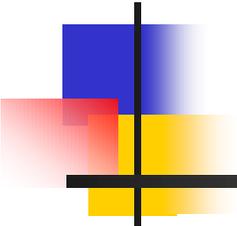




HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/771
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory05_slide8.pdf, 第8回講義スライド





グラフ理論 #8

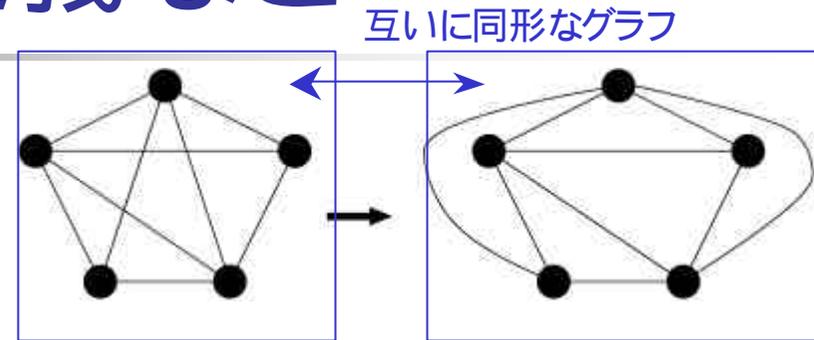
第8回講義 6月13日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平面グラフ：定義など

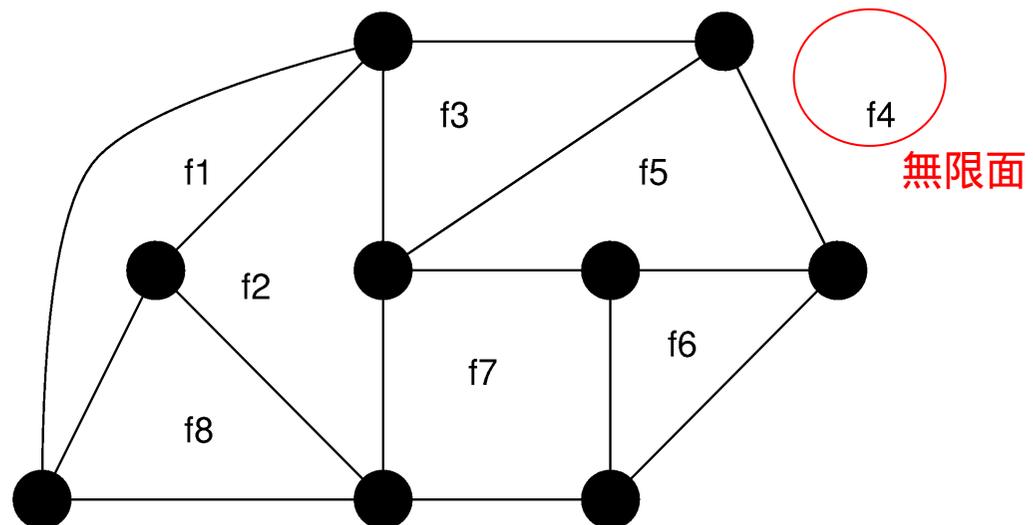
平面グラフ：どの2つの辺も、それが隣接する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ



平面描写可能

面：辺によって分割される領域

無限面：非有限な面



オイラーの公式

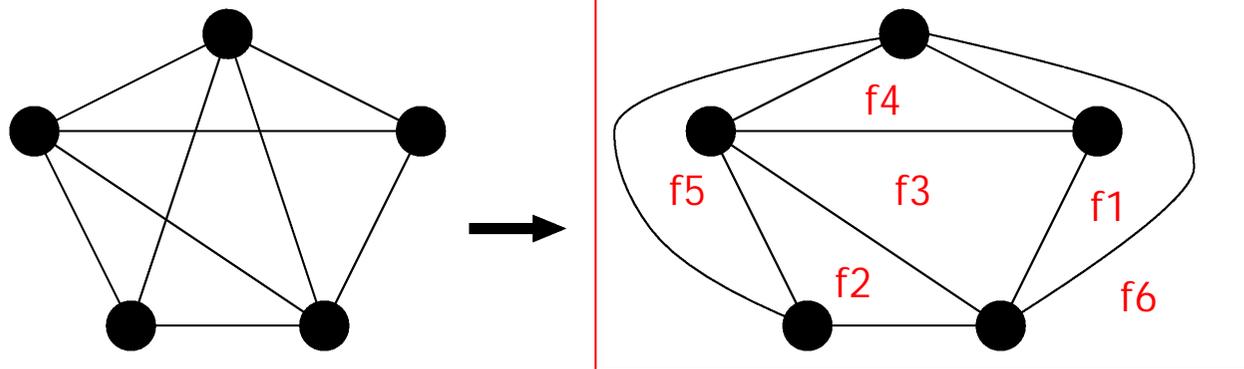
グラフ G を連結な平面グラフとすると、次の公式が成り立つ

$$n - m + f = 2$$

n : 点数、 m : 辺数、 f : 面数

オイラーの公式

例)



$$n = 5, f = 6, m = 9 \text{ より}$$

$$n - m + f = 5 - 9 + 6 = 2$$

と成立するので平面描写
可能である

オイラーの公式の証明 #1

辺数 m に関する数学的帰納法により証明する

$$m=0: n=1, f=1 \text{ (無限面)}$$

$$\therefore n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2 \text{ で成立}$$

$m=0$ の場合

● $n=1$

$f=1$ (無限面)

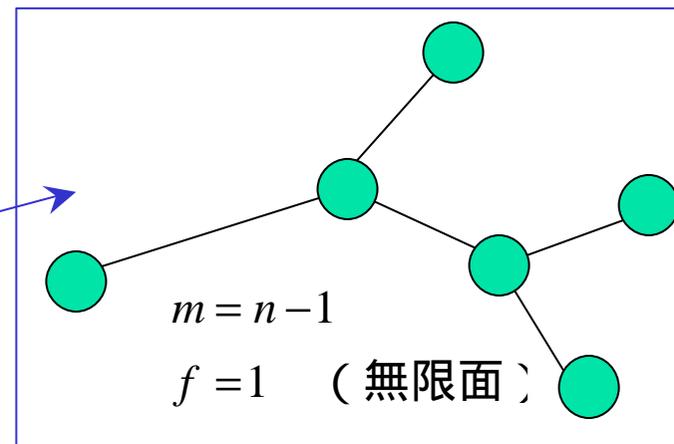
$m-1$ 本以下の辺をもつ全てのグラフ G に対して公式が成立する」と仮定する

(注)

G が木の場合には特別な事情がある

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

(任意の m に対して常に成立)



