



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/771">https://hdl.handle.net/2115/771</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory05_2.pdf, 第2回講義資料



# グラフ理論 配布資料 #2 (教科書 : pp. 10~21 の内容)

担当 : 井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 17 年 4 月 22 日

## 目次

2 定義と例	10
2.1 単純グラフ	10
2.2 同形	11
2.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ	12
2.4 連結グラフ	12
2.5 次数及び次数列	12
2.6 部分グラフ	14
2.7 行列によるグラフの表現方法	14

### 演習問題 1 の解答例

簡単なので結果だけ描く.

(1) 単純グラフとは明示されていないので, 図 12 のような多重辺を含む非連結なグラフとなる.

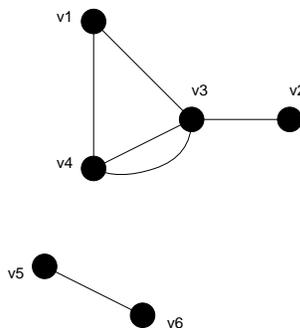


図 12: 多重辺のある成分を含む, 非連結グラフ.

(2) 名前を s(へび), f(カエル), sn(カタツムリ), sp(クモ), b(トリ), i(虫) とし, (食べるもの) (食べられるもの) のように矢印を描く約束にすれば, 図 13 のようになる.

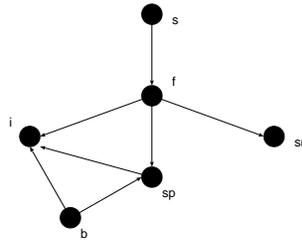


図 13: 捕食関係を表す有向グラフ.

## 2 定義と例

この節ではグラフ理論に現れる数々の定義を例を交えながら解説する.

### 2.1 単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ.

$V(G)$ ：グラフ  $G$  の点集合 (vertex set)

$E(G)$ ：グラフ  $G$  の辺集合 (edge set)

$\psi_G$ ：グラフ  $G$  の接続関数 (incidence function)

どのグラフ (単純グラフも含む)  $G$  も  $V(G)$  と  $E(G)$  からなる.

難しく言う ⇒ 『グラフ  $G$  は  $V(G)$  と  $V(G)$  の元の高々1つの非順序対からなる有限な族 (複数個の同じ元があってもよい) である  $E(G)$  からなる.』

図 14 に単純グラフとその点集合及び辺集合を載せる. 前出のグラフ  $G$  の接続関数とは  $G$  の各辺に  $G$  の頂点の対を対応させる関数であり, この図の例でいくと

$$\psi_G(e_1) = uv, \quad \psi_G(e_2) = vw$$

$$\psi_G(e_3) = uw, \quad \psi_G(e_4) = wz$$

のようになる.

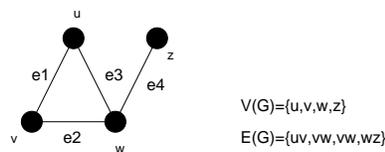


図 14: 単純グラフ  $G$  の例と点集合  $V(G)$  及び辺集合  $E(G)$ .

一方, 図 15 に一般グラフ (general graph) (ループや多重辺をも許されたグラフ) の一例を載せる. この図において各辺の現れる回数は  $uv$ (1回),  $vv$ (ループ, 2回),  $vw$ (3回),  $uw$ (2回),  $wz$ (1回) である.

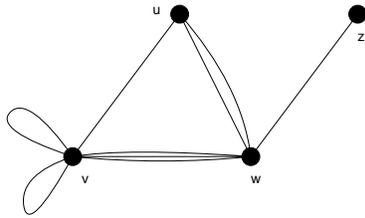


図 15: 一般グラフ G の一例.

## 2.2 同形

2つのグラフ  $G_1$  と  $G_2$  の間に一対一の対応関係があり,  $G_1$  の任意の2点を結ぶ辺数が  $G_2$  の対応する2点を結ぶ辺数に等しいとき,  $G_1$  と  $G_2$  は同形 (isomorphic) であるという. 図 16 の2つのグラフ  $G_1$  及び

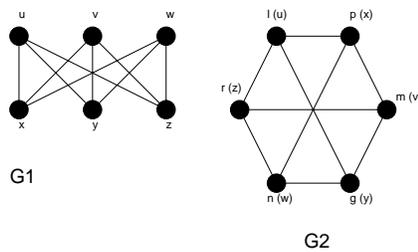


図 16: 同形グラフ  $G_1$  と  $G_2$ .

