



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	基本群へのガロア作用 : Deligneの混合Tateモチーフに関する予想の l 進版の解決 (R.Hainとの共同研究)
Author(s)	松本, 眞
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 69, 1
Issue Date	2001-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/730
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/780
Type	departmental bulletin paper
File Information	69.pdf



基本群へのガロア作用 — Deligne の混合
Tate モチーフに関する予想の ℓ 進版の解決
(R. Hain との共同研究)

松本 眞 (述)

Series #69. September, 2001

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #42 R. Agemi (Ed.), 第20回偏微分方程式札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.
- #43 R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.
- #44 R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.
- #45 G. Ishikawa (Ed.), 1995年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.
- #46 R. Agemi (Ed.), 第21回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.
- #47 N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 61 pages. 1996.
- #48 S. Miyajima and J. Inoue (Eds.), 第5回関数空間セミナー報告集, 90 pages. 1997.
- #49 T. Ozawa (Ed.), Proceedings of the 22nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 1997.
- #50 H.-F. Yamada (Ed.), 1996年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 99 pages. 1997.
- #51 N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 121 pages. 1997.
- #52 J. Inoue (Ed.), 第6回関数空間セミナー報告集, 89 pages. 1998.
- #53 Y. Giga (Ed.), Proceedings of the 23rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 1998.
- #54 N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 122 pages. 1998.
- #55 T. Ozawa and H.-F. Yamada (Eds.), 1997年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 83 pages. 1998.
- #56 Y. Giga (Ed.), 界面ダイナミクス-曲率の効果, 講義録, 48 pages. 1998.
- #57 J. Inoue (Ed.), 第7回関数空間セミナー報告集, 138 pages. 1999.
- #58 Y. Giga and R. Kobayashi (Eds.), Abstracts of Sapporo Symposium on Anisotropic Effects in a Crystal Growth Problem and its Mathematical Analysis (SAM), 51 pages. 1999.
- #59 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 24th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 61 pages. 1999.
- #60 I. Tsuda and N. Kawazumi (Eds.), 1998年度談話会・特別講演アブストラクト集, 55 pages. 1999.
- #61 T. Ozawa (Ed.), Proceedings of Sapporo Guest House Minisymposium on Nonlinear Wave Equations, 67 pages. 1999.
- #62 S. Miyajima, T. Takeo and J. Inoue (Eds.), 第8回関数空間セミナー報告集, 96 pages. 2000.
- #63 K. Ono and N. Honda (Eds.), 1999年度談話会・特別講演アブストラクト集, 43 pages. 2000.
- #64 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 25th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 55 pages. 2000.
- #65 H. Nakamura (Ed.), ガロア・タイヒミュラー群のLEGO理論, 37 pages. 2000.
- #66 J. Inoue et al (Eds.), 関数空間セミナー報告集2000, 134 pages. 2001.
- #67 Y. Giga and H. Yamashita (Eds.), 2000年度談話会・特別講演アブストラクト集, 61 pages. 2001.
- #68 Y. Giga and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of the 26th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2001.

基本群へのガロア作用 — Deligne の混合
Tate モチーフに関する予想の ℓ 進版の解決¹
(R. Hain との共同研究)

松本 眞 (述)

¹2000年6月26日～30日, 北海道大学に於ける集中講義. 大溪幸子, 山上敦士 (記)

第1章 オーバービュー

この章では、講義全体を概観する。

1.1 Deligne の予想の伊原版

まず, Deligne が述べたモチーフ (motif) に関する予想から, 射影直線引く 3 点の基本群へのガロア作用に関して伊原が定式化したとされる予想を述べる. モチーフの構成はいろいろな予想の上になされることが多いが, この定式化は何の予想も必要としない.

まず, ガロア群の代数的基本群への作用を簡単に復習する. 文献は [5] だが, 複雑な性質は使わないので以下述べることを信じれば, 先の章で困ることはない. X/K を体 K 上の非特異幾何的連結多様体とし, \bar{x} を X の幾何的点とすると, 代数的基本群 $\pi_1(X \otimes \bar{K}, \bar{x})$ が定義される.

ここで $X/\mathbb{Q} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とおき, $x = 0\bar{1}$ をその tangential base point とし, $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ とおけば, 群準同型

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Aut} \pi_1(\bar{X}, 0\bar{1}) \rightarrow \mathrm{Aut} \pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, 0\bar{1})$$

を得る. ここで $\pi_1^{(\ell)}$ は π_1 の pro- ℓ 完備化を表す. そこで

$$\pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, 0\bar{1}) = \pi_1(X(\mathbb{C}), 0\bar{1})^{(\ell)} \cong (2 \text{ 元生成自由群})^{(\ell)}$$

という事実を使って $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を調べる. これについてはもう少しだけ §2.1 で説明するが, ここでは $\bar{\mathbb{Q}}$ の自己同型群である $G_{\mathbb{Q}}$ という複雑な群が, 2 元生成自由 pro- ℓ 群という簡単な位相群に作用しているということだけ知ればよい.

伊原の理論

Fermat 曲線は射影直線のメタアーベルな 3 点不分岐被覆として実現される. 伊原は Fermat 曲線のヤコビアン of Tate 加群へのガロア作用を統一的に調べるため, 以下のような枠組を考えた ([8]). ここでは彼の理論のうち, 数論というより純群論的な部分を荒く述べる.

2 元生成自由 pro- ℓ 群 $\Pi := \pi_1(X(\mathbb{C}), 0\bar{1})^{(\ell)}$ に中心降下列 (lower central series)

$$\Pi \supset [\Pi, \Pi] \supset [\Pi, [\Pi, \Pi]] \supset \dots$$

を使ってフィルトレーションを入れる. ここに交換子は位相群の交換子, つまり閉包をとったもの. この i 番目を lower の L をとって $L^i\Pi$ とする. すなわち $L^1\Pi = \Pi, L^2\Pi = [\Pi, \Pi], \dots$

これを $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut } \Pi$ により引き戻して $G_{\mathbb{Q}}$ にフィルトレーション

$$I^m G_{\mathbb{Q}} = \text{Ker}(G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\Pi/L^{m+1}\Pi))$$

を入れる:

$$G_{\mathbb{Q}} = I^0 G_{\mathbb{Q}} \supset I^1 G_{\mathbb{Q}} \supset \dots$$

ここで, 写像 $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\Pi/[\Pi, \Pi])$ は, 円分指標 $\chi_{\ell}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$ による対角作用と一致する (*i.e.*, $\Pi/[\Pi, \Pi] \cong \mathbb{Z}_{\ell}(1)^{\oplus 2}$). また, 次数付き商

$$\text{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}} = I^m G_{\mathbb{Q}} / I^{m+1} G_{\mathbb{Q}}$$

は純群論的理由により (Π が有限生成 pro- ℓ 自由群だけから) 有限生成自由 \mathbb{Z}_{ℓ} -加群となる. この階数を今後 r_m で表す. この次数付き商には $G_{\mathbb{Q}}$ が共役で作用し, その作用は χ_{ℓ}^m による作用と一致する: すなわち

$$\text{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}_{\ell}(m)^{r_m}.$$

この事実も, $m = 1$ の場合を認めれば純群論的に従う.

伊原 [9] は $G_{\mathbb{Q}}$ の部分商に $\mathbb{Z}_{\ell}(2n)$ 型の表現が現れることを示し,

$$\text{Gr}_I^{2n} G_{\mathbb{Q}} \neq 0 \quad (n \geq 4)$$

を得た. 偶数 Tate twist をガロア群の部分商に実現したのはこの研究が初めてと思われる.

さて, フィルトレーション L, I はいずれも 中心フィルトレーション [11] となっている. このことから \mathbb{Z}_{ℓ} -加群

$$\text{Gr}_L^{\bullet} \Pi = \bigoplus_{m \geq 1} L^m \Pi / L^{m+1} \Pi$$

は, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ を Gr_L^{\bullet} で考えることで, 自然に \mathbb{Z}_{ℓ} 上の次数付き Lie 環になる. 正確に言うと, $x \in L^i, y \in L^j$ に対して $[x, y] \in L^{i+j}$ が成立するので, これを次数付き商で考えて $\text{Gr}_L^i \Pi \times \text{Gr}_L^j \Pi \rightarrow \text{Gr}_L^{i+j} \Pi$ なる写像が well-defined であるが, これが双線形で Jacobi 法則も満たし, Lie 環の積となる. 実は 2 元生成自由 \mathbb{Z}_{ℓ} -Lie 環であることも知られている.

このことから純群論的に

$$\mathrm{Gr}_I^{>0}G_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{m \geq 1} \mathrm{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}}$$

も \mathbb{Z}_ℓ 上のねじれの無い次数付き Lie 環になることがわかり, 各 $\mathrm{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}}$ の階数は上記の r_m である.

ここで

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gr}_I^{>0}G_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

とおく.

予想 1.1 ([9], Deligne の予想の伊原版).

(r_m がいくつかということに関する予想)

(I-1) (次数付き Lie 環として) $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ を生成するような $\sigma_m \in \mathrm{Gr}_I^m G_{\mathbb{Q}}$ ($m \geq 3$, odd) が存在する.

(I-2) これらは自由生成元である.

$m =$	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
			σ_3		σ_5		σ_7	$[\sigma_3, \sigma_5]$	σ_9	$[\sigma_3, \sigma_7]$	$[\sigma_3, [\sigma_3, \sigma_5]]$
r_m	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2

注意 1.2. $m \leq 12$ では $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の r_m は自由 Lie 環のそれと一致することがわかっている (cf. Tsunogai [15]).

最近 (I-2) から (I-1) が従うことを伊原は示した [10].

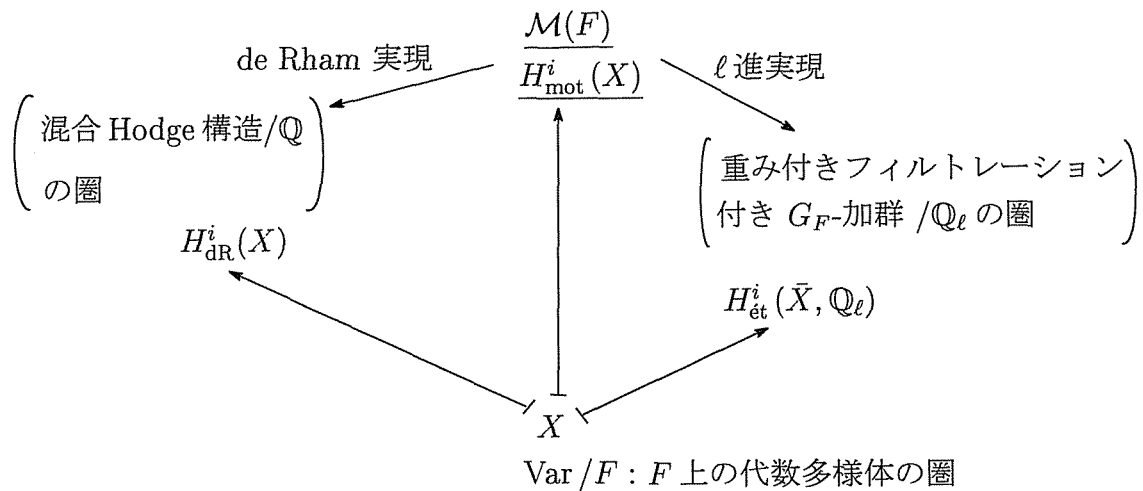
1.2 Deligne のモチーフの予想

F を代数体とする. 以下, 確定した定義の無いものは下線付きで表す. (最近, M. Levine, Voevodsky, Goncharov らによってモチーフの圏が定義されたが, 講演者は不勉強によりこれらの仕事を理解していないため, 以下ではこれらの仕事を反映しない説明になっていることを深くお詫びします.)

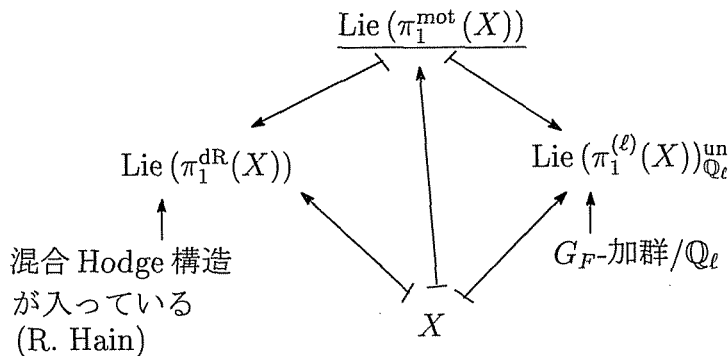
$\mathcal{M}(F)$ を F 上のモチーフの圏とする (cf. Grothendieck [5]). これは F 上の代数多様体のあらゆるコホモロジー理論の親玉として存在すると Grothendieck が予想した, アーベル圏である. 親玉という意味は, 各種のコホモロジー理論はこの圏から適当なアーベル圏への函手 (realization functor) として実現されるという意味である.

$F \hookrightarrow \mathbb{C}$ を一つ固定する. F 上の代数多様体 X に対して通常の位相の意味でのコホモロジー (Betti コホモロジー), de Rham コホモロジー, エタール・コホモロジー, crystalline コホモロジーなどが定義される. これらはそれぞれ代数多様体の圏から, アーベル群, F -線形空間, \mathbb{Z}_ℓ -加群, \mathbb{Z}_p -加群への函手である. 前二者は混合 Hodge 構造をもち, エタール・コホモロジーはガロア加群である.

