（1999年度北大集中講義レクチャーノート）

ガロア・タイヒミュラー群の LEGO理論

中 村 博 昭（述）

Series ＃65. August 2000

はしがき

このノートは、1999年6月7日〜6月11日に北海道大学で集中講義した内容に若干加筆してまとめたものである。この講義の主なねらいは、代数曲線のモジュライ空間の基本群(タイヒミュラーモジュラー群)たちが、リーマン面の退化を通じて、多重な仕方で積み重なっている様子を、有理数体の絶対ガロア群の表現の言葉で記述することであった。特に、代数曲線のモジュライ空間に関係する種々の副有限基本群におけるガロア表現が、その最も基本的な場合である射影直線マイナス3点の場合をうまく組み合わせることで具体的に記述できる、ということを説明した。この一環としてタイヒミュラー幾何学のような位相幾何と代数幾何が交錯する世界の一面を、ガロア理論を通じて群論的な平易な言葉で描写することを試みた。

初日の談話会(§1)において、本講義の主題であるガロア・タイヒミュラー群を素朴な立場から説明するとともに、ここにおけるガロア表現を記述するために最近 L.Schneps との共同研究において導入したリーマン面の “キルト分解” のなす extended Hatcher complex およびグロタンディーク・タイヒミュラー群 GT の精密化について紹介した。そのあと、連続講義では一旦基礎的な話題に立ち戻り、次のような内容を論じた。

§2. 射影直線マイナス3点の基本群における外ガロア表現と Belyĭ の定理とその意義。

§3. 基本亜群と tangential base point の概念の導入。また、Grothendieck-Teichmüller 群の定義と基本事項の紹介。

§4. 極大退化曲線の形式近傍の具体的な構成とガロア表現の van Kampen 的貼り合わせについて。

§5. 代数曲線のモジュライ空間の基本群とその位相幾何的な生成元 (Dehn twist) へのガロア作用について、種数1の特別な場合に限定して例示。

末尾に、講義で十分に立ち入ることの出来なかった詳細などを補うために、簡単な文献案内を追加した。(例外的なものを除き、出版されているものに限った。) もとより完全な文献リストを意図したものではなく、読者諸氏の参考の一助にとの思いから供するものに過ぎない。

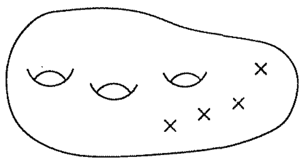
集中講義の機会をお世話くださった田口雄一郎氏をはじめ、筆者の拙い講義に辛抱強く出席してくださった学生の皆さん、特に TeX で記録を作成して下さった大溪幸子、長谷部寛之、林真也、山上敦士の諸氏のお力添えがなければ、このノートは決して完成いたしませんでした。心より感謝申し上げます。

平成12年5月 中村博昭 (都立大・理)

1　Overview: 代数曲線のモジュライとガロア表現

(1) Galois-Teichmüller 群

$M_{g,n}$ を種数 g の n 標点付き完備非特異代数曲線のモジュライ空間とし、有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数的スタックとみなす。スタックというのは、自己同型を持つ代数曲線のモジュラスの点では、その自己同型群を空間が覚えていて、被覆をとると、その分が忘れずに出て来て被覆変換群の中にくり込まれるようにうまく定式化されている、という意味がある。



$= (R, Q_1, \ldots, Q_n)$

このモジュライ空間の複素化の基本群は、タイヒミュラー・モジュラー群 (写像類群ともいう)

$$\Gamma_{g,n} := \pi_0(\mathrm{Diffeo}^+(R; Q_1, \cdots, Q_n))$$

と同型であり、$M_{g,n}(\mathbb{C})$ の普遍被覆 $T_{g,n}$ に自然に作用して

$$M_{g,n}(\mathbb{C}) \;\simeq\; T_{g,n}/\Gamma_{g,n}$$

という $M_{g,n}(\mathbb{C})$ の商表示を引き起こす。有理数体の絶対ガロア群を、$G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ とおく。これと $\Gamma_{g,n}$ とが関係するために、$M_{g,n}$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されていることが必要である：実際、$M_{g,n}/\mathbb{Q}$ の étale 基本群を取ると、

$$1 \longrightarrow \widehat{\Gamma}_{g,n} \longrightarrow \pi_1(M_{g,n/\mathbb{Q}}) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

という副有限群 (profinite group) の完全系列が出来る。ここに $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ は $\Gamma_{g,n}$ の副有限完備化 $\varprojlim(\Gamma_{g,n}$ の有限商群) であり、$\Gamma_{g,n}$ はこれに自然に稠密に埋め込まれる。ここに現れる $\pi_1(M_{g,n/\mathbb{Q}})$ を Galois-Teichmüller 群と呼ぶ。今回の講演の主題は、この群の構造を記述することである。

Example 1.1 楕円曲線 (＋原点) のモジュライ空間 $M_{1,1} \simeq \mathbb{P}^1_j \setminus \{\infty\}$: *j-line* $/\mathbb{Q}$ は $j = 0, 1728$ で *"singular"* である。その複素化はよく知られているように上半平面 $\mathcal{H}$ で一意化されて $M_{1,1}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とかける。体論的に上の基本完全系列をとらえるために $\mathbb{Q}(j)$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された $M_{1,1}$ 上の有理函数体、$\mathbb{C}(j)$ を $\mathbb{C}$ 上定義された $M_{1,1}$ 上の有理函数体とし、$\mathbb{C}(\mathcal{H})_{alg}$ を $\mathcal{H}$ 上の有理型函数 (で $\mathbb{C}(j)$ 上代数的なもののなす体) とおくと、

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{C}(\mathcal{H})_{alg} \arrow[dd, dash, "\widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/\{\pm 1\}"'] \arrow[dr, dash] & & \\
& \overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})_{alg} \arrow[dd, dash] \arrow[ddr, dash, "\pi_1(M_{1,1/\mathbb{Q}})/\{\pm 1\}"] & \\
\mathbb{C}(j) \arrow[dr, dash] & & \\
& \overline{\mathbb{Q}}(j) \arrow[dr, dash, "G_{\mathbb{Q}}"'] & \\
& & \mathbb{Q}(j)
\end{tikzcd}
$$

のようにして、$G_{\mathbb{Q}}$ の $\widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/\{\pm 1\} \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})_{alg}/\overline{\mathbb{Q}}(j))$ による拡大群

$$1 \longrightarrow \widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})_{alg}/\mathbb{Q}(j)) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

ができる。このような体論的な拡大群の描写には ± 1 $(= \mathrm{Aut}(E))$ が足りないという問題点がある。これは *moduli stack* のエタール基本群の概念 *(according to T. Oda)* を使って *clear* でき、

$$1 \longrightarrow \widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \longrightarrow \pi_1(M_{1,1/\mathbb{Q}}) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

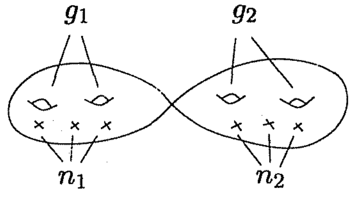
が作れる。

(2) Grothendieck's Philosophy.

モジュライ空間 $M_{g,n}$ は stable curve に対応する点を添加してコンパクト化することが出来る。これを $\overline{M}_{g,n}$ とかく (Deligne-Mumford コンパクト化ともいう。) 新しくつけ加わった部分 $\overline{M}_{g,n} \setminus M_{g,n}$ を無限遠成分といい、$\partial M_{g,n}$ とかくと、これは正規交叉する既約因子の和の形をしている：

$$\partial M_{g,n} = D_1 + \cdots + D_N : \text{divisors with normal crossings.}$$

このうち、例えば、次のような形をした既約因子がある：$D_i \simeq \overline{M}_{g_1,n_1+1} \times \overline{M}_{g_2,n_2+1}$. この上の一般的な点は次の図のような格好をした stable curve をパラメトライズしている。



$(g = g_1 + g_2,\ n = n_1 + n_2)$

すると D_i の近傍と $M_{g,n}$ の共通部分 (管状近傍という) の基本群 $\pi_1(]D_i[)$ から次の射がある：

$$\pi_1(M_{g_1,n_1+1} \times M_{g_2,n_2+1}) \leftarrow \pi_1(]D_i[) \rightarrow \pi_1(M_{g,n}).$$

(右側の $\rightarrow$ は $\hookrightarrow$ と思われるが、副有限基本群では証明されていない。) 左側の $\leftarrow$ は pro-cyclic 群 $\hat{\mathbb{Z}}$ の拡大群になつている。また、それぞれの群から $G_{\mathbb{Q}}$ に標準的な全射がある。これらが有機的に積み重なつて、

$$\textbf{Galois-Teichmüller 塔} \quad \{\pi_1(M_{g,n}) \rightarrow G_{\mathbb{Q}}\}_{g,n}$$

を形成する。Grothendieck は、これの構造を知ること、特に、次元の小さいいくつかの場合 $(M_{0,4}, M_{0,5}, M_{1,1}, M_{1,2})$ を詳細に研究し、それらをブロック遊び (le jeu de Légo) のように積み上げて、一般の $M_{g,n}$ の場合を記述することを提唱した。

今回の講義では、tangential base point という概念を丁寧に導入することで、この問題にアプローチして行きたい。それが具体的にどのような仕方で与えられるかについての講釈は、次節に回すとして、とりあえずここでは、tangential base point がガロア・タイヒミュラー群に対してどのような役割を果たすのか、を大雑把に説明しよう。

そこで、再び完全系列

$$1 \rightarrow \widehat{\Gamma}_{g,n} \rightarrow \pi_1(M_{g,n}) \rightarrow G_{\mathbb{Q}} \rightarrow 1$$

に注意を戻す。この完全系列において、

$$\begin{aligned} &「群\ \pi_1(M_{g,n})\ の分裂\ \widehat{\Gamma}_{g,n} \rtimes G_{\mathbb{Q}}\ を与えること」\\ \Longleftrightarrow\ &「射\ \pi_1(M_{g,n}) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}}\ の\ \text{section}\ 準同型を与えること」\\ \Longleftarrow\ &「M_{g,n}\ 上の\ \text{tangential base point}\ \vec{v}\ を与えること」\end{aligned}$$

という論理関係がある。群論的な section 準同型のうちどの位が、幾何学的な tangential base point 達から引き起こされるかどうかは未解決問題であるが、ともかく各 $\vec{v}$ ごとに section 準同型 $G_{\mathbb{Q}} \dashrightarrow \pi_1(M_{g,n})$ が起こり、これを経由して正規部分群 $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ への共役作用を取ることにより Galois 表現

$$\rho_{\vec{v}}:\ G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{\Gamma}_{g,n})$$

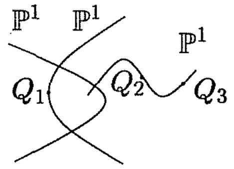
を得る。

主題. Galois 作用の集団 $\{\rho_{\vec{v}} : G_{\mathbb{Q}} \curvearrowright \widehat{\Gamma}_{g,n}\}_{g,n}$ を (g,n) や $\vec{v}$ をいろいろ動かして研究せよ。

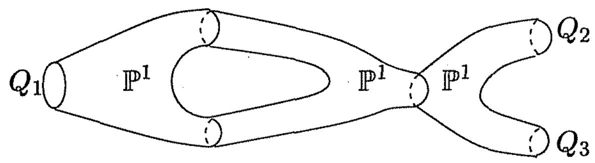
(3) パンツ分解、Grothendieck-Teichmüller 群とそれらの精密化

Tangential base point $\vec{v}$ の作り方はいろいろあるが、今回紹介するのは **maximally degenerate curve + 付加構造**から作るものである。Maximally degenerate curve (m.d.c.) とは、組 $X^0 = (\mathbb{P}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}^1; Q_1, \cdots, Q_n)$ であつて、各 $\mathbb{P}^1$ は丁度 3 個の marked point (標点) or double point (二重点) を持つ、様なものである。(以後、この 2 種類の点 (標点と二重点) をあわせて**格別点** (distinguished point) と総称する。)

Example 1.2 $X^0 = (\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1; Q_1, Q_2, Q_3)$

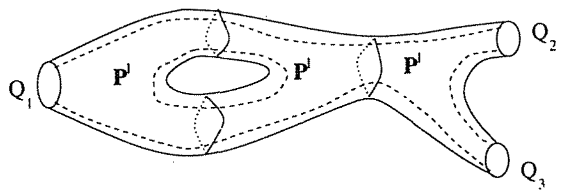
$X^0 =$ 

位相幾何的には m.d.c. は、各 3 (格別) 点付き $\mathbb{P}^1$ 成分をパンツと見立てて貼り合わせることによりリーマン面上の pants 分解 と対応する：



また、moduli で言うと、m.d.c. は $\partial M_{g,n}$ の cusp point と対応する。さて、pants 分解に次のような "付加構造" を付け加えて (X^0 に対応する $M_{g,n}$ の点から発する) tangent vector を定めたい。

Definition 1.3 (g,n) 型 *Riemann* 面の *pants* 分解 $P = (P_1, \cdots, P_{2g-2+n})$ が与えられている時、この上の**キルト** (*Quilt*) **分解** Q/P とは、各パンツ P_i に *3* 本ずつの切れ目を入れて *2* 枚の六角面に分割し、かつ隣接するパンツ同士の境界輪上には継ぎ目の点が丁度 2 個ずつになる様にする仕方、のこととする。



目標は、うまく $(Q/P) \mapsto \vec{v}_{Q/P}$ という対応を構成して、Galois 表現の塔

$$\{\rho_{\vec{v}_{Q/P}}:\ G_{\mathbb{Q}} \ \to\ \mathrm{Aut}(\widehat{\Gamma}_{g,n})\}_{g,n}$$

