



Title	煙から火を導出すること : トポス理論の観点から
Author(s)	深山, 洋平
Citation	哲学, 52, 55-69
Issue Date	2018-12-02
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/75451
Type	departmental bulletin paper
File Information	52_t5.pdf



煙から火を導出すること： トポス理論の観点から

深 山 洋 平

1 煙から火を導出する図

かつて北大大学院文学研究科・文学部のウェブサイトが存在し、今はInternet Archiveによって保存されている中戸川孝治名誉教授（以下敬称略）の教員紹介ページ（中戸川 2015）には、図1に示す画像が（特段の解説なく）掲げられていた。

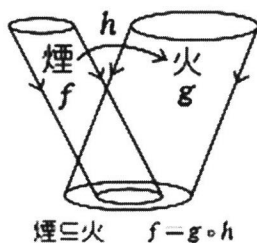


図1 煙から火へ

「煙」および“ f ”のラベルを持つ円柱と「火」および“ g ”のラベルを持つ円柱とが交差しており、 f の円柱から g の円柱への矢印 h がある。添えられたキャプションは、「煙」が「火」に包含されていることを主張しており、かすれてはいるが $f = g \circ h$ という等式も書かれている。結論から述べると、この図は煙の知覚から出発して火の存在を導出する推論を模式的に表している。この推論は論理学の初心者でも分かりやすいためか、講義の導入の際にしばしば取り上げられていた⁽¹⁾。

この円柱が組み合わされた図の原型は、Lawvere and Schanuel (2009, Session 33, Section 1)にある図2であろう。

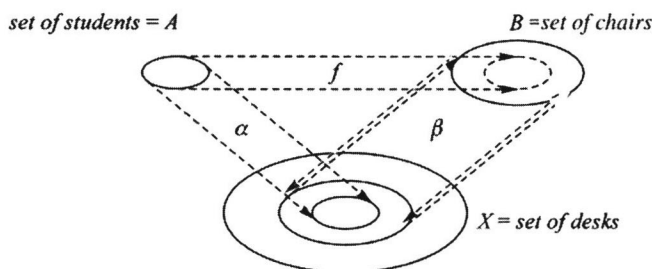


図2 図1の原型

その著者の一人である数学者F. W. Lawvereに影響を受けていることを中戸川は図1が記載されたウェブページで公言しており、また同書の出版前にコメントを寄せた人物の一人として謝辞を贈られている。この図において左上の円Aはある教室にいる学生の集合であり、右上の円Bは椅子の集合であり、下の同心円のうち、もっとも外側のものXは机の集合である。 α はAからXへの単射で、一人の学生が一つの机を占めることを示している。同様に β はBからXへの単射で、一つの椅子が一つの机に収まることを示している。Xの内側にある二つの同心円のうち、小さな円は α によるAの像 $\alpha(A)$ を、大きな円は β によるBの像 $\beta(B)$ を示している。

α の存在によって、AはXの部分であると見做される。もちろん学生は机ではないので文字通りの「部分」ではないが、しかし一人の学生が一つの机を占めるような対応関係が存在すれば、学生の方が机の数以下であることが保証される。そのような弱い意味でAをXの部分と見做すのである。同様に β の存在によって、BもまたXの部分であると見做される。

f はAからBへの関数であり、各学生に対する椅子の割り当てを示している。この割り当ては様々にあり得る。特に $\alpha = \beta \circ f$ が成り立つような f が存在するとき、 α はX上で β に包含される(α is included in β over X)と言い、 $\alpha \subseteq_X \beta$ と書く。この包含関係はコドメインを共有する単射どもの間に定義さ

れるものだが、それらの単射のドメイン間のものであるかのように表現されることがある。たとえば上記の設定の下、 α が X 上で β に包含されるとき、 A は X 上で B に包含されると言い、 $A \subseteq_x B$ と書くこともある。この定義に従うと、机の集合を媒介して学生の集合が椅子の集合に包含されていると主張したければ、各学生に対して、その学生の机にある椅子を割り当てる関数を見い出せばよい。そのような割り当てができるということは、結局のところ学生の数に対して十分な数の椅子があるということである。