これらの函手が全て一つのアーベル圏 $\mathcal{M}(F)$ を経由するというのがラフな描像である (下図). 標語的には, モチーフの圏は代数多様体の圏をアーベル圏で近似したものと言える. 代数多様体 X に対し, 対応するモチーフの対象を X のモチーフ的コホモロジー という.



さて, Deligne [3] は, コホモロジーだけでなく基本群 π_1 でもモチーフの対象が作れるのではないかと予想し, その Betti 実現と ℓ 進実現を与え (§2.2 参照), de Rham 実現について議論した. de Rham 実現は R.Hain によりなされたが, ここでは扱わない.



ここで, π_1 といいつつもその ℓ 進実現は \mathbb{Q}_ℓ -線形空間でないとならない. §2.2 で具体的に与えるように, 通常の基本群を \mathbb{Q}_ℓ 上の冪単代数群で近似し, その Lie 環をとることで線形空間とする.

さて $\mathcal{M}(F)$ をいきなり扱うのは大きすぎて難しいかも知れないので、ある
 充満部分圏

$$\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S}) \subset \mathcal{M}(F)$$

を考える。この部分圏は次のように定義される: モチーフには, Tate 加群と呼ばれる対象 $\mathbb{Q}(m)$ があると予想され, これを \mathbb{Q}_ℓ 上の G_F -加群に ℓ 進実現したものは, 通常の Tate 加群 $\mathbb{Q}_\ell(m)$ となる。

また, モチーフに関する予想として, $M \in \mathcal{M}(F)$ には重み付きフィルトレーションと呼ばれる上昇フィルトレーション

$$\cdots \subset W_m M \subset W_{m+1} M \subset \cdots$$

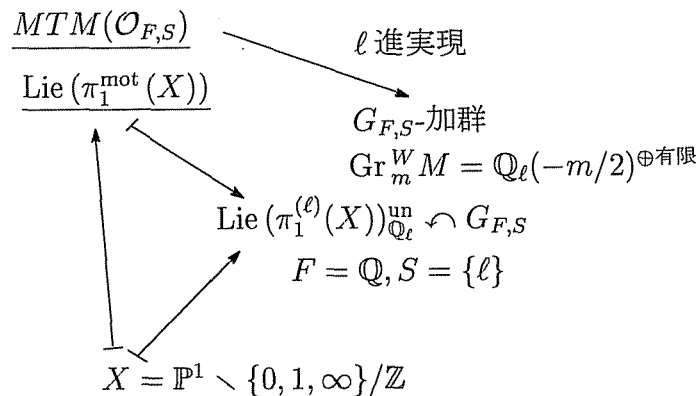
が入ると考えられている。

定義 1.3 ($\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})$ の定義).

S を F の有限素点の有限集合とし, $\mathcal{O}_{F,S}$ を F の S -整数環とする。

$\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})$ を $\mathcal{M}(F)$ の充満部分圏であって次の条件を満たす対象 M たちから成るもの, とする:

- $\text{Gr}_m^W M := W_m M / W_{m-1} M \cong \mathbb{Q}(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ の形 (m が奇数のときは消滅), かつ
- M は $\mathcal{O}_{F,S}$ 上 “非特異” (この条件は「 M の ℓ 進実現への G_F の作用は $G_{F,S} := \pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_{F,S})$ を経由する」ということを含む)。



このようなモチーフとして, 射影直線から 3 点を抜いたもの X のモチーフ的
 基本群の Lie 環 $\text{Lie}(\pi_1^{\text{mot}}(X))$ があげられる。

さて, Beilinson [1] はアフィン・スキーム X の \mathbb{Q} -係数モチーフ的コホモロ
 ジーの候補として, K 群による次の定義を提唱した。

$$H_{\text{mot}}^m(X, \mathbb{Q}(n)) := K_{2n-m}(X)^{(n)}.$$

ここで (n) は $\otimes \mathbb{Q}$ したあとの Adams 作用素の固有空間をあらわすが、詳しくは述べない。

さて, $X = \text{Spec } \mathcal{O}_{F,S}$ とする. このとき $K_{2n-1}(X)^{(n)} = K_{2n-1}(X)$ で, その他の固有空間は消滅する.

もしモチーフの圏 $\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})$ が存在すれば,

$$H_{\text{mot}}^m(X, \mathbb{Q}(n)) = \text{Ext}_{\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})}^m(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m))$$

となると予想されるので, 次が導かれる.

予想 1.4 (Deligne [3], Deligne の予想).

$$(E-1) \quad \text{Ext}_{\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m)) \cong K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}.$$

$$(E-2) \quad \text{Ext}_{\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m)) = 0 \quad (m \geq 1).$$

K 群 $K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}$ については次の定理がある:

定理 1.5 (Borel の定理). $K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}$ の次元を ρ_m とすると,

$$\rho_m = \begin{cases} r_1 + r_2 - 1 + \#S, & m = 1, \text{ (Dirichlet の定理)} \\ r_2, & m \geq 2, \text{ 偶,} \\ r_1 + r_2, & m \geq 3, \text{ 奇,} \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで r_1, r_2 はそれぞれ F の実素点, 複素素点の個数である.

例えば $F = \mathbb{Q}, S = \emptyset$ とすると $r_1 = 1, r_2 = 0$ で,

$$\rho_m = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ 0, & m \geq 2, \text{ 偶,} \\ 1, & m \geq 3, \text{ 奇,} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

となる (予想 1.1 と比較せよ).

$\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S})$ は (予想的に) \mathbb{Q} 上の淡中圏である.

次の定義は, 本来は定理であるべきものである. 正しい定義は例えば [4] を参照のこと.

定義 1.6. \mathfrak{C} が体 k 上の 淡中圏 であるとは, ある k 上の pro-代数群 \mathcal{G} が存在して $\mathfrak{C} \simeq \text{Rep}_k(\mathcal{G})$ となること. ここで $\text{Rep}_k(\mathcal{G})$ は k 上の \mathcal{G} -加群 (= \mathcal{G} の k -線形表現) の圏である.

このとき, \mathcal{G} を \mathfrak{C} の淡中基本群という.

そこで, ある \mathbb{Q} 上の pro-代数群 $\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}$ があって $MTM(\mathcal{O}_{F,S})$ は $\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}$ -加群の圏と同値になるはずである. この淡中基本群 $\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}$ を モチーフ的ガロア群 という.

この時, 群コホモロジーと拡大の関係から次が成り立つはず:

$$H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Q}(m)) = \text{Ext}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m)) = \mathbb{Q}^{\rho_m}.$$

$$H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Q}(m)) = \text{Ext}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(m)) = 0.$$

ここで荒っぽくいうと, 群コホモロジーにおける H^1 は (だいたい) アーベル化を与えていることから, 群 \mathcal{G} の生成元を与えると考えられる.

また, H^2 は群の関係をあらわしているから, これが $= 0$ ということは \mathcal{G} がなんらかの意味で自由であるといっている.

実際 \mathcal{G} の次数付き商への作用は \mathbb{G}_m 経由で, その核は pro-冪単群になることから

$$1 \rightarrow \mathcal{U}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})} \rightarrow \mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

なる完全系列があり, Deligne の予想の (E-1), (E-2) はそれぞれ

- (E-1) $\rightsquigarrow (\text{Lie } \mathcal{U})^{\text{ab}}$ が各 weight $-2m$ のところに ρ_m 個の生成元を持つ,
- (E-2) $\rightsquigarrow \text{Lie } \mathcal{U}$ が自由,

ということを意味している.

ここで予想 1.1 との関係を見るため $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とおく.

$$\begin{array}{ccc} G_{F,S} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})} & \rho_m \text{ 個の生成元を各 weight } -2m \\ \left(\begin{array}{ccc} \curvearrowright & \circlearrowleft & \curvearrowright \\ \text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X}) & \xlongequal{\quad} & \text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{mot}}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \end{array} \right) & & \text{に持ち自由} \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{Q} \\ S &= \{\ell\} \end{aligned}$$

$G_{F,S}$ の作用は $\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}$ を経由しており, $G_{F,S}$ の像は Zariski dense と考えられるので, 作用 $G_{F,S} \curvearrowright \text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X})$ の “Lie 環化” は各 weight で ρ_m 個の元で生成される (この予想から予想 (I-1) が導かれる).

さらに, 作用

$$\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})} \curvearrowright \text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{mot}}(\bar{X})$$

が忠実であることも Deligne により予想されている. (Belyi の定理の類似. この予想から (I-2) が導かれる. なぜなら, $\mathcal{G}_{MTM(\mathcal{O}_{F,S})}$ の冪単部分は自由冪単群

であり, 作用が忠実ならばその像も自由, それはガロア作用の Zariski 閉包に一致するからである.)

1.3 I-1 の証明

まず ℓ 進実現函手

$$\underline{MTM}(\mathcal{O}_{F,S}) \longrightarrow \{G_{F,S}\text{-加群}\}$$

の像となるべきもの $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ を定義する. ただし S は ℓ 上の素点を全て含むと仮定する.

定義 1.7. 圏 $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ を次のように定義する. 対象は \mathbb{Q}_ℓ -線形空間である G_F -加群 M であって, 次の性質を満たすもの.

- (1) ガロア作用は S の外で不分岐, すなわち M は $G_{F,S}$ -加群である. (非特異に対応する¹.)
- (2) M は $G_{F,S}$ -不変なフィルトレーション

$$0 = \cdots \subset W_m M \subset W_{m+1} M \subset \cdots = M$$

をもち, ガロア加群として $\mathrm{Gr}_m^W M := W_m/W_{m-1} \cong \mathbb{Q}_\ell(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ となるもの. ここに $\mathbb{Q}_\ell(n)$ は $G_{F,S}$ が ℓ 進円分指標の n 乗で作用する一次元 \mathbb{Q}_ℓ -線形空間 (いわゆる Tate 加群) である.

すると:

定理 1.8 ([6], この本の第 4 章参照). $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S}) = \mathrm{Rep}(\mathcal{G}_{F,S}^\ell)$ となる \mathbb{Q}_ℓ 上の pro-代数群 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ があり,

$$1 \rightarrow \mathcal{U}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \quad (\text{完全})$$

となっている. ここで $\mathcal{U}_{F,S}^\ell$ は pro-冪単代数群であり,

- (1) $(\mathrm{Lie} \mathcal{U}_{F,S}^\ell)^{\mathrm{ab}}$ の weight $-2m$ の部分商は階数 ρ_m を持つ.
- (2) $\mathrm{Lie} \mathcal{U}_{F,S}^\ell$ は自由.

先の議論と (1) から (I-1) が出る. すなわち, $H_{\mathrm{ét}}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell(m)^{\oplus \text{有限}}$ となるような X については, 作用

$$G_{F,S} \curvearrowright \mathrm{Lie} \pi_{1,\mathbb{Q}_\ell}^{\mathrm{un}}(\bar{X})$$

¹一般のガロア加群を, この不分岐条件だけで “非特異” とみなすのは不十分であろうが, 混合 Tate 加群 の場合はたまたまこれで十分であるようである.

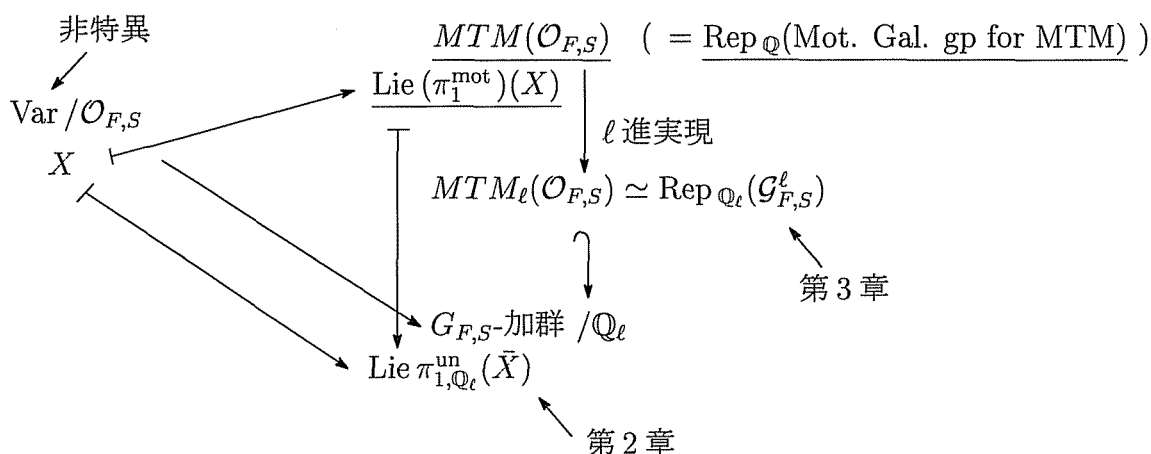
は $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ を経由するので $G_{F,S}$ の像が縛られ, このことから (I-1) が出る (第 5 章).

注意 $\text{Lie}(\pi_{1,\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X}, \bar{x}))$ が “ $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の対象となる” といったが, 厳密には $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ 内の射影系となる. つまり, $\text{pro-}MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の対象となる.

