半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > w\}$ を含むものである.

positive 性に関する定義を挙げる: $p \in [1, \infty)$ とする.

$f, g \in L^p(\Omega)$ に対し, $f \geq g$ とは, $f(x) \geq g(x)$ (a.e. $x \in \Omega$) のことである. 特に, $g(x) \equiv 0$ のとき, $f \geq 0$ と書く.

有界線型作用素 $B: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ が positive とは, 任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対し, $f \geq 0 \Rightarrow Bf \geq 0$ が成り立つことであり, $B \geq 0$ とも表す.

半群 $S = (S(t))_{t \geq 0}$ が positive というのは, $S(t) \geq 0$ ($t \geq 0$) ということである.

2 定理の証明の概要

2.1 全体の俯瞰

定理の仮定と同じく, $T = (T(t))_{t \geq 0}$ は $L^2(\Omega)$ 上の C_0 -半群とし, \mathcal{S}_α により essentially dominate されると仮定する.

W. Arendt は, T が upper Gaussian estimate を持つとき, 任意の $t > 0$ に対し, $T(t)$ が積分作用素であることを示し, その積分核の評価をもとに, 前述の定理を示した. 今回の証明は, W. Arendt のこの証明法を踏襲する. 用いる積分核の評価は命題 1, 2 で述べる.

先に証明を俯瞰する. 積分核の評価 (命題 1) を足掛かりに, 2.2 において, 任意の $p \in [1, \infty)$ に対し, T と consistent な $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在することが示される. 次に, 積分核の評価 (命題 1, 2 の組み合わせ) により, W. Arendt の証明方法が使えるようになる. 結果, 2.3 において, T_p の生成作用素 A_p に対し, スペクトルの不変性が示される.

任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対し, \mathcal{S}_α と並行して, $S_\alpha := (S_\alpha(t))_{t \geq 0}$, $S_\alpha(t) := e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ ($t \geq 0$) とおく. 後に述べる命題 3 より, S_α は, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の positive な C_0 -半群である. また, $K_\alpha(t, x) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} d\xi$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^N$) とおく. $S_\alpha(t)$ ($t > 0$) の積分核が, $K_\alpha(t, x - y)$ であることは, 命題 3 で述べる.

命題 1. $0 < \alpha \leq 1$ とする. ある $C > 0$ が存在して,

$$0 \leq K_\alpha(t, x) \leq C \frac{t}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x|^2)^{\frac{N}{2} + \alpha}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

$$\mathcal{K}_\alpha(t, x) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-t(1+|\xi|^2)^\alpha} d\xi \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N) \text{ とおく.}$$

命題 2 ([3, Proposition 2.4]). $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \delta < 1$ とする. ある $C > 0$ が存在して,

$$0 \leq \mathcal{K}_\alpha(t, x) \leq C \frac{e^{-\delta|x|}}{t^{\frac{N}{2\alpha}}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ.

命題 1 の証明について, 注意と補足説明をしておく. 最初に, $|K_\alpha(t, x)|$ について, 同じ不等式が成り立つことを証明する. $N = 1$ の場合は, F.W.J. Olver [4, Theorem 1] の証明をなぞれば良い. $N \geq 2$ の場合は, G.E. Andrew, R. Askey and R. Roy [1, Section 9.10] の結果を使うことにより, $N = 1$ の場合と並行して証明できる.

その後, これを用い, 次の命題 3 を証明する. 命題 3 (1), (2) から, $K_\alpha(t, x) \geq 0$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^N$) が示される.

命題 3. $0 < \alpha \leq 1$ とする. このとき, 次のことが成り立つ.

(1) $S_\alpha(t) \geq 0$ ($t \geq 0$)

(2) $S_\alpha(t)f = K_\alpha(t, \cdot) * f$ ($t > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^N)$)

(3) 任意の $p \in [1, \infty)$ に対し, $S_\alpha = (S_\alpha(t))_{t \geq 0}$ と consistent な $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上の C_0 -半群 $S_{\alpha,p} = (S_{\alpha,p}(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在し, $S_{\alpha,2} = S_\alpha$ 及び

$$S_{\alpha,p}(t)f = K_\alpha(t, \cdot) * f \quad (t > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^N))$$

が成り立つ. また, $S_{\alpha,p}$ は positive, contractive である. (K_α が p に依存しないことに注意.)

証明は, 命題 1 を用いて, [3, Proposition 2.3] と同様にできる. [3, Proposition 2.3] は, 命題 3 の S_α, K_α をそれぞれ $\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha$ に代えた主張である.

2.2 consistent な半群の存在

実は, T が \mathcal{S}_α により essentially dominate されているとき, 必然的に S_α によっても essentially dominate される (後述の命題 5 の後の説明を参照). 命題 4 は, S_α により essentially dominate されている, $L^2(\Omega)$ 上の C_0 -半群が, consistent な半群を持つという主張である. これにより, 定理の仮定のもとで, T と consistent な半群 T_p が存在する.

$p, q \in [1, \infty)$ とする. 有界線型作用素 $B : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ が積分作用素であるとは, $\Omega \times \Omega$ 上のある可測関数 K が存在して, 任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対し,

$$(Bf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y) dy \quad (\text{a.e. } x \in \Omega)$$

が成り立つことをいう. このことを $B \sim K(x, y)$ で表す. また, K を B の積分核という.

命題 4. $T = (T(t))_{t \geq 0}$ を $L^2(\Omega)$ 上の C_0 -半群とする. ある $\alpha \in (0, 1]$ に対し, T は S_α により essentially dominate されると仮定する. このとき, 任意の $t > 0$ に対し, $\Omega \times \Omega$ 上のある可測関数 $K(t, \cdot, \cdot)$ が存在して, $T(t) \sim K(t, x, y)$ 及び

$$|K(t, x, y)| \leq Me^{\omega t} K_\alpha(bt, x - y) \quad (\text{a.e. } (x, y) \in \Omega \times \Omega)$$

が成り立つ. また, 任意の $p \in [1, \infty)$ に対し, T と consistent な $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在し, $T_2 = T$, $T_p(t) \sim K(t, x, y)$ が成り立つ. (K が p に依存しないことに注意.)

T と consistent な半群の存在のみであれば、仮定と、命題 1 (3) で述べた $S_{\alpha,p}$ の contractive 性から、すぐ従う。 $T(t)$ の積分核の存在は、[2, Proposition 6.2] を、 T_p の C_0 -性は、[2, p.1160] を、それぞれ参照すれば分かる。

2.3 スペクトルの不変性

命題 1,2 より、 \mathcal{K}_α に対する次の評価式が導かれる：

命題 5. $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \delta < 1$, $0 < \theta < 1$ とする。ある $C > 0$ が存在して、

$$0 \leq \mathcal{K}_\alpha(t, x) \leq C \frac{e^{-\delta(1-\theta)|x|} t^{\frac{1}{2\alpha}\{(N+2\alpha)\theta-N\}}}{|x|^{(N+2\alpha)\theta}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ。

[3, Proposition 3.1] より、任意の $t > 0$ と任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$ に対し、 $0 \leq \mathcal{S}_\alpha(t)f \leq S_\alpha(t)f$ である。これより、任意の $t > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対し、 $0 \leq \mathcal{K}_\alpha(t, x) \leq K_\alpha(t, x)$ が成り立つ。 $\theta \in (0, 1)$ としたとき、 $0 \leq \mathcal{K}_\alpha(t, x) \leq \mathcal{K}_\alpha(t, x)^{1-\theta} K_\alpha(t, x)^\theta$ であるから、これに命題 1,2 を適用すれば、命題 5 が得られる。

尚、 $\alpha \in (1/2, 1]$ のとき、 $\theta = (N+1)/(N+2\alpha)$ と取ると、[3, Proposition 2.5] が導かれる。

命題 2 と $N/(N+2\alpha) < \theta < 1$ としたときの命題 5 を用いることにより、[2] において W. Arendt が用いた証明法を実行できる。W. Arendt は、本定理の $\alpha = 1$ の場合と同値な定理を得ている。

$\mathcal{K}_1(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-(t+\frac{|x|^2}{4t})}$ である。これと比較して、 t が 0 に近いとき、命題 2 は悪い評価である。

$N/(N+2\alpha) < \theta < 1$ としたときの命題 5 は、この欠点を補う働きをしている。以下で、W. Arendt の証明法の概略を説明する。複雑な証明法のため、詳細までは立ち入れない。

記号を 1 つ定義しておく。 $p, q, r \in [1, \infty]$, 有界線型作用素 $B : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ に対し、

$$\|B\|_{q,r} := \sup\{\|Bf\|_{L^r} \mid f \in L^p \cap L^q, \|f\|_{L^q} \leq 1\}$$

とする。

$p, q \in [1, \infty)$ とする。また、 $\mu \in \rho_\infty(A_p)$ とする。 $\mu \in \rho_\infty(A_q)$ を示すには、

$$\|T_p(1)(\mu - A_p)^{-1}\|_{q,q} < \infty$$

が言えれば十分である ([2, p.1166, 1167])。

2.2 において、任意の $p \in [1, \infty)$ に対し、 T と consistent な $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在することを示した。この T_p をもとに、ある $\varepsilon_0 > 0$ と、ある $C_0 > 0$ で、 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ なる任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ に対し、以下の性質を持つ、 $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_{\varepsilon,p} = (T_{\varepsilon,p}(t))_{t \geq 0}$ が存在するようなものがあることを示せる：

- (1) $T_{0,p} = T_p$ ($p \in [1, \infty)$) .
- (2) $\mu \in [\rho(A_{\varepsilon,p}) \cap \rho(A_p)]_\infty$. 但し、 $A_{\varepsilon,p}$ は $T_{\varepsilon,p}$ の生成作用素である.
- (3) ある $K_\varepsilon \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ で、 $T_{\varepsilon,p}(1)(\mu - A_{\varepsilon,p})^{-1} \sim K_\varepsilon(x, y)$, 及び、

$$|K_\varepsilon(x, y)| \leq C_0 \quad (\text{a.e. } (x, y) \in \Omega \times \Omega)$$

となるものが存在する。

$T_{\varepsilon,p}$ の存在については、後述することにする。

$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ のとき、 $f, e^{-\varepsilon} f \in L^p$ なる f に対して、 $T_{\varepsilon,p}(1)(\mu - A_{\varepsilon,p})^{-1} = e^{\varepsilon x} [T_p(1)(\mu - A_p)^{-1}](e^{-\varepsilon} \cdot f)$ が成り立つ。(3) と合わせて、

$$|K_0(x, y)| \leq C_0 e^{-\varepsilon_0|x-y|} \quad (\text{a.e. } (x, y) \in \Omega \times \Omega)$$

を得る。これより、 $\|T_p(1)(\mu - A_p)^{-1}\|_{q,q} < \infty$ となるので、 $\mu \in \rho_\infty(A_q)$ 。

では、 $T_{\varepsilon,p}$ の存在について説明する。 $p \in [1, \infty)$ とし、 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ は $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ とする。

$L_\varepsilon^p(\Omega) := L^p(\Omega, e^{-\varepsilon x} dx)$ とする (εx は ε と x の標準内積)。 $U_{\varepsilon,p} : L_\varepsilon^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ を、

$$(U_{\varepsilon,p} f)(x) := e^{-\varepsilon x} f(x) \quad (f \in L_\varepsilon^p(\Omega))$$

とする。このとき、 $U_{\varepsilon,p}$ は、等長同型である。

ここで、

$$\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) := U_{\varepsilon,p}^{-1} T_p(t) U_{\varepsilon,p} \quad (t \geq 0)$$

とおく。 $\tilde{T}_{\varepsilon,p} := (\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t \geq 0}$ は $L_\varepsilon^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群である。(この構成から見て、命題 2 が必要であることは見当がつくと思う。)

$T_{\varepsilon,p}$ は、任意の $f \in L^p(\Omega) \cap L_\varepsilon^p(\Omega)$ に対し、

$$T_{\varepsilon,p}(t)f = \tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f$$

が成り立つ、 $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群として、一意的に定まる。

これらを証明するには、先に、 $\mathcal{S}_{\alpha,p}$ について同様の主張の成り立つことを示しておく。その際、命題 2 と $N/(N+2\alpha) < \theta < 1$ としたときの命題 5 が必要である。その後、 T が \mathcal{S}_α により essentially dominate されていることを用いて、上の主張を示す。

このようにして得られた $T_{\varepsilon,p}$ が、前頁の (1) ~ (3) を満たすことを示すには、まだ手数がかかる。それらについても、[2] の証明とは、用いる評価式が異なるだけで、同様な証明ができる。

参考文献

- [1] G.E. Andrew, R. Askey and R. Roy, "Special Functions," Cambridge University Press, 1999.
- [2] W. Arendt, *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p* , Differential and Integral Equations **7**(no. 5)(1994), 1153-1168.
- [3] S. Miyajima and M. Ishikawa, *Generalization of Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p* , SUT Journal of Mathematics **31**(no. 2)(1995), 161-176.
- [4] F.W.J. Olver, *Error bounds for stationary phase approximations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **5**(no. 1)(1974), 19-29.

Higher order uniformly elliptic differential operators

Nagaoka Kōtarō (Graduate School of Mathematics, Tokyo University of Science)

1 Introduction

Davies は [6] において、有界可測関数を係数にもつ高階の一様楕円型作用素

$$H = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha, \beta}(x) D^\beta \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)$$

に関して以下に説明するような L^p スペクトル理論を、半群理論、2次形式、新式の functional calculus を駆使し展開した。この論文の主な結果は、 $2m > N$ の場合、 $-H$ の生成する angle $\pi/2$ の有界解析半群 e^{-Hz} が積分核 $K(z, x, y)$ (ここでは heat kernel と呼ぶ) をもち、Gaussian type の評価と呼ばれる次の評価が成り立つことを示したことである：

$$|K(z, x, y)| \leq c_1 (r \cos \theta)^{-\frac{N}{2m}} \exp \left(-\frac{c_2 |x - y|^{\frac{2m}{2m-1}} \cos \theta}{r^{\frac{1}{2m-1}}} + kr \cos \theta \right)$$

ここで $c_1, c_2 > 0$, $k \geq 0$ は定数, $z = re^{i\theta}$ とする。この評価から、 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の作用素 e^{-Hz} が任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上の angle $\pi/2$ の有界解析半群 $T_p(z)$ に拡張できることが分かる。さらに $T_p(z)$ のノルム評価を求めることにより、 $T_p(z)$ の生成作用素を $-H_p$ としたとき、 $\sigma(-H_p) = \sigma(-H)$ であることを functional calculus を使って証明している。特に heat kernel の評価は $m = 1$ の場合 Davies 自身の研究 [3] があるが、 $m = 1$ と $m > 1$ では本質的に解析が異なる部分があり、前者は heat kernel $K(t, x, y)$ が正値であるのに対して後者のそれは正値ではない。この性質が2階と高階を隔てる大きな溝といえるだろう。一方 $2m < N$ の場合は $2m > N$ の場合に比べて解析が難しく、具体的にいうと、heat kernel の存在が一般に分からなくなる。しかし Davies は $L^p(L^q)$ という空間を使って、同様に半群の拡張 (ただし全ての $p \in [1, \infty)$ というわけにはいかなくなるが)、そのノルム評価、スペクトルの L^p 不変性を示した。本発表において、 $2m > N$ の場合でも半群のノルム評価を heat kernel ではなく $L^p(L^q)$ を使って得られることを紹介する。そしてこの評価は heat kernel を使って求めた評価よりも良くなった。具体的に、

$$\text{heat kernel} \Rightarrow \|T_p(z)\|_{p,p} \leq c_1 (\cos \theta)^{-2N|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|} \exp(kr \cos \theta)$$

$$L^p(L^q) \Rightarrow \|T_p(z)\|_{p,p} \leq c_1 (\cos \theta)^{-2\frac{(4m-1)N}{4m}|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|} \exp(kr \cos \theta)$$

となって微分の階数を含めることができた。また $\cos \theta$ のべきを求めることは integrated semigroup の理論 [2] に関連があることが知られている。

さて今までの議論は全て \mathbb{R}^N の中で考えているのだが、Davies は Barbatis との共著 [1] において \mathbb{R}^N を \mathbb{R}^N の一般の領域に変えている。彼らが考えているのは $2m > N$ の場合で、heat kernel の存在、 $|K(t, x, y)|$ の評価を得ているが、これから $|K(z, x, y)|$ の評価を得ることはもはや容易であり、

特に今は有界領域の場合を考え、半群のノルム評価を（微分の階数が含まれた形で）求めることができた。最後に、特定の関数 f に一様楕円型作用素 H を代入して得られる $f(H)$ の積分核の存在、及びその評価について説明する。

2 定義

α, β は multi index, $L^p := L^p(\mathbb{R}^N)$, $H^m := H^m(\mathbb{R}^N)$, $\|\cdot\|_p$ は L^p ノルム, $(\cdot, \cdot)_2$ は L^2 内積, 有界作用素 $A : L^2 \rightarrow L^2$ に対して $\|A\|_{p,q} := \sup\{\|Af\|_q ; f \in L^2 \cap L^p, \|f\|_p = 1\}$ とする。まず楕円型作用素を定義しよう。 $|\alpha|, |\beta| \leq m$ に対して $a_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ は有界可測関数とし、行列 $(a_{\alpha,\beta})_{|\alpha|,|\beta|=m}$ は自己共役であるとする。このとき定数 $\mu \geq 1$ が存在して

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{0,\alpha,\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta \leq \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x) \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta \leq \mu \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{0,\alpha,\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$$

(for all $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \oplus_{|\alpha|=m} \mathbb{C}$) を満たすとする。ここで、 $a_{0,\alpha,\beta}$ は

$$((-\Delta)^m u, v)_2 = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \int_{\mathbb{R}^N} a_{0,\alpha,\beta}(x) D^\alpha u D^\beta \bar{v} dx$$

(for all $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) として定義されるものとする。一方、2次形式 $Q : H^m \times H^m \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Q(u, v) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} a_{\alpha,\beta} D^\alpha u D^\beta \bar{v} dx \quad (\text{for } u, v \in H^m)$$

と定義する。また $Q(u) := Q(u, u)$ (for $u \in \mathcal{D}(Q) := H^m$) とする。一般に $Q(u)$ は負の値もとるが、十分大きな定数 c をとって $c\|u\|_2^2$ を加えることにより負にはならないとする（とできる）。このとき Q は対称閉形式であることが分かり、従って、非負自己共役作用素 H が存在して

$$Q(u) = \|H^{\frac{1}{2}} u\|_2^2 \quad (\text{for } u \in \mathcal{D}(H^{\frac{1}{2}}) = H^m)$$

が成り立つ。この H を形式的に $H = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} D^\alpha a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta$ と表わし、超楕円型作用素 (superelliptic operator) と呼ぶ。次に、

$$\mathcal{E}_m := \{ \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N) ; \|D^\alpha \varphi\|_\infty \leq 1, \text{ for all } 1 \leq |\alpha| \leq m \}$$

とし、 \mathbb{R}^N のコンパクト集合で共通部分をもたない E, F に対して

$$d(E, F) := \sup_{\varphi \in \mathcal{E}_m} \{ \inf_{x \in E} \varphi(x) - \sup_{y \in F} \varphi(y) \}$$

とする。特に E, F が凸集合のときは通常のユークリッド距離 $\bar{d}(E, F)$ と同値になり

$$\bar{d}(E, F) \leq d(E, F) \leq \sqrt{N} \bar{d}(E, F)$$

が成り立つ。さらに $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{E}_m$ に対して $Q_{\lambda\varphi} : H^m \times H^m \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$Q_{\lambda\varphi}(u, v) := Q(e^{-\lambda\varphi} u, e^{\lambda\varphi} v) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} a_{\alpha,\beta}(x) (e^{\lambda\varphi} D^\alpha e^{-\lambda\varphi} u) (e^{-\lambda\varphi} D^\beta e^{\lambda\varphi} \bar{v}) dx$$

と定義する。 $Q_{\lambda\varphi}(u) := Q_{\lambda\varphi}(u, u)$ (for $u \in \mathcal{D}(Q_{\lambda\varphi}) := H^m$) とする。 $H_{\lambda\varphi} := e^{-\lambda\varphi} H e^{\lambda\varphi}$, $\mathcal{D}(H_{\lambda\varphi}) := \{ u \in L^2; e^{\lambda\varphi} u \in \mathcal{D}(H) \}$ とおく。このときある定数 $k \geq 0$ で

$$|Q_{\lambda\varphi}(u) - Q(u)| \leq \frac{1}{4} Q(u) + k(1 + \lambda^{2m}) \|u\|_2^2 \quad (\text{for all } \lambda \in \mathbb{R}, u \in H^m)$$

が成り立つことが分かり重要な鍵となる。 $-H$ は L^2 上の angle $\pi/2$ の有界解析半群を生成することに注意。また Hille の公式より, $e^{-H_{\lambda\varphi} t} = e^{-\lambda\varphi} e^{-Ht} e^{\lambda\varphi}$ が成り立つ。従って $-H_{\lambda\varphi}$ も angle $\pi/2$ の有界解析半群を生成する。

3 定理、補題

$2m > N$ とする。次の評価が得られた:

定理 1. 定数 $c_1 > 0, k \geq 0$ が存在して

$$\|T_p(z)\|_{p,p} \leq c_1 (\cos \theta)^{-2\frac{(4m-1)N}{4m}|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|} \exp(kr \cos \theta)$$

(for all $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $|\theta| < \pi/2$, $p \in [1, \infty]$) が成り立つ。

系 1. 任意の $p \in [1, \infty), n > (4m-1)N|1/2 - 1/p|/2m$ に対して iH_p は n -times integrated semi-group を生成する。

補題 1. 定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$\|e^{-H_{\lambda\varphi} t}\|_{2,\infty} \leq c_1 t^{-\frac{N}{4m}} \exp(c_2(1 + \lambda^{2m})t)$$

(for all $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{E}_m$) が成り立つ。

補題 2. 定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$\|P_E e^{-Hz} P_F\|_{2,\infty} \leq c_1 (r \cos \theta)^{-\frac{N}{4m}} \exp(c_2 r \cos \theta)$$

(for all $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $|\theta| < \pi/2$, E, F : closed in \mathbb{R}^N) が成り立つ。ただし $P_E u := \chi_E u$ とする。 P_F も同様。

補題 3. 定数 $c_1, c_2 > 0, k \geq 0$ が存在して

$$\|P_E e^{-Hz} P_F\|_{2,\infty} \leq c_1 (r \cos \theta)^{-\frac{N}{4m}} \exp\left(-\frac{c_2 d(E, F)^{\frac{2m}{2m-1}} \cos \theta}{r^{\frac{1}{2m-1}}} + kr \cos \theta\right)$$

(for all $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $|\theta| < \pi/2$, E, F : compact, convex, disjoint in \mathbb{R}^N) が成り立つ。

次に有界領域の場合を考える。 $2m > N$ とする。

定理 2. 定数 $c_1, c_2 > 0, k \geq 0$ が存在して

$$\|T_p(z)\|_{p,p} \leq c_1 (\cos \theta)^{-\frac{(2m+1)N}{2m}|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|} \exp(kr \cos \theta)$$

(for all $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $|\theta| < \pi/2$, $p \in [1, \infty]$) が成り立つ。

系 2. 任意の $p \in [1, \infty)$, $n > (2m+1)N|1/2-1/p|/2m$ に対して iH_p は n -times integrated semigroup を生成する。

補題 4. e^{-Ht} は heat kernel $K(t, x, y)$ をもち, 定数 $c_1, c_2 > 0, k \geq 0$ が存在して

$$|K(t, x, y)| \leq c_1 t^{-\frac{N}{2m}} \exp\left(-\frac{c_2|x-y|^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}} + kt\right)$$

(for all $t > 0, x, y \in \Omega$) が成り立つ。

補題 5. $K(t, x, y)$ は右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ へ解析的に延長され, 定数 $c_1, c_2 > 0, k \geq 0$ が存在して

$$|K(z, x, y)| \leq c_1 (r \cos \theta)^{-\frac{N}{2m}} \exp\left(-\frac{c_2|x-y|^{\frac{2m}{2m-1}} \cos \theta}{r^{\frac{1}{2m-1}}} + kr \cos \theta\right)$$

(for all $z = re^{i\theta}, r > 0, |\theta| < \pi/2, x, y \in \Omega$) が成り立つ。

最後に $f(H)$ の積分核 $G_f(x, y)$ についてひとつ紹介する。ただし $2m > N$ の場合で, heat kernel の評価において $k = 0$ であるとする (これは H が homogeneous であるとき成り立つ)。 \mathbb{R}^N で考えるが, 一般の領域でも構わない。

命題 3. $f_t(s) := (1+s)^{-\gamma} e^{ist}$, (for $s, t \geq 0, \gamma > N/2m$) とする。このとき $f_t(H)$ は積分核 $G_f(t, x, y)$ をもち

$$|G_f(t, x, y)| \leq c_\delta (1+t)^{\frac{2m\delta}{2m-1}} (1+|x-y|)^{-\frac{2m\delta}{2m-1}} \quad (\text{for all } t > 0, x, y \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ。ただし c_δ は任意の $0 < \delta < \gamma - N/2m$ に対する定数とする。特に $\gamma > N+1$ の場合

$$|G_f(t, x, y)| \leq c_1 (1+t)^{N+2} (1+|x-y|)^{-(N+\epsilon)} \quad (\text{for all } t > 0, x, y \in \mathbb{R}^N)$$

が成り立つ。 $c_1 > 0, 0 < \epsilon < 1$ は定数。

参考文献

- [1] G. Barbatis and E.B. Davies, *Sharp bounds on heat kernels of higher order uniformly elliptic operators*, J. Operator Theory **36** (1996) 179-198
- [2] Boyadzhiev. K and Delaubenfels. R, *Boundary values of holomorphic semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993) 113-11
- [3] E.B. Davies, *The functional calculus*, J. London Math. Soc. (2) **52** (1995) 166-176
- [4] E.B. Davies, *L^p spectral independence and L^1 analyticity*, J. London Math. Soc. (2) **52** (1995) 177-184
- [5] E.B. Davies, *Uniformly elliptic operators with measurable coefficients*, J. Funct. Anal. **132** (1995) 141-169
- [6] M.M.H. Pang, *Resolvent estimates for Schrödinger operators in $L^p(\mathbb{R}^N)$ and the theory of exponentially bounded C -semigroups*, Semigroup Forum **41** (1990) 97-114

Relations between two operator inequalities via operator means

Masatoshi Ito

Faculty of Science, Tokyo University of Science

Abstract

Let A and B be (not necessarily invertible) positive operators. We shall show relations between two operator inequalities

$$f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B \quad \text{and} \quad A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),$$

where f and g are non-negative continuous functions on $[0, \infty)$ satisfying $f(t)g(t) = t$. This result is a generalization of some results on operator means via their representing functions.

1 Introduction

ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界線形作用素 (以下, 作用素と呼ぶ) T が正であるとは positive semidefinite, すなわち任意の $x \in H$ に対して $(Tx, x) \geq 0$ であることと定義し, $T \geq 0$ で表わす. また, $T \geq 0$ である作用素全体の集合を $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で表わす.

Kubo-Ando は [8] において作用素平均の理論についての詳細な研究を行った ([5] も参照). 2項演算 $\sigma : \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して次の (i)–(iii) を満たすとき, σ は作用素結合 (operator connection) であるという.

(i) $A \leq C$ and $B \leq D$ imply $A\sigma B \leq C\sigma D$,

(ii) $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$,

(iii) $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$, $A_n \downarrow A$ and $B_n \downarrow B$ imply $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$,

where $A_n \downarrow A$ means that $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ and A_n converges strongly to A .

さらに, 作用素結合 σ が

(iv) $I\sigma I = I$

を満たすとき, σ は作用素平均 (operator mean) であるという. 作用素結合 σ は, $[0, \infty)$ 上の作用素単調関数 $f \geq 0$ と 1 対 1 対応であり, この f (σ の表現関数と呼ばれる) を用いて

$$A\sigma B = A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

(但し, A は可逆とする) と表わされる. また, σ が作用素平均であることと $f(1) = 1$ であることが同値である.

作用素平均の例としては, 次が知られている. For positive invertible operators A and B , and for $\alpha \in [0, 1]$,

(i) Arithmetic mean: $A\nabla_\alpha B = (1 - \alpha)A + \alpha B$,

(ii) Geometric mean (α -power mean): $A\sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$,

(iii) Harmonic mean: $A!_\alpha B = \{(1 - \alpha)A^{-1} + \alpha B^{-1}\}^{-1}$.

$\nabla_\alpha, \sharp_\alpha, !_\alpha$ の表現関数は、それぞれ $(1 - \alpha) + \alpha t, t^\alpha, \{(1 - \alpha) + \alpha t^{-1}\}^{-1} = \frac{t}{(1 - \alpha)t + \alpha}$ である。これらの作用素平均に関して、次が知られている。Let A and B be positive invertible operators. For each $p \geq 0$ and $r \geq 0$,

$$B^{-r}\sharp_{\frac{r}{p+r}}A^p \geq I \iff I \geq A^{-p}\sharp_{\frac{p}{p+r}}B^r \quad (1.1)$$

and

$$B^{-r}\nabla_{\frac{r}{p+r}}A^p \geq I \iff I \geq A^{-p}!\frac{p}{p+r}B^r. \quad (1.2)$$

(1.1) は [4] で示されている。また、(1.1) は古田不等式 [3] と密接な関連を持っており、[1], [7] などでは古田不等式に対する作用素平均の理論を用いたアプローチが行われている。(1.1), (1.2) の不等式については次のような関係を持つことに注意しておく。Let A and B be positive invertible operators. For each $p \geq 0$ and $r \geq 0$,

$$A \geq B \implies \log A \geq \log B \implies \begin{cases} B^{-r}\sharp_{\frac{r}{p+r}}A^p \geq I, \\ I \geq A^{-p}\sharp_{\frac{p}{p+r}}B^r \end{cases} \implies \begin{cases} B^{-r}\nabla_{\frac{r}{p+r}}A^p \geq I, \\ I \geq A^{-p}!\frac{p}{p+r}B^r. \end{cases}$$

1 番目の不等式は $\log t$ が作用素単調であることよりわかる。2 番目の不等式は [2][4] で示されている。3 番目の不等式は $t \geq 0, \alpha \in [0, 1]$ に対して $(1 - \alpha) + \alpha t \geq t^\alpha \geq \frac{t}{(1 - \alpha)t + \alpha}$ が成り立つことよりわかる。

本報告では、まず、一般の作用素平均に対して (1.1), (1.2) と対応する関係を紹介する。そして、そこで紹介した関係の可逆とは限らない一般の作用素 A, B に対する拡張として、2 つの不等式

$$f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B \quad \text{and} \quad A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$$

($f, g \geq 0$ は $f(t)g(t) = t$ を満たすような $[0, \infty)$ 上の連続関数) の関係についての結果を紹介する。この結果は、[6] や [10] で得られた結果の一般化にもなっている。

2 A result on a general operator mean

まず、ある作用素平均 σ から派生するいくつかの作用素平均の定義と、その性質に関する結果を述べる。

Definition ([8]). Let σ be the operator mean with a representing function f .

