第10回　関数空間セミナー報告集

(Seminar on Function Spaces, 2001)

2001年12月25日(火)～12月27日(木)

(会場：北海道大学大学院理学研究科)

代表者：中路　貴彦

Series #70. February, 2002

第10回　関数空間セミナー報告集
(Seminar on Function Spaces, 2001)

2001年12月25日（火）～12月27日（木）
（会場：北海道大学大学院理学研究科）

代表者：北海道大学大学院理学研究科
中路貴彦

目次

Codimension 1 linear isometries on function algebras

Kazuhiro Kasuga

Niigata University

Abstract

Let A be the ball algebra or the polydisk algebra in $\mathbb{C}^n$. When $n > 1$, there are no codimension 1 linear isometries on A.

1. Introduction.

Let X be a compact Hausdorff space and $C(X)$ the Banach algebra of all complex-valued continuous functions on X with the supremum norm. A uniformly closed subalgebra of $C(X)$ is called a function algebra on X if it separates the points of X and contains the constants. Let B_n be the open unit ball of $\mathbb{C}^n$ and S_n be the boundary of B_n. Let D and T stand for B_1 and S_1 respectively. Let $A(S_n)$ be the space of all $f \in C(S_n)$ which can be extended holomorphically on B_n. The algebra $A(S_n)$ is called the ball algebra. When $n = 1$, the algebra $A(T)$ is called the disk algebra.

Let D^n be the unit polydisk, $\bar{D}^n$ the closure, ∂D^n the topological boundary and T^n the torus. Let $A(T^n)$ be the space of all $f \in C(T^n)$ which can be extended holomorphically on D^n. The algebra $A(T^n)$ is called the polydisk algebra. We note that $A(S_n)$ is a function algebra on S_n and $A(T^n)$ is a function algebra on T^n.

Let E be a Banach space. A linear isometry $\varphi : E \to E$ is said to be of codimension 1 if the range of φ has codimension 1 in E. We set $M_a(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ for $a \in D$.

Theorem A ([9]) Let A be $A(T)$ and φ a codimension 1 linear isometry on A. Then there are $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($|\alpha| = |\beta| = 1$) and $a, b \in D$ such that $(\varphi f)(z) = \alpha M_a(z) f(\beta M_b(z))$ ($f \in A, z \in T$).

In this report, we studied codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras. Our theorem is the following.

Theorem Let A be $A(S_n)$ or $A(T^n)$. When $n > 1$, there are no codimension 1 linear isometries on A.

2. Proof.

Suppose that $T : A \to A$ is a codimension 1 linear isometry. We denote by ∂A the Shilov boundary of A. We say that the range of T separates strongly the points of ∂A, if for given two elements of ∂A, x_1 and x_2, there exists $f \in T(A)$ such that $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$. By [2, p.2277], Araujo and Font classfied codimension 1 linear isometries T on function algebras into three types:

Type I. The range of T separates strongly the points of ∂A, except two of them.
Type II. The range of T separates strongly the points of ∂A and there exists an element $x_0 \in \partial A$ such that $f(x_0) = 0$ for all $f \in T(A)$.
Type III. The range of T separates strongly the points of ∂A and, for each $x \in \partial A$, there exists $f \in T(A)$ such that $f(x) \neq 0$.

We shall prove that T is a codimension 1 linear isometry of type III. To prove this, suppose first that T is a codimension 1 linear isometry of type I and let x_1 and x_2 be the points which cannot be separated strongly. Then by [1, Corollary 5.1 and Lemma 2.1], ∂A is homeomorphic to a quotient space of ∂A identifing with x_1 and x_2 in ∂A. But S_n and T^n do not satisfy this condition. This is a contradiction.

Next suppose that T is a codimension 1 linear isometry of type II. Let x_0 be the point in ∂A such that $f(x_0) = 0$ for all $f \in T(A)$. By [2, Theorem 6.1], x_0 is isolated in ∂A. This is absurd.

Hence, T is a codimension 1 linear isometry of type III. By [2, theorem A], there exists a homeomorphism φ of ∂A onto ∂A and a continuous map $\psi : \partial A \to \mathbb{C}$ such that $|\psi(x)| = 1$ for all $x \in \partial A$, and

$$(Tf)(x) = \psi(x)f(\varphi(x)) \text{ for all } x \in \partial A \text{ and all } f \in A. \tag{1}$$

Since $T1 = \psi \in A$, ψ is an inner function in A.

Case $A = A(S_n)$

Since there is no non-constant inner function extends continuously to S_n, $TA = A \circ \varphi \subset A$. Since the codimension of $A \circ \varphi$ in A is 1,

$$A = A \circ \varphi + \mathbb{C}g \text{ for some } g \notin A \circ \varphi.$$

Therefore

$$A \circ \varphi^{-1} = A + \mathbb{C}g \circ \varphi^{-1}, \qquad g \circ \varphi^{-1} \notin A. \tag{2}$$

By the above, $A \circ \varphi^{-1}$ is a function algebra on S_n and A is a proper subalgebra of $A \circ \varphi^{-1}$. For a function f on S_n and $\zeta \in S_n$, put $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$, $\lambda \in T$. Since $g \circ \varphi^{-1} \notin A$, there exists a point ζ_0 in S_n such that $(g \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0} \notin A(T)$, see [7, p.6]. Put $(A \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0} = \{f_{\zeta_0}(\lambda) : f \in (A \circ \varphi^{-1})\}$. Then $(A \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0}$ is a closed subalgebra of $C(T)$. Since $A(S)_{\zeta_0} = A(T)$, $A(T) \subsetneqq (A \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0} \subset C(T)$. By Wermer's maximality theorem [3, p.214], $C(T) = (A \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0}$. Therefore

$$C(T) = A(T) + \mathbb{C}(g \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0}. \tag{3}$$

Hence $\bar{z} = h_1 + a(g \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0}$ and $\bar{z}^2 = h_2 + b(g \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0}$ for some $h_1, h_2 \in A(T)$, $a, b \in \mathbb{C}$. Since $(g \circ \varphi^{-1})_{\zeta_0} \notin A(T)$, $a \neq 0$. Then $\bar{z}^2 - \frac{b}{a}\bar{z} = h_2 - \frac{b}{a}h_1$. The right-hand side belongs to $A(T)$, but the left-hand side does not. This is a contradiction. Hence, when $n > 1$, there are no codimension 1 linear isometries on $A(S_n)$.

Case$A = A(T^n)$

Let $\mathbb{Z}$ be the set of all integers and $\mathbb{Z}_+$ the set of all nonnegative integers. Let $\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{Z}_+^n$ be the sets of all $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ with $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ for every $1 \leq i \leq n$, respectively. Let $\hat{f}(k)$ be the k-th Fourier coefficient of a function f on T^n, that is

$$\hat{f}(k) = \int_{T^n} f(w)\bar{w}^k dm_n(w) \qquad (k \in \mathbb{Z}^n)$$

where $\bar{w}^k = \bar{w_1}^{k_1} \ldots \bar{w_n}^{k_n}$ and $dm_n = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta_1 \ldots d\theta_n$.

By (1),

$$TA = \psi(A \circ \varphi) \subset A. \tag{4}$$

Furthermore

$$A \circ \varphi \subset A. \tag{5}$$

To prove this, let $\mathcal{B}$ be a closed subalgebra of $C(T^n)$ generated by A and $A \circ \varphi$. By (4), $\psi\mathcal{B} \subset A$. Suppose $A \circ \varphi \not\subset A$. Then there exists a function f_0 in $\mathcal{B}$ such that f_0 does not belong to A. By [6, Theorem 2.2.1], there exists $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{Z}_+^n$ such that $\hat{f}_0(k) \neq 0$. We may assume $k_1 < 0$. Then there exists a point $w_0 \in T^{n-1}$ such that $f_0(\lambda, w_0) \notin A(T)$. To see this, suppose that $f_0(\lambda, w) \in A(T)$ for all $w \in T^{n-1}$. Then $\int_T f_0(\lambda, w)\bar{\lambda}^{k_1} dm_1(\lambda) = 0$. Now integrate this with respect to w and conclude that $\hat{f}_0(k_1, \ldots, k_n) = 0$. This is a contradiction.

For a subspace L of $C(T^n)$, let $L_{w_0} = \{f(\lambda, w_0) : f \in L\}$. Then $\mathcal{B}_{w_0}$ is a closed subalgebra of $C(T)$. Since $A(T^n)_{w_0} = A(T)$, $A(T) \subsetneqq \mathcal{B}_{w_0}$. By Wermer's maximality theorem, $\mathcal{B}_{w_0} = C(T)$. Since $\psi\mathcal{B} \subset A$, then $\psi_{w_0} C(T) = A(T)$, where $\psi_{w_0}(\lambda) = \psi(\lambda, w_0)$. Since ψ is an inner function, $|\psi_{w_0}| = 1$ on T. Hence $\psi_{w_0} C(T) = C(T)$. This is a contradiction. Hence (5) holds.

First, suppose that ψ is invertible in A. Since ψ is inner, ψ is a constant function. By (4), the codimension of $A \circ \varphi$ in A is 1. Then

$$A = A \circ \varphi + \mathbb{C}g \text{ for some } g \in A, \qquad g \notin A \circ \varphi.$$

Therefore

$$A \circ \varphi^{-1} = A + \mathbb{C}g \circ \varphi^{-1}, \qquad g \circ \varphi^{-1} \notin A.$$

Hence $A \circ \varphi^{-1}$ is a function algebra on T^n, and A is a proper subalgebra of $A \circ \varphi^{-1}$. In the same way as the proof of (5), there exist a point $w_0 \in T^{n-1}$ such that

$$(A + \mathbb{C}g \circ \varphi^{-1})_{w_0} = C(T).$$

Therefore

$$A(T) + \mathbb{C}(g \circ \varphi^{-1})_{w_0} = C(T).$$

This leads a contradiction as the case $A = A(S_n)$.

Hence ψ is not invertible in A. We denote by $\hat{f}$ the Gelfand transform of $f \in A$ and $\hat{A}$ the Gelfand transform of A. We identify $\hat{A}$ with the polydisk algebra on $\bar{D}^n$. We define an operator $\hat{T}$ on $\hat{A}$ by

$$\hat{T}\hat{f} = \widehat{Tf},\ \hat{f} \in \hat{A}.$$

Since $A \to \hat{A}$ is an isometry, $\hat{T}$ is a codimension 1 linear isometry on $\hat{A}$.

So, by a simple caluculation, we see that $\hat{\psi}$ has a unique zero $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \bar{D}^n \backslash T^n$. Since $\hat{\psi}$ is holomorphic on D^n, we have $p \in \partial D^n \backslash T^n$. Thus there exists $1 \leq j \leq n$ such that $|p_j| < 1$. Put

$$U = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \bar{D}^n : \quad |z_j - p_j| < \tfrac{1}{2}(1 - |p_j|) \text{ and } z_l = p_l \text{ for } 1 \leq l \leq n,\ l \neq j\}$$

and

$$U_k = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \bar{D}^n : \quad |z_j - p_j| < \tfrac{1}{2}(1 - |p_j|) \text{ and } z_l = \left(1 - \tfrac{1}{k}\right)p_l \text{ for } 1 \leq l \leq n,\ l \neq j\}$$

Then $\hat{\psi}|_{U_k}$ is holomorphic on U_k and has no zero. On the other hand, $\hat{\psi}|_U$ is holomorphic on U and has a unique zero. By Rouché's theorem, this is a contradiction. Hence, when $n > 1$, there are no codimension 1 linear isometries on $A(T^n)$.

References

[1] J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 413-428.

[2] J. Araujo and J. J. Font, *Codimension* 1 *linear isometries on function algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2273-2281.

[3] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[4] K. Kasuga, *There are no codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras,* Sci. Math. Jpn. **54** (2001), 387-390.

[5] K. Kasuga, *Correction to the paper "There are no codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras",* Sci. Math. Jpn., to appear.

[6] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

[7] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer, New York, 1980.

[8] W. Rudin, *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 63, 1985.

[9] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra,* Tokyo. J. Math. 21 (1998), 115-120.

Ring homomorphisms on commutative C^*-algebras.

Takeshi Miura (Yamagata University)

Abstract. We say that a map ρ between two algebras is a ring homomorphism, if ρ preserves both addition and multiplication. We give a complete representation of ring homomorphisms on a commutative C^*-algebra into another.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$を複素Banach環とする．写像$\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$が環準同型写像であるとは，任意の$f, g \in \mathcal{A}$に対して

$$\begin{aligned} \phi(f+g) &= \phi(f) + \phi(g) \\ \phi(fg) &= \phi(f)\,\phi(g) \end{aligned}$$

をみたすことである．さらにρがスカラー倍を保存するとき，ρは準同型写像といわれる．したがって環準同型写像はスカラー倍を保存するとは限らない．簡単な計算により環準同型写像は有理数倍を保存することが分かる．よって連続な環準同型写像は必ず実線形である．

$\mathbb{C}$を複素数全体からなる可換Banach環とする．$\mathbb{C}$から$\mathbb{C}$への環準同型写像を単に$\mathbb{C}$上の環準同型写像と呼ぶことにする．このとき写像$\phi(z) = 0$, $(z \in \mathbb{C})$, $\phi(z) = z$, $(z \in \mathbb{C})$, $\phi(z) = \bar{z}$, $(z \in \mathbb{C})$は$\mathbb{C}$上の環準同型写像である．ここに$\bar{\cdot}$は複素共役である．これらを自明な環準同型写像と呼ぶ．$\mathbb{C}$上の環準同型写像には非自明なものが存在することが知られている (cf. [3])．さらに$\mathbb{C}$上の全射環準同型写像の全体を$G(\mathbb{C})$とすると，その集合としての濃度$\sharp G(\mathbb{C})$は$2^{\mathfrak{c}}$である (cf. [7])．ここに$\mathfrak{c}$は連続体濃度である．このような複雑さは一次元に限らず有限次元の場合も同様である．したがって一般の無限次元可換Banach環上の環準同型写像の構造を決定することはさらに困難であるように思われる．

その一方で環準同型写像はある条件のもとでは逆に非常に単純な構造をしていることもある．Arnold [1] は2つの無限次元複素Banach空間上の有界線形作用素全体からなる複素Banach環の間の全単射環準同型写像は線形または共役線形であることを示した．Kaplansky [2] はその結果を次のように一般化した：ρ を半単純複素Banach環 A から他の半単純複素Banach環への全単射環準同型写像とする．このとき A は A_1, A_2, A_3 の直和となる．ここに A_3 は有限次元，ρ は A_1 上線形，A_2 上共役線形である．それでは全単射とは限らない環準同型写像の構造はどのようであろうか．Molnar [5]，Šemrl [6] は可換 C^*- 環上の環準同型写像の構造を，それぞれある条件のもとで決定している．この小論では可換 C^*-環上の環準同型写像の構造を，他の条件を仮定せずに決定する．全く同様の議論により，(単位元をもつとは限らない) 正則な半単純可換Banach環から (単位元をもつとは限らない，また正則とも限らない) 半単純可換Banach環への環準同型写像の構造を決定することができる．

以下 $C_0(K)$ により局所コンパクトHausdorff空間 K 上の複素数値連続関数で無限遠点で0になるもの全体からなる可換Banach環を表す．また K_∞ により K の1点コンパクト化を表す．ただし簡単のため，K がコンパクトならば K_∞ は K 自身を表すことにする．

補題 1 ϕ: $C_0(X) \to \mathbb{C}$ を環準同型写像とする．このとき ϕ の環準同型写像としての $C(X_\infty)$ への拡張 $\tilde{\phi}$ がただ1つ存在する．

証明. ϕ が零写像ならばその $C(X_\infty)$ への拡張は零写像だけである．ϕ が零写像でなければ，$\phi(a) \neq 0$ なる $a \in C_0(X)$ が存在する．このとき

$$\tilde{\phi}((f, \lambda)) = \phi(f) + \frac{\phi(\lambda a)}{\phi(a)}, \quad ((f, \lambda \in C(X_\infty))$$

は ϕ の $C(X_\infty)$ への一意の拡張である． ■

定義 1 $\rho\colon C_0(X) \to C_0(Y)$ を環準同型写像とする．各 $y \in Y$ に対して写像 $\rho_y\colon C_0(X) \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$\rho_y(f) = \rho(f)(y), \quad (f \in C_0(X)).$$

補題 1 により ρ_y の $C(X_\infty)$ への拡張が一意に存在する．それを $\tilde{\rho_y}$ とする．このとき環準同型写像 $\sigma_y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$\sigma_y(\lambda) = \tilde{\rho_y}(\lambda e), \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

により定義する．ここに e は $C(X_\infty)$ の単位元である．

補題 2 $\phi\colon C_0(X) \to \mathbb{C}$ を零でない環準同型写像，$q\colon C_0(X) \to C_0(X)/\ker\phi$ を自然な準同型写像とする．また F を $C_0(X)/\ker\phi$ の商体とする．このとき $\phi = \tau \circ q$ なる体の準同型写像 $\tau\colon F \to \mathbb{C}$ がただ 1 つ存在する．

特に $\ker\phi$ が $C_0(X)$ の極大正則イデアルならば，τ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への零でない環準同型写像及び q は $C_0(X)$ から $\mathbb{C}$ への零でない準同型写像とみなすことができる．

証明．写像 ϕ の核 $\ker\phi$ は $C_0(X)$ の素イデアルであることが分かる．$C_0(X)/\ker\phi$ の商体 F の元を $q(f)/q(g)$ と書く．写像 τ を次で定義すればよい．

$$\tau(q(f)/q(g)) = \frac{\phi(f)}{\phi(g)}, \quad (q(f)/q(g) \in F).$$

また $\ker\phi$ が $C_0(X)$ の極大正則イデアルならば $C_0(X)/\ker\phi$ は $\mathbb{C}$ と同型であるので，同型写像 $I\colon C_0(X)/\ker\phi \to \mathbb{C}$ が存在する．そこで $\tau \circ I^{-1}, I \circ q$ を考えればよい．■

定義 2 $\rho\colon C_0(X) \to C_0(Y)$ を環準同型写像とする．このとき $Y_0 = \{y \in Y : \sigma_y(z) = 0, \quad (z \in \mathbb{C})\}$ とおく．ここに σ_y は定義 1 で定義した写像である．集合 $Y_m, Y_p \subset Y \setminus Y_0$ を

次で定義する：

$$Y_m = \{y \in Y \setminus Y_0 : \ker \rho_y \text{ は } C_0(X) \text{ の極大正則イデアルである }\},$$

$$Y_p = \{y \in Y \setminus Y_0 : \ker \rho_y \text{ は } C_0(X) \text{ の極大正則イデアルでない }\}.$$

集合 Y_m をさらに次の 3 つに分割する.

$$\begin{aligned}
Y_{-1} &= \{y \in Y_m : \sigma_y(z) = \bar{z}, \quad (z \in \mathbb{C})\}, \\
Y_1 &= \{y \in Y_m : \sigma_y(z) = z, \quad (z \in \mathbb{C})\}, \\
Y_{m,-1} &= \{y \in Y_m : \sigma_y \text{ は非自明かつ } \sigma_y(i) = -i\}, \\
Y_{m,1} &= \{y \in Y_m : \sigma_y \text{ は非自明かつ } \sigma_y(i) = i\}.
\end{aligned}$$

集合 $Y_{p,-1}, Y_{p,1} \subset Y_p$ を以下により定義する.

$$\begin{aligned}
Y_{p,-1} &= \{y \in Y_p : \sigma_y(i) = -i\}, \\
Y_{p,1} &= \{y \in Y_p : \sigma_y(i) = i\}.
\end{aligned}$$

さらに $Y_{d,j} = Y_{m,j} \cup Y_{p,j}, (j = -1, 1)$ とし，$Y_d = Y_{d,1} \cup Y_{d,-1}$ と書く. Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_d は Y の互いに素な部分集合で，$Y = Y_{-1} \cup Y_0 \cup Y_1 \cup Y_d$ をみたす. $\{Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_d\}$ を Y の ρ に関する分割と呼ぶことにする.

補題 3 ϕ: $C_0(X) \to \mathbb{C}$ を環準同型写像とする. このとき ϕ の核 $\ker \phi$ は $C_0(X)$ の高々1つの極大正則イデアルに含まれる. したがって $\ker \tilde{\phi}$ は $C(X_\infty)$ のただ 1 つの極大イデアルに含まれる.

証明. もし $\ker \phi$ が 2 つの異なる極大正則イデアル $\{f \in C_0(X) : f(x_j) = 0\}, (j = 1, 2)$ に含まれたとすると，$x_j \in X$ の開近傍 U_j で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ なるものをとる. このとき Urysohn

の補題より $g_j(x_j)=1, g_j(X\setminus U_j)=0$ なる $g_j\in C_0(X)$ が存在する．X 上 $g_1g_2=0$ なので $\phi(g_1g_2)=0$ であるから $\phi(g_1)=0$ または $\phi(g_2)=0$ である．これは g_1, g_2 のとり方に反する．よって $\ker\phi$ は $C_0(X)$ の高々1つの極大正則イデアルに含まれる． ■

定義 3 $\rho\colon C_0(X)\to C_0(Y)$ を環準同型写像，$\{Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_d\}$ を Y の ρ に関する分割とする．このとき $y\in Y\setminus Y_0$ に対し $\tilde{\rho_y}$ の核 $\ker\tilde{\rho_y}$ を含む $C(X_\infty)$ のただ1つの極大イデアルを対応させる写像を Φ とする（補題 3 参照）．つまり $\ker\tilde{\rho_y}$ は極大イデアル $\{\tilde{f}\in C(X_\infty):\tilde{f}(\Phi(y))=0\}$ に含まれる．このとき Φ を ρ の核写像と呼ぶことにする．

次の補題は定理 5 の証明に重要な役割を果たすが，その詳細は [4] を参照されたい．

補題 4 集合 $Y_0, Y_{-1}\cup Y_0, Y_0\cup Y_1$ は Y の閉集合である．また Y_d の Φ による像 $\Phi(Y_d)$ は X_∞ の高々有限集合であり，各 $x_j\in\Phi(Y_d)$ に対し集合 $\{y\in Y_d:\Phi(y)=x_j\}$ は Y の開集合である．

定理 5 $\rho\colon C_0(X)\to C_0(Y)$ を環準同型写像，$\{Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_d\}$ を Y の ρ に関する分割とする．また $\Phi\colon Y\setminus Y_0\to X_\infty$ を ρ の核写像とする．このとき Φ は連続で，次の性質をもつ：各 $y\in Y_d$ に対して $C_0(X)/\ker\rho_y$ の商体から $\mathbb{C}$ への零でない体の準同型写像 τ_y が存在して

$$\rho(f)(y)=\begin{cases}\overline{f(\Phi(y))}, & y\in Y_{-1},\\ 0, & y\in Y_0,\\ f(\Phi(y)), & y\in Y_1,\\ \tau_y(f(\Phi(y))), & y\in Y_{m,-1}\cup Y_{m,1},\\ \tau_y(q_y(f)), & y\in Y_{p,-1}\cup Y_{p,1}\end{cases}\tag{1}$$

が全ての $f\in C_0(X)$ に対して成り立つ．ここに q_y は $C_0(X)$ から $C_0(X)/\ker\rho_y$ への自然な準同型写像である．さらに各 $y\in Y_d$ に対して $\tau_y|_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ 上の非自明な環準同型写像である．

証明．まず $y \in Y \setminus Y_0$ に対して補題 2 より $\rho_y = \tau_y \circ q_y$ なる $C_0(X)/\ker \rho_y$ の商体から $\mathbb{C}$ への零でない体の準同型写像 τ_y が存在する．ここに q_y は $C_0(X)$ から $C_0(X)/\ker \rho_y$ への自然な準同型写像である．このとき σ_y, τ_y の定義により $\tau_y|_{\mathbb{C}} = \sigma_y$ である．$y \in Y_m$ ならば $\ker \rho_y = \{f \in C_0(X) : f(\Phi(y)) = 0\}$ である．よって $\ker \tilde{\rho_y} = \{\tilde{f} \in C(X_\infty) : \tilde{f}(\Phi(y)) = 0\}$ となる．このとき全ての $f \in C_0(X)$ に対して $f - f(\Phi(y))e \in \ker \tilde{\rho_y}$ であるから，

$$\rho_y(f) = \tilde{\rho_y}(f(\Phi(y)e)) = \sigma_y(f(\Phi(y))), \quad (f \in C_0(X))$$

となる．よって (1) が成り立つ．

最後に核写像 $\Phi\colon Y \setminus Y_0 \to X_\infty$ の連続性を示す．Φ が Y_d 上連続であることは補題 4 より分かるので，Y_1 上で連続であることを示そう．$\{y_\alpha\} \subset Y \setminus Y_0$ を $y_1 \in Y_1$ に収束する net とする．このとき $\alpha > \alpha_1$ ならば $y_\alpha \in Y_1 \cup \{y \in Y_d : \Phi(y) = \Phi(y_1)\}$ なる α_1 が存在することが分かる．よって $\alpha > \alpha_1$ ならば全ての $f \in C_0(X)$ に対して

$$f(\Phi(y_\alpha)) = \begin{cases} \rho_{y_\alpha}(f), & y_\alpha \in Y_1 \\ f(\Phi(y_1)), & \Phi(y_\alpha) = \Phi(y_1) \end{cases}$$

が成り立つ．すなわち

$$|f(\Phi(y_\alpha)) - f(\Phi(y_1))| \leq |\rho_{y_\alpha}(f) - \rho_{y_1}(f)|, \quad (f \in C_0(X))$$

である．これは Φ の Y_1 での連続性を示している．全く同様にして Y_{-1} での連続性も示される． ■

参考文献

[1] B. H. Arnold, *Rings of operators on vector spaces*, Ann. of Math., **45** (1944), 24-49.

[2] I. Kaplansky, *Ring isomorphisms of Banach algebras*, Canad. J. Math. **6** (1954), 374-381.

[3] H. Kestelman, *Automorphisms of the field of complex numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 1-12.

[4] T. Miura, *Ring homomorphisms on commutative regular Banach algebras*, preprint.

[5] L. Molnár, *The range of a ring homomorphism from a commutative C^*-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1789-1794.

[6] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphisms on $C(X)$*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), 87-109.

[7] T. Soundararajan, *On the automorphisms of the complex number field*, Math. Mag. **40** (1967), 213.

[8] S.-E. Takahasi and O. Hatori, *A structure of ring homomorphisms on commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2283-2288.

Stieltjes perfect semigroups are perfect

T. M. Bisgaard (Denmark) and N. Sakakibara (Ibaraki Univ.)

Abstract. An abelian involution semigroup S is *perfect* (resp. *Stieltjes perfect*) if every positive definite (resp. completely positive definite) function on S admits a unique disintegration as an integral of characters, that is, hermitian multiplicative functions (resp. nonnegative characters). We prove that every Stieltjes perfect semigroup is perfect. The converse was known earlier for semigroups with neutral element, but is here shown to be not true in general. Furthermore, we prove that an abelian involution semigroup is perfect if for each $s \in S$ there exist $t \in S$ and $m, n \in \mathbb{N}_0$ such that $m+n \geq 2$ and $s+s^* = s^*+mt+nt^*$. This was known earlier only with the equality replaced by $s = mt + nt^*$. The equality cannot be replaced by $s+s^*+s = s+s^*+mt+nt^*$ in general, but for semigroups with neutral element it can be replaced by $s+p(s+s^*) = p(s+s^*)+mt+nt^*$ for an arbitrary $p \in \mathbb{N}$.

§0. 序

可換＊半群の完全性は正定値関数の一意的な積分表示可能性を保証する性質であるが，これを完全正定値関数に限定した場合，完全性と同値な性質となるかはこの研究が始まって以来の問題であった．この問題について最終的な結論を得たので報告する．また，完全性の十分条件に関する進展についても触れる ([BS2])．

§1. 定義・背景・動機

＊構造をもつ可換半群 $S = (S, +, *)$ を可換＊半群という．また，$S+S := \{s+t \mid s, t \in S\}$ とし，自然数 N について $\overbrace{S+\cdots+S}^{N}$ も同様に定義する．関数 $\varphi : S+S \to \mathbb{C}$ が正定値であるとは，S の任意の有限集合 $\{s_1, \cdots, s_n\}$ とスカラー $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(s_i + s_j^*) \geqq 0$$

が成立するときである．正定値は $S+S$ 上での性質であるので，関数は $S+S$ 上で定義されていれば十分である．もちろん，S が単位元をもてば通常の S 上で定義された関数の性質となる．S 上の関数 ρ で

$$\text{(i) } \rho \not\equiv 0, \quad \text{(ii) } \rho(s+t) = \rho(s)\rho(t) \ (s, t \in S), \quad \text{(iii) } \rho(s^*) = \overline{\rho(s)} \ (s \in S)$$

をみたす関数を指標とよび，その全体を S^*，非負値のみをとる指標全体を S^*_+ とかく．指標は正定値関数の典型的な例である．

可換＊半群 S の外部に，単位元となるように形式的に $\{0\}$ を加えた可換＊半群を $\widetilde{S} := S \cup \{0\}$ とする．関数 $\varphi : S \to \mathbb{C}$ と $r \in S$ について，

$$(E_r\varphi)(x) := \varphi(r+x), \ x \in \widetilde{S}$$

と定義する．任意の $r \in S$ について $E_r\varphi$ が $\widetilde{S}$ 上の正定値関数になるとき，φ は S 上の完全正定値関数であるという．S^*_+ の元は完全正定値関数の典型的な例である．一般に，完全正定

値関数は非負値のみをとる．また，S が単位元をもてば，完全正定値関数は正定値関数となる．

Example. 0 以上の整数全体を $\mathbb{N}_0$ とかくことにし，恒等的な $*$ 構造をもつ可換 $*$ 半群 $S=(\mathbb{N}_0,+,x^*=x)$ を考える．このとき，指標全体は $S^*=\{n\mapsto x^n \mid x\in\mathbb{R}\}$ でつくされ，正定値関数 φ は power moment function，つまり

$$\varphi(n)=\int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x),\ n\in\mathbb{N}_0$$

である．また，完全正定値関数 φ は Stieltjes moment function，つまり

$$\varphi(n)=\int_{\mathbb{R}_+} x^n d\mu(x),\ n\in\mathbb{N}_0$$

である．ここで，表現測度は一意とは限らない．

Example. 0 以上の有理数全体を $\mathbb{Q}_+$ とかくことにし，恒等的な $*$ 構造をもつ可換 $*$ 半群 $S=(\mathbb{Q}_+,+,x^*=x)$ を考える．このとき，指標全体は $S^*=S^*_+=\{r\mapsto e^{rx} \mid x\in\mathbb{R}\}$ でつくされ，正定値関数 ($=$ 完全正定値関数) φ は

$$\varphi(r)=\int_{\mathbb{R}} e^{rx} d\mu(x),\ r\in\mathbb{Q}_+$$

である．ここで，表現測度は（関数ごとに）一意に定まる．

Example. 整数半群の直積で恒等的な $*$ 構造をもつ可換 $*$ 半群 $S=(\mathbb{Z}^2,+,x^*=x)$ を考える．このとき，指標全体は $S^*=\{(m,n)\mapsto x^m y^n \mid x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ でつくされる．しかしながら，上の例のように正定値関数が必ずしもモーメントとは限らない．

すべての $s\in S$ について，point evaluation $\rho\mapsto\rho(s)$ が可測になるような S^* の部分集合からなる最小の σ-ring を $\mathcal{A}(S^*)$ とかくことにする．S が可算のとき，S^* に各点収束位相を考えた場合の S^* のボレル集合族 $\mathcal{B}(S^*)$ と $\mathcal{A}(S^*)$ は一致する．可換 $*$ 半群 S が perfect であるとは，S 上の正定値関数 φ が必ず $\mathcal{A}(S^*)$ 上で定義された測度 μ によって一意的に

$$\varphi(s)=\int_{S^*}\rho(s)d\mu(\rho),\ s\in S$$

とかけるときをいう．また，S 上の完全正定値関数 φ が必ず $\mathcal{A}(S^*_+)$ 上で定義された測度 μ によって（S^*_+ 上の測度として）一意的に

$$\varphi(s)=\int_{S^*_+}\rho(s)d\mu(\rho),\ s\in S$$

とかけるとき，S は Stieltjes perfect であるという．これらの定義において一意性が仮定されないとき，S はそれぞれ semiperfect, Stieltjes semiperfect であるという．これまで知られていた例では，perfectness と Stieltjes perfectness の成立・不成立がほぼ一致していた．従っ

て, この二つの概念が一致するのではないか, というのがこの研究が始まって以来の予想であった.

