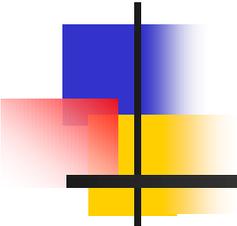




| | |
|------------------|--|
| Title | 2005年度 グラフ理論講義ノート |
| Author(s) | 井上, 純一; Inoue, Jun-ichi |
| Description | http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ |
| Issue Date | 2005-11-18T08:53:31Z |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/771 |
| Rights(URL) | https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/ |
| Type | learning object |
| File Information | GraphTheory05_slide11.pdf, 第11回講義スライド |





グラフ理論 #11

第11回講義 7月4日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

有向グラフ：定義 性質 #1

弧集合：

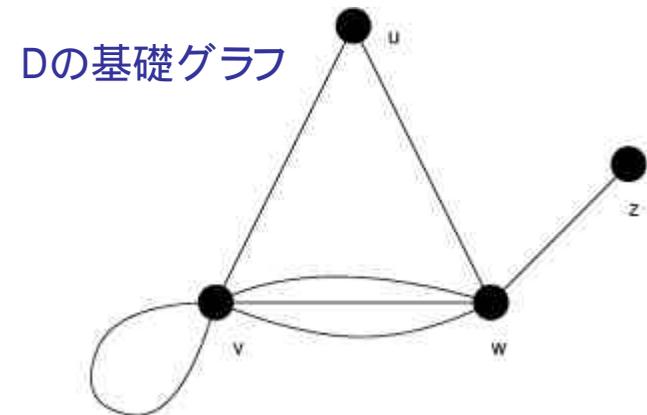
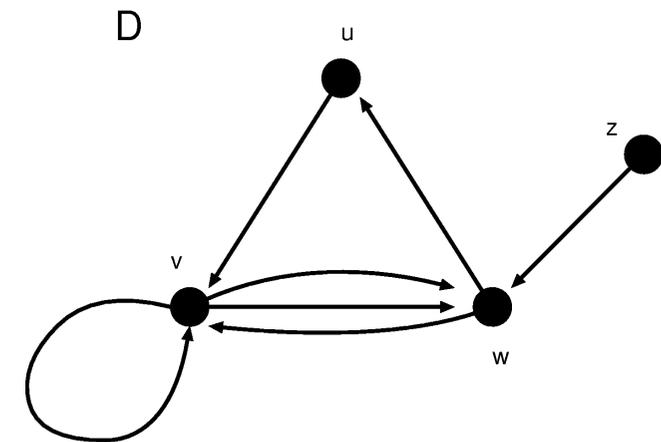
$A(D)$ ：点集合 $V(D)$ の元の順序対からなる有限族

$$A(D) = \{uw, vv, vw, vw, wv, wu, zw\}$$

有向グラフ： $D: V(D)$ と $A(D)$ からなるグラフ

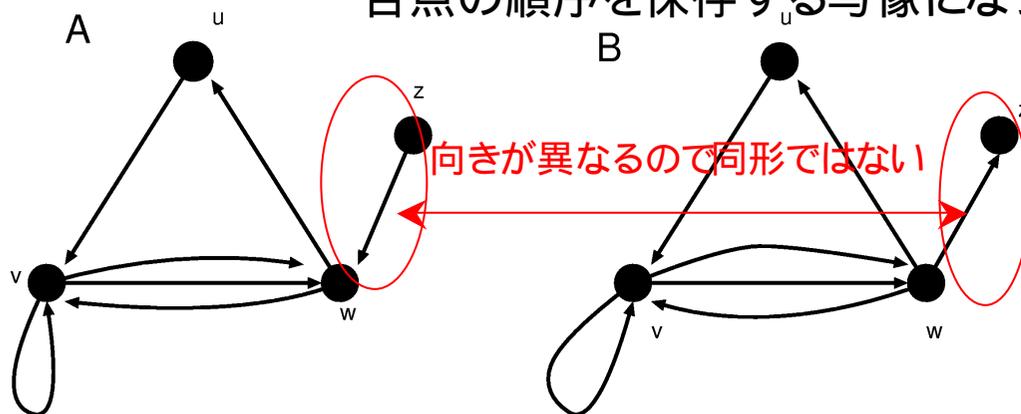
D の基礎グラフ：有向グラフ D の矢印を取り除いたグラフ

単純有向グラフ： D の弧が全て異なり、ループの無いグラフ



有向グラフ：定義・性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、各点の順序を保存する写像になっているとき