- (i) σ' is said to be the transpose of σ if σ' is the operator mean with a representing function $tf(t^{-1})$.
- (ii) σ^* is said to be the adjoint of σ if σ^* is the operator mean with a representing function $\{f(t^{-1})\}^{-1}$.

(iii) σ^\perp is said to be the dual of σ if σ^\perp is the operator mean with a representing function $\frac{t}{f(t)}$.

f は作用素単調なので、これらの表現関数の 0 における値は $t \rightarrow +0$ の極限值で定めることができることに注意する。

Proposition 2.A ([8]). *Let σ be an operator mean and $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$.*

(i) $A\sigma'B = B\sigma A.$

(ii) $A\sigma^*B = (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}$ if A and B are invertible.

(iii) $(\sigma')' = (\sigma^*)^* = (\sigma^\perp)^\perp = \sigma.$

(iv) $\sigma^\perp = (\sigma')^* = (\sigma^*)', \sigma' = (\sigma^*)^\perp = (\sigma^\perp)^*$ and $\sigma^* = (\sigma^\perp)' = (\sigma')^\perp.$

Proposition 2.A を使って、(1.1), (1.2) と対応した一般の作用素平均に対する結果を得ることができる。

Proposition 2.1. *Let A and B be positive invertible operators. For every operator mean σ ,*

$$B^{-1}\sigma A \geq I \iff I \geq A^{-1}\sigma^\perp B. \quad (2.1)$$

Proof. By (i) of Proposition 2.A,

$$B^{-1}\sigma A = A\sigma'B^{-1} \geq I. \quad (2.2)$$

By (ii) and (iv) of Proposition 2.A, (2.2) is equivalent to

$$I \geq (A\sigma'B^{-1})^{-1} = A^{-1}(\sigma')^*B = A^{-1}\sigma^\perp B.$$

Hence the proof is complete. □

$(\sharp_\alpha)^\perp = \sharp_{1-\alpha}, (\nabla_\alpha)^\perp = \nabla_{1-\alpha}$ なので、Proposition 2.1 において A を A^p, B を B^r にそれぞれ置き換え、 $\sigma = \sharp_{\frac{r}{p+r}}, \sigma = \nabla_{\frac{r}{p+r}}$ と置くことにより (1.1), (1.2) を得ることができる。

また、(2.1) は σ の表現関数 f を用いて

$$f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B \iff A \geq \frac{A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}}{f(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})} \quad (2.3)$$

と表わすことができることに注意する。

3 Main results

(1.1), (1.2) を表現関数を用いて次のように書き換えると、 A, B が可逆でない場合についても考えることができる。

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r \iff A^p \geq (A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}, \quad (3.1)$$

$$\frac{p}{p+r}I + \frac{r}{p+r}B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}} \geq B^r \iff A^p \geq \frac{A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}}}{\frac{r}{p+r}A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{p+r}I}. \quad (3.2)$$

(3.1), (3.2) の 2 つの不等式の関係について、 A, B が可逆とは限らない一般の場合の結果として [6], [10] で次の結果が示された。

Theorem 3.A ([6]). *Let A and B be positive operators. Then for each $p \geq 0$ and $r \geq 0$, the following assertions hold:*

(i) *If $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$, then $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$.*

(ii) *If $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ and $N(A) \subseteq N(B)$, then $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$.*

Theorem 3.B ([10]). *Let A and B be positive operators. Then for each $p > 0$ and $r \geq 0$, the following assertions hold:*

(i) *If $\frac{p}{p+r}I + \frac{r}{p+r}B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}} \geq B^r$, then $A^p \geq \frac{A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}}}{\frac{r}{p+r}A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{p+r}I}$.*

(ii) *If $A^p \geq \frac{A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}}}{\frac{r}{p+r}A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}} + \frac{p}{p+r}I}$ and $N(A) \subseteq N(B)$, then $\frac{p}{p+r}I + \frac{r}{p+r}B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}} \geq B^r$.*

これと同様にして、(2.3)の形を考えることにより、Proposition 2.1の拡張として次の結果を得ることができる。この結果はTheorem 3.A, Theorem 3.Bの拡張にもなっている。

Theorem 3.1. *Let A and B be positive operators, and let f and g be non-negative continuous functions on $[0, \infty)$ satisfying*

$$f(t)g(t) = t. \quad (3.3)$$

(i) *If $g(0) = 0$ or $N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$, then $f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B$ ensures $A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$.*

(ii) *If $N(A) \subseteq N(B)$, then $A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$ ensures $f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B$.*

Theorem 3.1において、 f, g は作用素単調でなくてもよい。また、 $f(0) > 0$ ならば(3.3)より $g(0) = 0$ となることに注意しておく。

Theorem 3.1において、 A, B を可逆、 σ を表現関数が f である作用素平均とすると、(2.1)と(2.3)が同値であることよりProposition 2.1を導く。また、Theorem 3.1において A を A^p, B を B^r にそれぞれ置き換え、 $f(t) = t^{\frac{r}{p+r}}, g(t) = t^{\frac{p}{p+r}}$ と置くとTheorem 3.Aを、 $f(t) = \frac{p}{p+r} + \frac{r}{p+r}t, g(t) = \frac{t}{\frac{r}{p+r}t + \frac{p}{p+r}}$ と置くとTheorem 3.Bをそれぞれ導く。このとき、どちらの場合も $g(0) = 0$ であることに注意する。

Theorem 3.1の証明に対しては次の補題を用いる。

Lemma 3.C. *Let T be a positive operator. Then*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T^{\frac{1}{2}}(T + \varepsilon I)^{-1}T^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (T + \varepsilon I)^{-1}T = P_{N(T)^\perp},$$

where $P_{\mathcal{M}}$ is a projection onto a closed subspace \mathcal{M} .

Lemma 3.Cはよく知られた結果であり、[9]や[6]などで示されている。

Lemma 3.2. *Let f be a non-negative continuous function on $[0, \infty)$ such that $f(0) = 0$ and $f(t) > 0$ for $t > 0$. Then $N(f(T)) = N(T)$ for every positive operator T .*

Lemma 3.3. Let $T = U|T|$ be the polar decomposition of an operator T , and let f be a continuous function on $[0, \infty)$. Then $Uf(|T|)U^* = f(|T^*|) - f(0)(I - UU^*)$.

Lemma 3.2, Lemma 3.3 の証明は省略する.

Proof of Theorem 3.1. Let $\varepsilon > 0$.

Proof of (i). Since $f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B$, we obtain

$$(B + \varepsilon I)^{-1} \geq \{f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2) + \varepsilon I\}^{-1}.$$

Let $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = U|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|$ be the polar decomposition of $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$. Then we have

$$\begin{aligned} & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}(B + \varepsilon I)^{-1}B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\ & \geq A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\{f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2) + \varepsilon I\}^{-1}B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\ & = U|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|\{f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2) + \varepsilon I\}^{-1}|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|U^* \\ & = U\{f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2) + \varepsilon I\}^{-1}|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2U^* \\ & = U\{f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2) + \varepsilon I\}^{-1}f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)g(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)U^* \quad \text{by (3.3)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

In (3.4), by tending $\varepsilon \rightarrow +0$ and Lemma 3.C, we obtain

$$A^{\frac{1}{2}}P_{N(B)^\perp}A^{\frac{1}{2}} \geq UP_{N(f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2))^\perp}g(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)U^* = Ug(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)U^* \tag{3.5}$$

by the following: If $f(0) > 0$, then $f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)$ is invertible and $P_{N(f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2))^\perp} = I$. If $f(0) = 0$, then $UP_{N(f(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2))^\perp} = UP_{N(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)^\perp} = UP_{N(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^\perp} = U$ by Lemma 3.2.

Therefore, noting that $UU^* = P_{N(B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})^\perp} = P_{N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^\perp} = I$ if $N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$, we have

$$\begin{aligned} A & \geq A^{\frac{1}{2}}P_{N(B)^\perp}A^{\frac{1}{2}} \\ & \geq Ug(|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|^2)U^* \quad \text{by (3.5)} \\ & = g(|B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}|^2) - g(0)(I - UU^*) \quad \text{by Lemma 3.3} \\ & = g(|B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}|^2) \quad \text{since } g(0) = 0 \text{ or } N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\} \\ & = g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Hence the proof is complete. (ii) can be obtained by the similar way to (i). \square

Corollary 3.4. Let A and B be positive operators, and let f and g be positive continuous functions on $[0, \infty)$ satisfying $f(t)g(t) = t$. If $N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$, then $f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B$ is equivalent to $A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$.

Proof. Since $N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$ ensures $\{0\} = N(A) \subseteq N(B)$, $f(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq B$ is equivalent to $A \geq g(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})$ by Theorem 3.1. \square

もちろん, A, B が可逆ならば $N(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$ である.

References

- [1] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, **23** (1990), 67–72.
- [2] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161–169.
- [3] T.Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.
- [4] T.Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **59** (1992), 180–190.
- [5] F.Hiai and K.Yanagi, *Hilbert Spaces and Linear Operators*, Makinoshoten, 1995 (in Japanese).
- [6] M.Ito and T.Yamazaki, *Relations between two inequalities $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ and $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ and their applications*, Integral Equations Operator Theory, **44** (2002), 442–450.
- [7] E.Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33** (1988), 883–886.
- [8] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.
- [9] M.Uchiyama, *Further extension of the Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), 2899–2904.
- [10] T.Yamazaki and M.Yanagida, *Relations between two operator inequalities and their applications to paranormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **69** (2003), 377–389.

Relations among operator orders and operator inequalities

Masahiro Yanagida (Tokyo University of Science)

Masatoshi Ito (Tokyo University of Science)

Takeaki Yamazaki (Kanagawa University)

1 Furuta inequality と chaotic order の特徴付け

以下，作用素とはヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素であり，英大文字で表す．作用素 T が正であるとは正定値，即ち，すべての $x \in H$ に対して $(Tx, x) \geq 0$ であることとし， $T \geq 0$ と表す．また， T が可逆な正作用素であるとき， $T > 0$ と表す．

まず，正作用素の順序を保存する不等式である，次の結果を紹介する．

Theorem F (Furuta inequality [5]).

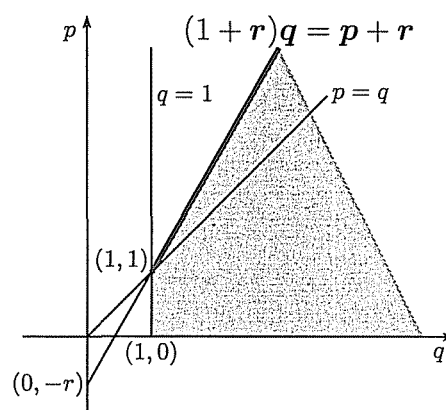
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

$$(i) \quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(ii) \quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.



Theorem F の (i) または (ii) において $r = 0$ とおくことにより，Löwner-Heinz の不等式 “ $A \geq B \geq 0$ ensures $A^\alpha \geq B^\alpha$ for any $\alpha \in [0, 1]$ ” が導かれる．Theorem F の 1 ページの簡潔な証明が [6] で与えられている．Theorem F のパラメータの領域は best possible であることが [15] で示されている．

$A, B > 0$ について， $\log A \geq \log B$ によって定義される順序を chaotic order と呼ぶ．Chaotic order は， $\log \cdot$ が作用素単調関数であることから， $A \geq B$ よりも弱い順序である．Theorem F の応用として，[1] の結果の拡張である，次の chaotic order の特徴付けが知られている．

Theorem A ([3][7]). *Let $A, B > 0$. Then the following are mutually equivalent:*

- (i) $\log A \geq \log B$.
- (ii) $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \geq B^r$ for all $p > 0$ and $r > 0$.
- (iii) $A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}}$ for all $p > 0$ and $r > 0$.

Theorem A の簡潔な別証明が [17] で与えられている。Theorem A のパラメータの領域は best possible であることが [18] で示されている。また、 $p, r > 0$ の値を固定したとき、 $A, B > 0$ について、

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \geq B^r \iff A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p+r}}$$

が成り立つことが、次の Lemma F から導かれる。

Lemma F ([9]). *Let $A > 0$ and B be an invertible operator. Then*

$$(BAB^*)^\lambda = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}A^{\frac{1}{2}}B^*$$

holds for any real number λ .

2 Relative operator entropy に関連する不等式

$A, B > 0$ について、relative operator entropy は $S(A | B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$ と定義される ([2])。 $S(A | I) = -A \log A$ は operator entropy である。Relative operator entropy について、次の結果が知られている。

Theorem B ([8]). *Let $A, B > 0$. Then the following are mutually equivalent:*

- (i) $\log A \geq \log B$.
- (ii) $\log A^{p+r} \geq \log(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})$ for all $p > 0$ and $r > 0$.
- (iii) $S(A^{-r} | A^p) \geq S(A^{-r} | B^p)$ for all $p > 0$ and $r > 0$.

$p, r > 0$ の値を固定したときは、Theorem A より、 $A, B > 0$ に関する順序と不等式について、次の関係が成り立つ。よって、Theorem B の (ii) \implies (i) は、Theorem A の (iii) \implies (i) の拡張である。

$$\log A \geq \log B \implies A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \implies \log A^{p+r} \geq \log(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}).$$

$p > 0 > r$ の場合について考える。Theorem A の応用として、次の結果が得られる。

Proposition 1. Let $A, B > 0$ and $p > 0$.

(i) In case $s > -p$, $\log A^{p+s} \geq \log(A^{\frac{s}{2}} B^p A^{\frac{s}{2}}) \iff A^{-s+r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{-s+r}{p+r}}$ for all $r > s$.

(ii) In case $s < -p$, $\log A^{p+s} \geq \log(A^{\frac{s}{2}} B^p A^{\frac{s}{2}}) \iff A^{-s+r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{-s+r}{p+r}}$ for all $r < s$.

特に, Proposition 1 の (i) で $s = -t$, $r = 0$ とおくことにより, [12, Propositions 1, 2] で $\beta \nearrow t$ としたときに対応する, 次の系が得られる.

Corollary 2. Let $A, B > 0$ and $p > t > 0$.

$$A^p \geq B^p \implies \log A^{p-t} \geq \log(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}) \implies A^t \geq B^t.$$

以上の結果をまとめると, 次のようになる.

(i) $p, r > 0$ のとき,

$$\begin{array}{l} A^p \geq B^p \implies \\ A^r \geq B^r \implies \end{array} \log A \geq \log B \implies \log A^{p+r} \geq \log(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}).$$

(ii) $p > t > 0$ のとき,

$$A^p \geq B^p \implies \log A^{p-t} \geq \log(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}) \implies A^t \geq B^t \implies \log A \geq \log B.$$

(iii) $t > p > 0$ のとき,

$$\begin{array}{l} A^t \geq B^t \implies A^p \geq B^p \implies \log A \geq \log B \\ \implies \log A^{p-t} \geq \log(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}). \end{array}$$

[16][18] の結果の応用として, Corollary 2 の best possibility に関する, 次の結果が得られる.

Proposition 3.

(i) Let $p > q > 0$ and $t > 0$. Then there exist $A, B > 0$ such that

$$A^q \geq B^q \quad \text{and} \quad \log A^{p-t} \not\geq \log(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}).$$

(ii) Let $p > t > 0$ and $q > t$. Then there exist $A, B > 0$ such that

$$\log A^{p-t} \geq \log(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}) \quad \text{and} \quad A^q \not\geq B^q.$$

Proposition 3 の応用として, 次の結果が得られる.

Theorem 4. *Let $p > t$, $s > 1$ and $r < 0$. Then there exist $A, B > 0$ such that*

$$A^p \geq B^p \quad \text{and} \quad \log A^{(p-t)s+r} \not\geq \log \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}.$$

Theorem 4 より, generalized Furuta inequality ([9]):

$$A \geq B \geq 0 \text{ with } A > 0 \implies A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

for $p \geq 1$, $t \in [0, 1]$, $s \geq 1$ and $r \geq t$

は, $p \geq 1$, $p > t$, $s > 1$, $r < 0$ では成り立たないことがわかる.

3 Chaotic order の特徴付けに表れる不等式

Theorem A の不等式においてパラメータの値を固定した場合について, 次の関係が示されている. 実際, $A, B > 0$ の場合は, Theorem F と Lemma F により示される.

Proposition C ([11][14]). *Let $A, B \geq 0$, $0 < p_1 \leq p_2$ and $0 < r_1 \leq r_2$.*

$$(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1} \implies (B^{\frac{r_2}{2}}A^{p_2}B^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{r_2}{p_2+r_2}} \geq B^{r_2}.$$

Proposition C において $p_1 > p_2$ または $r_1 > r_2$ の場合を考える. A, B が可逆でない場合について, [13, Theorems 5, 6] の証明を吟味することにより, 次が成り立つことがわかる.

Theorem D ([13]). *Let $p_1 > 0$ and $r_1 > 0$. Then there exist $A, B \geq 0$ such that*

$$(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1} \quad \text{and} \quad (B^{\frac{r_2}{2}}A^{p_2}B^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{r_2}{p_2+r_2}} \not\geq B^{r_2}$$

for all $p_2 > 0$ and $r_2 > 0$ such that $p_1 > p_2$.

A, B が可逆である場合について, $p_1 = r_1 = 2$, $p_2 = r_2 = 1$ のときの具体的な例として, 次が知られている.

Example E ([4][10]).

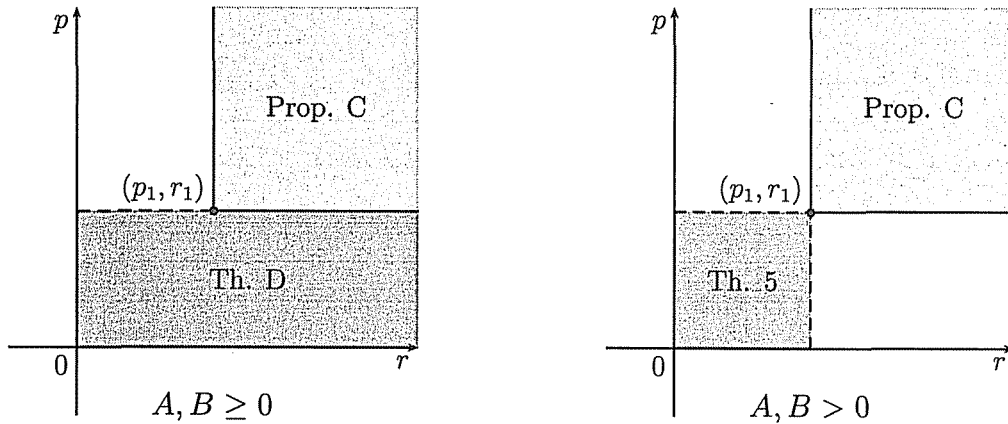
Let $A = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^2$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^2$. Then $A, B > 0$, $(BA^2B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2$ and $(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \not\geq B$.

Proposition C, Example E の応用として, 次の結果が得られる.

Theorem 5. *Let $p_1 > p_2 > 0$ and $r_1 > r_2 > 0$. Then there exist $A, B > 0$ such that*

$$(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1} \quad \text{and} \quad (B^{\frac{r_2}{2}}A^{p_2}B^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{r_2}{p_2+r_2}} \not\geq B^{r_2}.$$

Proposition C, Theorem D, Theorem 5 における (p_2, r_2) の範囲を表すと、次のようになる。



Theorem D において A, B が可逆である場合に対応する、次の命題が成り立つかどうかは未解決である。

Conjecture 1. *Let $p_1 > 0$ and $r_1 > 0$. Then there exist $A, B > 0$ such that*

$$(B^{\frac{r_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1} \quad \text{and} \quad (B^{\frac{r_2}{2}} A^{p_2} B^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{r_2}{p_2+r_2}} \not\geq B^{r_2}$$

for all $p_2 > 0$ and $r_2 > 0$ such that $p_1 > p_2$.

Conjecture 1 において A, B は可逆であるので、Lemma F より、Conjecture 1 から直ちに次が導かれる。

Conjecture 2. *Let $p_1 > 0$ and $r_1 > 0$. Then there exist $A, B > 0$ such that*

$$(B^{\frac{r_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1} \quad \text{and} \quad (B^{\frac{r_2}{2}} A^{p_2} B^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{r_2}{p_2+r_2}} \not\geq B^{r_2}$$

for all $p_2 > 0$ and $r_2 > 0$ such that $p_1 > p_2$ or $r_1 > r_2$.

参考文献

- [1] T. Ando, *On some operator inequalities*, Math. Ann. **279** (1987), 157–159.
- [2] J. I. Fujii and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon. **34** (1989), 341–348.
- [3] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl. **179** (1993), 161–169.
- [4] M. Fujii, T. Furuta, D. Wang, *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic orders*, Math. Japon. **40** (1994), 317–321.

- [5] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1 + 2r)q \geq p + 2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.
- [6] T. Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), 126.
- [7] T. Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl. **59** (1992), 180–190.
- [8] T. Furuta, *Furuta's inequality and its application to the relative operator entropy*, J. Operator Theory **30** (1993), 21–30.
- [9] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 139–155.
- [10] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Sci. Math. **1** (1998), 389–403.
- [11] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Order preserving operator inequalities via Furuta inequality*, Math. Japon. **48** (1998), 471–476.
- [12] M. Ito, *Some order preserving operator inequality via Furuta inequality*, Sci. Math. Jpn. **55** (2002), 25–32.
- [13] M. Ito, *On classes of operators generalizing class A and paranormality*, Sci. Math. Jpn. **57** (2003), 287–297.
- [14] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two inequalities $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \geq B^r$ and $A^p \geq (A^{\frac{r}{2}} B^r A^{\frac{r}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ and their applications*, Integral Equations Operator Theory **44** (2002), 442–450.
- [15] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 141–146.
- [16] K. Tanahashi, *The Furuta inequality with negative powers*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1683–1692.
- [17] M. Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl. **2** (1999), 469–471.
- [18] M. Yanagida, *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl. **2** (1999), 297–305.

PARAMETRIC EXTENSIONS OF SHANNON INEQUALITY AND ITS REVERSE ONE IN HILBERT SPACE OPERATORS

TAKAYUKI FURUTA*

*Department of Mathematical Information Science, Faculty of Science,
Tokyo University of Science, 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku,
Tokyo 162-8601, Japan*

Abstract. We shall state the following parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators. Let $p \in [0, 1]$ and also let $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ be two sequences of strictly positive operators on a Hilbert space H such that $\sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \leq I$. Then

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{p+1}(A_j|B_j) &\geq \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \geq \sum_{j=1}^n S_p(A_j|B_j) \geq -\log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq -\left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \geq \sum_{j=1}^n S_{p-1}(A_j|B_j) \end{aligned}$$

where $S_q(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^q(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$ for $A > 0$, $B > 0$ and any real number q and $A \natural_q B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^qA^{\frac{1}{2}}$ for $A > 0$, $B > 0$ and any real number q .

In particular, if $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$, then

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_2(A_j|B_j) &\geq \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \log \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \geq \log \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \geq \sum_{j=1}^n S_1(A_j|B_j) \geq 0 \\ &\geq \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) \geq -\log \left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \geq -\left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \log \left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \geq \sum_{j=1}^n S_{-1}(A_j|B_j) \end{aligned}$$

where $S(A|B) = S_0(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$ which is the relative operator entropy of $A > 0$ and $B > 0$. Our results can be considered as parametric extensions of the following celebrated Shannon inequality ([7],[9] and [233 p. 1]) which is very useful and so famous in information theory. Let $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ be two probability vectors. Then

$$0 \geq \sum_{j=1}^n a_j \log b_j - \sum_{j=1}^n a_j \log a_j \quad (\text{see inequalities (2.4) of Corollary 2.4}).$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A63, 60E15, 26D15.

Key words and phrases. Shannon inequality, reverse type Shannon inequality, operator concave function.

* e-mail: furuta@rs.kagu.tus.ac.jp.

§1 Introduction

First the Shannon inequality asserts: *Let $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ be two probability vectors. Then*

$$(1.1) \quad 0 \geq \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{b_j}{a_j}.$$

We remark that $0 \geq \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{b_j}{a_j}$ in (1.1) is equivalent to $D = \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{a_j}{b_j} \geq 0$ which is the original number type Shannon inequality and this D is called “divergence” in [7] and [9].

In this paper we shall state parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators.

A bounded linear operator T on a Hilbert space H is said to be positive (denoted by $T \geq 0$) if $(Tx, x) \geq 0$ for all $x \in H$ and also an operator T is said to be strictly positive (denoted by $T > 0$) if T is invertible and positive.

Definition 1.1. $S_q(A|B)$ for $A > 0$, $B > 0$ and any real number q is defined by

$$S_q(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^q(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

We recall that $S_0(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = S(A|B)$ is the relative operator entropy in [2] and $S(A|I) = -A \log A$ is the usual operator entropy in [8].

Definition 1.2. $A\sharp_q B$ for $A > 0$ and $B > 0$ and any real number q is defined by

$$A\sharp_q B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^q A^{\frac{1}{2}}$$

and $A\sharp_p B$ for $p \in [0, 1]$ just coincides with $A\sharp_p B$ which is well known as p -power mean.

We remark that $S_1(A|B) = -S(B|A)$ and moreover $S_q(A|B) = -S_{1-q}(B|A)$ for any q .

Following after Definition 1.1, The original Shannon inequality can be expressed as follows:

$$0 \geq \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{b_j}{a_j} = \sum_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} (\log a_j^{-\frac{1}{2}} b_j a_j^{-\frac{1}{2}}) a_j^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^n S(a_j|b_j).$$

Consequently $0 \geq \sum_{j=1}^n S(a_j|b_j)$ in the original Shannon inequality can be extended to $0 \geq \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j)$ in operator version case (2.4) of Corollary 2.4, so that the form of (1.1) is convenient for operator type extension. We can summarize the following contrast:

The original Shannon inequality

and its reverse one

$$0 \geq \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{b_j}{a_j} \geq -\log \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{b_j}.$$

$$\text{for } a_j, b_j > 0 \text{ with } 1 = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n b_j.$$

The operator version Shannon inequality

and its reverse one

$$0 \geq \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) \geq -\log \sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j.$$

$$\text{for } A_j, B_j > 0 \text{ with } I = \sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j.$$

§2 Parametric extensions of operator reverse type Shannon inequality derived from two operator concave functions $f_1(t) = \log t$ and $f_2(t) = -t \log t$

Firstly we shall state the following parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators derived from an operator concave function $f(t) = \log t$.

Theorem 2.1. Let $p \in [0, 1]$ and also let $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ be two sequences of strictly positive operators on a Hilbert space H such that $\sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \leq I$, where I means the identity operator on H . Then

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + t_0 \left(I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \right) \right] - \log t_0 \left(I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \right) \\ & \geq \sum_{j=1}^n S_p(A_j|B_j) \\ & \geq -\log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + t_0 \left(I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \right) \right] + \log t_0 \left(I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \right) \end{aligned}$$

for fixed real number $t_0 > 0$, where $S_p(A|B)$ is defined in Definition 1.1 and $A \natural_q B$ is defined in Definition 1.2.

Secondly we shall state the following parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators derived from an operator concave function $f(t) = -t \log t$.

Theorem 2.2. Let $p \in [0, 1]$ and also let $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ be two sequences of strictly positive operators on a Hilbert space H such that $\sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \leq I$, where I means the identity operator on H . Then

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^n S_{p+1}(A_j|B_j)$$

$$\begin{aligned} &\geq \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\quad - t_0 \log t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \quad \text{for fixed real number } t_0 > 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (2.2') \quad &\sum_{j=1}^n S_{p-1}(A_j|B_j) \\ &\leq - \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\quad + t_0 \log t_0 (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \quad \text{for fixed real number } t_0 > 0, \end{aligned}$$

where $S_q(A|B)$ is defined in Definition 1.1 and $A \natural_q B$ is defined in Definition 1.2.

We shall state the following result which can be shown by combining Theorem 2.1 with Theorem 2.2.

Corollary 2.3. *Let $p \in [0, 1]$ and also let $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ be two sequences of strictly positive operators on a Hilbert space H such that $\sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j \leq I$, where I means the identity operator on H . Then*

$$\begin{aligned} (2.3) \quad &\sum_{j=1}^n S_{p+1}(A_j|B_j) \\ &\geq \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p+1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq \sum_{j=1}^n S_p(A_j|B_j) \\ &\geq - \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq - \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n (A_j \natural_{p-1} B_j) + (I - \sum_{j=1}^n A_j \sharp_p B_j) \right] \\ &\geq \sum_{j=1}^n S_{p-1}(A_j|B_j) \end{aligned}$$

where $S_q(A|B)$ is defined in Definition 1.1 and $A \natural_q B$ is defined in Definition 1.2.

Corollary 2.3 easily implies the following result which can be considered as *operator version of Shannon inequality and its reverse one*.

Corollary 2.4. *Let $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ be two sequences of strictly positive operators on a Hilbert space H . If $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$, then*

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \sum_{j=1}^n S_2(A_j|B_j) &\geq \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \log \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \geq \log \left[\sum_{j=1}^n B_j A_j^{-1} B_j \right] \\
 &\geq \sum_{j=1}^n S_1(A_j|B_j) \geq 0 \geq \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) \\
 &\geq -\log \left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \geq -\left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \log \left[\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j \right] \\
 &\geq \sum_{j=1}^n S_{-1}(A_j|B_j).
 \end{aligned}$$

Remark 2.1. We recall $S_q(A|B)$ for $A > 0$, $B > 0$ and any real number q as follows:

$$S_q(A|B) = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^q (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}.$$

By an easy calculation we have

$$\frac{d}{dq} [S_q(A|B)] = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^q [\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}]^2 A^{\frac{1}{2}} \geq 0,$$

so that $S_q(A|B)$ is an increasing function of q , and it is interesting to point out that the decreasing order of the positions of $\sum_{j=1}^n S_2(A_j|B_j)$, $\sum_{j=1}^n S_1(A_j|B_j)$, $\sum_{j=1}^n S(A_j|B_j)$, and $\sum_{j=1}^n S_{-1}(A_j|B_j)$ in (2.4) of Corollary 2.4 is quite reasonable since $\sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) = \sum_{j=1}^n S_0(A_j|B_j)$.