第2章 ℓ 進 π_1 の冪単完備化とガロア作用

復習

第1章で述べた登場人物を復習すると次のような図になる:



ここで X は $\text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X})$ が混合 Tate になるようなものを考えている (例えば $H_{\text{ét}}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell(m)^{\oplus \text{有限}}$ となるような X , 具体的には射影直線引く 3 点など).

下線が引いてあるものはここでは実際には扱わない. この章では「モチーフ的 π_1 の ℓ 進実現であるはずの」 $\text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X})$ を定義する. これはガロア群の作用する \mathbb{Q}_ℓ -線形空間であり, 前章で定義されたガロア加群の圏の充満部分圏 $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の対象となる. 第3章で $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ が淡中圏であることを示す, すなわちそれはある pro-代数群 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の表現空間の圏 $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathcal{G}_{F,S}^\ell)$ と同値になる. 第4章で $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の構造を決定する. 第5章が予想の証明である.

2.1 代数的基本群 (cf. SGA 1, [5])

k : 体, X : k 上の連結スキーム, \bar{x} : X の幾何的点, とすると, これらに対し, 代数的基本群 $\pi_1(X, \bar{x})$ が定義される ($\pi_1^{\text{alg}}(X, \bar{x})$ と書く). これは pro-有限群である. 代数的基本群をとることは, 連結スキームから pro-有限群への函手

となっている. 通常の基本群をアーベル化すると 1 次のホモロジーになるが, 代数的基本群をアーベル化すると 1 次のエタール・コホモロジーになる. すなわち二つの関手を合成して

$$(\text{点付き幾何的連結スキーム}) \xrightarrow{\pi_1} (\text{pro-有限群}) \xrightarrow{\text{pro-}\ell \text{ アーベル化}} (\mathbb{Z}_\ell\text{-加群})$$

とみると

$$\text{Hom}(\pi_1(\bar{X})^{\text{ab}}, \mathbb{Z}_\ell) \cong H_{\text{ét}}^1(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell).$$

位相幾何のそれと同様に, 次のホモトピー完全列がある:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(X, \bar{x}) & \rightarrow & \pi_1(\bar{X}, \bar{x}) & \rightarrow & \pi_1(\text{Spec } k, \bar{x}) \rightarrow 1 \\ & & & & \text{セクション} \searrow & & \parallel \\ & & & & & & G_k. \end{array}$$

ここで, G_k は k の絶対ガロア群を表す. ここでは省いたが代数的基本群の定義をちゃんとすれば, $G_k = \pi_1(\text{Spec } k, \bar{x})$ となる. 斜めの線で描かれたセクションは, 常にあるというものではない. x が k -有理点の場合には, 関手性から自動的に与えられる. x が k -有理な tangential base point ([3], より一般の場合の tangential 射については [13] 参照) の場合にもセクションをとることができる.

k -有理点 $x \in X(k)$ を取ったとすると, 次のような射の列がある:

$$\text{Spec } k \xrightarrow{x} X \rightarrow \text{Spec } k.$$

これから関手性により群のセクション

$$\pi_1(\text{Spec } k, \text{Spec } \bar{k}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(\text{Spec } k, \text{Spec } \bar{k})$$

を得て, さらに,

$$G_k \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \xrightarrow{\text{Inn}} \text{Inn}(\pi_1(X, \bar{x})) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(\bar{X}, \bar{x})).$$

従って

$$G_k \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(\bar{X}, \bar{x})) \xrightarrow{\text{pro-}\ell \text{ 完備化}} \text{Aut}(\pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, \bar{x}))$$

というガロア表現を得る.

このアーベル化をとると

$$G_k \curvearrowright \pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, \bar{x})^{\text{ab}}$$

という表現を得るが, これは上の双対性の下, 作用 $G_k \curvearrowright H_{\text{ét}}^1$ と compatible である.

さて, $k \subset \mathbb{C}$ のときには, $\pi_1(\bar{X}, \bar{x}) = \pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), \bar{x})^\wedge$ (\wedge は pro-有限完備化を表す) である. すなわち, $\bar{X} := X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ の代数的基本群は, 通常の意味での基本群を pro-有限完備化したものである. その最大 pro- ℓ 商は $\pi_1(\bar{X}, \bar{x})^{(\ell)} = \pi_1^{\text{top}}(X(\mathbb{C}), \bar{x})^{(\ell)}$ (pro- ℓ 完備化) である.

2.2 モチーフ的 π_1 の ℓ 進実現 (by Deligne)

第 1 章で述べたように, 代数多様体の圏からモチーフの圏にはモチーフ的コホモロジーをとると言う関手があり, それに ℓ 進実現という関手を合成するとエタール・コホモロジーが得られる. 行き先は絶対ガロア群が作用する \mathbb{Q}_ℓ -線形空間の圏である. Betti 実現, de Rham 実現, crystalline 実現の関手を合成するとそれぞれ Betti, de Rham, crystalline コホモロジーが与えられる. Deligne は基本群もこの枠組にのると考えた. すなわち, モチーフ的基本群をとると言う関手が代数多様体の圏からモチーフの圏にあり, それと種々の実現関手を合成すると「Betti 基本群」「エタール基本群」「de Rham 基本群」「crystalline 基本群」といった基本群が得られるというのである. これらはモチーフなしでも定義できるはずで, 始めの二つは Deligne が構成し残る二つにも示唆を与え, 最終的には de Rham (+ 混合 Hodge 構造) は R.Hain, crystalline は志甫が構成した.

さて, 基本群というものの, その実体はコホモロジーと同じ場所に住むものであるから, 何よりもまず体上の線形空間でなければならない. 非可換群が線形空間にできるかというのももちろんなにか工夫がいる. この工夫が Malcev 完備化とか 冪単完備化とか言われるものである. アイデアは簡単で, 群を冪単代数群によってできるだけ近似する. 近似した結果の群の Lie 環は線形空間であり, もとの冪単群を完全に回復する情報をもつ. この Lie 環が, コホモロジーと同じところに住むのである.

ここで扱うのは ℓ 進実現だけである. モチーフ的基本群の ℓ 進実現は, $\text{Lie } \pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un}}(\bar{X})$ という G_F -作用の与えられた \mathbb{Q}_ℓ -線形空間である. これを定義しよう. まず 冪単完備化 (Malcev 完備化) [12] を定義する.

定義 2.1. k を標数 0 の体とし, Π を群とする. Π の k 上の 冪単完備化 (unipotent completion) Π_k^{un} とは, k 上の pro-冪単代数群であり, 自然な群準同型

$$\Pi \rightarrow \Pi_k^{\text{un}}(k)$$

を持ち, 次の universality をみたすもののこと:

k 上の任意の冪単代数群 U と 群準同型 $\Pi \rightarrow U(k)$ に対し, 射 $\Pi_k^{\text{un}} \rightarrow U$ で

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\quad} & U(k) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \Pi_k^{\text{un}}(k) \end{array}$$

となるものが一意に存在する: *i.e.*,

$$\text{Hom}_{\text{gp}}(\Pi, U(k)) \cong \text{Hom}_{\text{pro-unip}/k}(\Pi_k^{\text{un}}, U).$$

いろいろ用語が出てきたが、どれも難しくないので説明する。

- k 上の 代数群 といったら、 k 上の アフィン代数群を指す。すなわち、 k 上の行列群 $GL_{N/k}$ の Zariski 閉部分群のこと。ようは、行列群の部分群で成分を変数とする k 係数多項式の零点としてあらわされる部分群のこと。
- 冪単代数群: 代数群であって、 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}\right\}$ の部分群と同型なもの。
- pro-代数群, pro-冪単代数群 とは、それぞれ代数群と冪単代数群のなす圏における射影系のことである。これらは射影極限をとることで一つの対象だと思っていよい。

一般に圏 \mathcal{C} に対し、pro- \mathcal{C} なる圏 (= \mathcal{C} の射影系たちのなす圏) が作れる。簡単なので説明する。対象は射影系 (G_λ) ($\lambda \in \Lambda$) である (pro-object と呼ばれる)。射は次のように定義される:

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}((G_\lambda), (H_\mu)) := \varprojlim_{\mu} \varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G_\lambda, H_\mu).$$

この圏は定義から \mathcal{C} を充満部分圏として含む。射影系 (G_λ) の射影極限が pro- \mathcal{C} の中では存在し、 (G_λ) となる。この意味で、pro-object (G_λ) は $\varinjlim_{\lambda} G_\lambda$ と書くことが多い。

定理 2.2. Π_k^{un} は存在する。

証明. k 上の冪単代数群 U_λ と、Zariski dense な群準同型

$$\rho_\lambda : \Pi \rightarrow U_\lambda(k)$$

の組がなす圏 $\{(\rho, U)\}$ を考える。(対象は組 $(\rho_\lambda, U_\lambda)$, 射は $U_\lambda \rightarrow U_{\lambda'}$ で

$$\begin{array}{ccc} U_\lambda(k) & \longrightarrow & U_{\lambda'}(k) \\ \rho_\lambda \searrow \cup \nearrow \rho_{\lambda'} & & \\ \Pi & & \end{array}$$

となるもの.)

ρ_λ は Zariski dense だから、射 $U_\lambda \rightarrow U_{\lambda'}$ は高々一つ。また、任意の $U_\lambda, U_{\lambda'}$ に対して、

$$\rho_\lambda \times \rho_{\lambda'} : \Pi \rightarrow (U_\lambda \times U_{\lambda'})(k)$$

の像の Zariski 閉包を U_μ とすれば、射

$$U_\mu \rightarrow U_\lambda, U_\mu \rightarrow U_{\lambda'}$$

が得られることから, 関手

$$\begin{aligned} \{(\rho, U)\} &\rightarrow (\text{冪単代数群 } /_k \text{ の圏}); \\ (\rho, U) &\mapsto U \end{aligned}$$

の像は射影系をなし, その極限 $\varprojlim_{\lambda} U_{\lambda}$ が Π_k^{un} の満たすべき universality を持つ. \square

レポート問題 2.3. 上の証明において, $\varprojlim_{\lambda} U_{\lambda}$ が universality を持つことを確かめよ.

注意 2.4. $\Pi_k^{\text{un}}(k)$ を $\{\text{group-like elements} \in \varprojlim_n k[\Pi]/I^n\}$ と見ることもできる. ここで $I \subset k[\Pi]$ は群環の付加イデアル, すなわち係数の和が 0 になる元がなすイデアルである. $\varprojlim_n k[\Pi]/I^n$ は完備 Hopf 代数となる. その group-like elements がなす群が冪単完備化, Lie-like elements がその Lie 環となる.

レポート問題 2.5. Π^{ab} が有限群ならば $\Pi_{\mathbb{Q}}^{\text{un}} = 1$ となることを示せ.

注意 2.6. (1) Π の dimension subgroup $D_m\Pi$ を「 $\Pi/D_m\Pi$ がねじれの無い最速降下中心フィルトレーション」として定義する. 即ち, $D_1\Pi = \Pi$, $D_2\Pi$ は $[\Pi, \Pi]$ を含み $\Pi/D_2\Pi$ がねじれの無い最小の正規部分群, \dots , $D_{n+1}\Pi$ は $[D_n\Pi, \Pi]$ を含み $\Pi/D_{n+1}\Pi$ がねじれの無い最小の正規部分群. このとき,

$$\text{Ker}(\Pi \rightarrow \Pi_k^{\text{un}}(k)) = \bigcap_{m \geq 1} D_m\Pi$$

となる.

(2) Π が自由群または有限生成な surface group ($= \pi_1$ (向き付けられた実曲面)) ならば $D_m =$ 中心降下列で,

$$\bigcap_{m \geq 1} D_m\Pi = 1$$

となることが知られている.

pro-冪単群の圏と pro-冪零 Lie 環の圏には圏同値

$$(\text{pro-冪単代数群 } /_k \text{ の圏}) \xleftrightarrow[\text{Exp}]{\text{Log}} (\text{pro-冪零 Lie 環 } /_k \text{ の圏})$$

があるので, Π_k^{un} についての情報は $\text{Lie } \Pi_k^{\text{un}}$ についてのそれと同値であることがわかる. 上の同値は, 行列群に埋め込んで考えると通常の行列の log と exp

$$\log : \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad \exp : \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

という一対一対応で与えられる (ここで $\text{char}(k) = 0$ を使った).

以上が冪単完備化である. が, われわれが欲しいのは G_k -作用付きの Lie 環である. もし G_k が Π に作用しているなら, 函手性から

$$G_k \rightarrow \text{Aut } \Pi \rightarrow \text{Aut } \Pi_k^{\text{un}} \cong \text{Aut}_{\text{Lie alg}}(\text{Lie } \Pi_k^{\text{un}})$$

という線形表現が得られるはずだが, G_k が作用しているのは Π の pro-有限完備化である.

そこで, 次のように位相の入った連続版の冪単完備化を考えるとうまくいく:

定義 2.7 (冪単完備化の連続版).

(1) Π を pro-有限群, U を \mathbb{Q}_ℓ 上の冪単代数群とする. 写像 $\Pi \rightarrow U(\mathbb{Q}_\ell)$ が連続であるとは, Π には pro-有限位相を, $U(\mathbb{Q}_\ell)$ には $GL_N(\mathbb{Q}_\ell)$ を $\mathbb{Q}_\ell^{N^2}$ の部分空間とみて \mathbb{Q}_ℓ -位相を入れたもとの連続であること.

