



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	非可換部分構造論理における量子論理の含意について
Author(s)	上野, 岳史
Citation	哲学, 52, 71-90
Issue Date	2018-12-02
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/75452
Type	departmental bulletin paper
File Information	52_t6.pdf



非可換部分構造論理における 量子論理の含意について

上 野 岳 史

1 はじめに

Birkhoff と von Neumann [1]によって提案された量子論理では、いまだに含意結合子の定義について合意が得られていない。また、Kotas [2]は、含意結合子について6種類の定式化を提案している。Ozawa [5]は、それら6種類の含意結合子が代数的に対称的な関係にあることを示している。

本稿では、このような含意結合子の関係を非可換部分構造論理の演繹関係としてとらえたとき、構造に関する推論規則がどのようにかかわっているかについて考察している。

2 部分構造論理 NFL

部分構造論理とは、exchange、weakening、contractionなどの構造に関する推論規則の使用を制限した論理で、制限する規則の種類により、線形論理、Relevant logic, BCK logic, **FL** などがある。**FL** はすべての構造に関する推論規則が制限されたシーケント計算の体系で、Ono [4]によって導入された。そして、**NFL** は、我々が定式化した**FL**と同値な自然演繹の体系である。

Definition 1. （言語 $\mathcal{L}$ ）**NFL** の言語 $\mathcal{L}$ は次のものからなる。

- 命題変数: $p_0, p_1, p_2, \dots$
- 論理的結合子: $\supset, \supset', \neg, \neg', *, \wedge, \vee$
- 命題定数: $\mathbf{t}, \mathbf{f}, \top, \perp$

Definition 2. (論理式 $\mathcal{F}$) $\mathcal{L}$ の論理式の集合 $\mathcal{F}$ は以下の条件を満たす最小の集合である。

- (1) $\mathbf{t}, \mathbf{f}, \top, \perp \in \mathcal{F}$
- (2) $p_0, p_1, p_2, \dots \in \mathcal{F}$
- (3) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \neg A, \neg' A \in \mathcal{F}$
- (4) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \supset B, A \supset' B, A * B, A \wedge B, A \vee B \in \mathcal{F}$

以降、論理式を表すメタ変数として $A, B, C, \dots$ を用いる。

Definition 3. (NFL の証明) NFL において、証明は一つの論理式からなる証明 A (A を仮定して A を導く証明) から推論規則の適用によって得られる図のことを言う。

Γ を論理式の有限列 (空でもよい) のとき、 Γ を仮定して A を導く証明を

$$\frac{\Gamma}{A}$$

で表す。

Definition 4. (NFL の公理と推論規則) NFL の推論規則は以下のものである (図中の $[A]$ は推論規則の適用により仮定 A が除去されることを表す)。

- 公理:

$$\mathbf{t} \quad A \supset \top \quad \perp * A) \supset C$$

- 推論規則:

$$\frac{[A] \quad \frac{\Gamma}{\sum B} \supset I}{A \supset B} \quad \frac{A \quad A \supset B}{B} \supset E \quad \frac{\Gamma \quad [A]}{\sum B} \supset' I \quad \frac{A \supset' B \quad A}{B} \supset' E$$

$$\frac{[A] \quad \frac{\Gamma}{\sum \mathbf{f}} \neg I}{\neg A} \quad \frac{A \quad \neg A}{\mathbf{f}} \neg E \quad \frac{\Gamma \quad [A]}{\sum \mathbf{f}} \neg' I \quad \frac{\neg' A \quad A}{\mathbf{f}} \neg' E$$

$$\frac{\frac{\Gamma_1}{\sum_1 A} \quad \frac{\Gamma_2}{\sum_2 B}}{A * B} *I \qquad \frac{[A][B]\Gamma}{\sum C} *E$$

$$\frac{\frac{\Gamma}{\sum_1 A} \quad \frac{\Gamma}{\sum_2 B}}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{\frac{\Gamma}{\sum A \wedge B}}{A} \wedge E_1 \qquad \frac{\frac{\Gamma}{\sum A \wedge B}}{B} \wedge E_2$$

two Γ s are inden-
tified as one list Γ

$$\frac{\frac{\Gamma}{\sum A}}{A \vee B} \vee I_1 \qquad \frac{\frac{\Gamma}{\sum B}}{A \vee B} \vee I_2 \qquad \frac{A \vee B \quad \frac{[A]\Gamma}{\sum_1 C} \quad \frac{[B]\Gamma}{\sum_2 C}}{C} \vee E$$

two Γ s are inden-
tified as one list Γ

$$\frac{\frac{\Gamma}{\sum B}}{t \supset B} \supset I^0(t)$$

また、**NFL**以外の推論規則は以下とする。なお、我々の以前の論文 ([3]、[6]、[8]、[9]) により、 $\supset I^0$ と $\supset' I^0$ が **weakening** に対応し、 $\supset I^2$ と $\supset' I^2$ が **contraction** に対応し、 $\supset I^\circ$ 、 $\supset' I^\circ$ 、 $\supset E^\circ$ 、 $\supset' E^\circ$ が **exchange** に対応することが示されている。

