グラフ理論　#4

第4回講義　5月9日

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

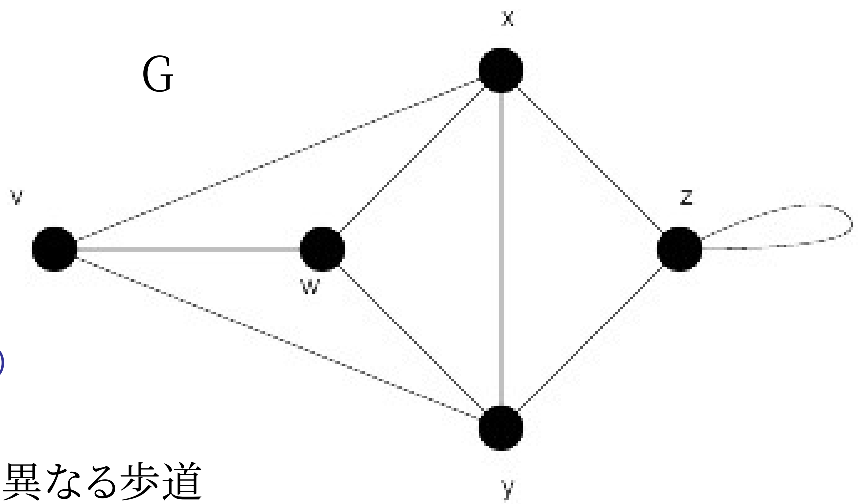
歩道 ･小道 ･道 ･閉路

歩道： $v_i(i=1,..,m)\in G$ に対し、

$v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$ を歩道という

始点　　終点

※重複する辺があってもよい）



小道： 全ての辺 $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$ が異なる歩道

道： 点 $v_0, v_1, \ldots, v_m$ が全て異なる歩道

閉路： 少なくとも1本辺を持つ閉じた道

例題7　#1　復習である内容を含む)

連結単純グラフ$G:\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, m本の辺, t個の三角形

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots.\ \ldots.\ \ldots. \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

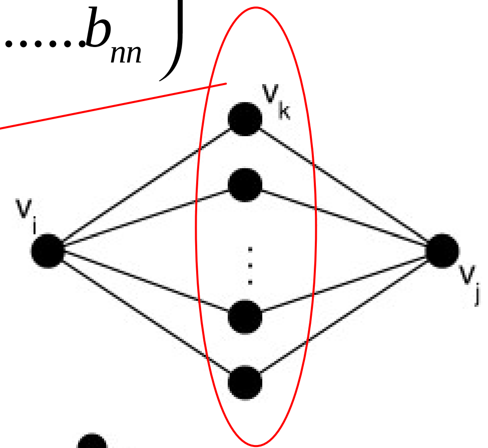
と置くと、この2乗は

$$A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots.\ \ldots.\ \ldots. \\ b_{n1} \ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

第 ij 要素：

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

点vi から点vkを経由
してvjに至る
長さ2の歩道の数

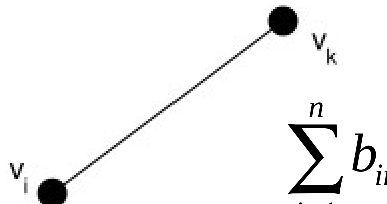


経由点vkに関する全ての
可能性について足しあげたものは
vi とvj間の歩道の総数に等しい

(2)

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}$$

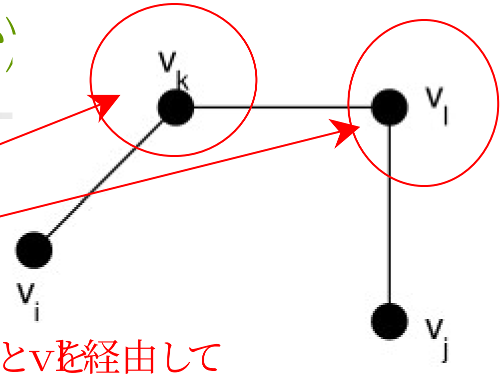
Viからvkを経由してviに戻る歩道数
Viとvkを結ぶ辺の2倍



$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ はGの総辺数の2倍

例題7 #2

復習である内容を含む)



