グラフ理論　#9

第9回講義　6月20日

情報科学研究科　　井上純一

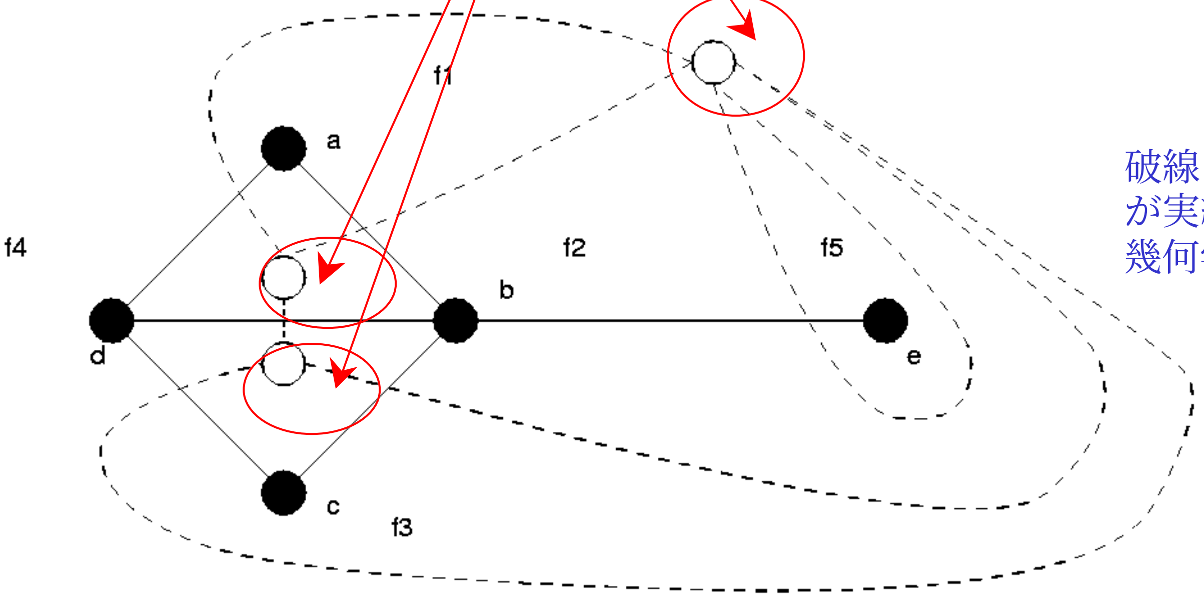
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

幾何学的双対グラフ

幾何学的双対グラフの作り方

(1)グラフGの各面 f の内側の点 v^* を選ぶ⇒ **双対グラフG^*の点となる**

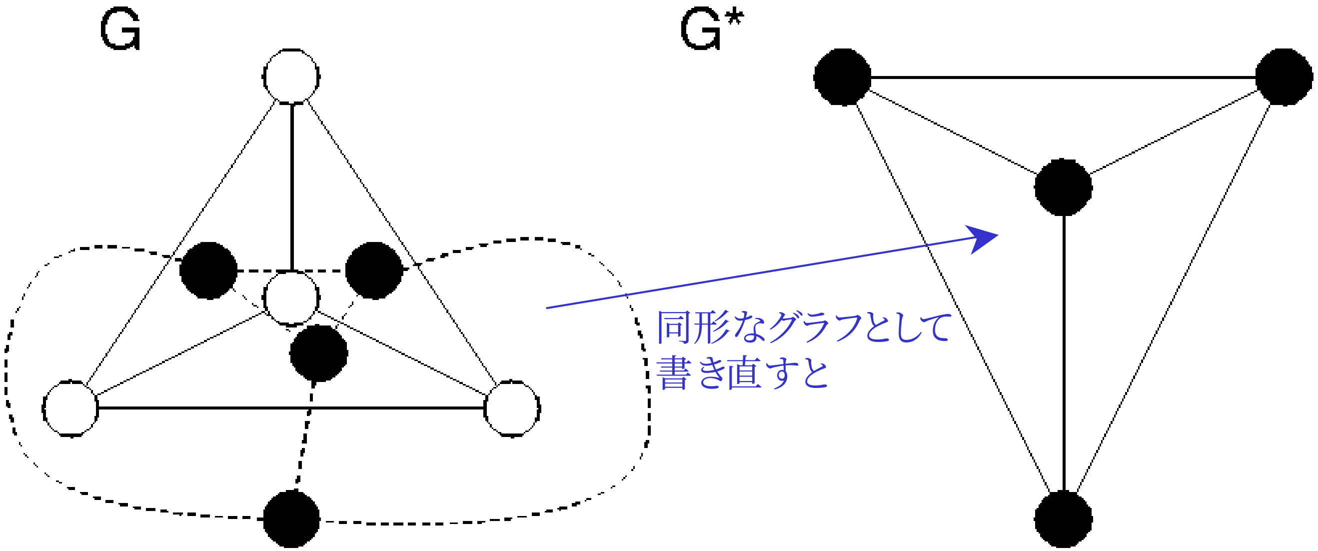
(2)グラフGの各辺 e に対応させて、e に交差する線 e^* を描いて、
eに接する2つの面fの点 v^* を結ぶようにする⇒ **双対グラフG^*の辺となる**