(2) ρ_λ が連続準同型 $\rho_\lambda: \Pi \rightarrow U_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ (ここに U_λ は \mathbb{Q}_ℓ 上の冪単代数群) を走るときの射影極限 $\varprojlim_\lambda U_\lambda$ を $\Pi_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un.cont}}$ と書く.

$\text{Lie } \pi_1(\bar{X}, \bar{x})_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un.cont}}$ が $\text{Lie } \pi_1^{\text{mot}}(\bar{X}, \bar{x})$ の l 進実現である. また, X が体 k 上定義されているなら, G_k は $\text{Lie } \pi_1(\bar{X}, \bar{x})_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un.cont}}$ に作用する.

定理 2.8 (比較定理, [6]). Π を離散群とし, その pro-有限完備化を Π^\wedge , pro- l 完備化を $\Pi^{(\ell)}$ とする. もし Π^{ab} が有限生成ならば,

$$(\Pi^\wedge)_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un.cont}} \cong (\Pi^{(\ell)})_{\mathbb{Q}_\ell}^{\text{un.cont}} \cong (\Pi_{\mathbb{Q}}^{\text{un}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

この定理の二つ目の同型はエタールと Betti のコホモロジーの比較定理の π_1 版と呼ぶべき物であるが, Grothendieck の基本群の比較定理 (エタール基本群と位相的基本群の比較定理) を使って, あとは少しの考察で得られる.

ちなみに:

定理 2.9 (Hain). Π^{ab} が有限生成ならば $\Pi_k^{\text{un}} \otimes_k k' \cong \Pi_{k'}^{\text{un}}$.

注意 2.10. この Lie 環の具体例を一つ挙げる. Π が自由群 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ だったとする. このとき $\text{Lie } \Pi_{\mathbb{Q}}^{\text{un}}$ は自由 pro-冪零 Lie 環となる. すなわち, 非可換冪級数環 $\mathbb{Q}\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle$ の中で x_1, \dots, x_n から Lie bracket $[A, B] = AB - BA$ で生成される Lie 環の閉包と同型である.

群 Π の冪単完備化は上記のように universality で定義されたが, 次のように Π の冪単表現全体のなす淡中圏の基本群として定義することもできる:

定理 2.11. Π を群とする. 体 k 上の Π -加群 M であって次の二つの条件をみたすようなものを対象とする圏を \mathcal{T} とする:

(1) M は Π -不変なフィルトレーション

$$M = \cdots \supset W_m M \supset W_{m-1} M \supset \cdots = 0$$

を持つ.

(2) $\text{Gr}_m^W M$ への Π の作用は自明.

このとき \mathcal{T} は淡中圏であり,

$$\mathcal{T} \cong \text{Rep}_k(\Pi_k^{\text{un}}).$$

(この講義では線形空間や加群は全て有限生成としている.)

証明. $M \in \text{Rep}_k(\Pi_k^{\text{un}})$ に対する Π_k^{un} の作用はある U_λ を経由する:

$$\Pi \rightarrow U_\lambda(k) \curvearrowright M.$$

冪単群の代数的な表現は全て冪単だから, M の基底をうまくとれば上の作用は次のように経由する:

$$\Pi \rightarrow U_\lambda(k) \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} \right\} \curvearrowright M.$$

このことから M は (1), (2) をみたすことがわかる. 一方, 逆は易しい. \square

2.3 冪零 Lie 環 の性質

Lie 環 \mathfrak{u} が冪零 (nilpotent) であるとは, 降中心列がどこかで消える, すなわち $[[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}], \mathfrak{u}] \cdots, \mathfrak{u}] = 0$ となること. pro-冪零 であるとは, 冪零 Lie 環の射影極限であること.

定義 2.12. k 上の線形空間 V に対し,

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

とおき, free associated algebra という.

また, V から $[x, y] = xy - yx$ で生成される Lie 環 ($\subset T(V)$) を $L(V)$ と書き (これは V の基底を一つ取ればそれを変数として自由に生成される Lie 環である), その pro-冪零化

$$L(V)^\wedge = \varprojlim_N L(V)/L^N(V)$$

を V の生成する 自由 pro-冪零 Lie 環 と言う. ここで $L^N(V) = \bigoplus_{m \geq N} (V^{\otimes m} \cap L(V))$. また, Lie 環 \mathfrak{u} が自由 pro-冪零 であるとは, $\mathfrak{u} = L(V)^\wedge$ の形であること.

補題 2.13 ([6], Lemma 5.8). k を標数 0 の体とする. k 上の pro-冪零 Lie 環 \mathfrak{u} に対し, $\mathfrak{u}^{\text{ab}} = \mathfrak{u}/[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ とおくと, 次の二つのことが成立する:

- (1) $L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge \rightarrow \mathfrak{u}$ は全射.
- (2) $H^2(\mathfrak{u}, k) = 0$ ならば \mathfrak{u} は自由 pro-冪零.

注意 2.14. 上の (1) は次と同値 (中山の補題の類似): pro-冪零 Lie 環の射 $\mathfrak{u}' \rightarrow \mathfrak{u}$ について,

$$\mathfrak{u}'^{\text{ab}} \rightarrow \mathfrak{u}^{\text{ab}} \text{ が全射ならば } \mathfrak{u}' \rightarrow \mathfrak{u} \text{ も全射.}$$

(2) の Lie 環のコホモロジー群 $H^i(\mathfrak{u}, V)$ について: 左 \mathfrak{u} -加群/ k のなす圏 $\mathfrak{u}\text{-Mod}$ はアーベル圏なので,

$$H^i(\mathfrak{u}, V) := \text{Ext}_{\mathfrak{u}\text{-Mod}}^i(k, V)$$

と定義する. ここで, \mathfrak{u} は pro-冪零なので, 左 \mathfrak{u} -加群 M への作用は

$$\mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}/\mathfrak{n} \curvearrowright M$$

と有限次元 Lie 環 $\mathfrak{u}/\mathfrak{n}$ を経由することに注意.

$H^i(\mathfrak{u}, V)$ はまたコチェインを用いても定義できる. これについては Cartan-Eilenberg: Homological Algebra (Princeton) を参照.

レポート問題 2.15. 注意 2.14 の同値性を \mathfrak{u} が冪零のときに示せ.

補題 2.16. \mathfrak{u} を Lie 環とし, $L^m \mathfrak{u}$ をその中心降下列とする. $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{u})$ をとる. $\text{Gr}_L^\circ \mathfrak{u} = \bigoplus_{m \geq 1} L^m \mathfrak{u} / L^{m+1} \mathfrak{u}$ とおき,

$$\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{u}) \rightarrow \text{Aut}(\text{Gr}_L^\circ \mathfrak{u}) \ni \text{Gr}(\sigma)$$

を考えると $\text{Gr}(\sigma)$ は σ の \mathfrak{u}^{ab} への作用 $\sigma^{\text{ab}} \in \text{Aut}(\mathfrak{u}^{\text{ab}})$ だけで決まる. より具体的に, σ^{ab} は冪手性から $L(\sigma^{\text{ab}}) \in \text{Aut} L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge$ を引き起こすが, この作用が全射

$$L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge \rightarrow \text{Gr}_L^\circ \mathfrak{u}$$

を經由して $\text{Gr}(\sigma)$ の右辺の作用と compatible になる.

証明. (X_i) を \mathfrak{u}^{ab} の一つの基底とする. X_i の持ち上げ $\tilde{X}_i \in \mathfrak{u}$ を選ぶと, 全射の列

$$L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge \rightarrow \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}^{\text{ab}}; \quad X_i \mapsto \tilde{X}_i \mapsto X_i$$

が定義できる. \tilde{X}_1 の他に \tilde{X}_1' をとれば, \tilde{X}_1 は “ $\tilde{X}_1' + (L^2$ 以上の項)” という形をしているから,

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] \equiv [\tilde{X}_1', \tilde{X}_2] \pmod{L^3}.$$

したがって, $\text{Gr}_L^2 \mathfrak{u}$ では同じ元となる. 帰納法を使ってこのように,

$$L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge \rightarrow \mathfrak{u} \rightarrow \text{Gr}_L^\bullet \mathfrak{u}$$

は \tilde{X}_i のとり方にはよらないことがわかる.

よって,

$$\text{Aut}(\mathfrak{u}) \rightarrow \text{Aut}(\text{Gr}_L^\bullet \mathfrak{u}); \sigma \mapsto \text{Gr}(\sigma)$$

の像 $\text{Gr}(\sigma)$ の作用は $\sigma(\tilde{X}_i)$ たちの \mathfrak{u}^{ab} での像のみに依存するので, $\sigma^{\text{ab}} \in \text{Aut}(\mathfrak{u}^{\text{ab}})$ のみで決まる. 決まり方を見ると,

$$\sigma([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]) = [\sigma(\tilde{X}_i), \sigma(\tilde{X}_j)] \equiv [\sigma^{\text{ab}}(X_i), \sigma^{\text{ab}}(X_j)] \pmod{L^3}$$

であることから, $L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})$ への $L(\sigma^{\text{ab}})$ の作用と compatible であることが分かる. \square

定義 2.17. k を代数体, X を k 上の代数多様体として, 代数的基本群の \mathbb{Q}_ℓ -係数連続 Malcev 完備化 $\pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un, cont}}(\bar{X}, \bar{x})$ の Lie 環を

$$\mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x}) = \text{Lie}(\pi_{1, \mathbb{Q}_\ell}^{\text{un, cont}}(\bar{X}, \bar{x}))$$

とおく. これがモチーフ的基本群の ℓ 進実現ともくされるものである.

$\mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x})$ が 混合 Tate 型 であるとは, 基本群のアーベル化への G_k の作用が

$$G_k \curvearrowright \pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, \bar{x})^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}_\ell(m)^{\oplus \text{有限}}$$

の形であること. また, $\mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x})$ が $\mathcal{O}_{k, S}$ 上 非特異 であるとは, 基本群への G_k の作用が $G_{k, S} := \pi_1(\mathcal{O}_{k, S})$ を經由すること:

$$G_k \rightarrow G_{k, S} \curvearrowright \pi_1^{(\ell)}(\bar{X}, \bar{x}).$$

ここで S は ℓ 上の素点を全て含むと仮定する.

一般論より,

補題 2.18. $G_{k, S}$ -加群として $\pi_1(\bar{X})^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong \mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x})^{\text{ab}}$.

系 2.19. $\mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x})$ が混合 Tate 型で $\mathcal{O}_{k, S}$ 上非特異ならば

$$\mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x}) \in \text{pro-MTM}_\ell(\mathcal{O}_{k, S}).$$

ここで $\text{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{k, S})$ は $G_{k, S}$ -加群 M/\mathbb{Q}_ℓ であつて, $G_{k, S}$ -不変なフィルトレーション

$$0 = \cdots \subset W_m M \subset W_{m+1} M \subset \cdots = M$$

をもち $\text{Gr}_m^W M \cong \mathbb{Q}_\ell(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ となるものたちがなす圏であつた. (定義 1.7 参照.)

証明. $\mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{p}_\ell(\bar{X}, \bar{x})$ は pro-冪零だから, $\varprojlim_N \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{p}_\ell$ であるので, $M := \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell \in MTM_\ell(\mathcal{O}_{k,S})$ を示せばよい. M に重み付きフィルトレーションを次のように定義する:

$$\begin{array}{c} M = \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell \supset L^2 \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell \supset \cdots \supset L^{N-1} \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell \supset 0 \\ \left\| \begin{array}{c} \text{---} \\ \mathfrak{p}_\ell^{\text{ab}} \\ \text{---} \end{array} \right\| \qquad \qquad \qquad \left\| \right. \\ W_{-2m}M \supset W_{-4m}M \supset \cdots \supset W_{-2(N-1)m}M \end{array}$$

(即ち, $W_{-2nm}M := L^n \mathfrak{p}_\ell/L^N \mathfrak{p}_\ell$, $\text{Gr}_{-2nm}^W M = L^n \mathfrak{p}_\ell/L^{n+1} \mathfrak{p}_\ell$ (他の $\text{Gr}_i^W M = 0$)).
すると, $\text{Gr}_m^W M \cong \mathbb{Q}_\ell(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ の形であることは補題 2.16 よりわかる. \square

第3章 ℓ 進混合 Tate 加群

3.1 この章の目標

F を代数体, S を ℓ の上の素点を全て含む F の有限素点の有限集合とし, $\mathcal{O}_{F,S}$ を F の S -整数環とする.

前章で圏 $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の定義を復習したが, ここでの目標は,

$$MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S}) = \text{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathcal{G}_{F,S}^\ell)$$

なる pro-代数群 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ を求めることである. すなわち, この圏が淡中圏であることを示し, その淡中基本群を求めることである.

3.2 負の重み付き拡大と重み付きフィルトレーション

定理 3.1 (Levi 分解). (cf. [2], p.158) k を標数 0 の体とし,

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow S \rightarrow 1$$

を k 上の代数群の完全列とする. U は冪単, S は簡約 (reductive) と仮定する. このとき, 次のことが成立する:

- (1) この列は split する, *i.e.*, セクション $s: S \rightarrow G$ があって, $S \xrightarrow{s} G \rightarrow S$ は S 上の恒等写像となる.
- (2) このセクションは共役を除き一意的, *i.e.*, 二つのセクション s_1, s_2 を取れば, ある $u \in U$ があって

$$s_1(x) = us_2(x)u^{-1} \quad (x \in S).$$

注意 3.2. (1) k の標数が 0 でないときには, (2) の反例がある.

