グラフ理論 配布資料 #1 (教科書：pp. 1〜9 の内容)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 17 年 4 月 18 日

目 次

1 イントロダクション

ここでは, 本講義で扱う「グラフ」の定義から始め, 本講義で習う事項を概観することにしょう. それぞれの概念の詳細, 及び, 応用例は追々見て行くことになる. その中で, いくつかの定理, 系, 補題が出てくるが, 本講義ではそれらの中で比較的重要と思われるものに関しては, その証明を追ってみるが, それ以外のものに関しては, 具体的な例/応用例を取り上げ, 諸定理の意味を直観的に理解し, 有用性を確認するにとどめる. 講義で取り上げなかった証明に関しては, 各自が教科書を読み, 一度はその流れを追ってみること.

また, 各回の配布資料の最後に **演習問題** が付いている. 受講者は次回までに, これらの問題を解き, レポートとして提出すること. 最終成績のうちの約 40 % はこのレポートの積み重ねで決まることになる.

1.1 グラフとは何か?

グラフに関する詳しい説明を始める前に, ウォーミングアップとして基本的な概念を概観することにする.

1.1.1 点, 辺, 次数

グラフ ··· **点** **(vertex)** (図 1 の P,Q,R,S,T) , 及び, **辺** **(edge)** (図 1 の $\overline{PQ}, \overline{QR}$ 等) からなる図形.

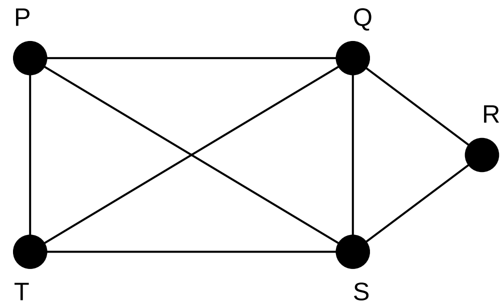


図 1: この講義で扱う「グラフ」の一例.

次数 (degree) $\cdots$ ある点を端点とする辺の本数.

例
図 1 の点 P の次数は 3. 図 1 の点 Q の次数は 4.

これを式で表すと ⇒

$$\begin{cases} \deg(\mathsf{P}) & = & 3 \\ \deg(\mathsf{Q}) & = & 4 \end{cases} \tag{1}$$

となる.

1.1.2 グラフに意味を持たせる

図 1 の P,Q,R,R,T $\cdots$ フットボールチーム ⇒ 各点の次数がそのチームが行う試合数となる.

$\deg(\mathsf{P}) = 3 \;\; \Rightarrow$ チーム P が行う試合数は 3 である.

この他にも, **電気回路**, **道路**等, 様々な形でグラフに意味を持たせ, その対象をグラフ理論的な考察に基づき調べることができる.

⇒ **例題 1** 2,3 参照.

1.1.3 グラフの同形性

グラフとは点の集合とそれらの結び方 (辺の集合) の表現であり, 距離的な性質とは無関係である. 例えば, 下記の 2 つの図形はグラフ理論においては同じものとして扱われる. 従って, 実問題をグラフで表現する際には扱いやすいもの (調べたい関係性が見やすいもの) を選ぶことが肝要である.

※グラフの表現には**隣接行列**, **接続行列**等の行列を用いることもできる. この表現法は計算機上でグラフを扱うためには有用である. これらの行列に関する詳細は次回以降に見て行くことになる.

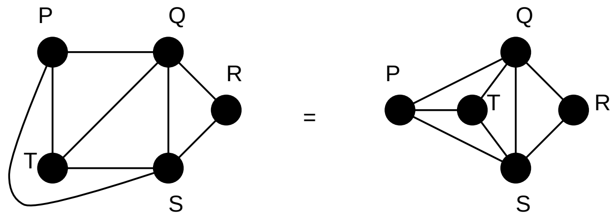


図 2: 同形な 2 つのグラフの一例.

1.2　様々なグラフ

全てのグラフはその幾何学的な性質の違いからグループに分類され, それぞれのグループには名前が付けられている. ここでは, その中のいくつかを概観する.