破線と白丸からなるグラフ
が実線と黒丸からなるグラフの
幾何学的双対グラフになっている

幾何学的双対グラフの例

完全グラフK_4の幾何学的双対グラフは完全グラフK_4である



補題15 ·1とその証明

平面グラフGには n 個の点、m 本の点、f 個の面がある。
このとき幾何学的双対グラフG^*には n^* 個の点、m^*本の辺、f^*個の面があるならば

$$n^* = f,\ m^* = m,\ f^* = n$$

が成り立つ

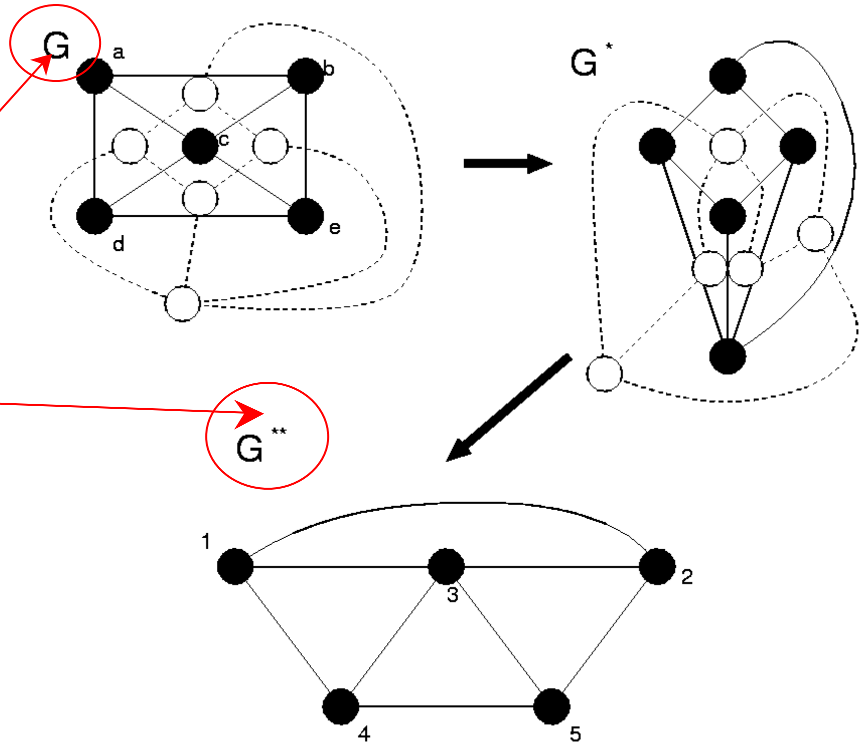
証明）

双対グラフの作り方から、$n^* = f, m^* = m$ は明らか。
オイラーの公式より
$n^* - m^* + f^* = 2$、$f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$
従って、$f^* = n$