(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11}\ldots\ldots c_{1n} \\ \ldots.\ \ldots.\ \ldots \\ c_{n1}\ldots\ldots c_{nn} \end{pmatrix} = C \qquad \underline{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{lj}}$$

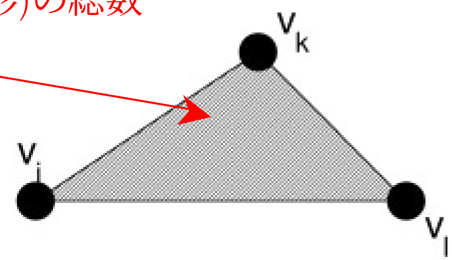
点viから点vkとvlを経由して
点vjへ至る辺の本数

点viから点vjへ至る歩道の総数

対角要素：

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{li}$$

このような閉路（三角形)の総数



従って

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の3!=6通りからくる

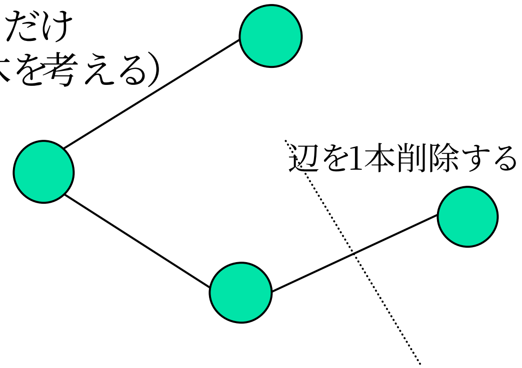
定理5・2　#1

グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり、k個の成分がある場合、Gの辺数mは

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$ を満たす

証明)

$m \ge n-k$ について　辺数の下限に関してであるから、グラフGはできるだけ少ない辺数を持つものとする(極端な場合として木を考える)



Gから辺を1本削除すると

$$k \to k+1, n \to n, m_0 \to m_0-1$$

$m_0-1 \ge n-(k+1)$　m_0-1 本の辺に関して不等式の成立を仮定

(帰納法の仮定。m0=0の場合は自明)

$$\boxed{m_0 \ge n-k}$$

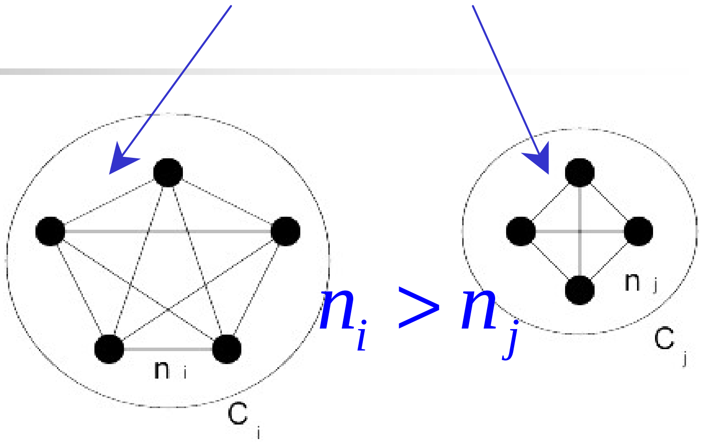
m_0 本の辺について成立⇒全ての辺数について成立

定理5・2 #2

$m \le (n-k)(n-k+1)/2$ の成立について示す

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い
完全グラフとして考える

グラフGの中の任意の2成分



$n_i > n_j$

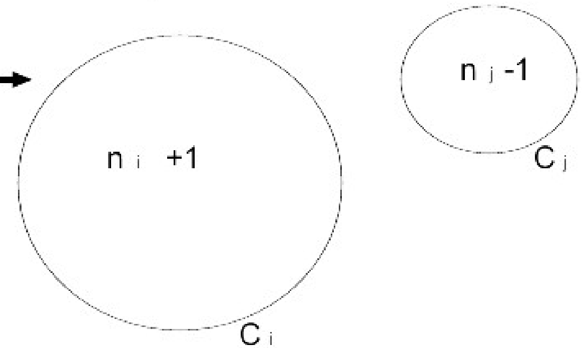
$C_i + C_j$ の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2} n_i (n_i - 1) + \frac{1}{2} n_j (n_j - 1)$$