Definition 5. (その他の推論規則)

$$\overline{A \vee \neg A} \text{ EM}$$

$$\frac{\frac{\Gamma}{\sum f}}{A} \perp$$

$$\frac{\Gamma}{\sum_1 B} \supset I^0 \qquad \frac{\Gamma}{\sum_1 B} \supset' I^0 \quad \text{weakening}$$

$$\frac{[A] \quad [A] \quad \Gamma}{\sum_1 B} \supset I^2 \qquad \frac{\Gamma \quad [A] \quad [A]}{\sum_1 B} \supset' I^2 \quad \text{contraction}$$

$$\frac{\Gamma \quad [A]}{\sum_1 B} \supset I^\circ \qquad \frac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2}{\sum_1 B \quad \sum_2 A} \supset E^\circ \quad \text{exchange}$$

$$\frac{[A] \quad \Gamma}{\sum_1 B} \supset' I^\circ \qquad \frac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2}{\sum_1 A \quad \sum_2 A \supset' B} \supset' E^\circ$$

3 量子論理の含意結合子

Orthomodular 束は、量子論理の標準的な代数モデルであり、以下のよう
に定義される。

Definition 6. (Orthomodular 束) **Orthomodular 束**とは以下の条件を満たす束である。

$$P < Q \text{ ならば } \neg P > \neg Q$$

$$\neg \neg P = P$$

$$P < Q \text{ ならば } P \vee (\neg P \wedge Q) = Q \text{ (the orthomodular law)}$$

Kotas [2] によって定式化された6種類の含意結合子の定義は以下である。そして、多くの論文ではSasaki arrowを量子論理の含意としている。

Definition 7. (含意結合子)

$$\begin{aligned}
 A \supset_0 B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg A \vee B \\
 A \supset_1 B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
 A \supset_2 B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \\
 A \supset_3 B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg A \vee (A \wedge B) \quad (\text{Sasaki arrow}) \\
 A \supset_4 B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg A \wedge \neg B) \vee B \\
 A \supset_5 B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)
 \end{aligned}$$

そして、これらの論理結合子については Ozawa [5] によって以下の対称的な関係があることが示されている。

$$\begin{aligned}
 A \supset_0 B &\iff (A \supset_5 B) \vee \neg \underline{\vee}(A, B) \\
 A \supset_1 B &\iff (A \supset_5 B) \vee (A \wedge \neg \underline{\vee}(A, B)) \\
 A \supset_2 B &\iff (A \supset_5 B) \vee (\neg B \wedge \neg \underline{\vee}(A, B)) \\
 A \supset_3 B &\iff (A \supset_5 B) \vee (\neg A \wedge \neg \underline{\vee}(A, B)) \\
 A \supset_4 B &\iff (A \supset_5 B) \vee (B \wedge \neg \underline{\vee}(A, B))
 \end{aligned}$$

なお、commutator $\underline{\vee}$ は $\underline{\vee}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ とする。

4 NFLでの含意結合子の関係

NFLに他の推論規則（定義5）を加えた体系で含意結合子の間の証明図を作成したところ、 $\supset_5$ から $\supset_0$ へ方向では、すべてNFLで証明可能であった。それに対して反対方向では推論規則を加える必要があった。なお、表1は使用した推論規則の一覧であり、各証明図は付録に記した。

Theorem 1. (含意結合子の間の関係)

- (1) $A \supset_5 B \vdash A \supset_0 B$ in NFL,
- (2) $A \supset_5 B \vdash A \supset_i B$ in NFL ($i = 1, 2, 3, 4$),
- (3) $A \supset_j B \vdash A \supset_0 B$ in NFL ($j = 1, 2, 3, 4$)
- (4) $A \supset_0 B \vdash A \supset_5 B$ in NFL + $\{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$,
- (5) $A \supset_0 B \vdash A \supset_k B$ in NFL + $\{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$ ($k = 1, 2, 3$),