これまで見てきたように図2は、ある集合の部分ともの間の包含関係の定義を例によって説明するものである。ところでこの包含関係の定義は関数の合成だけを用いて述べられているので、簡単な修正を施すことで任意の圏において述べることができる。そのためには X や A 、 B を一般の圏の対象に置き換え、それらの間の関数を当該の圏の射によって置き換え、単射をその圏論的一般化であるモニック射に置き換えればよい⁽²⁾。

これから圏の言葉を用いて対象の部分に関連する概念をいくつか導入する。圏の定義を含む基本的な諸概念についてはAwodey (2010)およびMac Lane (1998)が記述するものを用いる。対象 X をコードメインとするモニック射を X の部分 (a part of X) と呼ぶ。対象の部分について、図1では f と g が、図2では α と β が用いられているが、一般論を述べるときは $i, j, \dots$ を用いることにする。

ある圏において i は対象 A から対象 X へのモニック射、 j は対象 B から X へのモニック射とする。これらに対して $i \subseteq_x j$ かつ $j \subseteq_x i$ が成り立つとき、 i は j に同値である (i is equivalent to j) と言い、 $i \equiv_x j$ と書く。これは同値関係である。

上記のような包含関係の扱いは幾分迂遠なものに思われるかもしれない。学生の集合と椅子の集合の包含関係を考えたければ、他の集合を引き合いに出すことなく、それらの間だけで考えればよいのではないか。実際、 A と X 、 B と X の間にあるモニック射が示す部分と全体の関係は、それ自体包含関係であるようにも見える。

Lawvere が上記の図を用いるのは圏論における初等トポス (elementary topos、以下トポスと略す) の概念を論じる箇所である。トポスとは圏の一種であって、集合と関数の圏において定義される諸概念の多くを——つまりは集合論の諸概念の多くを——持つようにしたものである。既に述べた部分の概念はトポスにおいて重要な役割を持つ。圏は以下の条件を満たすときトポスであると言う (McLarty 1995, pp. 51, 57, 117)。

(T1) 終対象 (terminal object) が存在する。

(T2) 任意の二つの対象に対して、それらから成る積 (product) が存在する。

(T3) ドメインとコドメインをそれぞれ共有する任意の二つの射に対して、その等化 (equalizer) が存在する。

(T4) 任意の二つの対象に対して、一方による他方のベキ (exponential) が存在する。

(T5) 部分対象類別子 (subobject classifier) が存在する。

初等トポスの定義は同等のものが複数あり、論者によって用いるものが異なる。したがって上記のものは提示の仕方の一つである。(T1) から (T5) に現れる概念には、すべて集合論の中に例となる概念が存在する。終対象の例は任意の一点集合であり、積の例は射影を伴う直積(デカルト積)であり、ベキの例は関数空間とその要素たる関数に値を与えた際の評価 (evaluation) であり、部分対象類別子の例は真理値の集合と「真」を表す真理値である (これについては後で詳述する)。集合 X から Y への二つの関数 f と g の等化とは、 X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ である。このような諸概念の例が存在するので、集合の圏はトポスの例である。しかし集合の圏においては成り立つが、トポス一般で成り立つとは言えない事柄も存在する。それらについては第2節で触れることにする。トポスの様々な例については Mac Lane and Moerdijk (1992, pp.24-29) を参照されたい。

一般の圏と比較してトポスに特徴的なのは、上記 (T5) と関連して集合論における特性関数の概念の一般化を有することである。集合論における特

性関数は、ある集合の部分集合に対して定義される。すなわち集合 X の部分集合 A の特性関数 χ_A は X から「真理値の集合」 $\{t, f\}$ への関数で、 X の要素 x に対して

$$\chi_A(x) = \begin{cases} t & x \in A \text{ のとき} \\ f & x \in A \text{ でないとき} \end{cases}$$