1.2.1　多重辺, ループ, 単純グラフ

多重辺 (multiple edges) ··· 任意の 2 点 P,Q を 2 本以上の辺が結んでいる場合, それを多重辺と呼ぶ.

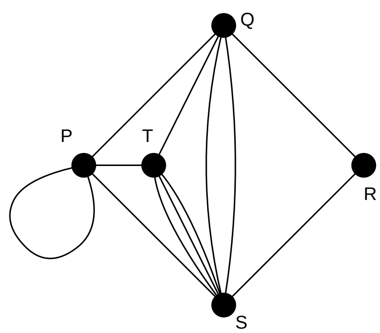


図 3: この図において, 辺 $\overline{\mathrm{TS}}, \overline{\mathrm{QS}}$ は**多重辺**であり, 点 P には一つの**ループ**がある.

ループ (loop) ··· 任意の点 P から P 自身へ戻る辺

⇒ **単純グラフ** (simple graph) ··· 多重辺やループを含まないグラフ

1.2.2　有向グラフ

有向グラフ (directed graph : digraph **と呼ばれることが多い**) ··· 辺に向きが与えられたグラフ

歩道 (walk) ··· 連結した辺の列.
道 (path) ··· どの点も高々一度しか現れない歩道.
閉路 (cycle) ··· 図 2 の右側の Q → S → T → Q のような道.

有向グラフを用いた例としては**例題 1** 2 を参照.

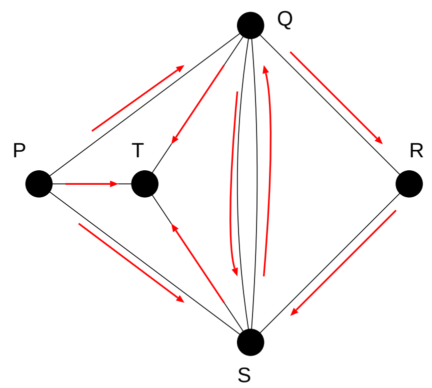


図 4: 有向グラフの一例. 各辺に向きを持たせることにより, 任意の 2 点間の関係性 (例えば, P は Q に好意を持っている等) を明示させることができる.

1.2.3　連結グラフと非連結グラフ

「全部つながっているか」「つながってないか」でグラフを分類することもできる.

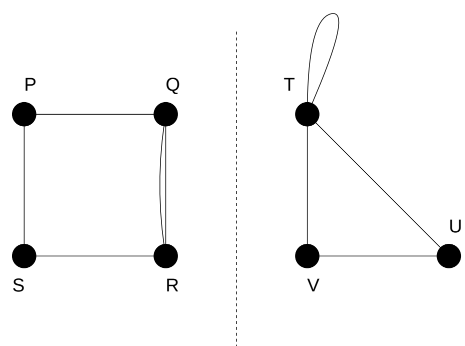


図 5: 非連結グラフの一例. 成分数は 2 である.

連結グラフ (connected graph) ⋯ どの 2 つの点も道で結ばれているグラフ.
非連結グラフ (disconnected graph) ⋯ 連結グラフではないグラフ (図 5 参照).

※ 非連結グラフを構成する各連結グラフを**成分 (component)** と呼ぶ. 図 5 の例でみるならば, 「この非連結グラフは 2 つの成分を持つ」ということになる.

1.2.4　オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

グラフにはその考案者の名前が付けられたものも多い. ここに出てくる 2 つのグラフ：**オイラー・グラフ**, **ハミルトン・グラフ**はそれらの中で最も有名なものである.
オイラー・グラフ (Eulerian graph)
⋯ 全ての辺をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.
ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)
⋯ 全ての点をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.

