HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	熱間薄板圧延向け誘導加熱装置の数値解析および制御モデル構築に関する研究
Author(s)	下谷, 俊人
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第14139号
Issue Date	2020-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k14139
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/78319
Type	doctoral thesis
File Information	Toshihito_Shimotani.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

SSI-DT79185029

博士論文

熱間薄板圧延向け誘導加熱装置の数値解析および制御モデル構築に関する研究

下谷 俊人

2020 年 3 月

北海道大学 大学院情報科学研究科
システム情報科学専攻

本論文は北海道大学 大学院情報科学研究科に
博士（工学）授与の要件として提出した博士論文である．

下谷　俊人

指導教員：		五十嵐　一	教授
審査委員：	主査	五十嵐　一	教授
	副査	小笠原　悟司	教授
		北　裕幸	教授
		野口　聡	准教授

熱間薄板圧延向け誘導加熱装置の数値解析および制御モデル構築に関する研究

下谷 俊人

概要

熱間薄板圧延（熱延）は，金属の鋼片を高温に加熱し，薄板を製造してコイルに巻取る圧延方法である．熱延で製造される薄板は，自動車や船舶・車両・産業機械等の製造業や，橋・ビル等の建築物の材料等，社会を支える用途として用いられる．また，下流工程にあたる冷間圧延（金属材料を再結晶温度以下で圧延する加工法）の母材となり，家電や飲料缶等の身の回りの生活用品の材料として用いられる等，我々の生活に欠かせないものとなっている．

熱延プロセスにおいて，製品品質の向上および，安定操業の観点から，圧延材の温度制御が非常に重要である．近年では多くの熱延設備で，高効率で急速・局所加熱に秀でた誘導加熱装置(Induction Heater : IH)を用いた温度制御が導入され，熱延ラインの付加価値の向上に貢献している．しかし，IH は装置規模の大きさや使用環境の特殊性から，実機からの特性データの採取が難しく，オンライン制御に耐える厳密な数理モデルが構築されていないのが現状である．そのため IH の実運用においては，簡易な計算式を用いた設定計算・制御が行われているに留まり，より正確な数理モデルの構築が望まれていた．

これに関連して，近年の計算機の演算能力向上に伴い，数値解析の産業応用が普及している．中でも有限要素法(Finite element method : FEM)は，その汎用性の高さから電磁界分野でも広く普及し，電磁機器の設計・開発への応用に向けた研究・開発が盛んに行われている．一般に FEM の解析精度と解析時間はトレードオフの関係にあり，特に 3 次元 FEM の場合は解析時間の長大化が問題となる．そのため，大規模問題の解析縮約手法であるモデル縮約法の適用や，FEM から等価回路を生成する手法が研究されている．

また，近年の AI・IoT 技術の発展と普及に伴い，熱延プロセス制御において，多様な因子を考慮できる数理モデルとして，従来の理論ベースの数理モデルに代わり，深層学習などの機械学習を用いたデータ駆動型のモデルが注目されている．

上記の背景から，本研究では，IH の高精度な数理モデル構築を目的とし，FEM をベースとした以下の検討を行った．

1) 固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約
2) 誘導加熱装置の等価回路生成
3) 機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築

(1)では， FEM による IH の特性解析高速化のため，まず，IH に特化した準静磁場-熱伝導解析の効率的な連成解析手法を提案した．また，モデル縮約法の一種である固有直交分解法(Proper orthogonal decomposition: POD を用いて，IH の準静磁場の特性解析高速化について検証した．その結果，POD を用いることで，IH の周波数特性および，圧延材（被加熱材）の導電率特性を FEM と同等の精度で解析でき，計算時間を大幅に短縮できることを示した．

(2)では，準静磁場を精度よく表現できる等価回路として注目されている，Cauer 回路と呼ばれる梯子回路を用いた IH の等価回路生成を行った．従来の Cauer 回路は解析対象に導電性材料が複数ある場合，各導電性材料のジュール損失を分離して評価できないという問題があった．そこで本研究では，複数の導電性材料に生じるジュール損失を分離して考慮できる修正 Cauer 回路の生成手法を提案した．提案手法で生成した回路により, IH の周波数特性および, 過渡応答解析を高速かつ精度良く計算できることを示した．

(3)では，実際の熱延において，IH の加熱に影響を与える種々の条件を考慮し，IH による被加熱材の加熱昇温をするため，機械学習を用いたデータ駆動型の制御モデルを構築した．提案した制御モデルにより，任意時間の被加熱材の板厚方向温度分布や，被加熱材を所望の温度分布とするのに必要な IH の電力を, 繰り返し計算を必要とせず, FEM と同等の精度で求められることを示した．

キーワード：誘導加熱装置，有限要素法，固有直交分解法，等価回路生成，機械学習

∗北海道大学 大学院情報科学研究科 システム情報科学専攻 博士論文, SSI-DT79185029, 2020 年 3 月 25 日．

Study on numerical analysis and control model of induction heater in hot strip rolling

Toshihito Shimotani

Abstract

In the hot strip mill (HSM) process, hot rolled thin steel strip is rolled and coiled. This hot rolled strip is widely utilized to make products which our daily life better, for example, for cars, ships, trains, industrial machines and buildings. Cold rolled steel produced from the hot rolled strip is used for products such as, home appliances and beverage cans.

Temperature control is one of the most important factors to make high-quality steel sheets because mechanical properties of the steel highly depend on its temperature. Induction Heaters (IH) have been widely adopted in HSM plants to provide stable temperature control in order to produce steel sheets with higher quality. Because an IH provides fast and efficient heating for steel plate with rapid control response, it can improve the performance of the HSM process. For these reasons, it is strongly desired to develop an accurate and fast IH mathematical model capable of being applied online HSM process control.

In recent times the Finite Element Method (FEM) has been widely used for mathematical modeling because of its versatility. Generally, computational accuracy and time are in a trade-off relationship. Especially, it is well known that 3-dimentional FEM needs long computational time. In order to overcome this, several numerical technique such as model order reduction and, equivalent circuit synthesis has been developed.

In addition, recently, data-driven model using machine learning have been developed for HSM process-control in order to construct the mathematical model which take complex phenomena into account.

From the above background, in this study, the following topics are considered in order to construct mathematical models for online control of IH.

1) Fast numerical analysis of IH using proper orthogonal decomposition
2) Synthesis of equivalent circuit of IH
3) Construction of a control model for IH using machine learning

Key words: Induction heater, finite element method, proper orthogonal decomposition, synthesis of equivalent-circuit, machine learning.

† Doctoral Thesis, Division of Systems Science and Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, SSI-DT79185029, March 25, 2020.

目 次

第 1 章　序論　1
1.1　研究背景 ……1
1.2　熱間薄板圧延プロセスと誘導加熱装置 ……3
1.2.1　熱間薄板圧延プロセスの概要 ……3
1.2.2　熱間薄板圧延向け誘導加熱装置の概要 ……5
1.3　研究目的 ……8
1.2.1　固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約 ……8
1.2.2　誘導加熱装置の等価回路生成 ……8
1.2.3　機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築 ……8
1.4　本論文の構成 ……9

第 2 章　基礎理論　11
2.1　有限要素法の概要 …… 11
2.2　準静磁場の有限要素法 …… 11
2.2.1　Maxwell 方程式 …… 11
2.2.2　支配方程式 …… 12
2.2.3　有限要素方程式 …… 14
2.2.4　電流項の計算 …… 16
2.2.5　境界条件 …… 17
2.2.6　外部回路との連成 …… 18
2.2.7　求解 …… 19
2.2.8　導体中の渦電流を考慮した定式化 …… 20
2.3　熱伝導場の有限要素法 …… 21
2.3.1　支配方程式 …… 21
2.3.2　有限要素方程式 …… 25
2.3.3　境界条件 …… 25
2.3.4　時間方向の離散化 …… 27
2.3.5　求解 …… 27
2.4　要素 …… 28
2.4.1　三角形節点要素 …… 28
2.4.2　四面体節点要素・四面体辺要素 …… 30
2.5　2 章のまとめ …… 34

第 3 章　固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約　35
3.1　固有直交分解法(POD) …… 36
3.1.1　Conventional POD …… 37

3.1.2 Snapshot POD……38
3.2 準静磁場-熱伝導場の連成解析 ……39
3.2.1 連成解析手法 ……39
3.2.2 連成解析結果 ……40
3.3 POD を用いた周波数特性の解析高速化 ……41
3.3.1 周波数特性に対する POD……41
3.3.2 解析結果 1 (コイル渦電流を考慮しない場合) ……42
3.3.3 解析結果 2 (コイル渦電流を考慮する場合) ……44
3.4 POD を用いた導電率特性の解析高速化 ……46
3.4.1 導電率特性に対する POD……46
3.4.2 解析結果 ……47
3.5 3 章のまとめ ……47

第 4 章 誘導加熱装置の等価回路生成 49

4.1 Cauer 回路……50
4.2 遺伝的アルゴリズム ……50
4.3 損失分離を考慮しない等価回路生成（従来 Cauer 回路）……53
4.3.1 回路生成手法 ……53
4.3.2 適用結果 ……58
4.4 損失分離を考慮した等価回路生成（修正 Cauer 回路）……61
4.4.1 修正 Cauer 回路……61
4.4.2 回路生成手法 ……62
4.4.3 適用結果 ……64
4.5 4 章のまとめ ……69

第 5 章 機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築 71

5.1 ニューラルネットワーク ……72
5.1.1 メカニズム ……72
5.1.2 数学モデル ……73
5.2 制御モデルの概要 ……74
5.2.1 温度予測モデル ……75
5.2.2 電力予測モデル ……76
5.3 適用結果 ……77
5.3.1 データセット ……77
5.3.2 温度予測モデル ……81
5.3.3 電力予測モデル ……82
5.4 加熱シミュレーション ……84
5.4.1 シミュレーション 1（薄物） ……85
5.4.2 ミュレーション 2（厚物，広幅） ……86
5.4.3 シミュレーション 3（中物，ヒータ出力配分） ……87
5.5 5 章のまとめ ……88

第 6 章　結論 **89**
6.1　固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約（3 章）…… 89
6.2　誘導加熱装置の等価回路生成（4 章）…… 90
6.3　機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築（5 章）…… 90
6.4　今後の展望 …… 91

参考文献 **93**

謝辞 **97**

研究業績 **99**

付録 A　電磁鋼板内磁界の解析解と等価回路生成 **A-1**

付録 B　ルシャンドル多項式近似を用いた電磁鋼板内の磁界表現 **B-1**

図目次

1.1 一般的な熱延ラインの構成 …… 3
1.2 バーヒータの概略 …… 5
1.3 エッジヒータの概略 …… 5

2.1 電源と電磁機器の回路 …… 18
2.2 壁面における熱伝導 …… 21
2.3 等温線と熱流線 …… 22
2.4 任意方向の熱伝導 …… 23
2.5 面積座標 …… 28
2.6 四面体辺要素 …… 30

3.1 POD の概念図 …… 37
3.2 簡易エッジヒータモデル（片側 1/4 モデル） …… 39
3.3 連成解析手法の概要 …… 40
3.4 解析結果比較（2 次元 vs 3 次元） …… 41
3.5 スナップショット数と解析誤差 …… 43
3.6 電流周波数応答（エッジヒータ） …… 43
3.7 ジュール損失密度の解析結果 …… 44
3.8 簡易バーヒータモデル（1/8 モデル） …… 44
3.9 周波数応答計算結果（誘導コイル電流） …… 45
3.10 周波数応答計算結果（効率） …… 45
3.11 鋼種の電気抵抗率-温度特性 …… 46
3.12 ジュール損-電気抵抗率 (FEM, POD) …… 47

4.1 Cauer 回路 …… 50
4.2 実数値 GA のフローチャート …… 51
4.3 REX^{star} の概要図 …… 52
4.4 等価回路生成手順（損失分離を考慮しない場合） …… 53
4.5 伝達関数より導出される等価回路 …… 58
4.6 鉄心付き簡易バーヒータモデル …… 58
4.7 誘導コイルのインピーダンス周波数特性 …… 59
4.8 誘導コイルの電流周波数応答 …… 60
4.9 ジュール損失の周波数応答 …… 61
4.10 修正 Cauer 回路 …… 61
4.11 等価回路生成手順（損失分離を考慮する場合） …… 62

4.12 POD の解析誤差 …… 64
4.13 L カーブのプロット結果…… 65
4.14 回路段数と GA の評価値 …… 66
4.15 周波数応答計算結果 …… 68
4.16 効率計算結果 …… 68
4.17 過渡応答解析モデル …… 69
4.18 過渡応答解析結果 …… 69

5.1 熱延中のバーヒータによる加熱概要 …… 72
5.2 ニューロンの構造 …… 73
5.3 NN のモデル図 …… 73
5.4 tanh 関数 …… 74
5.5 多層 NN のモデル …… 74
5.6 温度予測モデルの概要 …… 75
5.7 NN の構成（温度予測モデル） …… 76
5.8 電力予測モデルの概要 …… 76
5.9 NN の構成（電力予測モデル） …… 77
5.10 【再掲】鉄心付き簡易バーヒータモデル …… 77
5.11 データセット（一部） …… 79
5.12 板厚方向の温度分布関数 …… 80
5.13 板厚方向の温度分布（T0=900degC） …… 81
5.14 NN の予測結果 …… 81
5.15 検証データの解析結果例（温度予測モデル） …… 82
5.16 NN の予測結果（電力予測モデル） …… 83
5.17 検証データの解析結果例（電力予測モデル） …… 84
5.18 加熱シミュレーション 1 …… 85
5.19 加熱シミュレーション 2 …… 86
5.20 加熱シミュレーション 3 …… 87

表目次

3.1 解析時間 ……44
3.2 POD 適用条件（周波数）……45
3.3 POD 適用条件（導電率）……47

4.1 POD 適用条件……59
4.2 GA 適用条件 ……59
4.3 回路素子値 ……59
4.4 POD 適用条件……64
4.5 GA 適用条件 ……65
4.6 回路素子値 ……66
4.7 計算時間の比較 ……69

5.1 確認用の検証データ条件 ……82
5.2 確認用の検証データ条件 ……83
5.3 シミュレーション条件 1 ……85
5.4 シミュレーション条件 2 ……86
5.5 シミュレーション条件 3 ……87

第1章　序論

本章ではまず，本研究の研究背景および，熱間薄板圧延プロセスと誘導加熱装置の概要を述べる．次に研究目的を述べ，最後に本論文の構成について述べる．

1.1. 研究背景

圧延は，塑性加工の一種であり，回転するロールの間に鉄鋼をはじめとする金属材料を通し，薄板，厚板，棒線，鋼管，形鋼等に加工する．熱間薄板圧延（熱延）はそのうち，金属の鋼片（スラブ）を高温に加熱し，再結晶温度以上で圧延し，薄板を製造してコイルに巻取る圧延方法である．熱延で製造される薄板は，自動車や船舶・車両・産業機械等の製造業や，橋・ビル等の建築物の材料等，社会を支える用途として用いられることに加えて，より薄い板を製造する下流工程の冷間圧延（金属材料を再結晶温度以下で圧延する加工法）の母材となり，家電や飲料缶等の身の回りの生活用品の材料にも用いられ，我々の生活に欠かせないものとなっている[1].

日本における鉄鋼技術は，戦後の経済成長による社会インフラ等の設備投資の需要増加に伴い，研究・開発が進み，現在では世界でもトップクラスのレベルにある[2]．日本の粗鋼生産量は 1970 年代以来，年間 1 億トン前後で推移している．その内訳は，以前は普通鋼が中心の建築用途が割合の多くを占めていたが，比較的製造が難しい高級鋼が中心の製造業用途が上回っており，日本の鉄鋼技術が高い水準にあることを示している[3]. 一方で，近年では新興国の追い上げが目覚ましい．特に中国では，21 世紀に入ってから鉄鋼プラントの新設ラッシュが起こり，国別粗鋼生産量で世界一となった．しかしながら，急峻な生産量増加による供給過剰のため，製品が安値販売された結果，市場における粗鋼の価格崩壊を招いた．現在，中国では国策により鉄鋼の生産量が制限され，非効率な工場の操業停止や鉄鋼メーカの合併が進み，生産力から技術力への軌道修正が行われており，中国鉄鋼メーカの技術力は向上している．このように，これまで鉄鋼分野における日本の国際競争力を支えてきた技術力という点で，新興国との差が縮まりつつあり，よりいっそうの技術研究・開発が必須である．

ここで，熱延技術にフォーカスして考える．熱延における主なニーズとしては，(1)製品品質の向上と, (2)安定操業の実現が挙げられる. (1)は, 製造される薄板の板厚や板幅, 形状等の寸法に関わる精度や, 引張り強さや耐力, 延性などの機械的性質の向上である. (2)は，圧延中にトラブルが発生すると，圧延材が製品にならないことは勿論，設備破損や，操業再開まで製品を製造できないことによる損失を生むため，安定操業が重要である．これらの要求を満たすため，熱延プロセス制御の技術研究・開発が盛んに行われている．コイルの寸法精度を高めるには，圧延材の変形量を正確に予測し，粗圧延機や仕

上圧延機，エッジャ（幅を圧下する装置．後述.）等による圧下スケジュールを適切に決める必要がある．このとき，圧延材の硬さには温度が大きく影響するため，圧延中の圧延材の温度変化を予測し，制御することが重要である．また，鉄鋼材料の機械的性質を高めるには，結晶粒の微細化等による金属組織の作りこみが重要であり，圧延工程および冷却工程を適切に制御する必要がある．上記の理由から，熱延プロセスにおける温度制御が重要である[4].

近年では，高効率でかつ急速・局所加熱ができる誘導加熱装置(Induction Heater : IH)が温度制御に用いられており，現在多くの熱間圧延設備で導入されている[5,6]．IH は一般に，後述する粗圧延機と仕上圧延機の間に設置され，仕上圧延機入側で所望の温度を得るために使用される．IH 導入により，サーマルランダウン（薄物製造時に仕上圧延機入側で材料の尾端部にかけて温度が低下すること）や，スキッドマーク（加熱炉内でスラブを支える支柱（スキッド）への抜熱による圧延材長手方向の温度ムラ）の低減等による製品品質向上が見込まれる．また，特に硬い高級鋼で，仕上圧延の前で圧延材を昇温することで，通板性の改善や，圧延荷重低下により圧延機の負担を軽減できる．また，圧延材尾端部を昇温することで，尾端絞り（圧延材尾端部が仕上圧延機を抜ける際に蛇行し，装置に接触して座屈すること）防止の効果がある．上記のように，圧延中に圧延材を昇温できるという利点は，圧延材を冷却方法によって温度制御をしていた従来の制御方法に新たな自由度を与え, 熱延ラインの使い方をより柔軟なものにする. すなわち，IH による温度制御の精度向上は，製品品質の向上に繋がることは勿論のこと，熱延ラインの付加価値の向上にも貢献する，有意義なことであると言える．

しかし，IH は装置規模の大きさや使用環境の特殊性から，実機からの特性データの採取が難しく，オンライン制御に耐える厳密な数理モデルが構築されていないのが現状である．そのため IH の実運用においては，簡易な計算式を用いた設定計算・制御が行われているに留まり，より正確な数理モデルの構築が望まれていた．

ところで, 近年の計算機の演算能力向上に伴い, 数値解析の産業応用が普及している．代表的な数値解析手法として，有限差分法(Finite Difference Method : FDM)，有限要素法(Finite Element Method : FEM)，時間領域差分法(Finite Difference Time-Domain method : FDTD method)などが知られているが，中でも構造力学の分野で発展した FEM は，その汎用性の高さから電磁界分野でも広く普及し，電磁機器の設計・開発への応用に向けた研究・開発が盛んに行われている．一般的には，FEM の解析精度と解析時間はトレードオフの関係にある．特に 3 次元 FEM の場合は問題規模が大きく，制御系との連成解析や，多パラメータに対するケーススタディ等の繰り返し計算を要する場合，解析時間の長大化が問題となる．

上記のような大規模問題の計算時間を削減する目的で，近年，モデル縮約法（Model Order Reduction : MOR）が盛んに研究されている[7-14]．MOR は大別すると，対象とする問題に対し，主要成分を抽出した基底を求め，低次元空間に射影して次元数を削減するアプローチ（固有直交分解法(Proper Orthogonal Decomposition: POD) [8,9]や，固有一般化分解(Proper Generalized Decomposition：PGD) [10,11]等）と，対象とするシステムの伝達関数を縮約し近似的に解くアプローチ（Padé via Lanczos (PVL) [12,13,14] や，Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm (PRIMA)) [15] 等）がある．最近では，

電磁機器の入出力特性を連分数展開し，Cauer 回路と呼ばれる梯子型の等価回路により表現する方法[16-23]が提案され，様々な応用が研究されている．このように電磁機器を等価回路に置き換える手法をモデル縮約法に分類することもある．

また，ここ数年で AI(Artificial Intelligence)・IoT(Internet of Things) 技術の産業応用が急激に普及している．大量の機器やセンサが設置されるプラントから得られるデータは，そのデータ量と非線形性から，機械学習・深層学習によるデータ分析と親和性が高い．熱延ラインにおいても，これらのデータを用いた設備監視や異常検知，データ駆動型の制御モデル（データドリブンモデル）の開発が注目されている [24-26].