§2. 主要結果

可換 $*$ 半群が単位元をもつ場合, 上の予想は正しいことが確かめられた. つまり,

Theorem 1. 単位元をもつ可換 $*$ 半群が perfect であることと, Stieltjes perfect であることは同値である.

Remark. semiperfectness と Stieltjes semiperfectness が同値かどうかを考えることは自然なことであるが, 互いに含まれない異なる概念であることが知られている ([B11]).

それでは, 可換 $*$ 半群が単位元を含まない場合, 同様のことがいえるだろうか. その前に, 可換 $*$ 半群が単位元を含む場合と含まない場合の perfectness の関係について振り返ってみると, 次の結果が知られている.

Theroem([S4]). S が perfect であるなら, $\widetilde{S}$ も perfect である. $S = S + S$ の条件下では逆も成立する.

Example([S4]). 上の定理で $S = S + S$ の条件は必要不可欠である. 実際, $(\mathbb{Q}_+ \cap [1, \infty)) \cup \{0\}$ は perfect であるが, $\mathbb{Q}_+ \cap [1, \infty)$ は perfect にならない.

$\widetilde{S}$ の perfectness と同値になるような S の概念として quasi-perfectness が次のように定義される. $N \geqq 3$ とし, 正定値関数 $\varphi : \overbrace{S + \cdots + S}^{N} \to \mathbb{C}$ が必ず $\mathcal{A}(S^*)$ 上で定義された測度 μ によって一意的に

$$\varphi(s) = \int_{S^*} \rho(s) d\mu(\rho), \quad s \in \overbrace{S + \cdots + S}^{N}$$

とかけるとき, S は quasi-perfect であるという. この定義は N によらないことが知られている. このことに関して次の定理は既知.

Theorem([BS1]). $\widetilde{S}$ が perfect であることと S が quasi-perfect であることは同値である.

quasi-perfect である可換 $*$ 半群 S にどのような条件を加えれば, S が perfect であることと同値になるであろうか. このことに関して下の結果が知られているが, その前にいくつかの定義をする. S 上の関数 φ が singular であるとは, $S + S + S$ 上で $\varphi \equiv 0$ であるときをいう. S 上の nonzero, singular な正定値関数が存在しないとき, S は flat であるという.

Theorem([B12]). S が perfect であることと, quasi-perfect かつ flat であることは同値である.

可換 $*$ 半群が単位元を含まない場合の本来の問題に戻ろう. S が単位元をもたない場合, perfectness から Stieltjes perfectness は導出されない. Stieltjes perfectness と同値になるような次の追加条件が必要になる.

Definition. S 上の関数 φ が Stieltjes singular であるとは, $S + S$ 上で $\varphi \equiv 0$ であるときをいう. S 上の nonzero, Stieltjes singular な完全正定値関数が存在しないとき, S は Stieltjes flat であるという.

Theorem 2. S が Stieltjes flat かつ perfect であることと Stieltjes perfect であることは同値である.

Example. 上の定理で Stieltjes flat の条件は必要不可欠である. 実際, $\mathbb{Q}_+ \cap (1, \infty)$ は perfect であるが, Stieltjes flat ではなく, Stieltjes perfect にもならない.

同値関係 $s \sim t$ を, "$\forall \sigma \in S_+^*, \sigma(s) = \sigma(t)$" で考え, $\omega(S) := S/\sim$ とする. このとき次の系が導かれる.

Corollary. S が perfect であることと, $\omega(S)$ が quasi-perfect かつ S が flat であることは同値である.

Remark. $\omega(S)$ は archimedes component とよばれる性質をもつ互いに素な部分半群の和集合としてかくことが出来る. この部分半群は有理線型空間の部分半群として埋め込むことが出来る. 従って, 一般の可換 $*$ 半群の perfectness を特徴づける問題は, flatness を棚上げして考えれば, 有理線型空間の部分半群の quasi-perfectness を特徴づける問題に帰着することがわかる.

§3. 完全性の十分条件

$\mathbb{Q}$ の稠密な部分群 G を考える. 有理線型空間の部分集合 M が G-conelike であるとは

$$\forall s \in M, \exists \alpha(s) \geqq 0 \quad \text{s.t.} \quad \alpha \in G, \alpha \geqq \alpha(s) \Rightarrow \alpha s \in M$$

が成り立つときをいう. 我々は以前に次の結果を示していた.

Theorem([NiS] もっと一般に [FS2]). 単位元をもつ $\mathbb{Q}^k$ の中の可換 $*$ 半群 S が $\mathbb{Q}$-conelike なら, S は perfect である.

この結果は次元に関係しないことを得た. また, 一般の線型空間も有理線型空間とみれるので, 有理線型空間での結果が本質的である.

Theorem 3. 有理線型空間の中の可換 $*$ 半群 S が G-conelike であるなら, S は quasi-perfect である.

任意の $s \in S$について, $m + n \geqq 2$, $s = mt + nt^*$ をみたす $t \in S$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ が存在するとき, S は $*$-divisible であるという. 次の結果が知られていた.

Theorem([BR] もっと一般に [BS1]). S が $*$-divisible であるなら perfect である.

この方向で次の結果を得た.

Definition. 任意の $s \in S$ について, $m + n \geqq 2$, $s + s^* = s + mt + nt^*$ をみたす $t \in S$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ が存在するとき, S は semi-$*$-divisible であるという.

Theorem 4. S が semi-$*$-divisible であるなら perfect である.

Example. 上の条件を $s + s^* + s = s + s^* + mt + nt^*$ にかえた場合, 定理は成立しない. 実際, $3a = 4a$ となる a で生成される可換半群 $S = \{a, 2a, 3a\}$ では, 任意の $s \in S$ について $3s = 5s$ であるが, perfect にならない.

しかしながら, S が単位元をもつ場合には次の定理がいえる.

Theorem 5. 単位元をもつ S の各元 $s \in S$ について

$$\exists t \in S,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \exists m, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{s.t.} \quad m + n \geqq 2, s + p(s + s^*) = p(s + s^*) + mt + nt^*$$

が成り立つとき, S は perfect である.

§4. 参考までに

これらの研究の端緒となったのはコペンハーゲン大学の C. Berg 教授らによる著作 [BeCR] である. その後の発展は [Be1], [Be2], [S3] 等により見ることが出来る. 古典的なモーメントに関する文献は [A], [ShT] などがよく引用される. archimedes component などの半群論に関する文献として [ClP], [T] などがある. perfect 半群に関する他の論文として [B2], [B5], [B7], [B8], [B10], [NaS] などが, semiperfect 半群に関する他の論文として [B1], [B6], [B9], [B13], [B14], [S2] などがある. 作用素値の semiperfect 半群に関する論文として [B3], [B4], [FS1] などがある. conelike 半群については [R] を, divisible 半群については [S1] を参考にするとよい.

[参考文献]

[A] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1965.

[Be1] C. Berg, The multidimensional moment problem and semigroups, In "*Moments in Mathematics*" (Editor H. J. Landau), pp. 110–124, American Mathematical Society, Providence - Rhode Island, 1987.

[Be2] C. Berg, Positive definite and related functions on semigroups, In "*The Analytical and Topological Theories of Semigroups. Trends and Development*" (Eds. K. H. Hofmann, J. D. Lawson and J. S. Pym), pp. 253–278, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1990.

[BeCR] C. Berg, J. P. R. Christensen and P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups. Theory of Positive Definite and Related Functions*, Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1984.

[B1] T. M. Bisgaard, The two-sided complex moment problem, Ark. Mat. **27**(1989), 23-28.

[B2] T. M. Bisgaard, Characterization of perfect involution groups, Math. Scand. **65** (1989), 245-258.

[B3] T. M. Bisgaard, Positive definite operator sequences, Proc. Amer. Math. Soc. **121**(1994), 1185-1191.

[B4] T. M. Bisgaard, Extensions of Hamburger's theorem, Semigroup Forum **57**(1998), 397-429.

[B5] T. M. Bisgaard, On perfect semigroups, Acta Math. Hunger. **79**(1998), 269-294.

[B6] T. M. Bisgaard, Semiperfect countable C-finite semigroups S satisfying $S = S + S$, Math. Ann. **315**(1999), 141-168.

[B7] T. M. Bisgaard, On perfect involution groups, Comm. Math. Univ. Sct. Pauli. **49**(2000), 15-21.

[B8] T. M. Bisgaard, If $S \times T$ is semiperfect, is S or T perfect ?, Hokkaido Math. J. **29**(2000), 523-529.

[B9] T. M. Bisgaard, Semiperfect countable $\mathbb{C}$-separative C-finite semigroup, Collect. Math. **52**(2001), 55-73.

[B10] T. M. Bisgaard, On perfect subsemigroups of $\mathbb{Q}_+$, Acta Math. Hungar., to appear.

[B11] T. M. Bisgaard, Stieltjes moment problem on semigroups, Czech. Math. J., to appear.
[B12] T. M. Bisgaard, A note on factoring of positive definite functions on semigroups, Math. Nachr., to appear.
[B13] T. M. Bisgaard, Semiperfect finitely generated abelian semigroups without involution, Math. Scand., to appear.
[B14] T. M. Bisgaard, New examples of semiperfect semigroups based on a converse homomorphism theorem, Forum Math., to appear.
[BR] T. M. Bisgaard and P. Ressel, Unique disintegration of arbitrary positive definite functions on $*$-divisible semigroups, Math. Z. **200**(1989), 511-525.
[BS1] T. M. Bisgaard and N. Sakakibara, A reduction of the problem of characterizing perfect semigroups, Math. Scand., to appear.
[BS2] T. M. Bisgaard and N. Sakakibara, Stieltjes perfect semigroups are perfect, submitted.
[ClP] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*. Vol. I, American Mathematical Society, Providence - Rhode Island, 1961.
[FS1] K. Furuta and N. Sakakibara, Operator moment problems on abelian $*$-semigroups, Math. Japon. **51**(2000), 433-441.
[FS2] K. Furuta and N. Sakakibara, Radon perfectness of conelike $*$-semigroups in $\mathbb{Q}^{(\infty)}$, Acta Math. Hungar. **91**(2001), 1-8.
[NaS] Y. Nakamura and N. Sakakibara, Perfectness of certain subsemigroups of a perfect semigroup, Math. Ann. **287**(1990), 213–220.
[NiS] K. Nishio and N. Sakakibara, Perfectness of conelike $*$-semigroups in $\mathbb{Q}^k$, Math. Nachr. **216**(2000), 155-167.
[R] P. Ressel, Bochner's theorem for finite-dimensional conelike semigroups, Math. Ann. **296**(1993), 431-440.
[S1] N. Sakakibara, The moment problem on divisible abelian semigroups, Hokkaido Math. J. **19**(1990), 45-53.
[S2] N. Sakakibara, Moment problems on subsemigroups of $\mathbb{N}_0^k$ and $\mathbb{Z}^k$, Semigroup Forum **45**(1992), 241-248.
[S3] 榊原　暢久, 可換＊半群上のモーメント問題, １９９４年度実解析セミナー報告集, 101-117.
[S4] N. Sakakibara, Perfectness and semiperfectness of abelian $*$- semigroups without zero, Hokkaido Math. J. **24**(1995), 113–125.
[ShT] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, Providence - Rhode Island, 1943.
[T] 田村孝行, 半群論, 共立出版, 1972.

Hyperbolicity of a polynomial associated with a trigonometric polynomial
三角多項式に伴う２変数多項式の双曲性

Hiroshi Nakazato 中里　博

abstract We associate a ternary real form $F(t,x,y)$ of degree $2m$ with a complex trigonometric polynomial $\phi(\theta) = c_{-m}\exp(-i\,m\theta) + \ldots + c_0 + \ldots + c_m \exp(i\,m\theta)$ so that the equation $F(1, \Re(\phi(\theta)), \Im(\phi(\theta))) = 0$ holds for $0 \leq \theta \leq 2\pi$. The author gives a sufficient condition for the form $F(t,x,y)$ to be hyperbolic with respect to $(1,0,0)$. A sufficient condition is given by

$$\sum_{j=-m}^{m-1} |c_j| < |c_m|.$$

1　1 変数の三角多項式に伴う 2 変数多項式

次のような複素係数の 1 変数三角多項式 $p(\theta)$:

$$\phi(\theta) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \exp(i\,k\,\theta)$$
$$= c_{-m}\exp(-i\,m\,\theta) + c_{-m+1}\exp(-i\,(m-1)\,\theta) + \ldots + c_0 + \ldots + c_m \exp(i\,m\,\theta)$$

に対して 3 変数 $2m$ 次同次実多項式 $F(t,x,y)$ を対応させることを考える。まず、実アフィン平面 $\mathbf{R}^2$における曲線 C_ϕを次のように定義する:

$$C_\phi = \{(x(\theta), y(\theta)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

ここで、

$$x(\theta) = \Re(\phi(\theta)) = \Re(c_0) + \sum_{k=1}^{m}\{\Re(c_k) + \Re(c_{-k})\}\cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{m}\{-\Im(c_k) + \Im(c_{-k})\}\sin(k\theta),$$

$$y(\theta) = \Im(\phi(\theta)) = \Im(c_0) + \sum_{k=1}^{m}\{\Im(c_k) + \Im(c_{-k})\}\cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{m}\{\Re(c_k) - \Re(c_{-k})\}\sin(k\theta).$$

さて三角多項式$\phi(\theta)$ に $2m$ 次同次 3 変数多項式 $F(t,x,y)$ を 曲線 $F(1,x,y)=0$ が曲線 C_ϕ に一致するように定めよう。曲線 C_ϕから 多項式 $F(1,x,y)$ を得るために次のような表記を用いる

$$x(\theta) = H_1(\cos\theta, \sin\theta), \quad y(\theta) = H_2(\cos\theta, \sin\theta)$$

ここで $H_1(u,v), H_2(u,v)$ は不定元 u,v についての m 次以下の多項式である。 $s=\tan(\theta/2)$ と置く。このとき、 $\cos\theta = (1-s^2)/(1+s^2), \sin\theta = 2s/(1+s^2)$ が成立し、従って

$$A_1(s:x) = -(1+s^2)^m x + (1+s^2)^m H_1(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}) = 0,$$

$$A_2(s:y) = -(1+s^2)^m y + (1+s^2)^m H_2(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}) = 0$$

となる。上の 2 つの等式の左辺は、係数$\lambda_j x + \mu_j$ あるいは $\nu_j y + \xi_j$をともなった、不定元 s の多項式である。多項式 $F(1,x,y)$ を、 $A_1(s:x)$ と $A_2(s:y)$ の不定元 s に関する終結式 resultant として求めることができる。多項式 $F(1,x,y)$ の x についての次数は $2m$ 以下であり、y についての次数も $2m$ 以下である。 多項式 $F(1,x,y)$ の x,y 全体についての次数も $2m$ 以下となる。ここで終結式についての基本的な性質についてふりかえる。 2 つの ℓ次多項式 f,g を次のように与える:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\ell} \alpha_k s^{\ell-k} = \alpha_0 s^\ell + \alpha_1 s^{\ell-1} + \ldots + \alpha_\ell,$$

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k s^{\ell-k} = \beta_0 s^\ell + \beta_1 s^{\ell-1} + \ldots + \beta_\ell,$$

ここで、係数 α_k, β_k は標数 0 の整域の元とし、$\alpha_0 \neq 0$ とする。f と g の s に関する終結式 $R(f,g)$ は次のような $2\ell \times 2\ell$行列 $\tilde{R}(f,g)$ の行列式である。

$$\tilde{R}(f,g) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\ell-1} & \alpha_\ell & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{\ell-2} & \alpha_{\ell-1} & \alpha_\ell & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_{\ell-1} & \alpha_\ell \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{\ell-1} & \beta_\ell & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{\ell-2} & \beta_{\ell-1} & \beta_\ell & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_{\ell-1} & \beta_\ell \end{pmatrix}.$$

と置けば、Σ_0 は、$\mathbf{R}^2$ の凸集合である。

正方行列の数域を問題にするとき、上記のような開凸集合の閉包として定義される閉凸集合とその極集合が深く関係する。まず、エルミット行列の固有値がつねに実数であることより、次のことが成り立つことが容易にわかる。

命題 A を、$m \times m$ 複素正方行列 とするとき、3 変数同次実多項式 $p(t,x,y)$ を、

$$p(t,x,y) = \det(t\, I_m + (x/2)(A + A^*) - i\,(y/2)(A - A^*))$$

で定めるとき、p は、$(1,0,0)$ に関して双曲的である。

さて、 m を正の整数とし、複素係数の三角多項式

$$\phi(\theta) = \sum_{j=-m}^{m} c_k\ \exp(i\,k\,\theta)$$

が不等式 $|c_{-m}| + \ldots + |c_0| + \ldots + |c_{m-1}| < |c_m|$ を満たすとする。このとき、対応する実形式 $F(t,x,y)$ は条件 $F(1,0,0) \neq 0$ を満たす。 さて、不等式

$$B_\phi(\theta) = \Re((\sum_{k=-m}^{m} k\, c_k \exp(i\,k\theta))(\sum_{p=-m}^{m} \overline{c_p} \exp(-i\,p\theta)) > 0$$

が任意の $0 \leq \theta, \eta \leq 2\pi$ に対して成り立つような十分条件を F の双曲性の証明に用いよう。 まず、次のような等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &B_\phi(\theta) \\ &= m\,\Re(\{c_m + (m-1)/m\, c_{m-1} \exp(-i\,\theta) + \ldots - (m-1)/m\, c_{-m+1} \exp(-(2m-1)\theta) \\ &\quad -m\, c_{-m} \exp(-2m\theta)\}\{\overline{c_m} + \overline{c_{m-1}} \exp(i\eta) + \ldots + \overline{c_{-m}} \exp(2i\, m\theta)\}). \end{aligned}$$

さて、 λ を正の実数とし、係数 $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_{-m}$ が次の不等式

$$|\sum_{k=-m}^{m-1} c_k| = |c_{-m} + \ldots + c_0 + \ldots + c_{m-1}| < \lambda\, |c_m|,$$

を満たすとする。このとき、係数 $k/m\, c_k$は次の不等式を満たす:

$$|\sum_{k=-m}^{m-1} (k/m)\, c_k| = |-c_{-m} - (m-1)/m\, c_{-m+1} - \ldots + (m-1)/m\, c_{m-1}| < \lambda\, |c_m|.$$

次の補題を準備する。

終結式 $R(f,g)$ は、次のように表わされる:

$$R(f,g)=\sum n(k_0,\ldots,k_\ell,h_0,\ldots,h_\ell)\alpha_0^{k_0}\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_\ell^{k_\ell}\beta_0^{h_0}\beta_1^{h_1}\cdots\beta_\ell^{h_\ell}$$

ここで係数 $n(k_0,\ldots,k_\ell,h_0,\ldots,h_\ell)$ は整数であり、巾の指数 $k_0,\ldots,k_\ell,\ h_0,\ldots,h_\ell$ は非負の整数である。上の総和における各項は、等式条件

$$k_0+k_1+\ldots+k_\ell=\ell,\quad h_0+h_1+\ldots+h_\ell=\ell,$$

および次のような不等式を満たす:

$$k_0+h_0\le\ell,\quad k_1+h_1\le\ell,\ldots,k_\ell+h_\ell\le\ell.$$

2　2変数多項式（3変数同次多項式）の双曲性

3変数同次多項式 $p(\xi)=p(t,x,y)$:

$$p(\xi)=\sum_{i+j+k=m}a_{i,j,k}t^i\,x^j\,y^k.$$

の双曲性を次のように定める。まず、ベクトル $v_0=(1,0,0)$ に対して、

$$p(v_0)=a_{m,0,0}\neq 0$$

であるとき、p は、v_0方向に非特性的であるという。v_0方向に非特性的である p に対して、各 $\xi in\mathbf{R}^3$ に対して、m 個の実数 $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_m(\xi)$ が存在して、

$$p(t,x,y)=\ p(1,0,0)\prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j(\xi))$$

となるとき、p は、v_0方向に（あるいは、$(1,0,0)$ に関して）双曲的 (型） hyperbolic with respect to v_0 であるという。上記において、 $\lambda_j(k\,\xi)=k\,\lambda_j(\xi)$ が、各λ_j および、$k>0$ に対して成り立つ。特に、$\xi=(t,x,y)$ に対し、 $(x,y)\neq(0,0)$ であるとき、 $\lambda_i(\xi)\neq\lambda_j(\xi)$ が成り立つとき、p は、狭義双曲的 strictly hyperbolic であるという ([Nu] 参照。双曲的な多項式に関する種々の基本的性質 が、[A-B-G] で証明されている。例えば、

定理 [Atiyah-Bott-Gårding] 3変数同次実多項式 $p(t,x,y)$ は、$(1,0,0)$ に関して双曲的であるとする。このとき、 集合 $\{(t,x,y)\in\mathbf{R}^3:p(t,x,y)\neq 0\}$ の $(1,0,0)$ を含む連結成分を、Σ とし、

$$\Sigma_0=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:(1,x,y)\in\Sigma\}$$

補題 2.1 ℓ **を正の整数とする。次の 2 つの三角多項式**

$$\psi_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \exp(-i\,k\theta) = a_0 + a_1 \exp(-i\,\theta) + \ldots + a_\ell \exp(-i\,\ell\theta),$$

$$\psi_2(\theta) = \sum_{p=0}^{\ell} b_k \exp(i\,p\eta) = b_0 + b_1 \exp(i\,\eta) + \ldots + b_\ell \exp(i\,\ell\eta),$$

が 等式 $b_0 = \overline{a_0}$ および不等式

$$\sum_{k=1}^{\ell} |a_k| = |a_1| + \ldots + |a_\ell| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a_0|,$$

$$\sum_{p=1}^{\ell} |b_p| = |b_1| + \ldots + |b_\ell| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,|b_0|,$$

を満たすならば、不等式

$$B_{\psi_1,\psi_2}(\theta,\eta) = \Re((\sum_{k=0}^{\ell} a_k \exp(-i\,k\theta))(\sum_{p=0}^{\ell} b_p \exp(i\,p\theta)) > 0$$

が任意の $0 \le \theta, \eta \le 2\pi$ に対して成り立つ。

[証明] $a_0 = b_0 = 1$ と仮定してよい。この仮定の下で、等式

$$B_{\psi_1,\psi_2}(\theta,\eta) = \Re((1 + z(\theta))\,(1 + w(\eta)))$$

を満たすような、$|z(\theta)| < (1/\sqrt{2})$, $|w(\theta)| < 1/\sqrt{2}$ である $z(\theta)$, $w(\eta)$ が存在する。従って $\Re((1 + z(\theta))(1 + w(\eta))) > 0$ が成り立つ。

次のような例を

$$\phi(\theta) = \exp(2i\theta) + g\exp(-i\theta)$$

考えよう。ただし、$-1 < g < 1$ とする。関数 $B_\phi(\theta,\eta)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} B_\phi(\theta,\eta) &= \Re((2 - g\exp(-3i\theta))(1 + g\exp(3i\eta)) \\ &= 2 + 2g\,\cos(3\eta) - g\,\cos(3\theta) - g^2\,\cos(3\theta - 3\eta). \end{aligned}$$

このとき、$B_\phi(\theta)$ は $B_\phi(\theta,\theta)$ で与えられ $B_\phi(\theta) \ge 2 - |g| - g^2 > 0$ となる。しかし、$B_\phi(\theta,\eta)$ はつねに正というわけではない。$g = 99/100$ とする。このとき、$B_\phi(7\pi/8, 15\pi/16)$ は負であって、その近似値が -0.0823766 で与えられる。

補題 2.1 より、三角多項式 $\phi(\theta)$ が次の条件を満たすとき、関数 $B_\phi(\theta)$ は正である

$$\sum_{k=-m}^{m-1} |c_k| = |c_{-m}| + \ldots + |c_0| + \ldots + |c_{m-1}| < \frac{1}{\sqrt{2}} |c_m|.$$

これより、次の定理も証明される。

定理 2.2 複素三角多項式

$$\phi(\theta) = \sum_{j=-m}^{m} c_k \exp(i\, k\, \theta)$$

が不等式

$$\sum_{k=-m}^{m-1} |c_k| < \frac{1}{\sqrt{2}} |c_m|$$

を満たすと仮定する。このとき、対応する $2m$ 次 3 変数実多項式 $F(t,x,y)$ は、$(1,0,0)$ に関して双曲的である。

[証明] 係数 $c_m = 1$ と仮定してよい。三角多項式$\phi(\theta)$ に伴うアフィン曲線 $F(1,x,y) = 0$ を考える。それは、次のように媒介変数表示される：

$$z(\theta) = x(\theta) + i\, y(\theta) = \exp(i\, m\, \theta) + \sum_{k=-m}^{m-1} c_k \exp(i\, \theta)$$

($0 \leq \theta \leq 2\pi$)。その偏角 $\mathrm{Arg}(z(\theta))$ について考える:

$$\mathrm{Arg}(z(\theta)) = \Im(\mathrm{Log}(z(\theta)).$$

これについて、次のような方程式が成り立つ:

$$\frac{d\mathrm{Arg}(z(\theta))}{d\theta} = \Im(\frac{z'(\theta)}{z(\theta)}),$$

$$= \Re(\frac{m\, c_m \exp(i\, m\theta) + \ldots + (-m)c_{-m} \exp(-i\, m\, \theta)}{c_m \exp(i\, m\theta) + \ldots + c_{-m} \exp(-i\, m\theta)})$$

$$= \frac{1}{|c_m \exp(i\, m\theta) + \ldots + c_{-m} \exp(-i\, m\theta)|^2} \times \Re(L(\theta)),$$

ここで

$$\Re(L(\theta)) = \Re((\sum_{k=-m}^{m} k\, c_k \exp(i\, k\theta))(\sum_{p=-m}^{m} \overline{c_p} \exp(-i\, p\theta)))$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \sum_{p=-m}^{m} \Re(c_k \overline{c_p} k \exp(i\,(k-p)\theta) = B_\phi(\theta).$$

補題 2.1 の下の註より, $\Re(L(\theta)) > 0$ が任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対し成り立つ。角 θが 0 より 2π まで変動するとき、変数 $\mathrm{Arg}(z(\theta))$ は $\mathrm{Arg}(z(0))$ より $\mathrm{Arg}(z(0)) + 2m\pi$ まで変動する、すなわち 複素変数 $z(\theta)$ の原点 0 のまわりの回点数は m はである。このことは次の方程式より得られる:

$$\int_{0\le\theta\le 2\pi} d\mathrm{Arg}(z(\theta)) = \int_{0\le\theta\le 2\pi} d\mathrm{Arg}(\exp(i\,m\theta)) + \int_{0\le\theta\le 2\pi} d\mathrm{Arg}(z(\theta)/\exp(i\,m\theta))$$

$$= 2m\pi + 0 = 2m\pi,$$

ここで $z(\theta)/\exp(i\,m\theta)$ は任意の $0 \le \theta \le 2\pi$ に対し領域 $\{w \in \mathbf{C} : |w-1| < 1/\sqrt{2}\}$ に属する。このことは、変数 $z(\theta)/\exp(i\,m\theta)$ の $0 \le \theta 2\pi$ に対する 0 のまわりの回点数が 0 であることを示している。従って $F(1, s\cos\theta, s\sin\theta) = 0$ という s についての方程式は各 $\theta \in \mathbf{R}$ に対して $2m$ 個の 0 でない実数解を持つことがわかる。従って形式 $F(t,x,y)$ は $(1,0,0)$ に関して双曲的である。（証明終了）

References

[A-B-G] M. F. Atiyah, R. Bott, L. Gårding : Lacunas for Hyperbolic Differential Operators with Constant Coefficients, I. Acta Math. **124**(1970), pp. 109-189.

[Nu] W. Nuij : A note on hyperbolic polynomials, Math. Scand. **23**(1968), pp. 69-72.

Topics of Hyers-Ulam Stability and Differential Operators

高橋眞映（Sin-Ei Takahasi, Yamagata University）
三浦　毅（Takeshi Miura, Yamagata University）
宮島静雄（Shizuo Miyajima, Science University of Tokyo）

Abstract. We introduce a new Hyers-Ulam stability of mappings and consider Hyers-Ulam stabilities of a Banach space-valued linear differential equation and the corresponding linear differential operator. The results presented in our topics extend and improve the correponding results of the earlier paper [4].

１．序論

暗箱 f にデータ x を入力して、ねらった値 a を出力させようとしても、緊張してなかなかできるものではない。しかしもし出力値 $f(x)$ が a に非常に近かったら、データ x を少しだけ修正すれば、ねらった値 a をぴったり出力することができるかと言う願望がある。この願望を式で表示すれば、大体以下となろう：

$$f(x) \doteqdot a \;\Rightarrow\; \exists ? x_a : f(x_a) = a \text{ and } x_a \doteqdot x.$$

１９４０年 S. M. Ulam [5] はこの願望を加法的写像について取り上げ、次のような問題を提起した：

Under what conditions does there exist an additive mapping near an approximately additive mapping?

これに対して、D. H. Hyers [2] は翌年次のような解答を与えている：

Given two Banach spaces X, Y and $\varepsilon > 0$, if $T : X \to Y$ is a mapping satisfying $\|T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2\| \le \varepsilon$ for all $x_1, x_2 \in X$, then there exists a unique additive mapping $L : X \to Y$ such that $\|Tx - Lx\| \le \varepsilon$ for all $x \in X$.

彼の定理は我々の願望と一見違うように見えるが、次のように考えれば全く同じものであることが分かる。

実際、先ず $\boldsymbol{X} = M(X, Y)$ を X から Y への写像全体の作る線形空間とする。次にベクトル場の考え方を用いるため、$\boldsymbol{Y} = Y^{X \oplus X}$ を $X \oplus X$ から Y への写像全体の作る線形空間とする。次にそれぞれの線形空間上に次のようなゲージ関数を導入する：

$$\rho_{\boldsymbol{X}}(f) = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} \quad (f \in \boldsymbol{X})$$

and

$$\rho_{\boldsymbol{Y}}((y_{(a,b)})) = \sup\{\|y_{(a,b)}\| : (a, b) \in X \oplus X\} \quad ((y_{(a,b)}) \in \boldsymbol{Y}).$$

そこで各 $(a, b) \in X \oplus X$ に対して

$$T_{(a,b)}(f) = f(a + b) - f(a) - f(b) \quad (f \in \boldsymbol{X})$$

と定義する。このとき各 $T_{(a,b)}$ は $\boldsymbol{X}$ から Y への線形写像となるが、それらの作るベクトル場 T:

$$T(f) = \left(T_{(a,b)}(f)\right)_{(a,b) \in X \oplus X} \quad (f \in \boldsymbol{X})$$

はまた $\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{Y}$ への線形写像となる。このとき次の２つの同値式が成り立つことに注意す

る：

$$\left\| f(a+b) - f(a) - f(b) \right\| \le \varepsilon \ (\forall a, b \in X) \ \Leftrightarrow \ \rho_Y(Tf) \le \varepsilon$$

and

$$f \in \boldsymbol{X} \text{ is additive } \Leftrightarrow \ Tf = 0.$$

それ故次の２つの命題は同値である。

(1) If $f : X \to Y$ is a mapping satisfying $\left\| f(a+b) - f(a) - f(b) \right\| \le \varepsilon$ for all $a, b \in X$, then there exists an additive mapping $f_0 : X \to Y$ such that $\left\| f(x) - f_0(x) \right\| \le \varepsilon$ for all $x \in X$.

