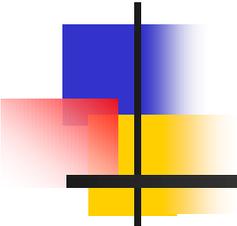




Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/772
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	InfoTheory05_slide12.pdf, 第12回講義スライド





情報理論 #12

第12回講義 7月11日

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

フーリエ級数展開

関数 $u(t)$ が周期 T の周期関数の場合

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi n i t}{T}}, \quad A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt e^{-\frac{2\pi n i t}{T}}$$

フーリエ係数

$2\pi/T$: 角周波数, $1/T$: 周波数

$u(t)$ が実数の場合 ($A_{-n} = A_n^*$)

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt, \quad a_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt$$

$$cf. u(t) = u(0) + \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots$$

テーラー展開

適用例は例題13

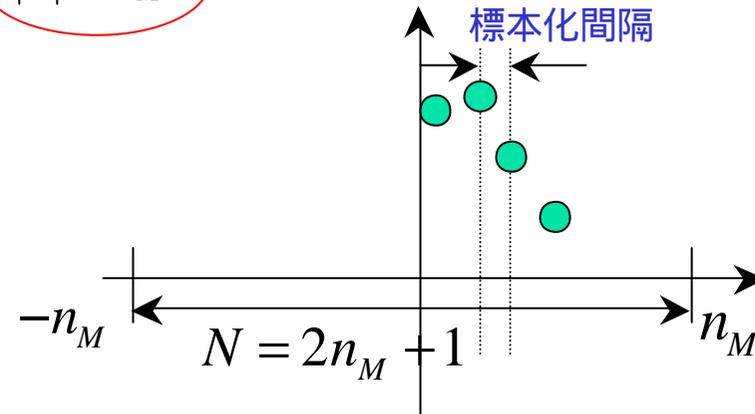
標本化定理：周期関数に対して

高周波成分がゼロ

周期 T の周期関数 $u(t)$ のフーリエ係数が $|n| > n_M$ でゼロとする

$$t_k = k\Delta t, u_k = u(t_k) \text{として}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^N u_k g_1(t - t_k)$$



N 個の離散値 (標本値)をつなげて任意の時刻 t の $u(t)$ が再現される

$$g_1(t) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\mathbf{p}Nt/T)}{\sin(\mathbf{p}t/T)}$$

標本化関数

導出は講義ノート参照

フーリエ変換

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi nit}{T}}, \quad A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt e^{-\frac{2\pi nit}{T}}$$

$$\Delta f \equiv 1/T \text{ (単位周波数)}, f = n\Delta f = n/T$$

$$U(f) = A_n / \Delta f \text{ (単位周波数あたりの周波数成分)}$$

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta f U(f) e^{2\pi fit} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) e^{2\pi fit} = u(t)$$

このとき

$$U(f) = \frac{A_n}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta f T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(t) e^{-\frac{2\pi fit}{T}} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2\pi fit} dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) e^{2\pi fit}$$

フーリエ逆変換

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt u(t) e^{-2\pi fit}$$

フーリエ変換

標本化定理：非周期関数に対して

$u(t)$ のフーリエ変換 $U(f)$ が $|f| > W$ でゼロ

周波数の最大値が W

$\Delta t = 1/2W$ 間隔で標本点 $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)をとり

$u_k = u(t_k)$ とすると

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k g_2(t - t_k)$$

$$g_2(t) = \frac{\sin(2pWt)}{2pWt}$$