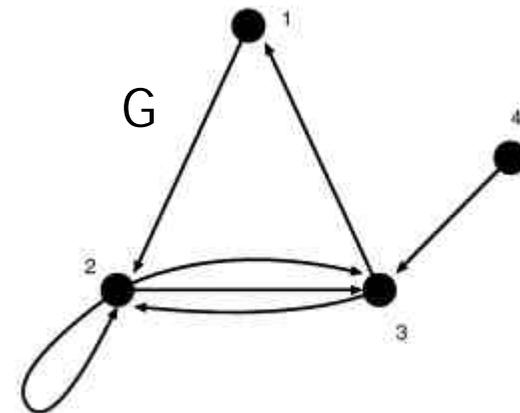
有向グラフの隣接行列：

$A = (a_{ij})$ ：要素 a_{ij} が v_i から v_j への「弧」の本数を表す。

点数 n のグラフに対して $n \times n$ の行列

グラフGの隣接行列
対称ではない

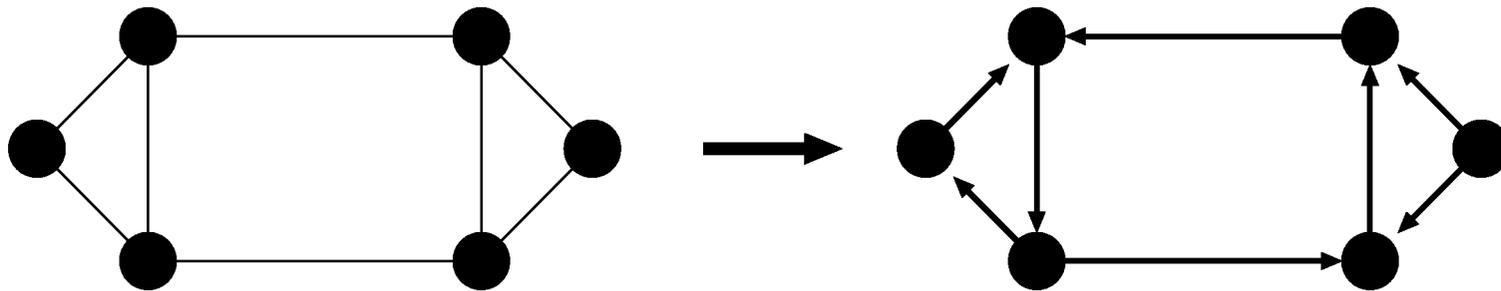
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



強連結と向き付け可能性

強連結 : 任意の2点 v, w の間に点 v から点 w への道がある

向き付け可能 : グラフ G の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき



向き付け可能なグラフの一例

定理22・1とその証明

定理22・1

連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は、グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

(証明)

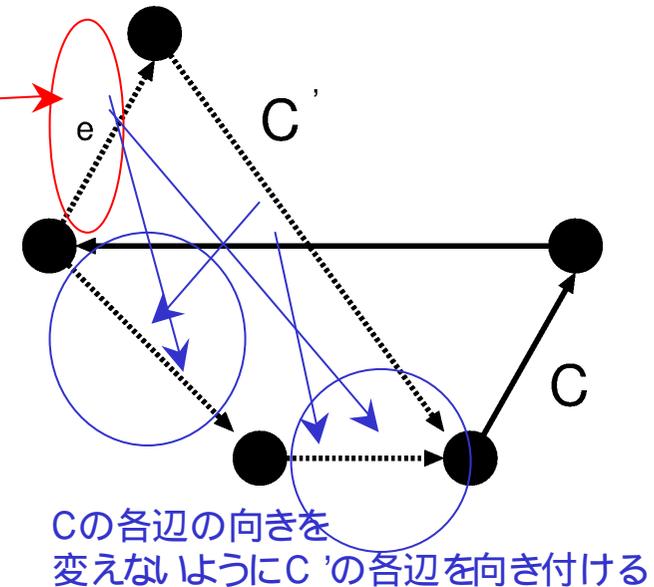
必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、Cの書く辺に隣接している辺eを選ぶ

「グラフGの各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」ので、辺eはC以外の閉路C'に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、C'の各辺を向き付ける

この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、グラフ全体を向き付けたのちに見えるグラフは強連結である。



オイラー有向グラフ

オイラー有向グラフ: 全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数 $\text{indeg}(v)$: vw の形をした有向グラフ D の弧数