This paper will appear elsewhere with complete proofs.

References

- [1] P.S.Bullen, A dictionary of inequalities, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 97, LONGRAM, 1998.

- [2] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japonica* **34**(1989), 341-348.
- [3] J.I.Fujii and E.Kamei, Uhlmann's interpolational method for operator means, *Math. Japonica* **34**(1989), 541-547.
- [4] F.Hansen, An operator inequality, *Math. Ann.*, **246**(1980), 249-250.
- [5] F.Hansen and G.K.Pedersen, Jensen's inequality for operators and Löwner theorem, *Math. Ann.*, **258**(1982), 229-241.
- [6] M.K.Kwong, Some results on matrix monotone functions, *Linear Alg. and Its Appl.*, **118**(1989), 129-153.
- [7] S.Kullback and R.A.Leibler, On information and sufficiency, *Ann. Math. Statistics*, **22**,1951,79-86.
- [8] M.Nakamura and H.Umegaki, A note on the entropy for operator algebra, *Proc. Japan Acad.*, **37**(1961), 149-154.
- [9] C.E.Shannon, A mathematical theory of communication, *Bull System Technical Journal*, **27**(1948),379-423; 623-656.

SOME EXTENSIONS OF KANTOROVICH TYPE INEQUALITIES

Mariko Giga

Department of Mathematics
Nippon Medical School

Abstract

We consider Kantorovich type inequalities for bounded strictly positive operators on a Hilbert space. Mičić-Pečarić-Seo recently obtained Kantorovich type inequalities between A^q and B^p for the case $p > 1, q > 1$ under the assumption $A \geq B$. We extend it to more generalized Kantorovich type inequalities between $(Tx, x)^q$ and $(T^p x, x)$ for the case (a) $p > 1, q > 1$, (b) $p < 0, q < 0$, (c) $0 < p < 1, 0 < q < 1$. We further prove that these results are applied to the case chaotic order.

1 Introduction

この報告において, T, A, B は Hilbert space 上の bounded linear operator を表す.

Theorem A. (Hölder-McCarthy inequality)

Let A be a positive operator on a Hilbert space H . For any unit vector x ,

- (a) $(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda$ for any $\lambda > 1$,
- (b) $(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda$ for any $\lambda < 0$ if A is invertible,
- (c) $(A^\lambda x, x) \leq (Ax, x)^\lambda$ for any $\lambda \in [0, 1]$.

Theorem A において, (a),(b),(c) は互いに equivalent である.

Theorem B. (Kantorovich inequality)

Let A be a positive operator on a Hilbert space H such that $MI \geq A \geq mI > 0$. For any unit vector x ,

$$(Ax, x)^{-1} \leq (A^{-1}x, x) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (Ax, x)^{-1}$$
$$(Ax, x)^2 \leq (A^2x, x) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (Ax, x)^2.$$

右側の不等式は, Hölder-McCarthy inequality の reverse inequality である. その定数は, 相加平均と相乗平均の比の 2 乗という形をしている. 多くの数学者が Kantorovich inequality を研究してきたが, 特に Mond-Pecarić は long research series がある [10,11]. [9] で, Mićić-Pečarić-Seo は [Theorem 2.1, 3] の 2 変数版を $p > 1, q > 1$ について示した. これは ordered operators A, B についての Kantorovich type の inequality である.

この報告では, 先ず 2 変数の Kantorovich type inequality を, (a) $p > 1, q > 1$, (b) $p < 0, q < 0$ (c) $0 < p < 1, 0 < q < 1$ に拡張する. また, 得られた Kantorovich type inequality を応用して, ordered operators A, B についての Kantorovich type の inequality を同じ (a), (b), (c) で導く. さらに, それらの chaotic order version への応用も考える.

2 Extended Kantorovich type inequalities

ここでは, main results である Theorem 2.1, Theorem 2.2 を述べる. Theorem 2.2 の方がより一般的である.

Theorem 2.1 *Let T be a strictly positive operator on a Hilbert space H such that $MI \geq T \geq mI > 0$. Then for any unit vector x ,*

(a) *If $p > 1$ and $q > 1$, (b) If $p < 0$ and $q < 0$,*

$$K(m, M, p, q)(Tx, x)^q \geq (T^p x, x) \geq (Tx, x)^p.$$

(c) *If $0 < p < 1$ and $0 < q < 1$,*

$$K(m, M, p, q)(Tx, x)^q \leq (T^p x, x) \leq (Tx, x)^p.$$

$$K(m, M, p, q) = \begin{cases} K^{(1)}(m, M, p, q) & \text{if case 1 holds} \\ m^{p-q} & \text{if case 2 holds} \\ M^{p-q} & \text{if case 3 holds,} \end{cases}$$

where Kantorovich constant $K^{(1)}(m, M, p, q)$ is

$$K^{(1)}(m, M, p, q) = \frac{(mM^p - Mm^p)}{(q-1)(M-m)} \left\{ \frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - Mm^p)} \right\}^q.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{case 1. } m^{p-1}q \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{M^p - m^p}{M - m} \leq M^{p-1}q \quad (\text{a}), (\text{b}) \\ \geq \frac{M^p - m^p}{M^p - m^p} \geq M^{p-1}q \quad (\text{c}) \end{array} \right. \\ \text{case 2. } m^{p-1}q \left\{ \begin{array}{l} > \frac{M - m}{M^p - m^p} \quad (\text{a}), (\text{b}) \\ < \frac{M - m}{M^p - m^p} \quad (\text{c}) \end{array} \right. \\ \text{case 3. } M^{p-1}q \left\{ \begin{array}{l} < \frac{M - m}{M^p - m^p} \quad (\text{a}), (\text{b}) \\ > \frac{M - m}{M - m} \quad (\text{c}). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Theorem 2.2 Let T be a strictly positive operator on a Hilbert space H such that $MI \geq T \geq mI > 0$. Also let $f(t)$ be a real valued continuous function on $[m, M]$. Then for any unit vector x ,

(a) If $q > 1$ and f is convex, (b) If $q < 0$ and f is convex,

$$K(m, M, f, q)(Tx, x)^q \geq (f(T)x, x) \geq f((Tx, x)).$$

(c) If $0 < q < 1$ and f is concave,

$$K(m, M, f, q)(Tx, x)^q \leq (f(T)x, x) \leq f((Tx, x)).$$

$$K(m, M, f, q) = \begin{cases} K^{(1)}(m, M, f, q) & \text{if case 1 holds} \\ \frac{f(m)}{f(M)} & \text{if case 2 holds} \\ \frac{m^q}{M^q} & \text{if case 3 holds,} \end{cases}$$

where Kantorovich constant $K^{(1)}(m, M, p, q)$ is

$$K^{(1)}(m, M, f, q) = \frac{(mf(M) - Mf(m))}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(f(M) - f(m))}{q(mf(M) - Mf(m))} \right)^q.$$

$$(a) \begin{cases} \text{case 1. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M}^q \\ \text{case 2. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q > \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \\ \text{case 3. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}, \frac{f(M)}{M}^q < \frac{f(M) - f(m)}{M - m}, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \text{case 1. } f(M) < f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M}^q \\ \text{case 2. } f(M) < f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q > \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \\ \text{case 3. } f(M) < f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(M)}{M}^q < \frac{f(M) - f(m)}{M - m}, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \text{case 1. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q \geq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \geq \frac{f(M)}{M}^q \\ \text{case 2. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(m)}{m}^q < \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \\ \text{case 3. } f(M) > f(m), \frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}, \frac{f(M)}{M}^q > \frac{f(M) - f(m)}{M - m}. \end{cases}$$

Theorem 2.2 の証明では, t の関数

$$h(t, k, K) = \frac{1}{t^q} \left(k + \frac{K - k}{M - m} (t - m) \right).$$

が次の最大値をとることを先ずいう。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{(mK - Mk)}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK - Mk)} \right)^q & \text{if case 1 holds} \\ \frac{k}{m} & \text{if case 2 holds} \\ \frac{m^q}{K} & \text{if case 3 holds.} \\ \frac{M^q}{M^q} & \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Kantorovich constant $K^{(1)}(m, M, p, q)$ はこの case 1 の定数からきている。case 2, case 3 は, $h(t, k, K)$ の最大値が区間 $[m, M]$ の外部にある場合である。また Theorem 2.2 の証明では, t^p ($p > 1, p < 0$) が convex function, t^p ($0 < p < 1$) が concave function であることを使っている。

3 Applications

Corollary 3.1 *Let A, B be strictly positive operators on a Hilbert space H such that $M_1 I \geq A \geq m_1 I > 0$, $M_2 I \geq B \geq m_2 I > 0$ and also $A \geq B$.*

- (a) if $p > 1, q > 1$, $K(m_2, M_2, p, q)A^q \geq B^p$
- (b) if $p < 0, q < 0$, $K(m_1, M_1, p, q)B^q \geq A^p$
- (c) if $0 < p < 1, 0 < q < 1$, $K(m_1, M_1, p, q)B^q \leq A^p$.

$$K(m_i, M_i, p, q) = \begin{cases} K^{(1)}(m_i, M_i, p, q) & \text{if case 1 holds} \\ m_i^{p-q} & \text{if case 2 holds} \\ M_i^{p-q} & \text{if case 3 holds,} \end{cases}$$

where Kantorovich constant $K^{(1)}(m_i, M_i, p, q)$ is

$$K^{(1)}(m_i, M_i, p, q) = \frac{(m_i M_i^p - M_i m_i^p)}{(q-1)(M_i - m_i)} \left\{ \frac{(q-1)(M_i^p - m_i^p)}{q(m_i M_i^p - M_i m_i^p)} \right\}^q.$$

The classification case 1, 2 and 3 is similar to it in Theorem 2.1.

これは Theorem 2.1 を使えば証明できる。Corollary 3.1 の (a) については, Mićić-Pečarić-Seo による別証明がある [9].

Proposition 3.2 *For every p, q ,*

$$K^{(1)}\left(m, M, \frac{1}{2}-p, \frac{1}{2}-q\right) = (mM)^{q-p} K^{(1)}\left(m, M, \frac{1}{2}+p, \frac{1}{2}+q\right),$$

where $K^{(1)}(m, M, p, q)$ is

$$K^{(1)}(m, M, p, q) = \frac{(mM^p - Mm^p)}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - Mm^p)} \right)^q.$$

In particular, when $p = q$, $K^{(1)}\left(m, M, \frac{1}{2}-p, \frac{1}{2}-q\right)$ and $K^{(1)}\left(m, M, \frac{1}{2}+p, \frac{1}{2}+q\right)$ are symmetric with respect to $(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4 Applications to chaotic order

Theorem 4.1 と Corollary 4.2 は, Theorem 2.1 と Corollary 3.1 の chaotic order version である. 下記の $S_h(m, M, p, q)$ は, $p = q$ のときは Specht ratio と呼ばれる. Corollary 4.2 は, Mićić-Pečarić-Seo による別証明がある [9]. Proposition 4.3 は, Kantorovich constant $K^{(1)}(m, M, p, q)$ と Specht ratio の 2 変数版の間の関係を与えている.

Theorem 4.1 *Let T be a strictly positive operator on a Hilbert space H such that $MI \geq T \geq mI > 0$ and $h = \frac{M}{m} > 1$. Then for any unit vector x ,*

$$S_h(m, M, p, q) \Delta_x(T^q) \geq (T^p x, x) \geq \Delta_x(T^p) \quad \text{for } p > 0 \text{ and } q > 0,$$

where $S_h(m, M, p, q)$ and a determinant $\Delta_x(T)$ are

$$S_h(m, M, p, q) = \begin{cases} m^{p-q} \frac{h^{\frac{q}{h^p-1}}}{e \log h^{\frac{q}{h^p-1}}} & \text{if } q \leq \frac{h^p - 1}{\log h} \leq qh^p \\ m^{p-q} & \text{if } \frac{h^p - 1}{\log h} \leq q \\ M^{p-q} & \text{if } qh^p \leq \frac{h^p - 1}{\log h}, \end{cases}$$

$$\Delta_x(T) = \exp(((\log T)x, x)).$$

Corollary 4.2 *Let A, B be strictly positive operators on a Hilbert space H such that $MI \geq B \geq mI > 0$. Then $\log A \geq \log B$ is equivalent to*

$$S_h(m, M, p, q) A^q \geq B^p \quad \text{for } p > 0 \text{ and } q > 0.$$

Proposition 4.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^{(1)} \left(1 + \frac{\log m}{n}, 1 + \frac{\log M}{n}, np, nq \right) = m^{p-q} \frac{h^{\frac{q}{h^p-1}}}{e \log h^{\frac{q}{h^p-1}}},$$

$$\text{where } h = \frac{M}{m} > 1.$$

References

- [1] R.Bhatia, Matrix Analysis, Springer, New York, 1997.
- [2] J.I.Fujii, S.Izumino and Y.Seo, Determinant for positive operators and Specht's ratio, Scientiae Mathematicae, **1**(1998), 307-310.
- [3] T.Furuta, Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities, J.Inequal. Appl., **2**(1998), 137-148.

- [4] T.Furuta, Results under $\log A \geq \log B$ can be derived from ones under $A \geq B \geq 0$ by Uchiyama's method- associated with Furuta and Kantorovich type inequalities- Math. Inequal. Appl.,**3**(2000),423-436.
- [5] T.Furuta, Invitation to Linear Operators, 2001, Taylor & Francis, London.
- [6] T.Furuta and M.Giga, A complementary result of Kantorovich type order preserving inequalities by Mičić-Pečarić-Seo, Linear Alg. and Its Appl., **369**(2003), 27-40.
- [7] M.Giga, Kantorovich type inequalities for $1 > p > 0$, J.Ineq. Pure and Applied Math., (to appear).
- [8] C.A.McCarthy, c_p , Israel J. Math., **5**(1967),249-271.
- [9] J.Mičić, J.Pečarić and Y.Seo, Function order of positive operators based on the Mond-pečarić method, Linear Alg. and Its Appl.,**360**(2003),15-34.
- [10] B.Mond and J.E.Pečarić, Convex inequalities in Hilbert spaces, Houston Journal of Mathematics,**19**(1993),405-420.
- [11] B.Mond and J.E.Pečarić, A matrix version of the Ky Fan Generalization of the Kantorovich inequality, Linear and Multilinear Algebra,**36**(1994),217-221.
- [12] M.Uchiyama, Some exponential operator inequalities, Math. Inequal. Appl., **2**(1999), 469-471.
- [13] T.Yamazaki, An extension of Specht's theorem via Kantorovich inequality and related results, Math. Inequal. Appl.,**3**(2000), 89-96.
- [14] T.Yamazaki and M.Yanagida, Characterizations of chaotic order associated with Kantorovich inequality, Sci. Math.,**2**(1999), 37-50.

Hanner-type inequality and uniform non-squareness for Banach spaces

Yasuji Takahashi and Mikio Kato

Abstract. We introduce Hanner-type inequalities with a weight for Banach spaces X , and investigate some geometrical properties of X such as uniform non-squareness, 2-uniform convexity and 2-uniform smoothness in terms of those inequalities.

Hanner は L_p の modulus of convexity を決定する際、Hanner 不等式を用いた [2]. ここでは、Banach 空間 X においてそれを包括する重み γ 付きの Hanner 型不等式を導入し、それらを用いて uniform non-squareness などの幾何学的性質を特徴づける.

1. Hanner inequality

$$(1) \quad \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \geq \left| \|x\| + \|y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|y\| \right|^p \quad \forall x, y \in L_p \quad (1 < p \leq 2)$$

$$(2) \quad \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq \left| \|x\| + \|y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|y\| \right|^p \quad \forall x, y \in L_p \quad (2 \leq p < \infty)$$

Hanner 不等式は L_p 空間の他、 p -Schatten class operator のなす空間 C_p で $1 \leq p \leq 4/3$ のとき (1), $p \geq 4$ のとき (2) が成立する [1]. 一般の Banach 空間 X で上記の不等式を考察するとき、(1) あるいは (2) が X で成立するならば、Lebesgue-Bochner 空間 $L_p(X)$ でも成立すること、また、 L_p 空間においては Hanner 不等式の n 要素への拡張が可能であることなどが知られている [3],[4]. 更にごく最近、ある種の Hanner 型不等式については重み付きでさえ n 要素への拡張が可能であることが示された [7]. なお、 $p=1$ の場合 (1), $p=\infty$ の場合 (2) はすべてのノルム空間で成立する. 以下、Banach 空間 X は 2 次元以上とする.

2. Theorem Let $1 < p, s, t < \infty$. Then the inequality

$$(3) \quad \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \geq \left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^p$$

holds in X with some $\gamma > 0$ if and only if the inequality

$$(4) \quad (\|x+y\|^s + \|x-y\|^s)^{1/s} \geq 2^{1/s-1/t} \left(\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X with some $\gamma > 0$.

On the other hand, the inequality

$$(5) \quad \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq \left(\|x\| + \|\gamma y\| \right)^p + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^p$$

holds in X with some $\gamma > 0$ if and only if the inequality

$$(6) \quad (\|x + y\|^s + \|x - y\|^s)^{1/s} \leq 2^{1/s-1/t} \left(\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X with some $\gamma > 0$.

Hanner 不等式は (1) では $1 < p \leq 2$, (2) では $2 \leq p < \infty$ の条件が必要であったが, (3),(5) では $1 < p < \infty$ で考察した. このことが可能になったのは, これらの不等式に重み γ を付けたことによる. 最近の研究で, L_r 空間では $1 < r \leq 2$ のとき (4), $2 \leq r < \infty$ のとき (6) が成立すること, 更に, これらが成立するような最良の定数 γ を決定した [7].

3. Definitions (i) The *modulus of convexity* of X is defined by

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \epsilon \right\} \quad (0 \leq \epsilon \leq 2).$$

(ii) X is *uniformly non-square* if $\delta_X(\epsilon) > 0$ for some $0 < \epsilon < 2$, and *q -uniformly convex* ($2 \leq q < \infty$) if there is $C > 0$ such that $\delta_X(\epsilon) \geq C\epsilon^q$ for all $0 < \epsilon \leq 2$.

4. Definitions (i) The *modulus of smoothness* of X is defined by

$$\rho_X(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1 \right\}$$

(ii) X is *p -uniformly smooth* ($1 \leq p \leq 2$) if there is $K > 0$ such that $\rho_X(\tau) \leq K\tau^p$ for all $\tau \geq 0$.

5. Notations Let X be a Banach space. Let $1 < s, t < \infty$ and $\gamma > 0$. Denote by $c(s, t, \gamma; X)$ the best (largest) constant c for which

$$(7) \quad (\|x + y\|^s + \|x - y\|^s)^{1/s} \geq c \left(\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X .

Also denote by $k(s, t, \gamma; X)$ the best (smallest) constant k for which

$$(8) \quad (\|x + y\|^s + \|x - y\|^s)^{1/s} \leq k \left(\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X .

6. Theorem Let $1 < s, t < \infty$ and $\gamma > 0$. Then for any Banach space X , the following inequalities hold:

$$(9) \quad \frac{2^{1/s}}{(|1 + \gamma|^t + |1 - \gamma|^t)^{1/t}} \leq c(s, t, \gamma; X) \leq 2^{1/s-1/t}$$

$$(10) \quad 2^{1/s-1/t} \leq k(s, t, \gamma; X) \leq \sup \left\{ \frac{(1+u)2^{1/s}}{(|1 + u\gamma|^t + |1 - u\gamma|^t)^{1/t}} : u \geq 0 \right\}$$

In particular, the inequalities (7) and (8) always hold for any Banach space X with

$$c = \frac{2^{1/s}}{(|1 + \gamma|^t + |1 - \gamma|^t)^{1/t}} \quad \text{and} \quad k = \sup \left\{ \frac{(1+u)2^{1/s}}{(|1 + u\gamma|^t + |1 - u\gamma|^t)^{1/t}} : u \geq 0 \right\}.$$

7. Theorem (Yamada, Takahashi and Kato [7]) Let $1 < s, t < \infty$.

(i) X is 2-uniformly convex if and only if there exists $\gamma > 0$ such that $c(s, t, \gamma; X) = 2^{1/s-1/t}$.

(ii) X is 2-uniformly smooth if and only if there exists $\gamma > 0$ such that $k(s, t, \gamma; X) = 2^{1/s-1/t}$.

8. Theorem Let $1 < s, t < \infty$ and $\gamma > 0$. Then the following are equivalent.

(1) X is *uniformly non-square*.

(ii) $c(s, t, \gamma; X) > \frac{2^{1/s}}{(|1 + \gamma|^t + |1 - \gamma|^t)^{1/t}}$ for any (some) $\gamma > 0$.

(iii) $k(s, t, \gamma; X) < \sup \left\{ \frac{(1+u)2^{1/s}}{(|1 + u\gamma|^t + |1 - u\gamma|^t)^{1/t}} : u \geq 0 \right\}$ for any (some) $\gamma > 0$.

ここで考察した幾何学的性質は、uniform non-squareness, uniform 2-convexity, uniform 2-smoothness であるが、その他の幾何学的性質を重みつき Hanner 型不等式を用いて特徴づけること、また、Hanner 型不等式に付随して現れる定数と他の幾何学的定数 (Jordan-von Neumann, James, Schaeffer 等) との関連を調べること、などは今後の課題とする。なお、Hanner 型不等式の多元版、双対性などに関する最近の結果は [7] を参照されたい。

参考文献

- [1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, *Invent. Math.* **115** (1994), 463-482.
- [2] O. Hanner, On the uniform convexity of L_p and l_p , *Ark. Math.* **3** (1956), 239-244.
- [3] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of the Hanner's inequality and the type 2 (cotype 2) constant of a Banach space. *Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci. No.42*, (1995), 29-34.
- [4] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of Hanner's inequality. *Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci. No.43*, (1996), 9-13.
- [5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, 1979.
- [6] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities, *J. Nonlinear. Convex Anal.* **3**, No.2, (2002), 267-281.
- [7] 山田康隆, 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Hanner-type inequality and optimal 2-uniform convexity and smoothness inequalities, *数理解析研究所講究録*, to appear.

Yasuji Takahashi
Department of System Engineering,
Okayama Prefectural University,
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp

Mikio Kato
Department of Mathematics,
Kyushu Institute of Technology,
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp

Square-root problem in $C(X)$ and the Čech cohomology ($C(X)$ のべき根問題とコホモロジー)

Science University of Tokyo (東京理科大学理学部)
Shizuo Miyajima (宮島 静雄)

Abstract. The relevance of the Čech cohomology to the square-root problem in $C(X)$ (X : compact Hausdorff) is discussed. It is shown that every invertible element of $C(X)$ has a continuous square-root if and only if $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ or $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ is divisible by 2, provided $\dim X \leq 1$. Some remaining problems are posed.

1 Introduction

本稿で取り扱うのは、古くからの話題である次の素朴な問題である。

平方根問題: すべての $f \in C(X, \mathbb{C})$ が連続な平方根を持つ, つまり $f = g^2$ をみたす $g \in C(X, \mathbb{C})$ が存在するような compact Hausdorff 空間 X を位相的に特徴付けよ。

次の諸例から分かるように, 連続平方根を持つためには何らかの意味で「1 次元的」なことが必要ということが予想され, さらに 1 次元といっても円周のような部分があっては困るのである。

例

(1) 閉円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ や単位円 S^1 は連続平方根を必ずしも許さない。

$f(z) := z$ を考えればよい。

(2) $[0, 1]$ や完全不連結空間では連続平方根が存在する。また \mathbb{R} の Stone-Čech のコンパクト化 $\beta\mathbb{R}$ も連続平方根を許す。これは $C(\beta\mathbb{R}) \simeq C^b(\mathbb{R})$ から分かる。

(3) $X = [0, 1] \times \{0\} \cup_{n=1}^{\infty} [0, 1] \times \{1/n\} \subset \mathbb{R}^2$ は連続平方根を許さない。

Countryman, Jr. [1], 羽鳥-三浦 [3], 三浦 [7], 三浦-新島 [8] らの寄与により, 第一可算公理あるいは局所連結性など若干の前提条件を付けた形では平方根問題は我々の予測を裏書きする形で解決されている。それを述べるために次の定義を導入しよう。

定義:

• X が **hereditarily unicoherent** $\iff X$ の連結閉部分集合 U, V で $U \cap V$ が非連結となるようなものは存在しない。

• 被覆次元 (**covering dimension**)

位相空間 X の被覆次元 $\dim X$ は次のような性質を持つ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ の最小数を言う:

X の任意の開被覆 \mathfrak{U} に対して細分 \mathfrak{B} で, $n+2$ 個の相異なる \mathfrak{B} の任意の要素が交わりを持たないようなものが存在する。

• X が **almost locally connected**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} X$ は次のような連結部分集合列 $\{C_n\}_n$ を含まない:

各 C_n は互いに素で, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ の閉包内で開, かつ $x_n, y_n \in C_n$ でそれぞれ異なる点に収束する点列 $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ が存在する。

これらの定義の下で Countryman Jr. らの結果は次のようにまとめられる。

Countryman Jr. の結果

X : compact Hausdorff 空間のとき

$C(X)$: 連続平方根を持つ $\implies \{X : \text{almost locally connected and hereditarily unicoherent}\}$

X が第一可算公理をみたしていれば逆も成り立つ。

三浦-新島の結果

X : 局所連結な compact Hausdorff 空間のとき

$$\begin{aligned} C(X): \text{連続平方根を持つ} &\iff X \text{ hereditarily unicoherent} \\ &\iff \dim X \leq 1 \text{ かつ } \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) = 0 \\ &\iff C(X): \text{連続 } n \text{ 乗根を持つ } (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

ある疑問 上述の結果について、次のような素朴な疑問が浮かんでくる。これらについて部分的に解答し、残された問題点を明らかにすることが本稿の目的である。

- 局所連結性のもとでは平方根と n 乗根を持つ条件が一致するが、これはやや不自然ではないか？
- 局所連結性を仮定せずに平方根を持つ条件を求められないか？
- 平方根問題には \mathbb{Z} でなく \mathbb{Z}_2 が登場すべきではないか？

これらの疑問について Čech のコホモロジー群を用いてある程度の解答が得られるのであるが、コホモロジー群の性格から言って、 $C(X)$ の任意の元が連続平方根を持つ条件を記述することはできていない。できたことは $C(X)$ でなく、($C(X)$ の可逆元の全体である) $C(X)^{-1}$ の各元が連続平方根を持つ条件の記述である。

2 (前) 層係数 Čech コホモロジーに関する準備

この節では、前層、層及びそれらを係数とする Čech コホモロジーについて簡単な解説を述べるが、ご承知の方はとばして頂きたい。

2.1 前層と層

前層、層の直観的な意味は次のようなものである。

- X 上の前層: X で局所的に定義されたあるクラスの関数全体。例えば連続関数、なめらかな関数、解析関数。
- X 上の層: X の無限小領域上で定義されたあるクラスの関数 (関数の芽) 全体。例えば解析関数の場合は、任意の一点を中心とする収束半径 > 0 のべき級数 (関数要素) 全体。

☆ 普通の場合 (正準前層の場合)、前層の元は関数の芽を連続につなげたものとみなしてよい。実際、解析関数や連続関数の場合は心配はない。有界連続関数などを考えると異なってくる。

Abel 群 G に離散位相を考えたとき、直積空間 $X \times G$ は (G を茎とする) 一定層と呼ばれる層となる。(G に値を取る連続関数のクラスを考えている)

定義：抽象的には、位相空間 X 上の層とは位相空間 E と連続全射 $p: E \rightarrow X$ の対 (E, p) で、 p が局所同相写像になっているものを言う。

定義： $p: E \rightarrow X$ が X 上の層とすると、開集合 $U \subset X$ に対して $\Gamma(U) := \{s \mid s: U \rightarrow E \text{ は連続で、} p \circ s(x) = x \ (\forall x \in U)\}$ と置くと、 $\{\Gamma(U)\}_U$ は制限写像に関して X 上の前層となる。これを層 (E, p) の正準前層という。

Remark. 前層から逆に層（芽の層）を作ることができ、層は前層の特別なものとみなすことも可能である。これらについては滝沢 [11], 金子 [10], Iversen [4], Godement [2]などを参照のこと。

2.2 Abel 群の前層

定義：位相空間 X の任意の開集合 U に対して Abel 群 $\Gamma(U)$ が定められており、更に $V \subset U$ に対して Abel 群の準同型 $r_{UV}: \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(V)$ が対応して

$$r_{UU} = id, \quad W \subset V \subset U \text{ ならば } r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV}$$

が成り立つとき、 $\Gamma(U), r_{UV}$ というシステムを X 上の Abel 群の前層という。

Abel 群の前層の最も典型的な例は、 $\Gamma(U)$ として U 上の連続関数を取り、 r_{UV} を U 上で定義された関数の V への制限としたものである。そして本稿で使用するものは $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に値を取る連続関数の成す前層や、このように制限をつけない複素数値連続関数の成す前層である（ r_{UV} はやはり制限写像）。

2.3 Abel 群の前層 \mathcal{F} に係数を持つコホモロジー $H^*(X, \mathcal{F})$

Step 1. 開被覆に伴うチェイン複体とそのコホモロジー群 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を位相空間 X の開被覆とすると、順序組 $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \in A^{q+1}$ で

$$U_{\alpha_0, \dots, \alpha_q} := \bigcap_{i=0}^q U_{\alpha_i}$$

と置く。そして各 $(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in A^{q+1}$ に対して Abel 群 $\mathcal{F}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_q})$ の元 $c_{\alpha_0, \dots, \alpha_q}$ が指定されたもの、つまり写像

$$c: A^{q+1} \rightarrow \bigcup \{ \mathcal{F}(U) \mid U \subset X, \text{ open} \}$$

$$c(\alpha_0, \dots, \alpha_q) = c_{\alpha_0, \dots, \alpha_q} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_q})$$

を \mathcal{U} 上の \mathcal{F} -係数の q -コチェインという。これらの q -コチェイン全体の集合 $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は自然に Abel 群となる。そして $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ から $C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ への準同型 δ^q （以後単に δ で表す）を

$$\delta: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad (q = 0, 1, \dots),$$

$$(\delta c)(\alpha_0, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i c_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{q+1}}$$

で定義することができる ($\hat{\alpha}_i$ は α_i が欠けていることを示す). こうすると $\delta \circ \delta = 0$ が成り立つので,

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

はチェイン複体を成す. そしてチェイン複体のコホモロジー群

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker } \delta^q / \text{Im } \delta^{q-1}, \quad H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \sum_{q=0}^{\infty} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

が定まる.