- (6) $A \supset_l B \vdash A \supset_5 B$ in $\mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$ ($l = 3, 4$),
 (7) $A \supset_0 B \vdash A \supset_4 B$ in $\mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}, \supset' I^\circ\}$,
 (8) $A \supset_1 B \vdash A \supset_5 B$ in $\mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \perp, \supset I^2, \supset I^\circ\}$,
 (9) $A \supset_2 B \vdash A \supset_5 B$ in $\mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \perp, \supset I^2\}$

Proof. (1)の証明は図10の証明図。(2)の証明は図11、13、15、17。(3)の証明は図12、14、16、18。(4)の証明は図1。(5)の証明は図2、4、6。(6)の証明は図7、9。(7)の証明は図8。(8)の証明は図3。(9)の証明は図5。

表1: List of applied inference rules

	EM	$\supset I^0$	$\supset' I^0$	$\perp$	$\supset I^2$	$\supset I^\circ$	$\supset' I^\circ$	$\supset E$	$\supset' E$	$\wedge I$	$\wedge E$	$\vee I$	$\vee E$	$\neg I$	$\neg E$	$\neg' E$
$A \supset_0 B \vdash A \supset_5 B$	○	○	○					○	○	○		○	○			
$A \supset_0 B \vdash A \supset_1 B$	○	○	○					○	○	○		○	○			
$A \supset_0 B \vdash A \supset_2 B$	○	○	○					○	○	○		○	○			
$A \supset_0 B \vdash A \supset_3 B$	○	○	○				○	○	○	○		○	○			
$A \supset_0 B \vdash A \supset_4 B$	○	○	○					○	○	○		○	○			
$A \supset_1 B \vdash A \supset_5 B$		○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○		○	○
$A \supset_2 B \vdash A \supset_5 B$		○	○	○				○	○	○		○	○			
$A \supset_3 B \vdash A \supset_5 B$		○	○	○				○	○	○		○	○			
$A \supset_4 B \vdash A \supset_5 B$		○	○	○				○	○	○		○	○			
$A \supset_5 B \vdash A \supset_0 B$											○	○	○			
$A \supset_5 B \vdash A \supset_1 B$												○	○			
$A \supset_5 B \vdash A \supset_2 B$												○	○			
$A \supset_5 B \vdash A \supset_3 B$												○	○			
$A \supset_5 B \vdash A \supset_4 B$												○	○			
$A \supset_1 B \vdash A \supset_0 B$											○	○	○			
$A \supset_2 B \vdash A \supset_0 B$											○	○	○			
$A \supset_3 B \vdash A \supset_0 B$											○	○	○			
$A \supset_4 B \vdash A \supset_0 B$											○	○	○			

5 まとめ

これらのことから、 $\supset_5$ から $\supset_0$ では、他の含意結合子を経由しない場合($A \supset_5 B \vdash A \supset_0$)は構造に関する推論規則は使用せず、それは途中でどのような含意結合子を経由した場合でも同じであった。しかし、 $\supset_0$ から $\supset_5$ では、 $A \supset_0 B \vdash A \supset_5$ の場合は、排中律およびweakening ($\supset I^0, \supset' I^0$)を必要としており、それと推論規則の使用はSasaki arrow ($\supset' I^3$)を経由した場合だけであった。

$$A \supset_0 B \vdash A \supset_5 B \text{ in } \mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$$

$$A \supset_0 B \vdash A \supset_3 B \text{ in } \mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$$

$$A \supset_3 B \vdash A \supset_5 B \text{ in } \mathbf{NFL} + \{\supset I^0, \supset' I^0, \text{EM}\}$$

他の $\sqsupset_1$ を経由した場合は矛盾に関する推論規則 ($\perp$)、contraction ($\sqsupset I^2$)、exchange ($\sqsupset I^0$) を必要とし、 $\sqsupset_2$ を経由した場合は矛盾に関する推論規則 ($\perp$)、contraction ($\sqsupset I^2$) を必要とし、 $\sqsupset_4$ を経由した場合はexchange ($\sqsupset' \sqsupset I^0$) を必要とした。すなわち、証明に必要な推論規則を比較した場合、これら含意結合子是对称的な関係にはなっていなかった。これは、量子論理の含意結合子の考察にexchange則まで制限された非可換部分構造論理を用いるとことにより、よりきめ細やかな考察が可能になることを示していると考えられる。

[illegible]

$$\begin{array}{c}
(1) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(2) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(3) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(4) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(5) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(6) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(7) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee \\
(8) \quad \frac{P \wedge (\neg P \vee Q)}{P \wedge (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee
\end{array}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