を具体的に記述することである。次の対応がある：

位相幾何		代数幾何
Pants 分解	$\leftrightarrow$	cusp of $M_{g,n}$ (or max. deg. marked curve)
Quilt Q/P	$\leftrightarrow$	tangential base point

結論としては、$M_{0,4}$, $M_{0,5}$, $M_{1,1}$, $M_{1,2}$ だけを使つて、すべての $M_{g,n}$ に対するガロア表現を記述できる。特に $M_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ が重要である。$M_{0,4}$ については次の完全列がある：

$$1 \to \widehat{\Gamma}_{0,4} \to \pi_1(M_{0,4}) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1.$$

ここで $\widehat{\Gamma}_{0,4}$ は階数 2 の副有限自由群 $\widehat{F}_2 = \langle x,y\rangle^{\wedge}$ と同型である。Belyĭ により、$G_{\mathbb{Q}}$ を $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \times \widehat{F}_2$ (単なる集合としての積) に埋め込んで parametrize できる：

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \times \widehat{F}_2 \\ \sigma &\mapsto (\lambda_\sigma, f_\sigma). \end{aligned}$$

この parameter を使って一般の $\rho_{\vec{v}}$ を記述したい。

ここで <u>Grothendieck-Teichmüller 群</u> を次の様に定義する:

$$\widehat{GT} := \left\{ (\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \times \widehat{F}_2 \ \middle|\ \begin{array}{c} \text{次の (I), (II), (III) を満たし、} \\ \text{かつ、} x \mapsto x^{\lambda},\ y \mapsto f^{-1}y^{\lambda}f \\ \text{が } \widehat{F}_2 \text{ の自己同型を引き起こす} \end{array} \right\}$$

(I) $f(x,y)f(y,x) = 1$,

(II) $f(z,x)z^m f(y,z)y^m f(x,y)x^m = 1$ (ここで $xyz=1$, $m=(\lambda-1)/2$),

(III) $f(x_{12},x_{23})f(x_{34},x_{45})f(x_{51},x_{12})f(x_{23},x_{34})f(x_{45},x_{51}) = 1.$

ここに x_{ij} は 5 本糸の組紐群の然るべき元である。Drinfeld は $\widehat{GT}$ の $\widehat{\Gamma}_{0,n}$ への作用の公式を見出した。これを延長する形で $g \geq 1$ のときを考えたいのだが、そのために $\widehat{GT}$ の条件の他に、さらに次の条件を考える：

(IV) $f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{8\rho_2} f(\tau_1^2, \tau_2^2)\tau_1^{4\rho_2}(\tau_1\tau_2)^{-6\rho_2}$,

(III′) $f(\tau_1\tau_3, \tau_2^2) = g(x_{45},x_{51})f(x_{12},x_{23})f(x_{34},x_{45})$.

ここで、ρ_2 や $g(x,y)$ は (λ,f) から定まるある 2 次的なパラメーターであり、τ_1,τ_2,τ_3 は組紐群の標準的な生成元を表している。今、$\widehat{GT}$ の "精密版" $\mathbb{I}\Gamma$ を

$$\mathbb{I}\Gamma := \{(\lambda,f) \in \widehat{\mathrm{GT}} \mid \text{さらに (III′), (IV) を満たす}\}$$

で定義する。

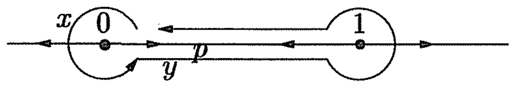
Theorem 1.4 群 $\mathbb{I}\Gamma$ は、$G_{\mathbb{Q}}$ を含み、$\widehat{GT}$ に含まれる。さらに、種数 g で、n 標点をもつリーマン面 $(\Sigma; Q_1, \dots, Q_n)$ の任意のキルト分解 Q/P に対して、表現

$$\rho_{Q/P} : \mathbb{I}\Gamma \to \mathrm{Aut}(\widehat{\Gamma}(\Sigma))$$

を代数的に定義することができ、これは $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi_1(M_{g,n} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \vec{v}_{Q/P}) \simeq \widehat{\Gamma}(\Sigma)$ への数論幾何学的な作用を延長している。

条件式 (IV) の由来については、§5 である程度詳述するが、種数 0 のモジュライ $M_{0,5}$ と種数 1 のモジュライ $M_{1,2}$ におけるガロア表現を具体的に書き下して比較することから要請されてくる条件であった (高種数への第一歩)。

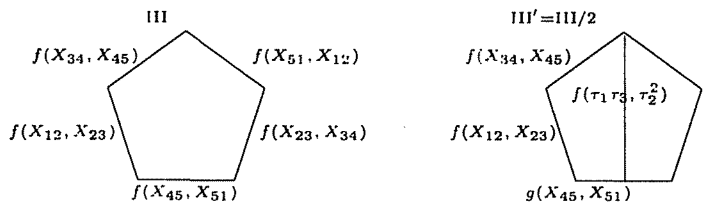
ここでは以下、条件 (III) 及び (III′) について簡単に解説する。$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 内の次の絵を考える：



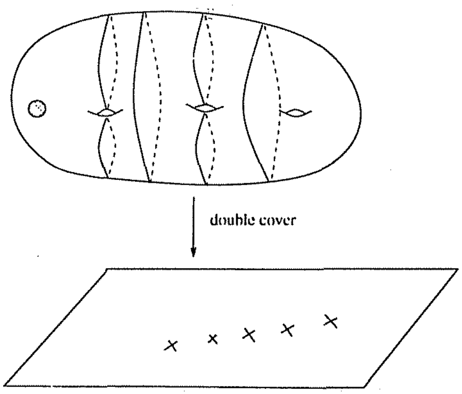
p は 0 から 1 に向かう道であり、x, y はそれぞれ $\vec{01}$ を出発して、0,1 の周りを左まわりに一周して $\vec{01}$ に戻って来るループをあらわしている。このとき $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し

$$\sigma(p) = f_\sigma(x, y)^{-1} p$$

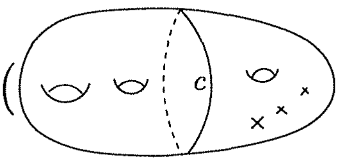
により $f_\sigma(x, y) \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; \vec{01})$ を定義する。(III) は、「$M_{0,5}$ 内の (無限遠) 正五角形」の辺に沿ってこの種のずらしを五回やると一回転するが、五角形が単連結だからその結果 $= 1$, という式、(III′) は、この五角形を半分に分けて片方だけ回ったものが $=1$, という式である。



定理で与えられたガロア表現 (やその $\mathbb{I}\Gamma$ の表現への延長) は、さまざまな (g, n) を動かしたときに compatible な形に記述されている。例えば、下図のような超楕円曲線の球面上の 2 重被覆としての表示から、種数 0 の写像類群 $\Gamma_{0,2g+2}$ (=ほぼ球面組紐群) と種数 g の



写像類群 $\Gamma_{g,0}$ (の超楕円パート) の間に自然な対応が存在するが、双方の曲面上のキルト分解を両立的にとっておくと、これに関するガロア表現もきれいに対応する形になる。
もうすこし詳しくいうと、曲面上の circle c に対して、Dehn twist とよばれる標準的な写像類 $D_c \in \Gamma_{g,n}$ が定まることがよく知られている：

$\Gamma_{g,n} = \pi_0\,\mathrm{Diffeo}^{+}\Bigl($  $\Bigr) \ni D_c$: Dehn twist

写像類群は Dehn twist D_c たちで生成されるので、それらへの $G_{\mathbb{Q}}$ や $\mathbb{I}\Gamma$ の作用を書き下せばよい。実はこの群は有限生成かつ有限表示することが可能でその生成元と関係式もよく研究されているが、有限個の Dehn twist の間だけで関係式を完全に書き下そうとすると、結構長い word がでてきてしまい、それのチェックは簡単でない。ところが、すべての Dehn twists (無限個) を生成元として 4 タイプの比較的単純な関係式 (commutativity, braid, doughnut, lantern) で済ませる Gervais, Luo らの結果を用いることにより、$\mathbb{I}\Gamma$ の各 Dehn twist への作用を定めることができる。この作用をきちんと定義する際に有効なのが Hatcher-Thurston 複体とよばれる単連結な 2 次元複体である。この複体は、標点つきリーマン面上の組合せ構造から、

— 頂点 = 全ての pants 分解

— 辺 = pants 分解から pants 分解への "move" (2 タイプあり; A-move, S-move)

— 面 = 一回りしてもとに戻る一連の moves (4 タイプあり; 3A, 3S, 5A, 6AS)

として構成される複体である。実際には、これを quilt 分解たちに対して "リフト" したものを用いる。

2 Etale 基本群と Belyĭ の定理

この節での主役は

$$\pi_1(M_{0,4}) = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\})$$

である。以下、$X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ とおく。前節において紹介したように、副有限基本群の自然な拡大列

$$1 \to \widehat{F}_2 \to \pi_1(X/\mathbb{Q}) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$$

があるが、これについてガロア圏の立場からもう少し詳しくみてみよう。ここで $\widehat{F}_2$ は自由群 $F_2 = \langle x,y,z | xyz = 1\rangle$ の副有限完備化であり、F_2 は x,y,z をそれぞれ $0,1,\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ のまわりを反時計回りに一周する道と思うことにより (ある基点に関する) 位相幾何学的な基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\})$ と同一視している。

離散群 F_2 は副有限群 $\widehat{F}_2$ に自然に埋め込まれ、その像は稠密である。次の 1 対 1 対応がある：

$$\{F_2\text{の指数有限部分群}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\widehat{F}_2\text{の開部分群}\}$$

$$\pi \to \overline{\pi}\ (\text{閉包})$$

$$H \cap F_2 \leftarrow H$$

次にこれらの集合と X の被覆との関係を説明しよう。$f : Y \to X(\mathbb{C})$ を位相空間としての被覆とする (ここでは連結かつ有限次と仮定する)。基点 $b \in X(\mathbb{C})$ を一つ固定する。$\pi_1(X(\mathbb{C}), b)$ の各元 γ は (X 上のループに添いつつ Y での lifts を辿ることにより) 集合

$$f^{-1}(b) \;=\; \{c_1, \cdots, c_n\} \qquad (n = \deg(f))$$

の上の置換を引き起こすから、“monodromy 置換表現”

$$\pi_1(X(\mathbb{C}), b) \to \mathrm{Aut}\, f^{-1}(b)\ (\cong \mathfrak{S}_n)$$

を得る。$\pi_1(X(\mathbb{C}), b)$ の $f^{-1}(b)$ へのこの作用は (Y は連結と仮定したから) 推移的である。各 i について点 c_i の安定化群 $H_i = \{\gamma \in \pi_1 | \gamma(c_i) = c_i\}$ を考える。これらは $\pi_1(X(\mathbb{C}), b)$ の指数有限の部分群であり、$H_1, \cdots, H_n$ は互いに共役なものの全体である。次の対応がある：

$$\{\widehat{F}_2\text{の開部分群}\}/\text{共役} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{F_2\text{の指数有限部分群}\}/\text{共役}$$

$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{位相的連結有限次被覆 } f : Y \to X(\mathbb{C})\}/\text{同型}$$

$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{代数的連結有限次被覆 } f : Y \to X(\mathbb{C})\}/\text{同型}$$

最後の $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ は Riemann's exisitence theorem と呼ばれている。

ここでガロア圏の言葉を復習しておく。$\mathcal{C}$ を (代数的な) 有限次被覆 (連結とは限らない) $f : Y \to X(\mathbb{C})$ たちのなす圏とし、函手

$$\Phi_b : \mathcal{C} \to \{\text{ 有限集合 }\}$$
$$f \mapsto f^{-1}(b)$$

及びこれらについての次の公理を考える：

(G1) ・ (終対象の存在) ある $X \in \mathcal{C}$ が存在して、任意の $Y \in \mathcal{C}$ に対し $\# \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) = 1$.

・ (fiber 積の存在) $\mathcal{C}$ の射の組 $Y \to Z \leftarrow Y'$ に対して、(引き戻しと呼ばれる) 対象と射影写像を含む可換図式 $Y \times_Z Y' \overset{\text{proj.}}{\rightrightarrows} {}^{Y}_{Y'} \overset{\text{given}}{\rightrightarrows} Z$ が存在し、然るべき普遍性をもつ。

(参考：集合的には $Y, Y' \xrightarrow{f,f'} Z$ の fiber 積は $Y \times_Z Y' = \{(y, y') \in Y \times Y' |\ f(y) = f(y')\}$.)

(G2) ・ $\mathcal{C}$ は有限和 $Y_1 \amalg Y_2 \amalg \cdots \amalg Y_n \to X$ を持つ。とくに "始対象" $\emptyset$ も持つ。

・ Y に有限群 G が被覆変換として作用していたら $Y/G \to X$ が存在する。

(G3) 任意の $u : Y \to Y'$ は一意的に $Y \xrightarrow{u'} Y'' \xrightarrow{u''} Y'$ と分解して u' が全射、u'' が単射とできる。

(G4) (左完全性). $\Phi_b(Y \times_Z Y') = \Phi_b(Y) \times_{\Phi_b(Z)} \Phi_b(Y')$, $\Phi_b(X) = 1$ 点.

(G5) $\Phi_b(Y \amalg Y') = \Phi_b(Y) \amalg \Phi_b(Y')$; $\Phi_b(\text{全射}) = \text{全射}$; $\Phi_b(Y/G) = \Phi_b(Y)/G$.