Step 2. 開被覆に伴うコホモロジー群の帰納的極限を取って完成 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と X 上の前層 \mathcal{F} から Abel 群 $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が決まったが, \mathcal{U} の細分となっている開被覆 \mathcal{V} (これを $\mathcal{U} \succ \mathcal{V}$ で表す) があると, 自然にコホモロジー群の間の準同型

$$h_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

が定まることが分かる. X の開被覆全体は細分関係 \succ により有向順序集合となり, $h_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ によって $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は帰納系となる:

- (1) 任意の開被覆に対して $h_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = I$,
- (2) $\mathcal{U} \succ \mathcal{V} \succ \mathcal{W}$ ならば $h_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} \circ h_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}$.

従って, 帰納的極限

$$H^q(X, \mathcal{F}) := \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad H^*(X, \mathcal{F}) := \sum_{q=0}^{\infty} H^q(X, \mathcal{F})$$

が定まるので, これを X の \mathcal{F} -係数のコホモロジー群という.

2.4 Abel 群 G に係数を持つ Čech コホモロジー群 $\check{H}^*(X, G)$

Abel 群 G に対して, G に値を持つ定数前層 \mathcal{G} を係数とするコホモロジー群 $H^*(X, \mathcal{G})$ を, G を係数とする Čech コホモロジー群と言い $\check{H}^*(X, G)$ で表す.

3 平方根問題にコホモロジー群が登場するわけ

そもそもコホモロジー群はどのような場面で有効かということ, 大胆に言えば次のようになる:

標語: コホモロジー群は局所と大域を結ぶ有効な言語である. (ただし局所理論がしっかりしていないとダメ!)

さて, はじめに平方根問題で登場する Abel 群と前層について述べておこう.

定義: 乗法群 $\mathbb{Z}_2^* := \{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.
 $\mathcal{F}_2^* :=$ 開集合 $U \subset X$ に対して U 上の \mathbb{Z}_2^* 値の定数関数全体 $\Gamma(U, \mathbb{Z}_2^*)$ を対応させる前層.

3.1 局所的な連続平方根とコチェインとの対応

X compact Hausdorff, $f \in C(X, \mathbb{C})^{-1}$ とする. 任意の $x \in X$ に対して x のある開近傍 O_x で, $f(O_x) \subset \mathbb{C}$ 上では \sqrt{z} の正則な枝が存在するようなものがある. これから $g \in C(O_x, \mathbb{C})$ で, O_x 上で $g^2 = f$ となるものの存在が分かる (局所的な連続平方根の存在).

このことにより, X のコンパクト性も使って, X の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で, 各 U_α 上で $g_\alpha^2 = f$ をみたす連続関数 g_α が存在するようなものが取れる. このときに $\alpha, \beta \in A$ に対して

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ ならば } \left(\frac{g_\alpha(x)}{g_\beta(x)} \right)^2 = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

だから

$$U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で } \frac{g_\alpha(x)}{g_\beta(x)} = \pm 1$$

である. これより, 必要に応じて \mathcal{U} の細分を取って, ± 1 のいずれかの値を取るのではなく,

$$U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で } \frac{g_\alpha(x)}{g_\beta(x)} \equiv 1, \text{ または } U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で } \frac{g_\alpha(x)}{g_\beta(x)} \equiv -1$$

とできる. よって $(\alpha, \beta) \in A^2$ に対して $g_{\alpha, \beta}$ をこのようにして決まる 1 か -1 かのどちらかの数とする. そうすると写像

$$(\alpha, \beta) \mapsto g_{\alpha, \beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{Z}_2^*)$$

は $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2^*)$ のコチェインを定める.

3.2 局所的な連続平方根の接続可能性

局所的に連続平方根を作ると, つなぎ目でうまくつながっている場合もあれば, -1 倍だけずれている場合もある. この様子を記述しているものが 1 次のコチェインなのである.

ではどのような場合にずれを補正できるか?

$g_{\alpha, \beta} = -1$ だったら, U_β での連続平方根として g_β の代わりに $-g_\beta$ を取ってやれば, g_α とうまく接続して $U_\alpha \cup U_\beta$ 上の連続平方根ができる. 単純に考えれば, 有限個しかないのをこれを繰り返せばよいように思えるが, このように「隣同士」がうまくいくようにしても元に戻って来て最初の近傍での平方根の符号を変えないといけなくなるようでは結局ダメである.

うまく接続するための符号の変更が全体として整合的にできるための十分条件が

$$\text{各 } \alpha \text{ に対して } f_\alpha \in \mathbb{Z}_2^* \text{ で, } g_{\alpha, \beta} = f_\beta / f_\alpha \text{ が必ず成り立つようなものが存在する} \quad (*)$$

ということである.

実際, もし上のような f_α が取れば, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ で $g_\alpha(x)/g_\beta(x) = g_{\alpha, \beta} = f_\beta / f_\alpha$ なので, $f_\alpha g_\alpha(x) = f_\beta g_\beta(x)$ となる. よって

$$U_\alpha \text{ 上で } g(x) := f_\alpha g_\alpha(x)$$

と置くと $g \in C(X, \mathbb{C})$ となり, $f = g^2$ も成り立つ.

条件 (*) はチェイン複体の言葉で言えば

$$C^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2^*) \ni \{g_{\alpha, \beta}\}_{(\alpha, \beta) \in A^2} = \delta(\{f_\alpha\}_\alpha) \in \text{Im } \delta^1$$

となり、これはコホモロジー群 $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*)$ の元として $\{g_{\alpha, \beta}\}_{(\alpha, \beta) \in A^2} = 0$ ということである。よって

$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*) = 0$ ならば任意の $f \in C(X)^{-1}$ は連続平方根を持つ

ということになる。

4 コホモロジー完全系列を用いた記述へ

前節の直観的な話をコホモロジー完全系列という machinery を用いて整理しよう。コホモロジー完全系列の紹介から始める。

4.1 前層のコホモロジー完全系列

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ は X 上の Abel 群の前層で、前層の準同型写像 φ, ψ に対して

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

が完全であれば、コホモロジー群の完全系列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} \check{H}^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \dots \\ \dots \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \check{H}^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} \check{H}^q(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^{q+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \dots \end{aligned}$$

が成立する。(δ^* は連結準同型)

これはホモロジー代数の初歩の定理に過ぎない。

4.2 層のコホモロジー完全系列

定義： X 上の Abel 群の層 \mathbf{F} に対して、その正準前層 \mathcal{F} を係数とするコホモロジー群を \mathbf{F} -係数のコホモロジー群といい、 $\check{H}^*(X, \mathbf{F})$ で表す。

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ はパラコンパクトな空間 X 上の Abel 群の層で、層の準同型写像 φ, ψ に対して

$$0 \rightarrow \mathbf{F} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{G} \xrightarrow{\psi} \mathbf{H} \rightarrow 0$$

が完全であれば、コホモロジー群の完全系列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \check{H}^0(X, \mathbf{G}) \xrightarrow{\psi^*} \check{H}^0(X, \mathbf{H}) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \dots \\ \dots \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^q(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \check{H}^q(X, \mathbf{G}) \xrightarrow{\psi^*} \check{H}^q(X, \mathbf{H}) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^{q+1}(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \dots \end{aligned}$$

が成立する。(δ^* は連結準同型)

4.3 平方根問題のコホモロジーによる記述

以下では S^1 は複素平面の単位円と同一視して、乗法により Abel 群と考える。

$\psi_2(z) := z^2$ ($z \in \mathbb{C}$) という写像により Abel 群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^* \longrightarrow S^1 \xrightarrow{\psi_2} S^1 \longrightarrow 0 \quad (1)$$

が成り立つ。ここで 0 は単位群を表す。 S^1 で compact Hausdorff 空間 X 上の S^1 -値連続関数の芽の層を表し、 ψ_2 が誘導する層の準同型 $S^1 \rightarrow S^1$ もやはり ψ_2 で表すと、完全系列 (1) により層の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2^* \longrightarrow \mathbf{S}^1 \xrightarrow{\psi_2} \mathbf{S}^1 \longrightarrow 0 \quad (2)$$

が成り立つ。ここで \mathbf{Z}_2^* は \mathbb{Z}_2^* を基とする一定層を表す。従って層のコホモロジー群の完全系列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{Z}_2^*) &\longrightarrow \check{H}^0(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\psi_2^*} \check{H}^0(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*) \\ &\longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\psi_2^*} \check{H}^1(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^2(X, \mathbb{Z}_2^*) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。

次の標準的な事実に注意しよう。

$\check{H}^0(X, \mathbf{S}^1) \simeq C(X, S^1)$ かつこの同型で ψ_2^* は $f \mapsto f^2$ となる。

すべての $f \in C(X)^{-1}$ が連続な平方根を持つことは $\check{H}^0(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\psi_2^*} \check{H}^0(X, \mathbf{S}^1)$ が全射であることと同値である。

実際、 $f \in C(X)^{-1}$ に対して、 $f/|f| \in C(X, S^1)$ が連続平方根を持つことと f そのものが連続平方根を持つことと同値性は明らかであろう。

これらより

$C(X)^{-1}$ で平方根問題が肯定的 $\iff \check{H}^0(X, \mathbf{S}^1) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*)$ が 0 写像

ということが成り立つ。

よって、完全系列 (3) を用い、 $\check{H}^q(X, \mathbb{Z}_2) \simeq \check{H}^q(X, \mathbb{Z}_2^*)$ に注意すると粗い定理として次が得られる：

定理 1 compact Hausdorff 空間 X に対して、 $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ ならば $C(X)^{-1}$ は連続平方根を許す。

完全性をもう一段利用すると次も分かるが、分かりやすい条件とは言えないであろう：

定理 2 compact Hausdorff 空間 X に対して、 $C(X)^{-1}$ が連続平方根を許す必要十分条件は自然な写像 $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbf{S}^1)$ が単射となることである。

さらに詳しい結果を得るためには X の次元を制限する必要がある。

次元については、森田による次の結果が大変強力である。

定理 3 (森田紀一) X を compact Hausdorff 空間とすると

$\dim X \leq 1 \iff$ 任意の閉部分集合 $F \subset X$ 上の関数 $f \in C(F, S^1)$ は $g \in C(X, S^1)$ へ拡張される

森田の定理は $\dim X \leq 1$ ならば S^1 値の連続関数の層 S^1 が柔軟層 (soft sheaf, faisceau mou) であることを導くので, コホモロジー群についての次の結果が導かれる. 証明については R. Godement [2] の Théorème 4.4.3 を見よ.

補題 1 ($\dim X \leq 1$ の効果 1) X が compact Hausdorff 空間で $\dim X \leq 1$ とすると, 任意の $q \geq 1$ に対して $\check{H}^q(X, S^1) = 0$ となる.

$\dim X \leq 1$ のもう一つの効果は次のことである.

補題 2 ($\dim X \leq 1$ の効果 2) X が compact Hausdorff 空間で $\dim X \leq 1$ とすると, X 上の任意の Abel 群の前層 \mathcal{F} に対して, $q \geq 2$ ならば $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ となる.

定理 2 と補題 1, および $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2^*$ により次の結果が得られる:

定理 4 $\dim X \leq 1$ をみたま compact Hausdorff 空間 X に対しては, $C(X)^{-1}$ が連続平方根を許す必要十分条件は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ となることである.

系 5 compact Hausdorff 空間 X が $\dim X \leq 1$ かつ $C(X)$ が連続平方根を許すならば $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ でなければならない.

さらに詳しく言うと, $\dim X \leq 1$ ならば $\check{H}^2(X, \mathbb{Z}_2^*) = 0$ だから, (3) から次のことが分かる.

定理 6 $\dim X \leq 1$ をみたま compact Hausdorff 空間 X に対しては, Abel 群として次の同型が成り立つ:

$$C(X)^{-1} / \{C(X)^{-1}\}^2 \cong \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*).$$

Remark. $\dim X \leq 1$ を仮定しない場合は, 完全系列 (3) から $C(X)^{-1} / \{C(X)^{-1}\}^2$ は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*)$ の部分群である $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*) \rightarrow \check{H}^1(X, S^1)$ の kernel と同型であることが分かる.

次に, 上に登場した $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ という条件と, コホモロジー群の基礎である $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ の性質との関わりを考えよう. そのためには次の普遍係数定理が必要となる.

コホモロジー群の普遍係数定理 (E.H. Spanier [9], Theorem 6.8.10)

X が compact Hausdorff 空間で, Γ は X 上の torsion free R module の前層, G が R module とすると, 次の functorial な短完全列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \check{H}^q(X, \Gamma) \otimes G \longrightarrow \check{H}^q(X, \Gamma \otimes G) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(X, \Gamma) * G \longrightarrow 0$$

これを Γ を一定層 $X \times \mathbb{Z}$ として適用し, $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ と $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2^*$ を用いれば次が得られる.

補題 3 ($\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*)$ と $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ の関係) X が compact Hausdorff 空間とすると次の functorial な短完全列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

補題 4 ($\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2^*)$ と $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ の関係) X が compact Hausdorff 空間で $\dim X \leq 1$ とすると

$$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0 \iff \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \text{ は } 2 \text{ で divisible}$$

である。

証明: 補題 2 と補題 7 により $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) \simeq \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2$ なので, $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 = 0$ すなわち $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ が 2 で divisible なことと同値である. QED

以上から次の定理は容易に導かれる。

定理 7 compact Hausdorff 空間 X に対して, $\dim X \leq 1$ ならば $C(X)^{-1}$ が連続平方根を許す必要十分条件は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ が Abel 群として 2 で divisible なことである。

全く同様にして次の定理も示すことができる。

定理 8 compact Hausdorff 空間 X に対して, $\dim X \leq 1$ ならば $C(X)^{-1}$ が連続な n 乗根を許す必要十分条件は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ が Abel 群として n で divisible なことである。

5 川村-三浦による最近の結果

[5] (preprint) の結果を平方根に特化した形で述べると次のようになる。

1. X が連結なコンパクト距離空間のとき, $C(X)$ が連続平方根を持つ必要十分条件は, X が局所連結でかつ単純閉曲線を含まないことである。
2. X が compact Hausdorff 空間のとき, $C(X)^{-1}$ が連続平方根を持つ必要十分条件は $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ が 2-divisible なことである。

川村 [6] ではさらに次の結果も得られている。

3. compact Hausdorff 空間 X が sequentially compact でかつ almost locally connected であれば次元は高々 1。

6 残された問題

- $C(X)^{-1}$ でなく $C(X)$ が連続平方根を持つ条件を簡単に記述できるのか?
(局所連結性, 第一可算公理なしに) (注: 初めに挙げた例の (3) によって, コホモロジー $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2)$ の消滅だけでは $C(X)$ の元が連続平方根を持つには不十分であることが分かる.)
- 「 $C(X)$ あるいはもっと弱く $C(X)^{-1}$ の各元が連続平方根を持てば $\dim X \leq 1$ 」ということが任意の X で成り立つか?
- 平方根問題を局所化するとどうなるか? (これは任意の $f \in C(X)$ が各点のある近傍では連続平方根を持つような条件を求めるといふ問題である.)

- 平方根問題を局所化するような条件があるか？(つまり任意の $f \in C(X)$ が各点のある近傍では連続平方根を持つとき, X 全体で連続平方根を持つためにはいかなる条件をみたせばよいか?)

References

- [1] Countryman, Jr., R.D., *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. of Math. **20** (1967), 433–448.
- [2] Godement, R., “Théorie des faisceaux” (3ème Edition), Hermann, 1973.
- [3] Hatori, O. and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^* -algebras in which every element is the square of another*, Proc. of A.M.S. **128**(1999), 1185–1189.
- [4] Iversen, B., “Cohomology of Sheaves” (Springer Verlag) (訳本あり)
- [5] Kawamura, K. and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations, [preliminary version. 1]*, preprint.
- [6] Kawamura, K., private communication
- [7] Miura, T., *On commutative C^* -algebras in which every element is almost the square of another*, Contemporary Math. **232**(1999), 239–242.
- [8] Miura, T. and K. Nijjima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^* -algebras*, Proc. of A.M.S. **131**(2002), 2869–2876.
- [9] Spanier, E.H., “Algebraic Topology”, McGraw-Hill, 1966.
- [10] 金子 晃, 「超関数論入門」(新版), 東京大学出版会, 1996.
- [11] 滝沢精二, 「多様体」(数学講座 13), 筑摩書房, 1971.

**On the structure of linear isometries between
noncommutative L^p spaces
(Introduction to results of D. Sherman)**

WATANABE, Keiichi (Niigata Univ.)

Abstract. We will survey current developments in the study of linear isometries between noncommutative L^p spaces associated with von Neumann algebras. We also explain connection with the linear extension problem of measures.

$1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

歴史的な経緯

Theorem (Banach [B], 1932). $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$, 全射線型等距離作用素

$\implies \exists(\alpha, \sigma)$;

$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $|\alpha(n)| = 1$,

$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 置換,

$(Tx)(n) = \alpha(n)x(\sigma(n))$, $x \in \ell^p$.

Theorem (Lamperti [L], 1958). $T : L^p(X, \mathfrak{F}, \mu) \rightarrow L^p(X, \mathfrak{F}, \mu)$, 線型等距離作用素

$\implies \exists(h, \Sigma)$;

h ; 可測関数,

$\Sigma : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, “ σ -アルジブラ同型”,

$(Tf)(x) = h(x)(Jf)(x)$, $f \in L^p(X, \mathfrak{F}, \mu)$,

$|h|^p = d(\mu \circ \Sigma^{-1})/d\mu$,

ここで J は Σ から, $J\chi_A = \chi_{\Sigma A}$, $A \in \mathfrak{F}$, によって誘導される写像.

$C_p = \{a; \mathcal{H} \text{ 上のコンパクト作用素, } \text{Tr}(|a|^p) < \infty\}$; Schatten の C_p クラス

Theorem (Arazy [Ar], 1975). $T : C_p \rightarrow C_p$, 全射線型等距離作用素

$\implies \exists(u, w)$; ユニタリ作用素の対,

$T(x) = u \cdot x \cdot w$, $x \in C_p$ または $T(x) = u \cdot x^t \cdot w$, $x \in C_p$,

ここで x^t は, 固定された正規直交基底に関する転置を表わす.

Theorem (Yeadon [Y1], 1981). (\mathcal{M}_i, τ_i) , $i = 1, 2$, 半有限 von Neumann 環と忠実正規半有限トレース, $T : L^p(\mathcal{M}_1, \tau_1) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2, \tau_2)$, 線型等距離作用素

$\implies \exists^1(w, B, J)$;

$w \in \mathcal{M}_2$, 部分等距離作用素,

B ; $\mathcal{M}_2 \cap J(\mathcal{M}_1)'$ に付随する非負自己共役作用素

$J : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$, 正規 Jordan $*$ -同型,

$T(x) = wBJ(x)$, $x \in L^p(\mathcal{M}_1, \tau_1) \cap \mathcal{M}_1$,

$w^*w = J(1) = s(B)$,

$\tau_1(x) = \tau_2(B^p J(x))$, $x \geq 0$.

典型的な線型 L^p 等距離作用素

$(\mathcal{M}_1, \varphi_0), (\mathcal{M}_2, \psi_0)$; 任意の von Neumann 環と忠実正規半有限荷重 (必ずある).
 $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0), L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$; Haagerup の構成法による非可換 L^p 空間.

初め, 以下の 4 つ組の存在を仮定する.

$$\exists (J, \mathcal{A}, E_1, E_2);$$

$J: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$, Jordan $*$ -同型, $J(\mathcal{M}_1)$; WOT 閉 $*$ -環,
 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2$; von Neumann 部分環で $J(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{A}$ なるもの,
 $E_1: J(1)\mathcal{A}J(1) \rightarrow J(\mathcal{M}_1)$, 忠実正規条件付期待値,
 $E_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}$, 忠実正規条件付期待値.

(1) J は接合積の間の全射 Jordan $*$ -同型 \tilde{J} に拡張される;

$$\tilde{J}: \mathcal{M}_1 \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R} \rightarrow J(\mathcal{M}_1) \rtimes_{\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1}}} \mathbb{R},$$

さらに, \tilde{J} は可測作用素環の間の Jordan $*$ -同型に拡張され, その L^p 空間への制限は正の全射線型等距離作用素となる;

$$\tilde{J}: L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \rightarrow L^p(J(\mathcal{M}_1); \varphi_0 \circ J^{-1}).$$

(2) 条件付期待値によるもの.

$q = J(1)$ と表わす. 包含写像 $\iota_1: J(\mathcal{M}_1) \rightarrow q\mathcal{A}q$ は, 接合積の間の, 中への $*$ -同型を誘導し, L^p 等距離作用素となる;

$$\tilde{\iota}_1: J(\mathcal{M}_1) \rtimes_{\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1}}} \mathbb{R} \rightarrow q\mathcal{A}q \rtimes_{\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1} \circ E_1}} \mathbb{R},$$

$$\tilde{\iota}_1: L^p(J(\mathcal{M}_1); \varphi_0 \circ J^{-1}) \rightarrow L^p(q\mathcal{A}q; \varphi_0 \circ J^{-1} \circ E_1).$$

(3) 荷重の取替えによるもの.

\mathcal{A} 上に忠実正規半有限荷重 ψ_1 が次のように取れる; $q \in \mathcal{A}^{\psi_1}$ かつ $q\psi_1q$; 半有限, ここで $\mathcal{A}^{\psi_1} = \{x \in \mathcal{A}; \sigma_t^{\psi_1}(x) = x, t \in \mathbb{R}\}$.

$q\mathcal{A}q$ 上には 2 つの忠実正規半有限荷重が存在する, すなわち, $\varphi_0 \circ J^{-1} \circ E_1$ と $q\psi_1q$. このとき, 標準的な全射 $*$ -同型が Connes のコサイクルを用いて定まり, L^p 等距離作用素となる;

$$\kappa_1: q\mathcal{A}q \rtimes_{\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1} \circ E_1}} \mathbb{R} \rightarrow q\mathcal{A}q \rtimes_{\sigma^{q\psi_1q}} \mathbb{R},$$

$$\tilde{\kappa}_1: L^p(q\mathcal{A}q; \varphi_0 \circ J^{-1} \circ E_1) \rightarrow L^p(q\mathcal{A}q; q\psi_1q).$$

(4) 不動点環に属する射影によるもの.

$q \in \mathcal{A}^{\psi_1}$ ということから, 包含写像 $\iota: q\mathcal{A}q \rightarrow \mathcal{A}$ は, 接合積の包含写像を誘導し, 中への L^p 等距離作用素となる;

$$\tilde{\iota}: q\mathcal{A}q \rtimes_{\sigma^{q\psi_1q}} \mathbb{R} \rightarrow q(\mathcal{A} \rtimes_{\sigma^{\psi_1}} \mathbb{R})q,$$

$$\tilde{\iota}: L^p(q\mathcal{A}q; q\psi_1q) \rightarrow qL^p(\mathcal{A}; \psi_1)q \subset L^p(\mathcal{A}; \psi_1).$$

(5) (2) と同様. E_2 は L^p 等距離作用素を誘導する;

$$\tilde{i}_2 : L^p(\mathcal{A}; \psi_1) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_1 \circ E_2).$$

(6) (3) と同様. \mathcal{M}_2 上の忠実正規半有限荷重 $\psi_1 \circ E_2$ と元来の ψ_0 の取替えは, 全射 L^p 等距離作用素を誘導する;

$$\tilde{\kappa}_2 : L^p(\mathcal{M}_2; \psi_1 \circ E_2) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0).$$

上述の写像を合成し, 最後に適当な部分等距離作用素 $w \in \mathcal{M}_2$ の掛算を施す $w \cdot \tilde{\kappa}_2 \circ \tilde{i}_2 \circ \tilde{i} \circ \tilde{\kappa}_1 \circ \tilde{i}_1 \circ \tilde{J}$ は典型的な中への線型 L^p 等距離作用素となる.

Problem ([W4]). $T : L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$, 線型等距離作用素

$$\stackrel{?}{\implies} \exists (w, J, \mathcal{A}, E_1, E_2);$$

$$T = w \cdot \tilde{\kappa}_2 \circ \tilde{i}_2 \circ \tilde{i} \circ \tilde{\kappa}_1 \circ \tilde{i}_1 \circ \tilde{J} \text{ on } L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0).$$

L^p 等距離作用素の構造理論と, 測度の線型拡張問題との関連

極分解 $\varphi = u_\varphi |\varphi| \in (\mathcal{M}_1)_*$ から $u_\varphi h_{|\varphi|}^{1/p} \in L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$ という元を作り, 問題となっている T で写して再び極分解する;

$$T(u_\varphi h_{|\varphi|}^{1/p}) = v_\varphi h_{\beta(\varphi)}^{1/p}.$$

こうして $\gamma : (\mathcal{M}_1)_* \rightarrow (\mathcal{M}_2)_*$ が, $\gamma(\varphi) = v_\varphi \beta(\varphi)$, $\varphi \in (\mathcal{M}_1)_*$ によって自然に定義され,

- (1) $\gamma(\alpha\varphi) = \alpha\gamma(\varphi)$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (2) $\varphi_1 \perp \varphi_2 \Rightarrow \gamma(\varphi_1 + \varphi_2) = \gamma(\varphi_1) + \gamma(\varphi_2)$,
- (3) $\|\gamma(\varphi)\| = \|\varphi\|$,
- (4) ある連続性

が示される. 特に, Clarkson 不等式の等号成立条件を用いて導かれる (2) に注目すると, Mackey によって提示された, von Neumann 環 \mathcal{M} の射影元全体 \mathcal{M}_{proj} 上の測度の線型拡張問題を思い起こすのは自然である.

$\mu : \mathcal{M}_{proj} \rightarrow [0, 1]$ が確率測度
def.

- (1) $ef = 0 \Rightarrow \mu(e + f) = \mu(e) + \mu(f)$,
- (2) $\mu(1) = 1$.

この問題は Gleason, Aarnes, Gunson や, 前田周一郎, 斎藤和之といった先生方が研究され, 1985 年までに完全に解決された ([M]).

Theorem (Christensen [C], Yeadon [Y2]).

$\mathcal{M}; I_2$ 型直和成分をもたない von Neumann 環, $\mu : \mathcal{M}_{proj} \rightarrow [0, 1]$, 確率測度
 $\implies \exists^1 \varphi \in \mathcal{M}_+^*$; $\mu(p) = \varphi(p)$, $p \in \mathcal{M}_{proj}$.

$\rho: \mathcal{M}_{*,+} \rightarrow [0, \infty)$ が連続有限測度

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- (1) $\rho(\alpha\varphi) = \alpha\rho(\varphi)$, $\alpha \geq 0$,
- (2) $\varphi_1 \perp \varphi_2 \Rightarrow \rho(\varphi_1 + \varphi_2) = \rho(\varphi_1) + \rho(\varphi_2)$,
- (3) $\rho(\varphi) \leq \|\varphi\|$,
- (4) $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(\varphi_n) \rightarrow \rho(\varphi)$.

von Neumann 環 \mathcal{M} が (EP) を持つ

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \rho; \mathcal{M}_{*,+}$ 上の連続有限測度, $\exists! x \in \mathcal{M}_+$; $\rho(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$.

Theorem ([W4], [W5]). \mathcal{M}_1 ; (EP) を持ち,

$T: L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$, $*$ -保存, 全射線型等距離作用素
 $\implies \exists! (z, J)$;

$z \in \mathcal{M}_2$, 中心に属する自己共役ユニタリ作用素,

$J: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$, 全射 Jordan $*$ -同型,

$T = z \cdot \tilde{\kappa} \circ \tilde{J}$ on $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$.

実際に (EP) を持つことが示されている von Neumann 環のクラスは以下のとおり.

Theorem ([W4], [W5]).

- (1) $\mathcal{M}; I_2$ 型直和成分をもたない σ -有限かつ有限な von Neumann 環
 $\implies \mathcal{M}$ は (EP) を持つ.
- (2) \mathcal{M} ; 半有限 von Neumann 環, τ ; 忠実正規半有限トレース,
 $p_i \uparrow 1(SOT)$, $\tau(p_i) < \infty$, $p_i \mathcal{M} p_i; I_2$ 型直和成分をもたない
 $\implies \mathcal{M}$ は (EP) を持つ.
- (3) $\mathcal{M} = \bigvee_i \mathcal{M}_i$, $\{\mathcal{M}_i\};$ (EP) を持つ von Neumann 部分環の増大ネット,
 $E_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_i$; 忠実正規条件付期待値, $E_i \circ E_j = E_i$, $i \leq j$
 $\implies \mathcal{M}$ も (EP) を持つ.

Theorem (Haagerup and Størmer [HS]).

\mathcal{M} ; 可分な前双対空間をもつ III_0 型因子環

$\implies \exists \{\mathcal{M}_n\}; II_\infty$ 型 von Neumann 部分環の増大列, $\mathcal{M} = \bigvee_n \mathcal{M}_n$,

$E_n: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_n$, 忠実正規条件付期待値, $E_m \circ E_n = E_m$, $m \leq n$.

Theorem (Junge, Ruan and Xu. Quoted in [S2]).

\mathcal{M} ; hyperfinite III 型 von Neumann 環

$\implies \exists \{\mathcal{M}_n\}; I$ 型 von Neumann 部分環の増大列, $\mathcal{M} = \bigvee_n \mathcal{M}_n$,

$E_n: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_n$, 忠実正規条件付期待値, $E_m \circ E_n = E_m$, $m \leq n$.

Theorem (Sherman [S2]).