(2) この定理は U, G が pro-代数群のときにも成立する.

上の状況で, 特に S が乗法群 \mathbb{G}_m のときを考えよう. 完全列

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

があったとする. これのアーベル化を取って, $G/[U, U] \rightarrow \mathbb{G}_m$ のセクションを選ぶ:

$$1 \rightarrow U^{\text{ab}} \rightarrow G/[U, U] \xrightarrow{s} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

すると $s(\mathbb{G}_m)$ の共役作用により作用 $\mathbb{G}_m \curvearrowright U^{\text{ab}}$ を得るが, これは s の選び方に依らない. これにより U^{ab} を \mathbb{Q}_ℓ 上の \mathbb{G}_m -加群と思える. \mathbb{G}_m の代数的な既約表現は, m 乗倍で作用する加群 $\mathbb{Q}_\ell(m)$ しかないので

$$U^{\text{ab}} = \prod_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell(m)^{\oplus \text{有限}}$$

の形である.

定義 3.3. G を \mathbb{Q}_ℓ 上の代数群, U を冪単群とする. 代数群の拡大 (= 短完全列)

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

が 負の重み付き拡大 (negatively weighted extension) であるとは, 上の U^{ab} の分解で $m \geq 1$ の部分しか出て来ないこと, *i.e.*,

$$U^{\text{ab}} = \prod_{m \geq 1} \mathbb{Q}_\ell(m)^{\oplus \text{有限}}$$

となることをいう. (pro-版も同様.)

定義 3.4 (重み付きフィルトレーション).

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

を負の重み付き拡大とする. (常に \mathbb{Q}_ℓ 上であると仮定.) \mathbb{Q}_ℓ 上有限次元の G -加群 M には, 次のようにして 重み付きフィルトレーション (weighted filtration) が定義される:

まずセクション $s: \mathbb{G}_m \rightarrow G$ を取り, これにより M を \mathbb{G}_m -加群とみれば, 分解

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M[n]$$

を得る ($M[n]$ は M の $\mathbb{Q}_\ell(n)$ -同型成分, *i.e.*, $M[n] \cong \mathbb{Q}_\ell(n)^{\oplus \text{有限}}$ なる最大部分). (この分解は s に依存することに注意.) そこで,

$$W_m M := \bigoplus_{n \geq -m/2} M[n]$$

とおく. m が偶数のときには, $W_{m+1} M = W_m M$ となっている.

注意 3.5. $\mathbb{Q}_\ell(m)$ の weight を $-2m$ とする, 即ち

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\ell(m) = W_{-2m}\mathbb{Q}_\ell(m) = W_{-2m+1}\mathbb{Q}_\ell(m) = \cdots \\ \cup \\ W_{-2m-1}\mathbb{Q}_\ell(m) = 0 \end{aligned}$$

とするのには歴史的理由 (Hodge 理論での weight との対応) がある.

定理 3.6. 上の定義において, $W_m M$ は s に依存しない G -不変なフィルトレーションとなる.

証明. $\mathfrak{u} = \text{Lie } U$ とおく.

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \xrightarrow{s} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

で, 一般に (pro-冪単代数群の圏) \cong (pro-冪零 Lie 環の圏) であるから,

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \text{Aut } U \cong \text{Aut } \mathfrak{u}.$$

これにより,

$$\mathfrak{u} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{u}[n]$$

と分解すれば,

$$\mathfrak{u}^{\text{ab}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{u}^{\text{ab}}[n]$$

であり,

$$L(\mathfrak{u}^{\text{ab}})^\wedge \twoheadrightarrow \mathfrak{u} \twoheadrightarrow \text{Gr}_\bullet^L(\mathfrak{u})$$

において $\text{Gr}_\bullet^L \mathfrak{u}$ に $\mathbb{Q}_\ell(n)^{\oplus \text{有限}}$ ($n \geq 1$) しか出てこないから, 分解 $\mathfrak{u} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{u}[n]$ は実は $n \geq 1$ のところだけ.

二つのセクション $s, s' : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ を取ると, ある $u \in U$ があって

$$s'(a) = us(a)u^{-1} \quad (a \in \mathbb{G}_m)$$

となる (定理 3.1). $W_m M = \oplus M[m]$, $W'_m M = \oplus M[m]'$ をそれぞれ s, s' によるものとしたとき,

$$u(W_m M) = W_m M$$

を示せばよい.

$u = \exp X$ となる $X \in \mathfrak{u}$ を取る. Lie 環の作用

$$\mathfrak{u} \otimes M \rightarrow M$$

は G の作用と compatible だから,

$$u[m] \otimes M[n] \rightarrow M[m+n]$$

を得る. $u = \bigoplus_{n \geq 1} u(n)$ だから

$$u \otimes W_n M \rightarrow W_{n+1} M.$$

この作用を「微分」して, $\exp X = 1 + X + \dots$ より,

$$u(W_m M) = \exp X(W_m M) \subset W_m M$$

となるので O.K. □

以下, Γ が pro-有限群であるとき, 射 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ は連続であると仮定する.

定義 3.7. \mathbb{Q}_ℓ 上の代数群の射 $G \rightarrow \mathbb{G}_m$ が 負の重み付き (pro-) 代数群 であるとは,

- (1) 全射であり,
- (2) この射の核 U は (pro-) 冪単群であり,
- (3) $U \curvearrowright \mathbb{G}_m$ により $U^{\text{ab}} = \prod_{m \geq 1} U^{\text{ab}}[m]$ と分解されることをいう. (ここで $U^{\text{ab}}[m]$ は U^{ab} の $\mathbb{Q}_\ell(m)$ -同型成分.)

定理 3.8. G を 負の重み付き (pro-) 代数群とし, M を G -加群とする. このとき, M には重み付きフィルトレーション

$$0 = \dots \subset W_m M \subset W_{m+1} M \subset \dots = M$$

が入る (*i.e.*, 各 $W_m M$ は G -加群であって, $\text{Gr}_m^W M \cong \mathbb{Q}_\ell(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ となる).

(M が G -加群であるとは, \mathbb{Q}_ℓ 上有限次元の線形空間であり, 作用 $G \curvearrowright M$ がある代数的な商 G/N を經由することであった. *cf.* $\text{Hom}(G, \text{Aut } M) = \varinjlim_\lambda \text{Hom}(G_\lambda, \text{Aut } M)$ if $G = \varprojlim_\lambda G_\lambda$. pro- \mathcal{C} については Artin-Mazur, “Étale homotopy”, Springer L.N.M. 100, を参照のこと.)

証明. Levi 分解によるセクション $G \xrightarrow{s} \mathbb{G}_m$ を取ると, 分解

$$W_m M = \bigoplus_{n \geq -m/2} M[n]$$

は s によらない (定理 3.6).

$u = \text{Lie } U$ は $u = \bigoplus_{n \geq 1} u[n]$ と分解される. 作用 $u \otimes M \rightarrow M$ があるが, 実は $u \otimes W_m M \rightarrow W_{m-2} M$ である ($u[\geq 1] \otimes M[\geq -m/2] \rightarrow M[\geq -m/2 + 1]$ となっている).

$x \in U$ を取り, $x = \exp X$ ($X \in \mathfrak{u}$) と書くと, $xv = v + Xv + X^2v/2 + \dots$ だから U は $W_m M$ に作用し, しかも

$$W_m M \xrightarrow{\exp X} W_m M \rightarrow W_m M / W_{m-1} M$$

の下 $v \in W_m M$ は $\bar{v} = v(\text{mod } W_{m-1} M)$ に写される.

さて, まず $W_m M$ が G -加群であることについては, U と $s(\mathbb{G}_m)$ がそれぞれ $W_m M$ に作用していて, $G = U \rtimes \mathbb{G}_m$ であることから O.K.

このことから $\text{Gr}_m^W M$ は G -加群となるが, この作用が \mathbb{G}_m を経由することを示そう. 実際上で見た通り, $x \in U$ については,

$$\begin{aligned} x : W_m M &\rightarrow W_m M / W_{m+1} M \\ v &\mapsto \bar{v} \end{aligned}$$

であるから, これは $\text{Gr}_m^W M$ 上の恒等写像を導く. 従って G の作用は,

$$G \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m \curvearrowright \text{Gr}_m^W M$$

と経由する. さらに,

$$\begin{array}{ccc} W_{m-1} M & \subset & W_m M \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{n \geq -(m-1)/2} M[n] & \subset & \bigoplus_{n \geq -m/2} M[n] \end{array}$$

において差が出るのは m が偶数のときだけで, そのとき $\text{Gr}_m^W M = M[-m/2]$ となる. よって $W_m M$ は M の重み付きフィルトレーションである. \square

定理 3.9 (strictness). (cf. 混合 Hodge 構造でも成立.)

G を重み付き (pro-) 代数群とすると, \mathbb{Q}_ℓ 上の G -加群の準同型 $f : M \rightarrow M'$ について, 次が成立する:

- (1) $f(W_m M) = W_m M' \cap f(M)$,
- (2) $f^{-1}(W_m M') = W_m M + \text{Ker } f$,
- (3) $\text{Gr}_\bullet^W(f) : \text{Gr}_\bullet^W(M) \rightarrow \text{Gr}_\bullet^W(M')$ が定義できて, 函手

$$\text{Gr}_\bullet^W : (G\text{-加群の圏}) \rightarrow (\mathbb{Q}_\ell\text{-線形空間の圏})$$

は完全函手である.

Note: $f(W_m M) \subset W_m M'$ でありさえすれば $\text{Gr}_\bullet^W(f)$ は定義できる.

注意 3.10. 実は (1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3).

これらの性質 (1), (2), (3) を持つ f を strict と呼ぶ.

strict でない例: $M = M'$, $W_m M = W_{m-1} M'$, $f = \text{id} : M \rightarrow M'$ という状況では, $\text{id} : W_m M \rightarrow W_m M'$ は

$$\begin{array}{ccc} W_m M & \longrightarrow & W_m M' \\ & \searrow & \cup \\ & & W_{m-1} M' \end{array}$$

と經由するから $W_m M / W_{m-1} M \rightarrow W_m M' / W_{m-1} M'$ は 0-写像であり, $\text{Gr}_m^W(\text{id}) = 0$ となる.

証明. セクション $G \xrightarrow{s} \mathbb{G}_m$ により, 分解

$$M = \bigoplus M[n], \quad M' = \bigoplus M'[n]$$

を得る. Schur の補題から $f : M \rightarrow M'$ は

$$f = \bigoplus f_n, \quad f_n : M[n] \rightarrow M'[n]$$

と分解される. 特に $f(M)[n] = f(M[n])$ である.

(1) について: $f(M) = \bigoplus f(M)[n]$ と分解すると, $f(M)[n] = f(M) \cap M'[n]$ であるから, $f(M[n]) = M'[n] \cap f(M)$. これを $\bigoplus_{n \geq -m/2}$ すればよい.

(2) については省略.

(3) について: 例えば

$$f : M \rightarrow M' \text{ ならば } \text{Gr}_\bullet^W(f) : \text{Gr}_\bullet^W M \rightarrow \text{Gr}_\bullet^W M'$$

という命題は次のように示される: (1) により

$$f(W_m M) = W_m M' \cap f(M) = W_m M' \cap M' = W_m M'$$

となるので $W_m M \rightarrow \text{Gr}_m^W(M')$ は全射. 従って $\text{Gr}_\bullet^W(f)$ も全射となる. 他も同様である. \square

レポート問題 3.11. 抽象的に W_m と f が与えられたときに

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3)$$

を示せ.

$f : M \rightarrow M'$ の像 $f(M)$ に, M' のフィルトレーションを制限してフィルトレーションを与えると, (3) より

$$\text{Gr}_\bullet^W f(M) = (\text{Gr}_\bullet^W f)(\text{Gr}_\bullet^W M)$$

となる. このことを

$$\text{Im}(\text{Gr}_\bullet^W M) = \text{Gr}_\bullet^W(\text{Im} M)$$

と表す.

3.3 重み付き完備化

連続で Zariski dense な射¹ $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ を考える. (単に $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m$ とも書く.)

定義 3.12. Γ -加群 M/\mathbb{Q}_ℓ が ρ に関して 重み付き (weighted) であるとは, 次の二つの条件をみたすことを言う:

- (1) M は $0 = \cdots \subset W_m M \subset W_{m+1} M \subset \cdots = M$ なるフィルトレーション W で各 $W_m M$ は Γ -加群となるものを持つ.
- (2) Γ の $\text{Gr}_m^W M$ への作用は $\Gamma \xrightarrow{\rho} \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ を経由し, \mathbb{G}_m -加群として, $\text{Gr}_m^W M = \mathbb{Q}_\ell(-m/2)^{\oplus \text{有限}}$ の形である.

従って, 特に $\Gamma = G_{F,S}$, $\rho = \chi: G_{F,S} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$: 円分指標としたときは

$$(\text{重み付き } G_{F,S}\text{-加群の圏}) = \text{MTM}_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$$

となる. ただし S は ℓ 上の素点を全て含むとする.