图10 : $P \supset_5 Q \vdash P \supset_0 Q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1) \quad \frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}{\neg P \vee Q}}{\frac{(2) \quad \frac{[P \wedge Q]}{Q} \wedge E \quad \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]}{\neg P \vee Q} \vee I \quad \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]}{\neg P \vee Q} \vee I}{\frac{(3) \quad \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]}{\neg P} \wedge E \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E}{\frac{(4) \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E}{\frac{(5) \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E} \vee E (4)(5)} \vee E (2)(3)
 \end{array}$$

$$\frac{(P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q) \vee (-P \wedge -Q)}{(1) \quad \frac{\frac{[P \wedge Q] \wedge E}{P} \quad \frac{\frac{[P \wedge Q] \wedge E}{-P \vee Q} \quad \frac{(2) \quad \frac{[P \wedge Q] \wedge E}{Q} \quad \wedge I}{-P \vee Q} \quad \wedge I}{(2) \quad \frac{[P \wedge Q] \wedge E}{-P \vee Q} \quad \wedge I} \quad \frac{(3) \quad \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge -Q)]}{(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge -Q)} \quad \vee I}{\frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge -Q)]}{(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge -Q)} \quad \vee I} \quad \frac{\vee I}{\vee E} (2) (3))$$

$$\frac{(-P \wedge Q) \vee (-P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge (-P \vee Q))}{-P \vee Q} \stackrel{(1)}{=} \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]}{-P \vee Q} \stackrel{(2)}{=} \frac{[\neg P \wedge Q]}{-P \vee Q} \stackrel{(3)}{=} \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{-P \vee Q} \stackrel{(4)}{=} \frac{[\neg P \wedge \neg Q] \wedge E}{-P \vee Q} \stackrel{(5)}{=} \frac{[P \wedge (\neg P \vee Q)]}{-P \vee Q} \wedge E \stackrel{(5)}{=} \frac{P \vee E(2)(5)}{-P \vee Q}$$

[illegible]

$$\frac{(P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q) \vee ((-P \vee Q) \wedge -Q)}{[(P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q)]} \stackrel{(1)}{\text{AE}} \frac{[P \wedge Q]}{Q} \stackrel{(2)}{\text{VE}} \frac{[-P \wedge Q]}{Q} \stackrel{(3)}{\text{VE}} \frac{[(-P \vee Q) \wedge -Q]}{-P \vee Q} \stackrel{(4)}{\text{VE}} \frac{[-P \vee Q] \wedge -Q}{-P \vee Q} \stackrel{(5)}{\text{VE}} \frac{AE}{(2)(5)}$$

☒15 : $P \supset_5 Q \vdash P \supset_3 Q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1) \quad \frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee I}{\frac{(2) \quad \frac{[P \wedge Q]}{\neg P \vee (P \wedge Q)} \vee I}{\neg P \vee (P \wedge Q)}} \vee I \\
 \frac{(3) \quad \frac{[(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]}{\neg P} \frac{(4) \quad \frac{[\neg P \wedge Q]}{\neg P} \wedge E}{\frac{(5) \quad \frac{[\neg P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E}{\vee E (4)(5)}}}{\frac{(2)(3)}{\vee E (2)(3)}}
 \end{array}$$

☒16 : $P \supset_3 Q \vdash P \supset_0 Q$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(1) \quad \frac{\neg P \vee (P \wedge Q)}{\neg P \vee Q} \wedge I}{\neg P \vee Q} \wedge I \\
 \frac{(2) \quad \frac{[\neg P]}{\neg P \vee Q} \vee I}{\neg P \vee Q} \vee I \\
 \frac{(3) \quad \frac{[P \wedge Q]}{Q} \wedge E}{\frac{Q}{\neg P \vee Q} \vee E (2)(3)}}
 \end{array}$$

⊠17 : $P \supset_5 Q \vdash P \supset_4 Q$

$$\frac{\frac{(1) \quad (P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q) \vee (-P \wedge \neg Q)}{\quad} \quad \frac{\frac{(2) \quad [(P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q)]}{Q} \quad \frac{(3) \quad [P \wedge Q]}{Q} \wedge E \quad \frac{(4) \quad [P \wedge Q]}{Q} \wedge E \quad \frac{(5) \quad [-P \wedge \neg Q]}{(-P \wedge \neg Q) \vee Q} \vee I \quad \frac{(3)(4) \quad \wedge E}{Q} \vee E \quad \frac{\vee I}{(-P \wedge \neg Q) \vee Q} \vee I \quad \frac{\vee E}{(-P \wedge \neg Q) \vee Q} \vee E \quad (2)(5)}{(P \wedge Q) \vee (-P \wedge Q) \vee (-P \wedge \neg Q) \vee Q} \vee I$$