によって定義される。この定義は、

$$x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = t \quad (1)$$

と

$$\chi_A(x) = t \text{ または } \chi_A(x) = f \quad (2)$$

の連言と同値である。圏論において、真理値の集合と特性関数はそれぞれ**真理値対象** (truth-value object) および**特性射** (characteristic arrow) として一般化される。それらはあわせて**部分対象類別子**と呼ばれる。以下のような図式がその説明に用いられる。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{!_A} & 1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{\chi_\alpha} & \Omega \end{array}$$

この図において対象 1 は**終対象**と呼ばれ、同じ圏の任意の対象から 1 に対してただ一つの射が存在する ($!_A$ は A から 1 への唯一の射である)。トポスの定義の箇所でも述べたように集合の圏における終対象は任意の一点集合であり、 1 から何らかの対象への射は、その対象の一つの要素であるように機能する。特に 1 から Ω への射 t は真理値対象 Ω が要素として持つ真理値「真」のように振る舞うよう意図されている。

同値(1)の圏論的一般化を得るためには、さらに「 $\in$ 」に相当するものが必要である。その概念は部分対象への帰属関係として包含関係に類似した形で定義される。すなわち、対象 X の部分 $i: A \rightarrow X$ と射 $x: T \rightarrow X$ に対して、射 $h: T \rightarrow A$ が存在して $i \circ h = x$ が成り立つとき、 x は X 上で i に属する (x belongs to i over X) と言い、 $x \in_{X,i}$ と書く。

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{h} & A \\
 & \searrow x & \swarrow \alpha \\
 & X &
 \end{array}$$

この概念が帰属関係であることは部分間の包含関係と結びつくことで正当化される。任意の圏で以下の命題が成り立つことが基本的である。

$$i \subseteq_X j \Leftrightarrow \forall x (x \in_X i \Rightarrow x \in_X j)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\
 & \searrow x & \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

初等トポス理論の公理群によって、トポスに部分対象類別子が存在して(1)を圏論の言葉で言い換えたものが成り立つことが保証される。つまり、対象 X の部分 $i: A \rightarrow X$ に対して

$$x \in X_i \Leftrightarrow \chi_A \circ x = \mathbf{t} \circ !_T$$

が従う。さらに X の部分 i とその特性射 χ_i が互いを一意に定めることもまた従う。(2)は一般のトポスでは成り立たない性質である。

トポスにおける射は内部言語 (the internal language) と呼ばれる言語の解釈に使うことができる。後の議論のために、McLarty (1995, pp.126-128) にしたがって、その言語の仕様の概略を述べておく。その言語は以下のように帰納的に定義される型付きの項によって特徴付けられる (本論文では (LT1) と (LT2) だけを用いる)。

(LT1) 各対象 X は X 上の変項のリスト $x_1, x_2, x_3, \dots$ を持つ。 X 上の変項は X 型の項である。

(LT2) 任意の射 $f: X \rightarrow Y$ と X 型の項 s に対して、 $f \circ s$ は Y 型の項である。

特に終対象 1 からの任意の射 $c: 1 \rightarrow X$ は X 型の項である。これを定項と呼ぶ。

(LT3) X 型の項 s_1 と Y 型の項 s_2 に対して $\langle s_1, s_2 \rangle$ は $X \times Y$ 型の項である。

(LT4) Y 型の項 s と X 型の変項 y に対して、 $(\lambda y)s$ は Y 型の項である。

(λy) のような λ 演算子に束縛されていない変項を **自由変項** と呼ぶ。

この定義では、項の型として当該のトポスの対象の名前をそのまま用いている。トポスは真理値対象 Ω を持つから、型の一つとして Ω 型が存在する。型付きの項の中で、 Ω 型の項を**論理式**と呼ぶ。このように論理式を定義することは、論理式の解釈を何らかの対象から Ω への射、つまり特性射と定めることを想定している。項の解釈について論じるために、まず対象上の変項のリストについて述べる。 $\bar{x}$ を変項のリストの略記として用いる。各変項は型を持つので、変項のリストには各変項の型を同順で並べたリストが付随する。変項のリストは重複を含まないが、型のリストは重複を含みうるものとする。したがって、ある項に同じ変項が二度現れた場合、変項のリストはその変項を一つ含み、型のリストはその変項の型を二つ含む。