(2) If $f \in \boldsymbol{X}$ satisfies that $\rho_Y(Tf) \le \varepsilon$, then there exists an element $f_0 \in \boldsymbol{X}$ with $Tf_0 = 0$ and $\rho_X(f - f_0) \le \varepsilon$.

従って彼の定理は我々の願望と全く同じものであることが分かる。そこで我々はもっと一般的な定義を与えよう：

Definition 1. Let (X, ρ_X) and (Y, ρ_Y) be linear spaces with gauge functions ρ_X, ρ_Y ($\rho_X : X \to [0, \infty]$ and $\rho_Y : Y \to [0, \infty]$). Let $T : X \to Y$ be a mapping. Given $a \in T(X)$, an equation $Tx = a$ is said to have a Hyers-Ulam stability (simply, HUS) if there exists $K \ge 0$ such that for any $\varepsilon > 0$ and $x \in X$ such that $\rho_Y(Tx - a) \le \varepsilon$, one can find an element $x_0 \in X$ with $Tx_0 = a$ and $\rho_X(x - x_0) \le K\varepsilon$. Let $K_{T,a}$ be the inf of such K and we call it the HUS constant of $Tx = a$.

注意：上の定義に従うと、Hyers の定理は、結局上述の線形写像T に対して、方程式 $Tf = 0$ が HUS を持ち、その定数は１以下であることを主張している。但し一意性は除く。

１９９８年 C. Alsina と R. Ger [1] は微分作用素に関する HUS 問題に着目し、実数値関数の微分方程式 $u'(t) = u(t)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ は HUS を持ちその HUS 定数は少なくとも３以下であることを示した。その後講演者達 [4] は、これを精密化し、複素 Banach 空間値関数の微分方程式 $u'(t) = \lambda u(t)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ が HUS を持つための必要条件は $\mathrm{Re}\,\lambda \ne 0$ であり、このときその HUS 定数は $\left| \mathrm{Re}\,\lambda \right|^{-1}$ であることを示した。

さて上の定義は方程式に関する HUS であるが、方程式を構成する写像そのものの HUS が定義されても良いであろう。それを次に掲げる：

Definition 2. Given (X, ρ_X) and (Y, ρ_Y) be linear spaces with gauge functions ρ_X, ρ_Y ($\rho_X : X \to [0, \infty]$ and $\rho_Y : Y \to [0, \infty]$), a mapping $T : X \to Y$ is said to have a HUS if there exists $K \ge 0$ such that for any $a \in T(X)$, $\varepsilon > 0$ and $x \in X$ such that $\rho_Y(Tx - a) \le \varepsilon$, one can find an element $x_0 \in X$ with $Tx_0 = a$ and $\rho_X(x - x_0) \le K\varepsilon$. Let K_T be the inf of such K and we call it the HUS constant of T.

定義からもし$T : X \to Y$ が HUS を持てば、各$a \in T(X)$ に対して、方程式 $Tx = a$ も HUS を持つことは明らかである。その意味で前者の方が後者より強い条件である。

２．結果

ここでは線形微分方程式及び線形微分作用素の HUS に関する得られた結果を紹介することが目的である。

先ず複素 Banach 空間X 及び複素数値連続関数$h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ が与えられたとき、１階線形微分作用素：

$$T_h : C^1(\boldsymbol{R}, X) \to C(\boldsymbol{R}, X), \ (T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t) \ \ (t \in \boldsymbol{R})$$

が HUS を持つための条件を考える。そのため次のような上限を定義する：

$$C_h \equiv \sup_{t\in R}\int_t^{\infty}\left(\exp\int_t^s \operatorname{Re} h(\tau)d\tau\right)ds < \infty \text{ and } D_h \equiv \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\left(\exp\int_t^s \operatorname{Re} h(\tau)d\tau\right)ds < \infty.$$

このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 1. If either $C_h < \infty$ or $D_h < \infty$, then $T_h : C^1(\boldsymbol{R}, X) \to C(\boldsymbol{R}, X)$ has a HUS and $K_{T_h} \le \min(C_h, D_h)$.

上の定理から次の系が導かれる。

Corollary 1. Let $\lambda \in C$ be such that $\operatorname{Re}\lambda \ne 0$ and set $T_\lambda(u) = u' + \lambda u$ for each $u \in C^1(\boldsymbol{R}, X)$. Then $T_\lambda : C^1(\boldsymbol{R}, X)) \to C(\boldsymbol{R}, X)$ has a HUS and $K_{T_\lambda} = \dfrac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}$.

注意：上の系で、$\operatorname{Re}\lambda > 0$ なら $K_{T_h} = D_h$、$\operatorname{Re}\lambda < 0$ なら $K_{T_h} = C_h$ が言えるので、定理 1 の条件はまずまずのものと思われる。

さて定理 1 の条件を満たす関数 h 達はどのようなものかもっと知りたいが、そのために、次の補題を準備する。

Lemma 1. (1) If $\operatorname{Re} h = \varphi' + \psi'$, where $\varphi'(t) \le -\delta$ $(|t| \ge t_0)$ for some $t_0 > 0$, $\delta > 0$ and $|\psi(t)| \le M$ $(t \in \boldsymbol{R})$ for some $M > 0$, then C_h is finite.

(2) If $\operatorname{Re} h = \varphi' + \psi'$, where $\delta \le \varphi'(t)$ $(|t| \ge t_0)$ for some $t_0 > 0$, $\delta > 0$ and $|\psi(t)| \le M$ $(t \in \boldsymbol{R})$ for some $M > 0$, then D_h is finite.

定理 1 と補題 1 から次の系を得ることができる。

Corollary 2. Suppose that $\operatorname{Re} h = P + f$, where P is a nonzero polynomial with real coefficients and $\int_0^t f(s)ds$ $(t \in \boldsymbol{R})$ is a bounded function on $\boldsymbol{R}$. Let $P(t) = a_0t^n + \cdots + a_n$ $(t \in \boldsymbol{R})$. Then

(1) If n is even, then T_h has a HUS.

(2) If n is odd and $a_0 > 0$, then T_h has a HUS.

(3) If n is odd and $a_0 < 0$, then T_h does not have a HUS.

次の定理は、定数係数線形微分方程式が HUS を持つことと、対応する微分作用素が HUS を持つこととは同値であることを述べ、且つそれらが HUS を持つための必要十分条件を与えたものである。

Theorem 2. Let X be a complex Banach space and $D = d/dt$. Let $P(t)$ be a polynomial with complex coefficients and $\deg P = n$. Then the following conditions are equivalent:

(1) The equation $P(t) = 0$ has no pure imaginary solution.

(2) The differential operator $P(D) : C^n(\boldsymbol{R}, X) \to C(\boldsymbol{R}, X)$ has a HUS.

(3) The diferential equation $P(D)u(t) = 0$ $(t \in \boldsymbol{R})$ has a HUS.

上の定理の証明に対しては、次の 2 つの補題及び系 1 を有効的に用いる：

Lemma 2. If $T : X \to Y$ and $S : Y \to Z$ have a HUS and $T(X) = Y$, then $S \circ T : X \to Z$ also has a HUS and $K_{ST} \le K_T K_S$.

Lemma 3 (cf. [3]). Let $\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}$ be a finite subset of the real group $\boldsymbol{R}$, and let $\varepsilon > 0$ be arbitrary. Then there exists a sequence $\{n_1, n_2, \cdots\}$ of natural numbers such that $n_1 < n_2 < \cdots$ and $|e^{in_k\xi_j} - 1| \le \varepsilon$ $(1 \le j \le m,\ k = 1, 2, \cdots)$.

３．今後

今後は非定数係数の２階線形微分方程式、１階の遅れ型微分方程式などに関する HUS の研究に進んで行きたいと考えている。それと共に興味のあるのは、非線形の場合であるが、これが大変難しく、１階の場合でも HUS を持つものの存在すら分かっていない。例えば、$u'(t) + \sin u(t) = 0$ $(t \in \boldsymbol{R})$ は HUS を持つ候補と考えられるが、実はこれは HUS を持たないことが示される。実際、$u' + \sin u = 0$ が HUS を持たないような $\varepsilon > 0$ は無数に存在する。何故ならば先ず $u' + \sin u = 0$ の解集合は

$$u = 2\tan^{-1}(Ce^{-t}),\ C : \text{arbitrary constant}$$

であることに注意する。今 ρ を任意の正数としたとき、$u = \rho t$ は $\| u' + \sin u \| = \| \rho + \sin u \| \le \rho + 1$ を満たす。もし $u' + \sin u = 0$ が HUS を持つと仮定すると、正数 K が存在して、$\left| \rho t - 2\tan^{-1}(C_\rho e^{-t}) \right| \le K(\rho + 1)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ が成り立つ。従って、$|t| \le \dfrac{K(\rho+1)+\pi}{\rho}$ $(t \in \boldsymbol{R})$ となり、矛盾が生じる。しかしながら HUS の本質は、$\varepsilon > 0$ が十分小さいところにあり、その意味では上の観察は本質的ではない。実際 $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、グラフなどから直感的に $u' + \sin u = 0$ が HUS を持つのではないかと考えたくなる。それで候補と考えた訳であるが、実際は本質的に候補で無かったのである。それを見るために、$u' + \sin u = 0$ は常に HUS を持つと仮定する。今、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して定数関数

$$u = 2\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon^2}}{\varepsilon} \quad (t \in \boldsymbol{R})$$

を考える。このとき、$t_\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{1-3\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ とおくと、$t_\varepsilon = \tan\dfrac{u}{2}$ であるから、$\sin u = \dfrac{2t_\varepsilon}{1+t_\varepsilon^2}$, $\cos u = \dfrac{1-t_\varepsilon^2}{1+t_\varepsilon^2}$ である。更に $t_\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{1-3\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ を逆に解いて、$\varepsilon = \dfrac{2t_\varepsilon}{3+t_\varepsilon^2}$ を得る。このとき容易な計算から、$2\varepsilon + \varepsilon\cos u = \sin u$ を示すことができる。以上から、$\left| u'(t) + \sin u(t) \right| = \left| 2\varepsilon + \varepsilon\cos u(t) \right| \le 3\varepsilon$ $(t \in \boldsymbol{R})$ が成り立つ。従って仮定から、ある正数 K と ε に依存する定数 C_ε が存在して、

$$(\#) \qquad \left| 2\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon^2}}{\varepsilon} - 2\tan^{-1}(C_\varepsilon e^{-t}) \right| \le 3K\varepsilon \quad (t \in \boldsymbol{R},\ 0 < \varepsilon : \text{sufficiently small})$$

が成り立つ。ここで $t \to \infty$ とすれば、(#) は

$$(\#\#) \qquad \left| \tan^{-1}\frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right| \le \frac{3}{2}K\varepsilon \quad (0 < \varepsilon : \text{sufficiently small})$$

を導く。そこで (##) において $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば、$\frac{\pi}{2} \le 0$ を導き矛盾が生じる。

注意：定義１において、「$\rho_X(x - x_0) \le K\varepsilon$」を「$\rho_X(x - x_0) \le \rho(\varepsilon)$ for some positive function $\rho(t)$ with $\lim_{t \downarrow 0} \rho(t) = 0$」に置き換えたもっと弱い意味の HUS を定義しても、方程式：$u' + \sin u = 0$ はそのような HUS も決して持たないことが上の証明から分かる。

参考文献

1. C. Alsina and R. Ger, On some inequalities and stability results related to the exponetial function, J. Inequal. Appl., 2(1998), 373-380.

2. D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27(1941), 222-224.

3. J. Inoue, and S.-E. Takahasi, Constructions of bounded weak approximate identities for Segal * algebras on LCA groups. Acta Sci. Math. (Szeged) 66 (2000), 257--271.

4. S.-E. Takahasi, T. Miura and S. Miyajima, On the Hyers-Ulam stability of a Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$, submitted for publication.

5. S. M. Ulam, "Problems in Modern Mathematics", Chap. VI, Science eds. Wiley, Newyork, 1940.

Hausdorff dimension of Sub-self-similar set and Gibbs measure

Junko Shinmoto[1] and Fukiko Takeo[2]

[1] Master's Reseach Course in Mathematics and Computer Science, Ochanomizu University
[2] Department of Information Sciences, Ochanomizu University

Abstract

A compact set $K \subseteq \boldsymbol{R}^n$ is called sub-self-similar set if $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f_i(K)$, where the f_i are similarity transfunctions. A Fibonacci set, a kind of sub-self-similar sets, has been studied by V. Drobot & J. Turner[1]. Moreover, sub-self-similar sets, where all the ratios of the composition f_i are equal, have been studied by F. Takeo[5]. In this report, by using the Gibbs measure and the pressure in the sense of thermodynamic formarism, we obtain fomulae for Hausdorff dimensions of sub-self-similar sets, where the ratios of the composition f_i are different.

1 Introduction

フラクタルの特徴を表すHausdorff次元については，いろいろな求め方が研究されている．特に，Self-similar setについては，いろいろな角度からの研究がなされている．Self-similar setとは，いくつかの縮小写像 $f_j : \boldsymbol{R}^d \longrightarrow \boldsymbol{R}^d$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ により

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i(K) = K \tag{1.1}$$

を満たすコンパクト集合 K のことである．それに対し，

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i(K) \supseteq K \tag{1.2}$$

を満たすコンパクト集合 K を $\{f_1, \cdots, f_k\}$ に対する **Sub-self-similar set** という．このSub-self-similar setのHausdorff次元を求めるために，写像の繰返し $f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \cdots$ を無限列空間 $E_k^{(\omega)} = \{\underline{x} \in (x_j)_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in \{1, \cdots, k\} \text{ for any } j \in \boldsymbol{N}\}$ と対応させる方法がよく用いられる．それには，$E_k^{(\omega)}$ から $\mathbf{R}^d$ への写像 τ を $z \in \boldsymbol{R}^d$ に対し，

$$\tau(\underline{x}) = \lim_{n \to \infty} f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \cdots \circ f_{x_n}(z) \qquad for\ \underline{x} \in E_k^{(\omega)},$$

とおくと，$z \in \boldsymbol{R}^d$ に依存しないで τ を一意に定義できる．このとき，$\{f_1, \cdots, f_k\}$ に対するSub-self-similar set K に $E_k^{(\omega)}$ の部分空間 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K} = \{\underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid \tau(x_m x_{m+1} \cdots) \in K \quad for\ \forall m \in \boldsymbol{N}\}$$

として対応させ，rank m の cylinder set を $\mathcal{K}_m = \{P_m\underline{x} = (x_1 \cdots x_m) \mid \underline{x} \in \mathcal{K}\}$ とおき，$s \geq 0$ に対し，

$$\theta(s) = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{P_m\underline{x}\in\mathcal{K}_m}\prod_{j=1}^{m} r_{x_j}^{s}\right)^{\frac{1}{m}}$$

と定義するとき，Falconer による Sub-self-similar set K の Hausdorff 次元 $\dim_H K$ に対する次のような定理がある．

定理 A [3]　$f_j : \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}^d$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ を縮小比 r_j $(0 < r_j < 1)$ の縮小相似写像とする．$\boldsymbol{R}^d \supset K$ が $\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$ に対する Sub-self-similar set であり，

$$f_i(V)\bigcap f_j(V) = \emptyset \quad (\ i \neq j\ ) \quad \text{かつ} \quad \bigcup_{i=1}^{k} f_i(V) \subseteq V \tag{1.3}$$

を満たす空でない有界開集合 $V \subset \boldsymbol{R}^d$ が存在するとする．このとき，s を $\theta(s) = 1$ を満たす数とすると，

$$s = \dim_H K$$

が成り立つ．

Sub-self-similar set という言葉は，Falconer が 1995 年の論文 [3] で定義しているが，それ以前にこの Sub-self-similar set の一種である Fibonacci 集合に関しては，V. Drobot & J. Turner[1] が Hausdorff 次元を求めており，Sub-self-similar set で縮小比が全て同じ場合は F. Takeo[5] が研究している．そこで本研究では，縮小比が異なる写像からなる Sub-self-similar set について定理 A とは異なる方法での，Hausdorff 次元の求め方について研究した．それには，cookie-cutter set の Hausdorff 次元を熱力学的な Gibbs measure と Pressure を用いて求める方法 [2] が知られているので，Sub-self-similar set に対してもこの方法を適用して，Hausdorff 次元を求める定理 2 を得た．さらにこの定理を用いて，行列のスペクトル半径から Hausdorff 次元を求める定理 3 も得た．Self-similar set の一種である generalized cookie-cutter Cantor set に対しては T. Nakata[4] により Gibbs measure と Pressure を用いる方法により，Hausdorff 次元を求める研究がなされている．さらに，これらの定理 2, 3 から，$\boldsymbol{R}^d$ の Sub-self-similar set に対する Hausdorff 次元を求める定理 5 も得た．これは，定理 A の開集合条件(1.3) より弱い条件で Hausdorff 次元が求められることを示している．

2 Notations and preliminaries

まず，必要となるいくつかの表記について述べる．

- $E_k^{(\omega)} = \{\underline{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in \{1, \cdots, k\} \text{ for any } j \in \boldsymbol{N}\}$:　無限列からなる空間
- $E_k^{(q)} = \{\underline{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{q} \mid \alpha_j \in \{1, \cdots, k\} \text{ for } 1 \leq j \leq q\}$:　有限列（長さ $q \in \boldsymbol{N}$）からなる空間

- シフト作用素 $\sigma : E_k^{(\omega)} \longrightarrow E_k^{(\omega)}$ を $(\sigma\{\underline{x}\})_i = x_{i+1}$ により定義する.
- 射影作用素 $P_n : E_k^{(\omega)} \longrightarrow E_k^{(\omega)} \quad (n \in \boldsymbol{N})$ を $P_n(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と定義する.
- $0 < r_j \leq 1\ (j = 1, \cdots, k)$ を用いて, $E_k^{(\omega)}$ における距離 d を $\underline{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$, $\underline{y} = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ に対し, $x_j = y_j\ (j = 1, \cdots, n)$ かつ $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ のとき,

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \prod_{j=1}^{n} r_j \tag{2.1}$$

  と定義する
- $q \geq 1$ に対し, $E_k^{(q+1)}$ の有限部分集合 $F = \{\underline{\alpha}^1, \underline{\alpha}^2, \cdots, \underline{\alpha}^l\} \subset E_k^{(q+1)} \quad (l > 1)$ を考える.
- 上記の F に対し, $E_k^{(\omega)}$ の部分空間 $\mathcal{A}(F)$ を

$$\mathcal{A}(F) = \{\ \underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid x_j x_{j+1} \cdots x_{j+q} \in F \quad \text{for } \forall j \in \boldsymbol{N}\ \}$$

  と定義する.
- 上記の F と $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\mathcal{A}(F)$ の元の最初の n 個の列からなる集合を

$$A(F; n) = \{P_n(\underline{x}) \in E_k^{(n)} | \underline{x} \in \mathcal{A}(F)\},$$

- $\underline{\gamma} \in A(F; n)$ に対し, $\underline{\gamma}$ から始まる $\mathcal{A}(F)$ の元の全体を

$$\mathcal{A}(F; \underline{\gamma}) = \{\ \underline{\gamma}\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathcal{A}(F)\ \}$$

  と定義する.

3 Pressure と Gibbs measure

$E_k^{(\omega)}$ に(2.1)で定義した距離を入れると, $(E_k^{(\omega)}, d)$ は完備距離空間となる. この $E_k^{(\omega)}$ 上の連続関数 $C(E_k^{(\omega)})$ の元 φ と $n \in \boldsymbol{N}$ に対し,

$$Var_n \varphi = \sup\{|\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{y})| : x_j = y_j \quad \text{for } j \in [1, 2, \cdots, n]\}$$

と定義する. Hausdorff 次元を求めるにあたり, 必要となる Pressure, Gibbs measure の存在について, Falconer [2] の定理の手法を用い, 次の結果を得た.

定理 1. $\varphi \in C(E_k^{(\omega)})$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Var_n \varphi < \infty$ のとき,

(1) $\displaystyle P(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\underline{\gamma}\in A(F;n)} \exp \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j \underline{\gamma x})$ の極限が存在し, その値は $\underline{x} \in E_k^{(\omega)}$ の取り方によらない.

(2) $E_k^{(\omega)}$上 σ-不変な $Borel$確率測度 μ と, $a_0 > 0$が存在して, 任意の$n \in \boldsymbol{N}$, $\underline{x} \in E_k^{(\omega)}$ と $\underline{\gamma} \in A(F;n)$ に対し,

$$a_0^{-1} \le \frac{\mu(\mathcal{A}(F;\underline{\gamma}))}{\exp(-nP(\varphi) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j \underline{\gamma x}))} \le a_0$$

が成り立つ.

4 数列空間上の部分集合に対するHausdorff 次元

定理1で存在を示したPressureとGibbs measureを用い, Hausdorff次元を求める次の結果を得た.

定理 2. F を $E_k^{(q+1)}$ の有限部分集合とし,

$$\mathcal{A}(F) = \{\ \underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid x_j x_{j+1} \cdots x_{j+q} \in F \quad for\ \forall j \in \boldsymbol{N}\ \}$$

とする. さらに, $g \in C(\mathcal{A}(F))$ に対し, $g(\underline{x}) = \frac{1}{r_j} \quad (if \quad x_1 = j)$ とする. このとき,

$$P(-s\log g) = 0$$

を満たす s が $\mathcal{A}(F)$ のHausdorff次元 $\dim_H \mathcal{A}(F)$ である.

さらに, この定理より, PressureとGibbs measureを用い, 行列のスペクトル半径からHausdorff次元を求めるために, $F \in E_k^{(q+1)}$ の元の最初の q 個の列からなる次のような F' を

$$\begin{aligned} F' &= \{P_q\underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \in F\} \\ &= \{\underline{\beta}^1, \underline{\beta}^2, \cdots, \underline{\beta}^m\} \subset E_k^{(q)}\ , \end{aligned}$$

とし, $m \times m$ の $(0,1)$ 行列 $M = (m_{i,j})$ を

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \exists\underline{\alpha} \in F \quad s.t. \quad P_q\underline{\alpha} = \underline{\beta}^i \in F' \text{ かつ } \sigma\underline{\alpha} = \underline{\beta}^j \in F' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.1}$$

と定義する. さらに, $m \times m$ 行列 R_s を

$$R_s = \begin{pmatrix} r_{\beta_r^1}^s & r_{\beta_r^2}^s & \cdots & r_{\beta_r^m}^s \\ r_{\beta_r^1}^s & r_{\beta_r^2}^s & \cdots & r_{\beta_r^m}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\beta_r^1}^s & r_{\beta_r^2}^s & \cdots & r_{\beta_r^m}^s \end{pmatrix}$$

とし，

$$\tilde{M}_s = M \circ R_s \; [\; Schur \text{ 積 (各成分ごとの積)} \;]$$

と定義する．このとき，Hausdorff 次元を求める次の定理が得られる．

定理 3. F を $E_k^{(q+1)}$ の有限部分集合とし，

$$\mathcal{A}(F) = \{\ \underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid x_j x_{j+1} \cdots x_{j+q} \in F \quad for\ \forall j \in \boldsymbol{N}\ \}$$

とする．(4.1) で定義された $m \times m$ $(0,1)$ 行列 $M = (m_{i,j})$ が既約行列で，λ_s が $\tilde{M}_s = M \circ R_s$ のスペクトル半径とする．

このとき，$\lambda_s = 1$ となる s が唯一存在し，$s = \dim_H \mathcal{A}(F)$ が成り立つ．

5　$\boldsymbol{R}^d$ 上の部分集合に対する Hausdorff 次元

縮小写像 $f_j : \boldsymbol{R}^d \longrightarrow \boldsymbol{R}^d$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ に対し，式(1.1) を満たす Self-similar set が唯一存在するためには，縮小比が完全に 1 より小の必要があるが，式(1.1) を満たす Sub-self-similar set が唯一存在するためには以下の定理に述べるように縮小比は 1 のものを含む場合も良いことがある．

定理 4. $f_j : \boldsymbol{R}^d \longrightarrow \boldsymbol{R}^d$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ を縮小比 r_j $(0 < r_j \leq 1)$ の縮小写像とする．F を $E_k^{(q+1)}$ の有限部分集合とし，

$$\mathcal{A}(F) = \{\ \underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid x_j x_{j+1} \cdots x_{j+q} \in F \quad for\ \forall j \in \boldsymbol{N}\ \}$$

とする．このとき，

$$\prod_{j=1}^{q+1} r_{\alpha_j} < 1 \quad for\ all\ \underline{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{q+1} \in F \tag{5.1}$$

が成り立つとする．さらに，$\tau\ : \mathcal{A}(F) \longrightarrow \boldsymbol{R}^d$ を $z \in \boldsymbol{R}^d$ に対し，

$$\tau(\underline{x}) = \lim_{n \to \infty} f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \cdots \circ f_{x_n}(z) \qquad for\ \underline{x} \in \mathcal{A}(F)\ ,$$

と定義すると，$z \in \boldsymbol{R}^d$ に依存しないで，$\tau(\underline{x})$ は定まる．

さらに，$\tau\ (\mathcal{A}(F))$ は Sub-self-similar set である．

この $\boldsymbol{R}^d$ 上の Sub-self-similar set $\tau(\mathcal{A}(F))$ の Hausdorff 次元に関して次の結果が得られる．

定理 5. 縮小相似写像 f_j, 縮小比 $r_j (j = 1, 2, \cdots, k)$, 写像 τ, $E_k^{(r+1)}$ の部分集合 F, $\mathcal{A}(F)$ は定理 4 と同じとし，条件(5.1) を満たすとする．また，

$$\begin{aligned} F' &= \{P_q \underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \in F\} \\ &= \{\underline{\beta}^1, \underline{\beta}^2, \cdots, \underline{\beta}^m\} \subset E_k^{(q)}\ , \end{aligned}$$

とし，さらに，$\boldsymbol{R}^d$の空でない有界開集合Uが

$$\underline{\beta}^i, \underline{\beta}^j \in F' \ (i \neq j) \text{ に対し，} f_{\underline{\beta}^i}(U) \bigcap f_{\underline{\beta}^j}(U) = \emptyset \text{ かつ } \tau(\mathcal{A}(F)) \subset \overline{U} \tag{5.2}$$

を満たすとする．このとき，

$$\dim_H \tau(\mathcal{A}(F)) = \dim_H(\mathcal{A}(F))$$

が成り立つ.

この定理のように，写像の縮小比が異なる場合においても，定理 A の開集合条件(1.3)より弱い条件である開集合条件(5.2) を満たしている場合，数列空間上の部分集合である$\mathcal{A}(F)$の Hausdorff 次元と，$\boldsymbol{R}^d$ 上の Sub-self-similar set $\tau(\mathcal{A}(F))$ の Hausdorff 次元の値は等しくなる.

この定理の応用例を次に示す.

6 Example

次の複素平面$\boldsymbol{C}$上の 5 つの縮小写像$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$を考える．$z \in \boldsymbol{C}$に対し，

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= -\overline{z}, \\
f_2(z) &= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}z - \sqrt{3} + i, \\
f_3(z) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}\overline{z} - \sqrt{3} - i, \\
f_4(z) &= e^{\frac{2\pi}{3}i}z - 2\sqrt{3} - 6i, \\
f_5(z) &= e^{\frac{4\pi}{3}i}z + 2\sqrt{3} - 6i
\end{aligned}$$

とする．ここで，

$$F_1 = \{(12), (13), (21), (22), (23), (32), (33), (41), (42), (43), (51), (52), (53)\}$$

に対し，$\tau(\mathcal{A}(F_1))$ を描くと，図 1 となる.

$$F_2 = \{(12), (13), (21), (22), (23), (32), (33)\}$$

に対し，$\tau(\mathcal{A}(F_2))$ を描くと，図 2 となる.

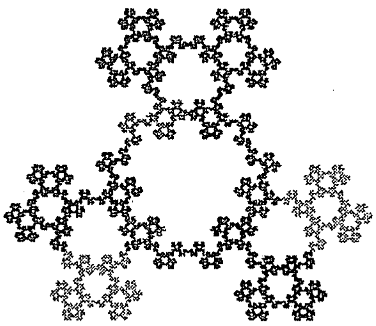

図 1

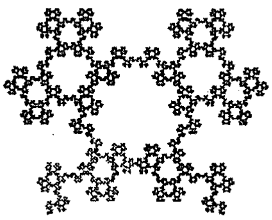

図 2

図1と図2は共にSub-self-similar setであり，図1は，図2のほとんど共通部分のない3つの写像による像の合併なので，Hausdorff次元は同じである．そこで、計算の簡単な図2の場合にHausdorff次元を求める．

$$F = \{(12), (13), (21), (22), (23), (32), (33)\}$$

であるから，

$$F' = \{(1), (2), (3)\}$$

となる．このとき，

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

となり，Mは既約行列である．縮小比は，$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{1}{2}$であり，(11)は$F$に含まれないので，条件(5.1)を満たし，

$$\tilde{M}_s = M \circ R_s = \begin{pmatrix} 0 & r_2^s & r_3^s \\ r_1^s & r_2^s & r_3^s \\ 0 & r_2^s & r_3^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}^s & \frac{1}{2}^s \\ 1^s & \frac{1}{2}^s & \frac{1}{2}^s \\ 0 & \frac{1}{2}^s & \frac{1}{2}^s \end{pmatrix}$$

と表される．定理3より，この$\tilde{M}_s$のスペクトル半径λ_sを求め，$\lambda_s = 1$となるsを求めると，

$$\dim_H \mathcal{A}(F) = \frac{-\log 2 + \log(-3 + \sqrt{13})}{-\log 2} \approx 1.72368.$$

となる．

参考文献

[1] V. Drobot and J. Turner. *Hausdorff dimension and Perron-Frobenius theory.* Illinois Math. J. **33** (1989), 1-9.

[2] K. J. Falconer. Techniques in Fractal Geometry. John Wiley & Sons 1997.

[3] K. J. Falconer. *Sub-self-similar sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3121-3129.

[4] T. Nakata. *An approximation of Hausdorff dimensions of generalized cookie-cutter Cantor sets.* Hiroshima Math. J. **27** (1997), 467-475.

[5] F. Takeo. *Hausdorff dimension of some fractals and Perron-Frobenius theory.* Operator Theory : Advances and Applications, **62** (1993), 177-195.