上記のような背景から，本研究では，FEM と MOR，等価回路，機械学習を用いて，オンライン制御適用を想定した IH の高精度な数理モデルを構築した．

1.2. 熱間薄板圧延プロセスと誘導加熱装置

1.2.1. 熱間薄板圧延プロセスの概要

熱延は，鉄鋼をはじめとする金属の鋼片（スラブ）を高温に加熱した状態で圧延し，薄板を製造してコイルに巻取る工程である．スラブ寸法は例えば，厚さ 200~250mm，幅 600~2000mm，長さ 5~12m 程で，製造されるコイルの厚さは 1.2~25mm 程になる．

誘導加熱装置を有する一般的な熱延ラインの全体概要図を図 1.1 に示す．一般的な熱延ラインは主に，工程順に，加熱炉，HSB（Hydraulic Scale Breaker：高圧スケールブレーカ），エッジャ，粗圧延機，クロップシャー，FSB（Finisher Scale Breaker：仕上入側スケールブレーカ），仕上圧延機，ランアウトテーブル，ダウンコイラにより構成される．以下に，装置単位で熱延工程の概要を述べる．

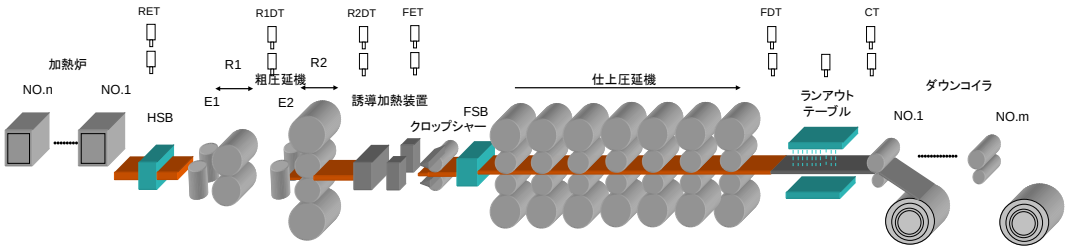


図 1.1　一般的な熱延ラインの構成

加熱炉

スラブを加熱するガス加熱炉である．炉内に挿入されたスラブは約 1200 度まで加熱され，加熱炉出側から抽出される．

HSB

高圧水によるスケール除去装置である．加熱炉から抽出されたスラブは高温のため，表面にスケールと呼ばれる酸化被膜が付着している．スケールが付着した状態でスラブ

を圧延すると，スラブ表面に傷がつく原因となるため，予め HSB で高圧水を噴射しスケールを除去する．

エッジャ

圧延材の幅方向を圧下する圧延機である．後述する粗圧延機の入側に設置される．コイルの目標幅から仕上圧延機やダウンコイラによる幅変化を予測し，粗圧延機出側での幅目標が設定され，それを達成するようにエッジャを制御する．

粗圧延機

圧延材を仕上圧延に適する厚さ（30~60mm 程）まで圧下する圧延機である．単数又は複数の圧延機から構成される．一般には可逆式圧延機が用いられ，圧延材を圧延機の上流（加熱炉側）から下流（ダウンコイラ側）に圧延する順パスと，下流から上流に圧延する逆パスを繰り返して圧延する．

誘導加熱装置

搬送中に熱放射や熱伝達により温度が低下する圧延材を加熱する装置である．詳細は後述するが，仕上圧延機の圧延荷重の低減や，搬送方向の温度ムラの除去等の用途に使用される．

クロップシャー

圧延材の先尾端部をカットする装置である．粗圧延後の圧延材は，先端部はタングと呼ばれる舌先のような形状，尾端部はフィッシュテールと呼ばれる魚の尻尾のような形状になることが多い. このように矩形でない先尾端形状のまま仕上圧延機を通板すると，噛み込み不良等のトラブルの原因となるため，クロップシャーにより予め先尾端部をカットする．

FSB

仕上圧延機の入側に設置されるスケール除去装置である．HSB と同様に，仕上圧延の前に，圧延材の表面疵の原因となるスケールを取り除く．

仕上圧延機

圧延材をコイルの目標板厚まで圧下する圧延機である．複数（通常は 6~7 スタンド）の圧延スタンドで連続的に圧延するタンデム式圧延で，板寸法や形状を決定づける重要な工程である. スタンド間にはルーパと呼ばれる張力制御装置が設置されている. また，圧延速度および，圧延機間に設置される水冷却スプレー（Inter Stand Cooling spray : ISC）により，仕上出側温度（Finishing Delivery Temperature : FDT）も制御する．

ランアウトテーブル

仕上圧延機から出てきた圧延材を，多数のローラーテーブルにより搬送しながら，巻取り温度（Coiling Temperature: CT）まで水冷スプレーにより冷却する装置である．設備

長は数十～百数十 m にも渡る．冷却の仕方で圧延材の金属組織の構造が変わり，機械的性質に影響するため，圧延材の鋼種によって目標 CT や冷却パターンが設定される．

ダウンコイラ

ランアウトテーブルを通過した圧延材を環状に巻き取る装置である．

1.2.2. 熱間薄板圧延向け誘導加熱装置の概要

(1) IH の特徴

IH は，導電材料に交流磁界を鎖交させることで誘導された起電力により，材料内に流れる渦電流を利用した加熱装置である．熱延向けに適用される IH は通常，粗圧延機と仕上圧延機の間に設置され，圧延材を加熱昇温する．他の加熱方式であるガス加熱に対する IH 固有の特徴を以下に述べる．

- 急速加熱

誘導コイルの電流やターン数を増やすことで，被加熱材である圧延材に高密度の電力を出力できる．その結果，短時間で被加熱材を加熱昇温できるので，加熱中の放熱によるロスを小さくできる．

- 直接加熱

誘導加熱のため媒介物への熱のロスが少なく,加熱効率がよく,省エネルギーである．また，非接触加熱のため摺動部がなく，その分のメンテナンスが不要となる．

- 局所加熱

誘導コイルや鉄心の形状を適切に設計することで，被加熱材の所望の箇所を，局所的に効率よく加熱できる．また電気制御のため応答性がよく，被加熱材の搬送方向の温度を制御できる．

(2) IH の分類

IH の種類として，圧延材の全体を加熱するバーヒータ(BH)と，幅方向端部を局所的に加熱するエッジヒータ(EH)がある．BH と EH は両方とも熱延ラインに設置される場合もあるが，何れかの一方のみ設置される場合もある．以下にそれぞれの概要を述べる．

バーヒータ(BH)

被加熱材全体を加熱昇温する IH．図 1.2 に示すのは，ソレノイド方式と呼ばれる加熱方式を備えた BH の概要図である．ソレノイド方式の IH は，被加熱材に鎖交する交流磁束の方向が搬送方向と一致する．軸方向磁束加熱 (Longitudinal Flux Heating)とも呼ばれる．磁束は被加熱材の厚み-幅断面に対し垂直に鎖交するため，被加熱材内に生じる渦電流は，被加熱材の厚み-幅断面の表面を周回するように流れる．一般に，誘導コイルは被

加熱材を囲うような構造となり，被加熱材に均一に磁束が鎖交するため，幅方向全体の均一加熱に適している．

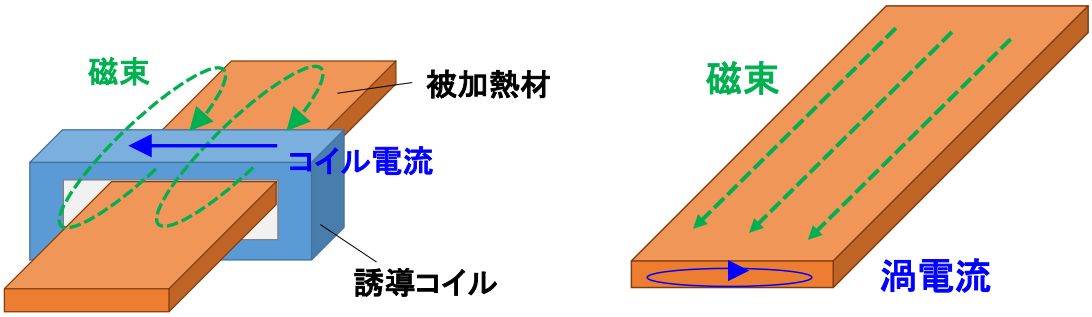


図 1.2　バーヒータの概略

エッジヒータ(EH)

被加熱材の幅方向端部を局所的に加熱昇温する IH．図 1.3 に示すのは，トランスバース方式と呼ばれる加熱方式を備えた EH の概要図である．トランスバース方式の IH は，被加熱材に鎖交する交流磁束の方向が被加熱材厚み方向と一致する．横断（交差）磁束加熱(Transverse Flux Heating)とも呼ばれる．交流磁束は，被加熱材の幅-長手方向断面を垂直に鎖交するため，渦電流は被加熱材の幅-長手方向断面を周回するように流れる．図 1.3 に示す EH では，鉄心付き誘導コイルを被加熱材の幅方向端部の上下に配し，局所加熱を実現している．

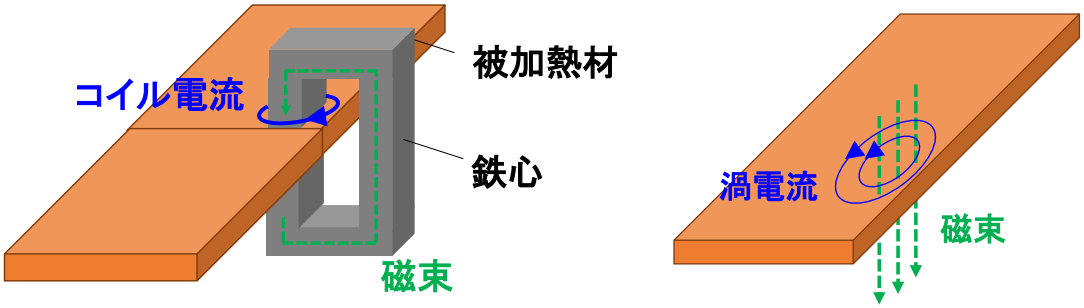


図 1.3　エッジヒータの概略

(3) IH の導入メリット

熱延ラインへの IH の導入メリットについて，代表的なものを幾つか以下に述べる．

BH の導入メリット

● サーマルランダウンの修正

コイルの目標板厚が薄い場合，仕上圧延機入側における圧延材が薄い分，搬送方向長が長くなり，圧延時間も増える．このとき，圧延材の尾端側ほど仕上圧延への進入までの待機時間が長くなるため, 温度が低下する. この現象はサーマルランダウンと呼ばれ，尾端部の温度低下に伴う荷重増加が問題になる場合がある．BH を使用し圧延材の先端

から尾端をランプ状に加熱昇温することで，サーマルランダウンを修正することができる．

● 先尾端の温度改善

先端部の昇温によりコイラへの巻付きやすさの改善できる．また，尾端の昇温により仕上圧延機の圧延荷重を低減することによって，主に難圧延材（硬質材，薄物・広幅・長尺）で発生する尾端絞りを抑制することができる．

● スキッドマークの低減

加熱炉スキッド（加熱炉内でスラブを支える支柱）への抜熱に起因する，圧延材長手方向の温度ムラ（スキッドマーク）を低減することによって，長手方向の圧延荷重変動が小さくなり，寸法精度が向上する．また，同一コイル内での材質の変動も抑制できる．

● 加熱炉抽出温度の低減

一般に，異なる材料組成のスラブが加熱炉内に混在する場合，抽出温度を高く設定する必要がある材料に合わせた炉温に設定される． BH を使うことで，選択的に個々の材料を加熱昇温できるので，加熱炉の炉温を，抽出温度が低いスラブに合わせて設定することができるため，加熱炉で使用する燃料を減らすことができる．また，普通鋼と合金鋼を混在させて圧延するミックスローリングにより圧延スケジュールの自由度も向上する．それ以外の抽出温度低減のメリットとして，加熱炉内で発生するスケールの減少，加熱炉内での異常粒の成長防止が挙げられる．

EH の導入メリット

● 混粒[27]の防止

低炭素鋼の熱間圧延の際に，仕上圧延時の圧延材の温度低下に伴い，幅端部の表層から粗大なフェライト（粗大粒）が発生し，粗大粒と整粒が混粒した組織が発生することがある．混粒の発生は圧延材の延性劣化の原因となる．EH により幅端部を昇温することで，温度低下による混粒の発生を防ぐことができる．

● 幅端部の割れの防止

熱延過程において，圧延材の幅端部は幅中央部に比べ外部雰囲気との接触面積が大きく，温度が低下しやすい．幅方向の温度が不均一のまま圧延すると，幅方向端部の硬度が高くなり，圧延材が割れるといった問題が発生する．EH により幅端部を昇温することで，この原因となる幅方向端部の温度降下を小さくできる．

● 仕上圧延機のロールの偏摩耗の抑制

上記のように圧延材幅方向の温度が不均一のときは，低温部で圧延荷重が高くなり，その部分のロールが偏摩耗する．ロールの偏摩耗は，他の圧延材の形状にも影響を与え，品質低下の原因となる．EH により幅方向の温度を均一にすることによって，これを抑制することができる．

1.3. 研究目的

本研究の目的は，IH による熱延温度制御の精度向上のための数理モデルの構築である．本研究では，このような数理モデルを構築するため，FEM をベースとし， MOR，等価回路，機械学習を用いて，以下を検討した．

1) 固有直交分解法による誘導加熱装置の解析縮約
2) 誘導加熱装置の等価回路生成
3) 機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築

1.3.1. 固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約

IH は装置規模の大きさや使用環境の特殊性から，実機からの特性データの採取が難しい．そのため，FEM を用いた性能評価による，設計や制御方案，仕様検討等が行われている．しかし，FEM 解析で正確に IH の性能を評価するためには，3 次元 FEM による磁界解析と，被加熱材の搬送を考慮した非定常熱解析を連成して行う必要がある．この連成解析を，様々な電源・被加熱材の条件で行うため，性能評価に膨大な時間を要するという問題が生じる．そこで本研究では，MOR の一種である固有直交分解法（Proper Orthogonal Decomposition : POD）に注目し，POD を用いた IH の FEM 解析縮約について検討した．

1.3.2. 誘導加熱装置の等価回路生成

IH の出力をオンラインで制御するには，電源系に対する応答解析が必要である．しかしこの入出力応答は，電源側の条件に加え，被加熱材の寸法や電気物性によっても変化するため，これらを考慮できる精度の良い数理モデルの開発が望まれる．これに関連して，電磁機器及び駆動・制御回路の設計等において，電磁数値解析と回路系の連成解析の時間短縮のため，電磁機器の入出力特性を等価回路として表現する方法がある．近年では，準静磁場を精度よく表現できる，Cauer 回路と呼ばれる梯子型回路を用いた研究が盛んに行われている．そこで本研究では，オンラインで IH の入出力応答を得るための等価回路生成手法を提案し，その有効性を確認した．

1.3.3. 機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築

IH による実際の加熱では，板寸法や鋼種等の被加熱材条件，IH 搬入時の速度・温度等の圧延条件，更には周囲温度や熱放射率の環境条件等，影響する因子が多い．このような多様な因子を物理モデルにより表現するのは困難である．そこで，機械学習を用いたデータドリブン型の数理モデルに注目し，これらの多様な因子を考慮し，オンラインで IH による被加熱材の昇温量を予測できるモデルを構築した．

1.4. 本論文の構成

第 1 章　序論

本研究の背景・目的，主題である熱間薄板圧延ラインと誘導加熱装置の概要について述べる．最後に，本論文の構成について述べる．

第 2 章　基礎理論

有限要素法の概要を述べる．本研究で扱う準静磁場有限要素方程式，及び，非定常熱有限要素方程式の定式化についてまとめる．

第 3 章　固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約

固有直交分解法による IH の FEM 解析縮約の適用結果・考察について述べる．

第 4 章　誘導加熱装置の等価回路生成

IH の等価回路生成手法を提案し，適用結果・考察について述べる．

第 5 章　機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築

機械学習を用いた IH の制御モデル構築に関する検討結果・考察について述べる．

第 6 章 結論

本論文を総括する．

第2章　基礎理論

本章では，有限要素法の概要と定式化について述べる．2.1 節で有限要素法の概要について述べ，2.2 節で準静磁場における有限要素方程式，2.3 節で熱伝導場における有限要素方程式について述べる．

2.1. 有限要素法の概要

有限要素法(Finite Element Method : FEM)とは，主に解析対象の形状や境界条件等が複雑で，厳密解を求めることが困難な問題において，数値計算により近似解を得る手法である．FEM は元来，構造力学の分野で開発された手法で，根本原理は以前から研究されていたようであるが，1956 年に Boeing 社の技師らが，アメリカ航空学会で発表した「複雑な構造の剛性とたわみ」についての論文[28]が起源と言われている．FEM はその利便性から，流体力学，熱力学，電磁気学などの様々な分野で応用されている．

FEM では，解析領域全体を要素と呼ばれる，三角形や四面体等の単純な形状の小領域に分割する．そして，各要素に含まれる節点や辺上で定義されるポテンシャルなどを簡単な式で近似して，連立一次方程式を作成し，ポテンシャル分布などを求める．2 次元モデルに対しては三角形要素や四角形要素，3 次元モデルに対しては四面体要素や六面体要素等のように，種々の形状の要素を用いることにより，複雑な形状を有する対象も解析することができる．代表的な FEM の長所としてはまず，汎用性が高く，系が種々の媒質からなる場合や，解析対象が複雑な形状を有する場合においても比較的容易に解析ができる点が挙げられる．また，非線形を有する媒質の解析にも適用できる．それらに加えて，生成する行列は一般に対称かつスパースのため、計算効率がよいという利点もある．

2.2. 準静磁場の有限要素法

本節では，本研究の電磁場解析において主に取り扱う，準静磁場の周波数領域における有限要素方程式について述べる[29-35].

2.2.1. Maxwell 方程式

電磁場は以下の 4 式で与えられるマクスウェルの方程式によって支配される[29].

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.4}$$

ここで，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{D}, \rho$ はそれぞれ，電界，磁束密度，磁界，電流密度，電束密度，電荷密度である．これらの 4 式は上から，ファラデーの法則，アンペール・マクスウェルの法則, 電束密度に関するガウスの法則, 磁束密度に関するガウスの法則と呼ばれる．

2.2.2. 支配方程式

準静磁場の周波数領域における支配方程式を導出する．まず，(2.1)-(2.4)式において，電磁界が時間的に正弦波状に変化する場合，以下のようなフェーザ(phasor)表示を考えると，時間微分の演算子$\partial/\partial t$ を $\mathrm{j}\omega$に置き換えることができる[29].

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.9}$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\rho}(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)\right] \tag{2.10}$$

ここで，表記を簡単にするため，フェーザ量を表す記号~を省略すると，周波数領域におけるマクスウェルの方程式は以下のようになる．

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D} + \boldsymbol{J} \tag{2.12}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{2.13}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.14}$$

また, 本研究で取り扱う誘導加熱装置と被加熱材の物質については, 以下の性質を全て満たしていると仮定する.

- 等方性媒質
  誘電率や透磁率，導電率は方向依存性を持たない

- 均質媒質
  誘電率や透磁率，導電率は場所に依らず一定の値である

- 非分散性媒質
  誘電率や透磁率，導電率は周波数に依らず一定である

- 線形媒質
  $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{E}$ の間に比例関係が成り立つ

等方性媒質に対しては以下が成り立つ.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} \tag{2.17}$$

ここで， $\varepsilon, \mu, \boldsymbol{J}_0, \sigma$はそれぞれ誘電率，透磁率，強制電流密度，導電率である．また，本研究で取り扱う材料特性と周波数帯域より，変位電流 $\boldsymbol{D}$ は無視できるとする．このとき(2.17)式は以下のようになる.

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，次式のように表される.