一般に、 s を Y 型の項、 $\bar{x}$ を s のすべての自由変項のリストとし、それに付随する型のリストが $X_1, \dots, X_n$ であるとき、 $\bar{x}$ に**相対的な s の解釈** $|s|_{\bar{x}}$ は $X_1 \times \dots \times X_n$ から Y への射となるように帰納的に定義される。解釈の具体的な定義は以下のである（本論文では（II）と（I2）のみを用いる）。

（II）変項のリスト $\bar{x}$ とそのリスト内の変項 x_i に対して、 $|x_i|_{\bar{x}}$ は $X_1 \times \dots \times X_n$ から X_i への射影である。ただし $n = 1$ のとき、 $|x_1|_{\bar{x}}$ は X_1 上の恒等射 id_{X_1} と定める。

（I2）射 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 s が X 型の項ならば $|f \circ s|_{\bar{x}} = f \circ |s|_{\bar{x}}$ である。

$$X_1 \times \dots \times X_n \xrightarrow{|s|_{\bar{x}}} X \xrightarrow{f} Y$$

（I3） X 型の項 s_1 と Y 型の項 s_2 に対して、 $|\langle s_1, s_2 \rangle|_{\bar{x}} = \langle |s_1|_{\bar{x}}, |s_2|_{\bar{x}} \rangle$ である。

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow |s_1|_{\bar{x}} & \uparrow \pi_X \\ X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{|\langle s_1|_{\bar{x}}, |s_2|_{\bar{x}} \rangle|} & X \times Y \\ & \searrow |s_2|_{\bar{x}} & \downarrow \pi_Y \\ & & Y \end{array}$$

（I4） Y 型の項 s と X 型の変項 y に対して、 $|(\lambda y)s|_{\bar{x}}$ は $|s|_{\bar{x}, y}$ の転置 $\widetilde{|s|_{\bar{x}, y}}$ である。ただし y が $\bar{x}$ に含まれる場合は、 $(\lambda y)s$ に現れるすべての y を、 s に現れず $\bar{x}$ に含まれない X 型の変項に置き換える。

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times \cdots \times X_n & \xrightarrow{\widetilde{|s|_{\bar{x}, y}}} & Y^X \\
 X_1 \times \cdots \times X_n \times X & \xrightarrow{\widetilde{|s|_{\bar{x}, y} \times 1_X}} Y^X \times X & \downarrow \varepsilon \\
 & \searrow |s|_{\bar{x}, y} & Y
 \end{array}$$

論理式は Ω 型の項であるから、論理式 φ の自由変項のリスト $\bar{x}$ に型のリスト $X_1, \dots, X_n$ が付随するとき、 $\bar{x}$ に相対的な φ の解釈 $| \varphi |_{\bar{x}}$ は $X_1 \times \cdots \times X_n$ から Ω への射である⁽³⁾。