\mathcal{M} ; 半有限 von Neumann 環, hyperfinite von Neumann 環, または, 可分な前双対空間をもつ III_0 型因子環のいずれかで, I_2 型直和成分をもたない
 $\implies \mathcal{M}$ は (EP) を持つ.

D. Sherman の主な結果

次の定式化は, $J(\mathcal{M}_1)$ が環でない場合もカバーしていて, より適切な形であろう.

Definition (Sherman [S2]).

$T : L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$, 線型等距離作用素が *typical*

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists (w, J, P);$

$w \in \mathcal{M}_2$, 部分等距離作用素, $w^*w = J(1)$,

$J : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$, 正規 Jordan $*$ -同型,

$P : \mathcal{M}_2 \rightarrow J(\mathcal{M}_1)$, 正の正規射影 (i.e. P が $J(\mathcal{M}_1)$ の各点を動かさない),

$$T(h_\varphi^{1/p}) = w \cdot h_{\varphi \circ J^{-1} \circ P}^{1/p}, \quad \varphi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}.$$

Theorem (Sherman [S1], [S2]).

- (1) 全射 L^p 等距離作用素は全て *typical*.
- (2) L^1 等距離作用素は全て *typical*.
- (3) \mathcal{M}_1 が (EP) と $(\text{EP})_p$ を持つ $\implies L^p$ 等距離作用素は *typical*.
 \mathcal{M}_1 が (EP) を持つ \implies 正の L^p 等距離作用素は *typical*.

以下は, 現時点では未だ不明のようである;
 I_2 型直和成分をもたない von Neumann 環は (EP) を持つか?
全射と限らない L^p 等距離作用素は *typical* か?

References

- [A] H. Araki, *An application of Dye's theorem on projection lattices to orthogonally decomposable isomorphisms*, Pacific J. Math. **137** (1989), 1–13.
- [AM] H. Araki, and T. Masuda, *Positive cones and L^p -spaces for von Neumann algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 339–411.
- [Ar] J. Arazy, *The isometries of C_p* , Israel J. Math. **22** (1975), 247–256.
- [B] S. BANACH, *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1932.
- [BW1] L. J. Bunce and J. D. M. Wright, *Complex measures on projections in von Neumann algebras*, J. London Math. Soc. (2) **46** (1992), 269–279.
- [BW2] L. J. Bunce and J. D. M. Wright, *On orthomorphisms between von Neumann preduals and a problem of Araki*, Pacific J. Math. **158** (1993), 265–272.
- [C] E. Christensen, *Measures on projections and physical states*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 529–538.
- [D] H. A. Dye, *On the geometry of projections in certain operator algebras*, Ann. Math. **66** (1955), 73–88.

- [G] A. Gleason, *Measures on closed subspaces of a Hilbert space*, J. Math. Mech. **6** (1957), 885–893.
- [H] U. Haagerup, *L^p -spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, Colloq. Internat. CNRS **274** (1979), 175–184.
- [HS] U. Haagerup and E. Størmer, *Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights*, Adv. Math. **83** (1990), 180–262.
- [Hi] M. Hilsum, *Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann définies par la dérivée spatiale*, J. Funct. Anal. **40** (1981), 151–169.
- [I] H. Izumi, *Constructions of non-commutative L^p -spaces with a complex parameter arising from modular actions*, Internat. J. Math. **8** (1997), 1029–1066.
- [K] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. Math. **54** (1951), 325–338.
- [Ka1] A. Katavolos, *Isometries of non-commutative L^p -spaces*, Can. J. Math. **28** (1976), 1180–1186.
- [Ka2] A. Katavolos, *Are non-commutative L^p -spaces really non-commutative ?*, Can. J. Math. **33** (1981), 1319–1327.
- [Ka3] A. Katavolos, *Non-commutative L^p -spaces II*, Can. J. Math. **34** (1982), 1208–1214.
- [Ko1] H. Kosaki, *Applications of uniform convexity of non-commutative L^p -spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 265–282.
- [Ko2] H. Kosaki, *Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: Non-commutative L^p -spaces*, J. Funct. Anal. **56** (1984), 29–78.
- [L] J. Lamperti, *On the isometries of certain function spaces*, Pac. J. Math. **8** (1958), 459–466.
- [M] S. Maeda, *Probability measures on projections in von Neumann algebras*, Rev. Math. Physics **1** (1990), 235–290.
- [N] E. Nelson, *Note on non-commutative integration*, J. Funct. Anal. **15** (1974), 103–116.
- [R] B. Russo, *Isometries of L^p -spaces associated with finite von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 228–232.
- [Se] I. E. Segal, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (1953), 401–457.
- [S1] D. Sherman, *Noncommutative L^p structure encodes exactly Jordan structure*, preprint.
- [S2] D. Sherman, *On the structure of isometries between noncommutative L^p spaces*, preprint.
- [Tam] P. K. Tam, *Isometries of L^p -spaces associated with semifinite von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **254** (1979), 339–354.
- [Te1] M. Terp, *L^p -spaces associated with arbitrary von Neumann algebras*, Notes, Copenhagen University, 1981.
- [Te2] M. Terp, *Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual*, J. Operator Theory **8** (1982), 327–360.
- [Tsu] M. Tsukada, *Strong convergence of martingales in von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 537–540.
- [W1] K. Watanabe, *On isometries between non-commutative L^p -spaces associated with arbitrary von Neumann algebras*, J. Operator Theory **28** (1992), 267–279.
- [W2] K. Watanabe, *Finite measures on preduals and non-commutative L^p -isometries*, J. Operator Theory **33** (1995), 371–379.
- [W3] K. Watanabe, *An application of orthoisomorphisms to non-commutative L^p -isometries*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32** (1996), 493–502.
- [W4] K. Watanabe, *Problems on isometries of non-commutative L^p -spaces*, Contemporary Math. **232** (1999), 349–356.
- [W5] K. Watanabe, *On the structure of non-commutative L^p -isometries*, preprint.
- [Y1] F. J. Yeadon, *Isometries of non-commutative L^p -spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90** (1981), 41–50.
- [Y2] F. J. Yeadon, *Finitely additive measures on projections in finite W^* -algebras*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 145–150.

The integration operators on BMOA-type spaces and Dirichlet spaces

Rikio Yoneda

Let $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ denote the open unit disk in the complex plane \mathbb{C} and let $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ denote the unit circle. For $1 \leq p < +\infty$, the Lebesgue space $L^p(D, dA)$ is defined to be the Banach space of Lebesgue measurable functions on the open unit disk D with

$$\|f\|_{L^p(dA)} := \left(\int_D |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

where $dA(z)$ is the normalized area measure on D . The Bergman space $L^p_\alpha(D)$ is defined to be the subspace of $L^p(D, dA)$ consisting of analytic functions. For $0 < p < +\infty$, the Hardy space H^p is defined to be the Banach space of analytic functions f on D with

$$\|f\|_p := \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

For $z, w \in D$, let $\beta(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}$, where $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$. For $0 < r < +\infty$ and $z \in D$, let $D(z) = D(z, r) = \{w \in D : \beta(z, w) < r\}$ denote the Bergman disk. $|D(z, r)|$ denotes the normalized area of $D(z, r)$ and $|D(z, r)|$ is comparable to $(1 - |z|^2)^2$.

The space of analytic functions on D of bounded mean oscillation, denoted by $BMOA$, consists of functions f in H^2 for which

$$\|f\|_{BMOA} := \sup_{z \in D} \|f \circ \varphi_z - f(z)\|_2 < +\infty.$$

Let $\alpha > 0$. Then α -Bloch space B^α is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\|f\|_{B^\alpha} := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < +\infty.$$

And the little α -Bloch space, denoted B_0^α , is the closed subspace of B^α consisting of functions f with $(1 - |z|^2)^\alpha f'(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow 1^-$). Note that B^1, B_0^1 are the Bloch space B , the little Bloch space B_0 , respectively.

Let X and Y be Banach spaces. Then a function f on D is a multiplier of X into Y if $fg \in Y$ for all g in X . In the case, we write $fX \subset Y$.

For g analytic on D , the operators I_g, J_g are defined on the weighted Bloch space by the following:

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta, \quad J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta.$$

If $g(z) = z$, then J_g is the integration operator. If $g(z) = \log \frac{1}{1-z}$, then J_g is the Cesàro operator.

In [6], Ch. Pommerenke showed that J_p is bounded operator on Hardy space H^2 if and

only if g is in $BMOA$, and this result was extended to the other Hardy space H^p $1 \leq p < +\infty$ in [1]. In [2], A.Aleman and A.G.Siskakis studied the operator J_g defined on the weighted Bergman space. In [10], A.G.Siskakis and R.Zhao studied the boundedness and compactness of J_g on $BMOA$.

In [12], we proved the following result:

Theorem 1.1. The operator J_g is bounded on B if and only if

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty,$$

and the operator J_g is compact on B if and only if

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| = 0.$$

And let $\alpha > 1$. Then the operator J_g is bounded on B^α if and only if $g \in B$. And the operator J_g is compact on B^α if and only if $g \in B_0$.

In [13], we also proved the following results :

Theorem 1.2. Let $\alpha \geq 1$ and g be analytic on D . Then the operator I_g is bounded on B^α if and only if $g \in H^\infty$. And the operator I_g is compact on B^α if and only if $g \equiv 0$.

Theorem 1.3. For g analytic on D , the following are equivalent :

- (i) $gB \subset B$ ($gB_0 \subset B_0$) ;
- (ii) Both I_g and J_g are bounded operators on B (or B_0) ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty$.

And let $\alpha > 1$. The following are equivalent :

- (i)' $gB^\alpha \subset B^\alpha$ ($gB_0^\alpha \subset B_0^\alpha$) ;
- (ii)' I_g is bounded operator on B^α (or B_0^α) ;
- (iii)' $g \in H^\infty$.

In Theorem 1.3, the equivalence of (i) and (iii), the equivalence of (i)' and (iii)' were proved in [16] and [17].

In [14], we were proved the following examples. The equivalence of (i) and (iii) also were proved in [5]

Example 2.1. Let $0 < \alpha \leq \beta < 1$. For g analytic on D , the following are equivalent :

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in B^\beta$.

Example 2.2. Let $0 < \alpha < 1 \leq \beta$. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in B^\beta$.

Example 2.3. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gB \subset B$;
- (ii) $I_g, J_g : B \rightarrow B$ are bounded operators ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |g'(z)| < +\infty$.

Example 2.4. Let $\alpha > 1$. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gB^\alpha \subset B^\alpha$;
- (ii) $I_g : B^\alpha \rightarrow B^\alpha$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in H^\infty$.

Example 2.5. Let $1 < \alpha < \beta$. For g analytic on D , the following are equivalent :

- (i) $gB^\alpha \subset B^\beta$;
- (ii) $I_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $J_g : B^\alpha \rightarrow B^\beta$ is bounded operator ;
- (iv) $g \in B^{\beta-\alpha+1}$;
- (v) $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\beta-\alpha} |g(z)| < +\infty$.

The space B_{\log} is defined to be the space of analytic function f on D such that $\|f\|_{B_{\log}} = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) |f'(z)| < +\infty$. By using the test function $f_a(z) := \log(\log(1 - \bar{a}z))$, it is also proved.

Example 2.6. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gB_{\log} \subset B_{\log}$;
- (ii) $I_g, J_g : B_{\log} \rightarrow B_{\log}$ are bounded operators ;
- (iii) $g \in H^\infty$, $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) \left(\log \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right) \right) |g'(z)| < +\infty$.

In [15], we proved the following results :

Theorem 3.1. Let $\alpha \leq \beta$. For g analytic on D , the operator $I_g : BMOA^\alpha \rightarrow BMOA^\beta$ is bounded if and only if

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\beta - \alpha} |g(z)| < \infty.$$

Theorem 3.2. Let $\alpha \leq \beta$ and $0 < \alpha < 1$. For g analytic on D , $J_g : BMOA^\alpha \rightarrow BMOA^\beta$ is bounded if and only if

$$g \in BMOA^\beta.$$

By using Theorem 3.1 and Theorem 3.2, we have the following corollary :

Corollary 3.3. Let $\alpha \leq \beta$ and $0 < \alpha < 1$. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gBMOA^\alpha \subset BMOA^\beta$;
- (ii) $J_g : BMOA^\alpha \rightarrow BMOA^\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in BMOA^\beta$.

Proposition 3.4. Let $1 \leq \alpha \leq \beta$. For g analytic on D , if $J_g : BMOA_\alpha \rightarrow BMOA_\beta$ is bounded operator, then

$$g \in BMOA_{\beta - \alpha + 1}.$$

And if $g \in BMOA^{\beta - \alpha + 1}$, then $J_g : BMOA^\alpha \rightarrow BMOA^\beta$ is bounded operator.

Corollary 3.5. Let $1 \leq \alpha < \beta$. For g analytic on D , if $g \in BMOA^{\beta-\alpha+1}$, then $gBMOA^\alpha \subset BMOA^\beta$.

Theorem 3.6. Let $\alpha > 0$, the operator $I_g : BMOA_\alpha \rightarrow BMOA_\alpha$ is bounded if and only if

$$g \in H^\infty.$$

Theorem 3.7. Let $\alpha > 1$, the operator $J_g : BMOA_\alpha \rightarrow BMOA_\alpha$ is bounded if and only if

$$g \in BMOA.$$

By using Theorem 3.6 and Theorem 3.7, we have the following corollary :

Corollary 3.8. Let $\alpha > 1$. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gBMOA_\alpha \subset BMOA_\alpha$;
- (ii) $I_g : BMOA_\alpha \rightarrow BMOA_\alpha$ is bounded operator ;
- (iii) $g \in H^\infty$.

Theorem 4.1. Let $\alpha \leq \beta$. For g analytic on D , the operator $I_g : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ is bounded if and only if

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} |g(z)| < \infty.$$

Theorem 4.2. Let $1 < \alpha \leq \beta$. For g analytic on D , the operator $J_g : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ is bounded if and only if

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+1} |g'(z)| < \infty.$$

Corollary 4.3. Let $1 < \alpha < \beta$. For g analytic on D , the following are equivalent:

- (i) $gD_\alpha \subset D_\beta$;
- (ii) $I_g : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ is bounded operator ;
- (iii) $J_g : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ is bounded operator ;
- (iv) $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}(\beta - \alpha) + 1} |g'(z)| < +\infty$.

References

- [1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p , Complex Variables, 28(1995),149-158.
- [2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.
- [3] P.L.Duren, Theory of H^p spaces (Academic Press, 1970).
- [4] P.L.Duren, B.W.Romberg and A.L.Schild, Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, J.Reine Angew.Math.238(1969),32-60.
- [5] S.Ohno, K.Stroethoff and R.Zhao, Weighted composition operators between Bloch-type spaces, to appear Rocky Mout.J.Math.
- [6] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.
- [7] W.Ramey and D.Ullrich, Bounded mean oscillation of Bloch Pull-backs, Math.Ann.291, (1991),591-606.
- [8] A. Montes-Rodriguez, The essential norm of composition operators on Bloch spaces, Pacific J.Math.188(1999),339-351.
- [9] A. Montes-Rodriguez, Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, J.London Math.Soc.(2)61(2000),872-884.
- [10] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.
- [11] K.Stroethoff, The Bloch space and Besov spaces of analytic functions, Bull.Austral.Math.Soc.54(1996), 211-219.
- [12] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, in preprint.
- [13] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.
- [14] R.Yoneda, Essential Norms of integration operators and multipliers on weighted Bloch spaces, in preprint.
- [15] R.Yoneda, Pointwise Multipliers From $BMOA^\alpha$ To $BMOA^\beta$, in preprint.
- [16] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.

Generalized Riesz Projections and Toeplitz Operators

Takahiko Nakazi (Hokkaido University)

Takanori Yamamoto (Hokkai-Gakuen University)

Abstract Let $\mathcal{P} = \text{span}\{e^{in\theta}; n \geq 0\}$, and let $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{in\theta}; n < 0\}$. The Riesz projection P maps $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ onto \mathcal{P} . Let v be a measurable function on the unit circle \mathbb{T} satisfying $|v| > 0$. In this paper, the generalized Riesz projection P^v is defined by $P^v f = vP(v^{-1}f)$, ($f \in v\mathcal{P} + v\mathcal{Q}$). Then $v\mathcal{P} \cap v\mathcal{Q} = \{0\}$, and P^v maps $v\mathcal{P} + v\mathcal{Q}$ onto $v\mathcal{P}$. Hence, $(P^v)^2 = P^v$. Let w be an integrable function on \mathbb{T} satisfying $w > 0$. Let $1 \leq p < \infty$. If $v \in L^p(w)$, then $v\mathcal{P} + v\mathcal{Q}$ is dense in $L^p(w)$. Let $1 < p < \infty$, and let $1/p + 1/q = 1$. If w satisfies the Muckenhoupt condition (A_p) , then it is well known that the Riesz projection $P = P^1$ is extended to a bounded operator on $L^p(w)$ and the adjoint operator P^* satisfies $P^* f = P^{1/w} f$, ($f \in L^q(w)$). We discuss the operators P^v on $L^p(w)$ and the adjoint operators $(P^v)^*$ on $L^q(w)$. We also study the generalized Toeplitz operators which are defined by P^v .

1. Generalized Riesz 射影 P^v の有界性と共役作用素

$\mathcal{P} = \text{span}\{e^{in\theta}; n \geq 0\}$, $\mathcal{Q} = \text{span}\{e^{in\theta}; n < 0\}$, $dm(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi$ は単位円周 \mathbb{T} 上の正規化された Lebesgue 測度である。荷重関数 w が $w > 0$, $w, \log w \in L^1 = L^1(dm)$ を満たす場合を考える。 $1 < p < \infty$ の場合を考える。 $H^p(w)$ は \mathcal{P} の $L^p(w)$ ノルム閉包, $\overline{H_0^p(w)}$ は \mathcal{Q} の $L^p(w)$ ノルム閉包を表す。 Riesz 射影 $P : \mathcal{P} + \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ は

$$(Pf)(e^{i\theta}) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k)e^{ik\theta}, \quad (f \in \mathcal{P} + \mathcal{Q}).$$

と定義される。 $P : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ が有界作用素になるための必要十分条件は $w \in (A_p)$:

$$\sup_I \left(\frac{1}{m(I)} \int_I w dm \right) \left(\frac{1}{m(I)} \int_I w^{-1/(p-1)} dm \right)^{p-1} < \infty$$

と同値であることは Hunt-Muckenhoupt-Wheeden の定理としてよく知られている。(cf. Böttcher-Silbermann[1, p.39], Garnett[3, p.255], Nikolski[8, p.209, p.450], [9, Vol.1, p.119]).

\mathbb{T} 上の可測関数 $|v| > 0$ について, Generalized Riesz 射影 P^v を

$$(P^v f)(e^{i\theta}) = v(e^{i\theta})P(v^{-1}f)(e^{i\theta}), \quad (f \in v\mathcal{P} + v\mathcal{Q}).$$

と定義する。よって, $P^v : v\mathcal{P} + v\mathcal{Q} \rightarrow v\mathcal{P}$.

定理 1 $v \in L^p(w)$ について, $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ が有界作用素であるための必要十分条件は $|v|^p w \in (A_p)$ である。

定理 2 $v \in L^p(w)$ について次が成り立つ。

(1) もし $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ が有界作用素ならば, $\text{ran} P^v = vH^p(|v|^p w) = [v\mathcal{P}]_{L^p(w)}$, ただ

し, $[v\mathcal{P}]_{L^p(w)}$ は \mathcal{P} の $L^p(w)$ ノルム閉包を表す。

(2) k は $|k| = |v|$ を満たす outer 関数とする。 $Q^v = I - P^v$ とする。このとき、もし $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ が有界作用素ならば、 $P^k : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ も有界作用素であり、

$$\text{ran } P^v = \ker Q^v = \frac{v}{k} H^p(w) \subset L^p(w), \quad \ker P^v = \text{ran } Q^v = \frac{v}{k} \overline{H_0^p(w)} \subset L^p(w),$$

$$L^p(w) = H^p(w) \oplus \frac{k}{k} \overline{H_0^p(w)} = \text{ran } P^k \oplus \ker P^k.$$

(3) もし $L^p(w) = H^p(w) \oplus \frac{k}{k} \overline{H_0^p(w)}$ ならば、 $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は有界作用素である。

$K^p(w)$ を $K^p(w) = \{f \in L^p(w); fw \text{ の負の Fourier 係数は } 0 \text{ である}\}$ と定義する。更に $K_0^p(w) = \{f \in K^p(w); fw \text{ の } 0 \text{ 番目の Fourier 係数は } 0 \text{ である}\}$ と定義する。
 $p = 2$ のときは、直交分解 $L^2(w) = H^2(w) \oplus \overline{K_0^2(w)}$ が成り立つ。

系 1 α は $w = |\alpha|^{-2}$ を満たす outer 関数とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) $P^\alpha : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ が有界作用素であるための必要十分条件は $w^{(2-p)/2} \in (A_p)$ である。
 (2) もし $w^{(2-p)/2} \in (A_p)$ ならば、 $L^p(w) = H^p(w) \oplus \overline{K_0^p(w)}$ であり、 $P^\alpha : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ は有界作用素であり、 $P^\alpha(f + \bar{g}) = f$, ($f \in H^p(w)$, $g \in K_0^p(w)$).

次に、 P^v の共役作用素について考える。 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。 $f \in L^p(w)$, $g \in L^q(w)$ について

$$\langle f, g \rangle_w = \int fgw \, dm$$

と書く。このとき、 $H^p(w)^\perp = \{g \in L^q(w); \langle f, g \rangle_w = 0, (f \in H^p(w))\} = K_0^q(w)$ が成り立つ。これは、第 4 章の定理 5 の証明に使う。 $p = 2$ のときは、 $H^2(w)^\perp$ は Hilbert 空間のときの $H^2(w)$ の直交補空間 $\overline{K_0^2(w)}$ の複素共役 $K_0^2(w)$ になる。 $w = 1$ のときは、 $(H^2)^\perp = K_0^2 = H_0^2$ となる。このように、 $H^2(w)^\perp$ は Hilbert 空間のときの $H^2(w)$ の直交補空間 $\overline{K_0^2(w)}$ の複素共役になる。任意の有界線形関数 $\psi \in L^p(w)^*$ に対し、唯一つの $g \in L^q(w)$ が存在して

$$\phi(f) = \langle f, g \rangle_w = \int fgw \, dm, \quad (f \in L^p(w)).$$

と書ける。 $\|\phi\| = \|g\|_{L^q(w)}$ より、 $L^p(w)^*$ と $L^q(w)$ は等距離同型である。任意の P^v に対し、唯一つの $(P^v)^*$ が存在し、 $\langle P^v f, g \rangle_w = \langle f, (P^v)^* g \rangle_w$, ($f \in L^p(w)$, $g \in L^q(w)$).

定理 3 $|v|^p w \in (A_p)$, $|v|^q w \in L^1$ のとき、 $(P^v)^* g = P^v g$, ($g \in L^p(w) \cap L^q(w)$) が成り立つための必要十分条件は $|v|^2 w$ が定数となることである。

系 2 $w^{(2-p)/2} \in (A_p)$, α は $w = |\alpha|^{-2}$ を満たす outer 関数とする。このとき、 $P^\alpha : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ と $(P^\alpha)^* : L^q(w) \rightarrow H^q(w)$ は有界な射影作用素であり、

$$(P^\alpha)^*(g_1 + g_2) = g_1, \quad (g_1 + g_2 \in H^q(w) \oplus \overline{K_0^q(w)}),$$

$$(P^\alpha)^* = P^\alpha, \quad \text{on } L^p(w) \cap L^q(w).$$

2. T_ϕ^v と $\phi P^v + Q^v$ の可逆性

$1 < p < \infty$, $w \in (A_p)$ のとき, Hunt-Muckenhoupt-Wheeden theorem より, $P : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$, 有界作用素である。 $\phi \in L^\infty$ に対し Toeplitz 作用素 T_ϕ を $T_\phi f = P(\phi f)$, ($f \in H^p(w)$) と定めると, $T_\phi : H^p(w) \rightarrow H^p(w)$, 有界作用素である。

一方, $w \in (A_p)$ が成り立たなくても $|v|^p w \in (A_p)$ のとき, 定理 1 より, $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は有界作用素である。 $(P^v)^2 = P^v$ より $\text{ran } P^v$ は $L^p(w)$ の閉部分空間である。 $\phi \in L^\infty$ に対し Toeplitz 作用素 T_ϕ^v を $T_\phi^v f = P^v(\phi f)$, ($f \in \text{ran } P^v$) と定めると, $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ は有界作用素である。 $|v|^p w \in (A_p)$ のとき, 次は同値である。

- (1) $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ は左可逆である。
- (2) $T_\phi : H^p(|v|^p w) \rightarrow H^p(|v|^p w)$ は左可逆である。
- (3) $\phi P + Q : L^p(|v|^p w) \rightarrow L^p(|v|^p w)$ は左可逆である。
- (4) $\phi P^v + Q^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は左可逆である。

この証明には, 定理 2 と荷重付きノルム不等式を使う。outer 関数 h が $|h|^p = w$ を満たすとき,

$$\psi = \phi \frac{\overline{kh}}{kh}$$

と定める。このとき, $|kh|^p = |v|^p w$ であることを使うと, 次も同値であることがわかる。

- (5) $\psi P + Q : L^p \rightarrow L^p$ は左可逆である。
- (6) $T_\psi : H^p \rightarrow H^p$ は左可逆である。

Gohberg-Krupnik [4] は, 特異積分作用素 $\phi P + Q$ を調べている。 $|v|^p w \in (A_p)$ のとき, 次は同値である。

- (1) $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ は可逆である。
- (2) $P^v \phi P^v + Q^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は可逆である。
- (3) $\phi P^v + Q^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は可逆である。

この証明には $v = 1$ のときと同様に, $P^v \phi P^v + Q^v = T_\phi^v P^v + Q^v$ と $(\phi P^v + Q^v)(I - Q^v \phi P^v) = P^v \phi P^v + Q^v$, と $(I - Q^v \phi P^v)^{-1} = I + Q^v \phi P^v$ を使う。

定理 4 $\phi \in L^\infty$, $|v|^p w \in (A_p)$. このとき, $P^v : L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ は有界作用素であり, 次は同値である。

- (1) $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ は可逆である。
- (2) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $|v|^p w \exp(pV/2) \in (A_p)$.

証明: (1) \Rightarrow (2): 上と同様に, $\psi = \phi \frac{\overline{kh}}{kh}$ と ψ を定める。荷重付きノルム不等式を使うと, $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ の左可逆性より, $T_\psi : H^p \rightarrow H^p$ は左可逆である。次に, Nakazi [7] と同様に, $\text{ran } T_\psi \subset H^p$, 稠密であることを示すことができる。よって, $T_\psi : H^p \rightarrow H^p$ は可逆である。Widom-Devinatz の定理より, $\psi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $e^V \in (A_2)$. これを ϕ について書き換えた条件が (2) である。

(1) \Rightarrow (2): Widom-Devinatz の定理より, $T_\psi : H^p \rightarrow H^p$ は可逆である。荷重付きノルム不等式を使うと, T_ψ の左可逆性より, $T_\phi^v : \text{ran } P^v \rightarrow \text{ran } P^v$ は左可逆である。次に, Nakazi [7] と

同様に, $\text{ran}T_\phi^v \subset \text{ran}P^v$, 稠密であることを示すことができる。

$v = 1$ とき, $\text{ran}P^v = \text{ran}P = H^p(w)$ であるから, 定理 4 より次の系 3 が導かれる。Rochberg [10] は, Widom-Devinatz の証明を荷重付の場合に一般化した方法で証明し, Widom-Devinatz の定理自体は使っていない。

系 3 Rochberg-Simonenko の定理.(cf.[1, p.216], [10])

$\phi \in L^\infty$, $w \in (A_p)$. このとき次は同値である。

- (1) $T_\phi : H^p(w) \rightarrow H^p(w)$ は可逆である。
- (2) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $w \exp(pV/2) \in (A_p)$.

$w = |\alpha|^{-2}$ のとき, $|\alpha|^p w = w^{(2-p)/2}$ より, 次の系が成り立つ。

系 4 $\phi \in L^\infty$. α は $w = |\alpha|^{-2}$ を満たす outer 関数, $w^{(2-p)/2} \in (A_p)$ とする。このとき, $P^\alpha : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ は有界な射影作用素であり $(P^\alpha)^* = P^\alpha$ on $L^p(w) \cap L^q(w)$ を満たしており, 次は同値である。

- (1) $T_\phi^\alpha : H^p(w) \rightarrow H^p(w)$ は可逆である。
- (2) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $w^{(2-p)/2} \exp(pV/2) \in (A_p)$.

$w^{(2-p)/2} \in (A_p)$ という条件は, $p = 2$ のときは w に制限を加えない。よって次が成り立つ。

系 5 $\phi \in L^\infty$. α は $w = |\alpha|^{-2}$ を満たす outer 関数とする。このとき, $P^\alpha : L^2(w) \rightarrow H^2(w)$ は自己共役射影作用素であり, 次は同値である。((2),(3) の同値性は Widom-Devinatz の定理)

- (1) $T_\phi^\alpha : H^2(w) \rightarrow H^2(w)$ は可逆である。
- (2) $T_\phi : H^2 \rightarrow H^2$ は可逆である。
- (3) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $e^V \in (A_2)$.