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{2.19}$$

また，$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{B}$ と磁気抵抗率νを用いて，次式のように表される.

$$\boldsymbol{H} = \nu \boldsymbol{B} \tag{2.20}$$

(2.19), (2.20)式より，次式が得られる．

$$\mathrm{rot}\,\nu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \tag{2.21}$$

(2.21)式に(2.18)式を代入すると，次式が得られる．

$$\mathrm{rot}\,\nu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} \tag{2.22}$$

ここで $\boldsymbol{E}$ に関して，(2.11)式に(2.19)式を代入すると次式が得られる．

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \tag{2.23}$$

(2.23)式の右辺を移行し書き直すと，次式が得られる．

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}\right) = 0 \tag{2.24}$$

(2.24)式より，$\boldsymbol{E}$ は任意のスカラーポテンシャルφを用いて次式のように表せることが分かる．

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\varphi \tag{2.25}$$

(2.25)式に(2.22)式を代入すると，次式が得られる．

$$\mathrm{rot}\,\nu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \sigma\left(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\varphi\right) = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.26}$$

このとき，(2.26)式は未知数を 2 つ含むため，解が一意に決まらない．そこで，(2.26)式の両辺の発散を取り，電流の連続条件の式(div$\boldsymbol{J}$=0)に代入すると次式が得られる．

$$\mathrm{div}\,\sigma\left(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\varphi\right) = 0 \tag{2.27}$$

このとき，(2.26)式の第 1 項は，回転の発散を取るためゼロとなる．(2.26)式と(2.27)式が準静磁場の周波数領域における支配方程式となり，この二式を連立して解くことで，一意な解が得られる．

2.2.3. 有限要素方程式

前項で導出した支配方程式を離散化し，3 次元準静磁場の周波数領域における有限要素方程式を導く．まず，(2.26), (2.27)式に対し重み付き残差法を適用する．(2.26), (2.27)式の両辺にそれぞれ何らかの重み関数 $\boldsymbol{W}$,　w を乗じ，対称性を考慮して，解析領域Ω内で積分すると，次式のように表される．

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\{\mathrm{rot}\,\nu\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\varphi)\}\mathrm{d}V=\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}V \tag{2.28}$$

$$\int_\Omega w\mathrm{div}\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V=0 \tag{2.29}$$

(2.28)式の第 1 項に，ベクトル公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\mathrm{rot}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})-\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ [30]とガウスの発散定理を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nu\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V-\int_S \boldsymbol{W}\times(\nu\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+j\omega\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V\\&=\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{2.30}$$

ここで，S は解析領域Ωの境界面である．一方，(2.29)式に対し，ベクトル公式 $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot(\mathrm{grad}\varphi)+\varphi\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ [30] とガウスの発散定理を適用すると，次式が得られる．

$$\int_\Omega(\mathrm{grad}w)\cdot\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V-\int_S w\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{2.31}$$

(2.30), (2.31)式は，(2.28), (2.29)式と比べ，要求される微分が 2 階微分から 1 階微分になっており，弱形式である．ここで，(2.30)式左辺第 2 項は，固定境界条件，あるいは，積分内を $\boldsymbol{W}\times(\nu\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{n}\cdot=(\boldsymbol{n}\times\nu\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{W}$ [30] と変形し自然境界条件を適用することで，零とすることができる．また，(2.31)式左辺第二項の面積分項は電荷保存則に対応しており，零となる．結果として，(2.30), (2.31)式は次式のように表される．

$$\int_\Omega \nu\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V+\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+j\omega\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V=\int_\Omega \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}V \tag{2.32}$$

$$\int_\Omega(\mathrm{grad}w)\cdot\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V=0 \tag{2.33}$$

次に，(2.32), (2.33)式を離散化するため，未知数 $\boldsymbol{A}$，φ をそれぞれ，辺要素補間関数 $\boldsymbol{N}_j$，節点要素補間関数 N_k を用いて，要素内で次式のように表す．

$$\boldsymbol{A}=\sum_j A_j\boldsymbol{N}_j \tag{2.34}$$

$$\varphi=\sum_k \varphi_k N_k \tag{2.35}$$

ここで，j, k はそれぞれ，要素の辺，節点の数である．(2.34), (2.35)式を(2.32), (2.33)式に代入し，また，重み関数として補間関数を用いて $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{N}_i$, $w=N_u$ とする（ガラーキン法 (Galerkin’s method) [31]）と，最終的に次式が得られる．

$$\sum_j A_j \int_\Omega \left\{ \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_j + \mathrm{j}\omega\sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \right\} \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \sum_k \varphi_k \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad} N_k \mathrm{d}V = \int_\Omega \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V \tag{2.36}$$

$$\mathrm{j}\omega \sum_j A_j \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_j \cdot \mathrm{grad} N_u \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \sum_k \varphi_k \int_\Omega \sigma \mathrm{grad} N_k \cdot \mathrm{grad} N_u \mathrm{d}V = 0 \tag{2.37}$$

(2.36), (2.37)式が準静磁場の周波数領域における有限要素方程式となる．

2.2.4. 電流項の計算

本項では，前項で導出した有限要素方程式における電流項（右辺）の計算方法について述べる．結論から述べると，導体（コイル）内の渦電流を考慮しない場合は，電流密度の連続性の条件 div$\boldsymbol{J}_0$=0 を満たすような強制電流を与えればよい．3 次元解析では，上記の条件を厳密に満たす $\boldsymbol{J}_0$ の分布を求める方法に，電流ベクトルポテンシャルを用いる方法と，磁気スカラーポテンシャルを用いる方法がそれぞれ提案されている．本研究では，磁気スカラーポテンシャルを用いた方法により強制電流を印加する．以下，その手順を述べる．

オームの法則より，強制電流 $\boldsymbol{J}_0$ について次式が成立する．

$$\boldsymbol{J}_0 = \sigma \boldsymbol{E} \tag{2.38}$$

また，コイル中に渦電流が流れない場合，(2.11)式のファラデーの法則は次式となる．

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{2.39}$$

(2.39)式より，電界 $\boldsymbol{E}$ は任意の磁気スカラーポテンシャルϕを用いて次式のように表される．

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi \tag{2.40}$$

(2.40)式を(2.38)式に代入すると，次式が得られる．

$$\boldsymbol{J}_0 = -\sigma \mathrm{grad}\phi \tag{2.41}$$

ここで，強制電流 $\boldsymbol{J}_0$ の連続性のための条件を再掲すると，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J}_0 = 0 \tag{2.42}$$

(2.41)式を(2.42)式に代入すると，次式が得られる．

$$\mathrm{div}\sigma\mathrm{grad}\phi = 0 \tag{2.43}$$

このとき，境界条件は次式により与えられる

$$I = \int_S \boldsymbol{J}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \sigma \mathrm{grad}\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.44}$$

ここで，S はコイル断面である．(2.44)式より，流入，流出面に一定の磁気スカラーポテンシャルϕを与えることで，コイルに強制的に電流を与えることができる．しかし，有限要素解析は離散化誤差を含むため，(2.44)式は厳密に成り立ってはおらず，(2.44)式で求めた電流が(2.42)式を満たす保証がない. そこで, 求めた電流密度の発散が 0 になるように，次式で補正する必要がある．

$$\boldsymbol{J}_0' = \boldsymbol{J}_0 - \mathrm{grad}z \tag{2.45}$$

ここで，$\boldsymbol{J}_0$’は修正後の電流密度であり，発散は 0 である．このような $\boldsymbol{J}_0$’を求めるための z について，次式を考える．

$$\mathrm{div}\left(\sigma \mathrm{grad}\phi\right) = \mathrm{grad}z \tag{2.46}$$

結果として，(2.43), (2.46)式を離散化し，連立して解くことで電流密度分布を得ることができる．

2.2.5. 境界条件

本項では，準静磁場有限要素法の境界条件について述べる．まず，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{B}$=rot$\boldsymbol{A}$ として定義しているため，gradφの分だけ不定性を有している．このような不定性を取り除くために固定境界条件を用いる．また，有限要素法の定式化の中で，境界項を落とすことで自然に満足される自然境界条件も用いる．

(a) 固定境界条件（ディリクレ(Dirichlet)条件[32]）

境界上の未知数に直接値を与える境界条件. 磁界の発生源から遠く離れた境界では, 近似的に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に関して次式が成り立つ.

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.47}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界の法線方向の単位ベクトルである．ここで，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n}$ の発散を考えると，次式が成り立つ．

$$\mathrm{div}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B} \tag{2.48}$$

(2.**48**)式より，$\boldsymbol{A}$ に関して次式が成り立つ.

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{2.49}$$

(2.49)式を満足するためには $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ とすれば十分である．従って，本研究では固定境界上で $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ としている．

(b) 自然境界条件（ノイマン(Neumann)条件[32]）

磁束 $\boldsymbol{B}$ が境界に垂直となるように，境界積分項に課する境界条件．境界上で次式を満たす磁界を次式のように設定する．

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{2.50}$$

これより，磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は，次式の条件を満たすように設定する．

$$\boldsymbol{n} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \tag{2.51}$$

2.2.6. 外部回路との連成

電磁機器は通常，電源に接続して運転されるため，動作時の解析は電源電圧を考慮して行う必要がある．すなわち，前項までは，2.2.4 項の方法で導体内の電流密度を求め，既知として扱っていたが，外部回路と連成する場合はこれを未知数とし，有限要素方程式と回路方程式（電圧・電流の関係式）と連立して解く必要がある．

今，電源と電磁機器が図 2.1 のように接続されている場合を考える．このとき，回路方程式は以下のように表される[33].

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + RI_0 + L\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = v_{in} \tag{2.52}$$

ここで，Φ, I_0, R, L, v_{in} はそれぞれ，コイル（巻線）の鎖交磁束数，電流，コイル抵抗や外部電源抵抗・付加抵抗等の和，外部電源のインダクタンス，電源電圧である．(2.52)式中のΦは次式で求めることができる．

$$\Phi = \frac{n_c}{S_c}\int_{\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_s \mathrm{d}V \tag{2.53}$$

ここで，$n_c, S_c, \boldsymbol{n}_s$ はそれぞれ，コイルの巻数・断面積，電流の方向ベクトルである．(2.53)式中の $\boldsymbol{A}$ を(2.34)式により離散化し，(2.52)式に代入すると，回路方程式のように表される．

$$v_{in} = RI_0 + \mathrm{j}\omega LI_0 + \mathrm{j}\omega \sum_j A_j \int_\Omega \frac{n_c}{S_c} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{n}_s \mathrm{d}V \tag{2.54}$$

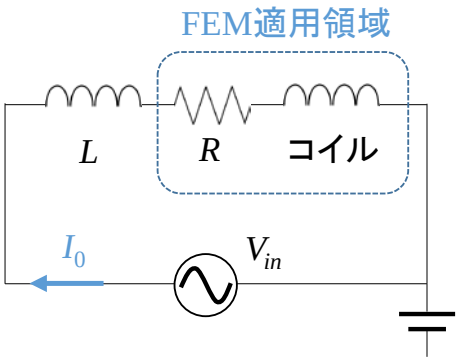


図 2.1 電源と電磁機器の回路

一方，電流密度 $\boldsymbol{J}_0$ は $\boldsymbol{n}_s$ を用いて次式のように表される．

$$\boldsymbol{J}_0 = \frac{n_c I_0}{S_c} \boldsymbol{n}_s \tag{2.55}$$

(2.55)式を(2.36)式に代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\sum_j A_j \int_\Omega \left\{ \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_j + \mathrm{j}\omega\sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \right\} \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \sum_k \varphi_k \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad} N_k \mathrm{d}V \\ &- I_0 \int_\Omega \frac{n_c}{S_c} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{n}_s \mathrm{d}V = 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

従って，外部電源を考慮した電圧入力解析の場合は，(2.56), (2.37)式が有限要素方程式となり，これらを回路方程式(2.52)式と連立させて解くことになる．

2.2.7. 求解

コイル内の電流が既知の場合の場合は，(2.36), (2.37)式を要素ごとに計算し，足し合わせ，次式のような行列形式で表される n 次元連立方程式を作成する．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} + \mathrm{j}\omega \begin{bmatrix} \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ \mathrm{S}^{\mathrm{t}} & \mathrm{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

なお，(2.57)式の行列の各成分はそれぞれ以下である．

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_j \mathrm{d}V \tag{2.58}$$

$$N_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}V \tag{2.59}$$

$$S_{ik} = \int_{\Omega} \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad}N_k \mathrm{d}V \tag{2.60}$$

$$M_{uk} = \int_{\Omega} \sigma \mathrm{grad}N_k \cdot \mathrm{grad}N_u \mathrm{d}V \tag{2.61}$$

$$b_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \mathrm{d}V \tag{2.62}$$

(2.57)式を，前処理付き共役勾配法(Incomplete Cholesky conjugate gradient method : ICCG 法[32])等の数値解法により解くことで，未知数のポテンシャルを求めることができる．

コイル内の電流が未知な場合（外部電源と連成して解析する場合）は，(2.37), (2.56), (2.56)式を連立した，次式の連立方程式を考える．なお，本研究では ICCG 法により方程式を解くため，連立方程式は対称性を有する必要がある．そのため，最下行を $\mathrm{j}\omega$で除して対称行列に変換している．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & 0 & \mathrm{P} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\varphi} \\ I_0 \end{bmatrix} + \mathrm{j}\omega \begin{bmatrix} \mathrm{N} & \mathrm{S} & 0 \\ \mathrm{S}^{\mathrm{t}} & \mathrm{M} & 0 \\ \dfrac{\mathrm{P}^{\mathrm{t}}}{\mathrm{j}\omega} & 0 & \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\varphi} \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\nu_{in}}{\mathrm{j}\omega} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

$$P_i = \frac{n_c}{S_c} \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{n}_s \mathrm{d}V \tag{2.64}$$

(2.63)式を同様に ICCG 法等で解くことで，未知数のポテンシャルとコイル内の電流を求めることができる．

2.2.8. 導体中の渦電流を考慮した定式化

上記までの定式化は，導体（コイル）中に流れる渦電流を考慮していなかったが，IH のコイル中の損失や，効率等を評価する場合には，コイル中の渦電流の考慮が必要である．コイルに渦電流が流れる場合は，コイル断面内における磁気スカラーポテンシャル φ は一定と仮定し，コイル断面内では(2.35)式に代わり，以下のように離散化する[36].

$$\varphi = \varphi_0 \sum_{\Gamma_{in} \in n} N_n \tag{2.65}$$

ここで，Γ_{in} はコイルの流入面である．(2.34), (2.35), (2.65)式を用いて(2.32), (2.33)式を離散化すると，準静磁場の有限要素方程式は次式のようになる．

$$\begin{aligned}&\sum_j A_j \int_\Omega \left\{ \nu \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_j + \mathrm{j}\omega\sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \right\} \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \sum_k \varphi_k \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad} N_k \mathrm{d}V \\ &+ \mathrm{j}\omega \sum_n \varphi_0 \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad} N_n \mathrm{d}V = 0\end{aligned} \tag{2.66a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega \sum_j A_j \int_\Omega \sigma \boldsymbol{N}_j \cdot \mathrm{grad} N_u \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \sum_k \varphi_k \int_\Omega \sigma \mathrm{grad} N_k \cdot \mathrm{grad} N_u \mathrm{d}V \\ &+ \mathrm{j}\omega \sum_n \varphi_0 \int_\Omega \sigma \mathrm{grad} N_k \cdot \mathrm{grad} N_n \mathrm{d}V = 0\end{aligned} \tag{2.66b}$$

また，オームの法則より $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ なので，

$$I = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{A} \sum_{\Gamma_{in} \in k} \int_\Omega \sigma \mathrm{grad} N_k \mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \mathrm{grad}\varphi_k \sum_k \int_\Omega \sigma \mathrm{grad} N_k \mathrm{d}V \tag{2.67}$$

(2.66), (2.67)式と外部回路を連成して解くことで，コイル渦電流を考慮した解析ができる．

2.3. 熱伝導場の有限要素法

本節では，熱伝導場における有限要素方程式について述べる[37, 38].

2.3.1. 支配方程式

まず，図 2.2 のような壁面（左右の面を面 1, 2 とする）の熱伝導を考える．ただし，熱の出入りは x 方向のみとし，温度は y-z 面で一定とする．

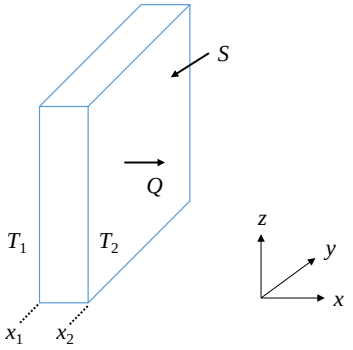


図 2.2　壁面における熱伝導

ここで，図 2.2 中の T_1, T_2 はそれぞれ面 1, 2 の温度，Q は面 2 から放射される熱量，S は

面 2 の断面積である．定常状態のときは，フーリエの法則より次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \mathrm{grad} T \tag{2.68}$$

ここで，$\boldsymbol{q}$ は単位時間に単位面積を流れる熱量，λは熱伝導率である．今，熱の出入りは x 方向のみなので，$\boldsymbol{q}$ はスカラーとなり，(2.68)式は次式のように表される．

$$q = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \tag{2.69}$$

したがって，面 2 から放射される熱量 Q を，時間 t を用いて次式のように表すことができる．

$$Q = -\lambda \frac{S(T_2 - T_1)t}{x_2 - x_1} \tag{2.70}$$

次に，熱が物体内の任意方向を流れる場合について考える．物体内の同温度点を線で結ぶと図 2.3 のような等温線が描かれる．なお，黒の矢印は熱流の方向を示す，熱流線である．

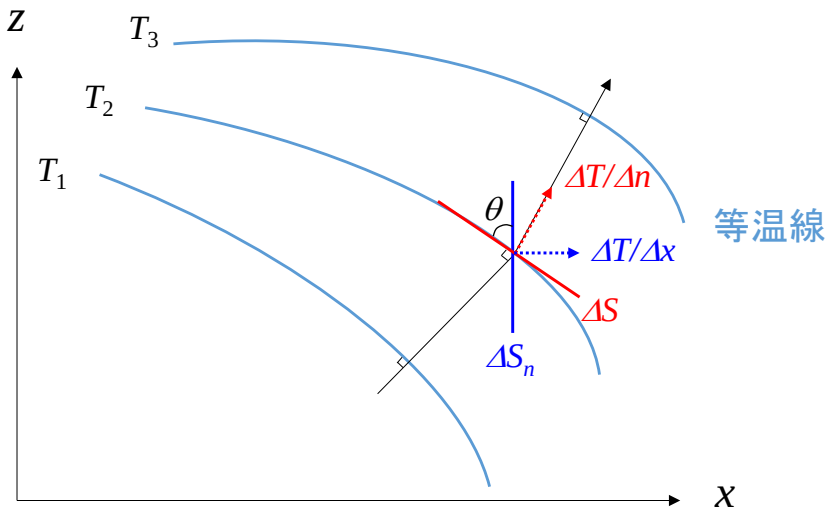


図 2.3　等温線と熱流線

(2.70)式より，等温線上の微小面 ΔS を微小時間 Δt の間に通過する熱量 ΔQ は次式のように表される

$$\Delta Q = -\lambda \Delta S \frac{\Delta T}{\Delta n} \Delta t \tag{2.71}$$

ここで，$\Delta T/\Delta n$ は等温面に直角方向の温度勾配である．次に，x 方向に垂直な面 ΔS_n を考える．この面が等温線となす角度をθとすると，(2.71)式は次式のように表される．

$$\Delta Q = -\lambda \Delta S_n \cos\theta \frac{\Delta T}{\Delta n} \Delta t \tag{2.72}$$

ここで，$\Delta T/\Delta n$ は次式のように表される．

$$\frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{\Delta T}{\Delta x \cos\theta} \tag{2.73}$$

したがって ΔS_n 面に対する書き方で，熱量を次式のように表すことができる．

$$\Delta Q = -\lambda \Delta S_n \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta t \tag{2.74}$$

このように，任意の方向に熱が流れている場合でも，直角座標系の x,y,z 方向の成分に分けて考えることができる．

次に，図 2.4 のような，任意方向に熱が流れている均質な物体中の微小直方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ を考える．

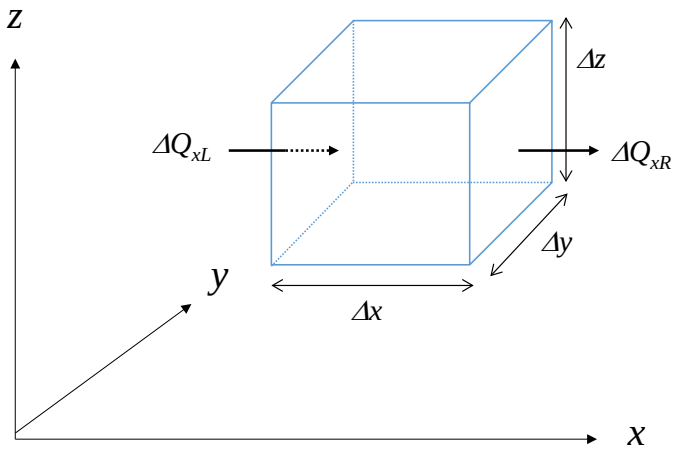


図 2.4　任意方向の熱伝導

図 2.4 の微小直方体の中心温度を T とすると，この中心より $\Delta x/2$ だけ左側の面の温度は次式のように表される．

$$T_{xL} = T - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \tag{2.75}$$

また，(2.75)式より，左側の面 $\Delta y \Delta z$ を通って時間 Δt の間に x 方向に流れ込む熱量は次式のように表される．

$$\Delta Q_{xL} = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x}\left(T - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \right)\Delta t \tag{2.76}$$

同様に，右側の面 $\Delta y \Delta z$ を通って，時間 Δt の間に x 方向に流れ出る熱量は次式のように表される．

$$\Delta Q_{xR} = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \right)\Delta t \tag{2.77}$$

(2.76), (2.77)式より，微小直方体に蓄えられる x 方向の熱量 ΔQ_x を，次式で表すことができる．

$$\Delta Q_x = \Delta Q_{xL} - \Delta Q_{xR} = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x \Delta t \tag{2.78}$$

同様に y, z 方向についても熱量を求めると，微小直方体に蓄えられる全ての熱量 ΔQ を次式で表すことができる．

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z = -\lambda \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)\Delta t \tag{2.79}$$

一方，微小直方体の密度をρ, 比熱を c，上昇温度を ΔT とすれば，熱量 ΔQ は次式のように表される．

$$\Delta Q = \rho \Delta x \Delta y \Delta z c \Delta T \tag{2.80}$$

(2.79)式と(2.80)式を比較すると，次式が得られる．

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.81}$$

発熱を考慮する場合，(2.81)式に発熱項 H を追加する．

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.82}$$

(2.82)式が熱伝導場の支配方程式となる．本研究では 2 次元平面（被加熱材断面）を考えればよいため，(2.82)式は次式のように表すことができる．

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + H = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.83}$$

最終的に，(2.83)式が 2 次元熱伝導場の支配方程式となる．

2.3.2. 有限要素方程式

前節で導出した支配方程式を離散化する．(2.83)式に後述する三角形要素節点補間関数 N_i (i=1~3)を重み関数として，重み付き残差法を適用すると，次式が得られる．

$$\int_{\Omega} N_i \left\{ \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + H - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \mathrm{d}S = 0 \tag{2.84}$$

(2.84)式左辺第 1,2,3 項をそれぞれ熱拡散項，発熱項，熱容量項と呼ぶ．熱拡散項に対してグリーン・ガウスの法則を適用し整理すると，次式が得られる．

$$-\int_{\Gamma} N_i q \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \mathrm{d}S + \int_{\Omega} N_i H \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \rho c N_i \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}S = 0 \tag{2.85}$$

ここで，q_n は境界の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_\Gamma$に平行な熱流束であり，q_n=-λgrad$T$·$\boldsymbol{n}_\Gamma$である．また，要素内の温度 T は N_i を用いて次式のように離散化できる．

$$T = \sum_{j=1}^{3} T_j N_j \tag{2.86}$$

(2.86)式を(2.85)式に代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\sum_j T_j \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}S + \sum_j \frac{\partial T_j}{\partial t} \int_{\Omega} \rho c N_i N_j \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} N_i q_n \mathrm{d}\Gamma \\ &= \int_{\Omega} N_i H \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{2.87}$$

(2.87)式が 2 次元熱伝導場の有限要素方程式である．

2.3.3. 境界条件

熱伝導場の有限要素法では，外部流体による熱伝達等の影響を境界条件によりとして近似的に考慮する．本研究では，熱伝達境界条件と熱放射境界条件の 2 つを用いる．前者は，被加熱材の周囲空気への熱伝達を考慮するために用いる．後者は，高温になる被加熱材表面で支配的となる熱放射を考慮するために用いる．以下に，各境界条件の概要と，有限要素方程式への導入方法について述べる．

(a) 熱伝達境界条件

境界の表面上で固体と流体間で行われる熱伝達を近似的に考慮するための境界条件．境界表面の熱流束 q_1 を次式のように表す．

$$q_1 = \alpha \left(T - T_{fluid} \right) \tag{2.88}$$

ここで，αは熱伝達係数で，通常は経験的な値が用いられる．T_{fluid} は外部流体温度である．

(b) 熱放射境界条件

熱放射（物質境界の表面から熱エネルギーが電磁波として放出される）を近似的に考慮するための境界条件. 熱放射では輸送元と輸送先の物体との間に媒質が必要なく, 真空中でも伝熱する．媒質境界表面の熱流束 q_2 を次式のように表す.

$$q_2 = \sigma h\left(T^4 - T_{out}^4\right) \tag{2.89}$$

ここで，h は熱放射率で，通常は経験的な値が用いられる．σはステファン・ボルツマン定数，T_{out} は周囲温度である.