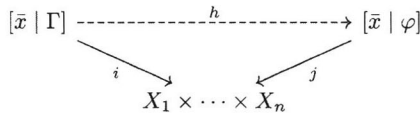
基本的な論理式として、一項述語をある型の項に適用して得られる論理式を考えよう。この言語において、述語は対象の部分とその全体から類別するものと考えられる。したがって述語は対象とその部分を所与として定義される。対象 X とその部分 $i: A \rightarrow X$ が与えられたとする。このとき i の特性射 $\chi_i: X \rightarrow \Omega$ と X 型の項 s から (LT2) によって Ω 型の項 $\chi_i \circ s$ が得られる。そこで論理式 $A(s)$ を項 $\chi_i \circ s$ の略記として定義する。 x を X 型の変項として、 x に相対的な $A(s)$ の解釈 $|A(s)|_x$ は (I2) によって X から Ω への射 $\chi_i \circ |s|_x$ となる。特に X 型の項 s が変項 x であるとき、(I1) によって $|A(x)|_x = \chi_i \circ |x|_x = \chi_i \circ \text{id}_x = \chi_i$ である。つまり論理式 $A(x)$ の x に相対的な解釈は $i: A \rightarrow X$ の特性射そのものである。このことは論理式 $A(x)$ が X の中で A であるような部分を類別するものであることを示している。

論理式をその自由変項のリストに相対的に解釈して得られる Ω への射は特性射なので、それが類別する $X_1 \times \cdots \times X_n$ の部分 j が一意に存在する。それを φ の $\bar{x}$ 上の外延 (the extension of φ over $\bar{x}$) と呼び、 j のドメインを $[\bar{x} | \varphi]$ と書く。

$$\begin{array}{c}
 [\bar{x} | \varphi] \\
 \downarrow j \\
 X_1 \times \cdots \times X_n
 \end{array}$$

X の部分 $i: A \rightarrow X$ は先に述べた論理式 $A(x)$ の外延 $j: [x | A(x)] \rightarrow X$ と同値である。これは両者の類別射が χ_i であることによる。

有限個の論理式の集合 Γ に対して、 Γ の各要素の外延の共通部分を $i:[\bar{x}|\Gamma]\rightarrow X$ と書く⁽⁴⁾。さらに論理式 φ の外延を $j:[\bar{x}|\varphi]\rightarrow X$ とし、 Γ から φ が出てくることを $i\subseteq_{X_1\times\cdots\times X_n}j$ によって定義する。言い換えると、 Γ から φ が出てくることの必要十分条件は $[\bar{x}|\Gamma]$ から $[\bar{x}|\varphi]$ への射 h が存在して $j\circ h=i$ が成り立つことである。



したがって、トポスを用いて解釈された内部言語において、論理式（の集合）から別の論理式への導出関係は両者の包含関係に帰着する。

さて問題の図1は全体として、トポスにおいて包含関係を示す図である。これをさらに上記のような論理式の外延間の包含関係と見ることで、それらの論理式の間で導出関係を示す図として理解することができる。具体的には、この図を集合と関数の圏におけるものと見做し、 X を地点の集合（場所）とする。そして x を X 型の変項、つまり地点を示す変項とする。その上で A を X の中で煙がある地点の集合（煙がある場所）、 B を X の中で火がある地点の集合（火がある場所）とする。これらに対応する論理式 $A(x)$ と $B(x)$ の外延をそれぞれ $f:[x|A(x)]\rightarrow X$ 、 $g:[x|B(x)]\rightarrow X$ とする。これらを用いて図1は以下のように明確化できる。

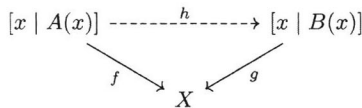


図3 図1の明確化

ここで $A(x)$ の外延から $B(x)$ の外延への破線で書かれた射 h は、それが存在して $f = g \circ h$ が成り立つことが $A(x)$ から $B(x)$ が出てくることを保証するものである。論理式 $A(x)$ は集合 X から A を分類するものであるから、「 x には煙がある」という内容を持つ。同様に $B(x)$ は「 x には火がある」という内容を持つ。すると結局この図は、地点 x に対して「 x には煙がある」ことか

ら「xには火がある」ことが出てくることの必要十分条件を描いているものと理解できる。

2 集合論と圏論、静と動

図1とともに掲載された文章の一部で、論理学と関連する数学について語られている部分を引用する（中戸川 2015）。

私の研究の柱である論理学には、“現象の背後に動きのない普遍の世界がある”とする集合論⁽⁵⁾、“万物は流転する”、あるいは、運動そのものが在りとする圏論があり、この静と動、どちらの論に立って世界を記述するかで、世界の捉え方は異なってきます。