THE COMPLETION OF ORDERED LINEAR SPACES AND THE GENERALIZED SUPREMUM

小室 直人　　越 昭三
Naoto Komuro　　Shozo Koshi

ABSTRACT

We construct an order completion $(\tilde{E}, \tilde{P})$ of order linear space (E, P) in the case when E is a Banach space with a closed positive cone P. $\tilde{E}$ can be identified with $\{U(A) \mid A \subset E\}$ where $U(A)$ is the set of all upper bounds of a subset $A \subset E$. A vector operation can be defined on $\tilde{E}$ and $(\tilde{E}, \tilde{P})$ has a subspace which is isomorphic to (E, P) as an ordered linear space. Moreover the space of all generalized suprema $\operatorname{Sup} A$ in (E, P) is isomorphic to $\tilde{E}$ as an order complete vector lattice, provided that the condition $U(A) = (\operatorname{Sup} A) + P$ holds.

§1 The completion of ordered linear spaces

Let E be a linear space over $\mathbb{R}$, and P be a convex cone in E satisfying

(P1) $E = P - P$,

(P2) $P \cap (-P) = \{0\}$.

An order relation in E can be defined by $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P$. We call a linear space E equipped with such a positive cone P a (partially) ordered linear space, and denote it by (E, P).

In many cases (E, P) is neither an order complete nor a lattice. In this note we construct an order completion of (E, P) in the case E is a Banach space and P is a closed convex cone in E. In this case we have by bipolar theorem that

$$P = P^{**} \underset{def}{=} \{x \in E \mid \ < x^*, x > \geq 0 \quad x^* \in P^*\},$$

where $P^* \underset{def}{=} \{x^* \in E^* \mid x^*(x) \geq 0, \ x \in P\}$.

For a subset A of E, we denote the set of upper bounds and lower bounds by

$U(A) = \{x \in E \mid y \leq x, \ \forall y \in A\}$,

$L(A) = \{x \in E \mid y \geq x, \ \forall y \in A\}$,

respectively. These sets have a symmetric property in the following sence.

$$U(L(U(A))) = U(A) \tag{1}$$

for every $A \subset E$. Let $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ be the family of all upper bounded subset and lower bounded subset in E respectively, i.e.

$$\mathfrak{B} = \{A \subset E \mid A \neq \emptyset, \ U(A) \neq \emptyset\},$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX

$$\mathfrak{B}' = \{B \subset E \mid B \neq \emptyset,\ L(B) \neq \emptyset\}.$$

The relations

$$A \sim B \underset{def}{\Longleftrightarrow} U(A) = U(B) \quad (A, B \in \mathfrak{B}),$$
$$C \sim' D \underset{def}{\Longleftrightarrow} L(C) = L(D) \quad (C, D \in \mathfrak{B}')$$

are clearly equivalence relation. Now we define

$$\tilde{E} = \mathfrak{B}/\sim\ = \{[A] \mid A \in \mathfrak{B}\},$$

where $[A]$ denotes the equivalence class of A. For every $[A] \in \tilde{E}$, two operations $u([A]) = U(A)$ and $l([A]) = L(U(A))$ are well defined. We can see by (1) that $l([A]) \sim A$. For $A \in \mathfrak{B}$ we can characterize $U(A)$ by the support function of A and the boundary of the dual cone P^*. If $A \in \mathfrak{B}$ then the support function $f_A(x^*) = \sup\limits_{x \in A} < x^*, x >$ is finite on P^*. Indeed if $x_0 \in U(A)$, then $< x^*, x > \leq < x^*, x_0 >$ holds for all $x \in A$.

Theorem 1. *For every $A \in \mathfrak{B}$,*

$$U(A) = \bigcap_{x^* \in \partial P^*} \{x \mid < x^*, x > \geq f_A(x^*)\},$$

where ∂P^* denotes the algebraic boundary of P^*.

Since the topological boundary of P^* contains ∂P^*, the same formula holds when ∂P^* is replaced by the topological boundary of P^*. The proof of this theorem can be seen in [7].

Corollary 1. *Let $A, B \in \mathfrak{B}$ and suppose that $f_A(x^*) = f_B(x^*)$ on ∂P^*, then $[A] = [B]$.*

This follows directly from Theorem 1. It is worth pointing out that there exist some examples in which the converse of this corollary is not true.

Corollary 2. *If $x \in E$ does not belong to P, then there exists $x^* \in \partial P^*$ such that $< x^*, x > < 0$.*

proof. Let $A = \{0\}$ then $u([A]) = P$, and $f_A(x^*) = 0 \quad (\forall x^* \in \partial P^*)$. Hence the assertion of this corollary follows from Theorem 1.

Lemma 1. *If $A \sim A'$ and $B \sim B'$ in $\mathfrak{B}$, then for $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$[A + B] = [A' + B'] = [l([A]) + l([B])]$$
$$[\lambda A] = [\lambda A'] = [\lambda l([A])]$$

hold where $A + B$ and λA denote the set $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ and $\{\lambda a \mid a \in A\}$ respectively.

proof. It is sufficient to show that $[A + B] = [l([A]) + l([B])]$ for $A,\ B \in \mathfrak{B}$. Indeed, if it is prooved we can see $[A' + B'] = [l([A']) + l([B'])] = [l([A]) + l([B])] = [A + B]$. Since $U(A + B) \supset U(l([A]) + l([B]))$ is obvious, we show the converse. Let $x \in U(A + B)$ be an arbitrary element and take $a_1 \in l([A])$ and $b_1 \in l([B])$. Since $x \in U(A + B)$, $x - b \geq a$ for every $a \in A,\ b \in B$. By (1), this implies that

$$x - b \in U(A) = U(l([A])),$$

and hence $x - b \geq a_1$. Therefore we have $x - a_1 \geq b$ for every $b \in B$. Hence $x - a_1 \in U(B) = U(l([B]))$ and this yields that $x - a_1 \geq b_1$. This shows that $x \in U(l([A]) + l([B]))$ and the first equality is proved. The second equality is obvious. Indeed, $U(\lambda A) = \lambda U(A) = \lambda U(L(U(A))) = U(\lambda l([A]))$.

We now define an order relation and a vector operaton in $\tilde{E}$.

Definition. *For* $[A]$, $[B] \in \tilde{E}$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$[A] \leq [B] \underset{def}{\Longleftrightarrow} u([B]) \subset u([A]) \tag{2}$$

$$[A] + [B] \underset{def}{=} [A + B] \tag{3}$$

$$\lambda[A] \underset{def}{=} \begin{cases} [\lambda l([A])] & (\lambda > 0) \\ [0^+ l([A])] = [-P] & (\lambda = 0) \\ [\lambda u([A])] & (\lambda < 0), \end{cases} \tag{4}$$

where 0^+C *denotes the resession cone of a convex set* C.([8])

We define two subsets $\tilde{P}$ and $\tilde{E}_1$ of $\tilde{E}$ as follows.

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \{[A] \in \tilde{E} \mid [A] \geq [-P]\} \\ &= \{[A] \in \tilde{E} \mid u([A]) \subset P\} \\ \tilde{E}_1 &= \{[A] \in \tilde{E} \mid u([A]) = a + P \text{ for some } a \in E\}. \end{aligned}$$

We note that the correspondence which assigns $a \in E$ to $[A] \in \tilde{E}_1$ such that $u([A]) = a + P$ is one to one. Now we state the main theorem. We refer to [7] for the proof.

Theorem 2. $\tilde{E}$ *is an order complete vector lattice with the definition* (2),(3),(4), *and*

(*a*) $\tilde{P}$ *is a convex cone in* $\tilde{E}$ *and satisfies* (P1), (P2), *and* $[A] \leq [B] \Longleftrightarrow [B] - [A] \in \tilde{P}$.

(*b*) $\tilde{E}_1$ *is a subspace which is order isomorphic to* (E, P) *by the correspondence* $E \ni a \longleftrightarrow [A] \in \tilde{E}_1$ *where* $u([A]) = a + P$.

Moreover, let $\{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma} \subset \mathfrak{B}$, *and* $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathfrak{B}'$, *be arbitrary families such that* $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \in \mathfrak{B}$ *and* $\cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathfrak{B}'$. *Then*

(*c*) $\cap_{\sigma \in \Sigma} u([A_\sigma]) = u([\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma])$, $\quad \cap_{\lambda \in \Lambda} l([L(B_\lambda)]) = l([L(\cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda)])$.

(*d*) $U(L(\cap_{\sigma \in \Sigma} u([A_\sigma]))) = \cap_{\sigma \in \Sigma} u([A_\sigma])$, $\quad L(U(\cap_{\lambda \in \Lambda} l([L(B_\lambda)]))) = \cap_{\lambda \in \Lambda} l([L(B_\lambda)])$.

By $[A] \vee [B]$, and $[A] \wedge [B]$ we denote the least upper bound and the greatest lower bound of $\{[A], [B]\}$ in $\tilde{E}$ respectively.

Corollary 3. *For* $[A], [B], \in \tilde{E}$,

(*a*) $\quad [A] \vee [B] = [L(u([A]) \cap u([B]))]$,

(*b*) $\quad [A] \wedge [B] = [L(u([A])) \cap L(u([B]))]$,

Since $(\tilde{E}, \tilde{P})$ is a vector lattice, we also have the followings.

Corollary 4. *For* $[A], [B], [C] \in \tilde{E}$,

(*a*) $\quad [A] \vee [B] + [A] \wedge [B] = [A] + [B]$, $\quad$ *and in particular,*
$\quad [A]_+ + [A]_- = [A]$ $\quad$ *where* $[A]_+ = [A] \vee [-P]$, $[A]_- = [A] \wedge [-P]$,

(*b*) $\quad ([A] \wedge [B]) \vee [C] = ([A] \vee [C]) \wedge ([B] \vee [C])$,
$\quad ([A] \vee [B]) \wedge [C] = ([A] \wedge [C]) \vee ([B] \wedge [C])$.

Example 1. Let $E = \mathbb{R}^3$ and let P be the cone defined by

$$P = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 \geq |x_1| + |x_2| \}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ < a_i, x > \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)\},$$

where $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (1, -1, 1)$, $a_4 = (1, -1, -1)$. Then the dual cone P^* is given by

$$P^* = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 \geq \max\{|x_1|, \ |x_2|\} \}.$$
$$= K(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

where $K(a_1, a_2, a_3, a_4)$ denotes the cone generated by $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. It is easy to see that $(\mathbb{R}^3, P)$ is not order complete. We can verify that the completion $\tilde{\mathbb{R}^3}$ is the four dimensional space with the basis

$$[A_j] = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ < a_i, x > \leq \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4)\} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

In the case that P is a circular cone, then the completion $\tilde{\mathbb{R}^3}$ is infinite dimensional.

§2 The generalized supremum and the monotone order cmpleteness

Let (E, P) be an ordered linear space. For $A \in E$, the generalized supremum and the generalized infimum are defined by

$$\operatorname{Sup} A = \{a \in E \mid b \leq a, \ \ b \in U(A) \Longrightarrow a = b\},$$
$$\operatorname{Inf} A = \{a \in E \mid b \geq a, \ \ b \in L(A) \Longrightarrow a = b\}.$$

The basic properties of them has been investigated in [3],[4],[5], and [6]. If the space (E, P) has the propertiy

(5) $$U(A) = (\operatorname{Sup} A) + P \quad (\forall A \subset E),$$

the correspondence $U(A) \longleftrightarrow \operatorname{Sup} A$ is one to one. Hence the completion $\tilde{E}$ of E can be identified with the set $S = \{\operatorname{Sup} A \mid A \subset E\}$ provided that (5) holds. Under this condition, we define an order relation and a vector operation (the addition $\oplus$ and the scalar multiplication $*$) on S as follows.

Definition. *For $A, B \subset E$ and $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B \Leftrightarrow \operatorname{Sup} B \subset \operatorname{Sup} A + P$$
$$\operatorname{Sup} A \oplus \operatorname{Sup} B = \operatorname{Sup}(A + B)$$
$$\lambda * \operatorname{Sup} A = \begin{cases} \operatorname{Sup}(\lambda l([A])) & (\lambda > 0) \\ \{0\} & (\lambda = 0) \\ \operatorname{Sup}(\lambda u([A])) & (\lambda < 0), \end{cases}$$

for $\operatorname{Sup} A$, $\operatorname{Sup} B \in S$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Let S_0 be the set of all elements $\operatorname{Sup} A \in S$ such that $\operatorname{Sup} A = \{a_0\}$ for some $a_0 \in E$. Then by the following theorem, S can be regarded as an order completion of (E, P) which is isomorphic to S_0.

Theorem 3. *If (E,P) satisfies* (5), *then S is isomorphic to $\tilde{E}$ as a vector lattice under the one to one correspondence*

$$S \ni \operatorname{Sup} A \longleftrightarrow [A] \in \tilde{E},$$

Moreover, S_0 is isomorphic to (E,P) under the same correspondence.

proof. The only thing we need to prove is that the above correspondence is well defined and one to one. However, since the formula (5) holds in (E,P), we have $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Sup} B \Longleftrightarrow U(A) = U(B) \Longleftrightarrow [A] = [B]$.

The following results are also fundamental.

Proposition 1. *For $A, B \in \mathfrak{B}$,*

(*a*) $\quad U(A+B) \sim' U(A) + U(B) \quad$ *in* $\mathfrak{B}'$,

Moreover, if (E,P) satisfies the condition (5), *then*

(*b*) $\quad \operatorname{Sup}(A+B) + P \supset \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$,

(*c*) $\quad \operatorname{Sup}(L(\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B)) = \operatorname{Sup}(A+B)$.

proof. It is easy to see that $U(A+B) \supset U(A)+U(B)$. Hence $L(U(A+B)) \subset L(U(A)+U(B))$, and what we need to prove is $L(U(A+B)) \supset L(U(A)+U(B))$. For every $x \in L(U(A)+U(B))$, we have $x \leq a+b \quad (a \in U(A),\ b \in U(B))$. This mens that

$$x - U(B) \subset L(U(B)).$$

Since $[-U(B)] = -[B] = -[L(U(B))]$, we have

$$\begin{aligned} x - P &\sim x - U(B) + L(U(B)) \\ &\subset L(U(A)) + L(U(B)). \end{aligned}$$

Taking the upper bounds of both sides, we obtain by Lemma 1 that

$$\begin{aligned} x + P &\supset U(L(U(A)) + L(U(B))) \\ &= U(A+B). \end{aligned}$$

This is equivalent to $x \in L(U(A+B))$, and (a) is proved. Next, by (5) we have $\operatorname{Sup}(A+B)+P = U(A+B) \supset U(A)+U(B) \supset \operatorname{Sup} A+\operatorname{Sup} B$ which shows (b). Moreover, by (a), $U(L(\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B)) = U(L((\operatorname{Sup} A) + P + (\operatorname{Sup} B) + P)) = U(L(U(A) + U(B))) = U(L(U(A+B))) = U(A+B)$. Hence $\operatorname{Sup}(L(\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B)) = \operatorname{Sup}(A+B)$, and (c) is proved.

The sufficient conditions for the property (5) are given in [4]. The following proposition gives one of these conditions ([4]).

Proposition 2. *Suppose that a partially ordered linear space (E,P) is monotone order complete. Then (E,P) satisfies* (5). *In particular,* $\operatorname{Sup}\{a,b\} \neq \emptyset$, $\operatorname{Inf}\{a,b\} \neq \emptyset$ *for every $a, b \in E$, and* $U(a,b) = (\operatorname{Sup}\{a,b\}) + P$.

Here an ordered linear space (E,P) is said to be **monotone order complete** (m.o.c. for short) if every upper bounded totally ordered subset of E has the least upper bound in E. In the case $E = \mathbb{R}^d$, (E,P) is m.o.c. if and only if P is closed. In the case when

E is a Banach space with a closed positive cone P satisfying $P^* - P^* = E^*$, it is known that (E^*, P^*) is m.o.c. where E^* is the topological dual of E.

A positive cone P in a Banach space is said to be **normal** if there exists a neighborhood base of the origin consisting of neighborhoods V satisfying

$(V + P) \cap (V - P) = V$.

We also recall Bishop-Phelps theorem which asserts that for a bounded closed convex set C in a Banach space E, the set of all bounded linear functional which attains its minimum on C is norm dense in E^*.

Theorem 4. *Let E be a Banach space with a closed positive cone P and suppose that P is normal. If the dual cone P^* has nonempty interior in E^*, then (E, P) has the property* (5).

Outline of the proof. For $x \in U(A)$, we put $S_x = (x - P) \cap U(A)$. It suffices to show that there exists an minimal point x_0 of S_x such that $x_0 \leq x$. Since P is closed, so is S_x. We also have $S_x \subset [a, x] = \{y \in E \mid a \leq y \leq x\}$ for $a \in A$ and hence the normality of P yields that S_x is norm bounded. Therefore by Bishop-Phelps theorem, we can choose an interior point x_1^* of P^* such that x_1^* attains its minimum on S_x at some point $x_0 \in S_x$. If there exsists $x_1 \in S_x$ such that $x_1 \lneqq x_0$ it follows that $x^*(x_1) < x^*(x_0)$ since x^* is an interior point of P^*. It is a contradiction and x_0 is a minimal point of S_x.

Example 2. We consider the space $l_0 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mid x_i = 0$ except for finitely many $i\}$, $l_1 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mid \Sigma_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, $l_2 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mid \Sigma_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ and define two typical cones;

$$P_1 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in l_1 \mid x_0 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\},$$

$$P_2 = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in l_2 \mid x_0 \geq (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

Then (l_1, P_1), and (l_2, P_2) are m.o.c., and (l_0, P_1), (l_0, P_2), and (l_1, P_2) are not m.o.c. Some of these results can be seen in [7] with proofs. Moreover (l_1, P_1), (l_2, P_2), (l_0, P_2), and (l_1, P_2) all satisfies the property (5).([7])

References

[1] T. Ando, *On fundamental properties of a Banach space with cone*, Pacific J. Math. **12** (1962), 1163–1169.

[2] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag (1975).

[3] N.Komuro, *Properties of the Set of Upper Bounds in Partially Ordered Linear Space*, J. Hokkaido University of Education **51-2** (2001), 15–20.

[4] N.Komuro, S.Koshi, *Genaralized supremum in partially ordered linear space*, Proc. of the international conference on nonlinear analysis and convex analysis, World Scientific (1999), 199–204.

[5] N.Komuro, H.Yoshimura, *Generalized supremum in partially ordered linear space and the monotone order completeness*, J. Hokkaido University of Education **50-2** (2000), 11–16.

[6] S.Koshi, N.Komuro, *Supsets on partially ordered topological linear spaces*, Taiwanese J. of Math. **4-2** (2000), 275–284.

[7] N.Komuro, *The completion of ordered linear spaces and the generalized supremum*, submitted.

[8] R.T.Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

N.Komuro
Hokkaido University of Education at Asahikawa
Hokumoncho 9 chome Asahikawa
070-8621 Japan
e-mail: komuro@ atson.asa.hokkyodai.ac.jp

Entrywise matrix functions

Fumio Hiai
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1. Introduction

There are two important order for matrices; one is the order induced by positive semidefiniteness and the other is that induced by the positive cone of entrywise non-negative matrices. On the other hand, there are two ways in applying functions (defined on an interval) to matrices, the usual functional calculus $A \mapsto f(A)$ and the entrywise calculus $A \mapsto f[A]$. In this way, one may take the following four combinations to study monotonicity or convexity for matrix functions:

(1) functional calculus and positive semidefiniteness,
(2) functional calculus and entrywise positivity,
(3) entrywise calculus and positive semidefiniteness,
(4) entrywise calculus and entrywise positivity.

The last situation is trivial; it has nothing to do with matrices. The first situation is most standard (and most important) in matrix theory; we have a well-developed theory of operator monotone and operator convex functions initiated by Löwner. The case (2) was treated by Hansen [Ha], and the case (3) is in this notes.

Let $M_n(\mathbf{C})$ be the set of complex $n \times n$ matrices, and $M_n(\mathbf{R})$ be the real $n \times n$ matrices. For $A \in M_n(\mathbf{C})$ we write $A \geq 0$ if A is positive semidefinite. For Hermitian $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ (in particular, for symmetric $A, B \in M_n(\mathbf{R})$), $A \geq B$ means $A - B \geq 0$. In this notes let us consider a real function on an open interval $(-\alpha, \alpha)$ where $0 < \alpha \leq \infty$. For a Hermitian matrix A in $M_n(\mathbf{C})$ whose eigenvalues are in $(-\alpha, \alpha)$ let $f(A)$ denote the usual functional calculus of A by f. On the other hand, for a matrix $A = [a_{ij}]$ in $M_n(\mathbf{R})$ such that $a_{ij} \in (-\alpha, \alpha)$ for all i, j we write $f[A]$ for the matrix given by applying f to each entry of A, i.e., $f[A] = [f(a_{ij})]$.

Definition 1. Let f be a real function on $(-\alpha, \alpha)$ where $0 < \alpha \leq \infty$, and let $n \in \mathbf{N}$ with $n \geq 2$.

(i) f is said to be *S-positive of order* n if $f[A] \geq 0$ for all $A \geq 0$ in $M_n(\mathbf{R})$ with entries in $(-\alpha, \alpha)$.
(ii) f is said to be *S-monotone of order* n if $f[A] \geq f[B]$ for all $A \geq B \geq 0$ in $M_n(\mathbf{R})$ with entries in $(-\alpha, \alpha)$.
(iii) f is said to be *S-convex of order* n if $f[\lambda A + (1-\lambda)B] \leq \lambda f[A] + (1-\lambda) f[B]$ for all $0 \leq \lambda \leq 1$ and for all $A \geq B \geq 0$ in $M_n(\mathbf{R})$ with entries in $(-\alpha, \alpha)$.

In [Ha], a real function f on $(-\alpha, \alpha)$ was said to be m-positive, m-monotone and m-convex if it satisfies the respective conditions as in Definition 1 in the situation (2). A bit surprisingly, Hansen's characterization ([Ha]) of these functions is completely the same as that given in Theorem 12 below, so the class of m-positive (resp. m-monotone, m-convex) functions on $(-\alpha, \alpha)$ coincides with that of S-positive (resp. S-monotone, S-convex) functions on $(-\alpha, \alpha)$.

2. Lower order cases

We denote by $S_{\text{pos}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$ (resp. $S_{\text{mono}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$, $S_{\text{conv}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$) the set of all real functions on $(-\alpha,\alpha)$ which are S-positive (resp. S-monotone, S-convex). Let f be a nonnegative real function f on the open interval $(0,\alpha)$. We say that f is $\sqrt{}$*-submultiplicative* if

$$f(\sqrt{st}) \leq \sqrt{f(s)f(t)} \quad \text{for all } s,t \in (0,\alpha).$$

The class of $\sqrt{}$-submultiplicative increasing functions on $(0,\alpha)$ can be described as follows.

Proposition 2. *For a nonnegative function f on $(0,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(a) *f is increasing and $\sqrt{}$-submultiplicative;*
(b) *f is increasing, continuous and $\sqrt{}$-submultiplicative;*
(c) *f is identically zero, or else there is an increasing convex function g on $(-\infty,\log\alpha)$ such that $f(t) = \exp g(\log t)$ for all $t \in (0,\alpha)$.*

We denote by $\Lambda(0,\alpha)$ the set of all nonnegative functions on $(0,\alpha)$ satisfying the equivalent conditions (a)–(c) in Proposition 2.

Proposition 3. *For a real function f on $(-\alpha,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$f \in S_{\text{pos}}^{(2)}(-\alpha,\alpha)$;*
(2) *$f|_{(0,\alpha)} \in \Lambda(0,\alpha)$, $0 \leq f(0) \leq f(0+)$ $(:= \lim_{t\to 0+} f(t))$ and $|f(-t)| \leq f(t)$ for all $0 < t < \alpha$.*

We denote by $\mathcal{M}^{(0)}(-\alpha,\alpha)$ the set of all measurable real functions f on $(-\alpha,\alpha)$ such that $f|_{(0,\alpha)} \in \Lambda(0,\alpha)$ and $|f(-t)| \leq f(t)$ for a.e. $t \in (0,\alpha)$. Furthermore, let $\mathcal{M}^{(1)}(-\alpha,\alpha)$ dentoe the set of all continuous functions f on $(-\alpha,\alpha)$ which is differentiable on $(0,\alpha)$ and differentiable a.e. on $(-\alpha,0)$ with $f' \in \mathcal{M}^{(0)}(-\alpha,\alpha)$. In other words, $f \in \mathcal{M}^{(1)}(-\alpha,\alpha)$ if and only if there exists $g \in \mathcal{M}^{(0)}(-\alpha,\alpha)$ such that

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)\,ds \quad \text{for } -\alpha < t < \alpha.$$

Proposition 4.

$$S_{\text{mono}}^{(2)}(-\alpha,\alpha) = \mathcal{M}^{(1)}(-\alpha,\alpha).$$

Proposition 5. *For a real function f on $(-\alpha,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$f \in S_{\text{conv}}^{(2)}(-\alpha,\alpha)$;*
(2) *f is differentiable on $(-\alpha,\alpha)$ and $f' \in \mathcal{M}^{(1)}(-\alpha,\alpha)$ $(= S_{\text{mono}}^{(2)}(-\alpha,\alpha))$.*

In the above we characterized functions in the three classes $S_{\text{pos}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$, $S_{\text{mono}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$ and $S_{\text{conv}}^{(n)}(-\alpha,\alpha)$ for the first non-trivial case $n = 2$. Although we cannot completely characterize functions in these classes for the next case $n = 3$, it is not difficult to show the following necessary conditions for real functions on $(-\alpha,\alpha)$ to belong to $S_{\text{pos}}^{(3)}(-\alpha,\alpha)$ and to $S_{\text{mono}}^{(3)}(-\alpha,\alpha)$.

Proposition 6. *If $f \in S^{(3)}_{\mathrm{pos}}(-\alpha,\alpha)$, then it is continuous on $(-\alpha,\alpha)$.*

Proposition 7. *If $f \in S^{(3)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$, then it is continuously differentiable on $(-\alpha,\alpha)$.*

3. Characterizations

We first present some relations among three classes $S^{(n)}_{\mathrm{pos}}(-\alpha,\alpha)$, $S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$ and $S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)$ for genreal n.

Proposition 8. *For every $n \in \mathbf{N}$,*

$$S^{(2n)}_{\mathrm{pos}}(-\alpha,\alpha) \subset S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)\,, \quad S^{(2n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha) \subset S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)\,.$$

Proposition 9. *Assume $n \geq 3$. For a real function f on $(-\alpha,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$f \in S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$;*
(2) *f is differentiable on $(-\alpha,\alpha)$ and $f' \in S^{(n)}_{\mathrm{pos}}(-\alpha,\alpha)$.*

Proposition 10. *Assume $n \geq 3$. For a real function f on $(-\alpha,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$f \in S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)$;*
(2) *f is differentiable on $(-\alpha,\alpha)$ and $f' \in S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$.*
(3) *f is twice differentiable on $(-\alpha,\alpha)$ and $f'' \in S^{(n)}_{\mathrm{pos}}(-\alpha,\alpha)$.*

Proposition 11. *Let $N \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. If $f \in S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)$ and $f'(0) \geq 0$, then $f \in S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$.*

We now give the main theorem characterizing the S-positive, S-monotone and S-convex functions on $(-\alpha,\alpha)$. The theorem quite explicitly explains the differences among the three notions of S-positivity, S-monotonicity and S-convexity.

Theorem 12. *Let f be a real function on $(-\alpha,\alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$. The following statements hold:*

(i) *f is S-positive if and only if it is analytic and $f^{(k)}(0) \geq 0$ for all $k \geq 0$.*
(ii) *f is S-monotone if and only if it is analytic and $f^{(k)}(0) \geq 0$ for all $k \geq 1$.*
(iii) *f is S-convex if and only if it is analytic and $f^{(k)}(0) \geq 0$ for all $k \geq 2$.*

Corollary 13. *For a real function f on $(-\alpha,\alpha)$ the following conditions are equivalent:*

(1) *f is S-convex;*
(2) *f is differentiable and f' is S-monotone;*
(3) *f is twice differentiable and f'' is S-positive.*

Corollary 14. *If $f : (-\alpha,\alpha) \to \mathbf{R}$ is S-positive, then f has a complex analytic continuation $\tilde{f}$ on $\{z \in \mathbf{C} : |z| < \alpha\}$ and $\tilde{f}$ is S-positive in the sense that $[\tilde{f}(a_{ij})] \geq 0$ for all $A = [a_{ij}] \geq 0$ in $M_n(\mathbf{C})$ with $|a_{ij}| < \alpha$ for all i,j, and every $n \in \mathbf{N}$. The similar statements are valid also for an S-monotone function or an S-convex function.*

Example 15. We consider fractional power functions. For $p > 0$ define an even function ϕ_p and an odd function ψ_p on $\mathbf{R}$ by

$$\phi_p(x) = |x|^p, \quad \psi_p(x) = (\operatorname{sign} x)|x|^p \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Also, set $\phi_0(x) := 1$, $\psi_0(x) := \operatorname{sign} x$ ($= -1, 0, 1$ if $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ respectively).

(1) If $n \geq 2$, then ϕ_p (resp. ψ_p) $\in S^{(n)}_{\rm pos}(-\infty, \infty)$ if and only if $p \geq n-2$.
(2) If $n \geq 1$, then ϕ_p (resp. ψ_p) $\in S^{(n)}_{\rm mono}(-\infty, \infty)$ if and only if $p \geq n-1$.
(3) If $n \geq 1$, then ϕ_p (resp. ψ_p) $\in S^{(n)}_{\rm conv}(-\infty, \infty)$ if and only if $p \geq n$.

These facts extend [FH, Theorem 2.2 and 2.4]. A non-differentiable example in $S^{(3)}_{\rm pos}(-\infty, \infty)$ is $f(x) = |x|$ on $\mathbf{R}$. The function $f(x) = (\operatorname{sign} x)x^2$ is in $S^{(3)}_{\rm mono}(-\infty, \infty)$ but it is not twice differentiable. These examples suggest that the necessary conditions in Propositons 6 and 7 are rather optimal.

4. Norm inequalities

We give related norm inequalities for unitarily invariant norms. The following strengthens the norm inequality shown in [Bo, Corollary 1] (note that the formula there is inaccurate).

Proposition 16. *Let $n \geq 2$ be an integer and assume $f \in S^{(n)}_{\rm mono}(-\alpha, \alpha)$. If $A \in M_n(\mathbf{R})$, $A \geq 0$, with $\|A\| < \alpha$ ($\|A\|$ denotes the operator norm), then*

$$\lambda(f[A] - f(0)J) \prec_w \lambda(f(A) - f(0)I),$$

and hence

$$|||f[A] - f(0)J||| \leq |||f(A) - f(0)I|||$$

for every unitarily invariant norm $|||\cdot|||$.

Corollary 17. *If $n \geq 2$ is an integer and $p \geq n-1$, then*

$$|||\phi_p[A]||| \leq |||A^p|||, \quad |||\psi_p[A]||| \leq |||A^p|||$$

for all $A \geq 0$ in $M_n(\mathbf{R})$ and every unitarily invariant norm $|||\cdot|||$.

Remark 18. For $0 < p < 1$ we have $\phi_p \in S^{(2)}_{\rm pos}(-\infty, \infty)$ by Example 15. Whne $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ we compute

$$\phi_p[A] = 2^{1-p}A, \quad A^p = A,$$

and hence

$$\|\phi_p[A]\| = 2^{1-p} > 1 = \|A^p\|.$$

Thus, the norm inequality in Proposition 16 is not valid if the assumption $f \in S^{(n)}_{\rm mono}(-\alpha, \alpha)$ is weakened to $f \in S^{(n)}_{\rm pos}(-\alpha, \alpha)$.