(G6) 任意の $u : Y \to Y'$ in $\mathcal{C}$ に対し、$\Phi_b(Y) \xrightarrow{\sim} \Phi_b(Y')$ ならば u 自身も同型。

Grothendieck の仕事 (SGA1) により、上の (G1) $\sim$ (G6) が $(\mathcal{C}, \Phi_b)$ のガロア理論を決めることが知られている。その「ガロア群」としての基本群が、次のように導入される：

$$\pi_1(X, b) = \pi_1(\mathcal{C}, \Phi_b)$$
$$\overset{\text{def}}{=} \left\{ (\sigma_Y)_Y \in \prod_{Y \in \mathcal{C}} \mathrm{Aut}\, \Phi_b(Y) \;\middle|\; \text{任意の } u : Y \to Y' \text{ in } \mathcal{C} \text{ に対し次は可換} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \Phi_b(Y) & \xrightarrow{\Phi_b(u)} & \Phi_b(Y') \\ {\scriptstyle \sigma_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_{Y'}} \\ \Phi_b(Y) & \xrightarrow{\Phi_b(u)} & \Phi_b(Y') \end{array}$$

すると $\pi_1(X, b)$ は副有限群になる。又、$\pi_1(X, b)$ が連続作用している有限集合たちのなす圏として、元のガロア圏 $\mathcal{C}$ を復元することもできる。

話を $\mathbb{Q}$ 上に持って行くために次の曲線を考える：

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathrm{Spec}\, \underline{\mathbb{Q}[t, 1/t, 1/(1-t)]}$$

下線部の可換環を A とおく。

Definition 2.1 $\operatorname{Spec} A$ の *finite étale* 被覆とは、射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ (または可換環の準同型 $A \to B$) であって、

(1) B は A 加群として有限生成 [*finite*];

(2) 任意の素イデアル $P \subset B$ に対し、$p = P \cap A$ (P の逆像の意) とおくとき、

(2-1) B_P が A_p-加群として *free* [*flat*];

(2-2) $pB_P = PB_P$ [不分岐].

(剰余体の標数 > 0 ならば、さらに (B_P/PB_P) が (A_p/pA_p) の有限次分離拡大であることを課すが、標数 0 では不要)。

今、上のガロア・カテゴリー $(\mathcal{C}, b)$ として

$$\mathcal{C} = \{X_{\mathbb{Q}}\text{上の finite étale 被覆全体}\},$$
$$b : \operatorname{Spec}\Omega \to X_{\mathbb{Q}} \ (\Omega \text{ は代数閉体})$$

と取り、函手 Φ_b として次を取る：

$$Y \in \mathcal{C} \ (\text{i.e., } Y \to X_{\mathbb{Q}} : \text{finite étale}) \text{ に対し、}$$
$$\Phi_b(Y) := Y(\Omega) := Y \underset{X_{\mathbb{Q}}}{\times} \operatorname{Spec}\Omega.$$

するとこの $(\mathcal{C}, \Phi_b)$ はガロア理論の公理系 (G1)〜(G6) を満たす (従って Grothendieck の一般論から $\pi_1(X_{\mathbb{Q}}, b)$ が well defined となる)。ここで次の対応に注意しておく：

(1)$X \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ に対する基点 $\bar{b}$ を与えること $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathbb{Q}}$ 代数の準同型 $A \otimes \overline{\mathbb{Q}} \to \Omega$ を与えること；

(2) $X_{\mathbb{Q}}$ に対する基点 b を与えること $\Longleftrightarrow$ 環準同型 $A \to \Omega$ を与えること;

(3) $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ に対する基点 b' を与えること $\Longleftrightarrow$ 環準同型 $\mathbb{Q} \to \Omega$ を与えること。

よって、最初に $\bar{b}$ を決めると、それから b, b' として自然に誘導されるものが取れる。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{A\otimes\overline{\mathbb{Q}}} & \operatorname{Spec} A \otimes \overline{\mathbb{Q}} \arrow[d] & \\
\mathcal{C}_A \arrow[u] & \operatorname{Spec} A \arrow[d] & \operatorname{Spec}\Omega \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \arrow[u] & \operatorname{Spec}\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

こうして引き起こる基本群の間の準同型の列

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \bar{b}) \to \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, b) \to \pi_1(\operatorname{Spec}\mathbb{Q}, b') \to 1$$

は完全系列であることが証明される (cf. [SGA1] など)。

ここで最後の群は $\pi_1(\operatorname{Spec}\mathbb{Q}, b') = \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ となることに注意する。一方、最初の群については、

$$\pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0, 1, \infty\}) \cong \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}) \ (\cong \widehat{F}_2)$$

であることが知られている。これは “Lefschetz 原理” といわれることもある。(Cf. Serre “Topics in Galois Theory” or [SGA1])。以上により、冒頭で述べた群の拡大列が得られた。

Theorem 2.2 (Belyĭ) $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意の完備非特異な代数曲線は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点分岐被覆として実現できる。□

この定理により

$$1 \to \widehat{F}_2 \to \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$$

は “highly nontrivial” であることがわかる。実際、$\pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \to G_{\mathbb{Q}}$ において $\tilde{\sigma} \mapsto \sigma$ とすると、$\mathrm{Int}(\tilde{\sigma}) : x \mapsto \tilde{\sigma}x\tilde{\sigma}^{-1}$ なる $\mathrm{Aut}(\widehat{F}_2)$ の元が定義できる。与えられた σ に対する持上げ $\tilde{\sigma}$ の取り方によるずれは $\mathrm{Int}(\widehat{F}_2) = \{\widehat{F}_2$ の元による共役$\}$ に入る。よって、**外ガロア表現**

$$\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\,\widehat{F}_2 / \mathrm{Int}\,\widehat{F}_2 =: \mathrm{Out}\,\widehat{F}_2$$

が well defined となる。上の完全列が群の拡大として非自明ということは、表現 φ が非自明ということと同値であるが、Belyĭ の定理から、次の大変印象的な結果が従う：

Corollary 2.3 外ガロア表現 $\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Out}\,\widehat{F}_2$ は単射である。

まず、Theorem を仮定して、上の Corollary を証明しよう。実際、$G_{\mathbb{Q}}$ の任意の元 σ は

$$\{H \subset \widehat{F}_2 \text{ 開部分群}\}/\text{共役} \;=\; \{Y \to X_{\overline{\mathbb{Q}}} \text{ finite étale 被覆}\}/\text{同型}$$

に置換をひきおこすわけであるが、一般に $f(x, y)$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の多項式として、

Y が方程式 $f(x, y) = 0$ で定義される代数曲線 (と双有理同値) なら
Y^σ は方程式 $f^\sigma(x, y) = 0$ で定義される代数曲線 (と双有理同値) となる。

そこで楕円曲線を考える。勝手な代数的数 $j \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して、この j を j-不変量 (の 12^{-3} 倍) に持つ楕円曲線として

$$E_j : y^2 = 4x^3 - \frac{27j}{j-1}x - \frac{27j}{j-1}$$

が存在する。与えられた $\sigma \neq 1$ に対し $\sigma(j) \neq j$ となる j を取る。Belyĭの定理により、$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された 3 点 $(0, 1, \infty$ でのみ$)$ 分岐の被覆 $\tilde{g} : E_j \to \mathbb{P}^1$ が構成できる。それを σ で係数変換した被覆 $\tilde{g}^\sigma : E_{\sigma(j)} \to \mathbb{P}^1$ もやはり 3 点 $(0, 1, \infty$ でのみ$)$ 分岐である。$\tilde{g}, \tilde{g}^\sigma$ を $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上に制限した不分岐被覆をそれぞれ g, g^σ とすれば、

$$\begin{array}{ccc} E_j \setminus \{\text{有限個の点}\} & \not\cong & E_{\sigma(j)} \setminus \{\text{有限個の点}\} \\ \downarrow g & \swarrow g^\sigma & \\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} & & \end{array}$$

このことは、g に対応する $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}) \cong \hat{F}_2$ の開部分群を H とすると、$H \not\sim \tilde{\sigma} H \tilde{\sigma}^{-1}$ (共役でない) を意味する。これより $\varphi(\sigma) \neq 1$ がわかる。□

Belyĭの定理の証明: $C/\overline{\mathbb{Q}}$ を勝手な代数曲線とし、C 上の函数 f ($\neq$ 定数) を 1 つとる;

$$f : C \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad (\overline{\mathbb{Q}}\text{上定義された射}).$$

$B_1 = \{f(x) | f'(x) = 0\} \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ とおく. 次に $f_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を $B_1 \subset \overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式とする。$B_2 = \{f_1(x) | f_1'(x) = 0\}$ とおくと、$|B_2| < \deg(f_1)$ となる。B_2 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を f_2 とおく。今度の集合 B_2 は $G_{\mathbb{Q}}$ の作用で保たれているので、$\deg(f_2) = |B_2|$ である。また $B_3, f_3, B_4, \cdots$ と続けていく。$\deg(f_i)$ は減少していくから、ある f_r で止まる。そこで

$$f_r \circ f_{r-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \circ f$$

を考える。最後の $\mathbb{P}^1$ の座標を適当に調整して、これの分岐点の集合 ($\subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$) が $\{0 < a_1 < \cdots < a_N < 1\} \cup \{\infty\}$ の形としてよい。

● 今、$a_i = \frac{m}{m+n}$ の形のとき、

$$g_{m,n}(x) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} x^m (1-x)^n$$

とおくと、これで a_i を 1 に持って行ける (これは分岐点を一つ減らす写像になる)。そこで、これを合成する。この操作をくり返して最終的に

$$\text{分岐点} = \{0, 1, \infty\}$$

と出来る。□

Report 2.4 $g_{m,n}(x)$ の分岐を調べて, 証明を完成させよ。

Belyĭの定理の証明の最後の step ● の別証明を '97 の Belyĭ のプレプリントから紹介しよう。上の証明の ● の段階で残った分岐点を $\{0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$, $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ と正規化しておく。これらを用いて行列式 $W, W_1, \ldots, W_m$ を

a_i の列除く

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{m-1} & \cdots & \cdots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}, \quad W_i = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{m-2} & \cdots & a_m^{m-2} \end{vmatrix} \quad (\in \mathbb{Z})$$

とおき、有理式 $g(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{W_i} \in \mathbb{Q}(x)$ が与える射 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を考える。この g の分岐点集合が $\{a_1, \cdots, a_m\} \cup \{\infty\}$ に含まれること、及び、g によってこれらの点が $\{a_1, \cdots, a_m\} \to \{0, \infty\}$, $\infty \to 1$ と写されることを示せばよい。

まず、集合 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ が g により $\{0, \infty\}$ に写されることは明らかである。また、行列式

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{m-2} & \cdots & \cdots & a_m^{m-2} \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

を最下行で余因子展開することにより、$W_1 + \cdots + W_m = 0$. これより、$g(\infty) = 1$ が分かる。次に、任意の点 $b \notin \{a_1, \cdots, a_m, \infty\}$ で不分岐であることをみるためには、対数微分の値 $g'(b)/g(b)$ が消えないことを見れば十分。今、下の行列式の最後の行で余因子展開して、各項にヴァンデルモンドの展開公式を適用すると:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_m \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^{m-1} & a_1^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = W + W_1 \prod_{i \neq 1}(x - a_i) + \cdots + W_m \prod_{i \neq m}(x - a_i).$$

が成り立つ。これより

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{W_i}{(x-a_i)} = -W \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{x - a_i}.$$

この式の右辺をみれば、主張は明らかである。最初の証明では一つ一つ分岐を減らしていったのだが、上のような g を使えばステップ $\bullet$ は一回の操作で済ませられるという点が優れている。

3 Tangential base point

1. Naive な理解
2. 精細モード

(1) Naive な理解
最も基本的な場合である $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}[t,1/t,1/(1-t)]$ 上で、tangential base point の概念を導入する。前半では、導入当初の Belyĭ による群論的なとらえ方を説明しよう。その前に、点 $t=0$ の局所近傍の基本群

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}[\![t]\!][\frac{1}{t}]) \hookrightarrow \pi_1(X_{\mathbb{Q}})$$

の構造を復習する。ここで

$$\mathbb{Q}[\![t]\!][\frac{1}{t}] = \mathbb{Q}(\!(t)\!) : \text{ローラン級数体} = \{\sum_{n \geq n_0} a_n t^n \mid n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Q}\}$$

であるから、その基本群は絶対ガロア群として

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\!(t)\!)) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}(\!(t)\!)}/\mathbb{Q}(\!(t)\!)).$$

とかける。また、

$$\overline{\mathbb{Q}(\!(t)\!)} = \underbrace{\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}}_{\text{Puiseux 級数体}} := \bigcup_{\substack{[k:\mathbb{Q}]<\infty \\ n\geq 1}} k(\!(t^{1/n})\!) \qquad ((t^{1/mn})^m = t^{1/n})$$

この最後の体が代数閉体であることは岩澤『代数函数論』p.64, 定理 2.5 の証明を参照のこと。そのガロア群の構造は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}/\mathbb{Q}(\!(t)\!)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes G_{\mathbb{Q}}$ であり、$\widehat{\mathbb{Z}}(1)$, $G_{\mathbb{Q}}$ はそれぞれ次の仕方で Puiseux 級数に作用する ($\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ の位相的生成元を x とし、$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ を任意のガロア元とする):

$$\begin{cases} x: \ t^{1/n} \mapsto \zeta_n^{-1} t^{1/n} \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}, \\ \sigma: \sum_i a_i t^{i/n} \mapsto \sum_i \sigma(a_i) t^{i/n} \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}. \end{cases}$$

ここで、埋込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定し、$\zeta_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ とおいている。