3. R_ϕ^k の可逆性

Generalized Riesz 射影として, P^k , k は outer 関数の場合のみを考える。 $\phi \in L^\infty$ に対して作用素 $R_\phi^k : H^p(w) \rightarrow L^p(w)/\ker P^k$ を次のように定義する。

$$R_\phi^k f = \phi f + \ker P^k, \quad (f \in H^p(w)).$$

$\|R_\phi^k f\| = \|\phi f + \ker P^k\| \leq \|\phi f\| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_{p,w}$ より, (A_p) 条件がなくても, 一般の荷重 w について, R_ϕ^k は有界作用素である。定理 2 より, $\ker P^k = \frac{k}{k} \overline{H_0^p(w)}$. $k = 1$ の場合, Nakazi [7] は $R_\phi = R_\phi^1 : H^p(w) \rightarrow L^p(w)/\overline{H_0^p(w)}$, $R_\phi f = \phi f + \overline{H_0^p(w)}$, $(f \in H^p(w))$ の可逆性の条件を求めた。特に outer 関数 α が $w = |\alpha|^{-2}$ を満たすとき, $\ker P^\alpha = \overline{K_0^p(w)}$, $R_\phi^\alpha : H^p(w) \rightarrow L^p(w)/\overline{K_0^p(w)}$,

$$R_\phi^\alpha f = \phi f + \overline{K_0^p(w)}, \quad (f \in H^p(w)).$$

k は outer 関数であるから, 定理 2 より, $\text{ran}P^k = H^p(w)$ が成り立つ。特に $|k|^p w \in (A_p)$ のときは, $P^k : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ は有界作用素であるから, $T_\phi^k : H^p(w) \rightarrow H^p(w)$ の可逆性と R_ϕ^k の

可逆性は同値である。次の定理 5 は、定理 4 の $v = k$ の場合を含んでいる。逆に、定理 4 は、定理 5 の $|k|^p w \in (A_p)$ の場合、すなわち、 $P^k : L^p(w) \rightarrow H^p(w)$ が有界作用素の場合を含んでいる。

定理 5 $\phi \in L^\infty$. k outer 関数, h は $w = |h|^p$ を満たす outer 関数,

$$\psi = \phi \frac{\bar{k}}{k}$$

とする。このとき、次は同値である。

(1) $R_\phi^k : H^p(w) \rightarrow L^p(w)/\ker P^k$ は可逆である。

(2) $R_\psi : H^p(w) \rightarrow L^p(w)/\overline{H_0^p(w)}$ は可逆である。

(3) $\psi = k_0(\bar{h}_0/h_0)(h/\bar{h})$ と書ける。ただし、 $k_0, k_0^{-1} \in H^\infty$, h_0 は $|h_0|^p \in (A_p)$ を満たす outer 関数である。

(4) $\psi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし、 γ は $|\gamma| = 1$ なる定数、 U は実数値有界関数、 V は実数値 L^1 関数、 $w \exp(pV/2) \in (A_p)$ 。

(5) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし、 γ は $|\gamma| = 1$ なる定数、 U は実数値有界関数、 V は実数値 L^1 関数、 $|k|^p w \exp(pV/2) \in (A_p)$ 。

証明： Nakazi [7] より、(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)。

(1) \Rightarrow (2): 定理 2 より、 $\ker P^k = \frac{k}{\bar{k}} \overline{H_0^p(w)}$. R_ϕ^k の左可逆性より、

$$\int |\phi f + \frac{k}{\bar{k}} \bar{g}|^p w dm \geq \varepsilon \int |f|^p w dm, \quad (f \in H^p(w), g \in \overline{H_0^p(w)}).$$

このとき、 $H^p(w)^\perp = K_0^q(w)$ が成り立つから、Hahn-Banach の定理より、 $f \in L^q$ に対し、

$$\sup_{F \in H^p(w), \|F\|_p = 1} |\langle f, g \rangle_w| = \inf_{g \in K_0^q(w)} \|f - g\|_p$$

が成り立つ (cf. Garnett[3, p.132])。よって、等距離同型 $: H^p(w)^* = L^q(w)/K_0^q(w)$ が成り立つ。同様に、 $(L^p(w)/\frac{k}{\bar{k}} \overline{H_0^p(w)})^* = \frac{\bar{k}}{k} K^q(w)$ が成り立つ。よって、 $(R_\phi^k)^* : \frac{\bar{k}}{k} K^q(w) \rightarrow L^q(w)/K_0^q(w)$ は有界作用素であり、

$$(R_\phi^k)^* \left(\frac{\bar{k}}{k} F \right) = \psi F + K_0^q(w), \quad (F \in \overline{K^q(w)}).$$

R_ϕ^k の右可逆性より、 $(R_\phi^k)^*$ は左可逆である。荷重付きノルム不等式を使うと、 R_ψ^* の左可逆性を示すことができる。よって、 R_ψ は右可逆である。(2) \Rightarrow (1) も同様に示すことができる。

(4) \Rightarrow (5): (4) は次と同値である。

$$\phi = \gamma_0 \frac{k^2}{|k|^2} \exp(U - i\tilde{V}_0),$$

ただし、 U は実数値有界関数、 V_0 は実数値 L^1 関数、 $w \exp(pV_0/2) \in (A_p)$. k は outer 関数であるから、 $k^2 = \gamma_1 \exp(\log |k|^2 + i(\log |k|^2)\gamma)$ と書ける。よって、 $\phi = \gamma_2 \exp(U - i(V_0 - \log |k|^2)\gamma)$ 。このとき、 $V = V_0 - \log |k|^2$ と定めると $\phi = \gamma_2 \exp(U - i\tilde{V})$, $|k|^p w \exp(pV/2) = w (|k|^2 e^V)^{p/2} = w \exp(pV_0/2) \in (A_p)$ 。

系 6 $\phi \in L^\infty$. α は $w = |\alpha|^{-2}$ を満たす outer 関数とする。このとき $P^\alpha : L^2(w) \rightarrow H^2(w)$ は有界な自己共役射影作用素であり、について次は同値である。

- (1) $R_\phi^\alpha : H^2(w) \rightarrow L^2(w)/K_0^2(w)$ は可逆である。
- (2) $\phi = k_0(\overline{h_0}/h_0)$, ただし, $k_0, k_0^{-1} \in H^\infty$, h_0 は $|h_0|^2 \in (A_2)$ を満たす outer 関数である。
- (3) $\phi = \gamma \exp(U - i\tilde{V})$ と書ける。ただし, γ は $|\gamma| = 1$ なる定数, U は実数値有界関数, V は実数値 L^1 関数, $e^V \in (A_2)$.
- (4) $T_\phi : H^2 \rightarrow H^2$ は可逆である。
- (5) $T_\phi^\alpha : H^2(w) \rightarrow H^2(w)$ は可逆である。

証明: (1) \Leftrightarrow (2): 定理 5 より, (1) は $\phi(\overline{\alpha}/\alpha) = k_0(\overline{h_0}/h_0)(\overline{\alpha}/\alpha)$ と同値である。よって, $\phi = k_0(\overline{h_0}/h_0)$ と同値である。

(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) は Widom-Devinatz の定理である。

(4) \Leftrightarrow (5): 系 5 による。

References

- [1] A.Böttcher and B.Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] R.Coifman and R.Rochberg, Projections in weighted spaces, skew projections and inversions of Toeplitz operators, Integral Equations and Operator Theory 5 (1982), 145-159.
- [3] J.Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.
- [4] I.Gohberg and N.Ja.Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vols. I,II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [5] T.Nakazi, Commutator of two projections in prediction theory, Bull. Austral. Math. Soc. 34 (1986), 65-71.
- [6] T.Nakazi, Kernels of Toeplitz operators, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), 607-616.
- [7] T.Nakazi, Toeplitz operators and weighted norm inequalities, Acta Sci. Math. (Szeged) 58 (1993), 443-452.
- [8] N.K.Nikolski, Treatise on the Shift Operator, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [9] N.K.Nikolski, Operators, Functions, and Systems, Vols 1,2, Amer. Math. Soc., 2002.
- [10] R.Rochberg, Toeplitz operators on weighted H^p spaces, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 291-298.

Invariant Subspace of Finite Codimension and Uniform Algebras

Takahiko Nakazi
(Hokkaido University)

Tomoko Osawa
(Asahikawa National College of Technology)

Abstract. Let A be a uniform algebra on a compact Hausdorff space X and m a probability measure on X . Let $H^p(m)$ be the norm closure of A in $L^p(m)$ with $1 \leq p < \infty$ and $H^\infty(m)$ the weak * closure in $L^\infty(m)$. In this paper, we describe a closed ideal of A and a closed invariant subspace of $H^p(m)$ which is of finite codimension.

A は X 上の uniform algebra, $M(A)$ は A の maximal ideal space を示すとする。 I は A の closed ideal とする。このとき A/I は Q -algebra と呼ばれる。この講演では, $\dim A/I < \infty$ のときに I を決定する。最近, 有限次元 Q -algebra に対する興味が高まっているが, これは研究の1つの動機である。 m を X 上の probability measure, $H^p(m)$ ($1 \leq p < \infty$) は A の $L^p(m)$ での norm closure, $H^\infty(m)$ は A の $L^\infty(m)$ での weak * closure を示すとする。 M が $H^p(m)$ における invariant subspace とは $AM \subset M$ が成立する closed subspace のことを意味する。この講演では, $\dim H^p(m)/M < \infty$ のときに M を決定する。 A が polydisc algebra で m が Lebesgue measure かつ $p = 2$ のときに Ahern-Clark [1] はそんな invariant subspace を多項式環の ideal を用いて描いた。

$\varphi \in M(A)$, $k \geq 0$ のとき, H が A の (φ, k) -subalgebra とは, H が A の closed subalgebra であり, 次を満たす A の closed subalgebra の列 $\{A_j\}_{j=0}^k$ が存在することである。

る。 $A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_{k-1} \supset A_k = H$ かつ A_j は A_{j-1} の φ における continuous point derivation D_j の kernel である。

D_φ が $\varphi \in M(A)$ における bounded point derivation であるとは、 D_φ が A 上の continuous linear functional であり、 $f, g \in A$ に対して $D_\varphi(fg) = \varphi(f)D_\varphi(g) + \varphi(g)D_\varphi(f)$ が成立することである。

定理 1 $\dim A/I < \infty$ ならば、 A の closed subalgebra $E = E(I)$ 、 $\varphi \in M(E)$ と E に関しての (φ, k) -subalgebra H_φ^E が存在して、 $I = H_\varphi^E \cap \ker \varphi$ とできる。ここで、 $E = \{f \in A; \varphi_1(f) = \cdots = \varphi_n(f)\}$ 、 $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset M(A)$ かつ $\varphi = \varphi_j|_E (1 \leq j \leq n)$ である。

系 1 $\dim A/I = 2$ ならば、 $\varphi, \psi \in M(A)$ が存在して、 $I = \ker \varphi \cap \ker \psi$ となるか $I = \ker \varphi \cap \ker D_\varphi$ となる。

定理 2 (1) $\dim H^p/M = n < \infty$ ならば、 $\dim A/I = n$ となる A の closed ideal I が存在して、 $[I]_p = M$ かつ $I = M \cap A$ とできる。もし H_φ^E が $E = E(I)$ に関して (φ, k) -subalgebra ならば、 任意の $0 \leq j \leq k-1$ に対して $[E_j]_p \supsetneq [E_{j+1}]_p$ かつ $\dim H^p/[E]_p = \dim A/E$ となっている。

(2) もし $\dim A/I = n < \infty$ ならば $\dim H^p/[I]_p \leq n$ である。このとき、 任意の $0 \leq j \leq k-1$ に対して $[E_j]_p \supsetneq [E_{j+1}]_p$ かつ $\dim H^p/[E]_p = \dim A/E$ ならば、 $\dim H^p/[I]_p = n$ かつ $[I]_p \cap A = I$ である。

系 2 $\dim H^p/M = 2$ ならば、 $\Phi, \Psi \in (H^p)^*$ が存在して $M = \{f \in H^p; \Phi(f) = \Psi(f) = 0\}$ とできる。ただし、 Φ と Ψ は次の (1) か (2) の条件を満足する。

(1) $\Phi|_A \in M(A)$ かつ $\Psi|_A \in M(A)$

(2) $\Phi|_A \in M(A)$ かつ $\Psi|_A$ は $\Phi|_A$ における A 上の continuous derivation である。

定理 1 の証明のアイデア

Gamelin [2] は A の subalgebra B で $\dim A/B < \infty$ のとき, B を (φ, k) -subalgebra を用いて描いた。我々は $B = \mathbb{C} + I$ として, Gamelin の定理を用いると, B は A の特別な subalgebra なので, B ははるかに simple な構造をもつことを示すことができる。

系 1 の証明

$\dim A/I = 2$ であるから, 定理 1 で $E = A$ か $E = \{f \in A; \varphi_1(f) = \varphi_2(f)\}$ ($\varphi_1, \varphi_2 \in M(A)$) である。 $E = A$ ならば, $A = A_0 \supseteq A_1 = H_\varphi^E = I + \mathbb{C}$ ($\varphi \in M(E) = M(A)$) であるから, $H_\varphi^E = \{f \in A; D_\varphi(f) = 0\}$ 。 よって $I = \ker \varphi \cap \ker D_\varphi$ 。 $E = \{f \in A; \varphi_1(f) = \varphi_2(f)\}$ ならば, $E = I + \mathbb{C}$ だから $I = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$ 。

定理 2 の意味

$p = 2$ かつ m を $X = T^n$ 上の normalized Lebesgue measure とする。 A を polydisc algebra とする。 $n = 1$ のとき $\dim H^2/M = l$ ならば $M = qH^2$ かつ q は degree l の finite Blaschke product となるのは Beurling の定理の結果である。 $n \geq 1$ のとき $\dim H^2/M = l < \infty$ ならば, 多項式環 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ のその zero set が polydisc の内部にある finite codimension である ideal I が存在して, $M = [I]_2$ かつ $M \cap \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] = I$ となっている。 逆もまた成立する。 これは Ahern-Clark [1] によって証明されたが, 我々の定理 2 と比較することは興味ある。

references

- [1] P.Ahern and D.N.Clark, *Invariant subspaces and analytic continuation in several variables*, J.Math.Mech.19(1969/1970),963-969.
- [2] T.W.Gamelin, *Embedding Riemann surfaces in maximal ideal spaces*, J.Funct.Anal.2(1968),123-146.
- [3] T.Nakazi, *Two-dimensional Q -algebras*, Linear algebra Appl.315(2000),197-205.
- [4] T.Nakazi and T.Osawa, *Invariant Subspaces of finite codimension and uniform algebras*, to appear in Glasgow Math.J.Math.

雑談

$\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]$ の ideal I は有限個の生成元をもつ事が知られている。 $V(I) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{C}^n; f(z_1, \dots, z_n) = 0 \ (\forall f \in I)\}$ は代数多様体と呼ばれる。 I は有限個の多項式で生成されるので、 $V(I)$ は有限個の多項式の共通零点になる。 $I\{V(I)\} = \{f \in \mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]; f(c_1, \dots, c_n) = 0 \ (\forall (c_1, \dots, c_n) \in V(I))\}$ とすると、ヒルベルトの零点定理は、 $I\{V(I)\} = \{f \in \mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]; \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f^m \in I\}$ 。よって $I\{V(I)\} \supseteq I$ である。剰余環 $\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]/I$ の maximal ideal は代数多様体 $V(I)$ が回復できるので、重要である。 $\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]/I$ の prime ideal まで考えたものは maximal ideal の全体より広い集合となるが、そこにザリスキー位相、関数の層を与えた空間は $\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]/I$ のアフィン・スキームと呼ばれている。剰余環 $\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]/I$ が有限次元のとき、 I の生成元 f_1, \dots, f_n について曲線 $f_j = 0 (j = 1, \dots, n)$ の原点での交わりの重複度を表す。

$\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]$ の T^n 上の Lebesgue measure についての L^2 における closure は T^n 上の普通の Hardy space H^2 である。 H^2 の $\mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]$ による invariant subspace M について、 M は ideal $I = M \cap \mathcal{C}[z_1, \dots, z_n]$ と関係している。しかし一般に M は有限個の生成元をもたないことが知られている。

Estimates of the α -Riesz potentials with weight in metric spaces

Akane Iwamura and Hisako Watanabe

(Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University)

Abstract. We define α -Riesz potential operators on $L^p(X, \mu)$ in a quasi-metric space X . The measure μ is the doubling one satisfying a certain lower bound for the measures of balls. For these operators we give estimates of α -Riesz potentials with weak type.

Key words and phrases:

α -Riesz potential, quasi-metric space, Sobolev space

2000 Mathematics Subject Classification: 31C15, 46E35.

1. 序

Ω は \mathbf{R}^n の領域とする. distribution 関数を使ってソボレフの不等式よりもっと精密な結果が O'Neil [6] や Peetre [7], Brézis & Wainger [1], Hansson [3], Maz'ya [5] らによって得られている. 定理 A はそれらの不等式の 1 つであり, O'Neil [6] や Peetre [7] の結果から得られる.

THEOREM A. $1 < p < n$ で, u は $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$ であるような $C_0^\infty(\Omega)$ の関数とする. そのとき, 次を満たすような定数 $C > 0$ が存在する.

$$(1.1) \quad \int_0^\infty t^{p-1} |\{|u| > t\}|^{1-\frac{p}{n}} dt \leq C$$

ここで C は 関数 u とは無関係な定数であり, $|A|$ は集合 A の n -次元ルベーグ測度である.

また, 定理 A の極限の場合として, 次の結果が, Brézis & Wainger [1] や Hansson [3], Maz'ya [5] によって得られている.

THEOREM B. Ω は \mathbf{R}^n の有界な領域とし, u は $\|\nabla u\|_{L^n(\Omega)} \leq 1$ であるような $C_0^\infty(\Omega)$ の関数とする. そのとき

$$(1.2) \quad \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{\log^{n-1}(2|\Omega|/|\{|u| > t\}|)} dt \leq C$$

が成り立つ. ここで $C > 0$ は u とは独立な定数である.

不等式 (1.1) と (1.2) は ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ での評価である. 一方で G_m を m 次の Bessel 関数としたとき, Bessel potential 空間 $L^{m,p}$ は

$$(1.3) \quad L^{m,p} = \{G_m * f : f \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$$

で, ノルムを $\|G_m * f\|_{m,p} = \|f\|_p$ と定義した Banach 空間である. また m が非負整数であるときには, $L^{m,p}$ は Banach 空間として $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ と同値であることはよく知られている. m が整数でなくても G_m は定義できるので, $\Omega = \mathbf{R}^n$ の場合, $L^{\alpha,p}$ は非整数次のソボレフ空間とみなすことができる.

2002年に J. Malý と L. Pick [4] は直径が有限な擬距離空間 X ($\text{diam } X = \frac{R}{2}$ とする) で, $\mu(X) < \infty$ であるような測度 μ で, 「ダブリング条件」と「球の測度に対する下からの評価」(後にきちんと述べる) を満たす測度を考え, この空間で次数 1 の Riesz potential を

$$(1.4) \quad (I_1 g)(x) = \int_0^R \left(\int_{B(x,t)} g(y) d\mu(y) \right) dt$$

で定義した. そして次の定理を証明している.

THEOREM C. g は非負の局所可積分な関数とし,

$$G_{g,t} = G_t = \{y \in X : (I_1 g)(y) > t\}$$

とおく.

- (i) $1 < p < n$ のとき, 定数 $C > 0$ が存在して, $\|g\|_p \leq 1$ となるどんな非負関数 $g \in L^p(X, \mu)$ に対しても, 次を満たす;

$$\int_0^\infty t^{p-1} \mu(G_{g,t})^{1-\frac{p}{n}} dt \leq C.$$

- (ii) 定数 $C > 0$ が存在し, $\|g\|_n \leq 1$ となるどんな非負関数 $g \in L^n(X, \mu)$ に対しても, 次を満たす;

$$\int_0^\infty t^{n-1} \left[\log \frac{2\mu(X)}{\mu(G_{g,t})} \right]^{1-n} dt \leq C.$$

擬距離空間 X とその上の測度 μ に対し、非整数次ソボレフ空間で、Theorem C に相当する評価は得られるのであろうか。

この問題を考えるために、始めに、擬距離空間の定義を述べておく。次の性質を満たす X 上の実数値関数 ρ が存在するとき、 X は擬距離空間であるという：

- (i) 全ての $x, y \in X$ に対して $0 \leq \rho(x, y) < \infty$.
- (ii) 全ての $x, y \in X$ に対して $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- (iii) 定数 $d > 0$ が存在して、全ての $x, y, z \in X$ に対して $\rho(x, y) \leq d\{\rho(x, z) + \rho(z, y)\}$ を満たす。

X は有界とし、 $\text{diam}X = \frac{R}{2}$ とする。 $B(x_0, r)$ は中心が x_0 で半径が r の開球を表す。 X 上の非負 Radon 測度 μ は次の2つの性質を持つものと仮定する：

($\mu 1$) ダブリング条件: ある定数 $D > 0$ が存在して $x \in X$ と $r \in (0, \frac{R}{2})$ に対して

$$\mu(B(x, 2r)) \leq D\mu(B(x, r)).$$

($\mu 2$) 球の測度に対しての下からの評価: ある $\gamma > 0$ とある $n > 1$ が存在して $x \in X$ と $r \in (0, R]$ に対して

$$\mu(B(x, r)) \geq \gamma r^n.$$

この空間 X 上で、次数 α の Riesz potential 作用素 I_α を

$$(1.5) \quad (I_\alpha g)(x) = \int_0^R \alpha t^{\alpha-1} \left(\int_{B(x,t)} g(y) d\mu(y) \right) dt$$

と定義して、Theorem C に相当する $I_\alpha g$ の評価が得られたことを報告する。

これを述べるためにまず、 X 上の μ -可積分な非負関数 g に対して、

$$G_{g,t} = G_t = \{y \in X : (I_\alpha g)(y) > t\}$$

とおく。このとき、次の定理が得られる。

THEOREM . $1 < p < \infty$ であり $\alpha > 0$ とする。また X は直径が有限な擬距離空間で、 μ は $\mu(X) < \infty$ であるような ($\mu 1$), ($\mu 2$) を満足する X 上の正 Radon 測度とする。このとき、

- (i) $\alpha p < n$ のとき、定数 $C > 0$ が存在して、 $\|g\|_p \leq 1$ となるどんな非負関数 $g \in L^p(X, \mu)$ に対しも、

$$\int_0^\infty t^{p-1} \mu(G_{g,t})^{1-\frac{\alpha p}{n}} dt \leq C$$

を満たす。

(ii) $\alpha p = n$ のとき, 定数 $C > 0$ が存在して, $\|g\|_p \leq 1$ となるどんな非負関数 $g \in L^p(X, \mu)$ に対しても,

$$\int_0^\infty t^{p-1} \left[\log \left(\frac{2\mu(X)}{\mu(G_{g,t})} \right) \right]^{1-p} dt \leq C$$

を満たす.

2. 補題

$L^p(X, \mu)$ の関数 g の L^p -ノルムを $\|g\|_p$ で定義する. $1 < p < \infty$ に対して $p' = \frac{p}{p-1}$ とおく. また, $r \in (0, R]$ に対し, 作用素 E_α^r を

$$(E_\alpha^r g)(x) = \int_r^R \alpha t^{\alpha-1} \left(\int_{B(x,t)} g(y) d\mu(y) \right) dt$$

と定める. 積分順序を交換して

$$(E_\alpha^r g)(x) = \int_X g(y) \left(\int_{\max\{r, \rho(x,y)\}}^R \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\mu(B(x,t))} dt \right) d\mu(y).$$

従って

$$(E_\alpha^r g)(x) = \int_X E_\alpha^r(x, y) g(y) d\mu(y)$$

とも書ける. ここで

$$E_\alpha^r(x, y) = \int_{\max\{r, \rho(x,y)\}}^R \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\mu(B(x,t))} dt$$

である.

μ -可積分な関数 g に対して, 極大作用素 Mg は, $x \in X$ に対し,

$$(Mg)(x) = \sup \left\{ \int_B |g(y)| d\mu(y) ; B \text{ は球で } x \text{ を含む} \right\}$$

と定める.

次の2つの Lemma が重要な役割を果たしている.

LEMMA 2.1. $x \in X$, $p > 1$, そして $0 < r < R$ とする. そのとき,

$$\int_X E_\alpha^r(x, y)^{p'} d\mu(y) \leq C \int_r^R s^{(\alpha-n)(p'-1)+(\alpha-1)} ds.$$

を満たすような定数 $C > 0$ が存在する. 但し C は p, n, α, γ にしか依存しない.

また, 十分大きい β を $\beta = D(2d)^{\frac{\log D}{\log 2}} R^\alpha \mu(X)^{-\frac{1}{p}}$ で定める. このとき, 次の補題が成り立つ.

LEMMA 2.2. $1 < p \leq n$ とする. このとき, 次を満たす定数 $C > 0$ と $a > 1$ が存在する; $\|g\|_p \leq 1$ であるようなどんな非負の $g \in L^p(X, \mu)$ と $t > \beta$ に対しても

$$(2.1) \quad t^p \leq C \left\{ q_t^{\alpha p - n} + \left(\alpha \int_{q_t}^R s^{(\alpha-n)(p'-1) + (\alpha-1)} ds \right)^{p-1} \right\} \int_{G_{t/a} \setminus G_{at}} (Mg)(y)^p d\mu(y)$$

が成り立つ. ここで, $q_t = \left(\frac{\mu(G_{g,t})}{\gamma} \right)^{\frac{1}{n}}$ である.

参考文献

- [1] H.Brézis and S.Wainger, A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities, Comm. Partial Diff. Eq. 5 (1980), 773-789.
- [2] R.R. Coifman and G. Weiss, Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés, Lecture Notes in Math. 242, Springer, 1971.
- [3] K.Hansson, Imbedding theorem of Sobolev type in potential theory, Math. Scand.45 (1979), 77-102.
- [4] Jan Malý and Luboš Pick, The sharp Riesz potential estimates in metric spaces, Indiana Univ. Math. J. 51, No. 2 (2002), 251-268
- [5] V.G.Maz'ya, Sobolev Spaces, Springer, Berlin, 1975.
- [6] R.O'Neil, Convolution operators and $L(p,q)$ spaces, Duke Math. J. 30 (1963), 129-142.
- [7] J.Peetre, Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 279-317.

Graduate School of Humanities and Sciences,
 Ochanomizu University
 Tokyo, 112-8610
 Japan

An operator transform from class A to the class of hyponormal operators and its application

Takeaki Yamazaki (Kanagawa University)
Muneo Chō (Kanagawa University)

ABSTRACT

In this report, we shall give an operator transform \hat{T} from class A to the class of hyponormal operators. Then we shall show that $\sigma(\hat{T}) = \sigma(T)$ and $\sigma_a(\hat{T}) = \sigma_a(T)$ in case T belongs to class A. Next, as an application of \hat{T} , we will show that every class A operator has SVEP and property (β) .

1. INTRODUCTION

ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の非正規作用素の研究においては、hyponormal 作用素の性質が非常に盛んに研究されている。また、最近の作用素不等式の発展により、hyponormal 作用素のクラスを含むような作用素のクラスが定義されており、多くの研究者によって研究されてきている。これらの作用素のクラスの性質を研究するにあたって、Aluthge 変換が非常に有用である。Aluthge 変換とは w -hyponormal や semi-hyponormal 作用素を hyponormal に変換しながらも、spectrum を保存するという大変良い性質を持っている。これによって我々は Aluthge 変換と hyponormal 作用素の性質を用いて hyponormal を含む作用素のクラスの性質を調べることができる。しかし、 w -hyponormal 作用素を含む作用素のクラスである class A 作用素の Aluthge 変換がどのような性質を持つのかまだ知られていない。このことより、class A 作用素の性質を調べる事がやや困難であった。この報告では、我々は class A から hyponormal 作用素のクラスへ変換する新しい作用素の変換 \hat{T} を定義し、作用素 T が class A 作用素であった場合、 $\sigma(\hat{T}) = \sigma(T)$ を示す。そして、この作用素の変換をもちいて class A 作用素の性質を一つ示す。

ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界線形作用素 T が positive とは、($T \geq 0$ と書く) $(Tx, x) \geq 0$ が任意の $x \in \mathcal{H}$ で成り立つ事と定義する。正数 p に対して、作用素不等式 $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ が成り立つとき、作用素 T は p -hyponormal という。特に、 $p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ の時は hyponormal, semi-hyponormal という。二つの正数 s, t に対して作用素不等式 $(|T^*|^t |T|^{2s} |T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}$ が成り立つとき、作用素 T は class A(s, t) に属するという。

特に class A(1, 1) を単に class A と書く. Class A は最初に Furuta 不等式 [7] の応用として [8] において作用素不等式 $|T^2| \geq |T|^2$ の成り立つ作用素のクラスと定義された. そして [6] において class A を一般化した class A(s, t) が定義された. これらの作用素のクラスの関係は以下の通りである.

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \{\text{hyponormal}\} \subset \{p\text{-hyponormal}, 0 < p < 1\} \\
 & \subset \{\text{class A}(s, t), s, t \in (0, 1]\} \\
 & \subset \{\text{class A}\} \\
 & \subset \{\text{paranormal, i.e., } \|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \text{ for } \|x\| = 1\}.
 \end{aligned}$$

最初の包含関係は Löwner-Heinz inequality より得られ, 2 番目は [6] で示されている. 3 番目の包含関係は [10] で示され (作用素が可逆の場合は [6] で示されている. [9] も密接に関連している), 4 番目の包含関係は [8] で示されている.

作用素 T が複素数 λ において次の主張が成り立つとき, T は λ において single valued extension property (略して SVEP と記す) を持つと定義する.

If $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ is an open neighborhood of λ and if $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ is a vector-valued analytic function such that $(T - \mu)f(\mu) = 0$ for all $\mu \in \mathcal{D}$, then f is identically zero on \mathcal{D} .

作用素 T がすべての複素数 λ において SVEP を持つとき, 単に T は SVEP を持つと言う.

SVEP は多くの研究者によって調べられ, 作用素論への多くの成果が知られている. 例えば作用素 T が SVEP を持てば, $T - \lambda$ が可逆であることと, 全射であることが同値であることが Finch [5] によって示されている.

SVEP の一般化として, (β) という性質も知られている. 作用素 T が複素数 λ において次の主張が成り立つとき T は (β) という性質を持つと定義する.

If $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ is an open neighborhood of λ and if $f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ ($n = 1, 2, \dots$) are vector-valued analytic functions such that $(T - \mu)f_n(\mu) \rightarrow 0$ uniformly on every compact subset of \mathcal{D} , then $f_n(\mu) \rightarrow 0$, again uniformly on every compact subset of \mathcal{D} .

特に, T がすべての複素数 λ において (β) を持つとき, 単に T は (β) を持つと言う.

(β) は最初にバナッハ空間上の作用素の spectral theory に対して Bishop [4] で導入された. また, Putinar は [15] で “every hyponormal operator has property (β) ” を示している.

作用素 T が w -hyponormal であるとは, 作用素不等式 $|\tilde{T}| \geq |T| \geq |\tilde{T}^*|$ が成り立つことと定義する, ここで, $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は T の Aluthge 変換である. ([2], [3]) なお w -hyponormal 作用素のクラスと class A($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) は同じ作用素のクラスである事が [9] や [10] で指摘されている.