Proposition 19. *Let $n \geq 2$ be an integer. Assume $f \in S^{(n)}_{\rm conv}(-\alpha, \alpha)$ and $f'(0) \geq 0$. If $A, B \geq 0$ in $M_n(\mathbf{R})$ with $\|A\|, \|B\| < \alpha$, then*

$$s(f[A] - f[B]) \prec_w f^{[1]}(\lambda(A), \lambda(B)) \circ s(A-B),$$

and hence

$$|||f[A]-f[B]||| \le \left(\max_{1\le i\le n} f^{[1]}(\lambda_i(A),\lambda_i(B))\right)|||A-B|||,$$
$$|||f[A]-f(0)J||| \le |||f(A)-f(0)I|||$$

for every unitarily invariant norm $|||\cdot|||$.

Corollary 20. *If* $n\ge 2$ *is an integer and* $p\ge n$, *then*

$$\begin{aligned} s(\phi_p[A]-\phi_p[B]) &\prec_w (x^p)^{[1]}(\lambda(A),\lambda(B))\circ s(A-B),\\ s(\psi_p[A]-\psi_p[B]) &\prec_w (x^p)^{[1]}(\lambda(A),\lambda(B))\circ s(A-B)\end{aligned}$$

for all $A,B\ge 0$ *in* $M_n(\mathbf{R})$.

Remark 21. Let $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$. For $p>0$ we have $\psi_p(A)=A$, $\psi_p(B)=B$, $s(A-B)=(2,2)$, $\lambda(A)=\lambda(B)=(2,0)$ and $(x^p)^{[1]}(\lambda(A),\lambda(B))=(p2^{p-1},0)$. If the weak majorization in Proposition 19 holds for ψ_p, then we must have $4\le 2p2^{p-1}$, i.e. $2^{2-p}\le p$. This gives $p\ge 1.4\cdots$. So we observe that Proposition 19 is not valid if the assumption $f\in S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)$ is weakened to $f\in S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$. Is the assumption $p\ge n$ in Corollary 9 sharp?

Proposition 22. *Assume* $n\ge 3$ *and* $f\in S^{(n)}_{\mathrm{mono}}(-\alpha,\alpha)$. *Let* $A,B\ge 0$ *in* $M_n(\mathbf{R})$ *with entries in* $(-\alpha,\alpha)$. *Then*

$$|||f[A]-f[B]||| \le \left(\max_{1\le i\le n} f^{[1]}(a_{ii},b_{ii})\right)|||A-B|||$$

for any unitarily invariant norm $|||\cdot|||$.

The second divided derivative $f^{[2]}(a,b,c)$ is defined by

$$f^{[2]}(a,b,c)=\frac{f^{[1]}(a,b)-f^{[1]}(b,c)}{a-c}.$$

In particular,

$$f^{[2]}(a,b,b)=\frac{f(a)-f(b)-f'(b)(a-b)}{(a-b)^2},$$
$$f^{[2]}(a,a,a)=\frac{1}{2}f''(a)$$

under the assumption of f being twice differentiable.

Proposition 23. *Assume* $n\ge 3$ *and* $f\in S^{(n)}_{\mathrm{conv}}(-\alpha,\alpha)$. *Let* $A,B\ge 0$ *in* $M_n(\mathbf{R})$ *with entries in* $(-\alpha,\alpha)$. *Then*

$$\begin{aligned} &|||f[A]-f[B]-(A-B)\circ f'[B]|||\\ &\le \left(\max_{1\le i\le n} f^{[2]}(a_{ii},b_{ii},b_{ii})\right)|||(A-B)\circ(A-B)|||\\ &\le \left(\max_{1\le i\le n} f^{[2]}(a_{ii},b_{ii},b_{ii})\right)|||(A-B)^2|||\end{aligned}$$

for any unitarily invariant norm $|||\cdot|||$.

References

[Bo] J. V. Bondar, Comments on and complements to *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications* by Albert W. Marshall and Ingram Olkin, *Linear Algebra Appl.* **199** (1994), 115–130.

[FH] C. H. FitzGerald and R. A. Horn, On fractional Hadamard powers of positive definite matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **61** (1977), 633–642.

[Ha] F. Hansen, Functions of matrices with nonnegative entries, *Linear Algebra Appl.* **166** (1992), 29–43.

Functions related to convexity and smoothness of Banach Spaces

高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi) 岡山県立大情報工
加藤幹雄 (Mikio Kato) 九 州 工 大 工

Abstract. We introduce some functions related to convexity and smootnness of Banach spaces, and investigate several geometrical properties of Banach spaces such as uniform non-squareness, p-uniform smoothness and q-uniform convexity in terms of those functions.

バナッハ空間の幾何学的性質に関連して，いくつかの幾何学的定数が知られている．Uniform non-squareness の概念に関連して，James 定数 $J(X)$ と Schäffer 定数 $S(X)$ が導入されたが，これらは uniform non-squareness の度合いを表すものと考えられる．しかしながら，これらの定数を用いて一様凸性などの幾何学的性質を記述することはできない．ここでは，James 定数 $J(X)$ と Schäffer 定数の概念を精密化（一般化）して，幾何学的性質を記述するような関数や定数を導入し，それらを用いて uniform convexity, smoothness などの特徴付けを行う．これにより，いくつかの幾何学的性質が統一的に特徴付けられる．以下 X をバナッハ空間とする．

1. Definitions (i) X is called *uniformly non-square in the sense of James* when there exists $\delta > 0$ such that

$$\min(\|x+y\|, \|x-y\|) \leq 2(1-\delta) \quad \text{if} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

(ii) The *James constant* is defined by

$$J(X) := \sup\{\min(\|x+y\|, \|x-y\|) : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

(iii) X is called *uniformly non-square in the sense of Schäffer* when there exists $\lambda > 1$ such that

$$\max(\|x+y\|, \|x-y\|) \geq \lambda \quad \text{if} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

(iv) The *Schäffer constant* is defined by

$$S(X) := \inf\{\max(\|x+y\|, \|x-y\|) : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

It is obvious that X is uniformly non-square in the sense of James, resp., Schäffer if and only if $J(X) < 2$, resp., $S(X) > 1$. On the other hand it is known that

$J(X)S(X) = 2$ for any Banach space X (cf. [3, 6]); therefore, these two notions are equivalent.

2. Definitions (*James and Schäffer type constants*): We define for $\tau \geq 0$

$$J_{X,t}(\tau) := \begin{cases} \sup\left\{ \left(\dfrac{\|x+\tau y\|^t + \|x-\tau y\|^t}{2} \right)^{1/t} : \|x\| = \|y\| = 1 \right\} & \text{if} -\infty < t < \infty, \\ \sup\left\{ \min(\|x+\tau y\|, \|x-\tau y\|) : \|x\| = \|y\| = 1 \right\} & \text{if } t = -\infty. \end{cases}$$

$$S_{X,t}(\tau) := \begin{cases} \inf\left\{ \left(\dfrac{\|x+\tau y\|^t + \|x-\tau y\|^t}{2} \right)^{1/t} : \|x\| = \|y\| = 1 \right\} & \text{if } 1 < t < \infty, \\ \inf\left\{ \max(\|x+\tau y\|, \|x-\tau y\|) : \|x\| = \|y\| = 1 \right\} & \text{if } t = \infty. \end{cases}$$

3. Definitions (1) The *modulus of convexity* of X is defined by

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \epsilon \right\} \quad (0 \leq \epsilon \leq 2).$$

(2) X is *uniformly convex* if $\delta_X(\epsilon) > 0$ for all $0 < \epsilon \leq 2$, and *q-unifromly convex* $(2 \leq q < \infty)$ if there is $C > 0$ such that $\delta_X(\epsilon) \geq C\epsilon^q$ for all $0 < \epsilon \leq 2$.

4. Definitions (1) The *modulus of smoothness* of X is defined by

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{ \frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1 \right\}$$

(2) X is *uniformly smooth* if $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$ $(\tau \to +0)$, and *p-unifromly smooth* $(1 \leq p \leq 2)$ if there is $K > 0$ such that $\rho_X(\tau) \leq K\tau^p$ for all $\tau \geq 0$.

5. Theorem Let $1 < t \leq \infty$. The following are equivalent.
(1) X is uniformly non-square.
(2) $S_{X,t}(1) > 1$.
(3) $S_{X,t}(\tau) > 1 \quad (0 < \exists\tau < 1)$.
(4) $S_{X,t}(\tau) > \tau \quad (1 < \exists\tau < \infty)$.

6. Theorem Let $-\infty \leq t < \infty$. The following are equivalent.
(1) X is uniformly non-square.
(2) $J_{X,t}(1) < 2$.
(3) $J_{X,t}(\tau) < 1 + \tau \quad (0 < \exists\tau < \infty)$.
(4) $J_{X,t}(\tau) < 1 + \tau \quad (0 < \forall\tau < \infty)$.

7. Theorem Let $1 < t \leq \infty$. The following are equivalent.
(1) X is uniformly convex.
(2) $S_{X,t}(\tau) > 1 \quad (0 < \forall\tau < 1)$.
(3) $S_{X,t}(\tau) > \tau \quad (1 < \forall\tau < \infty)$.

8. Theorem Let $1 < t \leq \infty$ and $2 \leq q < \infty$. The following are equivalent.
(1) X is q-uniformly convex.
(2) There is $C > 0$ such that

$$S_{X,t}(\tau) \geq (1 + C\tau^q)^{1/q} \text{ for all } \tau \geq 0.$$

9. Theorem Let $-\infty \leq t \leq 1$. The following are equivalent.
(1) X is uniformly smooth.
(2) $(J_{X,t}(\tau) - 1)/\tau \to 0 \quad (\tau \to +0)$.

10. Theorem Let $1 \leq t < \infty$ and $1 < p \leq 2$. The following are equivalent.
(1) X is p-uniformly smooth.
(2) There is $K > 0$ such that

$$J_{X,t}(\tau) \leq (1 + K\tau^p)^{1/p} \text{ for all } \tau \geq 0.$$

11. Theorem The following are equivalent.
(1) X is isometric to a Hilbert space.
(2) $S_{X,t}(\tau) = (1 + \tau^2)^{1/2}$ for all $\tau \geq 0$, where $2 \leq t < \infty$.
(3) $J_{X,t}(\tau) = (1 + \tau^2)^{1/2}$ for all $\tau \geq 0$, where $1 \leq t \leq 2$.

12. Remark If X is a Hilbert space, then for all $\tau \geq 0$

$$S_{X,t}(\tau) = \left(\frac{|1+\tau|^t + |1-\tau|^t}{2}\right)^{1/t} \quad \text{if } 1 < t < 2.$$

$$J_{X,t}(\tau) = \left(\frac{|1+\tau|^t + |1-\tau|^t}{2}\right)^{1/t} \quad \text{if } 2 < t < \infty.$$

13. Theorem Let X be an L_r-space with $\dim X \geq 2$.
(1) Let $1 < r \leq 2$ and $1/r + 1/r' = 1$. Then for all $\tau \geq 0$

$$S_{X,t}(\tau) = \left(\frac{|1+\tau|^r + |1-\tau|^r}{2} \right)^{1/r} \quad \text{if } r \leq t \leq \infty.$$

$$J_{X,t}(\tau) = (1+\tau^r)^{1/r} \quad \text{if } -\infty \leq t \leq r'.$$

(2) Let $2 \leq r < \infty$ and $1/r + 1/r' = 1$. Then for all $\tau \geq 0$

$$S_{X,t}(\tau) = (1+\tau^r)^{1/r} \quad \text{if } r' \leq t \leq \infty.$$

$$J_{X,t}(\tau) = \left(\frac{|1+\tau|^r + |1-\tau|^r}{2} \right)^{1/r} \quad \text{if } -\infty \leq t \leq r.$$

参考文献

[1] J. Banas and B. Rzepka, Functions related to convexity and smoothness of normed spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **46** (1997), 395-424.

[2] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and their Geometry, 2nd ed., North-Holland, 1985.

[3] E. Casini, About some parameters of normed linear spaces, Atti. Acad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **80** (1986), 11-15.

[4] J. Gao and K. S. Lau, On the geometry of spheres in normed linear spaces, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 101-112.

[5] R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.

[6] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James, Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficients of Banach spaces, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[7] J. J. Schäffer, Geometry of spheres in normed spaces, LN in Pure Appl. Math. **20**, Marcel Dekker, 1976.

Yasuji Takahashi
Department of System Engineering,
Okayama Prefectural University,
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp

Mikio Kato
Department of Mathematics,
Kyushu Institute of Technology,
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp

A remark of the numerical analysis of an operator on Hilbert spaces and its application

Hideo TAKEMOTO
(Department of Mathematics, Miyagi University of Education)
and
Atsushi UCHIYAMA
(Mathematical Institute, Tohoku University)

Abstract. We shall mention an algebraic property related with an operator a in this talk that a numerical range of a with respect to the von Neumann algebra containing a . The usual numerical ranges of an operator acting on a Hilbert space H is depended on the vectors in H. In this talk, we give another notion of numerical ranges for a. Under this consideration, we shall show that the numerical ranges of every element of W-algebra M with the predual space M_* is defined by M_* in a sense of notions by Berberian and Orland [1] and Bonsal and Duncan [2 and 3].*

We use the following notions in this talk:

Let H be a separable Hilbert space and $B(H)$ the von Neumann algebra of all bounded operators on H. If a is an operator on H, then $M(a)$ means the von Neumann algebra generated by a and the identiry 1.

We shall mention the numerical range of an operator a :

Define $W(a)=\{(a\xi \mid \xi);\xi \in H, \|\xi\|=1\}$, then W(a) is a convex subset of the complex plane C.

We have the following notion introduced by Berberian and Orland:

Let A be a C*-algebra containing a and 1 and $S(A)$ the state space of A consisting of ϕ with $\phi(1) = 1$ and $\phi(x^*x) \geqq 0$ for all $x \in A$. Then $S(A)$ is a convex,compact subset of the dual space of A with the weak*-topology. Furthermore, let $U(a) = \{\phi(a); \phi \in S(A)\}$, then U(a) is a compact and convex subset of C and U(a) = W(a).

By considering the notations of numerical ranges for C^*-type introduced in above and defined by Bonsal and Duncan [2] and [3], we introduce the following another notion of numerical range for an operator a.

Let M be von Neumann algebra containing a and 1, NS(M) be the set of all normal states of M and $V(a) = \{\phi(a); \phi \in NS(M)\}$, then V(a) is a convex subset of C.

Since A vector state $\omega_\xi(\xi \in H, \|\xi\|=1)$ defined by $\omega_\xi(a)=(a\xi \mid \xi)$ for each $a \in M$ is a normal state of M, we have the relation $W(a) \subset V(a) \subset U(a)$. Furthermore, we have the following fact:

If M is a von Neumann algebra containing an operator a , then $V_M(a) = V_{M(a)}(a)$.

Lemma 1. Let M be a von Neumann algebra containing a and $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V(a)$ a sequence. If $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R^+$ is a sequence with $\Sigma\alpha_n=1$, then $\Sigma\alpha_n\lambda_n \in V(a)$. In particular, if $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W(a)$ is a sequence and $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R^+$ is a sequence with $\Sigma\alpha_n=1$, then $\Sigma\alpha_n\lambda_n \in V(a)$

Lemma 2. Let A be a bounded convex subset of the complex number plane C, then $A = \{\Sigma a_j\lambda_j;\ \lambda_j \in A,\ a_j \geqq 0,\ \Sigma a_j=1\}$

From lemma 1 and lemma 2, we have the following;

Theorem A. We have the relation; $W(a)= V(a)$ for every $a \in B(H)$.

Corollary 1. Let a an operator on $H = H^{(\infty)}=H\oplus H\oplus H\oplus \cdots$ and (a_n) an operator on $H^{(\infty)}$ with $a_n = a$, then $W(a) = W((a_n))$.

Corollary 2. Under the notion in Theorem B, if ϕ is a normal state of M, then there exists a vector $\xi \in H$ satisfying $\phi = \omega_{\xi}$.

Let M be a von Neumann algebra atcing on a Hilbert space and π a faithful normal *-representation of M to a Hilbert space H_{π}, then we have the relations ${}^t\pi(NS(\pi(M))) = NS(M)$ and ${}^t\pi(\phi)(a) = \phi(\pi(a))$ for every ϕ in $NS(\pi(M)$ and every a in M. By considering this fact and Theorem A, we have the following theorem.

Theorem B. Let a be an operator on H and M a von Neumann algebra containing a. If π is a faithful normal representation of M, then $W(a) = W(\pi(a))$.

Berberian and Orland introduced the numerical ranges for elements of C*-algebras in [1]. Furthermore, Bonsal and Duncan introduced the numerical ranges for elements of normed algebras and Banach algebras in [2] and [3]. As an application of Theorem B, we can introduce the numerical ranges in a sense of notions in [1], [2] and [3]:

Let M be a W*-algebra with the predual space M_* and $(M_*)^+_1 = \{\phi \in M_*: \phi(1) = 1$ and $\phi(x^*x) \geq 0$ for every $x \in M\}$. For every a in M, define $V_M(a) = \{\phi(a); \phi \in (M_*)^+_1\}$. Then, we have the following Theorem C.

Theorem C. Under the aboved mentioned notions, let M be a W*-algebra with the predual space M_* and a an element of M. If π is a faithful normal *-representation of M to a Hilbert space H_{π}, then $V_M(a) = V(\pi(a)) = W(\pi(a))$.

References

[1] S.K.Berberian and G.H.Orland, On the closure of the numerical range of an operator, Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 499-503.

[2] F.F.Bonsal and J.Duncan, Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series 2, Cambridge University Press, 1971.

[3] F.F.Bonsal and J.Duncan, Numerical ranges II, London Mathematical Society Lecture Note Series 10, Cambridge University Press, 1973.
[4] J.Dixmier, Von Neumann algebras, North-Holland, 1981.
[5] K.E.Gustafson and D.K.M.Rao, Numerical renge, Springer-Verlag, New York, 1997.
[6] P.Halmos, A Hilbert space problem book, 2^{nd} ed., Springer-Verlag, Nuw York, 1982.

Monotonicity of Sequences of Operator Means

Mitsuru Uchiyama
Department of Mathematics, Fukuoka University of Education
Munakata,Fukuoka, 811-4192

Abstract

Let A and B be positive definite operators. Let a, b and c be positive real numbers and d a real number. Define a pair of operator valued functions $F(r,s)$ and $G(r,s)$ of real variables $r>0$ and $s>0$ by $F(r,s)=A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{r}{2}}B^sA^{-\frac{r}{2}})^{\frac{r}{r+sc}}A^{\frac{r}{2}}$ and $G(r,s)=A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{r}{2}}B^sA^{-\frac{r}{2}})^{\frac{r+d}{r+sc}}A^{\frac{r}{2}}$. $F(r,s)$ and $G(r,s)$ are considered as weighted geometric means of A^r and B^s, and $F(r,s)=G(r,s)$ if $d=0$. We will show that if $F(a,b)\leq 1$ (or $F(a,b)\geq 1$) and if $-a\leq d\leq bc$, then $F(r,s)$ and $G(r,s)$ are both decreasing (or increasing) for $r\geq a$ and for $s\geq b$. This will lead us to a new approach to the study of operator inqualities: in fact, we will see how easily we can get some operator inequalities by using it.

1 Introduction

In this paper we denote bounded positive semidefinite operators on a Hilbert space by A, B, C and so on. A real valued continuous function $\varphi(x)$ on $[0,\infty)$ is called an *operator monotone function* if $0\leq A\leq B$ implies $\varphi(A)\leq\varphi(B)$. The fact that x^a $(0<a\leq 1)$ is operator monotone is called the *Löwner-Heinz* inequality.

For $0<\lambda<1$ and for invertible A the weighted geometric mean is defined as:

$$A \mathop{\#}_{\lambda} B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda}A^{1/2}.$$

Furuta [3, 4] showed that $A\leq B$ implies for $1\leq s,p$ and $0<r$

$$A^{1+r} \leq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}, \tag{1}$$

$$A^{1-t+r} \leq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{ps-ts+r}} \quad (0\leq t\leq 1, \quad t\leq r). \tag{2}$$

Further, in [1, 2, 10] it was shown that $A\leq B$ implies for $0<p,r$

$$e^{rA}\leq(e^{\frac{rA}{2}}e^{pB}e^{\frac{rA}{2}})^{\frac{r}{r+p}}. \tag{3}$$

These inequalities can be rewritten with the symbol $\#$; for instance, (1) is equivalent to $A\leq A^{-r}\mathop{\#}_{\frac{1+r}{p+r}}B^p$.

Kubo and Ando [6] defined a *connection,* which is denoted by σ, and showed that there is a one to one correspondence between σ and an operator monotone function $\varphi \geq 0$ on $[0, \infty)$ by the formula

$$A\sigma B = A^{1/2}\varphi(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} \tag{4}$$

if A is invertible; σ is called an *operator mean* if $A\sigma A = A$, which is equivalent to $\varphi(1) = 1$. The operator mean corresponding to $\varphi(x) = x^{1/2}$ is clearly geometric mean.

In this paper we write σ_φ for σ corresponding to φ. Our previous investigations have led us to set up a pair of operator monotone functions $\{\psi_r\}$ and $\{\phi_r\}$ with the following situation:

$$\begin{aligned} \psi_r(x^r g(x)) &= x^r, \qquad &&\text{i.e.,}\quad x^{-r}\,\sigma_{\psi_r}\, g(x) = 1, &(5)\\ \phi_r(x^r g(x)) &= x^r h(x), &&\text{i.e.,}\quad x^{-r}\,\sigma_{\phi_r}\, g(x) = h(x). &(6) \end{aligned}$$

In this situation, ψ_r may be considered to be the subsidiary function of ϕ_r.

From now on, we assume that $\{\psi_r\}_{r>0}$ and $\{\phi_r\}_{r>0}$ are families of non-negative functions on $[0, \infty)$ satisfying (5) and (6) respectively, where g and h are continuous and g is increasing and that ψ_r and ϕ_r are both operator monotone for every r which is not less than a non-negative real number. Note that ψ_r is strictly increasing on $[0, \infty)$ with $\psi_r(0) = 0$ and $\psi_r(\infty) = \infty$, so the inverse function ψ_r^{-1} on $[0, \infty)$ exists. For instance, in (5) and (6) set $g(x) = x^t$ for a fixed $t > 0$ and $h(x) = x^{-1}$, then $\psi_r(x) = x^{r/(t+r)}$ is operator monotone for $r > 0$; on the other hand $\phi_r(x) = x^{(-1+r)/(t+r)}$ is operator monotone for $r \geq 1$.

2 Criteria for Monotonicity

Theorem 2.1. *Let $\{\psi_r\}_{r\geq a}$ and $\{\phi_r\}_{r\geq a}$ $(a > 0)$ be families of non-negative operator monotone functions satisfying* (5) *and* (6). *Then the following hold:*

(a) *if $A^a\,\sigma_{\psi_a}\,B \geq 1$, then $A^r\,\sigma_{\psi_r} B$ and $A^r\,\sigma_{\phi_r}\,B$ are increasing for $r \geq a$;*

(b) *if A and B are invertible and if $A^a\,\sigma_{\psi_a}\,B \leq 1$, then $A^r\,\sigma_{\psi_r}\,B$ and $A^r\,\sigma_{\phi_r}\,B$ are decreasing for $r \geq a$.*

Proof. We only prove the first statement of (a). To do it, it suffices to show

$$A^s\,\sigma_{\psi_s}\,B \geq 1 \text{ for some } s \geq a \Rightarrow A^r\,\sigma_{\psi_r} B \geq A^s\,\sigma_{\psi_s}\,B \text{ for every } r \in [s, 2s].$$

Indeed, from $A^a \sigma_{\psi_a} B \geq 1$ it follows that $A^r \sigma_{\psi_r} B$ is increasing in $[a, 2a]$ and hence not less than 1; by the mathematical induction, we can see the statement. Since $A^r = (A^s)^{r/s}$, we may show that

$$A \sigma_{\psi_s} B \geq 1 \text{ for some } s \geq a \Rightarrow A^{r/s} \sigma_{\psi_r} B \geq A \sigma_{\psi_s} B \text{ for every } r \in [s, 2s]. \quad (7)$$

Notice $(A + \epsilon) \sigma_{\psi_s} (B + \epsilon) \geq A \sigma_{\psi_s} B \geq 1$ for $\epsilon > 0$. If we could show $(A + \epsilon)^{r/s} \sigma_{\psi_r} (B + \epsilon) \geq (A + \epsilon) \sigma_{\psi_s} (B + \epsilon)$, then we would get (7) as $\epsilon \to +0$. We therefore assume that A and B are invertible. Put $y = x^s$ in $\psi_s(x^s g(x)) = x^s$ and $\psi_r(x^r g(x)) = x^r$. Then, by setting $b = \frac{r-s}{s}$, we obtain

$$\psi_r(y^b \psi_s^{-1}(y)) = y^b y, \quad i.e., \quad y^{-b} \sigma_{\psi_r} \psi_s^{-1}(y) = y. \quad (8)$$

The assumption $A \sigma_{\psi_s} B \geq 1$ implies $\psi_s(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) \geq A^{-1}$. Here, denote the left-hand side by H and the right-hand side by K. Since $H \geq K$ and $0 \leq b \leq 1$, by the Löwner-Heinz inequality, $K^{-b} \geq H^{-b}$. Hence we have

$$K^{-b} \sigma_{\psi_r} \psi_s^{-1}(H) \geq H^{-b} \sigma_{\psi_r} \psi_s^{-1}(H) = H.$$

Multiplying the above from the left and the right with $A^{1/2}$ yields

$$A^{b+1} \sigma_{\psi_r} B \geq A \sigma_{\psi_s} B.$$

Consequently, we have (7). □

Theorem 2.2. *Let $\{\psi_r\}_{r>0}$ and $\{\phi_r\}_{r>0}$ be families of non-negative operator monotone functions satisfying* (5) *and* (6). *If $A \leq B$ or if $\log A \leq \log B$ for invertible A and B, then for $r > 0$*

$$A^r \leq \psi_r(A^{\frac{r}{2}} g(B) A^{\frac{r}{2}}), \quad \psi_r(B^{\frac{r}{2}} g(A) B^{\frac{r}{2}}) \leq B^r, \quad (9)$$

$$A^{\frac{r}{2}} h(B) A^{\frac{r}{2}} \leq \phi_r(A^{\frac{r}{2}} g(B) A^{\frac{r}{2}}), \quad \phi_r(B^{\frac{r}{2}} g(A) B^{\frac{r}{2}}) \leq B^{\frac{r}{2}} h(A) B^{\frac{r}{2}}. \quad (10)$$

Remark 2.1. In the above theorems, we assumed that the families $\{\psi_r\}_{r>0}$ and $\{\phi_r\}_{r>0}$ satisfy (5) and (6) respectively. However their proofs are still valid if

$$\phi_r(y^b \psi_s^{-1}(y)) = y^b \phi_s(\psi_s^{-1}(y)) \quad (y > 0), \quad (11)$$

and (8) hold. Therefore, theorems are true even if we assume that ψ_r and ϕ_r are non-negative operator monotone functions on $[0, \infty)$ with $\psi_r(0) = 0$ and $\psi_r(\infty) = \infty$ and that for all r and s with $r > s > 0$

$$\psi_r(\psi_s(x)^{\frac{r-s}{s}} x) = \psi_s(x)^{\frac{r}{s}} \quad \text{and} \quad \phi_r(\psi_s(x)^{\frac{r-s}{s}} x) = \psi_s(x)^{\frac{r-s}{s}} \phi_s(x)$$

instead of (5) and (6); because they satisfy

$$\psi_r(y^{\frac{r-s}{s}}\psi_s^{-1}(y)) = y^{\frac{r}{s}} \quad \text{and} \quad \phi_r(y^{\frac{r-s}{s}}\psi_s^{-1}(y)) = y^{\frac{r-s}{s}}\phi_s(\psi_s^{-1}(y)),$$

from which (8) and (11) follow.

Remark 2.2. Let $\{A_r\}_{r>0}$ be a weakly continuous semi-group of positive semidefinite operators, that is, $A_{r+s} = A_r A_s$. Then we get $(A_r)^a = A_{ra}$ for $a > 0$. Thus from Theorem 2.2 we obtain

(a) *if* $A_a \,\sigma_{\psi_b}\, B \geq 1$, *then* $A_{ar} \,\sigma_{\psi_{br}}\, B$ *is increasing for* $r \geq 1$;

(b) *if* $A_a \,\sigma_{\psi_b}\, B \leq 1$ *for invertible* A_a *and* B, *then* $A_{ar} \,\sigma_{\psi_{br}}\, B$ *is decreasing for* $r \geq 1$.

3 Weighted Geometric Means

Note that $A \underset{\lambda}{\#} B = B \underset{1-\lambda}{\#} A$.

Lemma 3.1. *Let* $a > 0$, $c > 0$ *and* $c > d$. *Then the following hold:*

(a) *if* A *and* B *are invertible and if* $A^a \underset{\frac{a}{a+c}}{\#} B \leq 1$, *then* $A^r \underset{\frac{r+d}{r+c}}{\#} B$ *is decreasing for* $r \geq \max(a, -d)$;

(b) *if* $A^a \underset{\frac{a}{a+c}}{\#} B \geq 1$, *then* $A^r \underset{\frac{r+d}{r+c}}{\#} B$ *is increasing for* $r \geq \max(a, -d)$.

Theorem 3.2. *For a given* $c > 0$ *define a function* $F(r, s)$ *by*

$$F(r,s) = A^r \underset{\frac{r}{r+sc}}{\#} B^s \quad \text{for } r > 0,\ s > 0. \tag{12}$$

Then, for $r \geq a > 0$, $s \geq b > 0$ *the following hold:*

(a) *if* A *and* B *are both invertible and* $F(a,b) \leq 1$, *then* $F(r,s) \leq F(a,b)$;

(b) *if* $F(a,b) \geq 1$, *then* $F(r,s) \geq F(a,b)$.

By using the above theorem twice, from $F(a,b) \leq 1$ it follows that $F(r_2, s_2) \leq F(r_1, s_1) \leq F(a,b)$ for $r_2 \geq r_1 \geq a$ and for $s_2 \geq s_1 \geq b$.

The case $\lambda = 1/2$ of the following corollary resembles the result shown in [1].

Corollary 3.3. *For a given λ as $0 < \lambda < 1$ the following hold:*

(a) *if $A \underset{\lambda}{\#} B \leq 1$ for invertible A and B , then $A^r \underset{\lambda}{\#} B^r$ is decreasing for $r \geq 1$;*

(b) *if $A \underset{\lambda}{\#} B \geq 1$, then $A^r \underset{\lambda}{\#} B^r$ is increasing for $r \geq 1$.*

The following is the main theorem of this section.

Theorem 3.4. *For real numbers $c > 0$ and d, define $F(r,s)$ by (12) and $G(r,s)$ by*

$$G(r,s) = A^r \underset{\frac{r+d}{r+sc}}{\#} B^s \quad \text{for } r > 0,\ s > 0 \quad \text{with } 0 \leq \frac{r+d}{r+sc} \leq 1. \tag{13}$$

Let $a > 0$, $b > 0$ and $-a \leq d \leq bc$. Then for $r_2 \geq r_1 \geq a$ and for $s_2 \geq s_1 \geq b$ the following hold:

(a) *if A and B are both invertible and $F(a,b) \leq 1$, then $G(r_2, s_2) \leq G(r_1, s_1)$;*

(b) *if $F(a,b) \geq 1$, then $G(r_2, s_2) \geq G(r_1, s_1)$.*

The above theorem says that if $F(a,b) \leq 1$, $G(a,b) \leq K$ then $G(r,s) \leq K$ for $r \geq a$, $s \geq b$; moreover, if $F(a,b) = 1$ then $G(r,s)$ is constant, though this directly follows from the definitions of $F(r,s)$ and $G(r,s)$. Notice that $G(r,s) = F(r,s)$ if $d = 0$.