この節の目標は次の定理を証明することである:

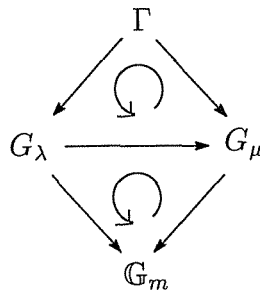
定理 3.13. (重み付き Γ -加群の圏) $\cong \text{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Gamma^{\text{wt}})$.

ここで Γ^{wt} は次に定義される pro-代数群である. canonical な連続準同型 $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{wt}}(\mathbb{Q}_\ell)$ があり, これによる引き戻しが上の同型を与える.

定義 3.14. Γ^{wt} を次の圏のなす射影系 $(G_\lambda, G_\lambda \rightarrow G_\mu)$ (またはその射影極限) と定義する:

対象: 負の重み付き代数群 $G_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m$ で Zariski dense な射 $\rho_\lambda: \Gamma \rightarrow G_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ を持つもの,

射: $G_\lambda \rightarrow G_\mu$ で次の図式を可換にするもの:



この Γ^{wt} (または $\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m$) を Γ の $(\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell))$ に関する 重み付き完備化 (weighted completion) と言う.

¹射 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ が Zariski dense とは, 像 $\text{Im}(\rho)$ が \mathbb{G}_m の中で Zariski dense であること. それが連続であるとは, Γ が位相群で, $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ には \mathbb{Q}_ℓ の位相が入っているとして連続であるということ. 定義 2.7 参照.

$\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m$ は負の重み付き pro-代数群になる. 各 ρ_λ が Zariski dense なので $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{wt}}(\mathbb{Q}_\ell)$ も Zariski dense である.

証明. $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{wt}}(\mathbb{Q}_\ell)$ で引き戻すことで, 函手

$$(\Gamma^{\text{wt}}\text{-加群の圏}) \rightarrow (\Gamma\text{-加群の圏})$$

を得るが, $\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m$ は負の重み付きだから, Γ^{wt} -加群 M には自然に重み付きフィルトレーションが入る.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{\text{wt}} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \curvearrowright \text{Gr}_m^W M \\ \nwarrow & & \nearrow \rho \\ & \Gamma & \end{array}$$

となっているから, M は重み付き Γ -加群となる. よって上の函手の行き先は

$$(\Gamma^{\text{wt}}\text{-加群の圏}) \rightarrow (\text{重み付き } \Gamma\text{-加群の圏})$$

となっている.

逆に重み付き Γ -加群 M が与えられたとき,

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow \text{Aut } M \times \mathbb{G}_m \\ \gamma &\mapsto (\gamma, \rho(\gamma)) \end{aligned}$$

の像の Zariski 閉包を取ることを考える. M は重み付きフィルトレーションを持つから, それに沿った基底を取ると M への γ の作用の表現行列は,

$$\begin{pmatrix} \rho(\gamma)^m & & * \\ & \rho(\gamma)^{m+1} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

の形になるから, $\Gamma \rightarrow \text{Aut } M \times \mathbb{G}_m$ の像は,

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} x^m & & * \\ & x^{m+1} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, x \right) \right\}$$

なる閉部分代数群に入る. この中に Γ の Zariski 閉包は入る. それを G_λ とおくと, M は自然に G_λ -加群になる. $U_\lambda := \text{Ker}(\text{pr}_2 : G_\lambda \rightarrow \mathbb{G}_m)$ とおく:

$$1 \rightarrow U_\lambda \rightarrow G_\lambda \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

ここで U_λ は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \right\}$ という形の冪単代数群であり, しかも G_λ は負の重み付きである. 実際, $G_\lambda \rightarrow \mathbb{G}_m$ に対して

$$\mathbb{G}_m \rightarrow G_\lambda; \quad x \mapsto \left(\begin{pmatrix} x^m & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}, x \right)$$

というセクションが取れる. この最後の対角行列の U_λ への共役作用を考えると, U_λ は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \right\}$$

の形で, $*$ に出て来るのは $\mathbb{Q}_\ell(m)$, $m \geq 1$, の形のものだけである. よって G_λ は負の重み付きである.

従って (重み付き完備化の定義により) 射 $\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow G_\lambda$ があり,

$$\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow G_\lambda \curvearrowright M$$

により M は Γ^{wt} -加群となる. □

系 3.15. $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S}) \cong \text{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{F,S}^{\text{wt}})$.

$\mathcal{G}_{F,S}^\ell := G_{F,S}^{\text{wt}}$ とおいて, これを $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ の モチーフ的ガロア群 と呼ぶ. $M \in MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ ならば, 作用 $G_{F,S} \curvearrowright M$ は

$$G_{F,S} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell \curvearrowright M$$

と経由することに注意しておこう. (後に「 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ が小さい故に $G_{F,S}$ も小さい」(cf. (I-1)) ということを示す (第5章)).

注意 3.16. 上の系は $MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$ が淡中圏であり, その淡中基本群が $G_{F,S}^{\text{wt}}$ であることを示している.

第4章 重み付き完備化の構造定理

$\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ を Zariski dense な連続群準同型とする. $\Gamma^{\text{wt}} \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m$ をその重み付き完備化とし, $\mathcal{U}_\Gamma := \text{Ker}(\Gamma^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m)$ とおく:

$$1 \rightarrow \mathcal{U}_\Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

\mathcal{U}_Γ は pro-冪単代数群である.

定理 4.1 ([7], 主定理). 全ての $m \geq 1$ に対し $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_{\text{cts}}^1(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m)) < \infty$ と仮定する.

(W-1) 次の \mathbb{G}_m -加群の canonical な同型がある:

$$\mathcal{U}_\Gamma^{\text{ab}} \cong \prod_{m \geq 1} H_{\text{cts}}^1(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m).$$

(W-2) $\mathfrak{u} = \text{Lie} \mathcal{U}_\Gamma$ とおくと, 次の canonical な単射がある:

$$H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow \bigoplus_{m \geq 2} H_{\text{cts}}^2(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m)) \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)^*.$$

ここで, 一般に \mathbb{Q}_ℓ -線形空間 V に対し $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ とおいた. $H_{\text{cts}}^i(\Gamma, V)$ は, 群のコホモロジー群の定義で n -コチェインとして連続なものだけを使って定義したもの. また $H_{\text{cts}}^i(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell)$ は, Lie 環のコホモロジー群の定義で, $\mathfrak{u} = \varprojlim u_\lambda$ (u_λ は冪零) としたとき, ある λ に対して

$$\begin{array}{ccc} u \wedge \dots \wedge u & \longrightarrow & \mathbb{Q}_\ell \\ \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \\ u_\lambda \wedge \dots \wedge u_\lambda & & \end{array}$$

と經由するような連続コチェインで定義されたものである.

定理 4.2 (Folklore). $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut } V$ を連続群準同型とする (これにより V を Γ -加群と思う). このとき, $H_{\text{cts}}^1(\Gamma, V)$ と

$$\{V \rtimes \Gamma \rightarrow \Gamma \text{ のセクション } s\} / (V \text{ による共役})$$

との間に自然な全単射がある.

は, 代数群の負の重み付き拡大

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & U & \rightarrow & G & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & & & \uparrow \nearrow & & \\
 & & & & \Gamma & &
 \end{array}$$

であって U がアーベルで $\Gamma \rightarrow G$ が Zariski dense なものに対して普遍的である. これは次の図式を考えることでわかる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & U & \rightarrow & G & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & \searrow & \rho \\
 & \mathcal{U}_\Gamma^{\text{ab}} & & & & \Gamma & \\
 & \nwarrow & \uparrow & & \uparrow & \swarrow & \rho \\
 1 & \rightarrow & \mathcal{U}_\Gamma & \rightarrow & \Gamma^{\text{wt}} & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1.
 \end{array}$$

従って $\mathcal{U}_\Gamma^{\text{ab}}$ は $\varprojlim_\lambda V_\lambda$ と書ける. ここでの射影極限は, 負の重み付き拡大

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & V_\lambda & \rightarrow & G_\lambda & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & & & \phi \searrow \circ \nearrow \rho & & \\
 & & & & \Gamma & &
 \end{array}$$

であって V_λ がアーベルであり $\phi : \Gamma \rightarrow G_\lambda$ が Zariski dense であるものを全て列挙して \varprojlim を取る. そこで, こうやって現れて来る V_λ がどれくらいあるかを知りたい.

これら $1 \rightarrow V_\lambda \rightarrow G_\lambda \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ の一つを $1 \rightarrow V \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ とする. さて $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V[n]$ で, Levi の定理より G は $G \cong V \rtimes \mathbb{G}_m$ と半直積の形に書けるから,

$$G \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V[n] \rtimes \mathbb{G}_m.$$

合成写像 $\Gamma \xrightarrow{\phi} V \rtimes \mathbb{G}_m \xrightarrow{\text{proj.}} V[n] \rtimes \mathbb{G}_m$ を $\phi[n]$ とするとき,

主張 4.4. 各 $\phi[n]$ が Zariski dense $\iff \phi$ が Zariski dense .

証明. (\Leftarrow) は明らかなので, (\Rightarrow) を示す. $\phi : \Gamma \rightarrow V \rtimes \mathbb{G}_m$ の像の Zariski 閉包を Γ^{Zar} とし, $U := \text{Ker}(\Gamma^{\text{Zar}} \rightarrow \mathbb{G}_m)$ とおく. 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & U & \rightarrow & \Gamma^{\text{Zar}} & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cap & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \rightarrow & V & \rightarrow & V \rtimes \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1
 \end{array}$$

において, $\rho : \Gamma^{\text{Zar}} \rightarrow \mathbb{G}_m$ は全射であり, Levi の定理によりセクション $s : \mathbb{G}_m \rightarrow \Gamma^{\text{Zar}}$ がある. $U \hookrightarrow V$ は \mathbb{G}_m -加群の準同型となるから $U[n] \hookrightarrow V[n]$. 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & U & \rightarrow & \Gamma^{\text{Zar}} & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & U[n] & \rightarrow & V \times \mathbb{G}_m & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & \hookrightarrow & & & & \\
 1 & \rightarrow & V[n] & \rightarrow & V[n] \times \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1
 \end{array}$$

において, 合成 $\Gamma^{\text{Zar}} \rightarrow V \times \mathbb{G}_m \rightarrow V[n] \times \mathbb{G}_m$ は仮定により全射. よって $U \rightarrow V[n]$ も全射 (5-lemma). 故に任意の n に対して $U[n] = V[n]$. 従って $U = V$ となり, $\Gamma^{\text{Zar}} = V \times \mathbb{G}_m$, *i.e.*, ϕ が Zariski dense であることがわかった. □

この主張により $\mathcal{U}_\Gamma^{\text{ab}}$ は weight ごとに分解することがわかる:

$$\mathcal{U}_\Gamma^{\text{ab}} = \varprojlim_n (\oplus_{m=1}^n \mathcal{U}_m).$$

ここで \mathcal{U}_m は, 図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & G & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & \text{Zar.dense } \phi \nearrow & \circlearrowleft & \searrow \rho & & \\
 & & & \Gamma & & &
 \end{array}$$

であって $V = V[m]$ なるものが走るときの極限 $\varprojlim V$ のことである.

そこで次の定理を示せば (W-1) は O.K.:

定理 4.5. $\mathcal{U}_m \cong H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)$.

証明. $H = H^1(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))$ とおく. 右辺が \mathcal{U}_m と同様の universality を持つことを示す. 即ち, 図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m) & \rightarrow & (H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \times \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\
 & & & & \phi_{\text{taut}} \nearrow & \circlearrowleft & \searrow \rho \\
 & & & & & \Gamma &
 \end{array}$$

を作り, これが普遍的であることを示す.

一般に \mathbb{G}_m -加群 V に対しその $\mathbb{Q}_\ell(m)$ -同型成分を

$$V[m] \cong A \otimes \mathbb{Q}_\ell(m) \quad (A = \mathbb{Q}_\ell(0)^{\oplus \dim V[m]})$$

と書く (この同型は canonical でない).

さて,

$$0 \rightarrow V[m] \rightarrow V[m] \rtimes \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

連続 $\phi \searrow \circlearrowleft \nearrow \rho$
 Γ

なる $\phi \pmod{\text{Inn } V[m]}$ と $\mu(\phi) \in H^1(\Gamma, V[m]) = H \otimes A$ とが対応している. ここで特に $A = H^*$ と取ると, $\text{id} \in H^* \otimes H$ に対応するもの $\phi_{\text{taut}} : \Gamma \rightarrow (H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \rtimes \mathbb{G}_m$ があるが, これが他の A, ϕ に対し universality を持つ. 実際 ($\mu(\phi) \in A \otimes H \cong \text{Hom}(H^*, A)$ と思うと) 図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \Gamma & & & \\ & & & \downarrow \phi_{\text{taut}} & & & \\ 0 & \rightarrow & H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m) & \longrightarrow & (H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \rtimes \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\ & & \downarrow \mu(\phi) \otimes \text{id} & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & A \otimes \mathbb{Q}_\ell(m) & \longrightarrow & (A \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \rtimes \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & & & \\ & & V = V[m] & & & & \end{array}$$

において, $\phi = (\mu(\phi) \otimes \text{id} \rtimes 1) \circ \phi_{\text{taut}}$ となる. これで $\mu(\phi) : H^* \rightarrow A$ と $\phi : \Gamma \rightarrow V[m] \rtimes \mathbb{G}_m$ とが対応し, ϕ_{taut} が欲しい universality を持つ.