定理15・2

グラフGが連結平面ならば、G^{**}はグラフGと同形である

例）



$G \cong G^{**}$

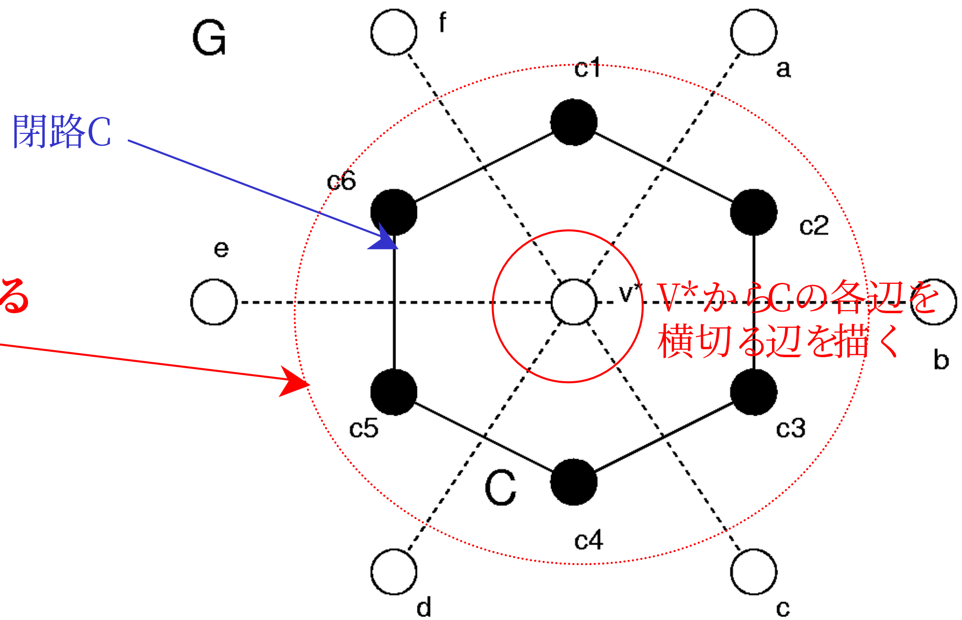
同形写像が存在する
ことは講義ノート
例題26.1参照

定理15・3

平面グラフGの幾何学的双対をG^*とする。グラフGの各辺のある集合が
グラフGにおいて閉路であるための必要十分条件は、それに対応する
双対グラフG^*の辺集合が、グラフG^*においてカットセットになっていることである

$\{\overline{v^* a}, \overline{v^* b}, \overline{v^* c}, \overline{v^* d}, \overline{v^* e}, \overline{v^* f}\}$

はG*においてカットセットになっている



系15・4

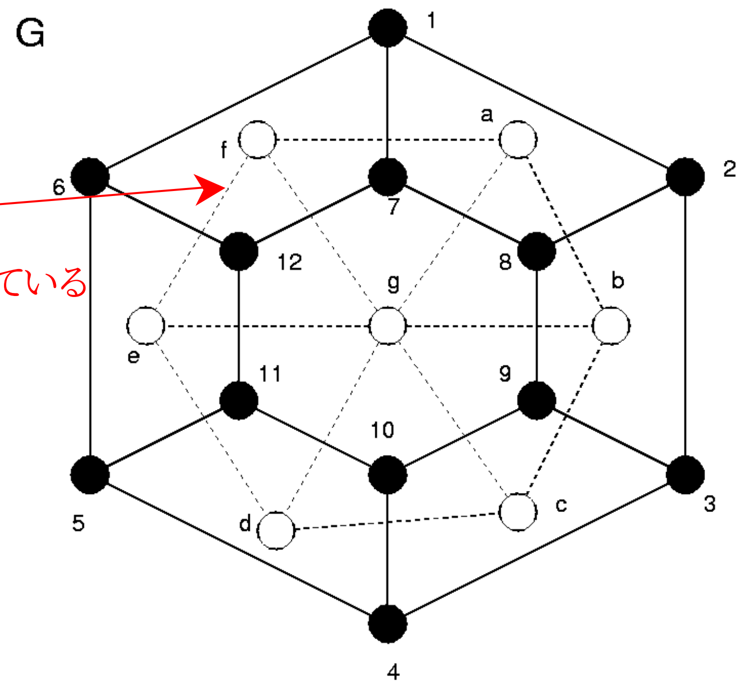
グラフGのある辺集合がGのカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合がG^*の閉路となることである

Gのカットセット:$\{\overline{17},\overline{28},\overline{39},\overline{410},\overline{511},\overline{612}\}$