So far, we have seen that $F(a,b) \leq 1$ (or $F(a,b) \geq 1$) has a great influence on $G(r,s)$. Now we give a sufficient condition on $G(r,s)$ in order that $F(a,b) \leq 1$ (or $F(a,b) \geq 1$).

Proposition 3.5. *Let A and B be invertible. Let $a > 0$ and $c > d > 0$. Then the following hold:*

$$A^a \underset{\frac{a+d}{a+c}}{\#} B \leq A^{-d} \quad \Rightarrow \quad A^a \underset{\frac{a}{a+c}}{\#} B \leq 1;$$

$$A^a \underset{\frac{a+d}{a+c}}{\#} B \geq A^{-d} \quad \Rightarrow \quad A^a \underset{\frac{a}{a+c}}{\#} B \geq 1.$$

4 Applications

We mentioned after Theorem 2.3 that (9) and (10) are extensions of (1) and (3). However we give a simple proof of (1) to explain how Theorem 3.4 is useful, and we give an extension of (2).

(1): We may assume A and B are invertible. From $A \le B$ it follows that $A^{-a} \ge B^{-a}$ for every a with $0 < a < 1$. Substitute A^{-1} for A in (12) and (13), and put $c = 1$ and $d = 1$. Then

$$F(a,1) = A^{-a} \mathop{\#}_{\frac{a}{a+1}} B \ge B^{-a} \mathop{\#}_{\frac{a}{a+1}} B = 1, \quad G(a,1) = A^{-a} \mathop{\#}_{\frac{a+1}{a+1}} B = B.$$

Thus by Theorm 3.4

$$G(r,s) = A^{-r} \mathop{\#}_{\frac{r+1}{r+s}} B^s$$

is increasing for $r \ge a$ and for $s \ge 1$; especially, $G(r,s) \ge G(a,1) = B \ge A$. Since a is arbitrary, we have $G(r,s) \ge A$ for $r > 0, s \ge 1$. Replace p for s to get (1). $\square$

Proposition 4.1. *If $A \le B \le C$ and if B is invertible, then for $0 \le t \le 1$, $t \le r$, $1 \le p$ and $1 \le s$*

$$\begin{aligned} A^{1-t+r} &\le \{A^{r/2}(B^{-\frac{t}{2}}C^pB^{-\frac{t}{2}})^sA^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{ps-ts+r}}, \\ \{C^{r/2}(B^{-\frac{t}{2}}A^pB^{-\frac{t}{2}})^sC^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{ps-ts+r}} &\le C^{1-t+r}. \end{aligned} \tag{14}$$

Proof. If $t = 0$, (14) reduces to (1). So we assume $0 < t \le 1$. We may, without loss of generality, assume A is invertible. Put

$$K = B^{-\frac{t}{2}}C^pB^{-\frac{t}{2}}.$$

Then (14) is equivalent to

$$A^{1-t} \le A^{-r} \mathop{\#}_{\frac{r+1-t}{r+ps-ts}} K^s \quad (t \le r,\ 1 \le p,\ 1 \le s).$$

Put

$$F(r,s) = A^{-r} \mathop{\#}_{\frac{r}{r+ps-ts}} K^s \quad \text{and} \quad G(r,s) = A^{-r} \mathop{\#}_{\frac{r+1-t}{r+ps-ts}} K^s.$$

$B^t \ge A^t$ yields $A^{\frac{t}{2}}B^{-t}A^{\frac{t}{2}} \le 1$; since $x^{\frac{t}{p}}$ is operator concave (see [5]) we obtain

$$A^{\frac{t}{2}}B^{-\frac{t}{2}}(C^p)^{\frac{t}{p}}B^{-\frac{t}{2}}A^{\frac{t}{2}} \le (A^{\frac{t}{2}}B^{-\frac{t}{2}}C^pB^{-\frac{t}{2}}A^{\frac{t}{2}})^{\frac{t}{p}},$$

from which it follows that

$$\begin{aligned} F(t,1) &= A^{-t} \#_{\frac{t}{p}} K^1 \geq B^{-\frac{t}{2}} C^t B^{-\frac{t}{2}} \geq 1, \\ G(t,1) &= A^{-t} \#_{\frac{1}{p}} K^1 \geq B^{-\frac{t}{2}} C B^{-\frac{t}{2}} \geq B^{1-t} \geq A^{1-t}. \end{aligned}$$

By virtue of Theorem 3.4, $G(r,s)$ is therefore increasing for $r \geq t$ and for $s \geq 1$; in particular, $G(r,s) \geq A^{1-t}$. Thus we get (14). The second inequality follows from (14) by taking the inverse of it. □

References

[1] T. Ando, On some operator inequalities, *Math. Ann.* 279(1987), 157–159.

[2] M. Fujii, T. Furuta, E. Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, *Linear Algebra Appl.* 149(1991), 91–96.

[3] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101(1987), 85–88.

[4] T. Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, *Linear Algebra Appl.* 219(1995), 139–155.

[5] F. Hansen, G. K. Pedersen, Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem. *Math. Ann.* 258(1982), 229 - 241.

[6] F. Kubo, T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.* 246(1980), 205–224.

[7] W. Pusz, S. L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, *Rep. Math. Phys.* 8(1975), 159–170.

[8] G. K. Pedersen, M. Takesaki, The operator equation $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 311–312.

[9] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras,* Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1971

[10] M. Uchiyama, Some exponential operator inequalities, *Math. Inequal. Appl.* 2(1999), 469–471.

[11] M. Uchiyama, Operator monotone functions which are defined implicitly and operator inequalities, *J. Funct. Anal.* 175(2000), 330–347.

[12] M. Uchiyama, Mixed matrix (operator) inequality, *Linear Algebra Appl.* to appear.

Inverses of a family of bounded linear operators on a Hilbert space

Saburou Saitoh

Department of Mathematics, Faculty of Engineering
Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan
E-mail: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

Abstract

We considered a generalization of the Pythagorean theorem with geometric meanings and from the generalization we were able to obtain a general and fundamental concept for the inversion of a family of bounded linear operators with continuous parameters on a Hilbert space into various Hilbert spaces. After reviewing the applications to linear transforms in the framework of Hilbert spaces of the general theory of reproducing kernels, we shall state the results for the case of operator versions. We shall consider solutions and generalized solutions of general bounded linear operator equations with continuous parameters on a Hilbert space.

1. Reproducing kernels

We consider any positive matrix $K(p,q)$ on E; that is, for an abstract set E and for a complex-valued function $K(p,q)$ on $E \times E$, it satisfies that for any finite points $\{p_j\}$ of E and for any complex numbers $\{C_j\}$,

$$\sum_j \sum_{j'} C_j \overline{C_{j'}} K(p_{j'}, p_j) \geqq 0.$$

Then, by the fundamental theorem by Moore–Aronszajn, we have:

Proposition 1.1([1]) *For any positive matrix $K(p,q)$ on E, there exists a uniquely determined functional Hilbert space H_K (RKHS H_K) comprisingfunctions$\{f\}$ on E and admitting the reproducing kernel $K(p,q)$ satisfying and characterized by*

$$K(\cdot, q) \in H_K \text{ for any } q \in E \tag{1.1}$$

and, for any $q \in E$ and for any $f \in H_K$

$$f(q) = (f(\cdot), K(\cdot, q))_{H_K}. \tag{1.2}$$

For some general properties for reproducing kernel Hilbert spaces and for various constructions of the RKHS H_K from a positive matrix $K(p,q)$, see the recent book [15] and its Chapter 2, Section 5, respectively.

2. Connections with linear mappings

Let us connect linear mappings in the framework of Hilbert spaces with reproducing kernels ([8]).

For an abstract set E and for any Hilbert (possibly finite–dimensional) space H, we shall consider an H–valued function $\boldsymbol{h}$ on E

$$\boldsymbol{h}: \quad E \longrightarrow H \tag{2.1}$$

and the linear mapping for H

$$f(p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}(p))_H \quad \text{for} \quad \boldsymbol{f} \in H \tag{2.2}$$

into a linear space comprising functions on E. For this linear mapping (2.2), we form the positive matrix $K(p,q)$ on E defined by

$$K(p,q) = (\boldsymbol{h}(q), \boldsymbol{h}(p))_H \quad \text{on} \quad E \times E. \tag{2.3}$$

Then, we have the following fundamental results:

(I) For the RKHS H_K admitting the reproducing kernel $K(p,q)$ defined by (2.3), the images $\{f(p)\}$ by (2.2) for H are characterized as the members of the RKHS H_K.

(II) In general, we have the inequality in (2.2)

$$\|f\|_{H_K} \leqq \|\boldsymbol{f}\|_H, \tag{2.4}$$

however, for any $f \in H_K$ there exists a uniquely determined $\boldsymbol{f}^* \in H$ satisfying

$$f(p) = (\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{h}(p))_H \quad \text{on } E \tag{2.5}$$

and

$$\|f\|_{H_K} = \|\boldsymbol{f}^*\|_H. \tag{2.6}$$

In (2.4), the isometry holds if and only if $\{\boldsymbol{h}(p); p \in E\}$ is complete in H.

(III) We can obtain the inversion formula for (2.2) in the form

$$f \longrightarrow \boldsymbol{f}^*, \tag{2.7}$$

by using the RKHS H_K.

However, this inversion formula will depend on, case by case, the realizations of the RKHS H_K.

(IV) Conversely, if we have an isometric mapping $\tilde{L}$ from a RKHS H_K admitting a reproducing kernel $K(p,q)$ on E onto a Hilbert space H, then the mapping is linear and its isometric inversion $\tilde{L}^{-1}$ is represented in the form (2.2). Here, the Hilbert space H–valued function $\boldsymbol{h}$ satisfying (2.1) and (2.2) is given by

$$\boldsymbol{h}(p) = \tilde{L}K(\cdot,p) \quad \text{on} \quad E \tag{2.8}$$

and, then $\{\boldsymbol{h}(p); p \in E\}$ is complete in H.

When (2.2) is isometrical, sometimes we can use the isometric mapping for a realization of the RKHS H_K, conversely — that is, if the inverse L^{-1} of the linear mapping (2.2) is known, then we have $\|f\|_{H_K} = \|L^{-1}f\|_H$.

We shall state some general applications of the results (I)$\sim$(IV) to several wide subjects and their basic references:

(1) Linear mappings ([8],[12]).

(2) Linear mappings among smooth functions ([19]).

(3) Nonharmonic linear mappings ([9]).

(4) Various norm inequalities ([9],[13]).

(5) Nonlinear mappings ([13],[16]).

(6) Linear integral equations ([20]).

(7) Linear differential equations with variable coefficients ([20]).

(8) Approximation theory ([3],[2]).

(9) Representations of inverse functions ([14]).

(10) Various operators among Hilbert spaces ([17]).

(11) Sampling theorems ([15], Chapter 4, Section 2; [5]).

(12) Interpolation problems of Pick-Nevanlinna type ([9],[10]).

(13) Analytic extension formulas and their applications ([21],[11]).

In this survey article, we shall present also new results on

(14) Inversions of a family of bounded linear operators on a Hilbert space into various Hilbert spaces, which are generalizations of [22] and [7].

Furthermore, in connection with Kaczmarz's Method for a finite number of bounded linear operator equations on a Hilbert space, we shall give our generalized solutions for general operator equations with continuous parameters.

3. Operator versions

We shall give operator versions of the fundamental theory (I) $\sim$ (IV) which may be expected to have many concrete applications. In particular, for full generalizations of the Pythagorean theorem with geometric meanings, see [7]. Some special versions were given in [22].

For an abstract set $\mathbf{\Lambda}$, we shall consider an operator-valued function L_λ on $\mathbf{\Lambda}$,

$$\mathbf{\Lambda} \longrightarrow L_\lambda \tag{3.1}$$

where L_λ are bounded linear operators from a Hilbert space H into various Hilbert spaces $\mathbf{H}_\lambda$,

$$L_\lambda : H \longrightarrow \mathbf{H}_\lambda. \tag{3.2}$$

In particular, we are interested in the inversion formula

$$L_\lambda x \longrightarrow x, \quad x \in H. \tag{3.3}$$

Here, we consider $\{L_\lambda x; \lambda \in \Lambda\}$ as informations obtained from x and we wish to determine x from the informations. However, the informations $L_\lambda x$ belong to various Hilbert spaces $\mathbf{H}_\lambda$, and so, in order to unify the informations in a sense, we shall take fixed elements $\mathbf{b}_{\lambda,\omega} \in \mathbf{H}_\lambda$ and consider the linear mapping from H

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{b}}(\lambda,\omega) &= (L_\lambda x, \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_{\mathbf{H}_\lambda} \\ &= (x, L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_H, \quad x \in H \end{aligned} \tag{3.4}$$

into a linear space comprising functions on $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}$. For the informations $L_\lambda x$, we shall consider $X_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega)$ as observations (measurements, in fact) for x depending on λ and ω. For this linear mapping (3.4), we form the positive matrix $K_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega; \lambda', \omega')$ on $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}$ defined by

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega; \lambda', \omega') &= (L_{\lambda'}^* \mathbf{b}_{\lambda',\omega'}, L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_H \\ &= (L_\lambda L_{\lambda'}^* \mathbf{b}_{\lambda',\omega'}, \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_{\mathbf{H}_\lambda} \quad \text{on} \quad \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Then, as in (I) $\sim$ (IV), we have the following fundamental results:

(I') For the RKHS $H_{K_{\mathbf{b}}}$ admitting the reproducing kernel $K_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega; \lambda', \omega')$ defined by (3.5), the images $\{X_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega)\}$ by (3.4) for H are characterized as the members of the RKHS $H_{K_{\mathbf{b}}}$.

(II') In general, we have the inequality in (3.4)

$$\|X_{\mathbf{b}}\|_{H_{K_{\mathbf{b}}}} \leqq \|x\|_H, \tag{3.6}$$

however, for any $X_{\mathbf{b}} \in H_{K_{\mathbf{b}}}$ there exists a uniquely determined $x' \in H$ satisfying

$$X_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega) = (x', L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_H \quad \text{on} \quad \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega} \tag{3.7}$$

and

$$\|X_{\mathbf{b}}\|_{H_{K_{\mathbf{b}}}} = \|x'\|_H. \tag{3.8}$$

In (3.6), the isometry holds if and only if $\{L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega}; (\lambda, \omega) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}\}$ is complete in H.

(III') We can obtain the inversion formula for (3.4) and so, for the mapping (3.3) as in (III), in the form

$$L_\lambda x \longrightarrow (L_\lambda x, \mathbf{b}_{\lambda,\omega})_{\mathbf{H}_\lambda} = X_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega) \longrightarrow x', \tag{3.9}$$

by using the RKHS $H_{K_{\mathbf{b}}}$.

(IV') Conversely, if we have an isometric mapping $\tilde{L}$ from a RKHS $H_{K_{\mathbf{b}}}$ admitting a reproducing kernel $K_{\mathbf{b}}(\lambda, \omega; \lambda', \omega')$ on $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}$ in the form (3.5) using bounded linear operators L_λ and fixed vectors $\mathbf{b}_{\lambda,\omega}$ onto a Hilbert space H, then the mapping $\tilde{L}$ is linear and the isometric inversion $\tilde{L}^{-1}$ is represented in the form (3.4) by using

$$L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega} = \tilde{L} K_{\mathbf{b}}(\cdot, \cdot; \lambda, \omega) \quad \text{on} \quad \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}. \tag{3.10}$$

Further, then $\{L_\lambda^* \mathbf{b}_{\lambda,\omega}; (\lambda, \omega) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Omega}\}$ is complete in H.

The author obtained the above concept for the operator versions from a generalization of the Pythagorean theorem in the following way:

Let $x \in \mathbf{R}^n$ and $\{e_j\}_{j=1}^n$ be linearly independent unit vectors. We consider the linear mappings

$$L : x \longrightarrow \{x - (x, e_j)e_j\}_{j=1}^n \tag{3.11}$$

from $\mathbf{R}^n$ into $\mathbf{R}^n$. Then we wish to establish an isometric identity and inversion formula in the operators. Recall the Pythagorean theorem for $n = 2$. By our operator versions, we can establish the desired results.

Note that in (3.11), for $n \geqq 3$ if we consider

$$\{\|x - (x, e_j)e_j\|\}_{j=1}^n \tag{3.12}$$

as scalar valued mappings, then the mappings are not linear more. So, we must consider the operator valued mappings in the problems.

We found the book[6] and we see that some related equations were considered as in the following way ([6], pages 128-157):

Let $H, H_j; j = 1, 2, ..., p$ be Hilbert spaces and let

$$R_j : H \longrightarrow H_j, \quad j = 1, 2, ..., p \tag{3.13}$$

be linear continuous maps from H onto H_j. Let $g_j \in H_j$ be given. Then, consider the problem to compute $f \in H$ such that

$$R_j f = g_j, \quad j = 1, 2, ..., p. \tag{3.14}$$

This equations are very important in the theory of computerized tomography by the discretization. The typical method is Kaczmarz's Method based on an iterative method by using the orthogonal projections P_j in H onto the affine subspaces $R_j f = g_j$.

Our direct solutions for (3.14) seem that the result is stable for the sake of the use (3.14) as data, because we use (3.9) which is given by the inner product.

In general, in equations (3.14) we have noises and errors for the data g_j and so, in those cases the equations do, in general, not have solutions. So, we will consider a more general solution which is called a generalized solution (inverse) in the next section.

4. Generalized solutions and best approximations

In order to represent our generalized solutions explicitly, we shall consider bounded linear operators on a reproducing kernel Hilbert space. So, we consider the Hilbert space H_K on E stated in Section 1. We consider H as H_K in Section 3. We assume that the direct integral

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbf{\Lambda}}^{\oplus} \mathbf{H}_\lambda d\mu(\lambda) \tag{4.1}$$

of the Hilbert spaces $\mathbf{H}_\lambda$ on $\mathbf{\Lambda}$ converges with a σ finite positive measure $d\mu$ on $\mathbf{\Lambda}$. We assume that the bounded linear operators L_λ in (3.2) are bounded on H_K into $\mathbf{H}$ in the sense:

$$\int_{\mathbf{\Lambda}} \| L_\lambda f \|_{\mathbf{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \leqq M \| f \|_{H_K}^2 \tag{4.2}$$

for some constant $M \geqq 0$.

In this setting, we consider the extremal problem:

$$\inf_{f \in H_K} \int_{\mathbf{\Lambda}} \| L_\lambda f - g(\lambda) \|_{\mathbf{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda), \tag{4.3}$$

which gives a generalized solution for the equations

$$L_\lambda f = g(\lambda) \quad \text{on} \quad H_K \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_\lambda. \tag{4.4}$$

We shall write the operators $\{L_\lambda\}$ as L from H_K into $\mathbf{H}$ in the sense (4.2). Let L^* be the adjoint operator of L from $\mathbf{H}$ into H_K. We form the positive matrix

$$k(p, q) = (L^* LK(\cdot, q), L^* LK(\cdot, p))_{H_K} \quad \text{on} \quad E \times E. \tag{4.5}$$

Then, we obtain

Theorem 4.1 *For a function $g \in \mathbf{H}$, there exits a function $\tilde{f}$ in H_K such that*

$$\inf_{f \in H_K} \int_{\mathbf{\Lambda}} \| L_\lambda f - g(\lambda) \|_{\mathbf{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) = \int_{\mathbf{\Lambda}} \| L_\lambda \tilde{f} - g(\lambda) \|_{\mathbf{H}_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \tag{4.6}$$

if and only if, for the RKHS H_k

$$L^*g \in H_k. \tag{4.7}$$

Furthermore, if there exist the best approximations $\tilde{f}$ satisfying (4.6), then there exists a unique extremal function $\check{f}$ with the minimum norm in H_K, and this function is expressible in the form

$$\check{f}(p) = (L^*g, L^*LK(\cdot,p))_{H_k} \quad \text{on} \quad E. \tag{4.8}$$

In this theorem, note that

$$(L^*g)(p) = (L^*g, K(\cdot,p))_{H_K} = (g, LK(\cdot,p))_{\mathbf{H}}; \tag{4.9}$$

that is, the adjoint operator L^* is expressible in terms of $g, L, K(\cdot,p)$ and $\mathbf{H}$.

For some proof of this theorem, we can apply the argument in [3].

As a simple example, we shall consider the space H_K on $[0,\infty)$ for $K(x,y) = \min\{x,y\}$. This space is composed of all absolutely continuous real-valued functions on $[0,\infty)$ and $f(0) = 0$ equipped with the norm

$$\|f\|^2_{H_K} = \int_0^\infty f'(x)^2 dx. \tag{4.10}$$

As a space $\mathbf{H}$ we consider the space $L_2((0,\infty), e^{-\lambda}d\lambda)$ and a bounded linear operator L:

$$L_\lambda f = \int_0^\lambda f(\xi)d\xi \tag{4.11}$$

from H_K into $\mathbf{H}$. Then, the adjoint operator L^* from $\mathbf{H}$ into H_K is given by

$$(L^*g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(\lambda)\lambda^2 e^{-\lambda}d\lambda + \int_x^\infty g(\lambda)[x\lambda - \frac{1}{2}x^2]e^{-\lambda}d\lambda \tag{4.12}$$

and we can discuss the problem, for any $g \in \mathbf{H}$,

$$\inf_{f\in H_K} \int_0^\infty |\int_0^\lambda f(\xi)d\xi - g(\lambda)|^2 e^{-\lambda}d\lambda. \tag{4.13}$$

We can give a complete solution for the problem. We would like to discuss those concrete problems in separate papers.

We are interested in some concrete results for typical problems such as generalized solutions for ordinary differential equations in connection with reproducing kernels, Green's functions and the related completeness in (4.8).

References

[1] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68**(1950), 337–404.

[2] D.-W. Byun and S. Saitoh. Approximation by the solutions of the heat equation. *J. Approximation Theory*, **78** (1994), 226–238.

[3] D.-W. Byun and S. Saitoh. Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces. *Proc. of the 2th International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland*, (1994), 55–61.

[4] N. Hayashi. Analytic function spaces and their applications to nonlinear evolution equations. *Analytic Extension Formulas and their Applications*, (2001), Kluwer Academic Publishers, 59–86.

[5] J. R. Higgins. A sampling principle associated with Saitoh's fundamental theory of linear transformations. *Analytic Extension Formulas and their Applications*, (2001), Kluwer Academic Publishers, 73–86.

[6] F. Natterer. The Mathematics of Computerized Tomography, SIAM, *In Applied Mathematics* 32 (2001), Philadelphia.

[7] Th. M. Rassias and S. Saitoh. The Pythagorean theorem and linear mappings. *PanAmerican Math. J.* (to appear).

[8] S. Saitoh. Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **89** (1983), 74–78.

[9] S. Saitoh. Theory of Reproducing Kernels and its Applications. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **189**(1988), Longman Scientific & Technical, UK.

[10] S. Saitoh. Interpolation problems of Pick-Nevanlinna type. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **212**(1989), 253–262.

[11] S. Saitoh. Representations of the norms in Bergman-Selberg spaces on strips and half planes. *Complex Variables*, **19** (1992), 231–241.

[12] S. Saitoh. One approach to some general integral transforms and its applications. *Integral Transforms and Special Functions*, **3** (1995), 49–84.

[13] S. Saitoh. Natural norm inequalities in nonlinear transforms. *General Inequalities* **7**, (1997), 39–52. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston.

[14] S. Saitoh. Representations of inverse functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3633–3639.

[15] S. Saitoh. Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **369** (1997). Addison Wesley Longman, UK.

[16] S. Saitoh. Nonlinear transforms and analyticity of functions. *Nonlinear Mathematical Analysis and Applications*, (1998), 223–234. Hadronic Press, Palm Harbor.

[17] S. Saitoh. Various operators in Hilbert space induced by transforms. *International J. of Applied Math.*, **1** (1999), 111–126.

[18] S. Saitoh. Applications of the general theory of reproducing kernels. *Reproducing Kernels and their Applications*, (1999), Kluwer Academic Publishers, 165–188.

[19] S. Saitoh and M. Yamamoto. Integral transforms involving smooth functions. *Reproducing Kernels and their Applications*, (1999), Kluwer Academic Publishers, 149–164.

[20] S. Saitoh. Linear integro-differential equations and the theory of reproducing kernels. *Volterra Equations and Applications.* C. Corduneanu and I.W. Sandberg (eds), Gordon and Breach Science Publishers (2000), Amsterdam.

[21] S. Saitoh. Analytic extension formulas, integral transforms and reproducing kernels. *Analytic Extension Formulas and their Applications*, (2001), Kluwer Academic Publishers, 207–232.

[22] S. Saitoh. Applications of the reproducing kernel theory to inverse problems. *Comm. Korean Math. Soc.*, **16** (2001), 371–383.

[23] S. Saitoh and M. Mori. Representations of analytic functions in terms of local values by means of the Riemann mapping function. *Complex Variables*, **45**(2001), 387–393.

[24] S. Saitoh. Principle of telethoscope. *Functional-Analytic and complex methods, their interactions and Applications to Partial Differential Equations – proceedings of the International Graz Workshop.* Graz, Austria 12 - 16, February 2001, World Scientific.

Bochner-Schoenberg-Eberlein type extensions of measure algebras and its application

J. Inoue (Hokkaido Univ.)

Let G be a LCA group, and $M(G)$ denotes the usual measure algebra on G. In this note, we consider Bochner-Schoenberg-Eberlein type extension of $M(G)$, and show that this extension can be used to construct the structure semigroup of $M(G)$.

1. Bochner-Schoenberg-Eberlein type extension of $M(G)$.

Throughout this note, G denotes a LCA group, in which the group operation of x and y is denoted by xy. $M(G)$ stands for an usual measure algebra of all the bounded regular complex Borel measures on G with the convolution multiplication. $\Delta := \Delta_{M(G)}$ is the maximal ideal space of $M(G)$.

Dfinition 1. For a complex function σ on Δ, we define

$$\|\sigma\|_{BSE} := \inf \Big\{ C \geq 0; \ \ | \sum_{i=1}^{n} c_i\sigma(\phi_i) | \leq C \| \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i \|_{M(G)^*}, \\ , c_i \in \mathbf{C}, \phi_i \in \Delta, i = 1, .., n, n \in \mathrm{N} \Big\}$$

Bochner-Schoenberg-Eberlein type extension of $M(G)$ is defined by

$$D_{BSE}(\Delta) := \{\sigma ; \text{complex function on } \Delta, \|\sigma\|_{BSE} < \infty\}$$

The following Theorem A and B are due to [3].

Lemma A [3; Lemma 1.] With the pointwise sum, multiplication, scalar product, $(D_{BSE}(\Delta), \|\cdot\|_{BSE})$ becomes a semisimple commutative Banach algebra.

Lemma B [3; Theorem 4.] Let σ be a complex function on Δ. Then the following (a) and (b) are equivalent each other.

(a) $\sigma \in D_{BSE}(\Delta)$.

(b) $\exists \{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$; a bounded net in $M(G)$ such that $\lim_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\mu}_\lambda(\phi) = \sigma(\phi) \quad (\phi \in \Delta)$.

2. Construction of the structure semigroup of $M(G)$.

In the following, we give the definitions and Lemmas (without proofs) which lead to the construction of the strucuture semigroup of $M(G)$.

Lemma 1 is derived from Lemma B. Lemma 2 , Lemma 3 and Lemma 5 are derived by similar arugoments in Chapter 3 of [1]. The remained lemmas and theorem can be proved by standard arguments in haramonic analysis,

Our method can be applied not only to $M(G)$ but also to any closed L-subalgebra of locally compact abelian topological semigroups. .

For Taylor's representation theorem of commutative convolution measure algebras, see [4] and [5].

$\phi = \{\phi_\mu\}_{\mu\in M(G)}$ is called a generalized character on G if the following conditions are satisfied:

(i) $\phi_\mu \in L^\infty(|\mu|), \quad \mu \in M(G)$,

(ii) $|\mu| >> |\nu|$ implies $\phi_\mu(x) = \phi_\nu(x)$ a.e.x/ν

(iii) $\phi_\mu(xy) = \phi_\mu(x)\phi_\mu(y) \quad a.e.(x,y)/\mu \times \mu$

(iv) $\sup\{\|\phi_\mu\|_\infty; \mu \in M(G)\} \leq 1$

Note that $1{:=}\{1_\mu\}_{\mu\in M(G)}$, where $1_\mu(x) = 1$ a. e.x/μ, is obviously a generalized character.

It is well known([1]) that we can identify Δ with the set of all the generalized characters on G, and by this identification, we can define multiplication and involution in Δ:

$$\phi\psi := \{\phi_\mu\psi_\mu\}_{\mu\in M(G)}, \quad \phi^* := \{\overline{\phi}_\mu\}_{\mu\in M(G)}$$

With thes definitions, Δ become a commutative semigroup with the involution * and the unit element 1.

A function σ on Δ is positive definite if and only if

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\sigma(\phi_j^*\phi_k) \geq 0 \quad (c_j \in \mathbf{C}, \phi_j \in \Delta, j = 1, ..., n, n \in \mathbf{N})$$

Defintion 2 We put

$$\mathcal{P} := \{\sigma \in D_{BSE}(\Delta) : \sigma \text{ is positive definte}, \sigma(1) = \|\sigma\|_{BSE} = 1\}$$

, and introduce in $\mathcal{P}$ the pointwise convergence topology on Δ.

By Theorem B, it is easy to see that $\mathcal{P}$ forms a compact convex set.

Lemma 1. (1) $\forall\sigma \in D_{BSE}(\Delta), \exists\sigma_j \in \mathcal{P}, 0 \leq \alpha_j \leq 2\|\sigma\|_{BSE} \quad j = 1,2,3,4;$

$$\sigma = \alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2 + i\alpha_3\sigma_3 - i\alpha_4\sigma_4.$$

Thus we have

$$D_{BSE}(\Delta) = \{\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2 + i\alpha_3\sigma_3 - i\alpha_4\sigma_4 : \ \sigma_j \in \mathcal{P}, 0 \leq \alpha_j < \infty\}$$

(2) $\sigma \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \exists$net $\{\mu_\lambda\} \subseteq M(G)_1^+$ s.t., $\lim_\lambda \tilde{\mu}_\lambda(\varphi) = \sigma(\varphi) \quad (\varphi \in \Delta)$, where $M(G)_1^+$ denotes the set of probability measures in $M(G)$.

Lemma 2 $\forall\sigma \in \mathcal{P}, \forall\phi \in \Delta$, we have the follwoing relations:

$$\text{(i) } \sigma(\phi^*) = \overline{\sigma(\phi)} \text{ (ii) } \mid \sigma(\phi) \mid^2 \leq \sigma(\phi^*\phi) \text{ (iii) } \mid \sigma(\phi) \mid \leq 1$$

Definition 3 $\hat{\Delta}$ denote the set of bounded semicharacters on Δ.

Lemma 3 (i) ex$[\mathcal{P}] = \mathcal{P} \cap \hat{\Delta}$. (ii) ex$[\mathcal{P}]$ forms a compact abelian semigoup.

Definition 4 $\mathcal{S} :=$ ex$[\mathcal{P}]$ and $\hat{\mathcal{S}}$ denotes the set of all continuous semicharacters on $\mathcal{S}$.

Lemma 4 $\Delta \subseteq \hat{\mathcal{S}}$ and Δ separates points of $\mathcal{S}$.