⊠18 : $P \supset_4 Q \vdash P \supset_0 Q$

$$\frac{(1) \quad \frac{(-P \wedge \neg Q) \vee Q}{\neg P \vee Q} \quad \frac{(2) \quad \frac{[-P \wedge \neg Q]}{\neg P} \wedge E \quad \frac{(3) \quad [Q]}{[Q]} \wedge E \quad \frac{\vee I}{\neg P \vee Q} \vee I \quad \frac{\vee I}{\neg P \vee Q} \vee I \quad \frac{\vee E}{\neg P \vee Q} \vee E \quad (2)(3)}{(-P \wedge \neg Q) \vee Q} \vee I$$

参考文献

- [1] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37 : 823-843, 1936.
- [2] J. Kotas. An axiom system for the modular logic. *Studia Logica*, 21 : 17-38, 1967.
- [3] K. Nakatogawa and T. Ueno. On structural inference rules for Gentzenstyle natural deduction, Part I. In *Proceedings of the Sixth Asian Logic Conference, Beijing 1996*, pages 199-221. World Scientific, 1998.
- [4] H. Ono. *Proof-Theoretic Methods in Nonclassical Logic—an Introduction*, volume Volume 2 of *MSJ Memoirs*, pages 207-254. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, 1998.
- [5] M. Ozawa. Othomodular-valued Models for Quantum Set Theory. arXiv : 0908.0367v1[quant-ph], 2009.
- [6] T. Ueno. *Natural Deductions for Substructural Logics*. PhD thesis, Division of Mathematics, Hokkaido University, 2000. 3.
- [7] T. Ueno. On implicational connectives of quantum logics for non-commutative substructural logics formulated gentzen-style natural deduction. In *CLMPS 2015 LC 2015 Book of Abstracts*, pages 201-202, Helsinki, Finland, 2015.
- [8] T. Ueno, O. Watari, and K. Nakatogawa. On structural inference rules for Gentzen-style natural deduction, Part II(extended abstract). In *The Seventh Asian Logic Conference Book of Abstracts*, Hsi-Tou, Taiwan, 1999.
- [9] T. Ueno, O. Watari, and K. Nakatogawa. On structural inference rules for Gentzen-style natural deduction, Part II. *Archive for Studies in Logic*, 9 (1): 1-23, 2007. URL : <http://logic.let.hokudai.ac.jp/koji/research/archive/UenoEtA107StructuralInferenceRulesII.pdf>.

Postscript on semantics of substructural logics

A comprehensive account of possible world semantics for substructural logics is given in the Part III of *An Introduction to Substructural Logics*, written by Restal in 1999. It is now downloadable at <http://cite-seerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.183.9741&rep=rep1&type=pdf>. The Lindenbaum algebra of **FL** is a residuated lattice, and a quantale shares such a structure. Quantale is defined as a sup-lattice having the multiplication, together with its unit, which commutes with an arbitrary union. Quantale was introduced by Mulvey in 1986, while he was investigating the left/right ideals of the non-commutative C^* algebra. (C.J. Mulvey, “&” *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 12 (1986) pp. 99-104, Zbl 0633.46065. G.Takeuti’s notes on quantum mechanics was listed as a reference at the end of Mulvey’s paper.) As for the category theoretic semantics of substructural logics, monoidal closed category lies at the basis. Most structures of parallel processes involve monoidal closed category, so that Prof. Bob Coecke once claimed, “Monoidal closed category is everywhere.” On page. 84 of an introductory textbook, *Conceptual Mathematics*, published in 1997 by F. W. Lawvere and S. H. Schanuel, one finds a sentence, “Reality consists of fish, rivers, houses, factories, fields, clouds, stars, i.e. things in their motion and development.” (The book is downloadable at <http://fef.ogu.edu.tr/matbil/eilgaz/kategori.pdf>.) It is worthwhile mentioning that an uncountable noun and simple plural nouns are used in this quoted sentence. As the denotations of these nouns are things in motion and development, they are neither “Bestimmt” (definite) nor determined. They would seem to belong to a tradition, which G. Cantor called pagan, in the criticism against G. Frege’s notion of *function*. If one takes the space studied under F. W. Lawvere’s thesis, “Set within Geometry”, as *manifold*, one

would be able to proceed further along one of the ways initiated by his thesis.

(Takeshi Ueno, Koji Nakatogawa)