$G_2$  は同形であり,  $G_2$  中に書き込んだような対応関係を持つ.

(補足事項)

先に定義した接続関数を用いると, 2つのグラフ  $G_1, G_2$  が同形であるとき, 1対1写像:

$$\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$\phi : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

が次の関係:

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立つ. このような写像の対  $(\phi, \theta)$  を  $G_1, G_2$  間の同形写像と呼び, この同形写像が存在する場合,  $G_1, G_2$  は同形であると言い, 式では  $G_1 \cong G_2$  と表現する.

これを実際に図 16 の  $G_1, G_2$  で確かめると

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n$$

$$\theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

及び

$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}$$

$$\begin{aligned} \phi(\overline{uz}) &= \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(z)} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

となるから

$$\psi_{G_1}(\overline{ux}) = ux \iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{G_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)$$

等の成立が確かめられ、従って、図 16 の  $G_1, G_2$  は同形であることがわかる (もちろん、この場合の写像  $\phi, \theta$  は同形写像である).

### 2.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

各点に名前の付されたグラフをラベル付きグラフと呼ぶ. 例題 1 で扱った炭素原子を並べた木に関して、この課題では「ラベルなし」としてその場合を数えたが、ラベル付きの木として扱う際には図の 2 つの木は別個の木として扱うことになる.

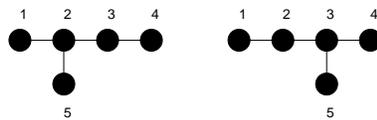


図 17: 例題 1 で扱った炭素原子の木をラベル付きで考えると両者は異なる木とみなされる.

### 2.4 連結グラフ

連結グラフとは平たく言えば「一つにつながっているグラフ」ということになるが、点同士が「連結する」「連結される」という概念を用いると、下記のように、もう少し丁寧に連結グラフを定義することができる.

まず、グラフ  $G$  の点  $u, v$  に関して、 $G$  に  $u, v$  を結ぶ道があれば、 $u$  は  $v$  に連結されると言う.

そこで、グラフ  $G$  を構成する任意の 2 点  $u, v$  に対し、

$$u \text{ は } v \text{ に連結される} \iff u \text{ は } v \text{ と同じ } V_i \text{ に属する}$$

というようにグラフ  $G$  を  $G$  の点からなる空でない部分集合  $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n$  で分割したとき、各集合からなる部分グラフ  $G(V_1), G(V_2), \dots, G(V_n)$  をそれぞれグラフ  $G$  の成分 (component) と呼び、成分が 1 つだけのグラフを連結グラフ (connected graph) と定義する. 図 18 に連結グラフ ( $G_1$ ) 及び、成分数が 3 である非連結グラフ ( $G_2$ ) の例を載せる. 言うまでもないことだが、非連結グラフ (disconnected graph) とは連結グラフでないグラフのことである.

### 2.5 次数及び次数列

グラフ  $G$  及びその中の点  $v$  に関する、次にあげる重要な概念を押さえておこう.

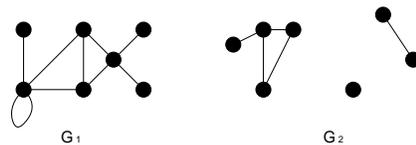


図 18: 連結グラフ  $G_1$  と非連結グラフ  $G_2$ .  $G_2$  の成分数は 3 である.

- 点  $v$  の次数 (degree)  
 $v$  に接続している辺の本数. ただし, ループの場合は 2 本とカウントする. 式で書くと  $\deg(v)$  となる.
- 孤立点 (isolated vertex)  
 次数ゼロの点
- 端点 (end-vertex)  
 次数 1 の点
- グラフ  $G$  の次数列 (degree sequence)  
 次数を増加順に記したもの. 必要となれば同じ次数を繰り返しても良い. 図 18 の  $G_1$  の例で言うと, この連結グラフの次数列は  $(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)$ .