また, この ϕ_{taut} は Zariski dense である. 実際, universality により, 次の図式においてセクション $(H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \rtimes \mathbb{G}_m \rightarrow \phi_{\text{taut}}(\Gamma)^{\text{Zar}}$ が生じるから:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{id.}} & \\ \phi_{\text{taut}}(\Gamma)^{\text{Zar}} & \xrightarrow{\quad} & (H^* \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)) \rtimes \mathbb{G}_m \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \Gamma & \end{array}$$

□

定理 4.1 の (W-2) の証明

$\theta \in H^2_{\text{cts}}(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes V$ は

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathfrak{u}_\theta \rightarrow \mathfrak{u} \rightarrow 0$$

なる Lie 環の中心拡大に対応している. ($\mathfrak{u}_\theta = \mathfrak{u} \oplus V$ に Lie bracket

$$[(x, v), (y, w)] = ([x, y], u + v + f(x, y))$$

を入れることと、コサイクル $f: \mathfrak{u} \wedge \mathfrak{u} \rightarrow V$ が対応している (f の類 $= \theta$.)

ところで今 \mathfrak{u} は \mathbb{G}_m -加群であり、 $H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes V$ も \mathbb{G}_m -加群になる. 一方、Lie 環の中心拡大 $\mathfrak{u}_\theta = \mathfrak{u} \oplus V$ も \mathbb{G}_m -加群だが、一般にはこの作用は Lie 環の自己同型として作用するわけではない.

補題 4.6. $\theta \in (H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes V)^{\mathbb{G}_m}$ であることと、対応する Lie 環の中心拡大 $\mathfrak{u}_\theta = \mathfrak{u} \oplus V$ への \mathbb{G}_m の作用が Lie 環の自己同型としての作用であることは同値である.

あとは、次の主張を示せばよい:

主張 4.7. 自然な射

$$(H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell(m))^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{*} H_{\text{cts}}^2(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))$$

は単射である.

もしこの主張が示せれば

$$H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell)[-m] \hookrightarrow H_{\text{cts}}^2(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m)) \otimes \mathbb{Q}_\ell(m)^*$$

となり、(W-2) が言える. ちなみに $H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell)[-1] = 0$ だから、 $m \geq 2$ だけ取ればよい.

証明. $\theta \in (H_{\text{cts}}^2(\mathfrak{u}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell(m))^{\mathbb{G}_m}$ とすると、次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Q}_\ell(m) & \rightarrow & \mathfrak{u}_\theta & \longrightarrow & \mathfrak{u} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \exp & \downarrow \exp & \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{Q}_\ell(m) & \rightarrow & \mathcal{U}_\theta & \longrightarrow & \mathcal{U}_\Gamma \rightarrow 1. \end{array}$$

ここで左端の同型は $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という対応である.

上の補題により \mathfrak{u}_θ が \mathbb{G}_m -作用を持つことから、 \mathcal{U}_θ も \mathbb{G}_m -作用を持ち、次の可換図式の上段の完全列を得る (下段はその引き戻し):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathbb{Q}_\ell(m) & \rightarrow & \mathcal{U}_\theta \rtimes \mathbb{G}_m & \rightarrow & \mathcal{U}_\Gamma \rtimes \mathbb{G}_m (= \Gamma^{\text{wt}}) \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{Q}_\ell(m) & \rightarrow & \Gamma_\theta & \xrightarrow{s} & \Gamma \rightarrow 1. \end{array}$$

この下段は $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))$ の元を与え、それは θ の $*$ による像になっている (上の図式中のような集合論的セクション $s: \Gamma \rightarrow \Gamma_\theta$ から 2-コサイクル $(x, y) \mapsto s(x)s(y)s(xy)^{-1}$ が作れ、これが $*$ (θ) $\in H^2(\Gamma, \mathbb{Q}_\ell(m))$ を与える). これが消えることと下段の完全列が split することとは同値であり、もしこれが split すれば、右端の上向きの射の Zariski density と Γ^{wt} の universality から、上段の完全列も split する. よって $\theta = 0$ となり、 $*$ の単射性が示された. \square

次の Soulé の定理を思い出そう:

定理 4.8 (Soulé [14]). F を代数体, S を F の有限素点の有限集合で l 上の素点を全て含むものとする. $H_{\text{cts}}^1(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ の次元を ρ_m とおくと,

$$\rho_m = \begin{cases} r_1 + r_2 - 1 + \#S, & m = 1, \\ r_2, & m \geq 2, \text{ 偶}, \\ r_1 + r_2, & m \geq 3, \text{ 奇}, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで r_1, r_2 はそれぞれ F の実素点, 複素素点の個数である. さらに, 全ての $m \geq 2$ に対し

$$H_{\text{cts}}^2(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m)) = 0.$$

実は Chern 写像により

$$K_{2m-1}(\mathcal{O}_{F,S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\cong} H_{\text{cts}}^1(G_{F,S}, \mathbb{Q}_\ell(m))$$

である (cf. Borel の定理 1.5).

定理 4.1 の系として次を得る:

系 4.9. $G_{F,S} \xrightarrow{\text{円分指標}} \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ の重み付き完備化を

$$1 \rightarrow \mathcal{U}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

とし, $\mathfrak{u}_{F,S}^\ell := \text{Lie } \mathcal{U}_{F,S}^\ell$ とおく.

(1) $\mathcal{U}_{F,S}^\ell$ の生成元として次のようなものがとれる. 各 $m = 1, 2, 3, \dots$ において, $\text{Gr}_{-2m}^W(\mathcal{U}_{F,S}^{\ell, ab})$ の基底として ρ_m 個の元をとり, $W_{-2m} \mathcal{U}$ の元に持ち上げたものを, m を動かして全部集める.

(2) $\mathfrak{u}_{F,S}^\ell$ は pro-冪零 Lie 環として自由である.

第5章 伊原版への応用

$X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, $\pi_1 = \pi_1(\bar{X})$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\ell}(\bar{X}, \bar{x}) = \text{Lie}(\pi_{1, \mathbb{Q}_{\ell}}^{\text{un.cont}}(\bar{X}, \bar{x}))$ とおく.
 ここでの目標は第1章で述べた次の予想のうちの (I-1) を証明することである:

(I-1) $\text{Gr}_I^{\geq 0} G_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$ は $\sigma_3, \sigma_5, \dots$ で生成される.

(I-2) $\text{Gr}_I^{\geq 0} G_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$ は次数付き Lie 環として自由である.

フィルトレーション I^{\bullet} は π_1 の中心降下列によるものであり, 第4章の W は重み付きフィルトレーションである. これらと比較するのが面倒なのである.

$F = \mathbb{Q}$, $S = \{\ell\}$ として, 図式

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\text{全射}} & G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}(\pi_1/L^{m+1}\pi_1) \\ \cup & & \cup \\ I^m G_{\mathbb{Q}} & \twoheadrightarrow & I^m G_{F,S} \end{array}$$

より $\text{Gr}_I^{\geq 0} G_{\mathbb{Q}} \cong \text{Gr}_I^{\geq 0} G_{F,S}$ となる. ここで

$$I^m G_{F,S} := \text{Ker}(G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}(\pi_1/L^{m+1}\pi_1)).$$

次の補題については先に述べた (注意 2.6, (2)):

補題 5.1. $D^m \pi_1 = L^m \pi_1$.

系 5.2. $\pi_1/L^m \pi_1 \hookrightarrow \pi_{1, \mathbb{Q}_{\ell}}^{\text{un}}/L^m \pi_{1, \mathbb{Q}_{\ell}}^{\text{un}}$.

このことから,

$$\begin{aligned} I^m G_{F,S} &= \text{Ker}(G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}(\pi_1^{\text{un}}/L^{m+1}\pi_1^{\text{un}})) \\ &= \text{Ker}(G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}/L^{m+1}\mathfrak{p})). \end{aligned}$$

\mathfrak{p} には $G_{F,S}$ の作用による重み付きフィルトレーションが入っていて,

$$W_{-2n} \mathfrak{p} = L^n \mathfrak{p}$$

であった ($\mathfrak{p}^{\text{ab}} = \mathbb{Q}_{\ell}(1)^{\oplus \text{有限}}$ だから (実際にはこの「有限」= 2)).

補題 5.3. $\text{Aut}(\mathfrak{p}) = \varprojlim_n \text{Aut}(\mathfrak{p}/L^n \mathfrak{p})$ はある pro-代数群の \mathbb{Q}_{ℓ} -有理点のなす群になっている.

証明. $\mathfrak{p}/L^n\mathfrak{p}$ は \mathbb{Q}_ℓ 上有限次元の Lie 環であり, 部分群

$$\text{Aut}(\mathfrak{p}/L^n\mathfrak{p}) \subset GL_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathfrak{p}/L^n\mathfrak{p})$$

は「Lie bracket を保つ」という代数的な条件で特徴付けられるから, \mathbb{Q}_ℓ 上の代数群である. \square

次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \text{Ker} & \rightarrow & \text{Aut}(\mathfrak{p}) & \rightarrow & \text{Aut}(\mathfrak{p}^{\text{ab}}) \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \cup & & \uparrow \text{対角} \quad \cdots \text{(cf. } \mathfrak{p}^{\text{ab}} = \mathbb{Q}_\ell(1)^{\oplus 2}) \\ 1 & \rightarrow & \text{Ker} & \rightarrow & \text{Aut}_*(\mathfrak{p}) & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1. \end{array}$$

ここで $\text{Aut}_*(\mathfrak{p})$ は $\text{Aut}(\mathfrak{p})$ の $\mathbb{G}_m \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}^{\text{ab}})$ による引き戻しである. 左端の Ker を \mathcal{U} とおき,

$$\mathfrak{u} = \text{Lie}\mathcal{U} \quad (\subset \text{Der}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \subset \text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}))$$

とおく. これは $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ -加群となる.

(一般に, M, N が G -加群のとき $\text{Hom}(M, N)$ も自然に G -加群となり ($f : M \rightarrow N, g \in G$ に対し $g.f$ を $(g.f)(m) = gf(g^{-1}m)$ と定義), G が重み付き代数群なら $\text{Hom}(M, N)$ にも重み付きフィルトレーションが入る.)

命題 5.4. 記号は上の通りとする. このとき,

(1)

$$W_{-2n}\mathfrak{u} = \text{Ker}(\mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{p}/W_{-2(n+1)}\mathfrak{p})).$$

(2) $W_{-2n}\mathcal{U} := \exp(W_{-2n}\mathfrak{u})$ とおくと,

$$W_{-2n}\mathcal{U} = \text{Ker}(\mathcal{U} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}/W_{-2(n+1)}\mathfrak{p})).$$

証明. \exp を用いて力づくで計算すると, (1) と (2) とは互いに同値なことがわかるので, 上式だけを示す. まず次のことは容易に分かる:

補題 5.5. \mathbb{G}_m -加群 V, W に対して,

$$\text{Hom}(V, W)[n] = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(V[k], W[k+n]).$$

これより次の第一の等式を得る:

系 5.6.

$$\begin{aligned} W_{-2n}(\text{Der}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) &= \{f \in \text{Der}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \mid f(W_k\mathfrak{p}) \subset W_{k-2n}\mathfrak{p} \text{ for all } k\} \\ &= \{f \in \text{Der}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \mid f(\mathfrak{p}) \subset W_{-2-2n}\mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

証明. 第二の等式については, まず $\mathfrak{p} = W_{-2}\mathfrak{p}$ に注意する. 次に, もし $f(\mathfrak{p}) \subset W_{-2-2n}\mathfrak{p}$ ならば, $[X, Y] \in W_{-4}\mathfrak{p} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ に対し $f[X, Y] = [fX, Y] + [X, fY] \in W_{-4-2n}\mathfrak{p}$ などより, 帰納的に $f(W_k\mathfrak{p}) \subset W_{k-2n}\mathfrak{p}$ が分かる. \square

これより命題の (1) が従う:

$$\begin{aligned} W_{-2n}\mathfrak{u} &= \mathfrak{u} \cap W_{-2n}\text{Der}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \\ &= \text{Ker}(\mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{p}/W_{-2(n+1)}\mathfrak{p})). \end{aligned}$$

\square

上の命題の系として次のことがわかる: (2) で特に $n = 1$ とすると, $\mathfrak{p}/W_{-4}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}/L^2\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{\text{ab}}$ で, これに \mathcal{U} は自明に作用するから,

$$\begin{aligned} W_{-2}\mathcal{U} &= \text{Ker}(\mathcal{U} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}^{\text{ab}})) \\ &= \mathcal{U}. \end{aligned}$$

これより \mathcal{U} は $\text{Aut}_*\mathfrak{p}$ の中で $\text{Gr}_\bullet^W\mathfrak{p}$ に自明に作用する部分であり, 従って \mathcal{U} は pro-冪単群であることがわかる. また, \mathcal{U} のフィルトレーション W_\bullet は, セクション $\text{Aut}_*\mathfrak{p} \xrightarrow{\hat{s}} \mathbb{G}_m$ を取って入れた重み付きフィルトレーションと一致する. そして $\mathcal{U} = W_{-2}\mathcal{U}$ より,

系 5.7. 拡大

$$1 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \text{Aut}_*\mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

は負の重み付きである.