(c) 有限要素方程式への導入

(2.87)式左辺第 3 項の q_n を，熱伝達・熱放射境界による熱流 q_1, q_2 を用いて分離し，次式のように表す.

$$q_n = q_1 + q_2 \tag{2.90}$$

従って，(2.87)式左辺第 3 項は次式のように表される.

$$\int_\Gamma N_i q_n \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma N_i \left\{\alpha\left(T - T_{fluid}\right) + \sigma h\left(T^4 - T_{out}^4\right)\right\}\mathrm{d}\Gamma \tag{2.91}$$

簡単のため，$\beta=(T^2+T_{out}^2)(T-T_{out})$とおくと，(2.91)式は次式のように表される.

$$\int_\Gamma N_i q_n \mathrm{d}\Gamma = \int_S N_i \left\{\alpha\left(T - T_{fluid}\right) + \sigma h\beta\left(T - T_{out}\right)\right\}\mathrm{d}S \tag{2.92}$$

また，$T_{fruid}=T_{out}$ とし，　(2.92)式を(2.87)式に代入して整理すると，次式が得られる.

$$\begin{aligned}&\sum_j T_j \left\{\int_\Omega \lambda\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}S + \int_\Gamma \alpha N_i N_j \mathrm{d}\Gamma + \int_\Gamma \sigma h\beta N_i N_j \mathrm{d}\Gamma\right\} \\ &+\sum_j \frac{\partial T_j}{\partial t}\int_\Omega \rho c N_i N_j \mathrm{d}S = \int_\Omega N_i H \mathrm{d}S + \int_\Gamma \alpha T_{out} N_i \mathrm{d}\Gamma + \int_\Gamma \sigma h\beta T_{out} N_i \mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{2.93}$$

(2.93)式を行列表示すると，次式のように表される.

$$\mathrm{K}\boldsymbol{T} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{b} \tag{2.94}$$

ここで，K，L，$\boldsymbol{b}$ の各成分は次式のように表される.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \mathrm{d}S + \int_{\mathrm{T}} \alpha N_i N_j \mathrm{dT} + \int_{\mathrm{T}} \sigma h \beta N_i N_j \mathrm{dT} \tag{2.95}$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega} \rho c N_i N_j \mathrm{d}S \tag{2.96}$$

$$b_i = \int_{\Omega} N_i H \mathrm{d}S + \int_{\mathrm{T}} \alpha T_{out} N_i \mathrm{dT} + \int_{\mathrm{T}} \sigma h \beta T_{out} N_i \mathrm{dT} \tag{2.97}$$

2.3.4. 時間方向の離散化

これまでは定常の場合について考えてきたが，非定常の熱伝導場を解析するためには，(2.93)式を時間方向に離散化し，時々刻々と解析する必要がある．本研究では，時間方向の離散化には後退差分法を用いる．時間 n ステップ目の温度ベクトルを $\boldsymbol{T}^n$ とするとき，n ステップ目と n-1 ステップ目の間の温度ベクトル $\boldsymbol{T}$ の時間微分は次式のように表される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{T}^n - \boldsymbol{T}^{n-1}}{\Delta t} \tag{2.98}$$

また， $p(0 \le p \le 1)$をパラメータとすると，$\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{b}$ は次式のように表される．

$$\boldsymbol{T} = p\left(\boldsymbol{T}^n\right) + (1-p)\left(\boldsymbol{T}^{n-1}\right) \tag{2.99}$$

$$\boldsymbol{b} = p\left(\boldsymbol{b}^n\right) + (1-p)\left(\boldsymbol{b}^{n-1}\right) \tag{2.100}$$

ここで，p=1（完全陰解法）とすると，(2.99), (2.100)式はそれぞれ次式のように表される．

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^n \tag{2.101}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^n \tag{2.102}$$

(2.98), (2.101), (2.102)式を(2.94)式に代入すると，次式が得られる．

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\mathrm{L} + \mathrm{K}\right)\left(\boldsymbol{T}^n\right) = \frac{1}{\Delta t}\mathrm{L}\left(\boldsymbol{T}^{n-1}\right) + \boldsymbol{b}^n \tag{2.103}$$

(2.103)式が，時間方向で離散化された 2 次元熱伝導場の有限要素方程式となる．

2.3.5. 求解

$\beta=(T^2+T_{out}^2)(T-T_{out})$は温度の関数のため，(2.103)式は非線形方程式となる．したがって，反復法によって求解する必要がある．そこで本項では，(2.103)式を反復法の一種である

Newton-Raphson 法で解くための定式化を行う．まず，(2.103)式の左辺の係数行列，ベクトル $\boldsymbol{T}^n$，右辺を次式のように表す．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}\mathrm{L}+\mathrm{K}=\mathrm{K}'\\&\boldsymbol{T}^{n}=\boldsymbol{T}\\&\frac{1}{\Delta t}L\left(\boldsymbol{T}^{n-1}\right)+\boldsymbol{b}^{n}=\boldsymbol{b}'\end{aligned} \tag{2.104}$$

このとき，残差 $\boldsymbol{G}$ は次式のように表される．

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{b}'-\mathrm{K}'\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0} \tag{2.105}$$

(2.105)式をテーラー展開で第 2 項まで近似すると，次式が得られる．

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{b}'-\mathrm{K}'\boldsymbol{T}_0+\left.\frac{\partial \boldsymbol{G}_0}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0}\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_0\right)=\boldsymbol{0} \tag{2.106}$$

ここで，$\boldsymbol{G}_0$ はテーラー展開の第 1 項である．(2.106)式より，次式が得られる．

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0-\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{G}_0}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0}\right)^{-1}\boldsymbol{G}_0 \tag{2.107}$$

ここで，(2.107)式の右辺の第 2 項を $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ とおくと，次式が得られる．

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{G}_0}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0} d\boldsymbol{T}=\boldsymbol{G}_0 \tag{2.108}$$

(2.108)式を ICCG 法で解き，得られた $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ により各反復ステップの温度 $\boldsymbol{T}$ を次式で更新する．

$$\boldsymbol{T}^{k+1}=\boldsymbol{T}^{k}+\mathrm{d}\boldsymbol{T} \tag{2.109}$$

(2.109)式を $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ のノルムが十分小さくなるまで繰り返し，収束条件を満たしたときの $\boldsymbol{T}$ をその時間ステップの温度とする．

2.4. 要素

本研究で有限要素法の離散化のために用いた，三角形節点要素，四面体節点要素，四面体辺要素について述べる．

2.4.1. 三角形節点要素

2 次元熱伝導場の有限要素方程式で用いた，三角形節点要素について述べる．要素内で物理量を精度よく近似するため，以下の性質をもつ面積座標 s_k を導入し，これを三角形

節点要素として用いる.

$$s_k(\boldsymbol{x}) = \frac{S_k(\boldsymbol{x})}{S}, \quad k = 1,2,3 \tag{2.110}$$

$$\sum_{k=1}^{3} s_k(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{2.111}$$

ここで，S は図 2.5 に示す三角形節点要素の面積，S_k は要素内の任意の点 p と，節点 k 以外の 2 点を結んだ三角形の面積である．従って，s_k は p が節点 k 上にあるときに 1，k 以外の節点上にあるときに 0 となる.

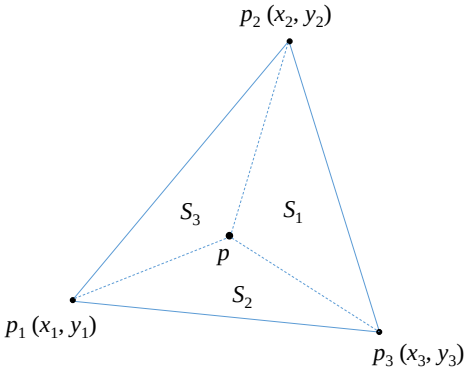


図 2.5　面積座標

面積座標 s_k を用いると，座標 x, y, z は次式のように表される.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{3} x_k s_k \\ y &= \sum_{k=1}^{3} y_k s_k \\ z &= \sum_{k=1}^{3} z_k s_k \end{aligned} \tag{2.112}$$

(2.111), (2.112)式より，次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

従って，(2.113)式より，s_k について次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

ここで(2.114)式の各係数は次式となっている.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

また，積分の評価には次式の積分公式を用いる．

$$\int_S s_1^e s_2^f s_3^g \mathrm{d}S = 2S \frac{e!\, f!\, g!}{(e + f + g + 2)!} \tag{2.116}$$

(2.112),(2.116)式を用いて面積分を行うと，$\int_S x\mathrm{d}S$ などは次式のように求めることができる．

$$\int_S x\mathrm{d}S = \frac{S}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \tag{2.117}$$

$$\int_S xy\mathrm{d}S = \frac{S}{12}\{(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\} \tag{2.118}$$

$$\int_S x^2\mathrm{d}S = \frac{S}{12}\left\{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right\} \tag{2.119}$$

また，他の式も同様にして得られる．

2.4.2. 四面体節点要素・四面体辺要素

3 次元準静磁場の有限要素方程式で用いた，四面体節点要素と四面体辺要素について述べる．四面体節点要素は，三角形節点要素が分かれば比較的容易に理解できるため，本項では主に四面体辺要素について述べる．四面体辺要素は，図 2.6 のように 4 個の節点，6 個の辺，4 個の面により構成される．図中の矢印は辺の向きに一致する．

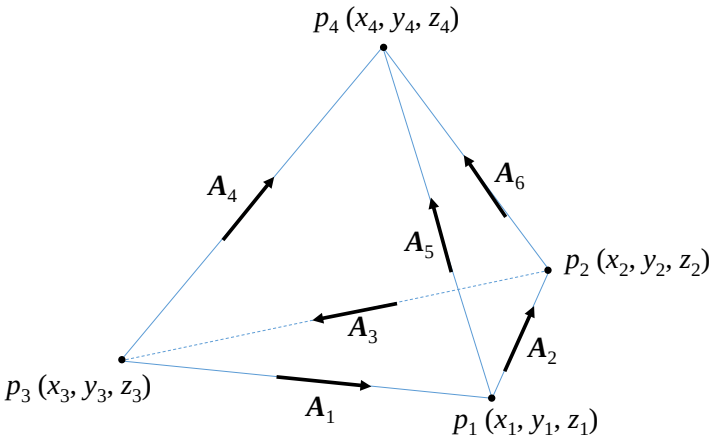


図 2.6　四面体辺要素

辺要素における未知数は，要素内の物理量を各辺へ射影し，辺に沿って積分した値とし

て定義する．したがって，辺 i (i=1~6)に対応するベクトルポテンシャル A_i は，要素のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，次式のように表せる．

$$A_i = \int_i \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{2.120}$$

ここで，$\boldsymbol{s}$ は辺ベクトルである．A_i を用いると反対に，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を次式のように離散化して表される．

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{6} A_i \boldsymbol{N}_i \tag{2.121}$$

ここで， $\boldsymbol{N}_i$ は辺 i における四面体辺要素補間関数である．$\boldsymbol{N}_i$ として，次式で表される体積座標λ_αを導入する．

$$\lambda_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} \tag{2.122}$$

ここで，α(α=1~4)は要素内で相対的につけたローカルな節点番号である．また，V は要素の体積，V_αは頂点α以外の頂点と任意の点 $p(x,y,z)$が成す体積である．(2.122)式は，点 p が要素の外部にあるとき，もしくは，点 p が頂点αと向かい合う面上にあるときは次式となる．

$$\lambda_\alpha = 0 \tag{2.123}$$

一方，点 p が頂点αにあるときは次式となる．

$$\lambda_\alpha = 1 \tag{2.124}$$

また，定義より明らかに次式が成立する．

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \lambda_\alpha = 1 \tag{2.125}$$

このようなλ_αを用いると，点 p の座標(x,y,z)は次式のように表される．

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha \lambda_\alpha \\ y &= \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha \lambda_\alpha \\ z &= \sum_{\alpha=1}^{4} z_\alpha \lambda_\alpha \end{aligned} \tag{2.126}$$

(2.125), (2.126)式より，次式が得られる．

$$\begin{bmatrix}1\\x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix} \tag{2.127}$$

(2.127)式を書き換えると，体積座標について次式が得られる．

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\\z\end{bmatrix} \tag{2.128}$$

ここで，$V, a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$は次式である．

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{vmatrix} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}a_k&=\sigma_k\begin{vmatrix}x_l & x_m & x_n\\y_l & y_m & y_n\\z_l & z_m & z_n\end{vmatrix} \quad b_k=-\sigma_k\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\y_l & y_m & y_n\\z_l & z_m & z_n\end{vmatrix}\\ c_k&=\sigma_k\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\x_l & x_m & x_n\\z_l & z_m & z_n\end{vmatrix} \quad d_k=-\sigma_k\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\x_l & x_m & x_n\\y_l & y_m & y_n\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.130}$$

なお，{*k,l,m,n*}には，{1,2,3,4}, {2,1,3,4}, {3,1,2,4}, {4,1,2,3} となるように番号付けされる．また，$\sigma_1=-\sigma_2=\sigma_3=-\sigma_4=1$ である．ここで，(2.125))式が成立するためには次式を満たせばいい．

$$\int_j \boldsymbol{N}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{2.131}$$

(2.131)式が成立するには，$\boldsymbol{N}_i$は，辺 *i* 上で接線成分を有し，それ以外の辺では接線成分を有さない必要がある．結局，体積座標を用いることで，これらの条件を満たすような四面体辺要素補間関数 $\boldsymbol{N}_i$を，次式のように定義することができる．

$$\boldsymbol{N}_i=\lambda_s\mathrm{grad}\lambda_e-\lambda_e\mathrm{grad}\lambda_s \tag{2.132}$$

ここで，*s,e* は辺 *i* における始点・終点の節点番号である．

<u>四面体辺要素補間関数の回転</u>

(2.**128**), (2.132)式より，四面体辺要素補間関数 $\boldsymbol{N}_i$は次式のように表される．

$$\boldsymbol{N}_1 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z\right)\left(a_2 \boldsymbol{e}_x + a_3 \boldsymbol{e}_y + a_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z\right)\left(c_2 \boldsymbol{e}_x + c_3 \boldsymbol{e}_y + c_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.133}$$

$$\boldsymbol{N}_2 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z\right)\left(b_2 \boldsymbol{e}_x + b_3 \boldsymbol{e}_y + b_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z\right)\left(a_2 \boldsymbol{e}_x + a_3 \boldsymbol{e}_y + a_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.134}$$

$$\boldsymbol{N}_3 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z\right)\left(c_2 \boldsymbol{e}_x + c_3 \boldsymbol{e}_y + c_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z\right)\left(b_2 \boldsymbol{e}_x + b_3 \boldsymbol{e}_y + b_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.135}$$

$$\boldsymbol{N}_4 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z\right)\left(d_2 \boldsymbol{e}_x + d_3 \boldsymbol{e}_y + d_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 z\right)\left(c_2 \boldsymbol{e}_x + c_3 \boldsymbol{e}_y + c_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.136}$$

$$\boldsymbol{N}_5 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z\right)\left(d_2 \boldsymbol{e}_x + d_3 \boldsymbol{e}_y + d_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 z\right)\left(a_2 \boldsymbol{e}_x + a_3 \boldsymbol{e}_y + a_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.137}$$

$$\boldsymbol{N}_6 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z\right)\left(d_2 \boldsymbol{e}_x + d_3 \boldsymbol{e}_y + d_4 \boldsymbol{e}_z\right) - \left(d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 z\right)\left(b_2 \boldsymbol{e}_x + b_3 \boldsymbol{e}_y + b_4 \boldsymbol{e}_z\right) \right\} \tag{2.138}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x,y,z 方向の基本ベクトルである．これらを用いて，例えば rot$\boldsymbol{N}_1$ は次式のように表される．

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_1 = 2\left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{ \left(c_3 a_4 - a_3 c_4\right)\boldsymbol{e}_x - \left(c_2 a_4 - a_2 c_4\right)\boldsymbol{e}_y + \left(c_2 a_3 - a_2 c_3\right)\boldsymbol{e}_z \right\} \tag{2.139}$$

$\boldsymbol{N}_2$~ $\boldsymbol{N}_6$ の回転も同様に計算できる．

四面体節点要素補間関数の勾配

四面体節点要素補間関数として(2.128)式で表される体積座標を用いているため，例えば gradN_1 は次式のように表される．

$$\mathrm{grad}_1 = \frac{1}{6V}\left(a_2 \boldsymbol{e}_x + a_3 \boldsymbol{e}_y + a_4 \boldsymbol{e}_z\right) \tag{2.140}$$

N_2 ~N_4 の勾配も同様に計算できる．

体積分項の評価

座標 x, y, z は体積座標λ_aを用いて(2.106)式のように表せる．体積分の評価は，次式の積分公式を用いて行う．

$$\int_V \lambda_1^e \lambda_2^f \lambda_3^g \lambda_4^h \mathrm{d}V = 6V \frac{e!\, f!\, g!\, h!}{(e+f+g+h+3)!} \tag{2.141}$$

ここで，(2.126), (2.141)式を用いて体積分を行うと，$\int_V x \mathrm{d}V$ などは次式のように求めることができる．

$$\int_V x \mathrm{d}V = \frac{V}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \tag{2.142}$$

$$\begin{aligned}\int_V xy \mathrm{d}V = \frac{V}{20}\{&(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ &+ (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)\}\end{aligned} \tag{2.143}$$

$$\int_V x^2 \mathrm{d}V = \frac{V}{20}\left\{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right\} \tag{2.144}$$

他の式も同様に計算できる．

2.5. 2 章のまとめ

本章では，IH に対する有限要素法の適用のため，周波数領域における準静磁場有限要素方程式および，熱伝導有限要素方程式の定式化を行った．また，導体と被加熱材にそれぞれ流れる渦電流を両方考慮した場合の有限要素方程式を導出した．

第3章　固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約

序論にて述べたように，IH は装置規模の大きさや使用環境の特殊性から，実機からの特性データの採取が難しい. そのため, FEM を用いた性能評価による, 設計や制御方案, 仕様検討等が行われている.

しかし，FEM 解析で正確に IH の性能を評価するためには，3 次元 FEM による準静磁場解析と，被加熱材の搬送を考慮した熱伝導解析を連成して行う必要がある. この連成解析を，様々な電源・被加熱材の条件で行うため，性能評価に膨大な時間を要するという問題が生じる.

一方，3 次元 FEM 等の大規模問題の計算時間を削減する目的で，近年，モデル縮約法（Model Order Reduction : MOR）が盛んに研究されている．MOR の一種である固有直交分解法（Proper Orthogonal Decomposition : POD）は，元問題を，主成分を抽出した基底により, 低次元空間に射影することで次元縮約する手法であり, その汎用性の高さから多くの電磁機器解析への適用例が報告されている.

ところで，IH は導体中を流れる渦電流を利用して加熱するため，その加熱特性には渦電流の浸透深さが影響する．渦電流の浸透深さδは次式のように，電流の角周波数ω, 透磁率μ, 導電率σ により決まる.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{3.1}$$

このうち透磁率については，熱延時の被加熱材はキュリー温度以上になるため常磁性と見なせることから，周波数特性と導電率特性が重要である．特に前者の周波数においては, 周波数の選定により加熱効率や制御点の加熱量が変わってくるため, 最適周波数の選定が重要である.