集合論がある種の集合の存在を主張するのは事実だが、しかし圏論が運動の存在を主張しているかどうかは議論を要するように思われる。その点は措くとして、ここには静の集合論と動の圏論という二者択一が見られる。集合論は動きのない世界を記述し、圏論は動きのある世界を記述する、という考えである。しかしこの対立においては、Lawvereのように圏論の言葉で集合論を書くことの意義は不明瞭になってしまう。集合を記述しているから静的な記述であろうか。圏論で記述しているから動的な記述であろうか。

彼のトポス理論において静と動という二項は、**抽象的集合** (abstract set) と**可変集合** (variable set) という集合概念の対比として現れる。抽象的集合は定集合 (constant set) あるいは離散的集合 (discrete set) とも言い換えられる (Lawvere and Rosebrugh 2003, p.154)。抽象的集合のイメージについて記している部分（上掲書p.1）を以下に訳出する。

抽象的集合は構造を持たない要素を持つと考えられる。そしてそれ自体は、その要素同士が等しいか等しくないかを区別できるという点以外に内部構造を持たず、要素の数以外の外部構造を持たないと考えられる。（訳者中略）抽象的集合は頭の中で思い描かれた「点々の袋」（訳者注：原語はbag of dots）のようであると言われてきた。もちろんその

袋は形を持たないのだが。

静と動という観点で見ると、抽象的集合は動きのないものだけを要素とする集合である。ここで「動き」というのは広く解釈されるべきであり、数学的構造に見られるように、たとえばある要素と別の要素が近くに置かれているとか、要素どもが順序付けられて置かれているとか、要素どもが足し合わされて別の要素になる、といったことを含む。そのような要素同士の関わり合いを排した集合が抽象的集合である。以後Lawvereらに従って、抽象的集合の圏を $\mathbf{S}$ と表記しよう。

$\mathbf{S}$ は第1節で言及した集合の圏を公理を用いて捉えたものである。その意味で $\mathbf{S}$ は公理的集合論であるけれども、言語としては圏論の言語が——つまり射とその合成が——用いられる。 $\mathbf{S}$ の公理系はまずトポスの諸公理を含む。これは集合の圏がトポスの例だったことから当然である。公理はそれらに加えて三つあり、真理値がちょうど二つ存在すること、圏論の言葉で書かれた選択公理が成り立つこと、同じく圏論の言葉で書かれた無限公理が成り立つことが求められる（上掲書pp.111–113）。

抽象的集合と対置される可変集合は、要素同士に何らかの関わり合いがあるような集合である。その最も単純な例として「段階の間にただ一つのつながりを持つ2段階集合」が成す圏 $\mathbf{S}^{2op}$ が例に挙げられる（上掲書p.114）。ここで $\mathbf{2}$ は二つの対象 U および 1 と（それらの上の恒等射を除いて）唯一の射から成る圏

$$U \rightarrow 1$$

である。 U を前の段階、 1 を今の段階と見做すことで、この圏全体はある段階から別の段階への移行という動きを表している。 $\mathbf{S}^{2op}$ の対象はこの動きを受ける可変集合 X であり、それは二つの抽象的集合 X_U と X_1 、それらをつなぐ関数

$$X_1 \xrightarrow{\zeta_X} X_U$$

を用いて分析される。ここで X_1 は両方の段階を通して存続している X の要素の集合であり、 X_U は前の段階に存在した X の要素の集合であり、 ζ_X は X_1

の各要素 x に対して前の段階 U に存在した要素を指定する。つまり **2** が示す段階の移行という動きが、 $\mathbf{S}^{2op}$ においては集合の要素の消滅という形で表現されているのである⁽⁶⁾。