Report 3.1 上の局所基本群 $\pi_1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\!(t)\!))$ の中で

$$\sigma x \sigma^{-1} = x^{\chi(\sigma)} \qquad (\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$$

であることを示せ。但し $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ は $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi(\sigma) \bmod n}$ $(n \geq 1)$ で定まる指標 (円分指標と呼ばれる) である。

次に大域基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{Q}})$ に戻って、 Belyĭ lift を考察する。まず、群拡大

$$1 \longrightarrow \widehat{F}_2 \longrightarrow \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{p} G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

を思い出しておく。ここに $\widehat{F}_2 = \langle x, y, z \mid xyz = 1\rangle^{\wedge}$. また、点 $t = 0, 1, \infty$ の各近傍の局所基本群の大域基本群への埋込み $\langle x\rangle \rtimes G_{\mathbb{Q}}$, $\langle y\rangle \rtimes G_{\mathbb{Q}}$, $\langle z\rangle \rtimes G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \pi_1(X_{\mathbb{Q}})$ があるが、これらは p の section を与えていると考えられる。

Proposition 3.2

$$\mathfrak{B} = \left\{\beta \in \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \beta x \beta^{-1} = x^{\lambda} & \exists\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \\ \beta y \beta^{-1} = f^{-1} y^{\lambda} f & \exists f \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] \end{array}\right\}$$

とおくと、$\mathfrak{B}$ は射影 $p : \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \to G_{\mathbb{Q}}$ で $G_{\mathbb{Q}}$ に同型に写される $\pi_1(X_{\mathbb{Q}})$ の部分群になる。

この Prop. で定まる写像 $G_{\mathbb{Q}} \ni \sigma \longmapsto {}^{\exists!}\beta_\sigma \in \mathfrak{B} \subset \pi_1(X_{\mathbb{Q}})$ を Belyĭ section と呼び、これを用いて定義されるガロア表現

$$\begin{array}{l} \tilde{\varphi} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \hat{F}_2 \\ \quad (\sigma \longmapsto \beta_\sigma(*)\beta_\sigma^{-1}) \end{array}$$

を外ガロア表現 $\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Out}\, \widehat{F}_2$ の Belyĭ lift と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi} : G_{\mathbb{Q}} & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}\, \widehat{F}_2 \\ & \underset{\text{前節の Belyĭ の定理により単射}}{\searrow} & \downarrow \\ & & \mathrm{Out}\, \widehat{F}_2 \end{array}$$

[Proof of Proposition 3.2] まず、各 σ に対して勝手に $\tilde{\sigma} \in p^{-1}(\sigma)$ をとると,

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} x \tilde{\sigma}^{-1} = s x^{\chi(\sigma)} s^{-1} & (s, t \in \hat{F}_2) \\ \tilde{\sigma} y \tilde{\sigma}^{-1} = t y^{\chi(\sigma)} t^{-1} \end{cases}$$

の形になっている。両辺を s^{-1} で共役をとり $\bar{\sigma} = s^{-1}\tilde{\sigma}$ $(\in p^{-1}(\sigma))$ とおくと、

$$\begin{cases} \bar{\sigma} x \bar{\sigma}^{-1} = x^{\chi(\sigma)} \\ \bar{\sigma} y \bar{\sigma}^{-1} = u y^{\chi(\sigma)} u^{-1} \end{cases}$$

の形にできる。今、$\widehat{F}_2/[\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] = \widehat{F}_2^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbb{Z}}\bar{x} \oplus \widehat{\mathbb{Z}}\bar{y}$ であるから、$u \equiv \bar{x}^a \bar{y}^b \mod [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ とおくことが出来る。このとき、$\beta_\sigma = x^{-a}\bar{\sigma}$ とおけば、これに対しては、

$$\begin{cases} \beta_\sigma x \beta_\sigma^{-1} = x^{\chi(\sigma)} \\ \beta_\sigma y \beta_\sigma^{-1} = (x^{-a} u y^{-b}) y^{\chi(\sigma)} (x^{-a} u y^{-b})^{-1}, & x^{-a} u y^{-b} \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] \end{cases}$$

となる。□

Report 3.3 次を示せ.

- β_σ の一意性.
- そのときの $f \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ の一意性.

以上により、役者が揃った：

$$G_{\mathbb{Q}} \ni \sigma \mapsto \beta_\sigma \in \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \begin{cases} \lambda_\sigma = \chi(\sigma) & :\text{円分指標} \\ f = f_\sigma \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2] & :\text{main parameter} \end{cases}$$

結論: $G_{\mathbb{Q}}$ の元 σ は、パラメーター $(\lambda_\sigma, f_\sigma) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ で完全に決まる。そして、

$$\sigma \text{ の } \widehat{F}_2 \text{ への作用は } \left\{ \begin{aligned} & x \to x^{\lambda_\sigma} \\ & y \to f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma \\ & z \to (?)\, z^{\lambda_\sigma}\, (?)^{-1} \end{aligned} \right\} \text{ の形をしている。}$$

Report 3.4 この (?) [$\mathrm{mod}^{\text{右から}}\langle z\rangle$ で定まる] を $(\lambda_\sigma, f_\sigma)$ で *explicit* に表せ。

(2) 精細モード

(1) と同様に、$X = X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P}^1_t \setminus \{0, 1, \infty\}$ とおき、

$t = 0$ での局所座標として t 及び $t/(t-1)$、
$t = 1$ での局所座標として $1 - t$ 及び $(t-1)/t$、
$t = \infty$ での局所座標として $1/t$ 及び $1/(1-t)$、

を特に考えてみたい (これらは $t = 0, 1, \infty$ で値が $\{0, 1, \infty\}$ となる座標)。それぞれの座標に対する Puiseux 級数体を考え、

$$\begin{aligned} \Omega_{\overrightarrow{01}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}, & \Omega_{\overrightarrow{0\infty}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{t/(t-1)\}\}, \\ \Omega_{\overrightarrow{10}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{1-t\}\}, & \Omega_{\overrightarrow{1\infty}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{(t-1)/t\}\}, \\ \Omega_{\overrightarrow{\infty 1}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{1/t\}\}, & \Omega_{\overrightarrow{\infty 0}} &= \overline{\mathbb{Q}}\{\{1/(1-t)\}\}, \end{aligned}$$

とおく。このそれぞれを用いて、$a, b \in \{0, 1, \infty\}$, $(a \neq b)$ に対し

$$\overrightarrow{ab} : \operatorname{Spec} \Omega_{\overrightarrow{ab}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Q}\left[t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right] = X_{\mathbb{Q}}$$

がガロア圏 $\mathcal{C} = \{Y \to X_{\mathbb{Q}} : \text{finite étale cover}\}$ の上の base point になる (tangential base point と呼ぶ)。対応するファイバー函手は、

$$\begin{aligned} \Phi_{\overrightarrow{ab}} : \mathcal{C} &\longrightarrow (\text{finite sets}) \\ Y &\longmapsto Y(\Omega_{\overrightarrow{ab}}) = Y \times_{X_{\mathbb{Q}}} \operatorname{Spec} \Omega_{\overrightarrow{ab}} \end{aligned}$$

たちである。そこで、次の chain 集合を考える：

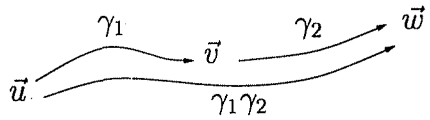
$$\pi_1(X_{\mathbb{Q}};\vec{v},\vec{w})=\left\{(\sigma_Y)_Y\in\prod_{Y\in\mathcal{C}}\mathrm{Isom}(\Phi_{\vec{w}}(Y),\Phi_{\vec{v}}(Y))\;\middle|\;{}^{\forall}u:Y\to Y'\text{ in }\mathcal{C}\text{ に対し次の図式は可換}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc}\Phi_{\vec{v}}(Y) & \xrightarrow{\Phi_{\vec{v}}(u)} & \Phi_{\vec{v}}(Y') \\ \uparrow{\scriptstyle\sigma_Y} & & \uparrow{\scriptstyle\sigma_{Y'}} \\ \Phi_{\vec{w}}(Y) & \xrightarrow{\Phi_{\vec{w}}(u)} & \Phi_{\vec{w}}(Y')\end{array}$$

この bijection system の集合には自然に副有限位相(なるべく高い次数の Y まで同じ bijection を与える system 同士が“近い”)が入り、$\vec{v}=\vec{w}$ のときは §2 の副有限基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{Q}},\vec{v})$ と一致する。容易に分かるように chain の合成

$$\pi_1(X;\vec{u},\vec{v})\times\pi_1(X;\vec{v},\vec{w})\longrightarrow\pi_1(X;\vec{u},\vec{w}).$$

が well defined である：



この合成を演算として、集合族

$$\left\{\pi_1(X;\vec{u},\vec{v})\;\middle|\;\vec{u}=\overrightarrow{ab},\ \vec{v}=\overrightarrow{cd}\ (a,b,c,d\in\{0,1,\infty\};\ a\neq b,\ c\neq d)\right\}$$

上に亜群構造が入るが、さらに、

- $\mathfrak{S}_3$-対称性が入る (ここに $\mathfrak{S}_3$ は 3 次対称群 on $\{0,1,\infty\}$ で $\mathrm{Aut}\,X_{\mathbb{Q}}$ と同一視).
- $G_{\mathbb{Q}}$ の作用 on $\pi_1(X,\vec{v},\vec{w})$ がある。

実際、$G_{\mathbb{Q}}$ の作用は、自然な section $i_{\vec{v}}:G_{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\pi_1(X,\vec{v})$ と亜群の (chain 合成) 演算

$$\pi_1(X,\vec{v})\times\pi_1(X,\vec{v},\vec{w})\times\pi_1(X,\vec{w})\quad\longrightarrow\quad\pi_1(X,\vec{v},\vec{w})$$

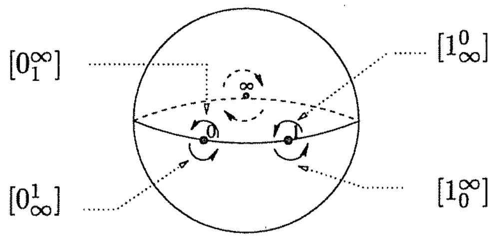
を用いて、$\sigma(\gamma)\overset{\mathrm{def}}{=}i_{\vec{v}}(\sigma)\,\gamma\,i_{\vec{w}}(\sigma)^{-1}$ ($\sigma\in G_{\mathbb{Q}},\ \gamma\in\pi_1(X,\vec{v},\vec{w})$) で定める。ここで、各 tangential base point $\vec{v}$ における section 準同型 $i_{\vec{v}}:G_{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\pi_1(X,\vec{v})$ は次の様に定義する。今、$Y=\mathrm{Spec}\,B$ (B: étale over $A=\mathbb{Q}[t,1/t,1/(1-t)]$) とすると

$$\Phi_{\vec{v}}(Y)=\Phi_{\vec{v}}(\mathrm{Spec}\,B)=\mathrm{Hom}_A(B,\Omega_{\vec{v}}).$$

ところで $\Omega_{\vec{v}}=\overline{\mathbb{Q}}\{\{*\}\}$ だから、$G_{\mathbb{Q}}$ は「係数への作用」で $\Omega_{\vec{v}}$ に、従って $\mathrm{Hom}_A(B,\Omega_{\vec{v}})$ に作用する。$Y=\mathrm{Spec}\,B$ を走らせれば $\Phi_{\vec{v}}(Y)$ 上の置換の compatible system が生じ、$i_{\vec{v}}(\sigma)\in\pi_1(X,\vec{v})$ が定まる。

Proposition 3.5 上の「*chain* の合成」「$\mathfrak{S}_3$-対称性」「$G_{\mathbb{Q}}$-作用」は互いに “可換” である。

次に、少し記号を準備する。



- Standard chain $\gamma_{\vec{v},\vec{w}}$: 上半球面のみを通るものと約束すると $\vec{v}$ から $\vec{w}$ への unique な道 (の類) $\gamma_{\vec{v},\vec{w}} \in \pi_1(X, \vec{v}, \vec{w})$ が定まる (より代数的に定義することもできる)。
- Standard loop $[a]_{\vec{v}}$: まず 0 の周りの半ループを $[0_1^\infty] \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{0\infty}}$, $[0_\infty^1] \stackrel{\text{def}}{=} (1,\infty)[0_1^\infty]$ (ここに $(1,\infty)$ は互換 $\in \mathfrak{S}_3$) と定義し、これを 3-cyclic $(0,1,\infty) \in \mathfrak{S}_3$ で巡回させて $[a_b^c]$ $(a,b,c \in \{0,1,\infty\})$ を導入する (全て左回り)。そこで $\vec{v}$ を基点とするループを

$$[a]_{\vec{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\vec{v},\overrightarrow{ab}}[a_b^c][a_c^b]\gamma_{\overrightarrow{ab},\vec{v}}$$

とおく。特に $x := [0]_{\overrightarrow{01}}$, $y := [1]_{\overrightarrow{01}}$, $z := [\infty]_{\overrightarrow{01}}$ と定義する。

以上より、完全系列

$$1 \longrightarrow \widehat{F}_2 \longrightarrow \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \overrightarrow{01}) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1 \quad (\widehat{F}_2 = \langle x, y, z | xyz = 1 \rangle^\wedge)$$

や、Belyĭ section の “精細ヴァージョン” $i_{\overrightarrow{01}} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \overrightarrow{01})$ が構成できた。