次に, これとガロア群 $G_{F,S}$ の重み付き完備化 $1 \rightarrow \mathcal{U}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ とを比べよう. $G_{F,S}$ の \mathfrak{p} への作用 $G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}_*\mathfrak{p}$ は (上の系と $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の universality により) $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ を経由する, 即ち:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathcal{U} & \longrightarrow & \text{Aut}_*\mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & \mathcal{U}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & \mathcal{G}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \cup \\ 1 & \rightarrow & I^1 G_{F,S} & \rightarrow & G_{F,S} & \xrightarrow{\text{円分}} & \mathbb{Z}_\ell^\times \rightarrow 1. \end{array}$$

命題の (2) により $W_{-2n}\mathcal{U} = \text{Ker}(\mathcal{U} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}/L^{n+1}\mathfrak{p}))$ であるから,

系 5.8. $I^n G_{F,S} \stackrel{\text{定義}}{=} \text{Ker}(G_{F,S} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{p}/L^{n+1}\mathfrak{p}))$ は $I^1 G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ による $W_{-2n}\mathcal{U}$ の引き戻しである.

よって

$$\mathrm{Gr}_I^{>0} G_{F,S} = \mathrm{Gr}_I^\bullet I^1 G_{F,S} \longrightarrow \mathrm{Gr}_\bullet^W(I^1 G_{F,S}^{\mathrm{Zar}})$$

を得る. ここで $I^1 G_{F,S}^{\mathrm{Zar}}$ は $I^1 G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ の像の Zariski 閉包である.

あと, 次の二つの補題を証明すれば話はほとんど終る.

Γ を pro-有限群とし, \mathcal{U} を \mathbb{Q}_ℓ 上の pro-冪単代数群とする. \mathcal{U} はフィルトレーション W_\bullet を持ち, 各 $\mathrm{Gr}_m^W \mathcal{U}$ はアーベルかつ \mathbb{Q}_ℓ 上有限次元の線形空間になっていると仮定する. $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ を Zariski dense な群準同型とする. Γ にもフィルトレーション W^\bullet を $W^m \Gamma := (W_m \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell))$ の引き戻し) として定義する. すると自然な (次数付き Lie 環の) 単射

$$\mathrm{Gr}_\bullet^W \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Gr}_\bullet^W \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$$

があるが,

補題 5.9. この写像は, $\otimes \mathbb{Q}_\ell$ することにより, 次数付き Lie 環の同型

$$\mathrm{Gr}_\bullet^W \Gamma \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gr}_\bullet^W \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$$

を誘導する.

(因みに冪単代数群の一般論から $\mathrm{Gr}_\bullet^W \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell) \cong \mathrm{Gr}_\bullet^W(\mathrm{Lie} \mathcal{U})$ である.)

(証明の感じ) Γ の像 in $\mathrm{Gr}_m^W \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell^{\oplus d}$ はコンパクトだから $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r}$ ($0 \leq r \leq d$) と同型だが, Zariski density より $r = d$. □

この補題を $\Gamma = I^1 G_{F,S}$, $\mathcal{U} = I^1 G_{F,S}^{\mathrm{Zar}}$ に適用して,

系 5.10. 次数付き Lie 環の自然な同型

$$\mathrm{Gr}_I^m(I^1 G_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong \mathrm{Gr}_{-2m}^W(I^1 G_{F,S}^{\mathrm{Zar}})$$

がある.

さて, 次の図式を思い出そう:

$$\begin{array}{ccc} I^1 G_{F,S} & \longrightarrow & G_{F,S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & \mathcal{G}_{F,S}^\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ I^1 G_{F,S}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{*p}. \end{array}$$

$\mathcal{U}_{F,S}^\ell$ と $I^1 G_{F,S}^{\text{Zar}}$ とを \mathcal{U} の中で比べたい. $1 \rightarrow I^1 G_{F,S}^{\text{Zar}} \rightarrow G_{F,S}^{\text{Zar}} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ も負の重み付き拡大だから, $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の universality により可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathcal{U}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & \mathcal{G}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & I^1 G_{F,S}^{\text{Zar}} & \rightarrow & G_{F,S}^{\text{Zar}} & \rightarrow & \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \end{array}$$

を得る.

Key Lemma. 写像 $\mathcal{U}_{F,S}^\ell \rightarrow I^1 G_{F,S}^{\text{Zar}}$ は全射である.

証明. これは $I^1 G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ が Zariski dense であること (これは後で示す... 補題 5.11) から従う. 実際, 合成

$$I^1 G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}_{F,S}^\ell(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$$

を考えると, 右端の $\mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ の中で

$$(I^1 G_{F,S} \text{ の像})^{\text{Zar}} \subset (\mathcal{U}_{F,S}^\ell \text{ の像})(\mathbb{Q}_\ell)$$

であるが, もし $I^1 G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ が Zariski dense ならばこの \subset は等号になる. \square

さて, 関手 Gr の完全性から

$$\begin{array}{c} \text{Gr}_\bullet^W \mathcal{U}_{F,S}^\ell \twoheadrightarrow \text{Gr}_\bullet^W (I^1 G_{F,S}^{\text{Zar}}) \cong \text{Gr}_I^{\geq 0} G_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \\ \parallel \\ \text{Gr}_\bullet^W (\mathcal{u}_{F,S}^\ell) \end{array}$$

となる (左端の縦の同型は \mathcal{U} が pro-冪単だから; 右端の同型は系 5.10 による). 今 $F = \mathbb{Q}$, $S = \{\ell\}$ だから, $\text{Gr}_\bullet^W (\mathcal{u}_{F,S}^\ell)$ は $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \dots$ で生成され (系 4.9), $\text{Gr}_I^{\geq 0} G_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ はそれらの像 $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_5, \dots$ で生成される.

あとは $\bar{\sigma}_1 = 0$ を示せばよい. $\bar{\sigma}_1 \in (I^1 G_{F,S} / I^2 G_{F,S}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ であるが, 実は

$$I^1 G_{F,S} / I^2 G_{F,S} = 0$$

である. 実際, $\pi_1(\bar{X})$ の生成元 x, y への $\sigma \in G_{F,S}$ の作用は

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x^{\chi_\ell(\sigma)}, \\ \sigma(y) &= f_\sigma y^{\chi_\ell(\sigma)} f_\sigma^{-1} \quad (\text{for some } f_\sigma \in [\pi_1, \pi_1]) \end{aligned}$$

となっていることが計算により示せる (例えば, [8] 参照). ここで χ_ℓ は円分指標. もし $\chi_\ell(\sigma) = 1$ ならば $\sigma(y) \equiv y \pmod{[y, f_\sigma]}$ だから, $\pi_1 / L^3 \pi_1$ 上 σ は自明に作用する. よって, $\sigma \in I^1 G_{F,S}$ ならば $\sigma \in I^2 G_{F,S}$ となるので, $I^1 G_{F,S} / I^2 G_{F,S} = 0$ である.

次の補題の証明が残っていた:

補題 5.11. $I^1G_{F,S} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Q}_\ell)$ は Zariski dense.

証明. 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & I^1G_{F,S} & \longrightarrow & G_{F,S} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell^\times \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (I^1G_{F,S})^{\text{un}} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{F,S}^\ell & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}} \rightarrow 1. \end{array}$$

ここで, 合成写像 $I^1G_{F,S} \rightarrow G_{F,S} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の像の Zariski 閉包は冪単群だから, $(I^1G_{F,S})^{\text{un}}$ の universality より下段の射 $(I^1G_{F,S})^{\text{un}} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell$ が生ずる. また, $(\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}}$ は $\mathbb{Z}_\ell^\times \hookrightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ に関する重み付き完備化であり, 全射 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}}$ は $\mathcal{G}_{F,S}^\ell$ の universality から来る.

さて, この補題は次の二つから従う:

命題 5.12. 上の図式において, 下段の列は完全列である.

($(I^1G_{F,S})^{\text{un}} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell$ は多分単射だが, 今は使わない.)

補題 5.13. $(\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}} = \mathbb{G}_m$.

実際これらを認めると,

$$\begin{aligned} I^1G_{F,S} &\xrightarrow{\text{Zar. dense}} (I^1G_{F,S})^{\text{un}} \xrightarrow{\text{命題}} \text{Ker}(\mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}}) \\ &\stackrel{\text{補題}}{=} \text{Ker}(\mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathbb{G}_m) \stackrel{\text{定義}}{=} \mathcal{U}_{F,S}^\ell. \end{aligned}$$

□

(命題 5.12 の証明) 全射

$$\varphi: \mathcal{G}_{F,S}^\ell / ((I^1G_{F,S})^{\text{un}} \text{ の像}) \rightarrow (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}}$$

を考える. この定義域の代数群 $\mathcal{G}_{F,S}^\ell / ((I^1G_{F,S})^{\text{un}} \text{ の像})$ は負の重み付きだから, $(\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}}$ の universality によりセクション

$$s: (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell / ((I^1G_{F,S})^{\text{un}} \text{ の像})$$

がある. ところが $G_{F,S} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell$ は Zariski dense だから

$$\mathbb{Z}_\ell^\times = G_{F,S} / I^1G_{F,S} \longrightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell / ((I^1G_{F,S})^{\text{un}} \text{ の像})$$

も Zariski dense, よって s は全射である. したがって φ, s は互いに逆となる.

□

(補題 5.13 の証明) $\mathbb{Z}_\ell^\times \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ の重み付き完備化 $1 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow (\mathbb{Z}_\ell^\times)^{\text{wt}} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ に主定理 4.1 を適用する. $m \geq 1$ に対して $H^1(\mathbb{Z}_\ell^\times, \mathbb{Q}_\ell(m)) = 0$ (well-known) だから $\mathcal{U}^{\text{ab}} = 0$. ところが, 一般の冪単代数群について, そのアーベル化が消えればもとの群も消えるから $\mathcal{U} = 0$ である. \square

これで証明が全て終了した.

5.1 謝辞

この講義を北大でする機会を与えて下さった田口雄一郎さん, このような形でまとめて下さった大溪幸子さん, 山上敦士さんに感謝致します. この研究は R.Hain さんとの共同研究です. K 群と エタール・コホモロジー の関係とモチーフについては, 藤原一宏さん, 栗原 将人さん, 斎藤 秀司さん, 加藤 和也さんら多くの人にさまざまなご教示を受けました. また, 玉川安騎男さんとの討論のおかげで進んだところが随所にあります. ここに厚く感謝致します.

参考文献

- [1] A. Beilinson: *Higher regulators and values of L-functions* (Russian), Current problems in mathematics, Vol. 24 (1984), 181–238.
- [2] A. Borel: “Linear Algebraic Groups”, GTM 126, Springer-Verlag.
- [3] P. Deligne: *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in: Galois groups over \mathbb{Q} , Publ. MSRI, No. 16 (1989), Springer-Verlag, 79–297.
- [4] P. Deligne and J.S. Milne: *Tannakian categories*, Lecture Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, pp. 101–228.
- [5] A. Grothendieck: *Revêtement Étales et Groupe Fondamental* (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, 1971.
- [6] R. Hain and M. Matsumoto: *Weighted completion of Galois groups and some conjectures of Deligne*,
<http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0006158>
- [7] R. Hain and M. Matsumoto: *Tannakian fundamental groups associated to Galois groups*,
<http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.AG/0010210>
- [8] Y. Ihara: *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. **123**(1986), 43–106.
- [9] Y. Ihara: *The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree*, in: Galois groups over \mathbb{Q} , Publ. MSRI, No.16 (1989), Springer-Verlag, 299–313.

- [10] Y. Ihara: *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro- p fundamental group of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$* , RIMS preprint 1229, 1999.
- [11] Magnus, W. Karass, A. Solitar, D.: “Combinatorial Group Theory”, 1966, Interscience.
- [12] A. I. Malcev: *Nilpotent torsion-free groups*, Izvestiya Akad. Nauk. SSSR. 13(1949), 201–212.
- [13] M. Matsumoto: *Galois group $G_{\mathbb{Q}}$, Singularity E_7 , and Moduli \mathcal{M}_3* , London Math. Soc. Lecture Note Series 243, Geometric Galois Actions 2 (1997) 179–218.
- [14] Ch. Soulé: *On higher p -adic regulators*, Lecture Notes in Math. 856, Springer-Verlag, 1981, pp. 372–401.
- [15] H. Tsunogai: *On ranks of the stable derivation algebra and Deligne’s problem*, Proc. Japan Academy, Ser. A, 73(1997), 29-31.

記号対照表

<u>Lecture</u>	<u>[6]</u>
$1 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{G}_{F,S}^\ell \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ \parallel $G_{F,S}^{\text{wt}}$	$1 \rightarrow \mathcal{K}_\ell \rightarrow \mathcal{A}_\ell \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$
$\mathfrak{u} = \text{Lie } \mathcal{U}$	$\mathfrak{k} = \text{Lie } \mathcal{K}_\ell$ $\mathfrak{a}_\ell = \text{Lie } \mathcal{A}_\ell$
$\mathbb{Q}_\ell(m)$	V_α (section 5.2)
$MTM_\ell(\mathcal{O}_{F,S})$	$T_\ell(F, S)$
$(I^1 G_{F,S})^{\text{Zar}}$	$\mathcal{U}_{F,S}$ (section 10.3)
$V[n]$	V_n ($\mathbb{Q}_\ell(n)$ -同型成分)