上記のような背景から，本研究では，誘導加熱装置に特化した FEM 解析高速化を目的とし，以下の項目に関して解析した.

a)　準静磁場-熱伝導連成解析の高速化

　被加熱材の搬送を考慮した 3 次元モデルの準静磁場-熱伝導連成解析には膨大な解析時間を要する．そこで，3 次元準静磁場解析と 2 次元熱伝導解析による連成解析方法について検討する.

b1)　PODによる周波数特性の解析高速化

準静磁場における，IHの電源周波数特性に対するPOD適用について検討する．IHの準静磁場解析では，被加熱材の他，IHの誘導コイル自身も導電性材料のため，渦電流を考慮した解析が必要である．簡易的に，コイル渦電流を考慮しない場合と，する場合の両方についてPODの適用を検討した．

b2)　PODによる導電率特性の解析高速化

被加熱材の導電率は，鋼種や温度により変化する．そこで，IHの被加熱材の導電率特性についてもPOD適用を検討した．

本章の構成を述べる．まず，3.1節でPODの概要とFEMへの適用方法について述べる．3.2 節で，準静磁場と熱伝導の連成解析方法とその妥当性について述べる． そして，PODを用いたIHの準静磁場解析の高速化として，3.3節でPODによるIHの電源周波数特性の解析高速化を，3.4 節で PODによる被加熱材の導電率特性の解析高速化についての検討を述べる．最後に，3.5節で本章の総括を行う．

3.1. 固有直交分解法(POD)

本節では，本研究で用いる有限要素解析の高速化手法であるPODについて述べる．

PODは，有限要素解析を高速化するための手法である，モデル縮約法(Model order reduction: MOR)の一種である．PODでは図 3.1のように，解空間を少数の正規直交基底によって表現することで問題の次元数を縮約し，計算時間を短縮する．POD以外のモデル縮約法と比較すると，各種の問題に適用し易い手法と考えられる．しかし，未知数が膨大な問題に適用する場合は，基底を計算するための固有値問題の計算時間が長大化することが問題となる．この問題点を克服するために，スナップショット法と呼ばれるPODが提案され，多くの電磁機器の解析に適用されており，その有用性が報告されている[39-45]．本節では，通常のPOD(Conventional POD)と，スナップショット法(Snapshot POD)の概要と理論についてそれぞれ述べる．

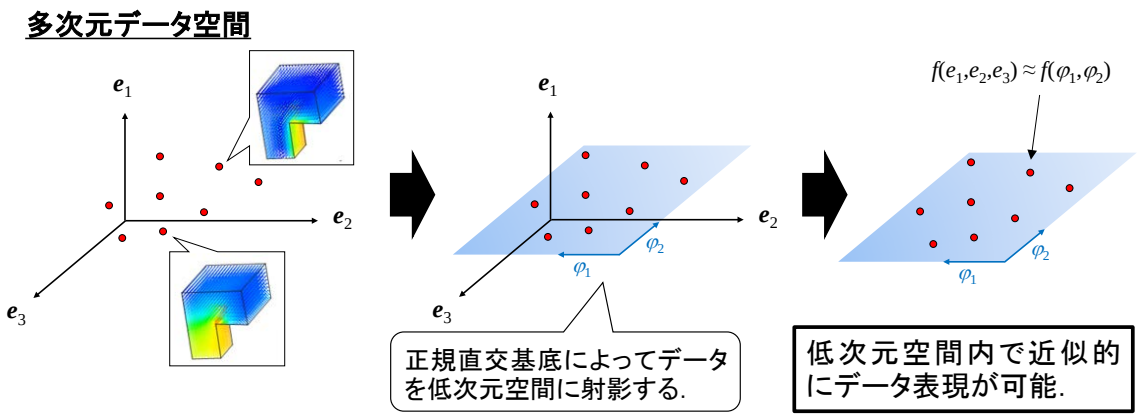


図 3.1　POD の概念図

3.1.1. Conventional POD

まず，通常の POD について述べる．POD では，多次元データから主成分である低次元データを抽出する．これは即ち，多次元空間を少ない次元数で効率的に表現できるような基底を求めることに相当する．統計学の分野では主成分分析とも呼ばれている．

時間領域のデータを例に POD を説明する．今，各時刻で観測された次式の n 次元データの集合 X を考える．

$$\mathrm{X} = \left[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_t \cdots, \boldsymbol{x}_m \right] \tag{3.2}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_t \in \mathrm{R}^n$ は時刻 t におけるデータである．POD ではこのような n 次元空間のデータを $r(<<n,m)$次元で表現するため，最適な r 次元の正規直交基底 $\mathrm{P}=\{ \boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_k, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_r \}$ $(\boldsymbol{\varphi}_k \in \mathrm{R}^n)$ を求める．最適な基底とは，データ X を r 次元の基底によって表現，すなわち r 次元空間に射影して，また元の n 次元空間に戻したときに残差が最小となるような基底である．このような基底は，次式の最小化問題を解くことで得られる．

$$f(\boldsymbol{\varphi}_k) = \sum_{t=1}^{m} \left| \boldsymbol{x}_t - \sum_{k=1}^{r} (\boldsymbol{x}_t \cdot \boldsymbol{\varphi}_k) \boldsymbol{\varphi}_k \right|^2 \rightarrow \min \tag{3.3}$$

また，射影されたデータは行列を用いて書くと $\mathrm{X}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}$ として表される．このとき，射影されたデータの分散が大きい程，元のデータの情報をより多く含んでいると考えられるため，(3.2)式は次式の $\mathrm{X}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}$ に関する最大化問題に置き換えることができる．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}_k) &= \frac{1}{n} \left(\mathrm{X}^{\mathrm{t}}\mathrm{P} \right)^{\mathrm{t}} \left(\mathrm{X}^{\mathrm{t}}\mathrm{P} \right) \\ &= \frac{1}{n} \mathrm{P}^{\mathrm{t}} \mathrm{X} \mathrm{X}^{\mathrm{t}} \mathrm{P} \rightarrow \max \end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.4)式を最大化するような P を決めるために，$\mathrm{X}\mathrm{X}^{\mathrm{t}}$ の固有値分解を考える．

$$\begin{aligned} XX^t &= V\Lambda V^{-1} \\ XX^tV &= V\Lambda \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで，$V, \Lambda \in R^{n\times n}$ はそれぞれ XX^t の固有ベクトルが並んだ行列，XX^t の固有値が並んだ対角行列である．固有値は個々の固有ベクトルが抽出できるデータのエネルギー値に相当する．即ち，固有値を降順に並べたときに，何らかの基準で閾値(r 番目)を決め，それまでの固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列 $V_r=\{ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_r \}$ を P として用いればいい．このような基底 P を POD 基底という．なお，固有ベクトルは互いに正規直交であるため，射影のための基底としての条件を満たしている．

結局，POD 基底はデータの分散共分散行列 XX^t の固有値問題を解くことで求めることができる．

3.1.2. Snapshot POD（スナップショット法）

前項の POD における分散の最大化問題を解くためには，XX^t の n 次元の固有値問題を解く必要がある．電磁界の有限要素解析においては，この次元数 n が数十万～数百万，もしくはそれ以上のオーダーになる場合があり，直接固有値問題を解くのは現実的ではない．このような大規模問題に対して，効率的に POD 基底を求める方法として，Snapshot POD（スナップショット法）が提案されている[41]．スナップショット法では，方程式の未知数次元の固有値問題を解く代わりに，解のスナップショットから構成されたデータ行列の固有値問題を解くことで，近似的に基底を求める．

まず，s($<<n$)個の瞬時場（時間領域を考える場合は「ある時間」における場，周波数領域を考える場合は「ある周波数点」における場，等）の解 $\boldsymbol{x}_i$ を保存（スナップショット）し，次式のようなデータ行列 $X_s \in R^{n\times s}$ を作成する．

$$X_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ここで，s はスナップショット数と呼ぶ．スナップショット法の精度は，スナップショットする解と s に依存する．スナップショットの取り方としては例えば，領域内（時間領域の場合，解析開始から終了時間まで）で等間隔に取る方法等が考えられる．スナップショット法では，前項におけるデータ集合 X に代わり，X_s を用いて最適な基底を求める．したがって，分散共分散行列 $X_sX_s^t \in R^{n\times n}$ の固有ベクトルを POD 基底として用いる．そこで，X_s に対し次式のように特異値分解を行う．

$$X_s = W\Sigma V^t = \sigma_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{v}_1^t + \sigma_2 \boldsymbol{w}_2 \boldsymbol{v}_2^t + \cdots + \sigma_s \boldsymbol{w}_s \boldsymbol{v}_s^t \tag{3.7}$$

ここで，$\Sigma \in R^{s\times s}$ は X_s の特異値が並んだ対角行列である．W, V^t に関して次式が成立する．

$$X_sX_s^t = W\Sigma V^t \left(W\Sigma V^t\right)^t = W\Sigma^2 W^t \tag{3.8}$$

$$X_s^tX_s = \left(W\Sigma V^t\right)^t W\Sigma V^t = V\Sigma^2 V^t \tag{3.9}$$

(3.8), (3.9)式より，W, V^t はそれぞれ $X_sX_s^t$, $X_s^tX_s$ の固有ベクトルになっていることが分か

る．この内，W を POD 基底として用いればいい．特筆すべきは，(3.7)式の特異値分解に要する計算量は，*n* 次元正方行列の固有値分解に比べて非常に小さい点にある．即ち，スナップショット法では通常の POD よりも短時間で POD 基底を求めることができ，大規模問題にも比較的容易に適用することができる．

以下，本論文で用いる POD は，スナップショット法を意味することとする．

3.2. 準静磁場-熱伝導場の連成解析

本節では，本研究における基礎として，IH による加熱の解析方法を述べる．IH による加熱解析は，(1)IH と被加熱材の準静磁場解析と，(2)被加熱材の熱伝導解析の 2 つを連成することで行う．連成解析には，強連成と弱連成がある．強連成は一般に，一方の解析結果が他方に与える影響が大きい場合に行われ，準静磁場と熱伝導解析を交互に，時々刻々と解いていく．一方，弱連成では，準静磁場解析を最初に 1 度だけ行い，その結果を基に，熱伝導解析のみを時々刻々と解いていく．本研究で取り扱う IH による解析では，被加熱材の温度変化に対する準静磁場の物性の変化が小さいため，弱連成解析を採用した．

以下，図 3.2 に示すように，形状を単純化した簡易エッジヒータモデル（片側 1/4 モデル）を例に，本研究で行った連成解析手法について述べる．

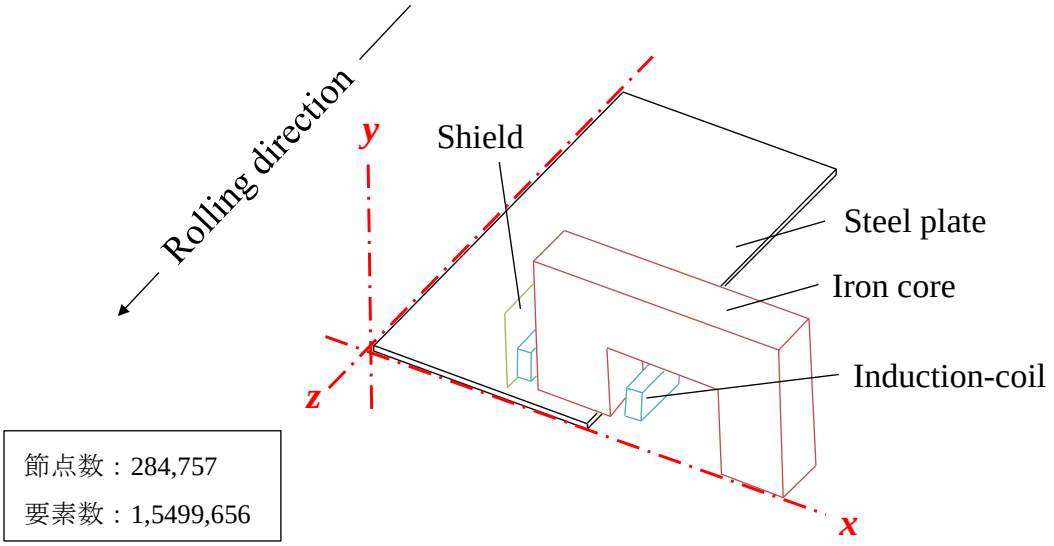


図 3.2　簡易エッジヒータモデル（片側 1/4 モデル）

3.2.1. 連成解析手法

弱連成解析は一般に，強連成解析と比べ解析時間は短くなるが，本研究ではより効率的に解析するため，準静磁場解析は 3 次元で行うが，熱伝導解析は被加熱材の板厚-板幅断面の 2 次元解析により行う方法を提案する．

本研究における連成解析手法を図 3.3 に示す．まず，準静磁場解析を 1 度だけ行い，被

加熱材各要素のジュール損失密度（発熱量）を保存する．次に，熱伝導解析の時間ステップごとに，保存した発熱量を搬送方向の先頭から順次読み込み，各時間ステップにおける発熱項 H として用い，熱伝導解析を行う．

2 次元熱伝導解析は 3 次元熱伝導解析と比べ，方程式の次元数が大幅に削減されるため，解析をより効率的に行うことができる．また，熱延中の被加熱材は，板厚方向と比べ，搬送方向の温度勾配は小さいため，3 次元解析との誤差も比較的小さいと推定される．

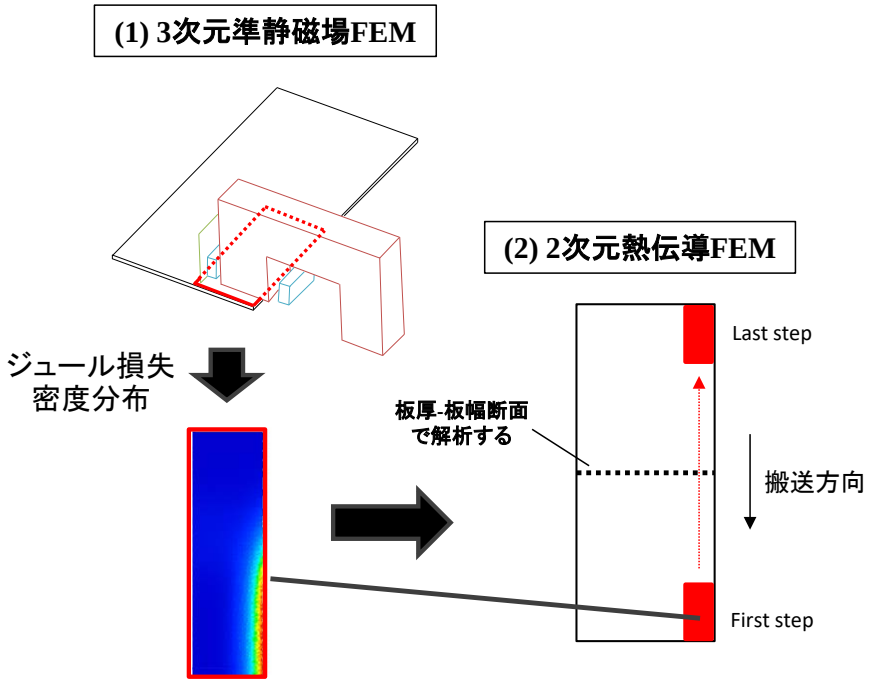


図 3.3　連成解析手法の概要

3.2.2. 連成解析結果

提案した連成解析手法の妥当性の確認のため，連成解析の熱伝導解析を本来の 3 次元で行った場合と，2 次元で行った場合の結果を比較した．

それぞれの場合で，ある電流入力条件にて，被加熱材の初期温度を 1200K(=927degC)，周囲の空気温度を 300K(=27degC)とし，被加熱材のエッジヒータ搬入から搬出まで解析したときの，被加熱材平均温度 T_{ave} の比較を図 3.4 に示す．対等な比較となるよう，3 次元熱伝導解析 T_{ave} は，2 次元熱伝導解析モデルに対応する断面内で算出している．なお，”Step”は熱伝導解析の時間ステップを示し，Step=100 のときに被加熱材の搬送方向の中央部がエッジヒータ鉄心の直下を通過する．2 次元と 3 次元の結果はよく一致しており，相対誤差（”*Error*”, = $|T_{ave}(2dim)- T_{ave}(3dim)| / T_{ave}(3dim)$）もほとんど見受けられない．本結果より，本提案手法による連成解析結果が妥当であると判断した．

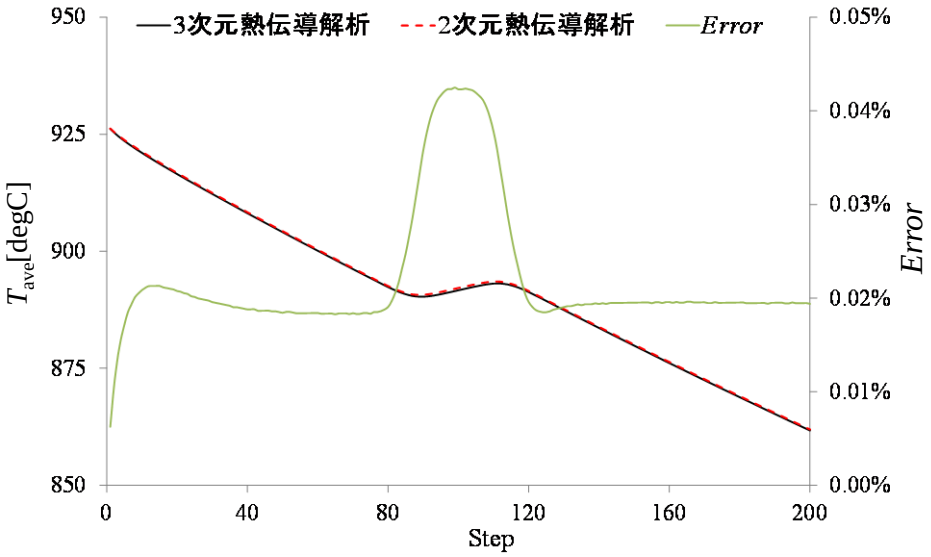


図 3.4　解析結果比較（2 次元 vs 3 次元）

3.3. PODを用いた周波数特性の解析高速化

本節では，PODを用いたIHの電源周波数特性の解析高速化について述べる．

3.3.1. 周波数特性に対するPOD

IHの周波数特性の解析高速化に際した，PODによる有限要素方程式縮約の手順を示す．2章で導いた準静磁場の有限要素方程式は，一般化すると，行列形式で次式のように表すことができる．

$$\mathrm{K}(\omega)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\omega) \tag{3.10}$$

ここで，$\mathrm{K}\in\mathrm{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathrm{R}^{n}$ はそれぞれ係数行列，解ベクトル，ソースベクトルである．(3.10)式を適当な $s(<<n)$個の周波数で解き，それぞれの解 $\boldsymbol{x}(\omega_i)$をスナップショットし，データ行列 $\mathrm{X}\in\mathrm{R}^{n\times s}$ を作成する。

$$\mathrm{X} = \left[x(\omega_1) \quad x(\omega_2) \quad \cdots \quad x(\omega_s)\right] \tag{3.11}$$

Xに対して特異値分解を適用すると，次式が得られる．

$$\mathrm{X} = \mathrm{W}\Sigma\mathrm{V}^{\mathrm{t}} = \sigma_1\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{t}} + \sigma_2\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{t}} + \cdots + \sigma_s\boldsymbol{w}_s\boldsymbol{v}_s^{\mathrm{t}} \tag{3.12}$$

ここで，$\Sigma\in\mathrm{R}^{s\times s}$ はデータ行列Xとその随伴行列 X^*の積 XX^*の固有値である，特異値σが並んだ対角行列，また $\mathrm{W}, \mathrm{V}\in\mathrm{R}^{n\times s}$ は，それぞれ XX^{t}, $\mathrm{X}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}$ の固有ベクトルである $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$ が並んだ行列である．行列Wを用いることで，次式のように，元問題の未知数 $\boldsymbol{x}$ を基底ベクトル $\boldsymbol{w}_i$ の線形結合で表現することができる．

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{W}\boldsymbol{x}_r \tag{3.13}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_r \in \mathrm{R}^s$ である．(3.13)式を(3.10)式に代入し，対称性のため左から W^t を掛けると次式が得られる．

$$\mathrm{W}^t\mathrm{K}(\omega)\mathrm{W}\boldsymbol{x}_r = \mathrm{W}^t\boldsymbol{b}(\omega) \tag{3.14}$$

上記の手順により，節点及び辺上のベクトルポテンシャルを求める元問題(3.10)式は，(3.13)式に示すように，基底ベクトルの線形結合の係数を決定する方程式に変換されている．(3.14)式の方程式の次元数は s なので，(3.10)式と比べ短時間で解くことができる．

3.3.2. 解析結果 1 (コイル渦電流を考慮しない場合)

周波数特性に対する POD の有効性を確認するため，誘導コイルの渦電流を考慮しない場合と，する場合の２つに対しそれぞれ解析を行った．前者は簡易エッジヒータモデル，後者は簡易バーヒータモデルを用いた．本項では前者の結果を述べる．

まず，図 3.2 の簡易エッジヒータモデルに対する適用結果を示す．誘導コイル内の渦電流を考慮しないため，元の有限要素方程式は(2.57)式である．

準静磁場解析は適当な電圧値のもと，電圧入力源により行う．電圧入力源の周波数は 250～300Hz の範囲で設定した．まず，適切なスナップショット数を決定するため，スナップショット数 s を変更したときの，FEM と POD の解析誤差を調査した．s に対し，次式で計算した解析誤差 $Error$ をプロットした結果を図 3.5 に示す．なお，スナップショットは解析する周波数の範囲で等間隔に取った．

$$Error(I) = \frac{\sum_i^{N_I} \left| I_i - \tilde{I}_i \right|}{\sum_i^{N_I} \left| I_i \right|} \tag{3.15}$$

ここで，$N_I, I_i, \tilde{I}_i$ はそれぞれ比較する周波数点数，FEM，POD で得られた誘導コイル電流である．

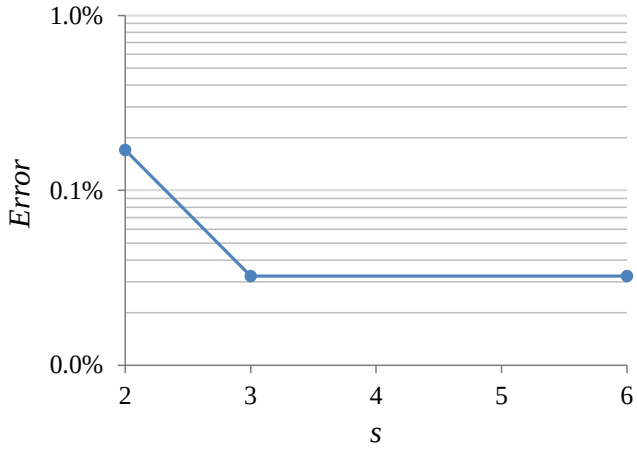


図 3.5　スナップショット数と解析誤差

図 3.5 より，s=3 で解析誤差が収束していることから，s=3 と設定した．このとき，解析誤差は 0.1%未満であった．FEM と POD によるコイル電流（規格化）の周波数特性の解析結果の比較を図 3.6 に示す．なお，図中の Re(I)は電流実部を，Im(I)は電流虚部を表す．電流実部，虚部ともに FEM の結果とよく一致していることが確認できる．