対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合

$\{\overline{fa},\overline{ab},\overline{bc},\overline{cd},\overline{de},\overline{ef}\}$

G*においては閉路となっている



証明のアウトライン)

定理15・3をG→G*、G*→G**として読みかえると、
定理15・2からG**とGは同形であるから題意が言える。

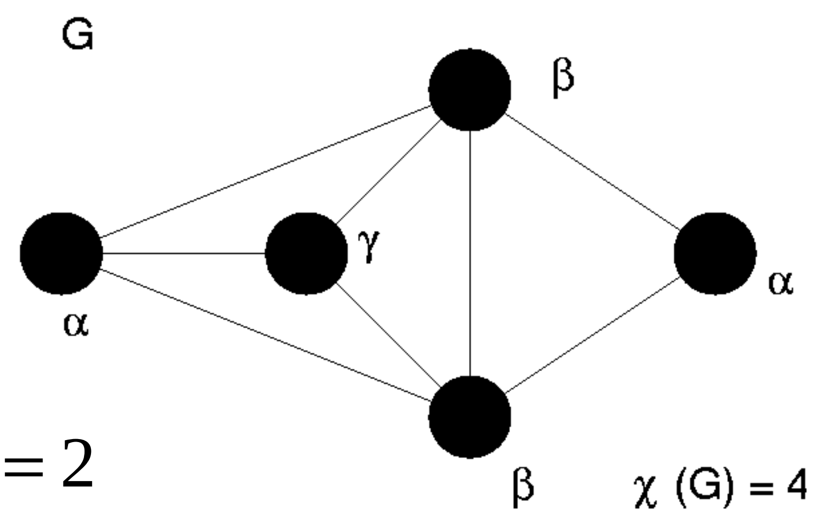
グラフの彩色：点彩色

k-彩色可能：k個の色の一つをGの各点に割り当て、隣接するどの2つの点も同じ色になるようにできること

k-彩色的：グラフGがk彩色可能であるが、(k-1)彩色不可能であるとき
⇒グラフGの彩色数はkである

$$\boxed{c(G)=k}$$

「彩色数はkである」、というのを
このように表記する



いくつかの代表的グラフに対する例　：

$$c(K_n)=n,\ c(N_n)=1,\ c(K_{r,s})=2$$

定理17・1

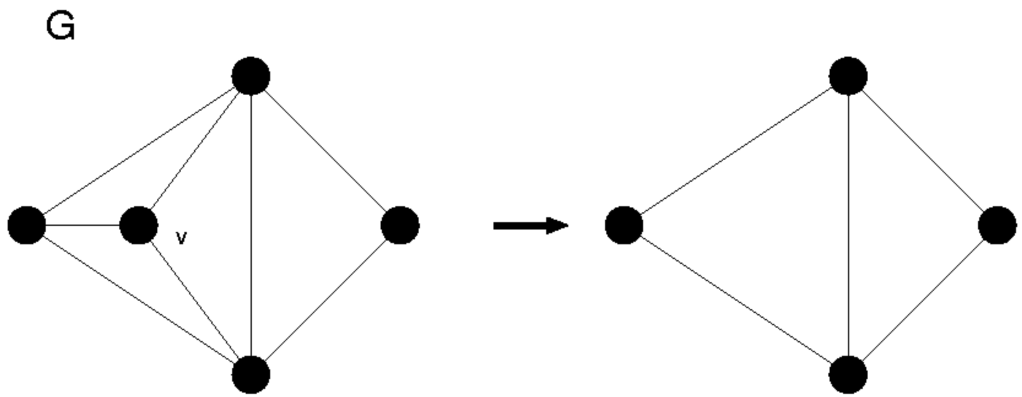
単純グラフGの最大次数がΔならば、グラフGは$(\Delta+1)$彩色可能である

証明)