$\mathbf{S}^{2op}$ の対象 X と Y が与えられているとき、 X から Y への射 f は、 X_1 から Y_1 への関数 f_1 と、 X_U から Y_U への関数 f_U の組として定義される。ただし f_1 と f_U は等式 $\xi_1 \circ f_1 = f_U \circ \xi_x$ を満たさねばならない。 $\mathbf{S}^{2op}$ の射の合成は対を成す関数各々の合成を介して自然に定められる。

こうして圏として定められる $\mathbf{S}^{2op}$ は可変集合の圏として $\mathbf{S}$ と対立するけれども、 $\mathbf{S}^{2op}$ がトポスであることによって共通性を得る。トポスの特徴付ける構造の一つとして、たとえば $\mathbf{S}^{2op}$ における終対象は、抽象的集合を用いて以下のように書ける。

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow 1_1 \\ 1 \end{array}$$

ここで 1 は $\mathbf{S}$ における終対象、つまり任意の一点集合である。 1_1 はその上の恒等射である。終対象とは任意の対象からただ一つの射が存在するような対象だから、これが $\mathbf{S}^{2op}$ における終対象であることを示すには、 $\mathbf{S}^{2op}$ における任意の対象 X をとり（つまり $\xi_x: X_1 \rightarrow X_U$ をとり）、そこから唯一の射が存在することを示せばよい。 $\mathbf{S}$ における以下の図が答えを与える。

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{!_1} & 1 \\ \xi_x \downarrow & & \downarrow 1_1 \\ X_U & \xrightarrow{!_U} & 1 \end{array}$$

ここで $!_1$ と $!_U$ はそれぞれ、 X_1 と X_U から $\mathbf{S}$ における終対象 1 への唯一の関数である。 X_1 から図右下の 1 への関数が一つしかないので $!_1 \circ !_U = !_U \circ \xi_x$ が成り立つ。それゆえ $!_1$ と $!_U$ の組は $\mathbf{S}^{2op}$ における射である。また $!_1$ と $!_U$ の組以外に適切な射が存在しないことは $!_1$ と $!_U$ 各々の一意性から得られる。こうして $!_1$ は $\mathbf{S}^{2op}$ における終対象である。他の $\mathbf{S}^{2op}$ におけるトポスの構造も $\mathbf{S}$ におけるトポスの構造を参照しながら定義される。ただし両者の構造が同じ性質を持つわけではなく、たとえば真理値に関して、 $\mathbf{S}$ が 2 値であるのに対して $\mathbf{S}^{2op}$ は 3

値である（具体的な構成は上掲書 p.117を参照）。こうしてトポス理論は抽象的集合でない可変集合の圏もモデルとする。一般に $\mathbf{C}$ を圏として $\mathbf{S}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ は前層（presheaf）の圏と言われ、トポスの重要な例である。

上記のように抽象的集合の概念は可変集合の分析のために積極的に利用されており、両者は二者択一の関係ではない。可変集合の分析は抽象的集合の存在に依存している。我々は抽象的集合の扱いに慣れており、変化を抽象的集合の要素の変化として表現したのは、集合論の道具立てで変化を研究できるようにするためである。それゆえこの依存性は有用な結果をもたらすもので、退けられるべきではない。

Lawvereのトポス理論を考慮した場合に集合論が捉える静的・抽象的集合と圏論が捉える動的・可変集合は統合され、どちらかを選ぶような関係でないことを見た。ところで、抽象的集合の観点から分析できず、かつ（トポスを使わない）圏論によってよく記述できる対象が存在することは依然ありうる。つまり Lawvereのトポス理論の枠組みの外で、静的な集合論と動的な圏論という対立項を維持する道である。これは、中戸川がしばしば用いる言い方をすれば、述語や物質名詞が指し示すものについて、実体化させずに論じることが圏論によって可能か、という問題に通じる。この論文の前半で、「煙」と「火」をそれぞれ「煙のある地点の集合」および「火のある地点の集合」として解釈したのは、トポス理論に則った抽象的集合による実体化に他ならない。そのような実体化を伴わず、しかも実際に使うことができる解釈ないしモデルの概念を圏論を用いて構築できるだろうか。この考察については稿を改めたい。