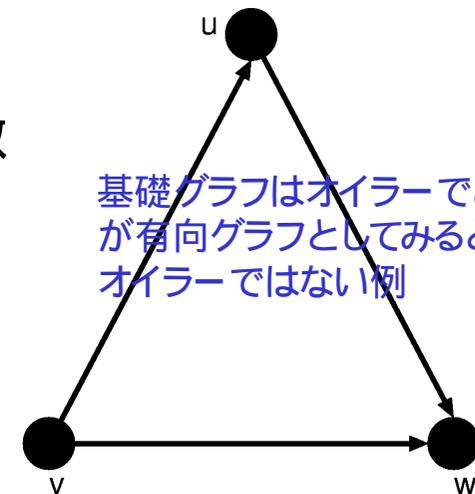
出次数 $\text{outdeg}(v)$: wv の形をした有向グラフ D の弧数

握手有向補題

有向きグラフ D の全点について入次数の合計と出次数の合計は等しい

定理23.1

連結有向グラフ D がオイラーであるための必要十分条件は、 D の各点で $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$ が成立することである。



基礎グラフはオイラーであるが有向グラフとしてみるとオイラーではない例

ハミルトン有向グラフ

ハミルトン有向グラフ: 全ての点を含む閉路がある有向グラフ

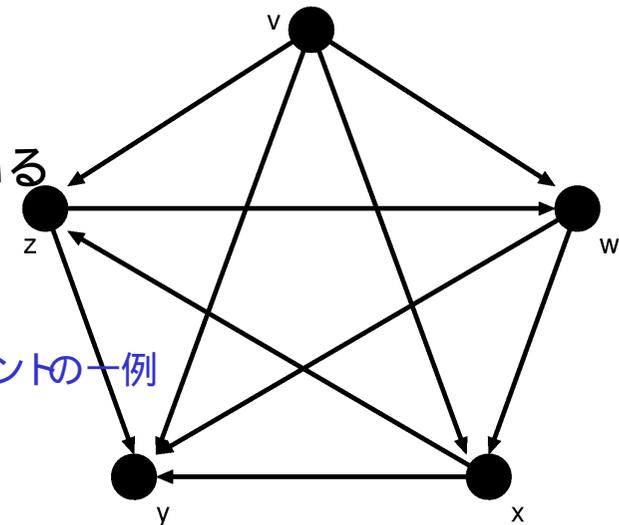
半ハミルトン有向グラフ: 全ての点を通る道がある有向グラフ

定理23.2

D は強連結有向グラフであり、点が n 個あるとする。各点 v に対し $\text{out deg}(v) \geq n/2$ かつ $\text{indeg}(v) \geq n/2$ ならば D はハミルトン有向グラフである。

トーナメント: 任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれている有向グラフ

トーナメントの一例



定理23 3

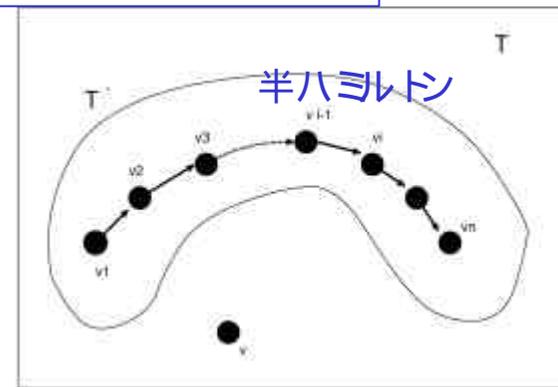
定理23 3

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

((i)の証明)

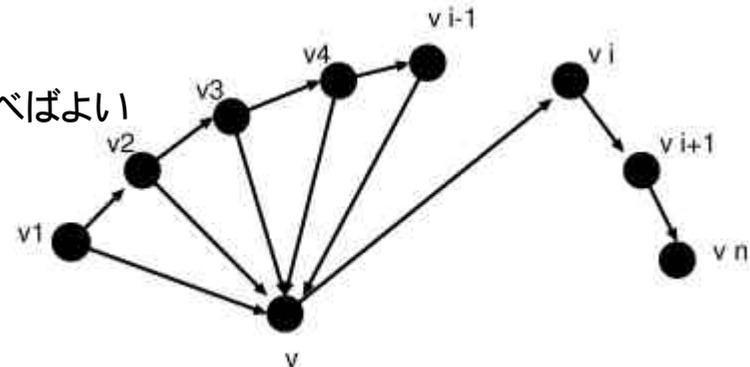
点 n 個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。
 図の T' には n 個の点があるので半ハミルトンである。

これに点 v を加える状況 (T) を考える



- (1) $v \rightarrow v_1$ が T の弧ならば $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ が所望の道である。

- (2) $v_1 v$ が T の弧でなく $v_1 v$ が T の弧ならば、図のように点 v_i を選べばよい



- (3) v_i の形をした弧が T に無ければ

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$ が所望の道である。