Definition 3.6 $f_\sigma^{\vec{v}}(x,y) \in \widehat{F}_2$ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ を次で定める*:*

$$\sigma(\gamma_{\overrightarrow{01},\vec{v}}) = f_\sigma^{\vec{v}}(x,y)^{-1}\gamma_{\overrightarrow{01},\vec{v}}.$$

特に $\vec{v} = \overrightarrow{10}$ の時 、$f_\sigma^{\overrightarrow{10}}(x,y) = f_\sigma(x,y) \in \widehat{F}_2$ と書く。

Proposition 3.7 次が成り立つ。

1. *(Anderson-Ihara)* $f_\sigma(x,y) \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$.
2. $\sigma(x) = x^{\chi(\sigma)}$, $\sigma(y) = f_\sigma(x,y)^{-1}y^{\chi(\sigma)}f_\sigma(x,y)$ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$.
3. よって $i_{\overrightarrow{01}}(\sigma) = \beta_\sigma$ となり、上の f_σ は「(1) Naive な理解」で定義した f_σ と一致する。

Proof. はじめに $\bigcup_n \overline{\mathbb{Q}}(t^{1/n}, (1-t)^{1/n})$ は $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ の $t = 0, 1, \infty$ の外で不分岐な最大 Abel 拡大で、$\Omega_{\vec{01}} = \overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\}$ と $\Omega_{\vec{10}} = \overline{\mathbb{Q}}\{\{1-t\}\}$ とに含まれることに注意する。$f_\sigma(x,y) \in [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ という条件は、この体へのループ $f_\sigma = \gamma_{\vec{01},\vec{10}} \cdot i_{\vec{10}}(\sigma) \cdot \gamma_{\vec{10},\vec{01}} \cdot i_{\vec{01}}(\sigma)^{-1}$ の作用が自明であるということに他ならない。そこで、$f_\sigma(t^{1/n}) = t^{1/n}$ や $f_\sigma((1-t)^{1/n}) = (1-t)^{1/n}$ をチェックすれば良いが、これらは展開

$$t^{1/n} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{1/n}{i} (1-t)^i, \quad (1-t)^{1/n} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{1/n}{i} t^i$$

において各係数 $\in \mathbb{Q}$ であることに帰着する。円分指標 $\chi(\sigma)$ が出て来ることを見るには、Riemann 球面上を半周する道への σ の作用を見る。例えば、

$$\sigma([0_1^\infty]) = x^{(\chi(\sigma)-1)/2}[0_1^\infty]$$

を示すことは、$(\frac{t}{t-1})^{1/n} = \zeta_{2n}^{-1} t^{1/n}(1 + \text{高次の項})$ の主要項への $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の作用をみることに帰着するが、これは

$$\sigma(\zeta_{2n}^{-1}) = \zeta_{2n}^{-\chi(\sigma)} = \zeta_n^{(1-\chi(\sigma))/2} \zeta_{2n}^{-1}$$

および $x : t^{1/n} \mapsto \zeta_n^{-1} t^{1/n}$ とを比べることで得られる。□

後注：上の証明で、$(\frac{t}{t-1})^{1/n}$ の枝として $\sim \zeta_{2n}^{-1} t^{1/n}$ となるものを取っているが、これは、理論展開のどこかの段階で、$\Omega_{\vec{v}}$ たちを定めるのに用いた座標関数たちの累乗根の枝の相互関係があらかじめ定めてあるということを意味している。我々の場合、最初の $X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ の座標 t をルジャンドル λ 関数とみなして、上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の区間 $(i\infty, 0)$ で t の値が単位区間 $(0,1)$ に入るように $X(\mathbb{C})$ を一意化した上で、累乗根関数の枝 $(\frac{t}{t-1})^{1/n}$ を区間 $(i\infty, 1) \subset \mathfrak{H}$ で値が $(0,1)$ に入る、という条件で標準化している。この講義では細部まで立ち入らなかったが、詳しくは [N99] §2 参照。

次を得る：

Proposition 3.8 *1.* $f_\sigma(x,y) f_\sigma(y,x) = 1$.

2. $f_\sigma(x,y) x^{(\chi(\sigma)-1)/2} f_\sigma(z,x) z^{(\chi(\sigma)-1)/2} f_\sigma(y,z) y^{(\chi(\sigma)-1)/2} = 1$.

Proof. (i) $\theta = (0,1) \in \mathfrak{S}_3$, $\gamma = \gamma_{\vec{01},\vec{10}}$ とすると、$\theta(\gamma) = \gamma^{-1}$ であり、$* \mapsto \gamma\theta(*)\gamma^{-1}$ が x, y を入れ換えることに注意する。そこで $\gamma \cdot \theta(\gamma) = 1$ の両辺に σ を施す。

(ii) $\gamma_{\vec{01},\vec{10}}[1_\infty^0]^{-1} \gamma_{\vec{1\infty},\vec{\infty1}}[\infty_0^1]^{-1} \gamma_{\vec{\infty0},\vec{0\infty}}[0_1^\infty]^{-1} = 1$ の両辺に σ を施す。□

Report 3.9 これをきちんと証明せよ。

Corollary 3.10 任意の $\vec{v}$ に対し $f_\sigma^{\vec{v}}(x,y)$ は、$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の $\widehat{GT}$ におけるパラメーター $\left(\lambda_\sigma = \chi(\sigma),\, f_\sigma = f_\sigma^{\vec{10}}\right)$ を用いてかける。

Report 3.11 これを実行せよ。

4 Maximally degenerate stable marked curves

Definition 4.1 *Maximally degenerate stable marked curve* ($\mathbb{P}^1_{01\infty}$-*diagram* ともいう）とは、三つ組 $\left(X^0=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X^0_\lambda,\ \{P^0_\mu\}_{\mu\in M},\ \{Q^0_\nu\}_{\nu\in N}\right)$ であって次の *4* 条件を満たすもののこととする*:*

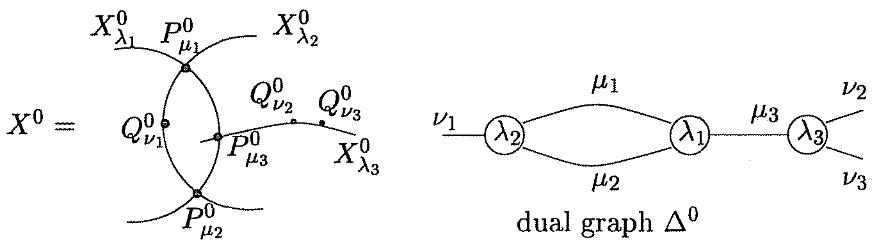
(1) 各 X^0_λ は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ と同型であり、合併 $X^0=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X^0_\lambda$ は連結。
(2) $\{P^0_\mu\}_{\mu\in M}$ は X^0 上の $\mathbb{Q}$-rational な二重点の集合。X^0 の特異点全体の集合になる。
(3) $\{Q^0_\nu\}_{\nu\in N}$ は X^0 上の非特異な $\mathbb{Q}$-rational point の集合 (これらの点を標点とよぶ)。
(4) 各 X^0_λ 上には丁度 3 個の格別点 (＝二重点 or 標点) がのっている。

また、X^0 の dual graph Δ^0 を

$$\Delta^0 = \begin{cases} \text{vertex set } \Lambda, \\ \text{edge set } M, \\ \text{half edge set } \ N \end{cases}$$

により定義し、また X^0 の genus g を $g:=\dim_{\mathbb{Q}}H_1(\Delta^0,\mathbb{Q})$ と定める。

Example 4.2



dual graph Δ^0

Report 4.3 $l=|\Lambda|$, $m=|M|$, $n=|N|$ としたとき, $l=2g-2+n$, $m=3g-3+n$ を示せ.

$\mathbb{Q}$ 上の X^0 を冪級数環 $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ 上にふくらましたい。そのために X^0 の scheme としての成り立ちを詳しく見る:

$$\begin{cases} U^0_\lambda & \simeq\ \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,\frac{1}{1-t},\frac{1}{t}], \\ U^0_\mu & \simeq\ \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,t',\frac{1}{1-t},\frac{1}{1-t'}]\ /\ (tt'), \\ U^0_\nu & \simeq\ \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,\frac{1}{1-t}]. \end{cases}$$

貼り合わせの両立性: まず "隣接対" を表すための次の記号を導入する：

$$\mu/\lambda \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (P^0_\mu \text{ が } X^0_\lambda \text{ 上にある}),$$
$$\nu/\lambda \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (Q^0_\nu \text{ が } X^0_\lambda \text{ 上にある}).$$

これらのとき、埋め込み $U^0_\lambda \hookrightarrow U^0_\mu$ は同型

$$\left(\mathbb{Q}[t, t', \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t'}] \,/\, (tt')\right)[\frac{1}{t}] \ \tilde{\to}\ \mathbb{Q}[t, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{t}]$$

に対応し、埋め込み $U^0_\lambda \hookrightarrow U^0_\nu$ は同型

$$\mathbb{Q}[t, \frac{1}{1-t}][\frac{1}{t}] \ \tilde{\to}\ \mathbb{Q}[t, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{t}]$$

に対応する。

今度は q をパラメータとして、これらを $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ 上に貼り合わせたい。部品としては、

$$\begin{cases} U^0_\lambda & \longrightarrow U_\lambda \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spf}\mathbb{Q}[t, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{t}][\![q]\!], \\ U^0_\mu & \longrightarrow U_\mu \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spf}\mathbb{Q}[t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t'}][\![q]\!] \,/\, (tt'-q), \\ U^0_\nu & \longrightarrow U_\nu \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spf}\mathbb{Q}[t, \frac{1}{1-t}][\![q]\!]. \end{cases}$$

を用意する。貼り合わせに必要なデータとして **tangential stucture on** X^0 というものを考える: これは、すべての隣接対にわたって該当の各既約成分の座標を選んだ collection $\mathcal{T} = \{t_{\mu/\lambda}, t_{\nu/\lambda}\}$ であって次を満たすもののことである：

- $t_{\mu/\lambda}(P^0_\mu) = 0,\qquad t_{\mu/\lambda}(\text{その他の } X^0_\lambda \text{ 上の格別点}) \in \{1, \infty\},$
- $t_{\nu/\lambda}(Q^0_\nu) = 0,\qquad t_{\nu/\lambda}(\text{その他の } X^0_\lambda \text{ 上の格別点}) \in \{1, \infty\}.$

すると、例えば μ/λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ のときに,

$$\begin{aligned} &\left(\mathbb{Q}\left[t_{\mu/\lambda}, t_{\mu/\lambda'}, \frac{1}{1-t_{\mu/\lambda}}, \frac{1}{1-t_{\mu/\lambda'}}\right][\![q]\!] \,/\, (t_{\mu/\lambda}\cdot t_{\mu/\lambda'} - q)\right)\left[\frac{1}{t_{\mu/\lambda}}\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[t_{\mu/\lambda}, \frac{1}{1-t_{\mu/\lambda}}, \frac{1}{t_{\mu/\lambda}}\right][\![q]\!] \qquad \left(\text{ここで } \frac{1}{1-t'} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{t}\right)^n.\ (t' = \frac{q}{t} \text{ に注意})\right) \end{aligned}$$

つまり空間は X^0 のままで、上にのっている函数族の方は q つきにふくらませてもうまく貼り合っている。$\Longrightarrow$ formal scheme $\mathfrak{X} / \operatorname{Spf}\ \mathbb{Q}[\![q]\!]$ が well defined. さらに、projective な formal scheme は、一般論により通常の scheme へ algebraization X / $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[\![q]\!]$ 出来る。

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathbb{Q} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[[q]] \end{array}$$

まとめると,

Theorem 4.4 *(with Y.Ihara)*
$X^0 = (X^0_\lambda, P^0_\mu, Q^0_\nu)$ を $\mathbb{P}^1_{01\infty}$-*diagram* とし、その上の *tangential structure* $\mathcal{T} = \{t_{\mu/\lambda}, t_{\nu/\lambda}\}$ をひとつ固定する。このとき、スキームの射 $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[\![q]\!]$ で $X^0 = X \otimes_{\mathbb{Q}[\![q]\!]} \mathbb{Q}$ となる (*i.e.*, $q = 0$ とすると X^0 に戻る) ものと、各 Q^0_ν を延長する切断 $Q_\nu : \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[\![q]\!] \to X$ の族を構成することが出来る。さらに

(1) $X \,/\, \mathbb{Q}[\![q]\!]$ は *proper flat* な *family.*
(2) $X \otimes_{\mathbb{Q}[\![q]\!]} \mathbb{Q}(\!(q)\!)$ は $\mathbb{Q}(\!(q)\!)$ 上の *smooth proper curve of genus g.*
(3) X の X^0 に関する *formal completion* $(X/X^0)^\wedge$ は $\mathfrak{X}$ と同型。

が成り立つ。□

次の目標として、$\pi_1(X \otimes \mathbb{Q}(\!(q)\!) \smallsetminus \{Q_1, \cdots, Q_n\})$ を記述したい。(簡単のため、標点の添字集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とする。) そのために Grothendieck-Murre theory を使う。Formal scheme の議論に持ち込むために、次の様にガロア圏 $\mathcal{C}^{\mathfrak{D}}$ や 基本群 $\pi_1^{\mathfrak{D}}$ を定義する。

まず、$D = X^0 + Q_1 + \cdots + Q_n \subset X$ とおくと、これは X 上の normal crossing divisor である。$\mathfrak{D}$ を、それに対応する $\mathfrak{X}$ 上の normal crossing divisor とする。このとき、圏

$$\mathcal{C}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}) = \left\{ \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{finite morphism of formal schemes,} \\ \text{(tamely) ramified along } \mathfrak{D} \end{array} \right\}$$