点数に関する帰納法で示す。

任意の点vとその接続辺を除去してできる$n-1$個の点、最大次数Δのグラフは$(\Delta+1)$彩色可能であると仮定する

vを元に戻し、vに隣接するΔ個以下の点と異なる色でvを彩色すれば、n個の点からなるグラフGの$(\Delta+1)$彩色が得られる



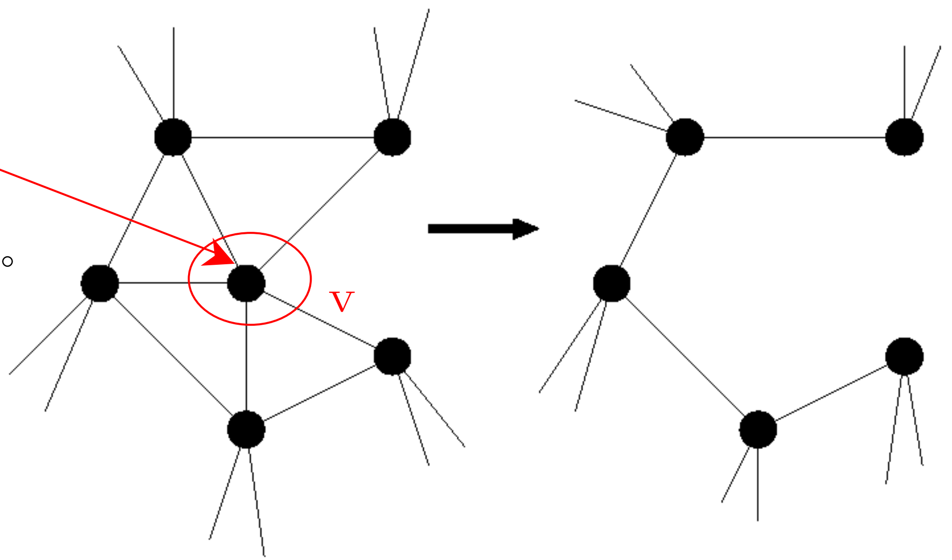
定理17・3

全ての単純平面グラフは6彩色可能である

証明)

「n-1個の点をもつ全ての単純平面グラフは6彩色可能である」と仮定する

定理13・6より、「全ての単純平面グラフには次数5以下の点がある」



点vを除去すると、n-1個の点からなるグラフができあがるので、仮定より、これは6彩色可能。

点vを元に戻し、vに接続する5個以下の点以外の色でvを彩色すれば、n点からなるグラフの6彩色が得られる

定理17・4

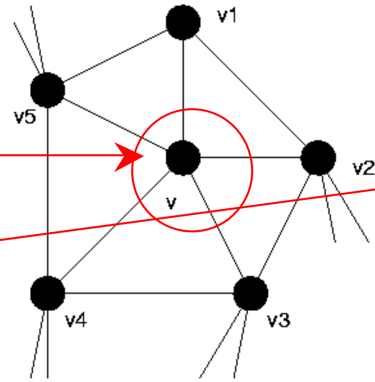
全ての単純平面グラフは5彩色可能である

証明)

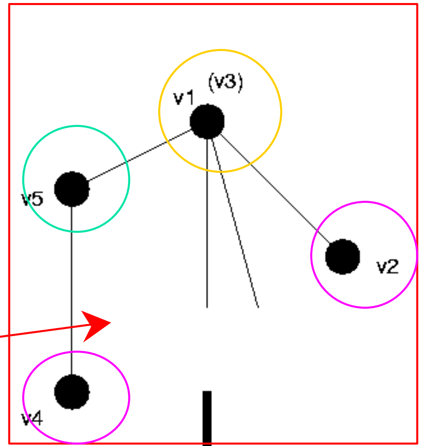
「n-1個以下の点をもつ全ての単純平面グラフは
5彩色可能である」と仮定する

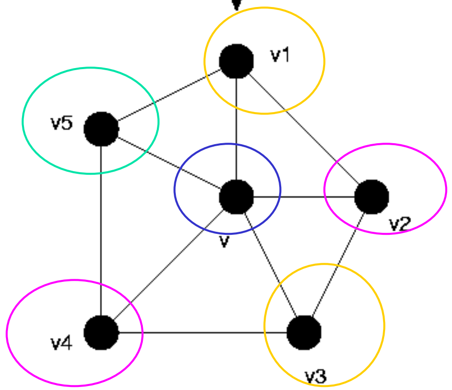
定理13・6より、Gには次数5以下の
点がある

2本の辺vv1、vv3を縮約する



仮定より、5彩色可能





点vに当てられた色でv1、v3を彩色し、
点vを元々割り当てられた色以外で彩色しなおせば
Gの5彩色が完成する