以下の議論では木を除く一般の連結グラフ G について考える

オイラーの公式の証明 #2

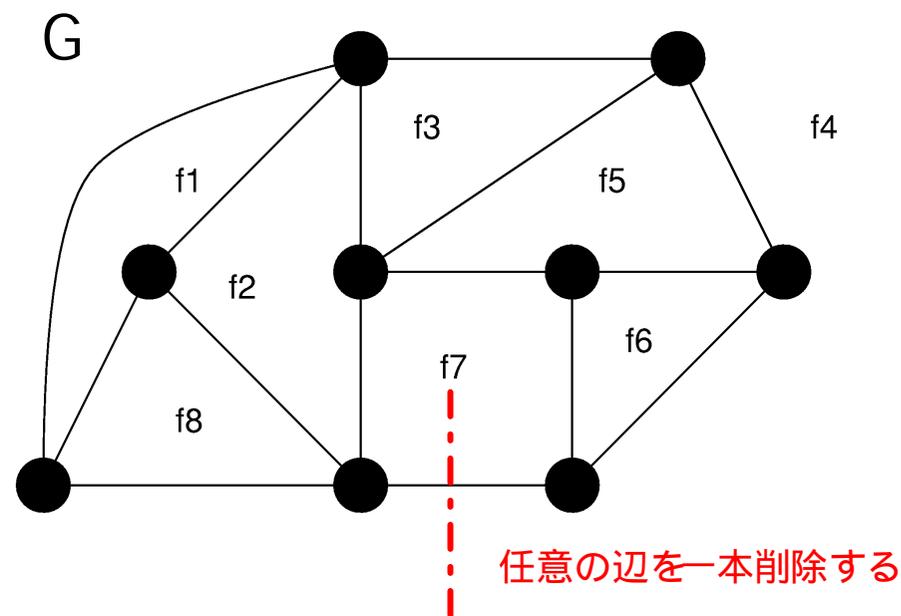
グラフ G の任意の辺を一本削除すると

$$\begin{array}{l} n \Rightarrow n \\ m \Rightarrow m-1 \\ f \Rightarrow f-1 \end{array}$$

仮定により、このセットに対してオイラーの公式が成立すべきである

$$n - (m-1) + f - 1 = 2$$

$$\therefore n - m + f = 2$$



任意の変数に対してオイラーの公式は成立

証明終わり

内周を用いたオイラー公式の書き換え

オイラーの公式を面数を含まない形に書き換える

内周 k : グラフ G の最短の閉路長

$d(F)$: グラフ G の面 F の次数の和

$$k \leq d(F)$$

$$\therefore kf \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m$$

握手補題より

グラフ G の面集合

オイラーの公式: $f = 2 + m - n$ を代入して m に関してまとめると

$$m \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$$

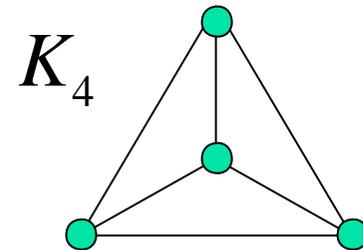
グラフの平面性の判別式
(成立すれば平面描写可能)

判別式の適用例：例題18

(1) 4次の完全グラフ

$$n = 4, m = {}_4C_2 = 6, k = 3$$

$$\therefore 6 \leq \frac{3 \cdot (4 - 2)}{3 - 2} = 6 \quad \text{不等式成立。平面描写可能}$$

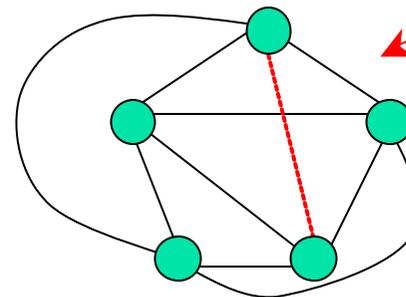
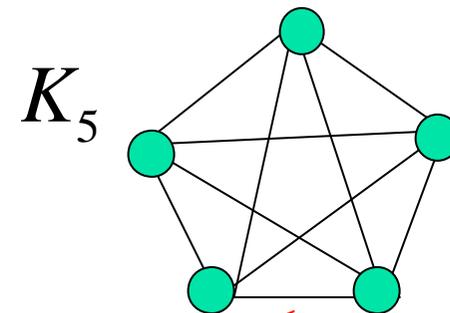


(2) 5次の完全グラフ

$$n = 5, m = {}_5C_2 = 10, k = 3$$

$$\therefore 10 \leq \frac{3 \cdot (5 - 2)}{3 - 2} = 9$$

不等式不成立。平面描写不可能



どのような同形写像
で変換しても平面描写
は不可能

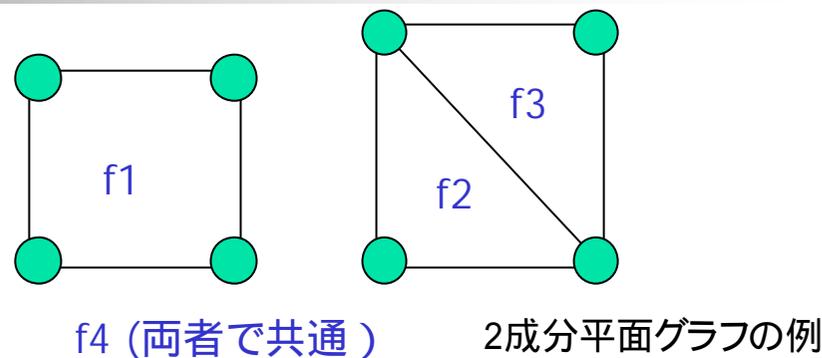
複数成分があるグラフに対する オイラー公式とその証明

複数成分をもつグラフに対するオイラーの公式

平面グラフ G の成分が k の場合には

$$n - m + f = k + 1$$

が成り立つ



(証明)