3 まとめ

まず煙から火を導出する図に対して Lawvereのトポス理論の観点から明確化を与えた。「煙」と「火」はそれぞれ「煙のある場所」、「火のある場所」と解され、両者をつなぐ射は包含関係の成立を圏論の言語で示すために用い

られるものである。次いで同じトポス理論の観点から、集合論に帰属される静の側面と圏論に帰属される動の側面の関係について考察を行った。集合論が記述する抽象的集合の概念は、可変集合の分析のために積極的に利用されている。これは中戸川が構想するような、世界記述の道具としてどちらかを選択するような関係ではない。

- (1) この例はインド論理学の研究にも言及しながら示されていた。
- (2) モニック射 (monic arrow, monomorphism) の定義。 $\mathbf{C}$ を圏とし、 $f: A \rightarrow B$ を $\mathbf{C}$ の射とする。 $\mathbf{C}$ の任意の二つの射 $x_1, x_2: X \rightarrow A$ に対して $f \circ x_1 = f \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ が成り立つとき、 f はモニック射であると言う。集合と関数の圏において、この定義は単射の定義と同値である。

$$X \begin{matrix} x_1 \\ \rightarrow \\ x_2 \end{matrix} A \xrightarrow{f} B$$

- (3) φ が自由変項を持たない場合、その解釈 $|\varphi|$ は終対象 1 から Ω への射である。これは自由変項を持たない論理式——しばしば文と呼ばれる——の解釈が t のような真理値であることを示唆している。
- (4) ここで言う共通部分は圏論的に定義されるものである。対象 X の二つの部分 $i_1: A \rightarrow X$ と $i_2: B \rightarrow X$ の共通部分 (intersection) とは X の部分 $i: C \rightarrow X$ で、任意の射 $x: T \rightarrow X$ に対して、

$$x \in_X i \Leftrightarrow x \in_X i_1 \text{ かつ } x \in_X i_2$$

が成り立つものを言う。トポスの対象の任意の二つの部分は共通部分を持つ。

- (5) 引用者注：「普遍」は原文ママ。文脈からして「不変」であろうか。
- (6) $\mathbf{S}^{2op}$ を、適切にも $\mathbf{2}$ から $\mathbf{S}$ への変換関手の圏として理解する人にとって、この説明は奇異であろう。同書において関手圏の概念は可変集合の圏の概念よりも、ずっと遅く導入される (p.172以降)。

引用文献

- Awodey, S. (2010). Category theory (2nd ed.). Oxford logic guides 52. Oxford, UK: Oxford University Press. 邦訳：(2015). 『圏論－原著第2版』(前原和寿訳). 共立出版. 東京.
- Lawvere, F. W. & Rosebrugh, R. (2003). Sets for mathematics. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lawvere, F. W. & Schanuel, S. H. (2009). Conceptual mathematics: A first introduction

- to categories (2nd ed.). Kindle version. Retrieved from <https://www.amazon.co.jp/>.
- Mac Lane, S. (1998). Categories for the working mathematician (2nd ed.). New York, NY : Springer-Verlag New York. 邦訳 : (2005). 『圏論の基礎』 (三好博之・高木理 訳). シュプリンガー・フェアラーク東京. 東京.
- Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). Sheaves in geometry and logic : A first introduction to topos theory. New York, NY : Springer-Verlag New York.
- McLarty, C. (1995). Elementary categories, elementary toposes (paperback ed.). Oxford logic guides 21. Oxford, UK : Clarendon Press. (Original work published 1992).
- 中戸川孝治. (2015). 「中戸川孝治 | 教員一覧 | 研究と社会貢献 | 北海道大学大学院文学研究科・文学部」. 下記 URL にて2015年2月4日に取得. <https://web.archive.org/web/20150707094815/http://www.let.hokudai.ac.jp/staff/1-1-02>