また, グラフの次数に関して次の有名な補題が知られている.

握手補題 (handshaking lemma) : 任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる.

また, 整数列  $d_1, d_2, \dots, d_n$  が与えられたとき,  $n$  個の点からなるグラフ  $G$  に対し, 各  $i$  に関して

$$\deg(v_i) = d_i \tag{2}$$

が成立するとき, 数列  $d_1, d_2, \dots, d_n$  はグラフ的であるという. 例えば, 数列  $(4, 3, 2, 2, 1)$  はグラフ的であり,

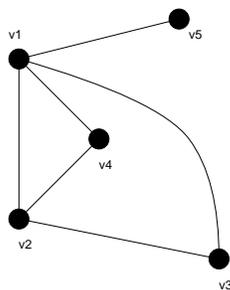


図 19: 「グラフ的」であるグラフの一例.

そのグラフは図 19 である. 対応関係は

$$d(v_1) = 4, d(v_2) = 3, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 1 \tag{3}$$

となる.

## 2.6 部分グラフ

グラフ  $G$  の部分グラフ (subgraph) : 点が全て  $V(G)$  に属し, その辺が全て  $E(G)$  に属するグラフ.

従って, いかなる場合にも, グラフ  $G$  の点と辺の除去, 及び辺の縮約 (辺を除去し, その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすること) という操作を行うことにより, グラフ  $G$  の部分グラフを作ることができる.

## 2.7 行列によるグラフの表現方法

グラフを計算機上で表現する場合には個々のグラフの特徴を数量化し, その数字を用いてコーディングする必要がある. このとき, 下に挙げる隣接行列及び, 接続行列という行列による表現方法が便利である.

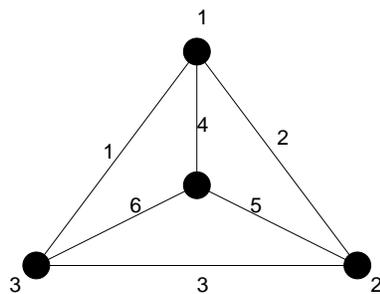
グラフ  $G$  の点及び辺が  $1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots, m$  とそれぞれラベル付けされているとすると

隣接行列 (adjacency matrix) : 点  $i$  と点  $j$  を結ぶ辺の本数を第  $ij$  要素とする  $n \times n$  の行列

接続行列 (incidence matrix) : 点  $i$  が辺  $j$  に接続している場合, 第  $ij$  要素が 1 であり, 接続していない場合 0 であるような  $n \times m$  の行列<sup>1</sup>

### 例題 2

図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ.



- (1) このグラフの次数列を書け.
- (2) 図のグラフに対して隣接行列  $A$  及び接続行列  $M$  を求めよ.

(解答例)

- (1) 次数列は  $(3, 3, 3, 3)$ .
- (2) それぞれの定義に従えば隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

<sup>1</sup> 点  $v$  において辺  $e$  が「ループ」として接続している場合, このグラフの接続行列の第  $ve$  成分を, 教科書によっては 1 と定義しているものと 2 と定義している 2 通りがあるようであるが, この講義ではこの場合 1 として接続行列を定義する. 従って, 接続行列の成分は必ず 0 か 1 である.

接続行列  $M$  は

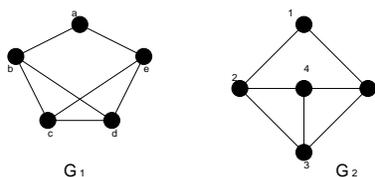
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる.

**例題 3**

以下の問題に答えよ.

1. 図の  $G_1$  と  $G_2$  の間の同形写像  $\phi, \theta$  を見つけよ.



また,  $G_1$  の任意の辺  $e$  及び点  $u, v$  に対して

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを 2,3 の  $\{e, u, v\}$  の組に対して確かめよ.