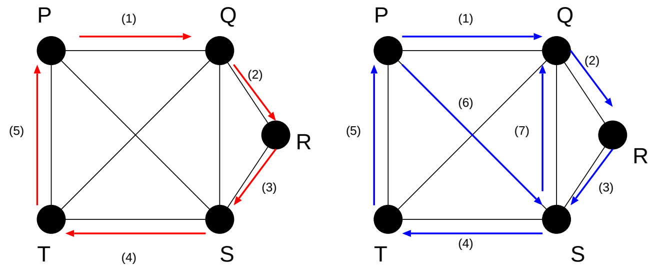


図 6: この図はハミルトン・グラフではあるが (左図), オイラー・グラフではない (右図).

※ 連結グラフの点の数が多い場合, そのグラフがオイラー・グラフか, ハミルトン・グラフであるか, を実際に該当する歩道を見つけることによって判定するのは容易なことではない. このようなとき, 与えられた連結グラフがオイラー・グラフであるための条件, ハミルトン・グラフであるための条件 (これは十分条件) が知られており, それぞれ **Euler の定理** (教科書：p.43), **Ore (オーレ) の定理** (教科書：p.49) としてまとめられている. これらを用いることにより, 与えられた連結グラフのオイラー性, ハミルトン性を判定することができるようになる. これらは後に詳しく学ぶ.

1.2.5　木

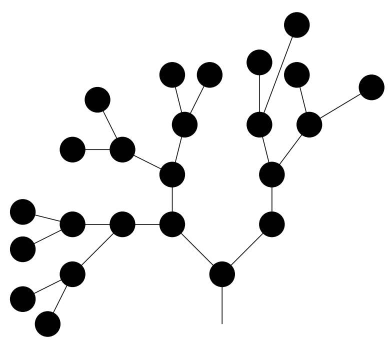


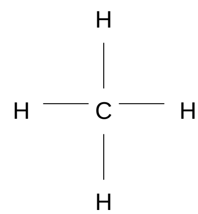
図 7: 木の一例.

木 (tree) ··· どの 2 点の間にも道が 1 本しかない連結グラフ (図 7 参照).

※ ワークステーションのファイルシステム, 生物進化の系統図などは木構造を持つ.

例題 1

1. 化学式 C_5H_{12} を持つ分子にはいくつかの構造の異なる分子が存在する (「構造異性体」). これらの分子を全て挙げ, 図 (CH_4) に従って, それぞれに対応するグラフを描け.



2. John は Joan が好きで, Jean は Jane が好きで, Joe は Jane と Joan が好きで, Jean と Joan は互いに好きである. John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の間の関係を説明する有向グラフを描け.
3. a,b,c,d,e,f の 6 チームでホッケーの試合をすることになった. 各チームの行った試合数は

チーム名	a	b	c	d	e	f
試合数	2	2	4	4	3	1

であった. このとき, 考え得る試合の組み合わせをグラフで表し, それらを全て描け. ただし, 同一カードは 2 試合以上行わないものとする.

(解答例)：

1. グラフ理論的にこの問題を言い換えてみると, 問題である『C_nH_{2n+2} の構造異性体の数を数える』ことは, 『n 個の点の次数が 4 であり, 残りの $2n+2$ 個の点の次数が 1 である「ラベルなし木」の総数を数える』ということになる.
   炭素原子同士のつなげ方を決めれば, 水素原子の配置の仕方は自動的に決まるので, 可能な炭素原子の配置を数えあげて行けばよい. 図 8(左) にその結果を載せる.
   従って, 求める構造異性体は上記の炭素原子の残りの手に水素原子を付加すればよく, 答えは下の図 8(右) のようになる.
   ※ **注**：求めるグラフは「木」でなければならない (つまり, どの 2 点間にも道が 2 本以上存在してはならない) ので, 図 9 のような配置は許されず, 実際, この炭素配列で水素原子も並べてみると C_5H_{10} となり, C_5H_{12} とは異なるものが出来上がってしまう. [1]
2. 求める有向グラフは (好意を持っている人物) → (好意を持たれている人物) のように矢印をつける約束にすると図 10 のようになる.
3. 考え得る組み合わせのグラフは図 11 のように 5 通りある.

[1] 系統的な木の数え上げに関しては第 4 章 p. 67 **Cayley の定理**で学ぶことになります.

