HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Asymptotic analysis of bending, torsional and stretching eigenfrequencies of thin elastic rods [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	RODRÍGUEZ MULET, ALBERT
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第13750号
Issue Date	2019-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/76082
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Albert_RodoriguezMulet_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　Albert Rodríguez Mulet

学 位 論 文 題 名

Asymptotic analysis of bending, torsional and stretching eigenfrequencies of thin elastic rods
（細長い弾性体における，曲げ・捩れ・伸び縮みモードの固有振動数の漸近挙動）

弾性とは外力を加えることでひずみが生じて応力が発生し，除荷すれば元の形状に戻ろうとする力学的な特性である．固有振動は外部の力を加えなくても，その物体が振動を慣性で続ける振動数と言い，その振動数を固有振動数と呼ぶ．共振とは外部から固有振動数に近い振動を与えると，大きく揺れ出す現象である．弾性体の振動特性を調べることは工学・物理学では非常に有効な分析方法であり，機械騒音の減少・タイヤの高精度・建築物における安全性といった，様々な分野に応用できる．たとえば，一般に低層・中層の建物や建坪の広い建物は小さな固有振動数を持たず，高層・超高層や建坪の狭い建物は小さい固有振動数を持つ．そこで，地震が起きた際に免震・制震・耐震などの技術を用いることにより，弾性定数を変化させたりし，共振を起こしにくくさせることや崩壊を防ぐことができる．このように，種々な形状における固有振動数を調べるのはとても重要である．数学的な観点から固有振動数や共振を研究することにより，更に理解が深くなり，自然科学やより優れた技術の発展に貢献できる．こういう現象を偏微分方程式で表すことができるため，偏微分方程式論のノウハウを用いることにより，特異摂動理論などの一般化に貢献ができ，数学の発展にも繋がる．

本学位論文では，特別な場合の形状と固有振動数の関連性を考察する．上記の建築物の例をモチベーションとして，建物などを細い柱と薄い板の組み合わせとして考えられる．先行研究で 3 次元の細長い(柱状)弾性体を扱い，1 次元の領域（中心軸）に縮約するときの固有振動数の漸近挙動に関する研究が述べられている．以下には具体的に数学的な設定を紹介する．細長い物体の細さの度合いをパラメーター$\varepsilon > 0$として表し，Ω_εを細長い弾性体の形状に対応する領域とし，$\Gamma_{1,\varepsilon}$を物体の両端に対応する境界$\partial\Omega_\varepsilon$の部分集合とし，$\Gamma_{2,\varepsilon} = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_{1,\varepsilon}$を側面とする．線形弾性作用素の固有値問題は下記の偏微分方程式で記述される．

$$\begin{cases} L[u] + \mu u = \mathbf{0} \text{ in } \Omega_\varepsilon \\ u = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{1,\varepsilon} \\ \sigma(u) \cdot n = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{2,\varepsilon} \end{cases}$$

ここで，uは変位ベクトル場，μは固有値，λ_1, λ_2は弾性定数，$L[u] = \lambda_2 \Delta u + (\lambda_1 + \lambda_2) \nabla \operatorname{div} u$は線形弾性作用素であり，$n$は外向き単位法線ベクトルである．上記の固有値問題は，ゼロ以上の発散する実数列からなる固有値をもつことが知られている．即ち，任意の$\varepsilon > 0$に対し，$0 < \mu_1(\varepsilon) \leq \mu_2(\varepsilon) \leq \cdots \leq \mu_k(\varepsilon) \leq \cdots$ 且つ$\lim_{k \to +\infty} \mu_k(\varepsilon) = +\infty$が成り立つ．パラメーター$\varepsilon$が

0 に接近するとき，固有値$\mu_k(\varepsilon)$の漸近挙動を解析する．

先行研究では，中心軸が真っ直ぐ且つ断面が一様な場合，つまり金太郎飴のように断面が一定で変形しない場合を考えた．既知の結果として，$\mu_k^B(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$，また$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \Lambda_k$が知られている．ここで，$\Lambda_k > 0$はある定数係数の 4 階常微分方程式の第$k$固有値である．この固有値たちが曲げモードに相当する．第三章では，中心軸が真っ直ぐではない且つ断面が非一様，つまり断面が柱の長さに応じ変形する弾性体を考察し，先行結果の一般化したものを証明した．具体的には固有値に関する漸近挙動のオーダーが同じであり，Λ_kを形状の情報に依存した変数係数の 4 階常微分方程式の固有値として特徴付けた．また，一つの先端が自由に振動させる境界条件も考え，類似の結果も示した．これが本学位論文の 1 番目の成果である．

曲げモード以外の固有値も扱った．任意の$\varepsilon > 0$に対し$\mu_k(\varepsilon)$はどのモードか一見したところで分からない．番号kを固定し，$\varepsilon \to 0$のときを考えれば，低エネルギーである曲げモードしか見えず，固有値の全体の分布や漸近挙動の全体像が把握できない．実際は 0 に接近しない固有値をもつ振動モードが存在することが観測されている．それらは伸び縮みモードと捩れモードに相当することが予想される．第四章では，軸対称な細い領域を研究し，伸び縮みモードと捩れモードの固有値を特徴付けた．具体的には固有値を$\{\mu_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{+\infty} \supseteq \{\mu_k^B(\varepsilon)\}_{k=1}^{+\infty} \cup \{\mu_k^S(\varepsilon)\}_{k=1}^{+\infty} \cup \{\mu_k^T(\varepsilon)\}_{k=1}^{+\infty}$のように分類できることを明らかにする．ここで，それぞれ$\mu_k^B(\varepsilon)$は曲げモード，$\mu_k^S(\varepsilon)$は伸び縮みモード，$\mu_k^T(\varepsilon)$は捩れモードの固有値である．第三章で示したように，$\varepsilon \to 0$のときは$\mu_k^B(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$であるが，$\mu_k^S(\varepsilon) = O(1)$，$\mu_k^T(\varepsilon) = O(1)$であることを証明する．その際，極限方程式として変数係数の 2 階常微分方程式が得られる．また，先行研究では伸び縮みモードと捩れモードに対応する固有関数に関する弱収束性が述べられている．本学位論文では，固有関数の極限は 0 でないことを明らかにし，H^1の意味での強収束性も証明する．これが本学位論文の 2 番目の成果である．

以上の結果は神保秀一教授との共同研究に基づく．