情報理論　#12

第12回講義　7月11日

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

フーリエ級数展開

関数$u(t)$が周期Tの周期関数の場合

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2pnit}{T}}, \quad A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)dte^{-\frac{2pnit}{T}}$$

フーリエ係数

$2p/T$: **角周波数**, $1/T$: **周波数**

$u(t)$**が実数の場合**$(A_{-n} = A^{*})$

$$cf.\ u(t) = u(0) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2u}{dt^2}\right| t^2 + \cdots$$

テーラー展開

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2pn}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2pn}{T}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos\left(\frac{2pn}{T}t\right)dt$$

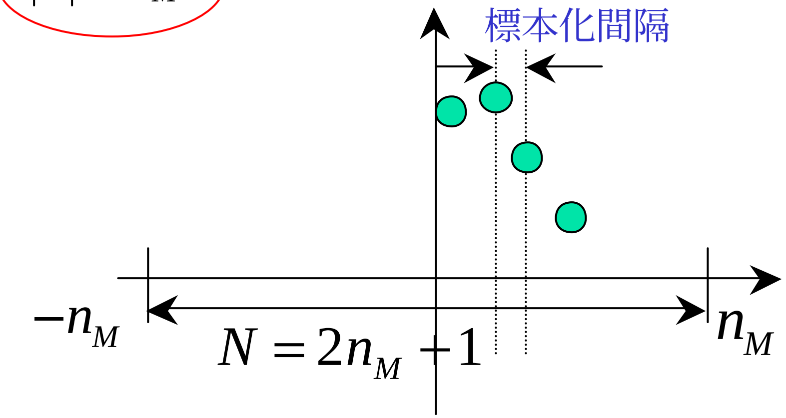
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin\left(\frac{2pn}{T}t\right)dt, \quad a_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)dt$$

適用例は**例題13**

標本化定理：周期関数に対して

高周波成分がゼロ

周期Tの周期関数$u(t)$のフーリエ係数が$|n| > n_M$でゼロとする



$$t_k = k\Delta t, u_k = u(t_k) \text{として}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k g_1(t - t_k)$$

N個の離散値 標本値)をつなげて任意の時刻tのu(t)が再現される

$$\boxed{g_1(t) = \frac{1}{N}\frac{\sin(pNt/T)}{\sin(pt/T)}}$$

標本化関数

導出は**講義ノート**参照

フーリエ変換

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi n i t}{T}}, \quad A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,dt\,e^{-\frac{2\pi n i t}{T}}$$

$\Delta f \equiv 1/T$ (**単位周波数**), $f = n\Delta f = n/T$

$U(f) = A_n/\Delta f$ (**単位周波数あたりの周波数成分**)

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta f\; U(f)\, e^{2\pi f i t} \to \int_{-\infty}^{\infty} df\,U(f)e^{2\pi f i t} = u(t)$$

このとき

$$U(f) = \frac{A_n}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta f T}\int_{-T/2}^{T/2} u_T(t)e^{-\frac{2\pi f i t}{T}}dt \to \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-2\pi f i t}dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df\,U(f)e^{2\pi f i t} \qquad U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\,u(t)e^{-2\pi f i t}$$

フーリエ逆変換 フーリエ変換

標本化定理：非周期関数に対して

$u(t)$のフーリエ変換$U(f)$が$|f|>W$でゼロ

周波数の最大値がW

$\Delta t = 1/2W$間隔で標本点$t_k = k\Delta t \ (k=0,\pm1,\pm2,..)$をとり

$u_k = u(t_k)$とすると

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k g_2(t-t_k)$$

$$g_2(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}$$