次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$ 個の点をもつ完全グラフ



$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0$ だけ点の総数は増える

$\longrightarrow$ この操作を繰り返すとn-k+1個の完全グラフとk-1個の孤立点が得られる

$$\boxed{m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)}$$ が成立する

例題8　#1

$d(v,w)$はvからwへの最短路の長さ

$d(v,w) \geq 2$ならば, $d(v,z)+d(z,w)=d(v,w)$なる点zが存在する

(証明のアウトライン)

図において

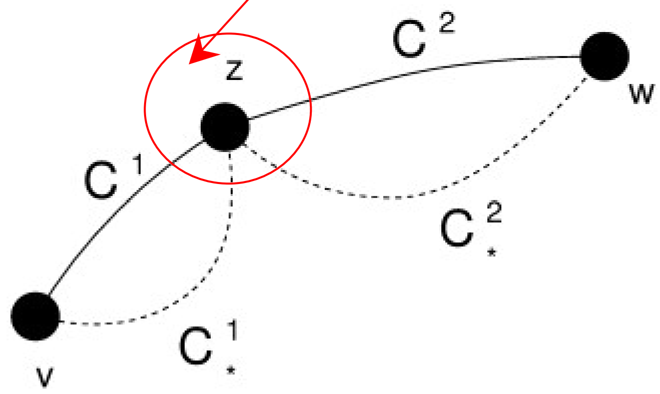
C^1　は点vと点zを結ぶ最短路である

もし、これ以外に最短路　C_*^1　があるとすれば経路

$C_*^1 + C^2$　がvとwを結ぶ最短路となり仮定に反する

C^2　に関しても同様の議論ができる

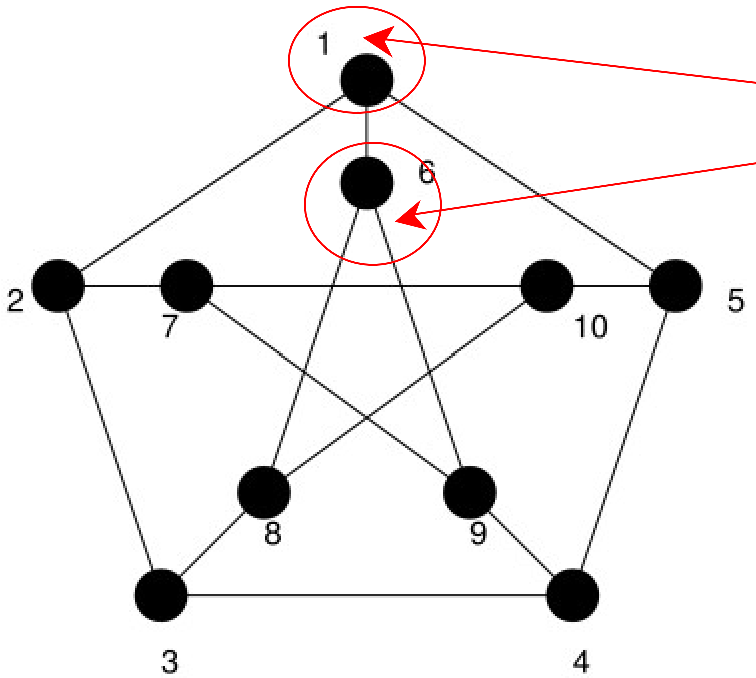
点vと点w間の最短路C上の任意の点



考えるグラフは連結であるから、いつでもC上にzをとることができる

例題8　#2

ピータースン・グラフにおいて、任意の2点v, wに対し
$d(v,w)=1$ **または** $d(v,w)=2$ **である**



ピーターースン・グラフの対称性から

$\boxed{v=1, v=6}$

をスタート点を選んだときの可能な経路の長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1,2)=1, d(1,3)=2, \ldots, d(1,10)=2,$$
$$d(6,1)=1, \ldots., d(6,10)=2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

非連結化集合とカットセット

非連結化集合 :

それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合

カットセット :