最近になって, Kimura は [14] で w -hyponormal 作用素は SVEP と (β) を持つ事を示した.

semi-hyponormal 作用素の性質を調べる際に, 我々は次のような変換をしばしば用いる.

$$(i) S = U|T|^{\frac{1}{2}}, \quad (ii) \tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}} \text{ (Aluthge transform).}$$

T が semi-hyponormal ならば, S も \tilde{T} も共に hyponormal になる. よって我々はこれらの変換を用いる事によって semi-hyponormal の性質を hyponormal の性質に帰着する事によって調べる事が期待できる. ところが (ii) は $\sigma(\tilde{T}) = \sigma(T)$ が成り立つのに対し, (i) は $\sigma(S) \neq \sigma(T)$ である. このことより, spectrum の研究をする際には (ii) の変換の方がよりよい変換だとみなす事ができる. Aluthge はより一般的な次の結果を [2] で得ている: "If T is p -hyponormal, then (i) \tilde{T} is $p + \frac{1}{2}$ -hyponormal in case $0 < p \leq \frac{1}{2}$, and (ii) \tilde{T} is hyponormal in case $p \geq \frac{1}{2}$."

Aluthge 変換はそれ自身非常に興味深い性質を持っている. 例えば, $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ や $\overline{W(\tilde{T})} \subseteq \overline{W(T)}$ ([12, 13, 16, 17]). さらには n 回反復 Aluthge 変換 \tilde{T}_n を考える事によって次の結果が示されている. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}_n\| = r(T)$ ([18]) と $\bigcap_n \overline{W(\tilde{T}_n)} = \text{conv}\sigma(T)$ ([1]). なお, ここで $W(T)$ は作用素 T の numerical range とする.

これまで class A 作用素の Aluthge 変換がどのような性質を持つのか知られていなかった. また, class A から w -hyponormal 作用素への変換として唯一知られていたものは T^2 であった. しかし, 明らかに $\sigma(T^2) \neq \sigma(T)$ である. このため, class A 作用素を研究する際に hyponormal 作用素の性質に帰着する事が困難であった. この報告では, 最初に class A から hyponormal 作用素のクラスへの変換 \hat{T} を与え, それが $\sigma(\hat{T}) = \sigma(T)$ を満たす事を紹介する. そして, より詳細な spectrum に関する結果を紹介した後に, class A 作用素は SVEP と (β) を持つ事を紹介する. これは Kimura の w -hyponormal に関する結果をより一般化したものである.

2. AN OPERATOR TRANSFORM FROM CLASS A TO THE CLASS OF HYPONORMAL OPERATORS

最初に次の結果を示す.

Theorem 2.1. *Let $T = U|T|$ be the polar decomposition of a class A operator. Then*

$$\hat{T} = WU|T|^{\frac{1}{2}}$$

is hyponormal, where W is the partial isometry satisfying the polar decomposition $|T||T^| = W||T||T^*|$.*

Theorem 2.1 を示すために次の結果を紹介しておこう:

Theorem A ([10]). *Let A and B be positive operators. Then for each $p \geq 0$ and $r \geq 0$, the following assertions hold:*

- (i) *If $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$, then $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$.*
- (ii) *If $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ and $N(A) \subset N(B)$, then $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$.*

Theorem B ([11]). *Let $T = U|T|$, $S = V|S|$ and*

$$|T||S^*| = W||T||S^*|$$

be the polar decompositions. Then $TS = UWV|TS|$ is also the polar decomposition.

Theorem 2.1 の証明. T は class A 作用素なので, 次の不等式が成り立つ.

$$(2.1) \quad (|T|U^*|T|^2U|T|)^{\frac{1}{2}} = |T|^2 \geq |T|^2 \iff (|T^*||T|^2|T^*|)^{\frac{1}{2}} \geq |T^*|^2.$$

ここで Theorem A の (i) より, つぎの不等式を得る.

$$(2.2) \quad |T|^2 \geq (|T||T^*|^2|T|)^{\frac{1}{2}} = (|T|U|T|^2U^*|T|)^{\frac{1}{2}}.$$

よって, (2.1), (2.2) により, $|T|U|T|$ は semi-hyponormal.

一方, $|T| = U^*U|T|$ と $U|T|$ はそれぞれ polar decomposition であることより Theorem B によって $|T|U|T|$ の polar decomposition を次のように得る:

$$(2.3) \quad |T| \cdot U|T| = U^*UWU||T|U|T|,$$

ここで, W は polar decomposition $|T||T^*| = W||T||T^*|$ に現れる partial isometry である. さて, W の定義より 次の関係を得る. $N(U) \subset N(|T^*||T|) = N(W^*)$, これより $W^*U^*U = W^*$ on $\mathcal{H} = N(U) \oplus R(U^*)$. よって (2.3) は次のように変形できる:

$$(2.4) \quad |T|U|T| = U^*UWU||T|U|T| = WU|T|^2.$$

$|T|U|T| = WU|T|^2$ は semi-hyponormal 作用素の polar decomposition なので, $\hat{T} = WU|T|^2|^{\frac{1}{2}}$ は hyponormal となる. よって証明できた. \square

次に 作用素 T が class A に属するときの, \hat{T} と T の spectrum の関係についての次の結果を紹介する.

Theorem 2.2. *Let T be a class A operator, Then $\sigma(\hat{T}) = \sigma(T)$.*

Aluthge 変換 \tilde{T} は一般に $\sigma(\tilde{T}) = \sigma(T)$ が成り立つが, \hat{T} は一般に同様の関係は成り立たない事が以下の例から分かる.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

すると, $\sigma(T) = \{0, 1\}$ である. ここで, $T = U|T|$ を polar decomposition とすると, $T^2 = T$ であることより, $|T|U|T| = |T| \geq 0$ が成り立つ. よって (2.4) と \hat{T} の定義から, \hat{T} を得る.

$$\hat{T} = |T|^{\frac{1}{2}}.$$

よって、簡単な計算から \hat{T} を得る事ができる。

$$|T|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから} \quad |T|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{3/4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\sigma(\hat{T}) = \{0, \sqrt[4]{2}\} \neq \sigma(T)$.

作用素 T が class A に属している場合は Theorem 2.2 をより精密化した結果を得る事ができる。

Theorem 2.3. *Let T be a class A operator. For a complex number μ and a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors,*

$$(T - \mu)x_n \longrightarrow 0 \text{ if and only if } (\hat{T} - \mu)x_n \longrightarrow 0.$$

Corollary 2.4. *Let T be a class A operator, then $\sigma_p(\hat{T}) = \sigma_p(T)$ and $\sigma_a(\hat{T}) = \sigma_a(T)$.*

3. AN APPLICATION OF \hat{T} TO SVEP AND PROPERTY (β)

最後に \hat{T} の応用として、class A 作用素が SVEP と (β) を持つ事を紹介する。

Theorem 3.1. *If T belongs to class A, then T has SVEP and property (β) .*

証明は簡単のため、class A 作用素が SVEP を持つ事を示す。

証明. \mathcal{D} を複素数 λ の開近傍とする. そして、 f を \mathcal{D} で定義されたベクトル値解析関数とし、 \mathcal{D} 上で $(T - \mu)f(\mu) = 0$ で成り立つとする. すると、Theorem 2.3 によって、 $(\hat{T} - \mu)f(\mu) = 0$ もなりたつ.

一方、Theorem 2.1 より \hat{T} は hyponormal になり、Putinar [15] の結果により \hat{T} は SVEP を持つ. よって \mathcal{D} 上で $f(\mu) = 0$ が成り立つ. ゆえに T は SVEP を持つ事が示された. \square

Class A 作用素が (β) を持つ事の証明は、上の証明と同様の方法で示せばよい。

REFERENCES

- [1] T. Ando, *Aluthge transforms and convex hull of eigenvalues of a matrix*, preprint.
- [2] A. Aluthge, *On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integral Equations Operator Theory, **13** (1990), 307–315.
- [3] A. Aluthge and D. Wang, *w -Hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **36** (2000), 1–10.
- [4] E. Bishop, *A duality theorem for an arbitrary operator*, Pacific J. Math., **9** (1959), 379–397.
- [5] J. K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space*, Pacific J. Math., **58** (1975), 61–69.
- [6] M. Fujii, D. Jung, S. H. Lee, M. Y. Lee and R. Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and log-hyponormal operators*, Math. Japon., **51** (2000), 395–402.
- [7] T. Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.
- [8] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Sci. Math., **1** (1998), 389–403.

- [9] M. Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Math., **35** (1999), 149–165.
- [10] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two inequalities $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ and $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ and their applications*, Integral Equations Operator Theory, **44** (2002), 442–450.
- [11] M. Ito, T. Yamazaki and M. Yanagida, *The polar decomposition of the product of operators and its applications to binormal and centered operators*, to appear in Integral Equations Operator Theory.
- [12] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki, *On generalized numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl., **370** (2003), 147–161.
- [13] I. B. Jung, E. Ko and C. Pearcy, *Aluthge transforms of operators*, Integral Equations Operator Theory, **37** (2000), 437–448.
- [14] F. Kimura, *Analysis of non-normal operators via Aluthge transformation*, to appear in Integral Equations Operator Theory.
- [15] M. Putinar, *Hyponormal operators are subscalar*, J. Operator Theory, **12** (1984), 385–395.
- [16] P.Y. Wu, *Numerical range of Aluthge transform of operator*, Linear Algebra Appl., **357** (2002), 295–298.
- [17] T. Yamazaki, *On numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl., **341** (2002), 111–117.
- [18] T. Yamazaki, *An expression of spectral radius via Aluthge transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 1130–1137.

On the Hyers-Ulam-Rassias stability of first order linear differential operator with constant coefficient

Takeshi Miura (Yamagata University)
Sin-Ei Takahasi (Yamagata University)
Soon-Mo Jung (Hong-Ik University)

Abstract. Let f be a strongly differentiable function on an interval I to a Banach space X . In this note, we show the Hyers-Ulam-Rassias stability of the X -valued differential equation $y' = \lambda y$, where $\lambda \in \mathbb{C}$: If f is an approximately solution of the differential equation $y' = \lambda y$, then there exists a solution g of $y' = \lambda y$ such that g is near to f .

1940年に S. M. Ulam は関数方程式の安定性に関する次の問題を提示した ([9] 参照) :

For what metric groups G is it true that an ε -automorphism of G is necessarily near to a strict automorphism?

この問題に対する1つの解答を, D. H. Hyers [3] が1941年に与えた. その後の Th. M. Rassias [7] 及び Z. Gajda [2] による拡張された形で以下に述べる :

定理 A (D. H. Hyers, T. M. Rassias and Z. Gajda) E_1, E_2 を実 Banach 空間, $\varepsilon \geq 0, p \geq 0 : p \neq 1$ とする. (連続とも線形とも限らない) 写像 $f: E_1 \rightarrow E_2$ が次をみたすとする :

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (x, y \in E_1).$$

このとき次をみたす加法的写像 $T: E_1 \rightarrow E_2$ が唯一つ存在する :

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{|2 - 2^p|} \|x\|^p \quad (x \in E_1).$$

定理 A は D. H. Hyers [3] によって $p = 0$ の場合が示された. T. M. Rassias [7] は1978年に $0 \leq p < 1$ の場合を示し, $1 \leq p < \infty$ に対しても同様の結果が成り立つのではないかと, の問題を提示した. その後 Z. Gajda [2] は $1 < p < \infty$ に対する結果を示すとともに, $p = 1$ に対する反例を与えた.

その後, このような安定性は Hyers-Ulam stability と呼ばれ, 様々な関数方程式に対して研究がなされている. C. Alsina and R. Ger [1] は微分方程式 $y' = y$ に対する Hyers-Ulam stability に言及している. 我々はいくつかの線型微分方程式に関する安定性についての結果を得たが [4, 5, 8], ここでは1階の定数係数線型微分作用素に対して, 特に誤差が一様とは限らない場合, すなわち関数により評価される場合, について考察する.

以下では $X \neq \{0\}$ をノルム $\|\cdot\|$ をもつ複素 Banach 空間, $C(I, X)$ を連続関数 $f: I \rightarrow X$ 全体のなす複素線形空間とする. また1階強微分可能な関数 f で $f' \in C(I, X)$ となるものの全体からなる $C(I, X)$ の部分空間を $C^1(I, X)$ とする. さらに各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して作用素 $T_\lambda: C^1(I, X) \rightarrow C(I, X)$ を次のように定義する :

$$T_\lambda f \stackrel{\text{def}}{=} f' - \lambda f \quad (f \in C^1(I, X)).$$

このとき次が得られた.

定理 1 $\epsilon: I \rightarrow [0, \infty)$ を連続関数, $f \in C^1(I, X)$ は

$$\|T_\lambda f(t)\| \leq \epsilon(t) \quad (\forall t \in I)$$

をみたすとする. このとき各 $s \in I$ に対して $T_\lambda g_s = 0$ となる $g_s \in C^1(I, X)$ で

$$\|f(t) - g_s(t)\| \leq e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right| \quad (t \in I)$$

となるものが唯一つ存在する.

注意 1 $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C^1(I, X)$ に対して次は同値である.

- (a) $T_\lambda f(t) = 0 \quad (t \in I)$,
- (b) $x \in X$ が存在して $f(t) = e^{\lambda t} x \quad (t \in I)$.

証明. X^* を X の双対空間とする. $\varphi \in X^*$ を任意に1つ固定し, $f_\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する:

$$f_\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(f(t)) \quad (t \in I).$$

このとき, φ の連続性から f_φ は微分可能で, さらに各 $t \in I$ に対して $(f_\varphi)'(t) = \varphi(f'(t))$ となることが分かる. よって

$$|(f_\varphi)'(t) - \lambda f_\varphi(t)| = |\varphi(f'(t)) - \varphi(\lambda f(t))| \leq \|\varphi\| \|T_\lambda f(t)\| \leq \|\varphi\| \epsilon(t) \quad (t \in I).$$

したがって, 各 $s, t \in I$ に対して

$$\begin{aligned} |\varphi(e^{-\lambda t} f(t) - e^{-\lambda s} f(s))| &= |e^{-\lambda t} f_\varphi(t) - e^{-\lambda s} f_\varphi(s)| = \left| \int_s^t \{e^{-\lambda \sigma} f_\varphi(\sigma)\}' d\sigma \right| \\ &= \left| \int_s^t \{(f_\varphi)'(\sigma) - \lambda f_\varphi(\sigma)\} e^{-\lambda \sigma} d\sigma \right| \\ &\leq \|\varphi\| \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right|. \end{aligned}$$

ここで $\varphi \in X^*$ は任意だったので

$$|e^{-\lambda t} f(t) - e^{-\lambda s} f(s)| \leq \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right| \quad (s, t \in I) \quad (1)$$

を得る. そこで $s \in I$ に対し

$$g_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda t} (e^{-\lambda s} f(s)) \quad (t \in I)$$

とおけば, 注意1で述べたように, $T_\lambda g_s = 0$ であり

$$\|f(t) - g_s(t)\| \leq e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right| \quad (t \in I)$$

となる. 一意性は次のようにして示される: $g \in C^1(I, X)$ をもう 1 つの関数とすると

$$\|g_s(t) - g(t)\| \leq 2e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right| \quad (t \in I)$$

であるから, 特に $t = s$ とすれば $g_s(s) = g(s)$ となる. ここで $T_\lambda g = 0$ なので $g(t) = e^{\lambda t} x$ と書けるから $f(s) = e^{\lambda s} x$, すなわち $g(t) = e^{\lambda t} (e^{-\lambda s} f(s)) = g_s(t)$ となり一意性が示された.

■

注意 2 関数 $e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right|$ は一般に改良することはできない. 実際, $s \in I, x_0 \in X : \|x_0\| = 1$ 及び連続関数 $\epsilon : I \rightarrow [0, \infty)$ を 1 つ固定し,

$$f_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(e^{\lambda t} \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right) x_0 \quad (t \in I)$$

とおくと, 簡単な計算により

$$T_\lambda f_0(t) = \epsilon(t) e^{i \operatorname{Im} \lambda t} \quad (t \in I)$$

となることが分かる. したがって $\|T_\lambda f_0(t)\| = \epsilon(t)$ ($t \in I$) である. 他方で

$$\|f(t)\| = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left| \int_s^t \epsilon(\sigma) e^{-\operatorname{Re} \lambda \sigma} d\sigma \right| \quad (t \in I)$$

であるから, 定理 1 の g_s は一意性より $g_s = 0$ である. 以上により誤差関数の最良性が示された.

系 2 (S.-E. Takahasi, T. Miura and S. Miyajima [8]) $\epsilon \geq 0, \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \neq 0, f \in C^1(I, X)$ は

$$\|T_\lambda f(t)\| \leq \epsilon \quad (\forall t \in I)$$

をみたすとする. このとき各 $s \in I$ に対して $T_\lambda g_s = 0$ となる $g_s \in C^1(I, X)$ で

$$\|f(t) - g_s(t)\| \leq \frac{\epsilon}{|\operatorname{Re} \lambda|} \left| 1 - \frac{e^{\operatorname{Re} \lambda t}}{e^{\operatorname{Re} \lambda s}} \right| \quad (t \in I)$$

となるものが唯一存在する.

特に $\sup\{e^{\operatorname{Re} \lambda t} : t \in I\} = \infty$ ならば

$$\sup_{t \in I} \|f(t) - g(t)\| < \infty$$

となる $g \in C^1(I, X) : T_\lambda g = 0$ は唯一つである.

証明. 前半部分は定理 1 の直接の系であるから, $\sup\{e^{\operatorname{Re} \lambda t} : t \in I\} = \infty$ の場合を考える. $\operatorname{Re} \lambda > 0$ とする. (1) より $\{e^{-\lambda s} f(s)\}_{s \in I}$ は Cauch net であるから, $s \rightarrow \infty$ としたときの極

限が存在する；それを x_∞ とすれば，各 $t \in I$ に対して $e^{-\lambda s} f(s) \rightarrow x_\infty$ ($s \rightarrow \infty$) である。
 $g_\infty(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda t} x_\infty$ ($t \in I$) とすれば

$$\begin{aligned} \|f(t) - g_\infty(t)\| &\leq e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|e^{-\lambda t} f(t) - e^{-\lambda s} f(s)\| + e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|e^{-\lambda s} f(s) - x_\infty\| \\ &\leq \frac{\varepsilon e^{\operatorname{Re} \lambda t}}{|\operatorname{Re} \lambda|} |e^{-\operatorname{Re} \lambda t} - e^{-\operatorname{Re} \lambda s}| + e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|e^{-\lambda s} f(s) - x_\infty\| \\ &\rightarrow \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Re} \lambda|} \quad (s \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。次に一意性を示す。 $g \in C^1(I, X) : T_\lambda g = 0$ が

$$\sup_{t \in I} \|f(t) - g(t)\| = C < \infty$$

となるとする。 $g(t) = e^{\lambda t} x$ と書けるから

$$\begin{aligned} \|x_\infty - x\| &\leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} (\|e^{\lambda t} x_\infty - f(t)\| + \|f(t) - e^{\lambda t} x\|) \\ &\leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \left(\frac{\varepsilon}{|\operatorname{Re} \lambda|} + C \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

すなわち $x = x_\infty$ となる。よって一意性が示された。

まったく同様にして $\operatorname{Re} \lambda < 0$ の場合も示される。 ■

[8, Remark 2.2] において， $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ ， $\sup\{e^{\operatorname{Re} \lambda t} : t \in I\} < \infty$ なるときは，系 2 のような一意性は必ずしも成り立たない例が挙げられている。ここではより一般に，上の条件のもとでは，一意性は決して成り立たないことを示そう。

系 3 $\varepsilon > 0$ ， $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ ， $\sup\{e^{\operatorname{Re} \lambda t} : t \in I\} < \infty$ とする。 $f \in C^1(I, X)$ が $\|T_\lambda f(t)\| \leq \varepsilon$ ($t \in I$) をみたせば

$$T_\lambda g = 0 \quad \text{and} \quad \sup_{t \in I} \|f(t) - g(t)\| < \infty$$

となる $g \in C^1(I, X)$ は，少なくとも実数濃度だけ存在する。

証明. ここでも $\operatorname{Re} \lambda > 0$ の場合のみ扱うが， $\operatorname{Re} \lambda < 0$ のときもまったく同様にしてできる。このとき仮定から区間 I は $I = (a, b)$ $b < \infty$ の形である。まず系 2 の証明と同様にして $e^{-\operatorname{Re} \lambda s} f(s)$ の $s \nearrow b$ の極限が存在することが分かるので，それを $x_b \in X$ とすると

$$\|f(t) - e^{\lambda t} x_b\| \leq \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Re} \lambda|} \left(1 - \frac{e^{\operatorname{Re} \lambda t}}{e^{\operatorname{Re} \lambda b}} \right) \quad (t \in I)$$

となる。したがって $t \searrow a$ とすれば

$$\|f(t) - e^{\lambda t} x_b\| \leq \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Re} \lambda|} \left(1 - \frac{e^{\operatorname{Re} \lambda a}}{e^{\operatorname{Re} \lambda b}} \right) \quad (t \in I)$$

を得る. ここで $\|x - x_b\| < e^{-\operatorname{Re}\lambda b}$ となる $x \in X$ を任意に1つとり固定すると

$$\|f(t) - e^{\lambda t}x\| \leq \|f(t) - e^{\lambda t}x_b\| + e^{\operatorname{Re}\lambda t}\|x - x_b\| \leq \left(1 - \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda a}}{e^{\operatorname{Re}\lambda b}}\right) + 1 \quad (t \in I)$$

となる. したがって $e^{\lambda t}x : \|x - x_b\| < e^{-\operatorname{Re}\lambda b}$ の形の関数が求めるものであり, $x \in X$ の選び方からこのような関数は少なくとも実数濃度だけ存在する. \blacksquare

参考文献

- [1] C. Alsina and R. Ger, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. Inequal. Appl., **2** (1998) 373-380.
- [2] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431-434.
- [3] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222-224.
- [4] T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, *Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients*, Math. Nachr. **258** (2002), 90-96.
- [5] T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, *A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operator*, J. Math. Anal. Appl. **286** (2003), 136-146.
- [6] T. Miura, S. M. Jung and S.-E. Takahasi, *Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y' = \lambda y$* , to appear.
- [7] T. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.
- [8] S.-E. Takahasi, T. Miura and S. Miyajima, *On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$* , Bull. Korean Math. Soc. **39** (2002), 309-315.
- [9] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York-London, 1960.

Which weighted composition operators on uniform algebras have the Hyers-Ulam stability?

関数環上のどんな荷重合成作用素が Hyers-Ulam stability を満たすか？

Hiroyuki Takagi¹ 高木 啓行 (信州大・理)
Takeshi Miura² 三浦 毅 (山形大・工)
Sin-Ei Takahasi² 高橋 眞映 (山形大・工)

Abstract. In this note, we consider the title question. In particular, for a weighted composition operator $uC_\varphi : f \mapsto u \cdot (f \circ \varphi)$ on $C(X)$ or the disc algebra, we give a necessary and sufficient condition for uC_φ to have the Hyers-Ulam stability. Also, we make some remarks on the best constant of its stability.

関数環上の荷重合成作用素が Hyers-Ulam stability をもつ場合の結果 [5], [6], [7] と、その後わかったことを報告する。

§1. Hyers-Ulam stability 1940年代の S.M. Ulam や D.H. Hyers による加法的写像の研究にもとづいて、Hyers-Ulam stability という概念が導入された ([3]).

定義. A, B を ノルム空間とし、 T を A から B への写像とする。 T が **Hyers-Ulam stability** をもつとは、次の条件 (1) をみたす定数 K が存在することである。

$$(1) \quad \|Tf - g_0\| \leq \varepsilon \text{ である任意の } g_0 \in T(A), \varepsilon > 0, f \in A \text{ に対して,} \\ Tf_0 = g_0 \text{ かつ } \|f_0 - f\| \leq K\varepsilon \text{ となる } f_0 \in A \text{ が存在する.}$$

また、定数 K を、 T の **HUS-定数** と呼び、 T の HUS 定数の下限を K_T とかく。

A, B が Banach 空間で、 T が A から B への有界線形作用素の場合、 T が Hyers-Ulam stability をもつことと、閉値域をもつことは、同値になる ([5])。このことから、Hyers-Ulam stability が、関数解析の重要な概念の一般化であるといえる。

つぎに、 T を 微分作用素のような具体的な作用素として、方程式 $Tf = g_0$ の解 f を求めることを考えよう。このとき、定義の条件 (1) は、“ ε -近似解 f から $K\varepsilon$ の距離以内に 真の解 f_0 が存在する” と言っている。こう解釈すると、HUS 定数 K のできるだけ小さい値を求めておきたい。その際、次の疑問が生じる。

疑問. K_T は T の HUS 定数になるか？

もし そうなら、 K_T は まさに最良の HUS 定数 (the HUS constant) である。

いま、 $T : A \rightarrow B$ と $f \in A, M \subset A$ に対して、

$$\text{Ker } T = \{h \in A : Th = 0\}, \quad \text{dist}(f, M) = \inf \{\|f - h\| : h \in M\}$$

とかくことにすると、次のことがいえる。

1. Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University, Matsumoto 390-8621, Japan. *E-mail:* takagi@math.shinshu-u.ac.jp / 2. Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa 992-8510, Japan.

命題1. A, B をノルム空間とし, T を A から B への線形作用素とする. また, T は Hyers-Ulam stability をもつとする. このとき, K_T が T の HUS 定数になるための必要十分条件は, $\text{dist}(f, \text{Ker } T) = K_T$, $\|Tf\| = 1$ である任意の $f \in A$ に対して, $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } T)$ となる $h \in \text{Ker } T$ が存在することである.

証明. T の線形性から, K が T の HUS 定数であることは 次のように言い換えられる.

K は T の HUS 定数である

$$(2) \quad \begin{aligned} &\stackrel{\text{定義}}{\iff} \left[\begin{array}{l} \|Tf - g_0\| \leq \varepsilon \text{ である任意の } g_0 \in T(A), \varepsilon > 0, f \in A \text{ に対して,} \\ Tf_0 = g_0 \text{ かつ } \|f - f_0\| \leq K\varepsilon \text{ となる } f_0 \in A \text{ が存在する.} \end{array} \right. \\ &\iff \left[\begin{array}{l} \|Tf\| \leq \varepsilon \text{ である任意の } \varepsilon > 0, f \in A \text{ に対して,} \\ Tf_0 = 0 \text{ かつ } \|f - f_0\| \leq K\varepsilon \text{ となる } f_0 \in A \text{ が存在する.} \end{array} \right. \\ &\iff \left[\begin{array}{l} \|Tf\| = 1 \text{ である任意の } f \in A \text{ に対して,} \\ \|f - f_0\| \leq K \text{ となる } f_0 \in \text{Ker } T \text{ が存在する.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

よって, K が T の HUS 定数ならば,

$$\|Tf\| = 1 \text{ である任意の } f \in A \text{ に対して, } \text{dist}(f, \text{Ker } T) \leq K$$

である. ここで, K の下限をとると,

$$(3) \quad \|Tf\| = 1 \text{ である任意の } f \in A \text{ に対して, } \text{dist}(f, \text{Ker } T) \leq K_T$$

となる.

[必要性] K_T が T の HUS 定数とする. すると, (2) より,

$$(4) \quad \begin{aligned} &\|Tf\| = 1 \text{ である任意の } f \in A \text{ に対して,} \\ &\|f - h\| \leq K_T \text{ となる } h \in \text{Ker } T \text{ が存在する.} \end{aligned}$$

よって, $\text{dist}(f, \text{Ker } T) = K_T$, $\|Tf\| = 1$ である任意の $f \in A$ に対しても, $\|f - h\| \leq K_T$ となる $h \in \text{Ker } T$ が存在する. このとき, $\text{dist}(f, \text{Ker } T) \leq \|f - h\| \leq K_T = \text{dist}(f, \text{Ker } T)$ だから, $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } T)$ である.

[十分性] $\text{dist}(f, \text{Ker } T) = K_T$, $\|Tf\| = 1$ である任意の $f \in A$ に対して, $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } T)$ となる $h \in \text{Ker } T$ が存在すると仮定する. (2) より, K_T が T の HUS 定数になるには, (4) が成り立てばよい. そこで, $\|Tf\| = 1$ である $f \in A$ を任意にとる. このとき, (3) より, $\text{dist}(f, \text{Ker } T) \leq K_T$ である. $\text{dist}(f, \text{Ker } T) < K_T$ の場合, $\text{dist}(f, \text{Ker } T)$ の定義から, $\|f - h\| < K_T$ となる $h \in \text{Ker } T$ が存在する. 一方, $\text{dist}(f, \text{Ker } T) = K_T$ の場合は, 仮定より, $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } T) = K_T$ となる $h \in \text{Ker } T$ が存在する. (4) が示せた. \square

命題1より, A が回帰的で $\text{Ker } T$ が閉部分空間の場合, あるいは, A が回帰的でなくても $\text{Ker } T$ が有限次元の場合, K_T は T の HUS 定数になる. 反対に, K_T が T の HUS 定数にならない例もつくりすることができる.

反例. ある Banach 空間 A では, proximal でない閉部分空間 M が存在する. つまり, $\|f - h\| = \text{dist}(f, M)$ となる $h \in M$ が存在しないような $f \in A$ と閉部分空間 M が存在する. この場合, $\text{dist}(f, M) = 1$ と仮定してよい. ひとつ例をあげると,

$A = C[0, 1]$: 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数全体の Banach 空間 (sup ノルム),

$$f(x) = 4x, \quad M = \left\{ h \in C[0, 1] : \int_0^{1/2} h(x) dx = \int_{1/2}^1 h(x) dx \right\}.$$

いま, B を商空間 A/M とし, A から B への有界線形作用素を,

$$Tg = g + M \quad (g \in A)$$

と定める. すると, $\text{Ker } T = M$ である. また, T から誘導される $A/\text{Ker } T$ から B への 1 対 1

の作用素 \tilde{T} は,

$$\tilde{T}(g + \text{Ker } T) = Tg = g + M = g + \text{ker } T \quad (g \in A)$$

となり, A/M の恒等作用素になるから, $\|\tilde{T}^{-1}\| = 1$ である. よって, [5, Theorem 2] から, $K_T = \|\tilde{T}^{-1}\| = 1$ となる. こうして,

$$\text{dist}(f, \text{Ker } T) = \text{dist}(f, M) = 1 = K_T, \quad \|Tf\| = \|f + M\| = \text{dist}(f, M) = 1$$

となるが, $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } T)$ となる $h \in A$ は存在しない. ゆえに, 命題 1 より, K_T は T の HUS 定数でない. \square

[2], [8] では, ある種の微分作用素 T について, T が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件と, そのときの K_T の値を求め, さらに, その K_T が (最良)HUS 定数になることを示した. ここでは, 関数環上の荷重合成作用素について, 同じことを考えてみる.