無限面が $k - 1$ 個だけ余分にカウントされるので

$f \rightarrow f - (k - 1)$ とすると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2$$

$$\therefore n - m + f = k + 1$$

証明終わり

平面グラフの辺数の上限

単純連結平面グラフ G が $n(\geq 3)$ 個の点と m 本の辺をもつとき

$$m \leq 3n - 6$$

が成立し、三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4$$

が成り立つ

(証明)

G に含まれる最小面は3点からなる三角形なので

$$3 \leq d(F)$$

つまり、 $3f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 3n - 6$

オイラー公式: $f = 2 - n + m$ を代入

また、 G に三角形がなければ、最小面は四角形なので

$$4 \leq d(F)$$

つまり、 $4f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 2n - 4$

証明終わり

交差数と厚さ

具体例は講義ノート
例題19を参照

交差数 : グラフ G を平面描写した際に生じる辺の最小交差の数

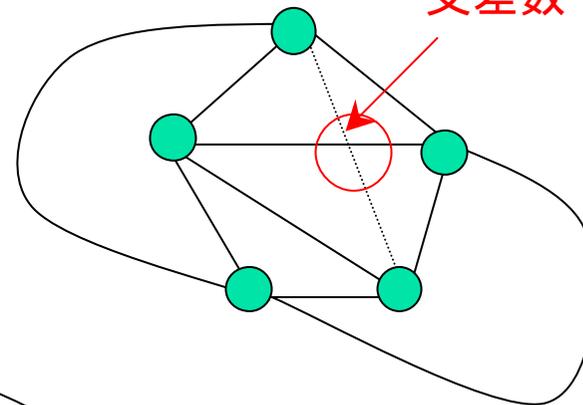
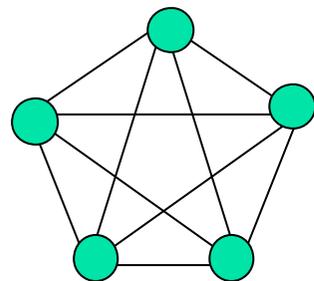
$cr(G)$

厚さ : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ G を作る際に必要な平面グラフの数

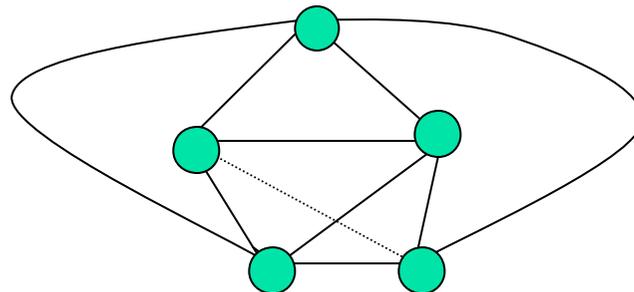
$t(G)$

(例)

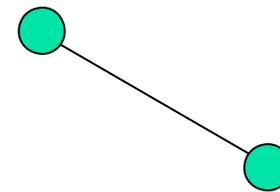
K_5



交差数 1, $cr(K_5) = 1$



+



厚さ
 $t(K_5) = 2$

単純グラフの厚さの下限

単純グラフ G に $n(\geq 3)$ 個の点、 m 本の辺があるとき、 G の厚さは

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

を満たす

(証明)

$$\begin{aligned} t(G) &\geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \end{aligned}$$

この関係式の証明は講義ノートを参照のこと

さらに恒等式: $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{a+b-1}{b} \right\rceil$ で $a = m, b = 3n-6$ とすると

$$t(G) = \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

(証明終わり)