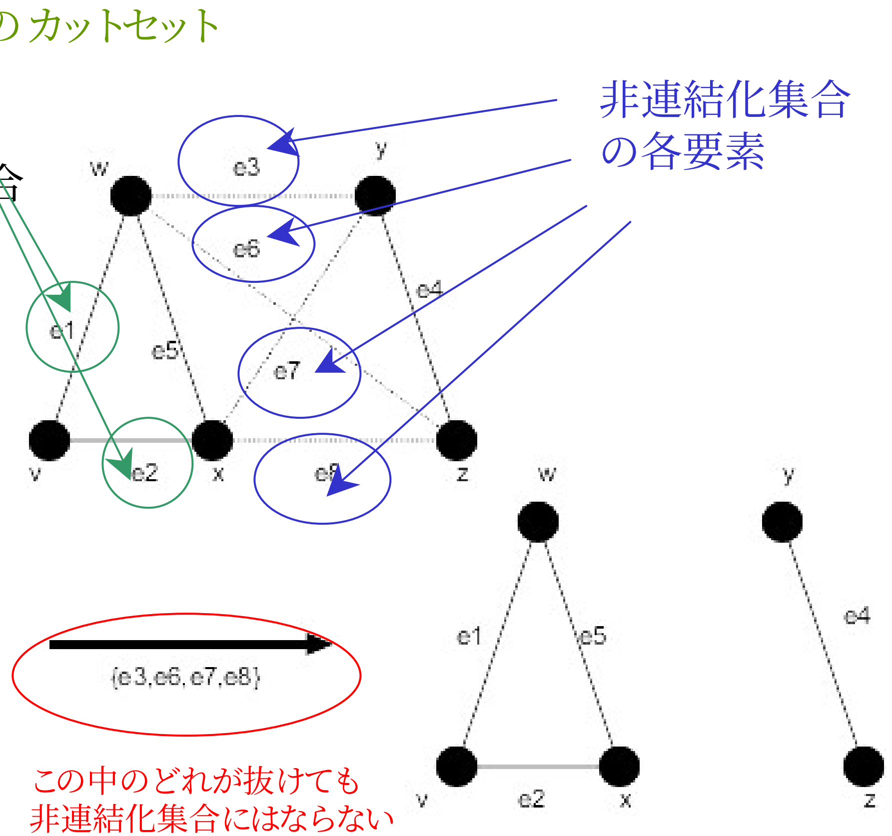
そのどのような部分集合も非連結化集合ではない、非連結化集合

辺連結度 (edge-connectivity) $l(G)$

連結グラフの最小なカットセットの大きさ

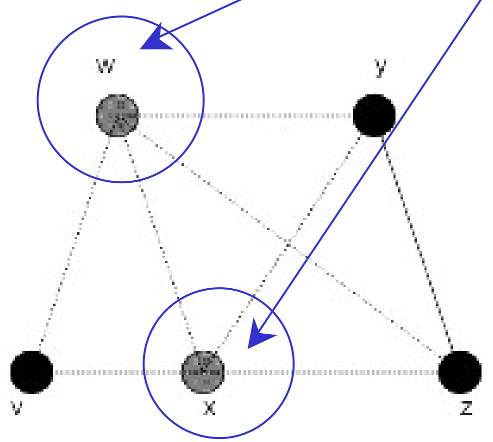
例に挙げた右図では

$$l(G) = 2$$



分離集合とカット点

分離集合の各要素



分離集合：

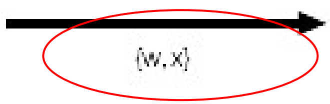
それを除去するとグラフが非連結となる点の集合

