情報理論　#11

第11回講義　7月4日

情報科学研究科　　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

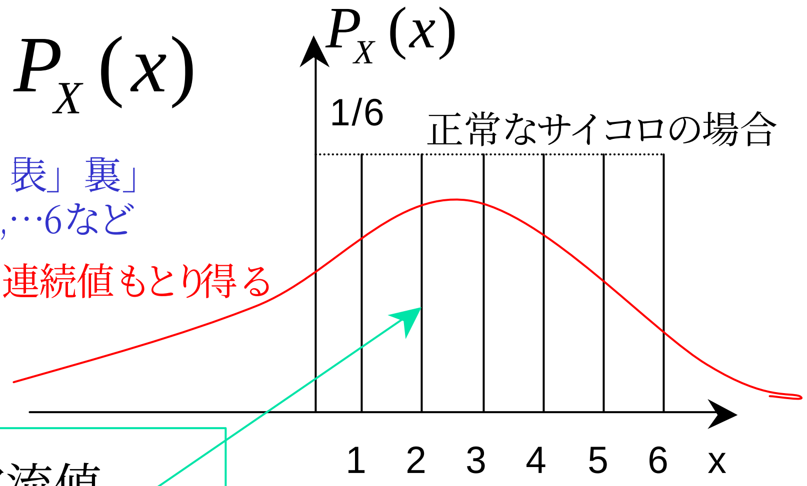
連続量の情報

今まで扱ってきたのは個々の事象に番号をつけることができ、数え挙げられる場合

$$H = -\sum_{x \in A} P_X(x) \log P_X(x)$$

コイン投げなら「表」「裏」
サイコロなら1,2,…6など

Xの値は連続値もとり得る



しかし、音声などを計測する場合には信号の電流値という「実数」「連続量」に対して確率分布が定義される必要が生じる

今回はこのような連続量に対して定義された確率分布に対し、
エントロピー、相互情報量などがどのように変更を受けるかについて詳しく見ていく

連続量のエントロピー

確率変数xの取りうる値を

$$x_i \ (i=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty),\ \Delta x \equiv x_{i+1}-x_i$$ **と定義する**

$$\boxed{P_X(x_i)\Delta x} \leftarrow$$ **確率変数が区間(x_i, x_{i+1})の範囲内の値をとる確率**

エントロピーは

$$H(X) = -\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_X(x_i)\Delta x_i \log\{P_X(x_i)\Delta x\}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta x P_X(x_i)\log P_X(x_i) - \lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Delta x P_X(x_i)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x)\log P_X(x) - \lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x$$ 発散してしまうが、通常はゼロと置く

$$\boxed{H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\log P_X(x)dx}$$ 連続量のエントロピー

エントロピーを最大化する分布

ラグランジュの未定係数法 #1

エントロピーを最大にする分布の中で、自乗平均値が s^2 で与えられるものを求める

次の（汎）関数を最大化すればよい

$$F(\boxed{P_X(x), l, b}) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x) \log P_X(x) + l\left\{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x) - 1}\right\}$$

$$+ b\left\{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P_X(x) - s^2}\right\}$$

イコールゼロが確率の規格化を与える

イコールゼロが自乗平均値が一定条件を与える

これらの変数に関する最大化条件を書き出すと

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{\boxed{\log P_X(x) + 1 + l + b x^2}\right\} = 0$$

被積分関数がゼロとなるべき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x) - 1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P_X(x) - s^2 = 0$$

$$P_X(x) = e^{-1-l-bx^2}$$

あとは未定係数 l, b を決めればよい

エントロピーを最大化する分布

ラグランジュの未定係数法 #2

規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \boxed{P_X(x)} = 1$$

$$P_X(x) = e^{-1-l-b x^2}$$

を代入

$$\boxed{e^{-1-l} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-b x^2} \right)^{-1}}$$

従って

$$P_X(x) = \frac{e^{-b x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-b x^2}}$$

これを自乗平均一定条件に代入し

$$\boxed{b = 1/2s^2}$$

具体的な計算手順は講義ノートを参照

よって求める分布は

$$\boxed{P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\, s} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}}$$

正規分布

エントロピーを最大化する分布

まとめ

自乗平均値が一定σ^2の分布$P_X(x)$の中で

エントロピー：$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx P_X(x) \log P_X(x)$**を最大化するものは**

$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$**の正規分布であり、そのときの最大値は**

$H(X)^{\max} = \frac{1}{2}\log(2\pi e \sigma^2)$**である。**

この方法に慣れるための練習 ⇒ **今週の演習問題**

連続量の相互情報量

確率変数X,Yのとりうる値を

$$x_i, y_i\,(i=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty),\ \Delta x \equiv x_{i+1}-x_i,\ \Delta y \equiv y_{i+1}-y_i \text{とすると}$$

相互情報量は

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{XY}(x_i, y_i)\Delta x\Delta y$$

同時分布の周辺化

$$I(X;Y) = H(X)+H(Y)-H(X,Y)$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_X(x_i)\Delta x \log\{P_X(x_i)\Delta x\} - \lim_{\Delta y\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_Y(y_i)\Delta y \log\{P_Y(y_i)\Delta y\}$$

同時分布の周辺化

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{XY}(x_i, y_i)\Delta x\Delta y \log\{P_{XY}(x_i, y_i)\Delta x\Delta y\}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{XY}(x_i, y_i)\Delta x\Delta y$$

$$I(X;Y) = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{XY}(x_i, y_i)\Delta x\Delta y \log\left\{\frac{P_{XY}(x_i, y_i)\cancel{\Delta x\Delta y}}{P_X(x_i)P_Y(y_i)\cancel{\Delta x\Delta y}}\right\}$$

発散は生じない

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{XY}(x,y)\log\frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)}$$

例題12を見てみよう