は公理 (G1)～(G3) を満たす。

Proposition 4.5 スキーム $(X \otimes \mathbb{Q}(\!(q)\!) \smallsetminus \{Q_1, \cdots, Q_n\})$ 上の有限次エタール被覆のなすガロア圏と $\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X})$ の間には自然な圏同値が存在する。

ここでは、これは認めよう。X はガチッとしているが $\mathfrak{X}$ は柔らかいので、$\mathfrak{X}$ を local pieces に分けて考えることが出来る。つまり、

$$\mathfrak{X} \text{ の local pieces } \begin{cases} \mathfrak{X}_\lambda &= (X/X^0_\lambda)^\wedge, \qquad \mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{X}_\lambda \,; \\ \mathfrak{X}_\mu &= (X/P^0_\mu)^\wedge, \qquad \mathfrak{D}_\mu = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{X}_\mu \,; \\ \mathfrak{X}_\nu &= (X/Q^0_\nu)^\wedge, \qquad \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{X}_\nu \end{cases}$$

たちの局所基本群は van Kampen の定理を使って貼り合わせられる。まず、制限函手

$$\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}_\lambda}(\mathfrak{X}_\lambda) \longrightarrow \begin{cases} \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}_\mu}(\mathfrak{X}_\mu) & (\mu/\lambda\text{のとき}) \\ \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}_\nu}(\mathfrak{X}_\nu) & (\nu/\lambda\text{のとき}) \end{cases}$$

がある。$\mu/\lambda, \lambda'$ $(\lambda \neq \lambda')$ のとき、local piece

$$(\ \mathfrak{X}_\mu = \operatorname{Spf}\ \mathbb{Q}[\![t_{\mu/\lambda}, t_{\mu/\lambda'}]\!],\ \mathfrak{D}_\mu = \{t_{\mu/\lambda} \cdot t_{\mu/\lambda'} = 0\}\ )$$

に対して、ファイバー函手 Φ_μ を

$$\begin{aligned}\Phi_\mu \ :\ \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}_\mu}(\mathfrak{X}_\mu) &\longrightarrow (\text{有限集合}) \\ \mathrm{Spf}(B) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[\![t,t']\!]}(B,\ \overline{\mathbb{Q}}\{\{t,t'\}\})\end{aligned}$$

と定義する。ここで $t = t_{\mu/\lambda}$, $t' = t_{\mu/\lambda'}$ であり、$\overline{\mathbb{Q}}\{\{t,t'\}\}$ は $\bigcup_{\substack{[k:\mathbb{Q}]<\infty \\ n\geq 1}} k[\![t^{1/n}, t'^{1/n}]\!]$ という可換環をあらわす。ファイバー函手 Φ_ν も同様に定義する。上の制限函手を通じて、これらは、格別点 P^0_μ や Q^0_ν の乗っている、より大きな formal scheme $\mathfrak{X}_\lambda$ や全空間 $\mathfrak{X}$ に関するガロア圏のファイバー函手にもなり、

$$(\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X})\ ;\ \{\Phi_\mu, \Phi_\nu\}_{\mu\in M, \nu\in N})$$

は (G1)～(G6) を満たすガロア圏になる。こうして、$\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ で、Φ_μ, Φ_ν により定義される基点をあらわすこととすれば、例えば $\mathfrak{X}$ 上で遠くはなれた $\tilde{\mu}$ から $\tilde{\nu}$ への道の空間 $\pi_1^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}; \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ なども定まったことになる。

また、各 local piece の基本群の構造は次のようにまとめられる:

$$\bigstar \quad \begin{aligned}\pi_1^{\mathfrak{D}_\mu}(\mathfrak{X}_\mu, \tilde{\mu}) =&\ \mathrm{Aut}\left(\overline{\mathbb{Q}}\{\{t_{\mu/\lambda}, t_{\mu/\lambda'}\}\} \,/\, \mathbb{Q}[\![t_{\mu/\lambda}, t_{\mu/\lambda'}]\!]\right) \\ \simeq&\ \widehat{\mathbb{Z}}(1)^2 \rtimes G_{\mathbb{Q}} \\ =&\ \left\langle \tau_{\mu/\lambda}, \tau_{\mu/\lambda'} \right\rangle \rtimes\ G_{\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

$\bigstar$ μ/λ のとき,

$$\begin{aligned}\pi_1^{\mathfrak{D}_\lambda}(\mathfrak{X}_\lambda, \tilde{\mu}) \simeq&\ (\widehat{\mathbb{Z}}(1) \times \widehat{F}_2) \rtimes\ G_{\mathbb{Q}} \\ =&\ (\langle\tau_\lambda\rangle \times \langle 0_\lambda, 1_\lambda, \infty_\lambda \mid 0_\lambda 1_\lambda \infty_\lambda = 1\rangle) \rtimes\ G_{\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Theorem 4.6 (*van Kampen* 型の貼り合わせ定理)

Δ^0 を X^0 の dual graph とし、その maximal tree T と、initial segment と呼ばれる有向辺 $\mu_0 \to \lambda_1$ を任意に取って固定する。各 μ, ν, λ に対して、base point を

$$\xi_\mu = \tilde{\mu}, \quad \xi_\nu = \tilde{\nu}, \quad \xi_\lambda = \tilde{\mu'}$$

(最後の μ' は T を通って λ_1 から λ まで行くとき通るところの unique な辺) と定める。また、各隣接対 μ/λ に対して standard chain を、$\gamma_{\mu/\lambda}\ :\ \xi_\mu \longrightarrow \xi_\lambda$ であって

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\},\ \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{01}) &\hookrightarrow \pi_1^{\mathfrak{D}_\lambda}(\mathfrak{X}_\lambda,\ \xi_\mu, \xi_\lambda) \\ \gamma_{\overrightarrow{ab},\overrightarrow{01}} &\mapsto \gamma_{\mu/\lambda}\end{aligned}$$

なるものとして定める。ただし、ここに

$$(*) \quad a, b \text{ はそれぞれ } t_{\mu/\lambda} = 0, 1 \text{ なる点の } t_{\mu'/\lambda} \text{ 座標である。}$$

これらの準備のもとで、Δ^0 上の graph of groups

$$\Pi/\Delta^0 := \left\{\Pi_\lambda, \Pi_\mu ; \boldsymbol{j}_{\mu/\lambda} : \Pi_\mu \to \Pi_\lambda \;\middle|\; \lambda \in \Lambda, \mu \in M\right\}$$

(グラフの各頂点及び各辺の上に群が載っていて、隣接対に対して準同型が与えられいる族) を次の様に定義する:

$$\begin{cases} \text{vertex group は} & \Pi_\lambda & (\lambda \in \Lambda), \\ \text{edge group は} & \Pi_\mu & (\mu \in M), \end{cases}$$

ここに

$$\begin{cases} \Pi_\lambda &= \iota_\lambda(G_{\mathbb{Q}}) \ltimes \left(\langle\tau_\lambda\rangle \oplus \langle 0_\lambda, 1_\lambda, \infty_\lambda \mid 0_\lambda 1_\lambda \infty_\lambda = 1\rangle\right)^\wedge \\ \Pi_\mu &= \iota_\mu(G_{\mathbb{Q}}) \ltimes \left(\langle\tau_{\mu/\lambda}\rangle \oplus \langle\tau_{\mu/\lambda'}\rangle\right)^\wedge \qquad (\mu/\lambda, \lambda', \ \lambda \neq \lambda'). \end{cases}$$

各 μ/λ に対して連結準同型 $\boldsymbol{j}_{\mu/\lambda} : \Pi_\mu \to \Pi_\lambda$ は

$$\begin{cases} \iota_\mu(\sigma) \longmapsto f_\sigma^{\vec{v}(\mu/\lambda)}(0_\lambda, 1_\lambda) \cdot \iota_\lambda(\sigma) & (\sigma \in G_{\mathbb{Q}}) \\ \tau_{\mu/\lambda} \longmapsto \tau_\lambda \\ \tau_{\mu/\lambda'} \longmapsto \tau_\lambda \cdot a_\lambda \end{cases}$$

で与える。ここで $\vec{v}(\mu/\lambda) = \overrightarrow{ab}$ は $(*)$ で定まるものとする。

最後に、各 μ/λ ごとにシンボル記号 "$e_{\mu/\lambda}$" を用意しておく。

結論:

$$\begin{aligned} \pi_1^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}, \tilde{\mu}_0) &= \pi_1(X \otimes \mathbb{Q}((q)) \setminus \{Q_1, \dots, Q_n\}, \tilde{\mu}_0) \\ &\simeq \left(\text{※}_{\lambda \in \Lambda} \Pi_\lambda\right) \text{※} \left(\text{※}_{\mu/\lambda} \langle e_{\mu/\lambda}\rangle\right) / \text{(relations)}. \end{aligned}$$

ここで、雪印 ※ は副有限群としての自由積をあらわし、(relations) は:

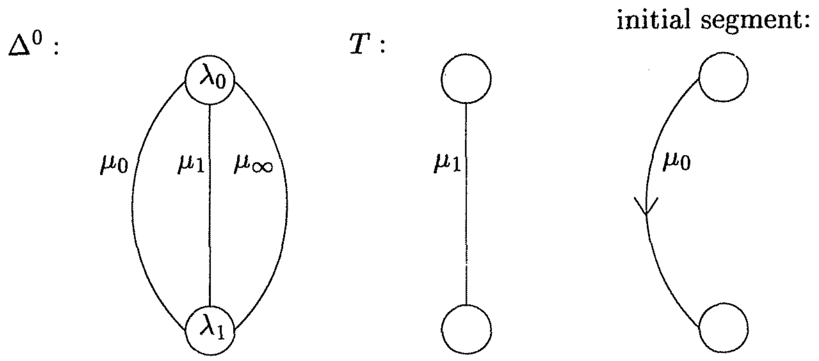
(1) $e_{\mu/\lambda} \cdot e_{\mu/\lambda'} = 1$ $\qquad (\mu/\lambda, \lambda' \, (\lambda \neq \lambda')$ のとき),

(2) $e_{\mu/\lambda} = 1$ $\qquad (\mu/\lambda$ が T に入るとき),

(3) $\boldsymbol{j}_{\mu/\lambda'}(g) = e_{\mu/\lambda} \cdot \boldsymbol{j}_{\mu/\lambda}(g) \cdot e_{\mu/\lambda}^{-1}$ $\quad (g \in \Pi_\mu; \ \mu/\lambda, \lambda' \, (\lambda \neq \lambda')$ のとき),

の 3 種類の関係式からなる。

Example 4.7 **(種数 2 で標点なし)** 図のような Δ^0, T および *initial segment* $e = e_{\mu_0/\lambda_1}$ を考える。



各 t_{μ_i/λ_j} は図で左回りに $0 \to 1 \to \infty$ をとると tangential structure が定まる:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\mu_0/\lambda_1) &= \overrightarrow{01}, & \vec{v}(\mu_0/\lambda_0) &= \overrightarrow{\infty 0}, \\ \vec{v}(\mu_1/\lambda_1) &= \overrightarrow{\infty 0}, & \vec{v}(\mu_1/\lambda_0) &= \overrightarrow{01}, \\ \vec{v}(\mu_\infty/\lambda_1) &= \overrightarrow{1\infty}, & \vec{v}(\mu_\infty/\lambda_0) &= \overrightarrow{1\infty}. \end{aligned}$$

生成元の間の関係式を計算すると、

$$\begin{cases} \infty_{\lambda_0} &= e_{\mu_0/\lambda_1} \cdot 0_{\lambda_1}^{-1} \cdot e_{\mu_0/\lambda_1}^{-1}, \\ 0_{\lambda_0} &= e_{\mu_1/\lambda_1} \cdot \infty_{\lambda_1}^{-1} \cdot e_{\mu_1/\lambda_1}^{-1}, \\ 1_{\lambda_0} &= e_{\mu_\infty/\lambda_1} \cdot 1_{\lambda_1}^{-1} \cdot e_{\mu_\infty/\lambda_1}^{-1}. \end{cases}$$

および

$$1 = 0_{\lambda_0} \cdot 1_{\lambda_0} \cdot \infty_{\lambda_0} = \infty_{\lambda_1}^{-1} \cdot (e_{\mu_\infty/\lambda_1} \cdot 1_{\lambda_1}^{-1} \cdot e_{\mu_\infty/\lambda_1}^{-1}) \cdot (e_{\mu_0/\lambda_1} \cdot 0_{\lambda_1}^{-1} \cdot e_{\mu_0/\lambda_1}^{-1})$$

となる。(μ_1 が T に入っているので $e_{\mu_1/\lambda_1} = 1$.)
そこで、$x_1 = 1_{\lambda_1}$, $x_2 = e_{\mu_0/\lambda_1}$, $y_1 = e_{\mu_\infty/\lambda_1}$, $y_2 = 0_{\lambda_1}^{-1}$ とおくと、上の関係式は

$$x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} = 1$$

のように種数 2 のリーマン面の基本群の標準的な表示式になる。

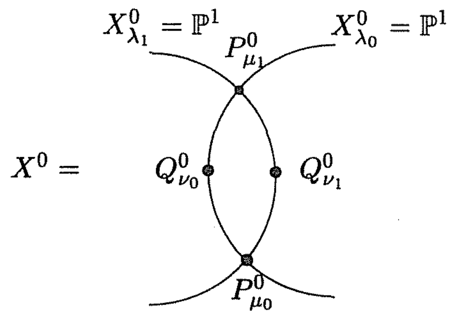
Report 4.8

$$G_{\mathbb{Q}} \ltimes \langle x_1, y_1, x_2, y_2 | \text{ 上の関係式 } \rangle^{\wedge} = \pi_1^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}, \tilde{\mu}_0).$$