§2. 関数環上の荷重合成作用素 X をコンパクト Hausdorff 空間とし, X 上の連続関数全体からなる Banach 環 (sup ノルム) を, $C(X)$ で表す. X 上の関数環 (uniform algebra) とは, $C(X)$ の閉部分環で, 定数関数を含み, X の 2 点を分離するものである. いま, \mathcal{A} を X 上の関数環とする. $E \subset X$ のとき, X の位相での E の閉包を \bar{E} で表し, \mathcal{A} に関する包核位相での E の閉包を $\bar{E}^{\mathcal{A}}$ と表す. また, \mathcal{A} の Choquet 境界, Šilov 境界を, それぞれ $\text{Ch}(\mathcal{A})$, $\Gamma(\mathcal{A})$ とかく. 一般に, $\overline{\text{Ch}(\mathcal{A})} = \Gamma(\mathcal{A})$ が成り立つ. 関数環の概念についての詳細は, [9] や [1] を参照されたい.

X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし, \mathcal{A}, \mathcal{B} をそれぞれ X, Y 上の関数環とする. \mathcal{B} の元 u と, Y から X への写像 φ を固定しておき, $f \in \mathcal{A}$ に対して, Y 上の関数 $uC_{\varphi}f$ を,

$$(5) \quad (uC_{\varphi}f)(y) = u(y) f(\varphi(y)) \quad (y \in Y)$$

と定義する. $uC_{\varphi}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ のとき, uC_{φ} は \mathcal{A} から \mathcal{B} への有界線形作用素になる. このとき, uC_{φ} を, \mathcal{A} から \mathcal{B} への荷重合成作用素 (weighted composition operator) という. 荷重合成作用素の研究経過は, 本 [4] に詳しい.

さあ, タイトルにした次の問題を考えよう.

問題. 関数環上のどんな荷重合成作用素が Hyers-Ulam stability をもつか?

この問題のひとつの解答を [6] で与えた. それを述べる.

定理 1. \mathcal{A}, \mathcal{B} をそれぞれ X, Y 上の関数環とし, uC_{φ} を \mathcal{A} から \mathcal{B} への荷重合成作用素とする. さらに, 次の 3 条件をみたす集合 $F (\subset X)$ が存在すると仮定する.

- F は \mathcal{A} に関する弱峯集合
- $\varphi(\{y \in Y : u(y) \neq 0\}) \subset F \subset \overline{\varphi(\{y \in Y : u(y) \neq 0\})}^{\mathcal{A}}$
- $\overline{F \cap \text{Ch}(\mathcal{A})} = F \cap \Gamma(\mathcal{A})$.

このとき, uC_{φ} が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は,

$$(6) \quad \varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\}) \supset F \cap \Gamma(\mathcal{A})$$

をみたす正の定数 r が存在することである. さらに,

$$K_{uC_{\varphi}} = 1 / \sup\{r > 0 : r \text{ は (6) をみたす}\}$$

が成り立つ.

定理 1 は, [6] の Theorem と 設定や条件が若干異なるが, 証明は まったく同様にできる.

定理 1 は, 仮定が煩雑であるが, A, B に 具体的な関数環をあてはめると みやすくなるこ
とがある. あとの 2 つの節で, 次の場合を検証してみる.

§3. $A = C(X), B = C(Y)$, §4. $A = B$: ディスク環.

そこでは, §1 で述べた (最良)HUS 定数の疑問にも 言及したい.

§3. $C(X)$ から $C(Y)$ への荷重合成作用素 定理 1 から, $C(X)$ から $C(Y)$ への荷重合
成作用素が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は, 次のようになる ([5], [7]).

定理 2. uC_φ を $C(X)$ から $C(Y)$ への荷重合成作用素とする. uC_φ が Hyers-Ulam
stability をもつための必要十分条件は,

$$(7) \quad \varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\}) = \varphi(\{y \in Y : u(y) \neq 0\})$$

をみたす正の定数 r が 存在することである. また,

$$K_{uC_\varphi} = 1/\sup\{r > 0 : r \text{ は (7) をみたす}\}$$

が 成り立つ.

今回, 次のことがわかった.

命題 2. 定理 2 において, X が 距離空間のとき, K_{uC_φ} は uC_φ の HUS 定数になる.

命題 2 の証明には, 次の Bishop の定理が有用である.

Bishop の定理 ([1, Theorem 2.4.1]). \mathcal{A} を X 上の関数環とし, $F (C X)$ を \mathcal{A} に関す
る峯集合とする. このとき, F 上で恒等的に 0 でない任意の $f \in \mathcal{A}$ に対し,

$$g(x) = f(x) \quad (x \in F), \quad |g(x)| < \|g\| \quad (x \in X \setminus F)$$

をみたす $g \in \mathcal{A}$ が 存在する.

命題 2 の証明. $F = \overline{\varphi(\{y \in Y : u(y) \neq 0\})}$ とおく. また, $\|uC_\varphi f\| = 1$ をみたす $f \in C(X)$
を 任意にとる. このとき, [7] の式 (*) (4 ページ) より,

$$\|f + \text{Ker } uC_\varphi\| = \sup\{|f(x)| : x \in F\}$$

が 成り立つ. ここで, $\|uC_\varphi f\| = 1$ より, この式の値は 0 でない. つまり, f は F 上で恒等的
に 0 でない. さて, $C(X)$ に関しては, X のすべての閉集合が弱峯集合であるが, とくに X が
距離空間の場合は 峯集合になる. よって, F は $C(X)$ に関する峯集合になるので, Bishop の
定理を用いると,

$$g(x) = f(x) \quad (x \in F), \quad |g(x)| < \|g\| \quad (x \in X \setminus F)$$

をみたす $g \in C(X)$ がとれる. このとき, g は F のある点で最大絶対値をとるから,

$$\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in F\} = \sup\{|f(x)| : x \in F\}$$

であり,

$$\text{dist}(f, \text{Ker } uC_\varphi) = \|f + \text{Ker } uC_\varphi\| = \sup\{|f(x)| : x \in F\} = \|g\| = \|f - (f - g)\|$$

となる. さらに, $(f - g)(x) = 0$ ($x \in F$) であることから, $f - g \in \text{Ker } uC_\varphi$ がわかるから,
 $\|f - h\| = \text{dist}(f, \text{Ker } uC_\varphi)$ となる $h \in \text{Ker } uC_\varphi$ がみつかった. ゆえに, 命題 1 より, K_{uC_φ} は
 uC_φ の HUS 定数になる. \square

§4. ディスク環上の荷重合成作用素 \mathbb{D} を複素平面 \mathbb{C} の単位開円板とし, その閉包を $\bar{\mathbb{D}}$, 境界を \mathbb{T} とかく. $\bar{\mathbb{D}}$ 上で連続かつ \mathbb{D} 上で正則な関数全体からなる関数環を, ディスク環 (disc algebra) といい, $A(\mathbb{D})$ とかく. いま, $u, \varphi \in A(\mathbb{D})$, $\varphi(\bar{\mathbb{D}}) \subset \bar{\mathbb{D}}$ とし, $A(\mathbb{D})$ 上の荷重合成作用素 uC_φ を, (5) と同様に,

$$(uC_\varphi f)(z) = u(z) f(\varphi(z)) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, f \in A(\mathbb{D}))$$

と定義する. ここでは, u は零関数でなく, かつ, φ は定数関数でないと仮定し, そのような場合の uC_φ を非自明であるということにする. 定理 1 より, uC_φ が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は, 次のようになる ([6]).

定理 3. uC_φ を $A(\mathbb{D})$ 上の非自明な荷重合成作用素とする. uC_φ が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は,

$$(8) \quad \varphi(\{z \in \mathbb{T} : |u(z)| \geq r\}) \cap \mathbb{T}$$

をみたす正の定数 r が存在することである. また,

$$K_{uC_\varphi} = 1/\sup\{r > 0 : r \text{ は (8) をみたす}\}$$

が成り立つ.

定理 3 の uC_φ については, $\text{Ker } uC_\varphi = \{0\}$ となるので, 命題 1 より, 次の命題が得られる.

命題 3. 定理 3 の K_{uC_φ} は uC_φ の HUS 定数になる.

引用文献

- [1] A. Browder, "Introduction to Function Algebras," Benjamin, 1969.
- [2] T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, *A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators*, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 136–146.
- [3] T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, *Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients, to appear in Math. Nachr.*
- [4] R.K. Singh and J.S. Manhas, "Composition Operators on Function Spaces," North-Holland, 1993.
- [5] H. Takagi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *Essential norms and stability constants of weighted composition operators on $C(X)$, to appear in Bull. Korean Math. Soc.*
- [6] H. Takagi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *The Hyers-Ulam stability of a weighted composition operator on a uniform algebra, to appear in Nonlinear and Convex Anal.*
- [7] 高木 啓行, 三浦 毅, 高橋 眞映: $C(X)$ 上の荷重合成作用素に関する幾つかの量について, 数理解析研究所講究録 **1298** (2002), 1–6.
- [8] S.-E. Takahasi, H. Takagi, T. Miura and S. Miyajima, *The Hyers-Ulam stability constants of first order linear differential operators, to appear in J. Math. Anal. Appl.*
- [9] 竹之内 脩, 阪井 章, 貴志 一男, 神保 敏弥: 「関数環」, 培風館, 1977.

半可換性と不等式

(Semi-commutativity and inequality)

Sin-Ei Takahasi

Department of Basic Technology, Yamagata University

and

Takeshi Miura

Department of Basic Technology, Yamagata University

Abstract. We introduce a "semi-commutativity" and investigate a certain family of functions, which imply the Hölder–Rogers inequality and the Minkowski inequality.

1. 哲学

A と B が交換可能であるとき、 A と B は可換であると言うのであるが、現実にはそんなうまい話はなかなかない。羽鳥理さんの可換ラーメン自動販売機の例を出すと、麺のボタン A とお湯のボタン B のどちらを先に押しても出来上がったラーメンは同じであれば、そそっかしい人でも大助かりであるが、まだそのような自動販売機は聞いたことがない。この場合、 AB と BA ではどちらが美味しいかと言えば、明らかに BA であろう。つまり $AB \leq BA$ となっている。私達はこれを半可換と呼んでいるが、人生で経験する事象は多くの場合半可換であると思う。しかしながらその半可換事象の中にも、良く目を凝らすとびかりと光る事象があるのではないか？

2. 出会い

あることで知人 Maliglanda の論文を MathSciNet で調べていたら、面白い論文を発見した。表題は

A simple proof of the Hölder and the Minkowski inequality

というもので (cf. [2])、J. Rakosnik による Review には、

[The core of the paper is the following lemma: For $1 \leq p < \infty$ and any $a, b > 0$ we have

$$\inf_{t>0} \left[\frac{1}{p} t^{1/p-1} a + (1 - \frac{1}{p}) t^{1/p} b \right] = a^{1/p} b^{1-1/p}$$

and

$$\inf_{0<t<1} \left[t^{1-p} a^p + (1-t)^{1-p} b^p \right] = (a+b)^p.$$

Two proofs are given. The first …… | とあった。通常、測度空間上のある関数 f, g に対して、

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1 \leq p < \infty, 1/p + 1/q = 1)$$

が成り立ち、前者を Hölder の不等式、後者を Minkowski の不等式と呼ぶのであるが、確かに Maliglanda の key lemma により、両者の不等式はすぐ導かれる。しかしこのとき、この両者の不等式は「ある種の平均は、ある正線形汎関数と常に半可換である」と主張しているのではないかということに気付かされたのである (cf. [5])。以下の節でもう少し詳しく述べよう。

3. 実 現

先ず D を R^n 上の領域、 S を実線形空間、 S_0 をその部分集合、 Φ を S の双対空間の部分集合とし、次の条件を満たすとする：

$$(\varphi x_1, \dots, \varphi x_n) \in D \quad (\forall x_1, \dots, x_n \in S_0, \forall \varphi \in \Phi).$$

S の元を Φ 上の関数： $\hat{s}(\varphi) = \varphi(s)$ ($\varphi \in \Phi, s \in S$) と見なして、その全体を $\hat{S} = \{\hat{s} : s \in S\}$ で表すことにし、この節以降上の記号を保存する。

このとき \hat{S} は自然に半順序実線形空間をつくるが、今以下のような2つの関数 $m, M : D \rightarrow R$ を考える：

$$(1) m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n), M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \hat{S} \text{ for all } x_1, \dots, x_n \in S_0.$$

$$(2) m(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \leq L(m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)), \quad M(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \geq L(M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n))$$

for all $x_1, \dots, x_n \in S_0$ and all order-preserving linear functionals L from \hat{S} into R such that $(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \in D$ for all $x_1, \dots, x_n \in S_0$.

このとき上の関数 m, M をそれぞれクラス

$$(m) = (m ; D, S, S_0, \Phi), \quad (M) = (M ; D, S, S_0, \Phi)$$

に属すると呼ぶことにする。

Remark 1. Let $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$. Then the following function on D belongs to both (m) and (M) :

$$f(a_1, \dots, a_n) = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \quad ((a_1, \dots, a_n) \in D)$$

This is a trivial case but it gives to us an important suggestion for a construction of functions which belong to the class (m) or (M).

数学は例に始まり例に終わるといわれるが、クラス (m) と (M) に属する非自明な単例を掲げよう：

Let $D = R^+ \times R^+$, $S = R^2$, $S_0 = R^+ \times R^+$ and $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, where φ_i is the i -th coordinate function. Then $(\varphi x_1, \varphi x_2) \in D$ for all $x_1, x_2 \in S_0$ and $\varphi \in \Phi$. In this case, we have

$$(i) M(a, b) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, \quad m(a, b) = \sqrt{ab} \in (M).$$

$$(ii) m(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad M(a, b) = a^2 / b \in (m).$$

Remark 2. Let L be an order preserving linear functional on \hat{S} such that $(L\hat{x}_1, L\hat{x}_2) \in D$ for all $x_1, x_2 \in S_0$. Let $\alpha = L(1, 0)$ and $\beta = L(0, 1)$ and set $x_1 = (a, b)$ and $x_2 = (c, d) \in S_0$.

(i) Let $\Omega = \{1, 2\}$, $\mu(1) = \alpha$, $\mu(2) = \beta$, $|f(1)| = \sqrt{a}$, $|f(2)| = \sqrt{b}$, $|g(1)| = \sqrt{c}$ and $|g(2)| = \sqrt{d}$. Then

$$M(L\hat{x}_1, L\hat{x}_2) \geq L(M(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) \Leftrightarrow \|f\|_2 + \|g\|_2 \geq \| |f| + |g| \|_2$$

when $M(a, b) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ and

$$M(L\hat{x}_1, L\hat{x}_2) \geq L(M(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) \Leftrightarrow \|f\|_2 \|g\|_2 \geq \|fg\|_1$$

when $M(a, b) = \sqrt{ab}$.

(ii) Let $\Omega = \{1, 2\}$, $\mu(1) = \alpha$, $\mu(2) = \beta$, $|f(1)| = a^2$, $|f(2)| = b^2$, $|g(1)| = c^2$ and $|g(2)| = d^2$. Then

$$m(L\hat{x}_1, L\hat{x}_2) \leq L(m(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) \Leftrightarrow \|f\|_{1/2} + \|g\|_{1/2} \leq \| |f| + |g| \|_{1/2}$$

when $m(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Also let $\Omega = \{1, 2\}$, $\mu(1) = \alpha$, $\mu(2) = \beta$, $|f(1)| = a^2$, $|f(2)| = b^2$, $|g(1)| = \frac{1}{c}$, $|g(2)| = \frac{1}{d}$.

Then

$$m(L\hat{x}_1, L\hat{x}_2) \leq L(m(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) \Leftrightarrow \|f\|_{1/2} \|g\|_{-1} \leq \|fg\|_1$$

when $m(a, b) = a^2 / b$.

さて問題はどのような関数がこれらのクラスに属するかということであるが、Maligranda の key lemma はその一つの解答を与えてくれるのである。

今 T を任意の集合、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ を T 上の実数値関数で次の条件を満たすものとする：

(1) For each $(a_1, \dots, a_n) \in D$, $m(a_1, \dots, a_n) \equiv \exists \sup_{t \in T} \alpha_1(t)a_1 + \dots + \alpha_n(t)a_n$ and $M(a_1, \dots, a_n) \equiv \exists \inf_{t \in T} \beta_1(t)a_1 + \dots + \beta_n(t)a_n$.

(2) $m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \hat{S}$ and $M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \hat{S}$ for each $x_1, \dots, x_n \in S_0$.
このとき、我々は次の結果を持つ：

Lemma 1. m belongs to the class (m) and M belongs to the class (M).

Proof. Let $x_1, \dots, x_n \in S_0$ and L an order-preserving linear functional from \hat{S} into \mathbf{R} such that $(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \in D$ for all $x_1, \dots, x_n \in S_0$. Note that

$$\alpha_1(t)\hat{x}_1 + \dots + \alpha_n(t)\hat{x}_n \leq m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \text{ and } \beta_1(t)\hat{x}_1 + \dots + \beta_n(t)\hat{x}_n \geq M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

for all $t \in T$. Then

$$\alpha_1(t)L\hat{x}_1 + \dots + \alpha_n(t)L\hat{x}_n = L(\alpha_1(t)\hat{x}_1 + \dots + \alpha_n(t)\hat{x}_n) \leq L(m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n))$$

and

$$\beta_1(t)L\hat{x}_1 + \dots + \beta_n(t)L\hat{x}_n = L(\beta_1(t)\hat{x}_1 + \dots + \beta_n(t)\hat{x}_n) \geq L(M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n))$$

for all $t \in T$. Therefore

$$m(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \leq L(m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)) \text{ and } M(L\hat{x}_1, \dots, L\hat{x}_n) \geq L(M(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)),$$

so that m belongs to the class (m) and M belongs to the class (M). Q. E. D.

4. 具 体 例

(1) Hölder function. Let $D = \mathbf{R}^+ \times \dots \times \mathbf{R}^+$ and $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{R}$ with $p_1 + \dots + p_n = 1$. Set-

$$\text{Höl}(a_1, \dots, a_n) \equiv \text{Höl}_{p_1, \dots, p_n}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}$$

for each $(a_1, \dots, a_n) \in D$. In this case, we have the following

Lemma 2. Suppose that $\text{Höl}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \hat{S}$ for all $x_1, \dots, x_n \in S_0$. Then

(i) If all p_i are positive, then the function Höl belongs to the class (M).

(ii) If the only one of $\{p_1, \dots, p_n\}$ is positive, then the function Höl belongs to the class (m).

Proof. Let $T = \mathbf{R}^+ \times \dots \times \mathbf{R}^+$.

(i) Suppose that all p_i are positive and let $(a_1, \dots, a_n) \in D$. For each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$, we have

$$\sum_{i=1}^n p_i t_i a_i \geq \prod_{i=1}^n (t_i a_i)^{p_i}$$

and hence

$$\sum_{i=1}^n \left(p_i t_i \prod_{j=1}^n t_j^{-p_j} \right) a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{p_i} = \text{Höl}(a_1, \dots, a_n).$$

Set

$$\beta_1(t) = p_1 t_1 \prod_{j=1}^n t_j^{-p_j}, \dots, \beta_n(t) = p_n t_n \prod_{j=1}^n t_j^{-p_j} \text{ and } h(t, a_1, \dots, a_n) = \beta_1(t)a_1 + \dots + \beta_n(t)a_n$$

for each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$. Then we have

$$\inf_{t \in T} h(t, a_1, \dots, a_n) \geq \text{Höl}(a_1, \dots, a_n).$$

Also since $h(t_*, a_1, \dots, a_n) = \text{Höl}(a_1, \dots, a_n)$ for $t_* = (a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}) \in T$, it follows that $\inf_{t \in T} h(t, a_1, \dots, a_n) = \text{Höl}(a_1, \dots, a_n)$. Therefore the desired result follows from Lemma 1.

(ii) Suppose that the only one of $\{p_1, \dots, p_n\}$ is positive and let $(a_1, \dots, a_n) \in D$. For each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$, we have $\sum_{i=1}^n p_i t_i a_i \geq \prod_{i=1}^n (t_i a_i)^{p_i}$. Then the desired result follows from the similar argument in (i). Q. E. D.

(2) Minkowski type function. Let $D = \mathbf{R}^+ \times \dots \times \mathbf{R}^+$, $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$: a concave (convex) function with inverse and $\rho : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$. Set

$$f_\rho(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum_{i=1}^n f^{-1}(\rho(a_i))\right)$$

for each $(a_1, \dots, a_n) \in D$. Also let

$$f_{\rho^*}(\tau) \equiv \exists \inf_{s>0} \frac{\tau}{s} f\left(\frac{f^{-1}(\rho(s))}{\tau}\right) \quad (\text{resp. } f_\rho^*(\tau) \equiv \exists \sup_{s>0} \frac{\tau}{s} f\left(\frac{f^{-1}(\rho(s))}{\tau}\right))$$

for each $0 < \tau < 1$. Moreover set

$$T = \{t = (t_1, \dots, t_n) : t_1 + \dots + t_n = 1, t_1, \dots, t_n > 0\}$$

and

$$\alpha_i(t) = f_{\rho^*}(t_i), \dots, \alpha_n(t) = f_{\rho^*}(t_n) \quad (\text{resp. } \beta_1(t) = f_\rho^*(t_1), \dots, \beta_n(t) = f_\rho^*(t_n))$$

for each $t \in T$. In this case, we have the following

Lemma 3. (i) If f is concave, then $\sup_{t \in T} (\alpha_1(t)a_1 + \dots + \alpha_n(t)a_n) \leq f_\rho(a_1, \dots, a_n)$ for each $(a_1, \dots, a_n) \in D$.

(ii) If f is convex, then $\inf_{t \in T} (\beta_1(t)a_1 + \dots + \beta_n(t)a_n) \geq f_\rho(a_1, \dots, a_n)$ for each $(a_1, \dots, a_n) \in D$.

Proof. (i) Let $(a_1, \dots, a_n) \in D$. For each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$, we have

$$\sum_{i=1}^n t_i f(b_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n t_i b_i\right)$$

for each $(b_1, \dots, b_n) \in D$ and hence by putting $b_1 = f^{-1}(\rho(a_1)) / t_1, \dots, b_n = f^{-1}(\rho(a_n)) / t_n$ in the above inequality,

$$\sum_{i=1}^n t_i f\left(\frac{f^{-1}(\rho(a_i))}{t_i}\right) \leq f\left(\sum_{i=1}^n f^{-1}(\rho(a_i))\right).$$

Note also that $\sum_{i=1}^n f_{\rho^*}(t_i)a_i \leq \sum_{i=1}^n t_i f\left(\frac{f^{-1}(\rho(a_i))}{t_i}\right)$ for each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$. Then we have

$$\sum_{i=1}^n f_{\rho^*}(t_i)a_i \leq f\left(\sum_{i=1}^n f^{-1}(\rho(a_i))\right)$$

for each $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$. Then we have desired result.

(ii) Similarly for the concave case. Q. E. D.

Definition. We say that f_ρ is of Minkowski type if

$$\begin{aligned} f_\rho(a_1, \dots, a_n) &= \sup_{t \in T} (\alpha_1(t)a_1 + \dots + \alpha_n(t)a_n) \quad (\text{when } f \text{ is concave}) \\ &= \inf_{t \in T} (\beta_1(t)a_1 + \dots + \beta_n(t)a_n) \quad (\text{when } f \text{ is convex}) \end{aligned}$$

for each $(a_1, \dots, a_n) \in D$.

In particular, let $p \neq 0$ and set $f(t) = t^p$, $\rho(t) = t$ ($t > 0$). Then

$$f_\rho(a_1, \dots, a_n) = \left(a_1^{1/p} + \dots + a_n^{1/p}\right)^p$$

is a Minkowski type function on D . In fact, let $(a_1, \dots, a_n) \in D$. Then we have $h(t_*, a_1, \dots, a_n) = f_\rho(a_1, \dots, a_n)$ for $t_* = (t_1, \dots, t_n) \in T$, where

$$t_i = \frac{a_i^{1/p}}{a_1^{1/p} + \dots + a_n^{1/p}} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Henc f_ρ is of Minkowski type on D .

Let $D = \mathbf{R}^+ \times \cdots \times \mathbf{R}^+$, S : a real linear space with dual S^* , $S_0 \subseteq S$,
 Φ : a subset of S^* such that $(\varphi x_1, \cdots, \varphi x_n) \in D$ for all $x_1, \cdots, x_n \in S_0$ and $\varphi \in \Phi$,
 $\hat{S}(\varphi) = \varphi(S)$ ($\varphi \in \Phi, S \in S$), $\hat{S} = \{\hat{s} : s \in S\}$ and $f_\varphi(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n) \in \hat{S}$ for all $x_1, \cdots, x_n \in S_0$.

Then we have the following

- Lemma 4. Suppose that $f_\varphi(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n) \in \hat{S}$ for all $x_1, \cdots, x_n \in S_0$. Then
 (i) If f is concave and f_ρ is of Minkowski type, then f_ρ belongs to the class (m).
 (ii) If f is convex and f_ρ is of Minkowski type, then f_ρ belongs to the class (M).

Proof. This follows directly from Lemma 1. Q. E. D.

Problems. Define a Hölder type function. Also find a reasonable new Minkowski type function.

5. 応用

Let S be the m -dimensional Euclid space \mathbf{R}^m and $S_0 = D = \mathbf{R}^+ \times \cdots \times \mathbf{R}^+$. Set
 $\Phi = \{\varphi_j : j = 1, \cdots, m\}$, where $\varphi_j(x_1, \cdots, x_m) = x_j$ for each $(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ and $1 \leq j \leq m$.
 Then we have $(\varphi f_1, \cdots, \varphi f_n) \in D$ for all $f_1, \cdots, f_n \in S_0$ and $\varphi \in \Phi$. Let $f_1, \cdots, f_n \in S_0$ and put
 $g = \text{Höl}(f_1, \cdots, f_n) \in S$. Note that $\hat{f}(\varphi_\omega) = f(\omega)$ ($f \in S, \omega \in \Omega$). Then

$$\text{Höl}(\hat{f}_1(\varphi_j), \cdots, \hat{f}_n(\varphi_j)) = \text{Höl}(f_{1,j}, \cdots, f_{n,j}) = g(\omega) = \hat{g}(\varphi_j)$$

for all $1 \leq j \leq m$ and hence $\text{Höl}(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n) \in \hat{S}$.

Now fix $\lambda_1, \cdots, \lambda_m > 0$ arbitrarily and set

$$L(\hat{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j$$

for each $x = (x_1, \cdots, x_m) \in S$. Then L is an order-preserving linear functional from \hat{S} into \mathbf{R}
 such that $(L\hat{f}_1, \cdots, L\hat{f}_n) \in D$ for all $f_1, \cdots, f_n \in S_0$. Moreover we have

$$\text{Höl}(L\hat{f}_1, \cdots, L\hat{f}_n) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ij} \right)^{p_i}$$

and

$$L(\text{Höl}(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \prod_{i=1}^n f_{ij}^{p_i}$$

for all $f_1 = (f_{11}, \cdots, f_{1m}), \cdots, f_n = (f_{n1}, \cdots, f_{nm}) \in S_0$. Then by Lemma 2, we have the weighted
 version of generalized Hölder–Rogers inequality :

$$(i) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \prod_{i=1}^n f_{ij}^{p_i} \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ij} \right)^{p_i}$$

when all p_i are positive and $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

$$(ii) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \prod_{i=1}^n f_{ij}^{p_i} \geq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ij} \right)^{p_i}$$

when the only one of $\{p_1, \cdots, p_n\}$ is positive and $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Similarly we have from Lemma 4 the weighted version of generalized Minkowski inequality :

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n f_{ij}^{1/p} \right)^p \geq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ij} \right)^{1/p} \right)^p$$

when $0 < p < 1$.

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n f_{ij}^{1/p} \right)^p \geq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ij} \right)^{1/p} \right)^p$$

when $p > 1$ or $p < 0$.

勿論後者の場合は、 $f(t) = t^p$ ($p \neq 0$), $\rho(t) = t$ ($t > 0$) において、平均関数

$$f_\rho(x_1, \cdots, x_n) = \left(x_1^{1/p} + \cdots + x_n^{1/p} \right)^p$$

を考えている。しかしながらまだそれを抽象化しただけで、未だ Hölder–Rogers と Minkowski の世界をほとんど一歩も出ていないのである。この話を地球儀に例えると、線形関数のクラスが赤道で、(M) に属する非線形関数のクラスが北半球で、(m) に属する非線形関数のクラスが南半球であり、南北半球にそれぞれ Hölder–Rogers 大陸、Minkowski 大陸が横たわっているが、まだ誰も新大陸を発見していないということである。やはり昔の人は偉いものだとしみじみ思う。

注意：所謂 Hölder の不等式：

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

$$(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a_k > 0, b_k > 0, k = 1, \dots, n)$$

は L. J. Rogers によって 1888 年に発見された。また O. Hölder はこれを 1889 年に独立に発見している (cf. [1, 4])。それ故我々は L. Maligranda の主張に従いこれを Hölder–Rogers の不等式と呼ぶ (cf. [3])。

参考文献

1. O. Hölder, Über einen Mittelwertssatz, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. – Phys. Kl., 1889, pp. 38 – 47
2. L. Maligranda, A simple proof of the Hölder and the Minkowski inequality, Amer. Math. Monthly, 102-3(1995), 256-259.
3. _____, Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality, Math. Inequal. Appl., 1-1(1998), 69-83.
4. L. J. Rogers, An extension of a certain theorem in inequalities, Messenger of Math., 17(1888), 145-150.
5. 高橋真映, 人間関係、そして未完「例に始まり例に終わる」の巻, 日本数理科学協会会報, 2003年。