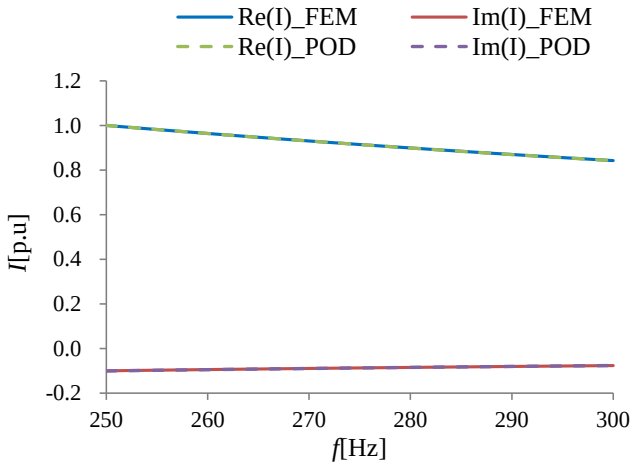
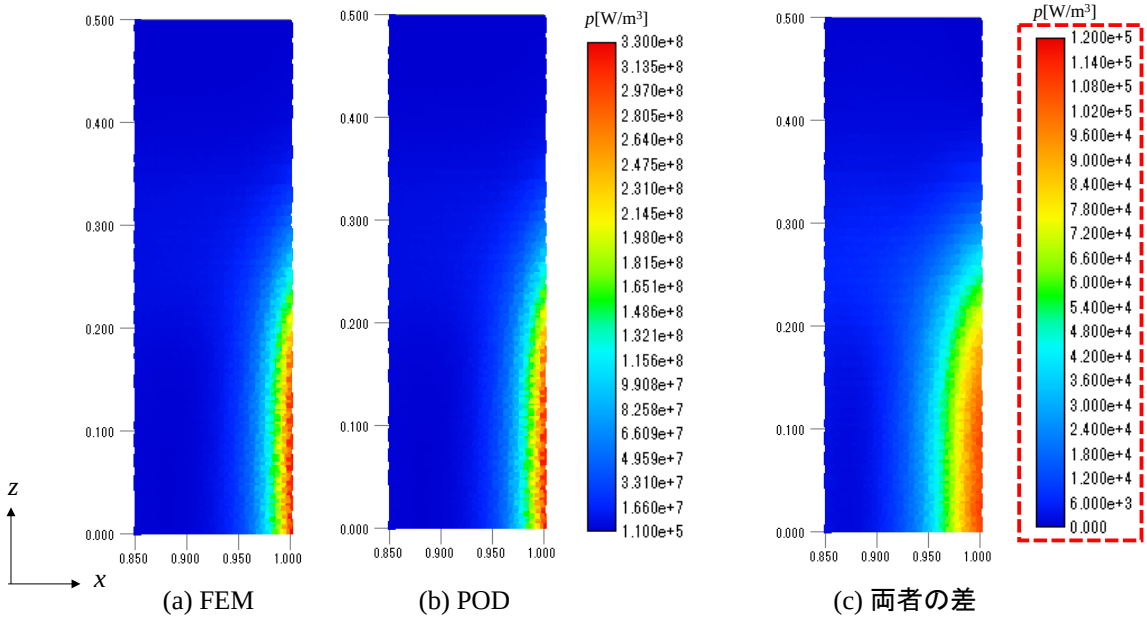


図 3.6　電流周波数応答（エッジヒータ）

次に，被加熱材に生じるジュール損失密度分布の解析精度を検討する．FEM，POD によって解析した，被加熱材の幅方向（x 方向）端部のジュール損失密度分布を図 3.7 に示す．図 3.7(a),(b)より，分布は互いによく一致していることが分かる．図 3.7 (c)は FEM と POD によるジュール損失密度の差を表しており，その最大値(1.2×10^{5}W/m^3)はジュール損失密度の最大値(3.3×10^{8}W/m^3)の 0.1%以下であった．



(a) FEM　　(b) POD　　(c) **両者の差**

図 3.7　ジュール損失密度の解析結果

FEM，POD に要した解析時間の内訳を表 3.1 に示す．ただし，メッシュ作成等や出力計算などのプリポスト処理の時間は除いている．POD を用いた場合，FEM の約 1.5%の時間で解析できており，大幅に時間を短縮することができた．

表 3.1　解析時間

	FEM	**POD**
解析時間	68min	1min

※Intel Xeon W3530(2.8GHz、4 コア)にて計算

3.3.3. 解析結果 2 (コイル渦電流を考慮する場合)

次に，図 3.8 に示すように，形状を単純化した簡易バーヒータモデル（1/8 モデル）に対する適用結果を示す．誘導コイル内の渦電流を考慮するため，元の有限要素方程式は(2.63)式である．

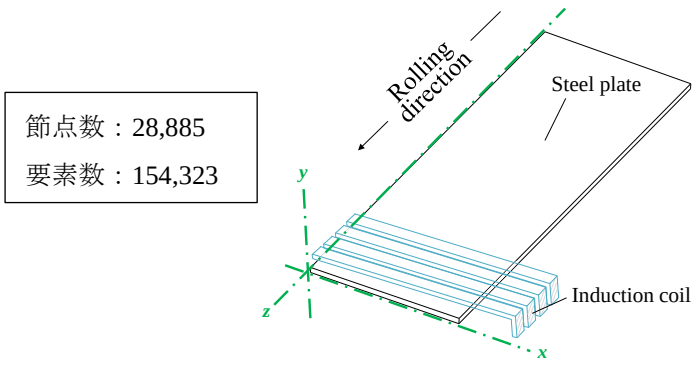


図 3.8　簡易バーヒータモデル（1/8 モデル）

スナップショットについては，前節と同様の検討を行い，以下の条件とした．

表 3.2　POD 適用条件（周波数）

最小周波数 [Hz]	最大周波数 [Hz]	スナップショット数	スナップショット点
900	1500	3	900Hz, 1200Hz, 1500Hz

POD による解析結果（”POD”）と，縮約前の FEA による解析結果（"FEM”）の比較を図 3.9, 図 3.10 に示す。なお比較は，900-1500Hz の範囲で等間隔に 50Hz 刻みで解析した計 13 点により行った。

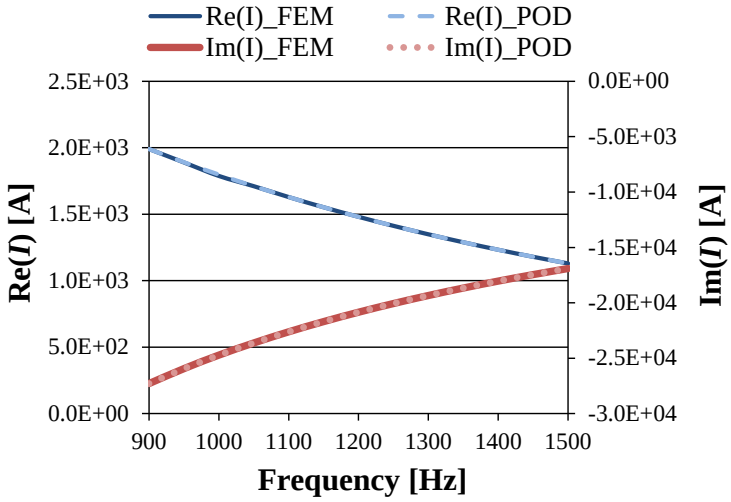


図 3.9　周波数応答計算結果（誘導コイル電流）

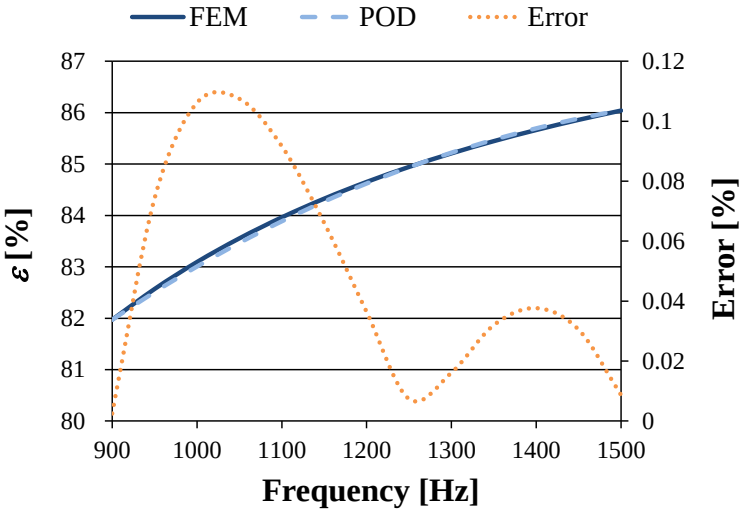


図 3.10　周波数応答計算結果（効率）

図 3.9 はコイルの電流周波数特性の比較であり，実部・虚部ともに良好な一致が確認で

きる。また図 3.10 は，次式で定義する IH の加熱効率εの比較と，その誤差 *Error* を示す。

$$\varepsilon = 100 * \frac{P_{steel}}{P_{\sin}} [\%] \tag{3.16}$$

$$Error = 100 * \frac{\left| \varepsilon^{FEM} - \varepsilon^{POD} \right|}{\left| \varepsilon^{FEM} \right|} [\%] \tag{3.17}$$

ここで，P_{steel}, P_{in}, ε^{FEM}, ε^{POD} はそれぞれ，圧延材のジュール損，コイル供給電力， FEA, POD で計算した効率である。

図 3.10 より POD で計算した効率は FEA で得られた結果とよく一致しており，誤差は最大で 0.1%程度と，解析精度は良好であった。

3.4. POD を用いた導電率特性の解析高速化

本節では，POD を用いた IH の被加熱材の導電率特性の解析高速化について述べる.

3.4.1. 導電率特性に対する POD

次に，圧延材の導電率を変数とした場合の POD 適用について述べる。圧延材の導電率は材料や温度により変化するため，加熱量を正確に見積もるには，その変化を考慮する必要がある。例として，代表的な鋼種に対する電気抵抗率の温度特性データをプロットしたグラフを図 3.11 に示す[46].

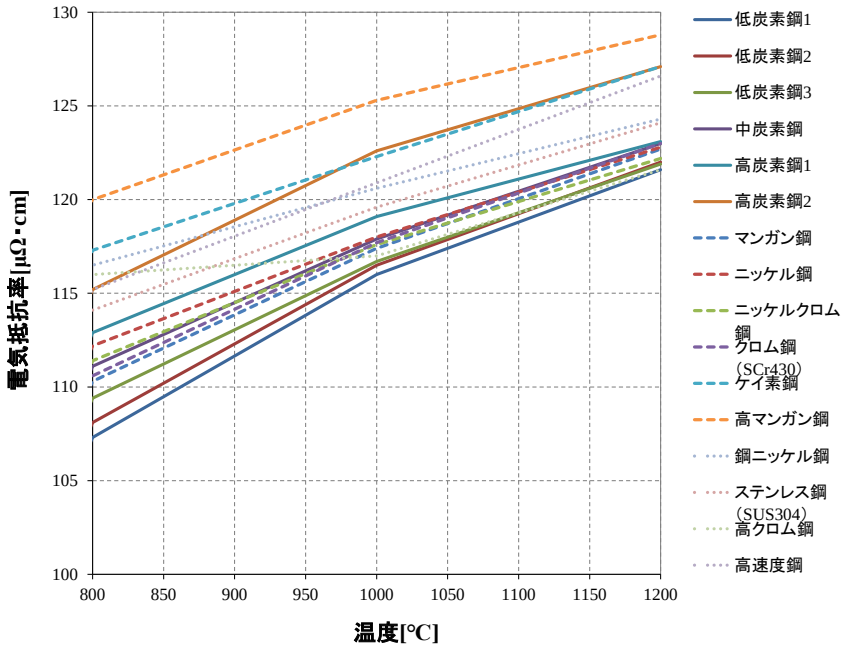


図 3.11　鋼種の電気抵抗率-温度特性

前節と同様の手順により，導電率特性に対して POD を適用できる．その際，データ行列は導電率σを変数としてスナップショットし，次式のように構成すればよい．

$$\mathrm{X} = \left[x(\sigma_1) \quad x(\sigma_2) \quad \cdots \quad x(\sigma_s) \right] \tag{3.18}$$

3.4.2. 解析結果

導電率特性に対する POD の有効性を確認のために行った解析結果について述べる．POD の適用条件は表 3.3 とした。POD，FEA より得られた圧延材のジュール損の比較結果を図 3.12 に示す。電気抵抗率への依存性はそれほど大きくはないが，非線形な特性を POD により精度よく求めることができた。

POD による周波数・電気抵抗率 1 点あたりの解析時間は FEA の 5%程度である。POD を用いることで，パラメータのケーススタディを短時間で実施できるため，例えば，設計に際するパラメータ選定の事前準備の効率化が期待できる。

表 3.3　POD 適用条件（導電率）

最小値 [μΩ·cm]	最大値 [μΩ·cm]	スナップショット数	スナップショット点
110	130	3	110μΩ·cm, 120μΩ·cm 130μΩ·cm

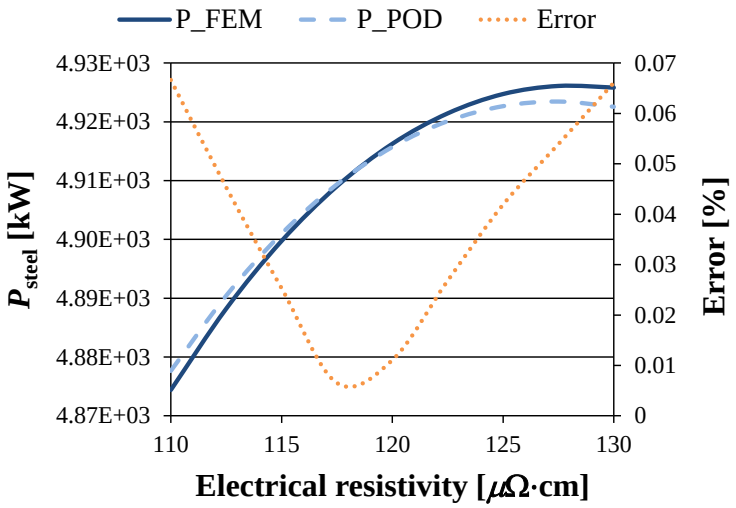


図 3.12　ジュール損-電気抵抗率 (FEM, POD)

3.5. 3 章のまとめ

本章では，IH の解析高速化に関する種々の検討結果について述べた．IH の FEM 解析のためには，被加熱材の搬送を考慮しながら，3 次元 FEM モデルの準静磁場解析と熱伝

導解析を連成して行う必要がある．また，これを様々な電源・被加熱材の条件で逐一行う場合，膨大な解析時間を要するという問題があった．そこで，本研究では，(a)搬送を考慮した準静磁場-熱伝導連成解析の高速化のため，2 次元断面を用いた熱伝導解析手法を提案した．また，(b)有限要素解析の高速化手法である POD を，電源周波数特性と導電率特性の解析に適用し，その有効性について議論した．以下に各検討内容の総括を示す．

a)　準静磁場-熱伝導連成解析の高速化

3 次元準静磁場解析と 2 次元熱伝導解析による連成解析方法を提案し，その有効性を検証した．本手法によって解析した被加熱材の平均温度は，3 次元で熱伝導解析を行った場合の結果とよく一致しており，提案手法に基づく解析結果が妥当であることを確認した．

b)　POD による準静磁場解析の高速化

IH の周波数特性の解析高速化のため，周波数特性をスナップショットした POD を FEM に適用し，解析縮約を検討した．POD を用いて得られたコイル電流，被加熱材のジュール損失密度は，コイル渦電流を考慮しない場合は，FEM の結果に対して誤差が 1%未満であり，計算時間を約 1.5%に短縮することができた．また，コイル渦電流を考慮する場合でも同様に，精度よく解析でき，解析時間を約 5%に短縮できた．

また，被加熱材の導電率特性の解析高速化のため，導電率特性をスナップショットした POD を FEM に適用し，解析縮約を検討した．周波数特性解析と同様に，解析精度は良好であり，解析時間を FEM の約 5%に短縮することができた．

本章における適用対象はあくまで，形状を単純化したエッジヒータ・バーヒータモデルであるが，基本的な特性は凡そ実機に準ずるようモデル化しているため，本結果を実機に敷衍しても実用上差し支えないと考える．

第4章　誘導加熱装置の等価回路生成

IH の出力制御においては，所望の電力が被加熱材に投入されるよう，外部電源系で誘導コイルへの入力電力を制御する．電源系に対する IH の応答を解析する際は，オンライン解析は勿論のこと，オフライン解析であっても，高精度かつ，低計算負荷の数理モデルの導入が望まれる．

ところで，電磁機器及び駆動・制御回路の設計等において，電磁数値解析と回路系の連成解析の時間短縮のため，電磁機器の入出力特性を等価回路により表現する方法がある[47, 48]．従来，このような電磁機器の等価回路は，磁気回路のパラメータを，実機試験等を通じて決定することが一般的であった．しかし近年では，Cauer 回路と呼ばれる梯子回路を用いた，機器の特性表現に関する研究が盛んに行われている．Cauer 回路は準静磁場の磁束と渦電流を精度よく表現できる他，梯子の段数を増やすことで広い周波帯域の特性も表現でき，また，磁気非線形性も考慮できる等，汎用性に優れている．

上記の背景から，本研究では，IH の電源系に対する応答解析高速化のため，Cauer 回路を用いて IH の等価回路を生成する．電磁機器の Cauer 回路表現に関する先行研究としては，例えば文献[16-23]等がある．筆者らも，(a) 文献[18]において，POD で縮約した有限要素方程式から求めたシステムのインピーダンスの周波数特性に対し，カーブフィッティングで回路素子値を同定する方法や，(b) 文献[19]において，POD により縮約した有限要素方程式から導出したシステムの伝達関数を,連分数で展開することで Cauer 回路に置き換える方法を提案し，有効性を確認している．しかし，上記を含む先行研究では，解析対象に導電性材料が複数ある場合を前提としていない．IH の場合，少なくとも，被加熱材と，IH 自身の誘導コイルが導電性材料となり，それぞれの渦電流と，渦電流による損失を分離して考慮する必要がある．したがって，このように導電性材料が複数ある場合にも適用可能な等価生成手法が望まれていた．

そこで本研究ではまず，導電性材料が複数ある問題に対し，上記(a)のフィッティングベースの手法で従来の Cauer 回路（従来 Cauer 回路）を生成し，その解析精度について確認する．次に，複数の導電性材料に生じる渦電流・ジュール損を分離して考慮するため，POD とカーブフィッティングを用いて，修正した Cauer 回路（以後、修正 Cauer 回路と称する）を生成する手法を提案し[49]]，その有効性を検証する．

本章の構成を述べる．4.1 節では，本研究で等価回路として用いる Cauer 回路の概要を述べる．次に，4.2 節で，カーブフィッティングのために用いた遺伝的アルゴリズム（Genetic Algorithm : GA）について述べる．4.3 節で，従来 Cauer 回路を用いた等価回路生成手法と適用結果，4.4 節で，本研究に基づく修正 Cauer 回路を用いた等価回路生成手法と適用結果について述べる．最後に，4.5 節にて総括を行う．

4.1. Cauer 回路

本研究で等価回路として用いる Cauer 回路（以後、従来 Cauer 回路と称する）の概要を述べる．Cauer 回路は，図 4.1 に示すような梯子構造をしている[50]．図 4.1 の Cauer 回路は，抵抗 R とインダクタンス L により構成されている回路段数 q の Cauer 回路であるが，素子の種類や配置は多様である．

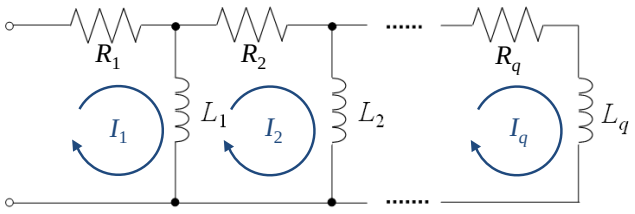


図 4.1　Cauer 回路

RL 型の Cauer 回路は，回路素子が準静磁場の磁束・渦電流と対応しており，物理的な意味を有していることが知られている. 例えば電磁鋼板内磁界を Cauer 回路で表現したとき，1 段目の L_1 が主磁束に対応し，その主磁束を打ち消すような渦電流が回路の 2 段目を流れ，その渦電流によって生じる磁束が L_2 に対応する(付録 A)．このように，1 段目は主磁束，以降は後段になるに従って高調波成分の磁束・渦電流に対応する構造となっている．Cauer 回路と磁束の関係は，ルシャンドル多項式近似によっても説明できる(付録 B)．また，このような梯子構造は連分数により表現できるため，Cauer 回路のインピーダンス Z^{Cauer} は次式で計算できる．

$$Z^{\mathrm{Cauer}} = R_1 + \cfrac{1}{j\omega L_1 + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{j\omega L_2 + \ldots}}} \tag{4.1}$$

4.2. 遺伝的アルゴリズム

本研究では，回路素子同定のためのカーブフィッティングを遺伝的アルゴリズム（GA: Genetic Algorithm）によって行う．GA は，生物の進化から着想を得た進化論的アルゴリズムの一種である[51-53]．GA では，解集合である個体群に対して，交叉，世代交代，突然変異等の遺伝的操作を繰り返し，個体群が良好な解集合へ進化していくことで，最適解を探索する．GA における個体表現として，0 と 1 によるバイナリ記号列を用いる方法もあるが，本研究では，実数ベクトルで個体を表現する実数値 GA を採用した．

