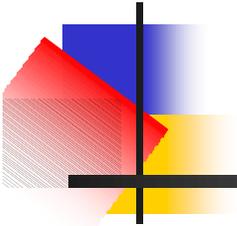




# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/772">https://hdl.handle.net/2115/772</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	InfoTheory05_slide2.pdf, 第2回講義スライド





# 情報理論 #2

第2回講義 4月25日

---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 情報量とは何か？

前回の復習

$$\text{情報量} : -\log p \quad p(E) = p \quad \text{はある事象} E \text{が起る確率}$$

抽象的概念である「情報」の量の数学的な定義

(例1) 明日の天気に関し  $p(\text{晴れ})=p(\text{雨})=1/2$  の場合、「明日は晴れ」という通報を受けた場合に得られる情報量

$$-\log p(\text{晴れ}) = \log 2 = 1(\text{ビット})$$

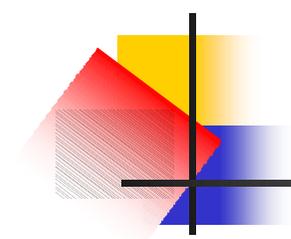
(例2) 犬が人間に噛みつ〈確率〉 $p(\text{犬} \rightarrow \text{人間})=2^{-3}$ 、人間が犬に噛みつ〈確率〉 $p(\text{人間} \rightarrow \text{犬})=2^{-1000}$

犬が人間に噛みついた」という通報を受けた際に得られる情報量  $-\log p(\text{犬} \rightarrow \text{人間}) = 3(\text{ビット})$

人間が犬に噛みついた」という通報を受けた際に得られる情報量  $-\log(\text{人間} \rightarrow \text{犬}) = 1000(\text{ビット})$

めったに起こらない事象に対する情報量は大きい

情報量とはある通報で我々が驚く度合いを表している



# エントロピー

1つのコイン投げを考える

$$p(\text{表}) = \frac{1}{2} \quad \text{表が出たことを知って得られる情報量}$$

$$-\log p(\text{表}) = -\log 2^{-1} = 1(\text{ビット})$$

$$p(\text{裏}) = \frac{1}{2} \quad \text{裏が出たことを知って得られる情報量}$$

$$-\log p(\text{裏}) = -\log 2^{-1} = 1(\text{ビット})$$

実際にコインを投げる際にどの程度の**情報量の増加**が期待できるか？

$$H = - \sum_{i=\text{表,裏}} p(i) \log p(i) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1(\text{ビット})$$

**エントロピー、あるいは平均情報量**と呼ぶ

表、裏のどちらが出るかが予めわかっている場合  $p(\text{表}) = 1$ , or,  $p(\text{裏}) = 1$

エントロピーはゼロ

# エントロピーの定義と性質

ある事象の集合を  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  とし  $P_X(x)$  を  $x \in A$  なる事象が生起される確率とすると、確率変数  $X$  のエントロピーは