2. 図 16 のグラフ  $G_2$  の部分グラフを 2 つ挙げよ.
3. 次の隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  で与えられるグラフをそれぞれ描け.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答例)

1. 求める同形写像  $\theta, \phi$  はグラフ  $G_1, G_2$  の各点に対して

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$$

各辺に対して

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}$$

$$\phi(\overline{de}) = \overline{45}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{ea}) = \overline{51}$$

従って、この写像の下で

$$\begin{aligned} \psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = \theta(a)\theta(b) \\ \psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = \theta(b)\theta(c) \\ \psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = \theta(c)\theta(d) \\ \psi_{G_1}(\overline{de}) = de &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{de})) = \psi_{G_2}(\overline{45}) = \theta(d)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{ea}) = ea &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ea})) = \psi_{G_2}(\overline{51}) = \theta(e)\theta(a) \\ \psi_{G_1}(\overline{ce}) = ce &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ce})) = \psi_{G_2}(\overline{35}) = \theta(c)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = \theta(b)\theta(d) \end{aligned}$$

が成り立つ。

2. 例えば図 20 のようなグラフが  $G_2$  の部分グラフである。

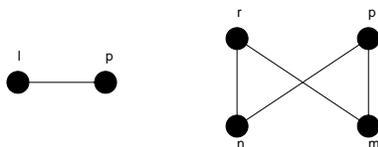


図 20: グラフ  $G_2$  の部分グラフの例.

3. まず、隣接行列  $A$  について考える。この隣接行列のサイズから、求めるグラフの点の数は  $n = 5$  であり、隣接行列は必ず対称行列であることに注意しよう。また、この行列  $A$  の対角成分は全てゼロであることから、このグラフにはループが含まれないことが直ちにわかる。以上に注意しながら隣接行列の定義に従ってグラフを描くと図 21 のようになる。もちろん、この図と全く同じでなくても、同形なグラ

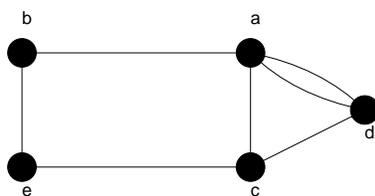


図 21: 隣接行列が  $A$  で与えられるグラフ。ここで、隣接行列  $A$  の第 1 行, 2 行, ... の番号として、図の点 a, b, ... が対応していることに注意。

フならば正解である。

次は接続行列  $M$  を持つグラフに関してであるが、以下の点に注意しながら考察するとグラフが描きやすい。

- 隣接行列の各列には必ず 2 個の 1 があり、対応する行の番号が付された点同士が結ばれ、それにより出来る上にはその列の番号が割り当てられる。
- 第  $i$  行, 第  $j$  行に 1 が立っている列が  $l$  本ある場合、点  $i, j$  間には  $l$  重の多重辺が存在する。

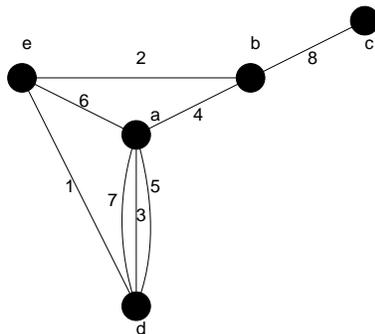


図 22: 隣接行列が  $M$  で与えられるグラフ. ここで, 接続行列  $M$  の第 1 列, 2 列 … の番号として, 図の a,b, … が対応していることに注意.

以上に注意しながらグラフを描くと図 22 のようになる.

**演習問題 2**

以下の問いに答えよ.

- (1) 5 個の点と 8 本の辺をもつ次のようなグラフを描け.
  - (i) 単純グラフ
  - (ii) ループがない, 単純でないグラフ
  - (iii) 多重辺がない, 単純でないグラフ
- (2) 図 23 に与えられるグラフの隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  を求めよ.

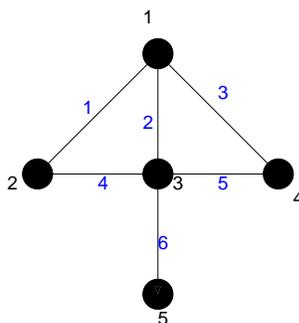


図 23: ここで考えるグラフ.

- (3) 6 点からなるグラフで, 各点の次数列が  $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$  であるものを描け. この次数をもつ単純グラフは存在するか?

(注)

今回のレポート切はやや早いですが, 4 月 25 日 (月) のグラフ理論の講義開始時までとします.