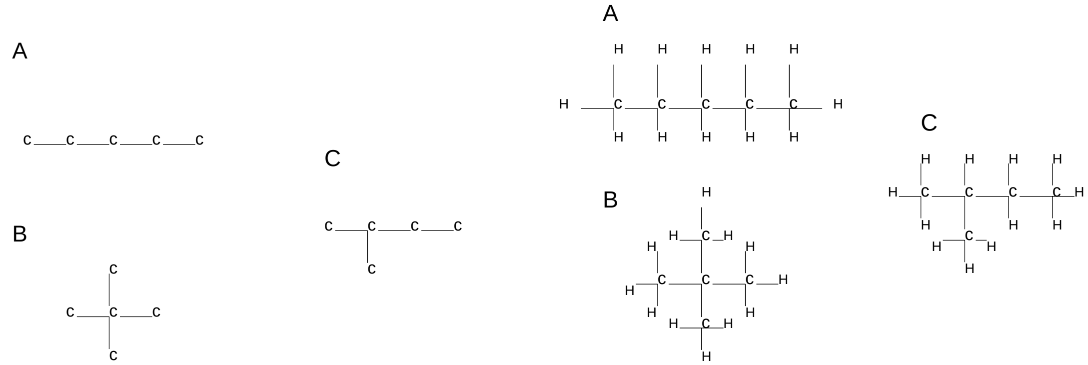


図 8: $n=5$ の場合に可能な炭素原子配列 (左). なお, A は「ペンタン」, B は「2-メチルブタン」, C は「2-2-メチルプロパン」と呼ばれる有機化合物である. また, 右図は C_5H_{12} の構造異性体.

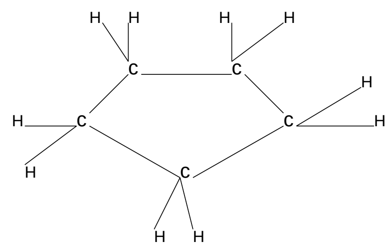


図 9: C_5H_{10}.

演習問題 1

(1) 点の集合が $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ で与えられ, かつ, 辺の集合が $E=\{\overline{v_1v_3},\overline{v_2v_3},\overline{v_3v_4},\overline{v_4v_1},\overline{v_4v_3},\overline{v_5v_6}\}$ からなるグラフを描け.

(2) ヘビはカエルを食べ, トリはクモを食べる. トリとクモはどちらも虫を食べる. カエルはカタツムリ, クモ, および, 虫を食べる. この捕食行動を表す有向グラフを描け.

(注 1) 締め切りは次回の講義開始前. レポート用紙には**氏名, 学籍番号を必ず書く**こと.
(注 2) レポートは次回に返却できない場合があります. 自分の作成したレポートをそれ以後 (レポートが返却されるまで) の自習に使う者は, 必ず**レポートのコピーをとってから提出**してください.

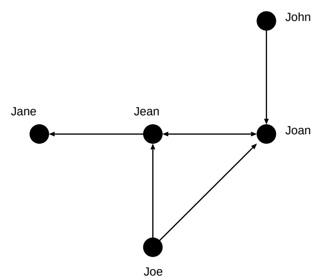


図 10: John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の関係図.

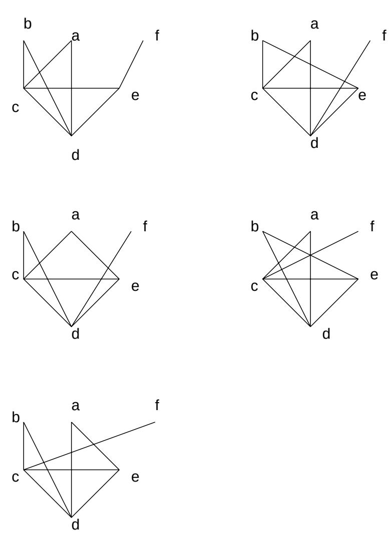


図 11: 考え得る対戦カードを表す 5 種類のグラフ.