Lemma 5. (i) $\forall\sigma \in \mathcal{P}, \exists 1 \ \nu_\sigma \in M(\mathcal{S})_1^+$ s.t.,

$$\sigma(\phi) = \int_S \phi(s) d\nu_\sigma(s) \quad (\phi \in \Delta)$$

(ii) $\forall\sigma \in D_{BSE}(\Delta), \exists 1 \ \nu_\sigma \in M(S)$ s.t.,

$$\sigma(\phi) = \int_S \phi(s) d\nu_\sigma(s) \ (\phi \in \Delta), \ \ \|\nu_\sigma\| \leq 8\|\sigma\|_{BSE}$$

(iii) The map $\sigma \to \nu_\sigma$ is an injective bounded linear operator of $D_{BSE}(\Delta)$ onto $M(\mathcal{S})$.

Definition 5 For $\mu \in M(G), \tilde{\mu}$ belongs to $D_{BSE}(\Delta)$, and by Lemma 6, there exists a unique $\nu_{\tilde{\mu}} \in M(\mathcal{S})$ which satisfies

$$\tilde{\mu}(\phi) = \int_S \phi(s) d\nu_\mu(s) \qquad (\phi \in \Delta).$$

We denote this $\nu_{\tilde{\mu}}$ by μ_S, and put $M(G)_S := \{\mu_S : \mu \in M(G)\}$.

Lemma 6. $M(G)_S$ is a weak$*$-dense L-subalgebra of $M(\mathcal{S})$.

Lemma 7 (i) $\forall f \in C(\mathcal{S})$,

$$\|f\|_\infty = \sup\{| \int_S f(s) d\mu_S(s) | : \mu \in M(G), \|\mu\| \leq 1\}.$$

(ii) For each $p = \sum_i c_i \phi_i \in \text{span}(\Delta)$, we have $\|p\|_{M(\mathcal{S})^*} = \|p\|_\infty$.

Lemma 8 For each $\mu \in M(G)$, we have $\|\mu\| = \|\tilde{\mu}\|_{BSE} = \|\mu_S\|$

Lemma 9 $\Delta = \hat{\mathcal{S}}$.

Theorem 1 (i) ex$[\mathcal{P}] = \hat{\Delta} \cap \mathcal{P}$ holds, and if we put $\mathcal{S} :=$ ex$[\mathcal{P}]$, $\mathcal{S}$ is a compact abelian topological semigroup.

(ii) If we put $\phi(s) := s(\phi) \quad (s \in \mathcal{S})$ for each $\phi \in \Delta$, we have $\Delta = \hat{\mathcal{S}}$ (the set of all continuous semicharcter on $\mathcal{S}$). and Δ separates the points of $\mathcal{S}$.

(iii) For each $\sigma \in D_{BSE}(\Delta)$ there exists a unique $\nu_\sigma \in M(\mathcal{S})$ which satisfies

$$\sigma(\varphi) = \int_S \varphi(s) d\nu_\sigma(s) \quad (\varphi \in \Delta),$$

and this map is isometric isomorphism of Although we omit the proofs of lemmas and theorem below, but we give some comments on thier proofs. $D_{BSE}(\Delta)$ onto $M(\mathcal{S})$.

(iv) If we define $\mu_S := \nu_{\tilde{\mu}} \in M(\mathcal{S})$ for each $\mu \in M(G)$, the map $\mu \to \mu_S$ form a L-homomorphism which is also isometric algebra homomorphism from $M(G)$ into a weak$*$-dense L-subalgebra of $M(\mathcal{S})$.

References

[1] C. Berg, J.P.R.Christensen and P. Ressel, Harmonic Analysis on Semigroups, Springer Graduate Text in Math., 100, 1984.

[2] Y. A. Šreider, The structuer of maximal ideals in ring of measures with involution, Mat. Sb.(N.S.) 27(69), 297-318; Amer. Math. Soc. Translation (1st Ser.) No.81(1953).

[3] S. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type therem, Proc. AMS, 110(1)(1990) 149-158.

[4] J. L. Taylor, The structure of convolution measure algebras, Trans. AMS, 119 (1965) 150-166.

[5] J.L. Taylor, Measure algebras, Amer. Math. Soc. CBMS 16, 1972.

Brown-Halmos and Hartman-Wintner Type Theorems of Weighted Toeplitz Operators

Takahiko Nakazi (Hokkaido University)

Abstract. Brown and Halmos showed that the spectrum of a Toeplitz operator on the classical Hardy space $H^2(d\theta/2\pi)$ are contained in the convex hull of the essential range of the symbol. Hartman and Wintner showed that the spectram of a selfadjoint Toeplitz operator on $H^2(d\theta/2\pi)$ is just the convex hull of the essential range of the symbol. These two theorems are not valid on the weighted Hardy spaces $H^2(Wd\theta)$ or the Hardy spaces H^p $(p \neq 2)$. In this lecture, we introduce a generalized convex hull and using it gives Brown-Halmos and Hartman-Wintner type Theorems on $H^2(Wd\theta)$ or H^p.

Brown-Halmos, Hartman-Wintner タイプの定理

北大大学院・理学研究科
中 路 貴 彦

§1. Classical な場合

H^2 を単位円周上の Hardy 空間とする。P を Lebesgue 空間 L^2 から H^2 への orthogonal projection とする。$\phi \in L^\infty$ に対して $T_\phi f = P(\phi f)$ $(f \in H^2)$ とする。T_ϕ は Toeplitz 作用素と呼ばれる。$\mathcal{R}(\phi)$ は ϕ の essential range, $\sigma(T_\phi)$ は T_ϕ のスペクトルを示す。Hartman-Wintner は、$\mathcal{R}(\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$ が一般に成立することを示した。

Brown-Halmos の定理
$\phi \in L^\infty$ ならば $\sigma(T_\phi) \subseteq h(\mathcal{R}(\phi))$ が成立する。

証明　K を $\mathcal{R}(\phi)$ を含む任意の open half plane とすると、$\beta \notin K$ なら $\beta \notin \sigma(T_\phi)$ を示す。このとき定理は示される。

$0 \notin K - \beta$ だから、$\mathcal{R}(\phi - \beta) \subset K - \beta$ より絶対値 1 の $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在し、$\mathcal{R}(\alpha(\phi - \beta)) \subset \alpha(K - \beta) \subset \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re} z > 0\}$ とできる。$\triangle = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z-1| < 1\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ が存在して、$\varepsilon\mathcal{R}(\alpha(\phi - \beta)) = \mathcal{R}(\varepsilon\alpha(\phi - \beta)) \subset \triangle$ とできる。よって $\|1 - T_{\varepsilon\alpha(\phi-\beta)}\| = \|1 - \varepsilon\alpha(\phi - \beta)\|_\infty < 1$。よって $T_{\phi-\beta}^{-1}$ が存在するから、$\beta \notin \sigma(T_\phi)$ である。

Hartman-Wintner の定理

$\phi \in L^\infty$ が real value、$a = \operatorname{ess\,inf} \phi$、$b = \operatorname{ess\,sup} \phi$ ならば $\sigma(T_\phi) = [a, b]$ が成立する。

証明 $a, b \in \sigma(T_\phi)$ だから Brown-Halmos の定理より、$\sigma(T_\phi) \subset [a, b]$ である。$[a, b] \subset \sigma(T_\phi)$ を示すとよい。$\lambda \notin \sigma(T_\phi)$ が実数ならば、$\lambda \notin [a, b]$ である。何故なら、$T_{\phi-\lambda} g = 1$ となる恒等的には零でない $g \in H^2$ が存在するので、$(\phi - \lambda)g = 1 + \bar{h}$ となる $h \in e^{i\theta} H^2$ が存在する。よって $(\phi - \lambda)|g|^2 = (1 + h)g$ は H^1 に属する real value な関数である。H^1 は定数以外に real value な関数を含まないので、$(\phi - \lambda)|g|^2$ は実定数となり、$\phi - \lambda \geq 0$ *a.e.* か $\phi - \lambda \leq 0$ *a.e.*。よって $\lambda \notin [a, b]$ である。

§2. 可逆性についての定理

m を単位円周上の正規 Lebesgue 測度、$L^p = L^p(dm)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ とする。$W \in L^1$ は $W \geq 0$ *a.e.m* かつ $L^p(W) = L^p(W dm)$ とする。$\mathcal{P}$ は全ての analytic polynomials の全体とするとき、$H^p(W)$ は $\mathcal{P}$ の $L^p(W)$ での閉包とする。このとき、次の (1) ~ (3) は同値であることは知られている。(1) $H^p(W) \neq L^p(W)$; (2) $H^p(W) = h^{-1} H^p$。ここで $W = |h|^p$ かつ h は H^p の outer 関数である。; (3) $\log W \in L^1$。

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I W dm \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I W^{-\frac{1}{p-1}} dm \right)^{p-1} < \infty$$

となる時、$W \in A_p$ と書く。ここで I は $[0, 2\pi)$ に含まれる全ての区間を動く。$\mathcal{C}$ は全ての trigonometric polynomial の集合を示す。このとき $\mathcal{C} = \mathcal{P} + \bar{\mathcal{P}}_0$、ここで $\mathcal{P}_0 = \{f \in \mathcal{P} \,;\, f(0) = 0\}$。$P$ を $\mathcal{C} \to \mathcal{P}$ となる projection とする。$W \in A_p$ であることは P が $L^p(W)$ 上で有界であることと同値であることは Hunt-Muckenhoupt-Wheeden の定理として有名である。$W \in A_p$ ならば $H^p(W) \neq L^p(W)$ である。

$W \in A_p$ とする。$\phi \in L^\infty$ に対して

$$T_\phi^W(f) = P(\phi f) \quad (f \in H^p(W))$$

とするとき、T_ϕ^W は $H^p(W)$ 上の Toeplitz 作用素と呼ばれる。$\alpha, \beta \in L^\infty$ に対して

$$S_{\alpha\beta}^W(f) = \alpha P f + \beta(I - P) f \quad (f \in L^p(W))$$

とするとき、$S_{\alpha\beta}^W$ は $L^p(W)$ 上の特異積分作用素と呼ばれる。次の WDRS 定理は Widom-Devinatz が $p = 2$ かつ $W \equiv 1$ のとき、一般的には、Rochberg と Simonenko によって独立に証明された。

WDRS 定理

I. $1 < p < \infty$、$W \in A_p$、$W = |h|^p$ かつ $h \in H^p$ は outer 関数とすると、次の (1) ~ (3) は同値である。

(1) T_ϕ^W は $H^p(W)$ 上で invertible である。

(2) $\phi = k\dfrac{\bar{h}_0}{h_0}\dfrac{h}{\bar{h}}$。ここで $k, k^{-1} \in H^\infty$、$|h_0|^p \in A_p$ かつ $h_0 \in H^p$ は outer 関数である。

(3) $\phi = \gamma \exp(U - iV)$。ここで $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$, $U \in L_R^\infty$, $V \in L_R^1$ かつ $W \exp\left(\dfrac{p}{2}V\right) \in A_p$ である。

II. $p = 2$ かつ $\phi, \phi^{-1} \in L^\infty$ とすると、次の (1) と (2) は同値てある。
(1) T_ϕ は H^2 上で invertible である。
(2) $\phi = |\phi|e^{it}$、$t \in L_R^1$ かつ $\|t\|' = \inf\{\|t - \tilde{s} - a\|_\infty\ ;\ s \in L_R^\infty,\ a \in R\} < \pi/2$。

$1 < p < \infty$ かつ $W \in A_p$ のとき、$S_{\alpha\beta}^W$ が $L^p(W)$ 上で invertible であることは、$T_{\alpha/\beta}^W$ が $H^p(W)$ 上で invertible かつ α^{-1}, $\beta^{-1} \in L^\infty$ であることと同値である。

Krupnik 定理

$1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\phi \in L^\infty$ とする。次の (1) ～ (3) は同値である。
(1) T_ϕ は H^p と H^q 上で invertible である。
(2) T_ϕ は $\min\{p, q\} \le \ell \le \max\{p, q\}$ である任意の ℓ に対して H^ℓ 上で invertible である。
(3) $\phi = k\exp(U + iV)$。ここで $k, k^{-1} \in H^\infty$. U、$V \in L_R^\infty$ かつ $\|V\|_\infty < \pi/\max\{p, q\}$。

WDRS 定理は、筆者 [2] によって、weighted norm inequality との関係を強調して証明されている。

§3. Generalized convex hull

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$、$\beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ かつ $\theta(\alpha, \beta) = \arccos(\langle \alpha, \beta \rangle / |\alpha||\beta|)$ とする。$\ell_\alpha^+ = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \langle z, \alpha \rangle \ge 1\}$、$\ell_\alpha^- = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \langle z, \alpha \rangle \le 1\}$ かつ $\mathcal{E}_{\alpha\beta}^{ij} = \ell_\alpha^i \cap \ell_\beta^j$ $(i = +$ or $-, j = +$ or $-)$ とする。任意の α, β について $\mathbb{C} = \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{++} \cup \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{+-} \cup \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{-+} \cup \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{--}$ である。$\ell = -i$, $m = -j$ のとき $\overline{(\mathcal{E}^{\ell m})^c} = \overline{\mathbb{C} \backslash \mathcal{E}^{\ell m}} \supset \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{ij}$ である。$\mathbb{C}$ の部分集合 E に対して、$|\theta(\alpha, \beta)| = \pi - 2t$, $0 \le t < \pi/2$ のとき

$$h^t(E) =: \cap \left\{\mathcal{E}_{\alpha\beta}^{\ell m}\ ;\ \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{ij} \supseteq E,\ \ell = -i,\ m = -j\right\}$$

とする。このとき $t < s$ ならば $h^t(E) \subseteq h^s(E)$、$t = 0$ ならば $h^0(E) = h(E)$ である。$E = [a, b]$ ならば $h^t(E) = \triangle(c, r) \cap \triangle(\bar{c}, r)$ であり、$E = \triangle(0, 1)$ ならば $h^t(E) = \triangle(0, 1/\cos t)$ である。ここで $c = \dfrac{a+b}{2} - i\dfrac{a-b}{2}\cot 2t$ は円 $\triangle(c, r)$ の中心、$r = -\dfrac{a-b}{2\sin 2t}$ は半径を示している。$h^t(E)$ は筆者 [3] によって導入された。

§4. $H^2(W)$ 上の Toeplitz 作用素

$W \in A_2$ である $W = e^{u+\tilde{v}}$ と書けることが知られている。ここで $u, v \in L^\infty_R$ かつ $\|v\|_\infty < \pi/2$ であり、W は Helson-Szegő の weight と呼ばれている。$s \in L^\infty_R$ について $\tilde{s}$ は $s + i\tilde{s} \in H^2$ かつ $\tilde{s}(0) = 0$ となるものである。$W = e^{u+\tilde{v}}$ かつ $u, v \in L^\infty_R$ のとき

$$t_W = \|v\|' = \inf\{\|v - \tilde{s} - a\|_\infty \ ; \ s \in L^\infty_R, a \in R\}$$

とする。$W \in A_2$ に対して W と t_W は 1 対 1 に対応する。$W, W^{-1} \in L^\infty$ なら $t_W = 0$ である。この §の結果は [3] にある。

定理 1
$W \in A_2$ かつ $t = t_W$ ならば $\mathcal{R}(\phi) \subseteq \sigma(T^W_\phi) \subseteq h^t(\mathcal{R}(\phi))$

定理 2
$W \in A_2$, $t = t_W$, $\phi \in L^\infty_R$ かつ $a = \operatorname{ess\,inf}\phi$, $b = \operatorname{ess\,sup}\phi$ とすると、$\mathcal{R}(\phi) \subseteq \sigma(T^W_\phi) \subseteq \triangle(c, r) \cap \triangle(\bar{c}, r)$ である。ここで $c = \dfrac{a+b}{2} - i\dfrac{a-b}{2}\cot 2t$ かつ $r = -\dfrac{a-b}{2\sin 2t}$ である。

$W \equiv 1$ のとき、$\|T^W_\phi\| = \|\phi\|_\infty$ である。しかし $W \not\equiv 1$ のとき、$\|T^W_\phi\| \le \|P\|_W\|\phi\|_\infty$ が成立する。ここで $\|P\|_W$ は $L^2(W)$ での P のノルムである。$W \not\equiv 1$ のとき $\|P\|_W > 1$ であるので、$W \not\equiv 1$ の場合に Brown-Halmos の定理の証明は働かなく $\sigma(T^W_\phi) \subseteq h(\mathcal{R}(\phi))$ が成立しない。定理 1 の証明では WDRS 定理と t_W を用いている。

§5. H^p 上の Toeplitz 作用素

この §の結果の $p \ge 2$ の場合は [3] にある。

補題
$2 \le p < \infty$、$1/p + 1/q = 1$、$t = (p-2)\pi/2p$ かつ $\phi \in L^\infty$ とすると、$\bigcup_{q \le \ell \le p} \sigma(T^\ell_\phi) \subseteq h^t(\mathcal{R}(\phi))$

定理 3
$1 < p < \infty$、$t = |p-2|\pi/2p$ ならば $\mathcal{R}(\phi) \subseteq \sigma(T^p_\phi) \subseteq h^t(\mathcal{R}(\phi))$

$1 < p < \infty$ のとき、$\|T_\phi\|_p \le \|P\|_p\|\phi\|_\infty$ が成立する。ここで $\|P\|_p$ は L^p での P のノルムである。$p \ne 2$ のとき $\|P\|_p > 1$ であるので、$p \ne 2$ の場合は Brown-Halmos の

定理の証明は働かなく $\sigma(T_\phi) \subseteq h(\mathcal{R}(\phi))$ は成立しない。定理３の証明には Krupnik 定理と $t = |p-2|\pi/2p$ を用いる。

§6. L^2 上の特異積分作用素

この §の結果は [3] にある。

$\boxed{\text{定理 4}}$
$\alpha, \beta \in L^\infty$、$t = \pi/4$ ならば $\mathcal{R}(\alpha) \cup \mathcal{R}(\beta) \subseteq \sigma(S_{\alpha\beta}) \subseteq h^t(\mathcal{R}(\alpha) \cup \mathcal{R}(\beta))$

$\boxed{\text{定理 5}}$
$\alpha, \beta \in L^\infty_R$ ならば $\{h(\mathcal{R}(\alpha)) \cap h(\mathcal{R}(\beta))^c\} \cup \{h(\mathcal{R}(\alpha))^c \cap h(\mathcal{R}(\beta))\} \subseteq \sigma(S_{\alpha\beta}) \subseteq \triangle(c, r) \cap \triangle(\bar{c}, r)$。ここで $a = \min\{\operatorname{ess\,inf}\alpha,\ \operatorname{ess\,inf}\alpha\}$、$b = \max\{\operatorname{ess\,sup}\alpha,\ \operatorname{ess\,sup}\beta\}$、$c = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - i\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ かつ $r = -\dfrac{a-b}{2}$,

References

1. R.G.Douglas, Banach Algebra Techniques In Operator Theory (Academic Press, New York, 1972)

2. T.Nakazi, Toeplitz operators and weighted norm inequalities, Acta Sic. Math. (Szeged) 58(1993), 443-452.

3. T.Nakazi, Brown-Halmos type theorems of weighted Toeplitz operators, Canad.Math. Bull. 41(1998), 196-206.

4. R.Rochberg, Toeplitz operators on weighted H^p spaces, Indiana Univ.Math.J. 26(1977), 291-298.

Multipliers On Weighted Bloch Spaces

Rikio YONEDA

Abstract

Let g be an analytic function on the open unit disk D in the complex plane C. We will study the following operator

$$I_g(f)(z) := \int_0^z f'(\zeta)g(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

on weighted Bloch space. We express the essential norm of operators I_g ,J_g on weighted Bloch space. And we also study the multipliers in weighted Bloch space.

Dを複素平面上の開単位円板とする。$\omega:\ [0,1]\ \to R_+$ を continuous non-increasing function で$\omega(1)=0$, $\omega(r)>0$ $(r\ \in]0,1[)$を満たすものとする。$\omega:\ D\ \to\ R_+$ は the radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とする。そのとき、weighted Bloch space B_ω は $\| f \|_{B_\omega}:= \sup_{z\in D}\omega(z)\,|f'(z)|<+\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。D上の解析関数gに対して, 作用素I_g, J_g は

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。X, Yを Banach 空間とする。関数fに対して、multiplier of X into Yは $fg\in Y$ for all g in Xを満たすものと定義される。このとき $fX\subset Y$と書く。そのとき、$M_g=I_g+J_g$である。

The associated weighted $\tilde{\omega}$は

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} := \sup_{\|f\|_{B_\omega}\le 1}|f(z)|$$

として定義する。本研究では、作用素I_g , J_gを利用した、荷重付き Bloch 空間上の multiplier に関する研究発表を行う。そのとき、次のような結果を得た。

定理 1. $\omega:\ [0,1]\ \to R_+$は continuous non-increasing function で $\omega(1)=0$, $\omega(r)>0$ $(r\ \in]0,1[)$ を満たすものとする。$\omega: D\to R_+$ は radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とし、$\sup\limits_{z\in D}\omega(z)n|z|^{n-1}\dfrac{1}{\tilde{\omega}(z)}<+\infty$ for any n と仮定する。 もし J_g is bounded on B_ωならば、そのとき

$$\| J_g \|_e \sim \lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)|$$

となる。すなわち、$C\cdot\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)|\le\| J_g \|_e\le\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)|$を満たす定数$C$が存在する。

定理 2. $\omega:[0,1]\to R_+$ は continuous non-increasing function で $\omega(1)=0$、$\omega(r)>0$ $(r\in]0,1[)$ を満たすものとする。$\omega: D\to R_+$ は radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とし、$c_n:=\omega(r_n)nr_n^{n-1}$ and that $\{c_n\}$ converges to some positive constant c as $n\to\infty$を満たす列$\{r_n\}\subset[0,1)$が存在するものと仮定する。そのとき、もしI_g is bounded on B_ωならば、

$$\| I_g \|_e=\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}|g(z)|$$

となる。

上の定理1と定理2を利用して、次のような結果を証明することが出来る。

Theorem 1. $B_{\omega_1}\subset B_{\omega_2}\subset H^\infty$と仮定する。そのとき、次は同値である：

(i) $gB_{\omega_1}\subset B_{\omega_2}$ ($M_g: B_{\omega_1}\to B_{\omega_2}$ is compact) ;

(ii) $J_g: B_{\omega_1}\to B_{\omega_2}$ is bounded operator (compact operator) ;

(iii) $\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\omega_2(z)|g'(z)|<+\infty$ ($\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\omega_2(z)|g'(z)|=0$).

例 1. $0<\alpha\le\beta<1$とする。$g\in H(D)$に対して、次は同値である：

(i) $gB^\alpha\subset B^\beta$ ($M_g: B^\alpha\to B^\beta$ is compact) ;

(ii) $J_g: B^\alpha\to B^\beta$ is bounded operator (compact operator) ;

(iii) $g\in B^\beta$ ($g\in B_0^\beta$).

Theorem 2. $B_{\omega_1}\subset H^\infty\subset B_{\omega_2}$ で $\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^\beta$ $(\beta>0)$ と仮定する。そのとき、次は同値である：

(i) $gB_{\omega_1}\subset B_{\omega_2}$ ($M_g: B_{\omega_1}\to B_{\omega_2}$ is compact) ;

(ii) $J_g: B_{\omega_1}\to B_{\omega_2}$ is bounded operator (compact operator) ;

(iii) $\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\omega_2(z)|g'(z)|<+\infty$ ($\lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\omega_2(z)|g'(z)|=0$).

例 2. $0<\alpha<1\le\beta$とする。$g\in H(D)$に対して、次は同値である：

(i) $gB^\alpha\subset B^\beta$ ($M_g: B^\alpha\to B^\beta$ is compact) ;

(ii) $J_g: B^\alpha\to B^\beta$ is bounded operator (compact operator) ;

$(iii)\quad g \in B^{\beta}\ (g \in B_0^{\beta})$.

Theorem 3.1. 次は同値である：

$(i)\quad gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;

$(ii)\quad I_g, J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ are bounded operators ;

$(iii)\quad g \in H^{\infty}\ ,\ \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)} |g'(z)| < +\infty$.

Theorem 3.2. 次は同値である：

$(i)\quad M_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ is compact ;

$(ii)\quad I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ is compact operator ;

$(iii)\quad g = 0$.

例 3.1.1. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

$(i)\quad gB \subset B$;

$(ii)\quad I_g, J_g : B \to B$ are bounded operators ;

$(iii)\quad g \in H^{\infty}\ ,\ \sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)| < +\infty$.

例 3.1.2. $g \in H(D)$ に対して、次は同値である：

$(i)\quad gB_{\log} \subset B_{\log}$;

$(ii)\quad I_g, J_g : B_{\log} \to B_{\log}$ are bounded operators ;

$(iii)\quad g \in H^{\infty}\ ,\ \sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)\left(\log\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)\right)|g'(z)| < +\infty$.

ここで、$B_{\log}$は、$\| f \|_{B_{\log}} = \sup_{z \in D}(1-|z|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)|f'(z)| < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体とする。

Theorem 4. $\frac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)} \leq \gamma(1-|z|^2)^{\alpha}\ (\alpha \geq 1)$ を満たすある定数$\gamma > 0$が存在すると仮定する。そのとき、次は同値である：

$(i)\quad gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1} (M_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is compact$)$;

$(ii)\quad I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ is bounded operator (compact operator) ;

$(iii)\quad g \in H^{\infty}\ (g = 0)$.

例 4. $\alpha > 1$とする。$g \in H(D)$に対して、次は同値である：

(i) $gB^{\alpha} \subset B^{\alpha}$ ($M_g : B^{\alpha} \to B^{\alpha}$ is compact)；

(ii) $I_g : B^{\alpha} \to B^{\alpha}$ is bounded operator (compact operator)；

(iii) $g \in H^{\infty}$ $(g = 0)$.

Theorem 5. $\beta > 0$とする。そして$B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$、$\dfrac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^{\beta}$、$\dfrac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)$を満たすものとする。そのとき、つぎは同値である：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2} (M_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is compact)；

(ii) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator (compact operator)；

(iii) $I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator (compact operator)；

(iv) $\displaystyle\lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega_2(z)}{\tilde{\omega_1}(z)} |g'(z)| < +\infty \ (= 0)$；

(v) $\displaystyle\lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)} |g(z)| < +\infty \ (= 0)$.

例 5. $1 < \alpha < \beta$とする。$g \in H(D)$に対して、次は同値である：

(i) $gB^{\alpha} \subset B^{\beta}$ ($M_g : B^{\alpha} \to B^{\alpha}$ is compact)；

(ii) $I_g : B^{\alpha} \to B^{\beta}$ is bounded operator (compact operator)；

(iii) $J_g : B^{\alpha} \to B^{\beta}$ is bounded operator (compact operator)；

(iv) $g \in B^{\beta-\alpha+1} (g \in B_0^{\beta-\alpha+1})$；

(v) $\displaystyle\sup_{z \in D} \left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha} |g(z)| < +\infty \ (\lim_{|z| \to 1} \left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha} |g(z)| = 0)$.

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995), 149-158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[3] P.L.Duren, Theory of H^p spaces (Academic Press, 1970).

[4] P.L.Duren, B.W.Romberg and A.L.Schilds; Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, J.Reine Angew.Math.238(1969),32-60.

[5] S.Ohno, K.Stroethoff and R.Zhao, Weighted composition operators between Bloch-type spaces, to appear Rocky Mout.J.Math.

[6] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.

[7] W.Ramey and D.Ullrich, Bounded mean oscillation of Bloch Pull-backs, Math.Ann.291, (1991),591-606.

[8] A. Montes-Rodriguez, The essential norm of composition operators on Bloch spaces, Pacific J.Math.188(1999),339-351.

[9] A. Montes-Rodriguez, Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, J.London Math.Soc.(2)61(2000),872-884.

[10] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.

[11] K.Stroethoff, The Bloch space and Besov spaces of analytic functions, Bull.Austral.Math. Soc.54(1996), 211-219.

[12] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, in preprint.

[13] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[14] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

[15] K.Zhu, Analytic Besov Spaces, J.Math.Anal.Appl.157(1991), 318-336.

[16] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.

[17] K.Zhu, Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators, J.Funct.Anal.87(1989),31-50.

Two Dimensional Commutative Banach Algebras and von Neumann Inequality

Takahiko Nakazi (Hokkaido Univ.) and Takanori Yamamoto (Hokkai-Gakuen Univ.)

Abstract

We show the following: Let $\mathcal{B}$ be a two dimensional commutative Banach algebra with identity. If $\mathcal{B}$ satisfies

$$T \in \mathcal{B}, \quad \|T\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|f(T)\| \leq 1$$

whenever f is a polynomial satisfying $|f(z)| \leq 1$ $(|z| \leq 1)$ then $\mathcal{B}$ is isometric to a subalgebra of the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on some Hilbert space H, and $\mathcal{B}$ satisfies

$$T_k \in \mathcal{B}, \quad \|T_k\| \leq 1 \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \|f(T_1, ..., T_n)\| \leq 1$$

whenever f is a polynomial in n variables satisfying $|f(z_1, ..., z_n)| \leq 1 \quad (|z_k| \leq 1,\ k = 1, ..., n)$, for all n.

第 1 章　定理 1 と 定理 2

本講演を通し，$\mathcal{B}$ は単位元 I をもつ可換 Banach 環を表し，$B(H)$ は Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体のなす環を表す。また，$|\lambda| < 1$ について Möbius 変換を ϕ_λ で表す：

$$\phi_\lambda(z) := \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} z}, \quad (|z| < 1).$$

$\mathcal{B}$ が $|f(z_1, ..., z_n)| \leq 1 \quad (|z_k| \leq 1,\ k = 1, ..., n)$ を満たす全ての多項式 f について

$$T_k \in \mathcal{B}, \quad \|T_k\| \leq 1 \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \|f(T_1, ..., T_n)\| \leq 1$$

を満たすとき, $\mathcal{B}$ は n(vN) を満たすという。よって　$n(\mathrm{vN}) \Rightarrow (n-1)(\mathrm{vN})$.

von Neumann の定理　[10]　　$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環　$\Rightarrow$　$\mathcal{B}$ は 1(vN) を満たす。

Ando の定理　[1]　　$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環　$\Rightarrow$　$\mathcal{B}$ は 2(vN) を満たす。

Varopoulos は $B(H)$ の 5 次元可換部分環 $\mathcal{B}$ で 3(vN) を満たさない例を作った。(参照 Pisier [11, p.23])

Craw-Cole の定理　[2, pp.271, 272]
$\mathcal{B}$ は全ての n について n(vN) を満たす　$\Rightarrow$　$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型。

定理 1　[9]　　$\dim \mathcal{B} = 2$　且　$\mathcal{B}$ は 1(vN) を満たす　$\Rightarrow$　$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型。

「 $\dim \mathcal{B}=2 \Rightarrow \mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型 」が成り立たない反例として，$\|P\|_{B(l^p)} \neq \|I-P\|_{B(l^p)}$ を満たす $P \in B(l^p)$ について $\mathcal{B}=\mathrm{span}\,\{I,P\} \subset B(l^p)$ がある。たとえば，$1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ のとき P は複素数 $c \neq 0$ について $P(x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots)=(x_0+cx_1,0,0,0,\ldots)$ と定めればよい。

定理 2 (Nakazi [8, Corollary 2], [9])

$\dim \mathcal{B}=2$ 且 $\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環 $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ は全ての n について n(vN) を満たす。

定理 1 と 定理 2 より直ちに次の 系 1 を得る。逆に，系 1 と Craw-Cole の定理 より 定理 1 を得る。

系 1 [9] $\dim \mathcal{B}=2$ 且 $\mathcal{B}$ は 1(vN) を満たす $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ は全ての n について n(vN) を満たす。

第 2 章 定理 1 の証明

定理 1 の証明は，次の補題 A,B,C を用いると明らかである。補題 1, 2 は補題 C の証明に使う。補題 3(1) と補題 1 を用いて，補題 C(1) を証明する。同様に，補題 3(2) と補題 2 を用いて，補題 C(2) を証明できる。

補題 A (Nakazi [8, Proposition 1]) $\dim \mathcal{B}=2$ のとき，$\mathcal{B}$ は次の 2 種類に限る。

(1) $\mathcal{B}=\{\alpha P+\beta Q\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbf{C}\}$ ただし $P^2=P$, $P \neq 0, I$, $Q=I-P$.

