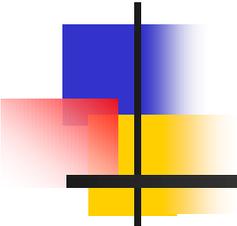




# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2005年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2005-11-18T09:19:52Z
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/772">https://hdl.handle.net/2115/772</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	InfoTheory05_slide5.pdf, 第5回講義スライド





# 情報理論 #5

第5回講義 5月23日

---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 情報源圧縮

(先週の復習)

ababbabaabbb という系列を ab|ab|ba|ba|aa|bb と2つずつに区切り、次の表に従って01の並びからなる符号に変換する

アルファベット	符号語	符号長
aa	110	3
ab	0	1
ba	10	2
bb	111	3

この表による変換で  
ababbabaabb 12ビット  
→ 0010100111 10ビット  
に圧縮される

対応表を逆にたどると元の系列が復元できるので可逆圧縮である  
復号

どの符号語も他の符号語の先頭部分になっていない  
語頭条件がみたされている

# クラフト不等式

(先週の復習)

クラフト不等式

$f: A \rightarrow B^+$ は一意復号可能であるとし、 $l(x)$ を $x$ に対する符号語 $f(x)$ の長さとする

$$\sum_{x \in A} K^{-l(x)} \leq 1$$

が成り立つ。  $K$ は $B$ の要素数である。

(適用例)

$$A = \{aa, ab, ba, bb\}, B = \{0, 1\}$$

$$y_2(aa) = 00, y_2(ab) = 10, y_2(ba) = 11, y_2(bb) = 110$$

$$l(aa) = l(ab) = l(ba) = 2, l(bb) = 3, K = 2$$

のときは

$$\sum_{x \in A} K^{-l(x)} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{7}{8} < 1$$

一意復号可能

# クラフト不等式の証明 #1

(先週後回しにした部分)

J を任意の正の整数として、次が成り立つことに注意する

$$\left( \sum_{x \in A} K^{-l(x)} \right)^J = \sum_{x_1 \in A} \sum_{x_2 \in A} \cdots \sum_{x_J \in A} K^{-(l(x_1)+l(x_2)+\cdots+l(x_J))}$$

$A_J(n)$  を全体の長さが  $n$  になるような  $J$  個の符号語の並べ方の総数とすると

$$A_J(n) = \#\{x_1 x_2 \cdots x_J \in A^J : l(x_1) + l(x_2) + \cdots + l(x_J) = n\}$$

であり、ある符号語に対し、次が成り立つ

$$\sum_{n=1}^{J l_{\max}} d(l(x_1) + \cdots + l(x_J), n) = 1$$

1をかける

# クラフトの不等式の証明 #2

(先週後回しにした部分)

$$\left( \sum_{x \in A} K^{-l(x)} \right)^J = \sum_{n=1}^{Jl_{\max}} \sum_{x_1 \in A} \cdots \sum_{x_J \in A} \mathbf{d}(l(x_1) + \cdots + l(x_J), n) K^{-n} = \sum_{n=1}^{Jl_{\max}} A_J(n) K^{-n}$$

$\forall a, a' \in A$  に対して  $f(a) \neq f(a')$  となるためには

$$A_J(n) \leq K^n$$

Bの記号をn個並べてできる語の総数

であることが必要。

よって

$$\left( \sum_{x \in A} K^{-l(x)} \right)^J = \sum_{n=1}^{Jl_{\max}} A_J(n) K^{-n} \leq \sum_{n=1}^{Jl_{\max}} 1 = Jl_{\max}$$

$$\longrightarrow \sum_{x \in A} K^{-l(x)} \leq (Jl_{\max})^{1/J} = 1 \quad (J \rightarrow \infty)$$

# 情報源符号の平均符号長

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}, f: A \mapsto B^+ = \{b_1, b_2, \dots, b_M\}$$

記号系列

符号語

$l_i$ : 符号語  $f(a_i)$  の長さ

$p_i$ : 記号  $a_i$  の出現確率  $p(a_i)$

$$L = \sum_{i=1}^K p_i l_i$$

平均符号長

(例)

aa	00	1/4
ab	10	1/4
ba	01	1/4
bb	110	1/4

出現確率

$$L = 2 \times (1/4) + 2 \times (1/4) + 2 \times (1/4) + 3 \times (1/4) = 9/4$$

平均符号長

# 平均符号長の下限

$$\begin{aligned}
 L - H_M(X) &= -\sum_{i=1}^K p_i \log_M M^{-l_i} + \sum_{i=1}^K p_i \log_M p_i \\
 &= -\sum_{i=1}^K p_i \log_M cr_i + \sum_{i=1}^K p_i \log_M p_i \\
 &= \sum_{i=1}^K p_i \log \left\{ \frac{p_i}{r_i} \right\} - \log_M c \geq 0
 \end{aligned}$$

平均符号長

情報源のエントロピー

確率の規格化条件

$$\sum_{i=1}^K r_i = c^{-1} \sum_{i=1}^K M^{-l_i} = 1 \quad \text{より}$$

KL情報量で正の値を持つ

$$c = \sum_{i=1}^K M^{-l_i} \leq 1$$

クラフト不等式より

$$L \geq H_M(X)$$

一意復号可能な場合には、平均符号長をエントロピーよりも小さくすることができない

# クラフト不等式からの考察

記号 $a_i$ を符号化したものの長さを次のようにおく

$$l_i = \left\lceil \log_M \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

括弧内以上の最小な整数

クラフト不等式を満たす

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K M^{-l_i} &\leq \sum_{i=1}^K M^{-\left\lceil \log_M \frac{1}{p_i} \right\rceil} \\ &\leq \sum_{i=1}^K M^{-\log_M \frac{1}{p_i}} = 1 \end{aligned}$$

$$\log_M \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_M \frac{1}{p_i} + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^K p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^K p_i l_i < \sum_{i=1}^K p_i \log \frac{1}{p_i} + 1$$

エントロピー

平均符号長

エントロピー

$$H_M(X) \leq L < H_M(X) + 1$$