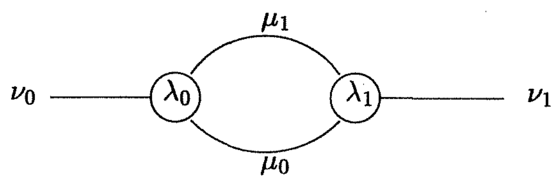
この作用を $(\chi(\sigma), f_\sigma) \in \widehat{GT}$ で書くこと。

5 Tate elliptic curve と $M_{1,2}$

Level 2 の Tate elliptic curve は



を $\mathbb{Q}[\![q]\!]$ 上変形したものである。それを $X/\mathbb{Q}[\![q]\!]$ と書くと、$X \otimes \mathbb{Q}(\!(q)\!)$ は marked point を二つ持つ種数 1 の曲線である。Dual graph Δ_0 は次のようになる：



Tangential structure $\mathcal{T}$ としては:

$$\begin{cases} t_{\nu_0/\lambda_0}, t_{\nu_1/\lambda_1} & \text{は勝手に取り、} \\ t_{\mu_i/\lambda_j} & \text{は } Q^0_{\nu_0},\ Q^0_{\nu_1} \text{ で値 1 を取る様に取る。} \end{cases}$$

(cf. [Deligne-Rapoport].) Maximal tree T は $\{\mu_0\}$ とし, initial segment を $e = e_{\mu_1/\lambda_0}$ と取る。§4 の処方箋に従って記号を定めていく。まず $\vec{v}(\mu/\lambda)$ たちは

$$\vec{v}(\mu_0/\lambda_0) = \overrightarrow{\infty 1},\ \vec{v}(\mu_0/\lambda_1) = \overrightarrow{01},\ \vec{v}(\mu_1/\lambda_0) = \overrightarrow{01},\ \vec{v}(\mu_1/\lambda_1) = \overrightarrow{\infty 1}$$

となる。また、基本群の local pieces 達は、

$$\Pi_{\lambda_i} = \iota_{\lambda_i}(G_{\mathbb{Q}}) \ltimes (\langle \tau_{\lambda_i} \rangle \oplus \langle 0_{\lambda_i}, 1_{\lambda_i}, \infty_{\lambda_i} \mid 0_{\lambda_i} 1_{\lambda_i} \infty_{\lambda_i} = 1 \rangle) \quad (i = 0, 1),$$

$$\Pi_{\mu_j} = \iota_{\mu_j}(G_{\mathbb{Q}}) \ltimes (\langle \tau_{\mu_j/\lambda_0} \rangle \oplus \langle \tau_{\mu_j/\lambda_1} \rangle) \quad (j = 0, 1).$$

これらをくっつける connecting homomorphism は

$$\boldsymbol{j}_{\mu_0/\lambda_0}:\begin{cases}\tau_{\mu_0/\lambda_0}\mapsto\tau_{\lambda_0},\\ \tau_{\mu_0/\lambda_1}\mapsto\tau_{\lambda_0}\infty_{\lambda_0},\end{cases}$$
$$\boldsymbol{j}_{\mu_0/\lambda_1}:\begin{cases}\tau_{\mu_0/\lambda_0}\mapsto\tau_{\lambda_1}0_{\lambda_1},\\ \tau_{\mu_0/\lambda_1}\mapsto\tau_{\lambda_1},\end{cases}$$

で与えられる。次の関係式があったことを思い出す:

$$\boldsymbol{j}_{\mu_0/\lambda_0}(g)=e_{\mu_0/\lambda_1}\boldsymbol{j}_{\mu_0/\lambda_1}(g)e_{\mu_0/\lambda_1}^{-1}\qquad(g\in\Pi_{\mu_0}).$$

ここで $g=\tau_{\mu_0/\lambda_0}^{-1}\tau_{\mu_0/\lambda_1}$ とすれば

$$\infty_{\lambda_0}=e_{\mu_0/\lambda_1}0_{\lambda_1}^{-1}e_{\mu_0/\lambda_1}^{-1}.$$

同じことを $\boldsymbol{j}_{\mu_1/\lambda_0}$ と $\boldsymbol{j}_{\mu_1/\lambda_1}$ についてやれば

$$\infty_{\lambda_1}=e_{\mu_1/\lambda_0}0_{\lambda_0}^{-1}e_{\mu_1/\lambda_0}^{-1}.$$

ここで $\mathcal{T}$ に属する e_{μ_0/λ_1} を 1 として残りの方を $e=e_{\mu_1/\lambda_0}$ と書くことにすると、

$$\infty_{\lambda_0}=0_{\lambda_1}^{-1},\quad\infty_{\lambda_1}=e0_{\lambda_0}^{-1}e^{-1}.$$

$1=0_{\lambda_0}1_{\lambda_0}\infty_{\lambda_0}=0_{\lambda_1}1_{\lambda_1}\infty_{\lambda_1}$ により,

$$1=0_{\lambda_0}1_{\lambda_0}1_{\lambda_1}e0_{\lambda_0}^{-1}e^{-1}.$$

そこで $x_1=e$, $x_2=0_{\lambda_0}^{-1}$, $z_0=1_{\lambda_0}$, $z_1=1_{\lambda_1}$ とおけば関係式

$$1=x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}z_0z_1\ (=:[x_1,x_2]z_0z_1)$$

が得られる。これはちょうど楕円曲線から 2 点を除いた基本群の関係式である:

$$\pi_1(X\otimes\overline{\mathbb{Q}((q))}\setminus\{Q_0,Q_1\})\ =\ \langle x_1,x_2,z_0,z_1|\,[x_1,x_2]z_0z_1=1\rangle^{\wedge}.$$

今度は $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を explicit に書きたい。まず 0_{λ_0}, 1_{λ_0} に対しては標準的で、

$$\sigma(0_{\lambda_0})=0_{\lambda_0}^{\chi(\sigma)},$$
$$\sigma(1_{\lambda_0})=f_\sigma(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1}1_{\lambda_0}^{\chi(\sigma)}f_\sigma(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0}).$$

次に 1_{λ_1} は $\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}\underbrace{[1]_{\overrightarrow{01}}}_{\lambda_1}\underbrace{\gamma^{-1}_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}$ に "相当" しているので、$\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}$ による引き戻しに関しては記号を濫用することにして、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\sigma(1_{\lambda_1}) &= f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0} f_\sigma(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})^{-1}1_{\lambda_1}^{\chi(\sigma)} f_\sigma(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})\underbrace{\gamma^{-1}_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0} f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})\\
&= f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1} f_\sigma(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})^{-1}1_{\lambda_1}^{\chi(\sigma)} f_\sigma(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1}) f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0}).
\end{aligned}$$

また e は $\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_1}$ に相当しているので、

$$\begin{aligned}
\sigma(e) &= f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0} f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})^{-1}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_1}\\
&= f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0} f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})^{-1}\underbrace{\gamma^{-1}_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_0}\underbrace{\gamma_{\overrightarrow{01},\overrightarrow{\infty 1}}}_{\lambda_1}\\
&= f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_0},1_{\lambda_0})^{-1} f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(0_{\lambda_1},1_{\lambda_1})^{-1}e.
\end{aligned}$$

これらのことと

$$f_\sigma^{\overrightarrow{\infty 1}}(x,y) \;=\; f_\sigma(y,z)y^{(\chi(\sigma)-1)/2}f_\sigma(x,y) \qquad (xyz=1)$$

を用いて $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi_1(X\otimes\overline{\mathbb{Q}((q))}\setminus\{Q_0,Q_1\},\tilde{\mu}_1)$ への作用を $(f_\sigma,\chi(\sigma))$ だけで書ける。

Report 5.1 これを実行せよ。

応用上は標点 Q_1 は埋めてしまって、$\pi_1(X\otimes\overline{\mathbb{Q}((q))}\setminus\{Q_0\},\tilde{\mu}_1)$ への作用を書き下しておきたい。これは $1_{\lambda_1}=z_1=1$ とおくことに相当する。$\langle x_1,x_2,z_0|\ [x_1,x_2]z_0=1\rangle^\wedge$ への作用として次のように書ける:

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= f_\sigma(z_0,x_2^{-1})z_0^{(1-\chi(\sigma))/2}f_\sigma(x_1x_2x_1^{-1},z_0)x_1,\\
\sigma(x_2) &= x_2^{\chi(\sigma)},\\
\sigma(z_0) &= f_\sigma(z_0,x_2^{-1})z_0^{\chi(\sigma)}f_\sigma(x_2^{-1},z_0).
\end{aligned}$$

Base point を $\tilde{\mu}_1$ から $\tilde{\nu}_0$ に移すと、全体として $f_\sigma(x_2^{-1},z_0)$ で共役を取ることになり、$G_{\mathbb{Q}}$ の作用としては次の様になる:

$$(*)\qquad\begin{cases}
\sigma(x_1) &= z_0^{(1-\chi(\sigma))/2}f_\sigma(x_1x_2x_1^{-1},z_0)x_1f_\sigma(z_0,x_2^{-1}),\\
\sigma(x_2) &= f_\sigma(x_2^{-1},z_0)x_2^{\chi(\sigma)}f_\sigma(z_0,x_2^{-1}),\\
\sigma(z_0) &= z_0^{\chi(\sigma)}.
\end{cases}$$

次に、これを利用して $\pi_1(M_{1,2}\otimes\mathbb{Q})$ への $G_{\mathbb{Q}}$-作用を具体的に書く。$M_{1,2}$ を moduli space of genus 1 curves with 2 marked points として、$\Gamma_{1,2}$ を Teichmüller modular group とすると、次の完全列がある:

$$1 \to \widehat{\Gamma}_{1,2} \to \pi_1(M_{1,2}) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1 \quad \text{(exact)}.$$

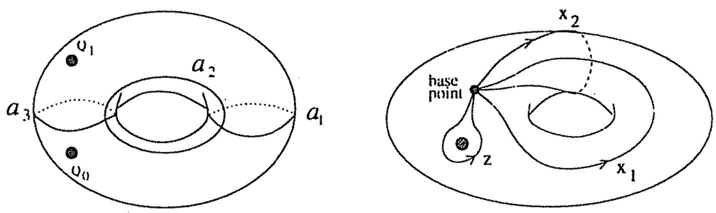
また、mark を 1 個忘れる (Q_1 を忘れる) という写像 $M_{1,2} \to M_{1,1}$ により $M_{1,2}$ は楕円曲線の universal family となり ($M_{1,1}$ は楕円曲線の moduli)、次の完全列を得る:

$$1 \to \widehat{F_2} \to \pi_1(M_{1,2}) \to \pi_1(M_{1,1}) \to 1 \quad \text{(exact)}.$$

$\Gamma_{1,2}$ の生成元としては Dehn twists $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を取れて、それらは

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2, \qquad \alpha_1\alpha_3 = \alpha_3\alpha_1,$$
$$\alpha_2\alpha_3\alpha_2 = \alpha_3\alpha_2\alpha_3, \qquad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^4 = 1$$

と関係づけられている (α_i は下図の輪 a_i に関する Dehn twist)。



先の Tate curve が level 2 の楕円曲線の moduli $M_{1,1}[2]$ に載っていることに注意すると、上の $\hat{F}_2$ は、その原点 Q_0 を除いたものの geometric 基本群 (Q_1 を基点とする) であり、その生成元 x_1, x_2, z_0 (これらは $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}z_0 = 1$ をみたす) を上の Dehn twists を用いて書けば、

$$x_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_3^{-1}\alpha_2,$$
$$x_2 = \alpha_1\alpha_3^{-1},$$
$$z_0 = (\alpha_1\alpha_2)^6 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_1)^4$$

となる。

さて、基点 $\vec{v_0}$ が与える section を $s_1 : G_{\mathbb{Q}} \to \pi_1(M_{1,2})$ とするときに、もう一つの section $\beta_1 : G_{\mathbb{Q}} \to \pi_1(M_{1,2})$ を次の様に定義する:

$$\beta_1(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1^{8\rho_2(\sigma)}s_1(\sigma) \;=\; (\alpha_1^2)^{4\rho_2(\sigma)}s_1(\sigma).$$

ここで ρ_2 は 2 の正冪根を用いて $\sigma(\sqrt[n]{2}) = \sqrt[n]{2}\,\zeta_n^{\rho_2(\sigma)}$ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ で定義される Kummer 1-cocycle (ζ_n は 1 の原始 n 乗根) を表す。従って $4\rho_2(\sigma)$ は 16 の正冪根に関するもの。

Theorem 5.2 この時 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の $\widehat{\Gamma}_{1,2}$ への作用は次の様に書ける:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \beta_1(\sigma)\alpha_1\beta_1(\sigma)^{-1} = \alpha_1^{\chi(\sigma)},\\
&(2) \qquad \beta_1(\sigma)\alpha_2\beta_1(\sigma)^{-1} = f_\sigma(\alpha_1^2, \alpha_2^2)^{-1}\alpha_2^{\chi(\sigma)} f_\sigma(\alpha_1^2, \alpha_2^2),\\
&(3) \qquad \beta_1(\sigma)\alpha_3\beta_1(\sigma)^{-1} = f_\sigma((\alpha_1\alpha_2)^6, \alpha_3)^{-1}\alpha_3^{\chi(\sigma)} f_\sigma((\alpha_1\alpha_2)^6, \alpha_3).
\end{aligned}
$$