本研究で用いる実数値 GA のフローチャートを図 4.2 に示す. 最初にランダムな初期個体群を生成し，次に，各個体の適応度評価・交差・世代交代を，収束条件を満たすまで

繰り返し，最良な解を探索する．

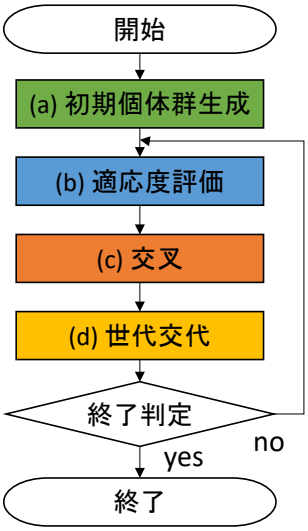


図 4.2　実数値 GA のフローチャート

なお，交叉法として REX^{star}，世代交代モデルとして Just Generation Gap (JGG)を用いる．以下に各操作の詳細を述べる．

(a) 初期個体群生成

N 個のランダムな初期個体群 X[x_1, x_2, ⋯, x_N]を生成する．一般に初期個体群は GA の性能に影響を与え，偏りが少なく多様性があるものが好ましい．そのような初期個体群生成のために，問題領域の知識を利用する場合もあるが，本研究ではランダムに初期個体群を生成した．

(b) 適応度の評価

各個体の適応度を計算することで個体の評価を行う．今回は，後述する目的関数を計算し，その値の小さい個体の適応度を高く評価する．

(c) 交叉(REX^{star})

交叉とは，選択操作によって選ばれた個体（親個体）から，その性質を受け継ぐような個体（子個体）を生成する遺伝的操作である．このとき，子個体は交叉に使用した親個体の優れた性質を引き継ぐため，より優れた個体となることが期待される．GA のための交叉方法には種々のものが提案されているが，今回はその内，実数ベクトル上の交叉方法として開発された REX^{star} を採用した[53]．REX^{star} では図 4.3 のように，個体群の大域的降下方向を求め，子個体を生成する．そのため，大域的探索に向いており，多目的

最適化におけるパレート解を見出すのに適している．

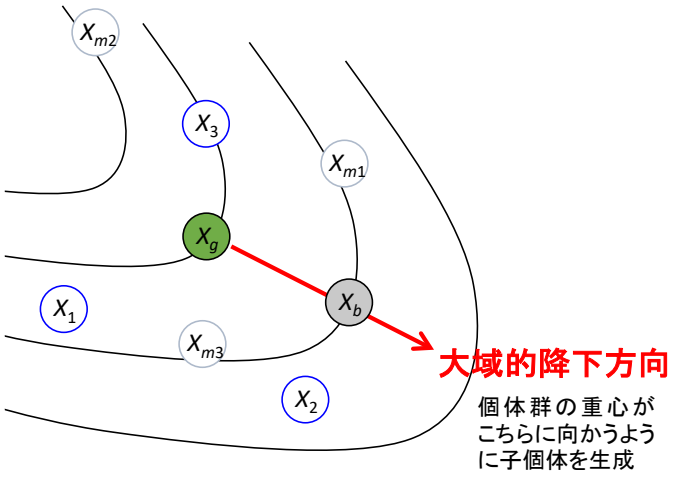


図 4.3　REX^{star} の概要図

以下に REX^{star} のアルゴリズムを示す．

1. 個体群から n+1 個の個体（親個体）x_1，…x_i，…x_{n+1} を選択し，その重心 x_g を求める．
2. 選択した全ての親個体に対し，重心 x_g に対する鏡像個体 $x_{m1,}$ …x_{mi}，…x_{mn+1} をそれぞれ作成する．
3. 親個体と鏡像個体の計 2(n+1)個の内，適応度が高い上位 n+1 個の個体を抽出し，その重心 x_b を求める．
4. x_g, x_b を用いて，下式により子個体 x_c を生成する．

$$\mathbf{x}_{\mathrm{c}} = \mathbf{x}_{\mathrm{g}} + \begin{bmatrix} u_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n^t \end{bmatrix} \left(\mathbf{x}_{\mathrm{b}} - \mathbf{x}_{\mathrm{g}}\right) + \sum_{i=1}^{n+1} u^i \left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\mathrm{g}}\right) \qquad (4.2)$$

ここで，u_j^t ~ U(0，t) (U は平均 0，分散 1/t の確率分布，j=1,…,n)である．また，t は大域的降下方向への移動量を決めるパラメータである．

(d) 世代交代(JGG)

次世代に残す固体を決定する．世代交代の方法についても様々なモデルが提案されているが，今回は REX^{star} 等の多親交叉向けに提案されている JGG と称せられる世代交代モデルを採用した．JGG では，REX^{star} によって生成した n_c 個の子個体群から，適応度の高い n_p 個の個体を選択し，集団中の n_p 個の親個体と置き換えることで世代交代を行う．

4.3. 損失分離を考慮しない等価回路生成（従来 Cauer 回路）

本節では，導電性材料が複数ある問題に対し，損失分離を考慮せずに従来 Cauer 回路を生成し，その解析精度を議論する．

4.3.1. 回路生成手法

従来 Cauer 回路の生成手法として，筆者らが文献[18],[19]で提案した，POD を用いた 2 つの従来手法（フィッティングベースの手法，伝達関数ベースの手法）について述べる．

【従来手法 1：フィッティングベースの手法】

本手法による等価回路生成手順を図 4.4 に示す．(1)まず，周波数領域の準静磁場 FEM に対し，3.3 節の周波数特性に対する POD を適用し，縮約された有限要素方程式（縮約 FEM 方程式）を作成する．(2)次に，計算負荷の小さな縮約 FEM 方程式を解くことで，IH の誘導コイルのインピーダンス周波数特性を効率的に獲得する．(3)そして，これらのインピーダンス周波数特性を入力データとしてカーブフィッティングを行い，従来 Cauer 回路の素子値を同定する．カーブフィッティングの際の最適化手法として GA を用いる．

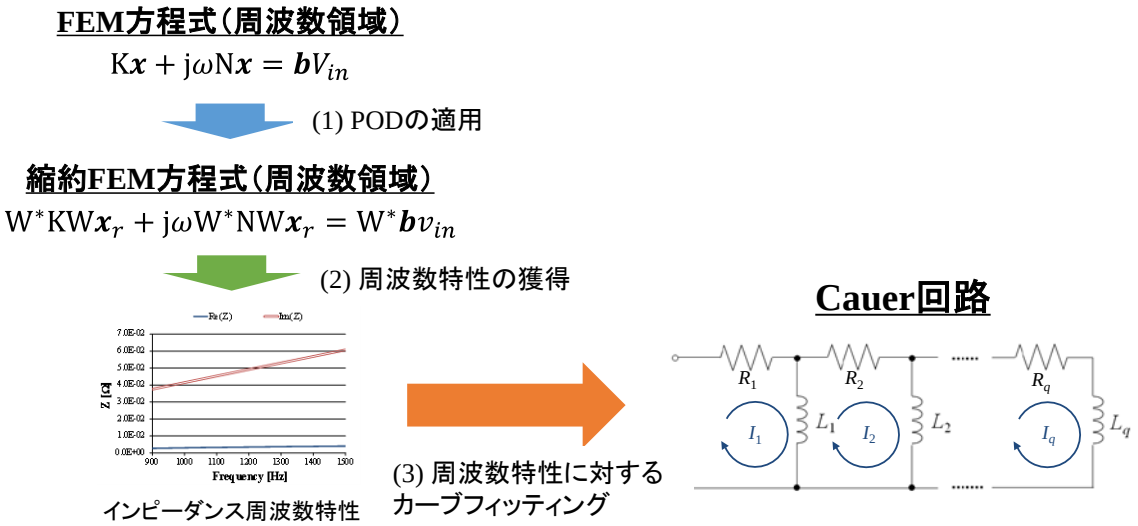


図 4.4　等価回路生成手順（損失分離を考慮しない場合）

カーブフィッティング条件

回路素子同定のため，入力データ（縮約 FEM 方程式より）と回路計算の誤差最小化問題を解く．GA でカーブフィッティングを行う際の目的関数 f は，次式のように設定した．

$$f\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right) = \sqrt{\varepsilon_z} \rightarrow \min \qquad (4.3)$$

$$\text{Sub. to} \quad R_j, \quad L_j \geq 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sum_i^m \left\{ Z^{\mathrm{POD}}(\omega_i) - Z^{\mathrm{Cauer}}(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}) \right\}^2}{\sum_i^m \left\{ Z^{\mathrm{POD}}(\omega_i) \right\}^2} \tag{4.4}$$

$$Z^{\mathrm{Cauer}} = R_1 + \cfrac{1}{j\omega L_1 + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{j\omega L_2 + \ldots}}} \tag{4.5}$$

※(4.1)式再掲

ここで,

ε_z : 入力データと Cauer 回路で計算したインピーダンスとの誤差

Z^{POD} : インピーダンス（入力データ）

Z^{Cauer} :インピーダンス（Cauer 回路）

である.

なお，(4.3)式において，回路素子値が負値とならないよう制約を課した．また，従来の Cauer 回路における一段目の抵抗素子 R_1 は，電流の直流成分(*)に対応する抵抗であるため，$R_1 = R_{\mathrm{DC}}$ (直流抵抗) としている.

(*)交流電流が導体を流れる場合は表皮効果により，導体のうち電流を流れることができる領域（断面積）が変化し，それに伴い抵抗も変化する．このような交流の特性により変化する抵抗分は交流抵抗と呼称される．それに対して，表皮効果に依存しない抵抗分は直流抵抗と呼称され，抵抗は直流抵抗と交流抵抗の和として表される.

【従来手法 2：伝達関数ベースの手法】

本手法による等価回路生成手法を述べる．2.2 節の(2.63)式は，簡略化のため，各項の係数行列をそれぞれ $\mathrm{K}_{\mathrm{tot}}$, $\mathrm{N}_{\mathrm{tot}}$ と置き，解ベクトルもまとめて $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\varphi}, I_0]$ と置くと，次式のように表すことができる.

$$\mathrm{K}_{\mathrm{tot}}\boldsymbol{x} + j\omega\mathrm{N}_{\mathrm{tot}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}v_{in} \tag{4.6}$$

ここで，$\mathrm{K}_{\mathrm{tot}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathrm{N}_{\mathrm{tot}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ はそれぞれ係数行列，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^n$ はソースベクトル，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$ は解ベクトルである．また，電流 I はベクトル $\boldsymbol{l}=[0, \ldots 0,1]^{\mathrm{t}} \in \mathrm{R}^n$ を用いて次式のように表される.

$$I = \boldsymbol{l}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} \tag{4.7}$$

(4.6), (4.7)式に対し，3.3 節で述べた周波数特性に対する POD を適用する．周波数特性のスナップショットから作成した POD 基底 $\mathrm{W} \in \mathrm{R}^{n\times s}$ により(4.6), (4.7)式を縮約すると，次式が得られる.

$$\mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{K}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W}\boldsymbol{x} + j\omega\mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W}\boldsymbol{x} = \mathrm{W}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}v_{in} \tag{4.8}$$

$$I = \boldsymbol{l}^{\mathrm{t}}\mathrm{W}\boldsymbol{x}_r \tag{4.9}$$

なお，$\boldsymbol{x}_r \in \mathrm{R}^s$ は縮約された方程式における解ベクトルで，元問題の未知数 $\boldsymbol{x}$ を基底ベクト

ルの線形結合で近似する際の係数に相当する（3.3.1 項参照）．(4.8), (4.9)式より，伝達関数はアドミタンス Y として次式のように計算できる．

$$Y = \frac{I}{v_{in}} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{t}}\mathrm{W}\left(\mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{K}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W} + j\omega\mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W}\right)^{-1}\mathrm{W}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} \tag{4.10}$$

ここで，(4.10)式において次式の置換を考える．

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{t}}\mathrm{W} = \boldsymbol{l}_r^{\mathrm{t}},\quad \mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{K}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W} = \mathrm{K}_r,\quad \mathrm{W}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}_{\mathrm{tot}}\mathrm{W} = \mathrm{N}_r,\quad \mathrm{W}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_r \tag{4.11}$$

(4.11)式を(4.10)式に代入すると，Y は次式のように表される．

$$\begin{aligned} Y &= \boldsymbol{l}_r^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{K}_r + j\omega\mathrm{N}_r\right)^{-1}\boldsymbol{b}_r \\ &= \boldsymbol{l}_r^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{I} + j\omega\mathrm{A}_r\right)^{-1}\boldsymbol{r}_r \end{aligned} \tag{4.12}$$

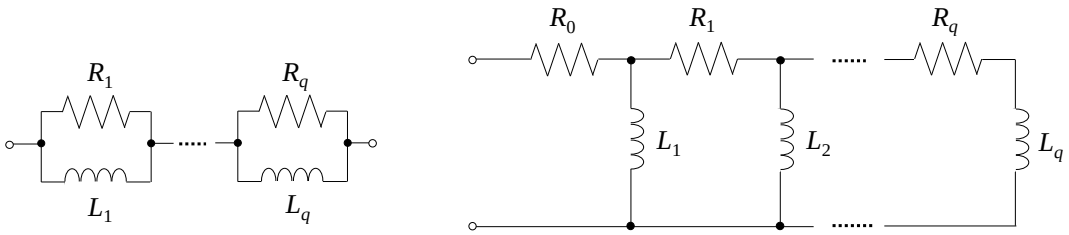
ここで，$\boldsymbol{r}_r=\mathrm{K}_r^{-1}\boldsymbol{b}_r$, $\mathrm{A}_r=\mathrm{K}_r^{-1}\mathrm{N}_r$ と置いた．(4.12)式の A_r に対して固有値分解を適用する．

$$\begin{aligned} Y &= \boldsymbol{l}_r^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{I} + j\omega\mathrm{S}_r\Lambda_r\mathrm{S}_r^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{r}_r \\ &= \boldsymbol{f}_r^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{I} + j\omega\Lambda_r\right)^{-1}\boldsymbol{g}_r \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで, S_r, Λ_r はそれぞれ A_r の固有ベクトル, 固有値$[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$が並んだ対角行列である．また，$\boldsymbol{f}_r^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{l}_r^{\mathrm{t}}\boldsymbol{S}_r$, $\boldsymbol{g}_r=\mathrm{S}_r^{-1}\boldsymbol{r}_r$ と置いた．(4.13)式における Y は，次式のような部分分数になっている．

$$Y = \sum_{k=1}^{s}\frac{f_{rk}g_{rk}}{1 + j\omega\lambda_{rk}} \tag{4.14}$$

部分分数で表現された(4.18)式は, 図 4.5(a)の Foster 回路[50]により置き換えることができる．Foster 回路は単純構造で扱いやすいが，素子値は準静磁場の磁束や渦電流と関係していないため，複雑な問題には適さない．そのため，Foster 回路（(4.18)式）を図 4.5(b)に示す Cauer 回路に変換する．まず，s 個の部分分数を次式によって有理多項式に変換する．



(a) Foster 回路　　(b) Cauer 回路

図 4.5　伝達関数より導出される等価回路

$$Y=\frac{\sum_{k=1}^{s} f_{rk} g_{rk}\left(\prod_{j=1}^{s}(1+j\omega\lambda_{rk})\Big/(1+j\omega\lambda_{rk})\right)}{\prod_{j=1}^{s}(1+j\omega\lambda_{rk})} \tag{4.15}$$
$$=\frac{b_0 s^{n-1}+b_1 s^{n-2}+\cdots b_{n-2}s+b_{n-1}}{a_0 s^{n}+a_1 s^{n-1}+\cdots a_{n-1}s+a_n}$$

(4.15)式の逆数となるインピーダンス Z を考え, $p=s^{-1}$ と置いて整理すると次式が得られる.

$$\mathrm{Z}=\frac{1}{Y}=\frac{a_n p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots a_1 p+a_0}{b_{n-1}p^{n}+b_{n-2}p^{n-1}+\cdots b_1 p^{2}+b_0 p} \tag{4.16}$$

(4.16)式の分子を分母で一度だけ割り，商と剰余の形で表すと次式が得られる.

$$Z=\frac{\left(b_{n-1}p^{n}+b_{n-2}p^{n-1}+\cdots b_1 p^{2}+b_0 p\right)\frac{a_n}{b_{n-1}}+\left(a_{n-1}-p^{n-1}\frac{a_n}{b_{n-1}}\right)p^{n-1}+\cdots+\left(a_1-p^{2}\frac{a_n}{b_{n-1}}\right)p+a_0}{b_{n-1}p^{n}+b_{n-2}p^{n-1}+\cdots b_1 p^{2}+b_0 p} \tag{4.17}$$
$$=\frac{a_n}{b_{n-1}}+\frac{a_{n-1}^{(1)}p^{n-1}+a_{n-2}^{(1)}p^{n-2}+\cdots a_1^{(1)}p+a_0^{(1)}}{b_{n-1}p^{n}+b_{n-2}p^{n-1}+\cdots b_1 p^{2}+b_0 p}=\frac{a_n}{b_{n-1}}+Z_1$$

ここで，(4.17)式において次式の置換を行っている.

$$a_{n-1}^{(1)}=a_{n-1}-p^{n-1}\frac{a_n}{b_{n-1}},\quad \cdots\quad a_1^{(1)}=a_1-p^{2}\frac{a_n}{b_{n-1}},\quad a_0^{(1)}=a_0 \tag{4.18}$$

(4.17)式の Z_1 の逆数 Y_1 についても同様に，商と剰余の形で表すと次式が得られる.

$$Y=\frac{b_{n-1}p^{n}+b_{n-2}p^{n-1}+\cdots b_1 p^{2}+b_0 p}{a_{n-1}^{(1)}p^{n-1}+a_{n-2}^{(1)}p^{n-2}+\cdots a_1^{(1)}p+a_0^{(1)}}$$
$$=\frac{\left(a_{n-1}^{(1)}p^{n-1}+a_{n-2}^{(1)}p^{n-2}+\cdots+a_0^{(1)}\right)\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p+\left(b_{n-2}-a_{n-2}^{(1)}\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}\right)p^{n-1}+\cdots+\left(b_0-a_0^{(1)}\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}\right)p}{a_{n-1}^{(1)}p^{n-1}+a_{n-2}^{(1)}p^{n-2}+\cdots a_1^{(1)}p+a_0^{(1)}} \tag{4.19}$$
$$=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p+\frac{b_{n-2}^{(1)}p^{n-1}+\cdots+b_0^{(1)}p}{a_{n-1}^{(1)}p^{n-1}+a_{n-2}^{(1)}p^{n-2}+\cdots a_1^{(1)}p+a_0^{(1)}}=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p+Y_2$$

ここで，(4.19)式の b に関しても，(4.18)式と同様の置換を行っている．同様の操作を繰り返すことで，最終的に Z_c を次式のような連分数によって表すことができる.

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{a_n}{b_{n-1}} + Z_1 \\
&= \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{1}{Y_1} \\
&= \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{1}{\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p + Y_2} \\
&= \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{1}{\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p + \dfrac{1}{Z_2}} \\
&= \frac{a_n}{b_{n-1}} + \cfrac{1}{\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}^{(1)}}p + \cfrac{1}{\dfrac{a_{n-1}^{(1)}}{b_{n-2}^{(1)}} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\dfrac{a_1^{(n-1)}}{b_0^{(n-1)}} + \cfrac{1}{\dfrac{b_0^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}}p}}}}} \\
&= \frac{1}{L_1} + \cfrac{1}{\dfrac{R_1}{s} + \cfrac{1}{\dfrac{1}{L_2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\dfrac{1}{L_n} + \dfrac{R_n}{s}}}}}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

(4.20)式は連分数となっており，図 4.5(b)のような Cauer 回路として表すことができる．また，抵抗，インダクタンス R_k, L_k は(4.20)式より一般形として次式のように表すことができる．

$$
L_k = \frac{b_{n-k-2}^{(k-1)}}{a_{n-k-1}^{(k-1)}}, \quad R_{k+1} = \frac{b_{n-k-2}^{(k-1)}}{a_{n-k-2}^{(k)}} \tag{4.21}
$$

なお，$a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$は一般形として次式のように表すことができる．

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - a_{i-1}^{(k)} \frac{a_{n-k+1}^{(k-1)}}{b_{n-k}^{(k-1)}}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_i^{(k)} \frac{b_{n-k}^{(k-1)}}{a_{n-k}^{(k)}} \tag{4.22}$$

4.3.2. 適用結果

ここでは，従来 Cauer 回路の適用結果について述べる．従来 Cauer 回路の生成には，従来手法 1 を用いた. 適用対象は, 図 4.6 に示す鉄心付き簡易バーヒータモデル(1/8 モデル)とした．図中の被加熱材と誘導コイルが導電性材料である．また，簡単のため，鉄心の磁気特性は線形と仮定した.

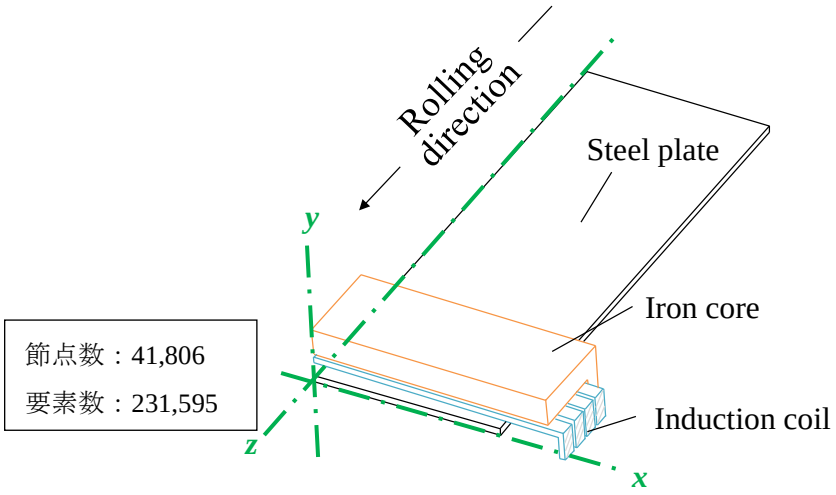


図 4.6　鉄心付き簡易バーヒータモデル

縮約 FEM 方程式の作成

上記モデルの準静磁場 FEM に対し，表 4.1 の条件で POD を適用し，縮約 FEM 方程式を作成した．縮約 FEM 方程式から求めた入力データの精度を検証するため，オリジナルの FEM 方程式と，縮約 FEM 方程式により求めた，IH の誘導コイルのインピーダンス周波数特性の比較を図 4.7 に示す．図中の”Re(Z)”はインピーダンス実部を，”Im(Z)”はインピーダンス虚部を示している．いずれの周波数においても，縮約 FEM 方程式で求めたインピーダンスはオリジナルの FEM とよく一致しているため，カーブフィッティングの入力データとして代替しても，解析精度は確保される.