辺を除去する際にはその接続辺も除去する）

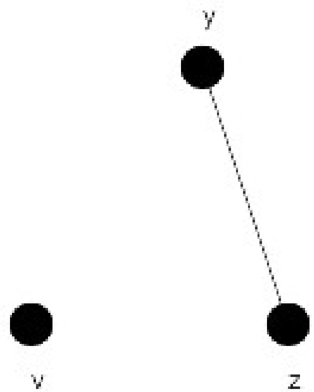
カット点：

1個の点からなる分離集合

連結度： グラフの最小な分離集合の大きさ



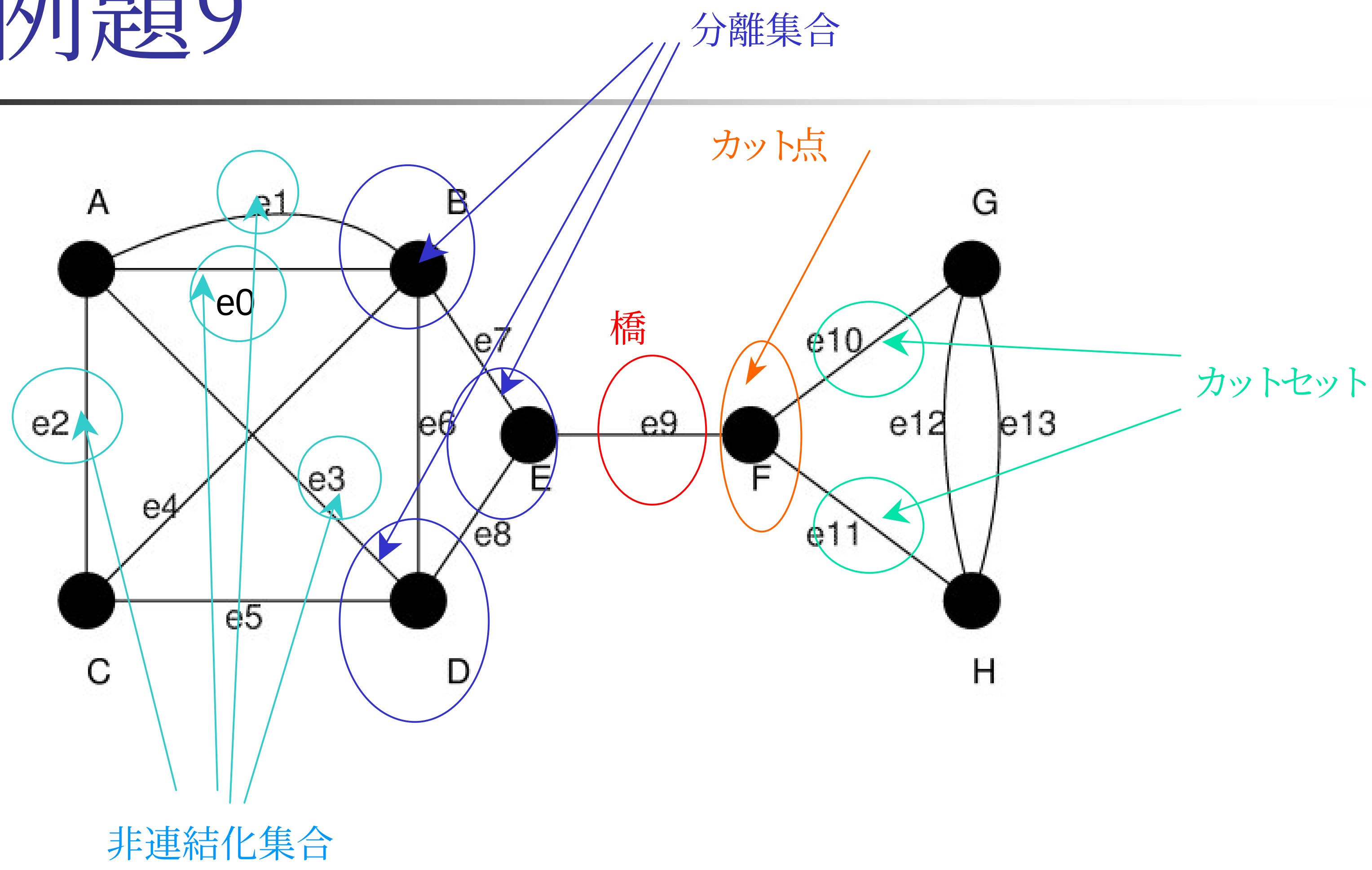
分離集合



図の例では $k(G) = 2$

$k(G) \geq k$ のときグラフGはk連結であるという

例題9



分離集合
カット点
A
e1
B
G
e0
e7
橋
e10
カットセット
e2
e6
e9
e12
e13
e3
E
F
e4
e8
e11
e5
C
D
H
非連結化集合