(2) $\mathcal{B}=\{\alpha I+\beta N\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbf{C}\}$ ただし $N^2=0$, $N \neq 0$.

証明： I の定数倍でない $X \in \mathcal{B}$ が存在する。$X^2 \in \mathcal{B}$ より $X^2=aI+bX$ を満たす $a,b \in \mathbf{C}$ が存在する。
$\therefore$ $(2X-bI)^2=(b^2+4a)I$. $\therefore$ N と P を

$$b^2+4a=0 \quad \Rightarrow \quad N=2X-bI$$

$$b^2+4a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P=\frac{I}{2}+\frac{2X-bI}{2\sqrt{b^2+4a}}$$

と定めることができる。 □

補題 B (Feldman-Krupnik-Markus [5]) 次の (1), (2), (3) が成り立つ。

$$m_{\alpha,\beta}(x)=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}\right)^2} \quad \text{と定めるとき，}$$

(1) $P,Q \in B(H)$, $P^2=P \neq 0,I$, $Q=I-P$ $\Rightarrow$ $\|\alpha P+\beta Q\|=m_{\alpha,\beta}(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1})$.

(2) $I,N \in B(H)$, $N^2=0$, $N \neq 0$ $\Rightarrow$ $\|\alpha I+\beta N\|=m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|)$.

(3) $H=H_1 \oplus H_2$ について，$A=\begin{pmatrix} \alpha I & X \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} \in B(H)$ $\Rightarrow$ $\|A\|=m_{\alpha,\beta}(\|X\|)$.

補題 1 [9] $a>1$ のとき $w=\dfrac{1-az}{|z|^2-az}$ は $\{0<|z|\leq 1\}$ を w 平面全体に写像する。
更に $\frac{1}{|z|}=m_{w,1}\left(|w-1|\sqrt{a^2-1}\right)$.

補題 2 [9] $a>0$ のとき $w=\dfrac{1-|z|^2}{az}$ は $\{0<|z|\leq 1\}$ を w 平面全体に写像する。
更に $\frac{1}{|z|}=m_{1,1}(|w|a)$.

補題 3 [9] 次の (1), (2) が成り立つ。(不等号を等号にしても成り立つ。)

(1) $m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\beta}\alpha}\right|\leq\dfrac{1}{\|P\|}$ 且 $\max(|\alpha|,|\beta|)\leq 1.$

(2) $m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{|\beta|}{1-|\alpha|^2}\leq\dfrac{1}{\|N\|}$ 且 $|\alpha|\leq 1.$

証明 : (1): 一般に $\max(|\alpha|,|\beta|)\leq m_{\alpha,\beta}(x)$ より，$m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq 1 \quad\Rightarrow\quad \max(|\alpha|,|\beta|)\leq 1.$
このとき，$m_{\alpha,\beta}(\sqrt{1-|\alpha|^2}\sqrt{1-|\beta|^2})=1$ より，

$$m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\leq\sqrt{1-|\alpha|^2}\sqrt{1-|\beta|^2} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\beta}\alpha}\right|\leq\frac{1}{\|P\|}.$$

(2): 一般に $|\alpha|\leq m_{\alpha,\alpha}(x)$ より，$m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|)\leq 1 \quad\Rightarrow\quad |\alpha|\leq 1.$ このとき，$m_{\alpha,\alpha}(1-|\alpha|^2)=1$ より，

$$m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad |\beta|\cdot\|N\|\leq 1-|\alpha|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|\beta|}{1-|\alpha|^2}\leq\frac{1}{\|N\|}. \quad \square$$

補題 C [9] $\dim\mathcal{B}=2$ のとき，次の (1), (2) が成り立つ。
(1(vN) という不等式からノルム公式という等式が導かれることを言っている。)

(1) $\mathcal{B}=\{\alpha P+\beta Q\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ が 1(vN) を満たす。ただし $P^2=P\neq 0,I,\ Q=I-P$
$\quad\Rightarrow\quad \|\alpha P+\beta Q\|=m_{\alpha,\beta}(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}).$

(2) $\mathcal{B}=\{\alpha I+\beta N\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ が 1(vN) を満たす。ただし $N^2=0,\ N\neq 0$
$\quad\Rightarrow\quad \|\alpha I+\beta N\|=m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|).$

証明 : (1): $c:=\|\alpha P+\beta Q\|$, $a:=\frac{\alpha}{c}$, $b:=\frac{\beta}{c}$. $\therefore\ \|aP+bQ\|=1.$ $P^2=P$, $Q=I-P$ より，

$$\|aP\|=\|(aP+bQ)P\|\leq\|P\|,\qquad \|bQ\|=\|(aP+bQ)Q\|\leq\|Q\|,$$

$P,Q\neq 0$ より，$|a|,|b|\leq 1.$ $\therefore |a|,|b|<1$ として示せばよい。 Möbius 変換 $\phi_b(z)$ について $\phi_b(b)=0$ より，
$\phi_b(aP+bQ)=\phi_b(a)P+\phi_b(b)Q=\frac{a-b}{1-\bar{b}a}P.$

$$\|aP+bQ\|=1 \text{ 且 } \mathcal{B}\text{ は 1(vN) を満たすから } \|\phi_b(aP+bQ)\|\leq 1. \qquad \therefore\ \left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|\leq\frac{1}{\|P\|}.$$

補題 3(1) より，$m_{a,b}\left(|a-b|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq 1.$ $\therefore$ $m_{ca,cb}\left(|ca-cb|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq c.$
$\therefore$ $m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)\leq\|\alpha P+\beta Q\|.$ 次に逆向きの不等式を示す。
$|\lambda|<1$ のとき Möbius 変換 $\phi_\lambda(z)$ と $t:=\|P\|$ について

$$\|t^{-1}P\|=1 \text{ 且 } \mathcal{B}\text{ は 1(vN) を満たすから } \|\phi_\lambda(t^{-1}P)\|\leq 1.$$

このとき $\phi_\lambda(t^{-1}P)=\phi_\lambda(t^{-1}P+0Q)=\phi_\lambda(t^{-1})P+\phi_\lambda(0)Q=-\lambda\left(\dfrac{1-t\lambda}{|\lambda|^2-t\lambda}P+Q\right)$ が成り立つから

$$\left\|\frac{1-t\lambda}{|\lambda|^2-t\lambda}P+Q\right\|\leq\frac{1}{|\lambda|},\quad (0<|\lambda|<1).$$

これは $|\lambda|=1$ のときも成り立つ。補題 1 より，全ての $\alpha\in\mathbf{C}$ について $\|\alpha P+Q\|\leq m_{\alpha,1}\left(|\alpha-1|\sqrt{t^2-1}\right).$
$t=\|P\|$ より，全ての $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ について $\|\alpha P+\beta Q\|\leq m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right).$

(2): $c := \|\alpha I + \beta N\|$, $a := \frac{\alpha}{c}$, $b := \frac{\beta}{c}$. $\therefore$ $\|aI + bN\| = 1$.　$N^2 = 0$ より，$\|aN\| = \|(aI + bN)N\| \leq \|N\|$. $N \neq 0$ より，$|a| \leq 1$. $\therefore$ $|a| < 1$ として示せばよい。Möbius 変換 $\phi_a(z)$ について　$\phi_a(a) = 0$　より，$\phi_a(aI + bN) = \phi_a(a)I + b\phi_a'(a)N = b\phi_a'(a)N$.

$$\|aI + bN\| = 1 \quad \text{且} \quad \mathcal{B} \text{ は } 1(\mathrm{vN}) \text{ を満たすから} \quad \|\phi_a(aI + bN)\| \leq 1. \quad \therefore \quad \frac{|b|}{1 - |a|^2} = |b\phi_a'(a)| \leq \frac{1}{\|N\|}.$$

補題 3(2) より，$m_{a,a}(|b| \cdot \|N\|) \leq 1$.　$\therefore$　$m_{ca,ca}(|cb| \cdot \|N\|) \leq c$.　$\therefore$　$m_{\alpha,\alpha}(|\beta| \cdot \|N\|) \leq \|\alpha I + \beta N\|$.
次に逆向きの不等式を示す。　$|\lambda| < 1$ のとき Möbius 変換 $\phi_\lambda(z)$ と　$t = \|N\|$　について

$$\|t^{-1}N\| = 1 \quad \text{且} \quad \mathcal{B} \text{ は } 1(\mathrm{vN}) \text{ を満たすから} \quad \|\phi_\lambda(t^{-1}N)\| \leq 1.$$

このとき　$\phi_\lambda(t^{-1}N) = \phi_\lambda(0I + t^{-1}N) = \phi_\lambda(0)I + t^{-1}\phi_\lambda'(0)N = -\lambda I + \dfrac{1 - |\lambda|^2}{t}N$　が成り立つから

$$\left\| I - \frac{1 - |\lambda|^2}{t\lambda}N \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}, \quad (0 < |\lambda| < 1).$$

これは $|\lambda| = 1$ のときも成り立つ。補題 2 より，全ての $\beta \in \mathbf{C}$ について $\|I + \beta N\| \leq m_{1,1}(|\beta|t)$.
$t = \|N\|$ より，全ての $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ について　$\|\alpha I + \beta N\| \leq m_{\alpha,\alpha}(|\beta| \cdot \|N\|)$.　□

定理 1 の証明：　$\mathcal{B}$ は補題 A の 2 種類に限る。補題 B(3) より，Hilbert 空間 H が $\dim H \geq 2$ を満たしているとき，I_0, P_0, $N_0 \in B(H)$ が存在して $P_0^2 = P_0 \neq 0, I_0$, $\|P\| = \|P_0\|$, $N_0 \neq 0$, $N_0^2 = 0$, $\|N\| = \|N_0\|$　を満たす。
$\mathcal{B} = \{\alpha P + \beta Q \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}$　(ただし $Q = I - P$)　のとき：
補題 C(1) より，$\|\alpha P + \beta Q\| = m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha - \beta|\sqrt{\|P\|^2 - 1}\right)$.　補題 B(1) より，$\|\alpha P_0 + \beta Q_0\| = m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha - \beta|\sqrt{\|P_0\|^2 - 1}\right)$.
　ただし，$Q_0 = I_0 - P_0$.　$\|P\| = \|P_0\|$ より，$\|\alpha P + \beta Q\| = \|\alpha P_0 + \beta Q_0\|$.
$\therefore$ $\mathcal{B}_1$ を P_0 と Q_0 で生成される $B(H)$ の 2 次元可換部分環と定めると，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_1$ と等距離同型。
$\mathcal{B} = \{\alpha I + \beta N \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}$ のとき：
補題 C(2) より，$\|\alpha I + \beta N\| = m_{\alpha,\alpha}(|\beta| \cdot \|N\|)$.　補題 B(2) より，$\|\alpha I_0 + \beta N_0\| = m_{\alpha,\alpha}(|\beta| \cdot \|N_0\|)$.　$\|N\| = \|N_0\|$ より，$\|\alpha I + \beta N\| = \|\alpha I_0 + \beta N_0\|$.　$\therefore$ $\mathcal{B}_2$ を I_0 と N_0 で生成される $B(H)$ の 2 次元可換部分環と定めると，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_2$ と等距離同型。　□

第 3 章　　定理 2 を用いた多変数の Schwarz の補題の証明

定理 2 は既に Nakazi [8, Corollary 2] において，補題 A,B を用いて
「$\dim \mathcal{B} = 2$　且　$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環　$\Rightarrow$　関数環 A と A の閉イデアル J が存在して $\mathcal{B} = A/J$」
を示す方法により証明されている。定理 2 を用いて，次の補題を作用素論的に証明できる。

多変数の Schwarz の補題 [9]　$|\alpha_k|, |\beta_k| \leq 1$, $k = 1, ..., n$ と
$|f(z_1, ..., z_n)| \leq 1$　$(|z_k| \leq 1, \ k = 1, ..., n)$ を満たす多項式 f について

(1)
$$\left| \frac{f(\alpha_1, ..., \alpha_n) - f(\beta_1, ..., \beta_n)}{1 - \overline{f(\beta_1, ..., \beta_n)} f(\alpha_1, ..., \alpha_n)} \right| \leq \max_{k=1,...,n} \left| \frac{\alpha_k - \beta_k}{1 - \overline{\beta_k}\alpha_k} \right|$$

(2)
$$\frac{|(\beta_1 f_{z_1} + ... + \beta_n f_{z_n})(\alpha_1, ..., \alpha_n)|}{1 - |f(\alpha_1, ..., \alpha_n)|^2} \leq \max_{k=1,...,n} \frac{|\beta_k|}{1 - |\alpha_k|^2}$$

証明 : (1): 任意の $P \in B(H)$, $P^2 = P \neq 0, I$, $Q = I - P$ について，$\mathcal{B}$ を P, Q で生成された $B(H)$ の 2 次元部分環とする。定理 2 より，$\mathcal{B}$ は全ての n について n(vN) を満たすから，$T_k = \alpha_k P + \beta_k Q$ について，

$$T_k \in \mathcal{B}, \quad \|T_k\| \leq 1 \ (k = 1, ..., n) \ \Rightarrow \ \|f(T_1, ..., T_n)\| \leq 1.$$

$f(T_1, ..., T_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)P + f(\beta_1, ..., \beta_n)Q$ が成り立つから，

$$\|\alpha_k P + \beta_k Q\| \leq 1 \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \|f(\alpha_1, ..., \alpha_n)P + f(\beta_1, ..., \beta_n)Q\| \leq 1.$$

補題 B(1) と補題 3(1) より，

$$\left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k \alpha_k}\right| \leq \frac{1}{\|P\|} \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(\alpha_1, ..., \alpha_n) - f(\beta_1, ..., \beta_n)}{1 - \overline{f(\beta_1, ..., \beta_n)} f(\alpha_1, ..., \alpha_n)}\right| \leq \frac{1}{\|P\|}.$$

補題 B(3) より，最初から $P \in B(H)$ を $\displaystyle \max_{k=1,...,n} \left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k \alpha_k}\right| = \frac{1}{\|P\|}$ を満たすようにとっておくとよい。

(2): 任意の $N \in B(H)$, $N \neq 0$, $N^2 = 0$ について，$\mathcal{B}$ を I, N で生成された 2 次元部分環とする。定理 2 より，$\mathcal{B}$ は全ての n について n(vN) を満たすから，$T_k = \alpha_k I + \beta_k N$ について，

$$T_k \in \mathcal{B}, \quad \|T_k\| \leq 1 \ (k = 1, ..., n) \ \Rightarrow \ \|f(T_1, ..., T_n)\| \leq 1.$$

$f(T_1, ..., T_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)I + (\beta_1 f_{z_1} + ... + \beta_n f_{z_n})(\alpha_1, ..., \alpha_n)N$ が成り立つから，

$$\|\alpha_k I + \beta_k N\| \leq 1 \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \|f(\alpha_1, ..., \alpha_n)I + (\beta_1 f_{z_1} + ... + \beta_n f_{z_n})(\alpha_1, ..., \alpha_n)N\| \leq 1.$$

補題 B(2) と補題 3(2) より，

$$\frac{|\beta_k|}{1 - |\alpha_k|^2} \leq \frac{1}{\|N\|} \quad (k = 1, ..., n) \quad \Rightarrow \quad \frac{|(\beta_1 f_{z_1} + ... + \beta_n f_{z_n})(\alpha_1, ..., \alpha_n)|}{1 - |f(\alpha_1, ..., \alpha_n)|^2} \leq \frac{1}{\|N\|}.$$

補題 B(3) より，最初から $N \in B(H)$ を $\displaystyle \max_{k=1,...,n} \frac{|\beta_k|}{1 - |\alpha_k|^2} = \frac{1}{\|N\|}$ を満たすようにとっておくとよい。 □

第 4 章 多変数の Schwarz の補題を用いた定理 2 の別証明

高橋世知子教授は多変数の Schwarz の補題 (1) を定理 2 を用いずに関数論的に証明した。(2) も同様に関数論的に証明できる（参照 [9]）。第 3 章とは逆に，多変数の Schwarz の補題を用いて，定理 2 を次のように Nakazi [8, Corollary 2] とは別な方法で，関数論的に証明することができる。

$\dim \mathcal{B} = 2$ より，$\mathcal{B}$ は補題 A の 2 種類に限る。

$\mathcal{B} = \{\alpha P + \beta Q \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbf{C}\}$ （ただし $Q = I - P$） のとき :
$P \in B(H)$ は $P^2 = P \neq 0, I$ を満たし $T_k := \alpha_k P + \beta_k Q$ は $\|T_k\| \leq 1 \quad (k = 1, ..., n)$ を満たすとする。

補題 $B(1)$ と補題 3(1) より， $\displaystyle \left|\frac{\alpha_k - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k \alpha_k}\right| \leq \frac{1}{\|P\|} \quad (k = 1, ..., n).$

多変数の Schwarz の補題 (1) より， $\displaystyle \left|\frac{f(\alpha_1, ..., \alpha_n) - f(\beta_1, ..., \beta_n)}{1 - \overline{f(\beta_1, ..., \beta_n)} f(\alpha_1, ..., \alpha_n)}\right| \leq \frac{1}{\|P\|}.$

補題 $B(1)$ と補題 3(1) より， $\|f(\alpha_1,...,\alpha_n)P+f(\beta_1,...,\beta_n)Q\|\leq 1.$ $\quad\therefore\quad$ $\|f(T_1,...,T_n)\|\leq 1.$

$\mathcal{B}=\{\alpha I+\beta N\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ のとき:
$N\in B(H)$ は $N\neq 0$, $N^2=0$ を満たし $T_k:=\alpha_k I+\beta_k N$ は $\|T_k\|\leq 1$ $(k=1,...,n)$ を満たすとする。

補題 $B(2)$ と補題 3(2) より， $$\frac{|\beta_k|}{1-|\alpha_k|^2}\leq\frac{1}{\|N\|}\quad(k=1,...,n).$$

多変数の Schwarz の補題 (1) より， $$\frac{|(\beta_1 f_{z_1}+...+\beta_n f_{z_n})(\alpha_1,...,\alpha_n)|}{1-|f(\alpha_1,...,\alpha_n)|^2}\leq\frac{1}{\|N\|}.$$

補題 $B(2)$ と補題 3(2) より，$\|f(\alpha_1,...,\alpha_n)I+(\beta_1 f_{z_1}+...+\beta_n f_{z_n})(\alpha_1,...,\alpha_n)N\|\leq 1.$ $\therefore$ $\|f(T_1,...,T_n)\|\leq 1.$ □

第 5 章　定理 1, 2 と Möbius 変換

定理 1「$\dim\mathcal{B}=2$ 且 $\mathcal{B}$ は 1(vN) を満たす $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型」の証明で 1(vN) を使ったところは，補題 C であった。補題 C の証明では，次の定理 3 の (6) のように，Möbius 変換 ϕ_λ についての 1(vN) しか使っていなかった。定理 1 と定理 2 より次の定理 3 が成り立つ。

定理 3 [9] $\dim\mathcal{B}=2$ のとき，(1) ～ (6) は同値である。(von Neumann の不等式を用いずに証明できる。)
(1) $\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型。
(2) $\mathcal{B}$ は n(vN) を満たす。
(3) $\mathcal{B}$ は 1(vN) を満たす。
(4) $T\in\mathcal{B}$, $\|T\|\leq 1\ \Rightarrow\ \|\phi_\lambda(T)\|\leq 1,\quad(|\lambda|<1).$
(5) $T\in\mathcal{B}$, $\|T\|=1\ \Rightarrow\ \|\phi_\lambda(T)\|=1,\quad(|\lambda|<1).$
(6) $T\in\mathcal{B}$, $\|T\|=1\ \Rightarrow\ \|\phi_\lambda(T)\|\leq 1,\quad(|\lambda|<1).$

証明: (1) $\Rightarrow$ (2): 定理 2 を用いる。
(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) と (5) $\Rightarrow$ (6) は明らか。
(3) $\Rightarrow$ (1): 定理 1 による。
(1) $\Rightarrow$ (4): ここの証明には $\dim\mathcal{B}=2$ は必要ない。von Neumann の不等式も必要ない。
実際 (参照 Pisier [11, p.21]), $T\in B(H)$, $\|T\|\leq 1$ と $x\in H$ について

$$\|(T-\lambda I)x\|^2-\|(I-\bar{\lambda}T)x\|^2=(\|Tx\|^2-\|x\|^2)(1-|\lambda|^2)\leq 0$$

$\therefore\ \|(T-\lambda)(1-\bar{\lambda}T)^{-1}\|\leq 1.\quad\therefore\ \|\phi_\lambda(T)\|\leq 1.$

(1) $\Rightarrow$ (5) : $\dim\mathcal{B}=2$ より，$\mathcal{B}$ は補題 A の 2 種類に限る。
$\mathcal{B}=\{\alpha P+\beta Q\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ (ただし $Q=I-P$) のとき :

補題 3(1) より， $\|\alpha P+\beta Q\|=1\ \Rightarrow\ \left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\beta}\alpha}\right|=\dfrac{1}{\|P\|}$. 一方，計算により， $\left|\dfrac{\phi_\lambda(\alpha)-\phi_\lambda(\beta)}{1-\overline{\phi_\lambda(\beta)}\phi_\lambda(\alpha)}\right|=\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\beta}\alpha}\right|.$

$$\therefore\quad\left|\frac{\phi_\lambda(\alpha)-\phi_\lambda(\beta)}{1-\overline{\phi_\lambda(\beta)}\phi_\lambda(\alpha)}\right|=\frac{1}{\|P\|}.$$

補題 3(1) より，$\|\phi_\lambda(\alpha)P+\phi_\lambda(\beta)Q\|=1$. $\therefore$ $\|\phi_\lambda(\alpha P+\beta Q)\|=1$.
$\mathcal{B}=\{\alpha I+\beta N\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ のとき：

補題 3(2) より， $\|\alpha I+\beta N\|=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|\beta|}{1-|\alpha|^2}=\dfrac{1}{\|N\|}$. 一方，計算により， $\dfrac{|\phi_\lambda'(\alpha)|}{1-|\phi_\lambda(\alpha)|^2}=\dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$.

$$\therefore \quad \frac{|\beta\phi_\lambda'(\alpha)|}{1-|\phi_\lambda(\alpha)|^2}=\frac{1}{\|N\|}.$$

補題 3(2) より，$\|\phi_\lambda(\alpha)I+\beta\phi_\lambda'(\alpha)N\|=1$. $\therefore$ $\|\phi_\lambda(\alpha I+\beta N)\|=1$.

(6) $\Rightarrow$ (1): $\dim\mathcal{B}=2$ より，$\mathcal{B}$ は補題 A の 2 種類に限る。
$\mathcal{B}=\{\alpha P+\beta Q\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ (ただし $Q=I-P$) のとき：
補題 C(1) の証明より，もし (6) が成り立つならば $\|\alpha P+\beta Q\|=m_{\alpha,\beta}\left(|\alpha-\beta|\sqrt{\|P\|^2-1}\right)$. よって，
定理 1 の証明より，$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型。
$\mathcal{B}=\{\alpha I+\beta N\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}$ のとき：
補題 C(2) の証明より，もし (6) が成り立つならば $\|\alpha I+\beta B\|=m_{\alpha,\alpha}(|\beta|\cdot\|N\|)$. よって，
定理 1 の証明より，$\mathcal{B}$ は $B(H)$ の部分環と等距離同型。 □

参考文献

[1] T.Ando, On a pair of commutative contractions, Acta Sci. Math. 24(1963), 88-90.

[2] F.F.Bonsall and J.Duncan, "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.

[3] B.Cole, K.Lewis, and J.Wermer, Pick conditions on a uniform algebra and von Neumann inequalities, J. Funct. Anal. 107(1992), 235-254.

[4] S.W.Drury, "Remarks on von Neumann's inequality", pp.14-32, Lecture Notes in Mathematics, Vol.995, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.

[5] I.A.Feldman, N.Ja.Krupnik and A.S.Markus, On the norm of two adjoint projections, Integral Equations and Operator Theory 14(1991), 69-90.

[6] C.Foias, Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux, Acta Sci. Math. (Szeged) 18(1957), 15-20.

[7] I.C.Gohberg and N.Ja.Krupnik, "One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vols. I,II", Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[8] T.Nakazi, Two dimensional Q-algebras, Linear Algebra Appl. 315(2000), 197-205.

[9] T.Nakazi and T.Yamamoto, Two dimensional commutative Banach algebras and von Neumann Inequality, to appear in Linear Algebra Appl.

[10] J.von Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, Math. Nachrichten 4(1951), 258-281.

[11] G.Pisier, "Similarity Problems and Completely Bounded Maps", Lecture Notes in Mathematics, Vol.1618, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1996.

[12] I.Suciu, "Function Algebras", Noordhoff, Leyden, 1975.

Backward shift invariant subspaces on the torus

Keiji Izuchi

This is a joint work with T. Nakazi and M. Seto.

Let Γ^2 be the 2-dimensinal unit torus. We denote by $(z,w) = (e^{i\theta}, e^{i\phi})$ the variables in $\Gamma^2 = \Gamma_z \times \Gamma_w$. Let $L^2 = L(\Gamma^2)$ be the usual Lebesgue space on Γ^2 with the norm $\|f\|_2 = (\int_{\Gamma^2} |f(e^{i\theta}, e^{i\phi})|^2 d\theta d\phi/(2\pi)^2)^{1/2}$. For $f \in L^2$, the Fourier coefficients are given by

$$\hat{f}(n,m) = \int_{\Gamma^2} f(e^{i\theta}, e^{i\phi}) e^{-in\theta} e^{-im\phi}\, d\theta d\phi/(2\pi)^2 = \langle f, z^n w^m \rangle.$$

Let H^2 be the Hardy space on Γ^2, that is,

$$H^2 = \{f \in L^2; \hat{f}(n,m) = 0 \text{ if } n < 0 \text{ or } m < 0\}.$$

For $f \in H^2$, we can write f as

$$f = \sum_{i,j=0}^{\infty} \oplus a_{i,j} z^i w^j, \quad \text{where} \sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{i,j}|^2 < \infty.$$

For a function $\psi \in L^\infty$, let $L_\psi f = \psi f$ for $f \in L^2$. A closed subspace M of L^2 is called invariant if $L_z M \subset M$ and $L_w M \subset M$. Let P be the orthogonal projection from L^2 onto H^2. For a closed subspace M of L^2, we denote by P_M the orthogonal projection from L^2 onto M. Put $T_\psi = PL_{\psi|H^2}$. Usually T_ψ is called a Toeplitz operator on H^2 with symbol ψ, and it is well known that $T_\psi^* = T_{\overline{\psi}}$.

For ϕ in H^∞, put

$$V_\phi = P_M T_\phi P_M | M.$$

It is known in [5, 6] that $V_z V_w^* = V_w^* V_z$ if and only if $M = qH^2$ for some inner function q in H^∞.

Let M be an invariant subspace of H^2. Then $T_z^*(H^2 \ominus M) \subset (H^2 \ominus M)$ and $T_w^*(H^2 \ominus M) \subset (H^2 \ominus M)$. We call a closed subspace N of H^2 backward shift invariant if $T_z^* N \subset N$ and $T_w^* N \subset N$.

Let N be a backward shift invariant subspace of H^2 and $\phi \in L^\infty$. Put

$$S_\phi = P_N L_\phi P_N \quad \text{on } N.$$

Then we have $S_\phi^* = S_{\overline{\phi}}$ and $S_z^* = T_z^*$ on N. We are interested in backward shift invariant subspaces N which satisfy $S_z S_w^* = S_w^* S_z$.

The following is the main theorem.

Theorem. *Let N be a backward shift invariant subspace of H^2 and $N \neq H^2$. Then $S_z S_w^* = S_w^* S_z$ if and only if N has one of the following forms;*

(i) $N = H^2 \ominus q_1(z)H^2$,
(ii) $N = H^2 \ominus q_2(w)H^2$,
(iii) $N = (H^2 \ominus q_1(z)H^2) \cap (H^2 \ominus q_2(w)H^2) = (H^2 \ominus q_1(z)H^2) \ominus q_1(w)(H^2 \ominus q_1(z)H^2)$,

where $q_1(z)$ and $q_2(w)$ are one variable inner functions.

Corollary 1. *Let M be an invariant subspace of H^2 and $M \neq \{0\}$. Put $N = H^2 \ominus M$. Then $S_z S_w^* = S_w^* S_z$ on N if and only if M has one of the following forms;*

(i) $M = q_1(z)H^2$,
(ii) $M = q_2(w)H^2$,
(iii) $M = q_1(z)H^2 + q_2(w)H^2$,

where $q_1(z)$ and $q_2(w)$ are one variable inner functions.

The following answers a question posed in [4].

Corollary 2. *Let M be an invariant subspace of H^2 such that $\dim(M \ominus (zM + wM)) = 1$. Put $N = H^2 \ominus M$. If $S_z S_w^* = S_w^* S_z$ on N, then M has one of the following forms;*

(i) $M = q_1(z)H^2$,
(ii) $M = q_2(w)H^2$,

where $q_1(z)$ and $q_2(w)$ are one variable inner functions.

Proof. By Corollary 1, $M = q_1(z)H^2$, or $M = q_2(w)H^2$, or $M = q_1(z)H^2 + q_2(w)H^2$. Suppose that $M = q_1(z)H^2 + q_2(w)H^2$ holds. Then

$$q_1(z), q_2(w) \in M \ominus (zM + wM).$$

Since $\dim(M \ominus (zM + wM)) = 1$, $q_1(z) = cq_2(w)$ for some number c. This implies that $q_1(z), q_2(w)$ are constant functions. Thus we get $M = H^2$.

Our theorem can be generalized in several ways. These results will come in the forthcoming papers.

References

1. P. R. Ahern and D. N. Clark, Invariant subspaces and analytic continuation in several variables, J. Math. Mech. 19(1970), 963-969.
2. A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81(1949), 239-255.
3. M. Cotlar and C. Sadosky, A polydisk version of Beurling's characterization for invariant subspaces of finite multi-codimension, Contemporary Math. 212(1998), 51-56.
4. R. G. Douglas and R. Yang, Operator theory in the Hardy space over the bidisk (I),Integral Eq. Op. Theory 38(2000), 207-221.
5. V. Mandrekar, The validity of Beurling theorems in polydiscs, Proc. Amer. Math. Soc. 103(1988), 145-148.
6. T. Nakazi, Certain invariant subspaces of H^2 and L^2 on a bidisc. Can. J. Math.
XL(1988), 1272-1280.
7. T. Nakazi, Invariant subspaces in the bidisc and commutators, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 56(1994), 232-242.

K. Izuchi
Department of Mathmatics
Faculty of Science
Niigata University
Niigata 950-2181, Japan

izuchi@math.sc.niigata-u.ac.jp