$$H = - \sum_{x \in A} P_X(x) \log P_X(x) \quad \text{で与えられる}$$

エントロピーの定義

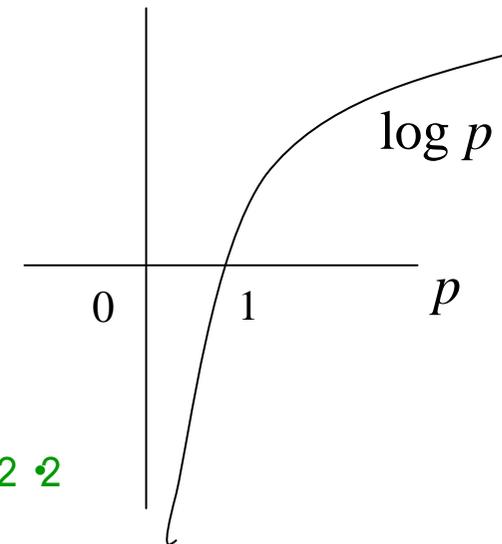
エントロピーの性質

- (1)  $H(x) \geq 0$
- (2)  $P(x) = 1$  となる  $x \in A$  があれば  $H(x) = 0$

エントロピーは確率変数  $X$  に関する我々の知識のあいまいさを表す

- (3)  $0 < P(x) < 1$  なる  $x \in A$  があれば  $H(x) > 0$

具体例は教科書 p. 15、例2・2

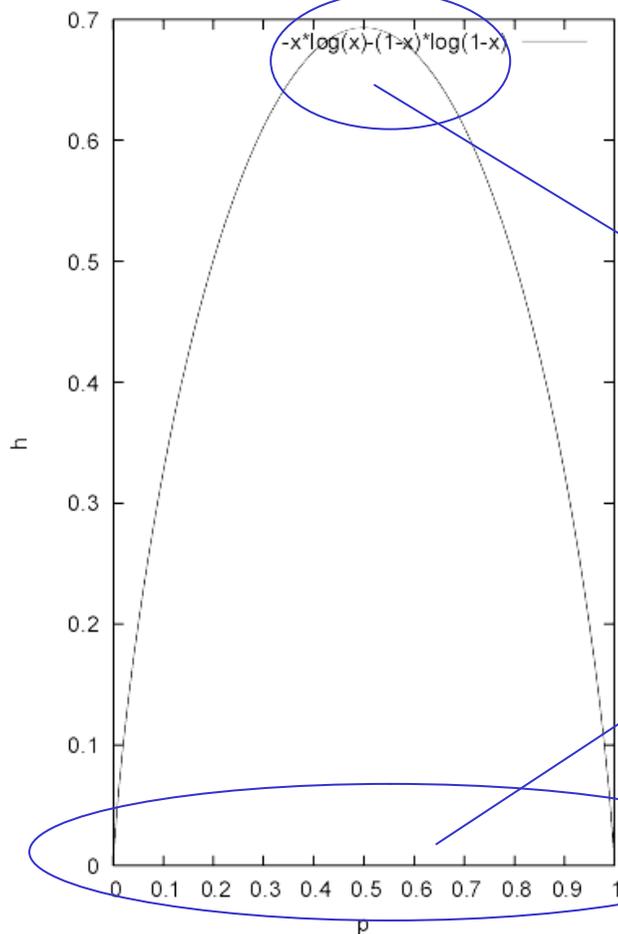


# 2値エントロピー関数

$P(a) = p, p(b) = 1 - P(a) = 1 - p, A = \{a, b\}$  のときのエントロピーは

$$h(p) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$$

2値エントロピー関数

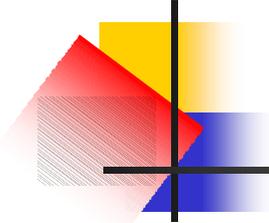


最大値は  $h(p = 1/2) = 0.69$

(左図では自然対数でプロットしていることに注意)

$$h(p) \geq 0, h(p = 0) = h(p = 1) = 0$$

2値エントロピー関数を一般化する問題  
例題2



# 複合事象のエントロピー

2つの異なる事象の集合を $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  とするとき

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_{XY}(x, y) \log P_{XY}(x, y)$$

複合事象のエントロピー (結合エントロピー)

(例)

$a_1$ (晴れ),  $a_2$ (雨),  $b_1$ (気温: 摂氏0 ~ 10度),  $b_2$ (気温: 摂氏10 ~ 20度)

$$H(X, Y) = -P_{XY}(a_1, b_1) \log P_{XY}(a_1, b_1) - P_{XY}(a_1, b_2) \log P_{XY}(a_1, b_2) \\ - P_{XY}(a_2, b_1) \log P_{XY}(a_2, b_1) - P_{XY}(a_2, b_2) \log P_{XY}(a_2, b_2)$$

雨で気温が摂氏10度 ~ 20度である確率

# 条件付きエントロピー

$X = x$  という条件下での確率変数  $Y$  についてのエントロピー

$$H(Y | X = x) = - \sum_{y \in Y} P_{Y|X}(y | X = x) \log P_{Y|X}(y | X = x)$$

$X = x$  の値に依存するので  $P_X(x)$  で平均する

$$H(Y | X) = \sum_{x \in X} P_X(x) H(Y | X = x)$$

$$= - \sum_{x \in X} P_X(x) \sum_{y \in Y} P_{Y|X}(y | X = x) \log P_{Y|X}(y | X = x)$$

$$= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_X(x) P_{Y|X}(y | x) \log P_{Y|X}(y | x)$$

確率に関する積の公式より

$$P_{XY}(x, y)$$

条件付きエントロピー

$$H(Y | X) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_{XY}(x, y) \log P_{Y|X}(y | x)$$

$X$  が与えられた条件下で、 $Y$  についてのあいまいさを表す