# 情報理論　#9

第9回講義　6月20日

情報科学研究科　　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

# 2進線形符号

次の2つの条件を満たす{0,1} ^{n}の線形部分空間Cを2進線形符号と呼ぶ

$$(1)\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in C \text{ならば} \mathbf{x}+\mathbf{y}\in C$$
$$(2)\ l\in\{0,1\},\mathbf{x}\in C \text{ならば} l\mathbf{x}\in C$$

$$C=\left\{u_1\mathbf{x}_1+\cdots+u_k\mathbf{x}_k \mid u_i\in\{0,1\}, i=1,..,k\right\}$$
$$=\left\{\mathbf{u}G \mid \mathbf{u}=\{u_1,\ldots,u_k\}\in\{0,1\}^k\right\}$$

線形独立な基底ベクトル

$$G=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ .\\ .\\ .\\ \mathbf{x}_k\end{pmatrix}$$

生成行列 : nxkのサイズをもつ

# 2進線形符号の例

$$C=\left\{\begin{matrix}(00000),(01100),(00110),(01010)\\(11111),(10011),(11001),(10101)\end{matrix}\right\}$$

どの元同士の和もCに属している。その定数(0,1)倍もCに属している

基底ベクトルとして(01100),(00110),(11111)をとる

生成行列

$$G=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\\mathbf{x}_2\\\mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}01100\\00110\\11111\end{pmatrix}$$

基本変形を
行うと

$$G^*=\begin{pmatrix}10011\\01010\\00110\end{pmatrix}=(I_3:G_1)$$

# パリティ検査行列

2進線形符号のパリティ検査行列Hを用いた書き換え

$$C=\left\{\mathbf{x}\in\{0,1\}^n \mid \boxed{H}\mathbf{x}'=\mathbf{0}'\right\}$$

注)文字の右肩のプライムは転置を表す

$rank(H)=n-k,\ (n-k)\times n$**の行列**

$\mathbf{x}_i\ (i=1,\dots,k)$ **に対しても** $H\mathbf{x}_i'=\mathbf{0}'$**が成り立つので**

$$GH'=0$$

パリティ検査行列Hも基本変形によりH*に書き換えると

$$G^*H^*{}'=(I_k:G_1)\boxed{\begin{pmatrix}G_1\\ I_{n-k}\end{pmatrix}}=I_kG_1+G_1I_{n-k}=G_1+G_1=0$$

# 行列Hで2進線形符号を表す

$$G^* = \begin{pmatrix} 10011 \\ 01010 \\ 00110 \end{pmatrix}, \quad H^* = \begin{pmatrix} 11110 \\ 10001 \end{pmatrix}$$

$G_1$

$G_1'$

$I_{n-k} = I_{5-3} = I_2$

すると確かに

$$G^* H^{*\prime} = \begin{pmatrix} 10011 \\ 01010 \\ 00110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 0$$

$$H^* \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 11110 \\ 10001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{aligned} x_4 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_5 &= x_1 \end{aligned}$$

x 4、x5はx1、x2、x3で決まる

$(x_1, x_2, x_3) = (000)(001)(010)(011)(101)(110)(111)$

**と選ぶと**

$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = C$

$$C = \begin{Bmatrix} (00000),(01100),(00110),(01010) \\ (11111),(10011),(11001),(10101) \end{Bmatrix}$$

# パリティ検査行列と最小距離

$$H=\begin{pmatrix}11011\\01110\\10110\end{pmatrix}$$ に対し、$H'\mathbf{x}'=0$は

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

Cの最小重み(最小距離)は　$w(\mathbf{x})=3$であり、$\mathbf{x}=(11100)$

線形符号のパリティ検査行列$H=(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_m)$のどの$t$個の列ベクトルも
線形独立で、$t+1$個の列ベクトルが線形従属のとき、$C$の最小距離は$d=t+1$

これを証明せよというのが今週の演習問題

# 2進線形符号の符号化

パリティ検査行列：$H=\begin{pmatrix}10100\\11010\\01001\end{pmatrix}$, $C=\left\{\mathbf{x}\in\{0,1\}^5 \mid H\mathbf{x}'=\mathbf{0}'\right\}$**に対し、**$H\mathbf{x}'=\mathbf{0}'$**を書き出すと**

パリティ検査ビット

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ x_4 &= x_1 + x_2 \\ x_5 &= x_2 \end{aligned}$$

情報ビット

情報ビットを決めると、パリティ検査ビットが定まる

$(x_1, x_2) = (00)(01)(10)(11)$**とすると**

$(x_3, x_4, x_5) = (000)(011)(110)(101)$**となるので**

$$\boxed{C=\{(00000),(01011),(10110),(11101)\}}$$

できあがる2進線形符号

# 2進線形符号の復号化

受信データ　送信データ

$$\boxed{\mathbf{y}} = \boxed{\mathbf{x}} + \boxed{\mathbf{e}}$$ 雑音

**この両辺左からパリティ検査行列をかけると**

$$H\mathbf{y}' = \boxed{H\mathbf{x}'} + H\mathbf{e}' = \boxed{H\mathbf{e}'}$$ シンドローム

パリティ検査行列の定義からゼロ

線形符号の復号化法

**$H\mathbf{y}'$を計算し、この値を与えるコセットリーダeをに加える**

**具体例は講義ノート例題9で見ていく**