Proof. $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ とする。(1): section 準同型 s_1 を与える base point は、Q_0 と Q_1 を近づけて、輪 a_1 を縮める退化点に接しているから、$s_1(\sigma)\alpha_1 s_1(\sigma)^{-1} = \alpha_1^{\chi(\sigma)}$ である。β_1 と s_1 のズレも α_1 の巾しかないので (1) が従う。(2) の証明は後回しとする。(3): $x_2 = \alpha_1\alpha_3^{-1}$ への $s_1(\sigma)$ の共役作用は、(*) で与えている。これと (1) の結果を合わせればよい。□

(2) の証明のために次がキーになる:

Lemma 5.3 次の等式が $\pi_1(M_{1,2})$ の中で成立する。

$$
f_\sigma(\alpha_1^2, \alpha_2^2) = \eta^{\chi(\sigma)}\beta_1(\sigma)\eta^{-1}\beta_1(\sigma)^{-1} \qquad (\eta = \alpha_1\alpha_2\alpha_1,\ \sigma \in G_{\mathbb{Q}}).
$$

Report 5.4 この *Lemma* を用いて、*(1)* の両辺の η による共役を考えることにより、ただちに *(2)* が従うことを確かめよ。($\eta\alpha_1\eta^{-1} = \alpha_2$ に注意。)

Proof of Lemma:

まず、$s_1(\sigma) \in \pi_1(\mathrm{Tate} \setminus O) \hookrightarrow \pi_1(M_{1,2})$ に注意する。この s_1 は、レベル 2 の楕円曲線から作られていたから、実は、$s_1(\sigma) \in \pi_1(M_{1,2}[2])$ であり、それから $\pi_1(M_{1,1}[2])$ に落とすことができる。(記号 $\heartsuit[2]$ はレベル 2 構造をつけたモジュライ空間をあらわす; これは $\heartsuit$ 自身の étale 被覆になる。) さらに、$M_{1,1}[2]$ の coarse モジュライが自然に楕円曲線のルジャンドル・モジュラスの空間 $\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\}$ になり、自然な全射 $\phi: \pi_1(M_{1,1}[2]) \to \pi_1(\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\})$ がある。そこでこれらの写像による $s_1(\sigma)$ の像を $s_0(\sigma)$ とかくことにしよう。ところで、λ-曲線 $\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\}$ 上に tangential base point $\overrightarrow{01}$ があるが、モジュラー函数のフーリエ展開 $\lambda(q) = 16q + ...\ (q = e^{\pi i \tau})$ から示唆されるように、$\tilde{\nu}_0$ の像は、$\frac{1}{16}\overrightarrow{01}$ に等しい。このことから、$\pi_1(\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\}) = G_{\mathbb{Q}} \ltimes \langle x, y\rangle^\wedge$ における Belyĭ section β_σ と $s_0(\sigma)$ のずれは

$$
s_0(\sigma) = x^{-4\rho_2(\sigma)}\beta_\sigma
$$

で与えられる。ここで一旦 $M_{1,2}$ に戻ると、α_1^2, α_2^2 はレベル 2 パートに入り、その $\pi_1(\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\})$ での像は、それぞれ $\bar{\alpha}_1^2 = x$, $\bar{\alpha}_2^2 = y$ となっている。η による共役が α_1 と α_2 を入れ換えることに注意すると、Belyĭ section の特徴づけの式

$$
\begin{cases}
\beta_\sigma x \beta_\sigma = x^{\lambda_\sigma},\\
\beta_\sigma y \beta_\sigma = f_\sigma(x,y)^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma(x,y)
\end{cases}
$$

を、η の $\pi_1(M_{1,1})/\{\pm 1\}$ (これは $\pi_1(\mathbb{P}^1_\lambda \setminus \{0,1,\infty\})$ を含む) における像 $\bar{\eta}$ で辺々共役をとって整理すると、$b_\sigma := \bar{\eta}\beta_\sigma\bar{\eta}^{-1}$ に対して

$$\begin{cases} f_\sigma(y,x)b_\sigma x b_\sigma^{-1} f_\sigma(y,x)^{-1} = x^{\lambda_\sigma}, \\ f_\sigma(y,x)b_\sigma x b_\sigma^{-1} f_\sigma(y,x)^{-1} = f_\sigma(y,x)y^{\lambda_\sigma}f_\sigma(y,x)^{-1}. \end{cases}$$

が成り立つ。よって $f_\sigma(y,x)b_\sigma$ も Belyĭ section となり、β_σ と一致する。よって

$$f_\sigma(\bar{\alpha}_2^2, \bar{\alpha}_1^2)\bar{\eta} = \beta_\sigma\bar{\eta}\beta_\sigma^{-1}$$

が $\pi_1(M_{1,1})/\{\pm 1\}$ で成り立っている。

この等式を、$\pi_1(M_{1,2})$ に持ち上げたいのだが、各項の自然なリフトである $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \eta, \beta_1(\sigma)$ たちが、巡回群 $\langle z_0 \rangle$ の正規化群に属していることと、この正規化群が丁度 $\langle z_0 \rangle$ の $\pi_1(M_{1,1})$ による拡大群の構造をもっていること、および $\mathrm{Ker}(\phi) = \langle \eta^2 \text{の像} \rangle$ に注意すると、ある定数 $c = c_\sigma$ を用いて、

$$f_\sigma(\alpha_2^2, \alpha_1^2)\eta\eta^{2c} = \beta_1(\sigma)\eta\beta_1(\sigma)^{-1}$$

が成り立つことがわかる。ところが $\eta^4 = z_0$ に注意してこの式を辺々4乗すると $z_0^{2c+1} = z_0^{\chi(\sigma)}$ となり、$2c = \chi(\sigma) - 1$ であるから、この c の値を上の式に戻して、Lemma の公式を得る。
□

* * *

最後に、§1 で Grothendieck-Teichmüller 群の精密化に必要であった関係式 (IV) について、

簡単にコメントすることにしよう。上の定理では、$\pi_1(M_{1,2})$ におけるガロア作用を、$M_{1,2}$ が $M_{1,1}$ 上の楕円曲線の universal family である状況を精密に調べることによって得たのだが、これとは独立に $M_{1,2}$ と $M_{0,5}$ の代数幾何的な類似性から、$M_{0,5}$ ですでに知られているガロア作用を "移植する" という仕方で計算すると (1), (2) は上と同じであるが (3) の代わりに

$$(3') \qquad \beta_1(\sigma)\alpha_3\beta_1(\sigma)^{-1} = f_\sigma((\alpha_1\alpha_2)^3, \alpha_3^2)^{-1}\alpha_3^{\chi(\sigma)}f_\sigma((\alpha_1\alpha_2)^3, \alpha_3^2)$$

という形の式が得られる。tangential base point をチェックすると、(ほぼ) 同等なガロア作用について2通りの表示が得られたことがわかり、 両者を注意深く比較することで関係式 (IV) が導かれるのである。

展望: 包含関係

$$G_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{I}\Gamma \subset \widehat{\mathrm{GT}}$$

を、もっと精密に調べること。

参考文献

- 本文中に引用した、基本群とガロア群に関する次の教科書は、基礎的な事項から正確に学べる大変有用な書物です。

[岩澤] 岩澤健吉, 『代数函数論 (増補版)』, 岩波書店, 1952.

[SGA1] A.Grothendieck, M.Raynaud, *Revêtement Etales et Groupe Fondamental*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[Se] J.-P. Serre, "Topics in Galois Theory" (notes written by H.Darmon), Research Notes in Mathematics, Johns and Bartlett Publishers, 1992; 邦訳 (植野義明訳) 『ガロア理論特論』 A K ピータース・トッパン, 1995.

- 講義の §2 で解説した Belyĭ の定理は次の一つ目の論文で発表されました。筆者がまだ高校生の頃のことですが、専門家の間でかなり衝撃的に受け止められたと聞いております。二つ目の論文は、Max Planck 研究所のホームページから手にいれることができます。

[Be79] G.V.Belyĭ, *On galois extensions of a maximal cyclotimic field*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **8** (1979), 267–276 (in Russian); *English translation in* Math. USSR Izv. **14(2)** (1980), 247–256.

[Be97] G.V.Belyĭ, *Another proof of three points theorem*, Preprint, MPI-1997-46, Bonn, 1997.

- 数論的基本群の組織的研究は、Grothendieck, Deligne そしてわが国の伊原康隆先生により、独立の観点から進められてきました。組紐群の導入により、偶然トポロジーとの接近が急速になった契機としては、次の Drinfeld による論文が重要でした。

[Dr] V.G.Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra I Analiz **2** (1990), 114–148 (in Russian); *English translation in* Leningrad Math. J. **2(4)** (1991), 829–860.

- 京都の国際数学者会議での講演に基づいた次の概説記事は当時の主要な結果や研究課題がまとめられています。この分野に入門する研究者には必読の記事です。

[ICM90] Y.Ihara, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proc. ICM, Kyoto (1990), 99–120.

- その後、世界中の研究者の注目を集めるようになった数論的基本群について、Grothendieck に近い立場から L.Schneps, P.Lochak が中心となり国際研究集会が催されるようになりました。次の報告集は今では基本的な文献となっています。

[DE] L.Schneps ed., "*The Grothendieck theory of Dessin's d'Enfants*", London Math. Soc. Lect. Note Ser., **200**, Cambridge Univ. Press 1994.

[GGA] P.Lochak, L.Schneps eds., "*Geometric Galois Actions 1,2*",
1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme,
2: The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups;
London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242-243**, Cambridge University Press, 1997.

- 特に、長い間公刊を望まれていながら果されないままであった次の Grothendieck のモノグラフが TeX 化され、英訳つきで手にはいるようになったのは画期的なことでした。

[Gr] A.Grothendieck, *Esquisse d'un Programme, 1984*, in [GGA-1], 7–48.

- Tangential base point の概念は、初期段階で Deligne の未公刊の手紙などに見られますが、正式論文として主に reference されているのは次の文献です。

[De89] P.Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins troi points*, in "The Galois Group over $\mathbb{Q}$" (Y.Ihara, K.Ribet, J.-P.Serre eds.) Springer (1989), 79–297.

- 今回の講義で扱ったような tangential base point の Puiseux 級数を用いた定式化は次の論文で導入されました。

[AI] G.Anderson, Y.Ihara, *Pro-l branched coverings of* $\mathbb{P}^1$ *and higher circular l-units, Part 1:* Ann. of Math. **128** (1988), 271–293; *Part 2*: Intern. J. Math. **1** (1990), 119–148.

[I97] Y.Ihara, *On the embedding of* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *into* $\widehat{GT}$, in [DE], 289–306.

- この方法を組紐群におけるガロア表現の研究に利用して、そのさらなる有効性が示されたのが、次の論文でした。

[IM] Y.Ihara, M.Matsumoto, *On Galois actions on profinite completions of braid groups* in "Recent developments in the inverse Galois problem" (M.Fried, et al eds.) Contemp. Math. (AMS), **186** (1995), 173–200.

[M96] M.Matsumoto, *On Galois representations on profinite braid groups of curves*, J. reine angew. Math. **474** (1996), 169–219.

- 講義の §3 で行ったように tangential base point を formal scheme に対して拡張するための技術的な基礎、および、その展開の様子については、次の文献を参照してください。

[GM] A.Grothendieck, J.-P.Murre, *The tame fundamental group of a formal neighborhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, Springer Lect. Notes in Math. **208**, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[DR] P.Deligne, M.Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, in "Modular Functions of One Variable II", Lect. Notes in Math. **349**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 143–174.

[IN] Y.Ihara, H.Nakamura, *On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem*, J. Reine Angew. Math. **487** (1997), 125–151.

[N97] H.Nakamura, *Galois representations in the profinite Teichmüller modular groups*, in [GGA-1], 159–173.

- また、講義の §3 以降の主な内容は、[IN] および次の論文から取られています。この論文の続編 (Part II) は今年中に書き上げる予定です。

[N99] H.Nakamura, *Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of algebraic curves I*, Amer. J. Math. **121** (1999), 315–358.

- §1 の Overview の節で述べた内容について、詳しいことは、上に挙げた論文のほか、次の文献やその References も参照してください。

[Oda] Takayuki Oda, *Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves*, in [GGA-1], 85–95.

[N96] H.Nakamura, *Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups*, Math. Ann. **304** (1996), 99–119.

[LNS] P.Lochak, H.Nakamura, L.Schneps, *On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group*, C. R. Acad. Sci. Paris **325** (1997) Sér. I, 11–16.

[HLS] A.Hatcher, P.Lochak, L.Schneps, *On the Teichmüller tower of mapping class groups*, J. Reine Angew. Math. (in press)

[NS] H.Nakamura, L.Schneps, *On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups* , Invent. Math. (in press)

- 近年、数論的基本群をめぐる話題は大変な広がりをもって増加しています。講義で十分に触れられませんでしたが、大変関連の深い基本的な文献として次を挙げておきます。

[LS] P.Lochak, L.Schneps, *A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group*, Invent. Math. **127** (1997), 571–600.

[I99] Y.Ihara, *On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group*, in "Aspects of Galois Theory" (H.Völklein et.al eds.) London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999), 144–179.

- その他にも Grothendieck 予想、Oda 予想など重要な話題がありますが、日本語で読める解説として、次を挙げておきます。

[Su95] 中村博昭, 副有限基本群のガロア剛性, 数学, **47** (1995), 1–17, 英訳：Sugaku Expositions (AMS) **10** (1997), 195–215.

[Su98] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学, **50** (1998), 113-129, 英訳：to appear in Sugaku Expositions (AMS).

- 最後に、昨今において、$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})^{\text{pro-}\ell}$ に関する Deligne の問題 あるいは安定導分代数の構造について著しい進展が報告されています。適当な時期に、専門の方によって現状までを含んだ概説を書いて頂けることを希望したいと思います。