表 4.1　POD 適用条件

最小周波数	最大周波数	スナップショット数	スナップショット点
900Hz	1500Hz	3	900, 1200, 1500Hz

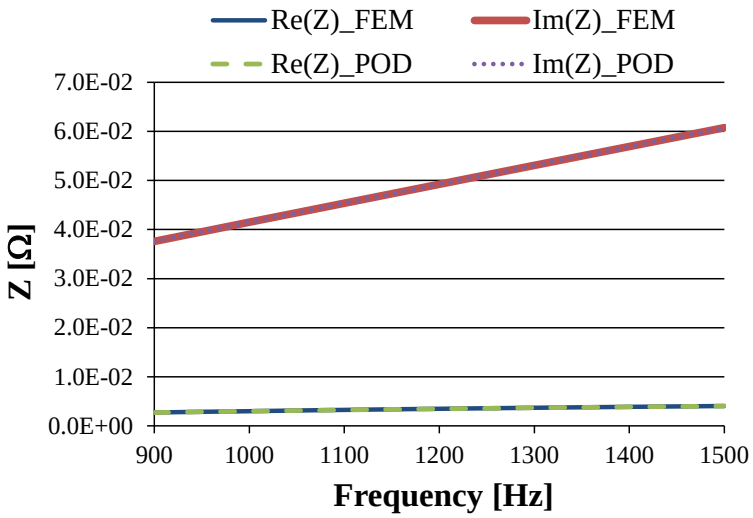


図 4.7　誘導コイルのインピーダンス周波数特性

回路素子値の検討

図 4.7 のインピーダンス周波数特性を入力データに用いて，表 4.2 の条件で GA を適用し，カーブフィッティングを行った．

表 4.2　GA 適用条件

Selection method	REX^{star}
Crossover method	JGG
Number of the individuals	60×q
Threshold value for convergence	1.0×10^{-8}
MAX number of generations	1.0×10^{5}
Number of frequency points of input data m	13 (900, 950, 1000, …, 1500Hz)

カーブフィッティングにより生成した，従来 Cauer 回路の素子値を表 4.3 に示す．なお，回路段数 q は 6 段とした．

表 4.3　回路素子値

i	R_i [Ω]	L_i [H]
1	1.000×10^{-6}	7.725×10^{-6}
2	4.435×10^{-2}	6.501×10^{-5}
3	2.818×10^{-1}	4.745×10^{-4}
4	3.884×10^{-5}	3.090×10^{-4}
5	2.557×10^{-4}	1.712×10^{-4}
6	6.600×10^{-1}	1.663×10^{-4}

回路による解析結果

上記で生成した従来 Cauer 回路と FEM それぞれにより，鉄心付き簡易バーヒータモデルに対し，誘導コイルの電流周波数応答を解析した結果を図 4.8 に示す．図中の”Re(I)”は電流実部を，”Im(I)”は電流虚部を示している．いずれの周波数においても従来 Cauer 回路の結果は FEM とよく一致している．従って，誘導コイルの電流周波数特性については，導電性材料が 2 つある場合でも，従来 Cauer 回路で精度よく解析できることが分かった．なお，実際の装置では電源側で力率補償をしているため，本解析結果に対し力率は大幅に改善される．

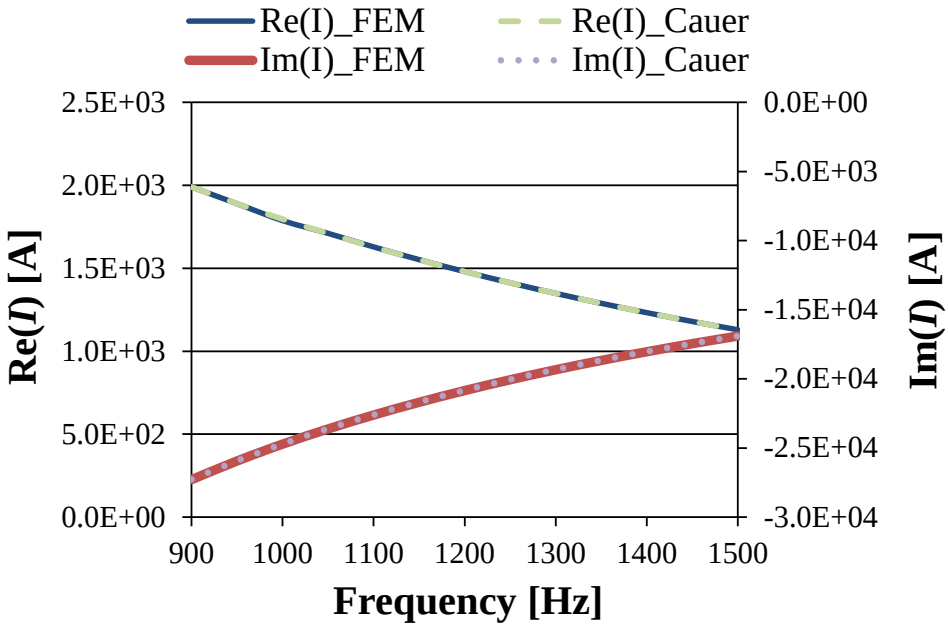


図 4.8　誘導コイルの電流周波数応答

しかし，従来 Cauer 回路では，回路素子で被加熱材と誘導コイルを区別していないため，各部を流れる渦電流やジュール損失を分離して考慮することができない．例えば，FEM の場合は，図 4.9 の”圧延材_FEM”と”コイル_FEM”に示すように，各導電性材料のジュール損失を別々に求めることができるが，従来 Cauer 回路ではこのような分離ができないため，“回路”に示すように，ジュール損失の総量しか計算できない．従って，IH 制御において重要な効率（誘導コイルへの入力電力と被加熱材のジュール損失の割合として定義される．後述する．）を計算できない．

このように従来 Cauer 回路では，被加熱材･誘導コイルの個々に生じるジュール損失や，IH の効率を計算できないため，IH 出力の制御モデルとしては十分ではない．そこで次節では，本研究で提案した修正 Cauer 回路の生成手法について述べる．

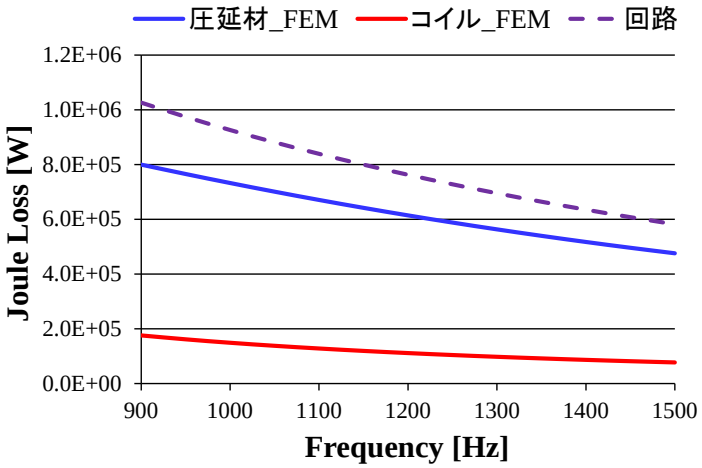


図 4.9　ジュール損失の周波数応答

4.4. 損失分離を考慮した等価回路生成（修正 Cauer 回路）

前節のように，従来 Cauer 回路では，解析領域に複数の導電性材料がある場合，それらに生じるジュール損失を分離して考慮することができない．そこで本節では，上記の従来 Cauer 回路の問題点を克服するため提案した，修正 Cauer 回路の生成手法と，その適用結果について述べる．

4.4.1. 修正 Cauer 回路

導電性材料（材料1, 2とする）が2つある場合の修正 Cauer 回路（図 4.10）の概要を述べる．

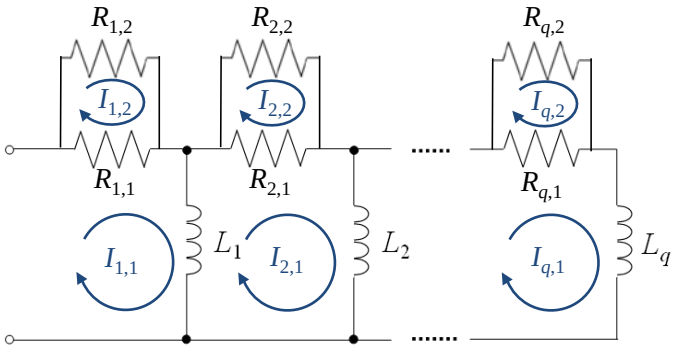


図 4.10　修正 Cauer 回路

修正 Cauer 回路は図 4.10 のように，各段の抵抗 R_i が $R_{i,1}$, $R_{i,2}$ と並列に分離されており，それぞれが材料 1, 2 に対応した抵抗であるとし，後述する回路素子同定を行う．こうすることで，各導電性材料に生じるジュール損失を分離して計算できる．上記は導電性材料が 2 つの例であるが，より一般に n 個の導電性材料を考える場合は，R_i の並列数を n 個に変更すればよい．

4.4.2. 回路生成手法

修正Cauer回路を用いた等価回路生成手法について述べる. 等価回路生成手順を図 4.11 に示す. 基本的な流れは前節と同様で, (1)縮約 FEM 方程式を作成し, (2)カーフィッティングの入力データとなる周波数特性を求め, (3)GA を用いたカーブフィッティングで回路素子値を同定する. しかし, 修正 Cauer 回路では複数の導電性材料を考慮するため, 下記(A),(B)の点で従来法と異なっている.

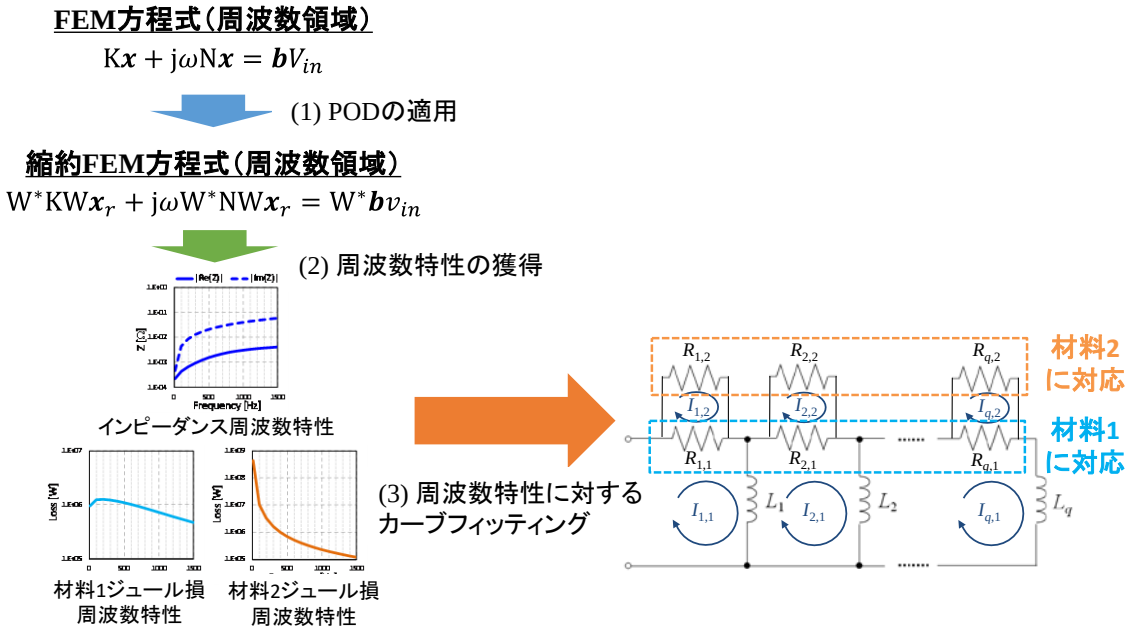


図 4.11　等価回路生成手順（損失分離を考慮する場合）

A)　入力データの追加

カーブフィッティングの入力データとして，インピーダンス周波数特性に加え，材料 1, 2 それぞれのジュール損失の周波数特性を用いる. 材料 1, 2 それぞれのジュール損失を, 分離して評価できるよう，GA の目的関数に以下の項を追加する. (1)各段の $R_{i,1}$ と電流 $I_{i,1}$ で計算される電力の合計値と材料 1 のジュール損失の誤差，(2)各段の $R_{i,2}$ と電流 $I_{i,2}$ で計算される電力の合計値と材料 2 のジュール損失の誤差.

B)　正則化項の導入

生成される回路素子値が一意になるよう，GA の目的関数に正則化項を導入する．修正 Cauer 回路は，従来 Cauer 回路よりも回路素子数が増加するため，条件によっては回路素子が一意に決まらない場合がある．そのため GA の目的関数に正則化項を追加する．正則化項は，規格化された回路素子値の和とし，調整パラメータ αを乗じることでその影響の大きさを調整する．ここでαは L カーブ法[54]より決定する．L カーブ法は，逆問題で安定した解を求めるための正則化手法である．L カーブ法では，正則化項の調整パラメータ αを変えながら解ノルムと残差ノルムをプロットしていき，両ノルムの関係の変化が急

峻な点（L 字の角部に相当する部分）に安定した解があると考え，そのときの調整パラメータを採用する．

カーブフィッティング条件

回路素子同定のため，入力データ（縮約 FEM 方程式より）と回路計算の誤差最小化問題を解く．GA でカーブフィッティングを行う際の目的関数 f は次式のように設定した．

$$f\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right) = \sqrt{\varepsilon_z + \varepsilon_{W_s} + \varepsilon_{W_c} + \alpha\varepsilon_\alpha} \rightarrow \min \quad \text{Sub. to} \quad R_j, \quad L_j \geq 0 \tag{4.23}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sum_i^m \left\{Z^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right) - Z^{\mathrm{Cauer}}\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right)\right\}^2}{\sum_i^m \left\{Z^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right)\right\}^2} \tag{4.24}$$

$$\varepsilon_{W_s} = \frac{\sum_i^m \left\{W_s^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right) - W_s^{\mathrm{Cauer}}\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right)\right\}^2}{\sum_i^m \left\{W_s^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right)\right\}^2} \tag{4.25}$$

$$\varepsilon_{W_c} = \frac{\sum_i^m \left\{W_c^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right) - W_c^{\mathrm{Cauer}}\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right)\right\}^2}{\sum_i^m \left\{W_c^{\mathrm{POD}}\left(\omega_i\right)\right\}^2} \tag{4.26}$$

$$\varepsilon_\alpha = \sum_j^{2q}\left(\frac{R_j}{R_{nomal}}\right)^2 + \sum_j^{2q}\left(\frac{L_j}{L_{nomal}}\right)^2 \tag{4.27}$$

$$Z^{\mathrm{Cauer}} = \frac{1}{R_{1,1} + R_{1,2}} + \frac{1}{j\omega L_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_{2,1} + R_{2,2}} + \dfrac{1}{j\omega L_2 + \ldots}}} \tag{4.28}$$

$$W_s^{\mathrm{Cauer}}\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right) = \sum_{i=1}^q \frac{R_{j,1} \cdot \left(I_{j,1} - I_{j,2}\right)^2}{2} \tag{4.29}$$

$$W_c^{\mathrm{Cauer}}\left(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}\right) = \sum_{i=1}^q \frac{R_{j,1} \cdot {I_{j,2}}^2}{2} \tag{4.30}$$

ここで,

ε_z：入力データと Cauer 回路で計算したインピーダンスとの誤差

ε_{Ws}：入力データと Cauer 回路で計算した被加熱材のジュール損失との誤差

ε_{Wc}：入力データと Cauer 回路で計算し誘導コイルのジュール損失との誤差

ε_α：正則化項

Z^{POD}：インピーダンス（入力データ）

Z^{Cauer}：インピーダンス（Cauer 回路）

W_s^{POD}：被加熱材のジュール損失（入力データ）

W_s^{Cauer}：被加熱材のジュール損失（Cauer 回路）

W_c^{POD}：誘導コイルのジュール損失（入力データ）

W_c^{Cauer}：誘導コイルのジュール損失（Cauer 回路）

α：正則化項の調整パラメータ

である．

4.4.3. 適用結果

本手法の適用結果について述べる．適用対象は前節と同様，図 4.6 に示す鉄心付き簡易バーヒータモデル(1/8 モデル)とした．

縮約 FEM 方程式の作成

まず，入力データを得るため，解析モデルの元問題に対し，表 4.4 の条件で POD を適用し，縮約 FEM 方程式を作成した．

表 4.4　POD 適用条件

最小周波数	最大周波数	スナップショット数	スナップショット点
10Hz	1500Hz	5	10, 100, 500, 1000, 1500Hz

POD で生成した縮小 FEM 方程式の解析精度の確認のため，(4.31)式で計算した，FEM に対する解析誤差(=”*Error*”)を周波数に対してプロットしたグラフを図 4.12 に示す．

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_i^n \left| \boldsymbol{x}_i^{FEM} - \boldsymbol{x}_i^{POD} \right|^2}{\sum_i^n \left| \boldsymbol{x}_i^{FEM} \right|^2}} \tag{4.31}$$

ここで，

$\boldsymbol{x}_i^{FEM}$: FEM で求めた解ベクトル

$\boldsymbol{x}_i^{POD}$：縮小 FEM 方程式で求めた解ベクトル

である．

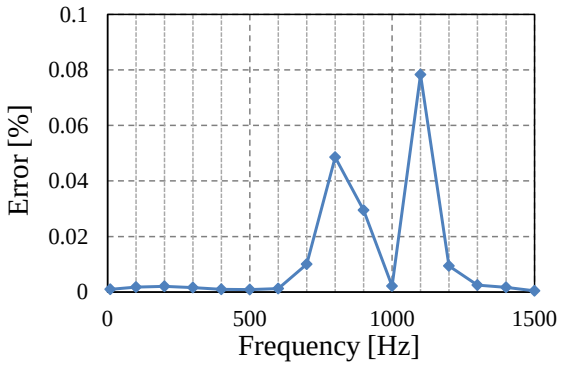


図 4.12　POD の解析誤差

図 4.12 を見ると，（相対的に）低い周波数帯域と，スナップショットを取った周波数点で誤差は小さく，それ以外で誤差が若干増加している箇所が見受けられる．しかし，いずれも 0.1%未満と非常に小さいことから，縮約 FEM 方程式で求めた入力データを用いても精度への影響は小さいと考える．

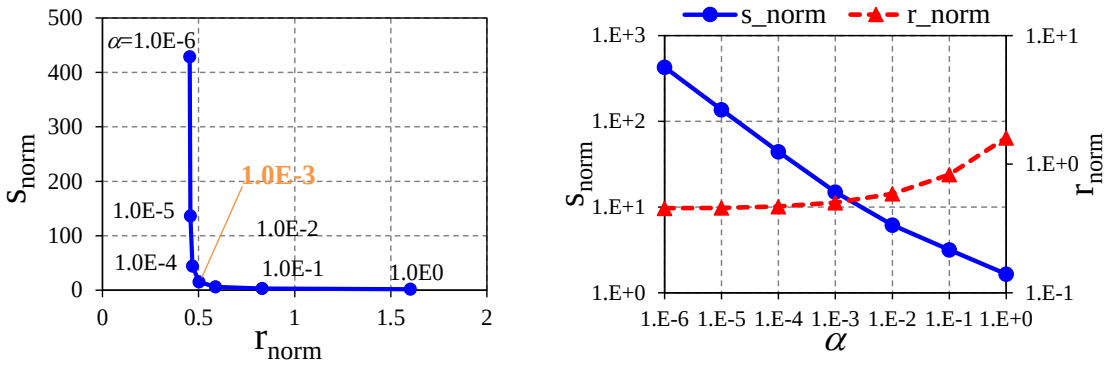
正則化項の調整パラメータの検討

次に，目的関数に新たに導入する正則化項の調整パラメータαを，L カーブ法により検討した．L カーブ法における誤差ノルムと解ノルムはそれぞれ次式で計算される．

$$r_{norm} = \sqrt{\varepsilon_z + \varepsilon_{W_s} + \varepsilon_{W_c}} \tag{4.32}$$

$$s_{norm} = \sqrt{\varepsilon_\alpha} \tag{4.33}$$

αを変更しながら逐一カーブフィッティングを行い，両ノルムをプロットした結果を図 4.13 に示す．α=1.0×10^{-3} 近傍でカーブが急峻に変化し，L 字状になっている．従って，この点を L カーブ法で導いた安定解のある調整パラメータとみなし，α=1.0×10^{-3} とした．



(a) L カーブ　　(b) αとノルム

図 4.13　L カーブのプロット結果

回路段数 q の検討

本手法で実施した GA の適用条件および，回路条件を表 4.5 示す．

表 4.5　GA 適用条件

Selection method	REX^{star}
Crossover method	JGG
Number of the individuals	60×q
Threshold value for convergence	1.0×10^{-8}
MAX number of generations	1.0×10^{5}
Number of frequency points of input data m	16 (10, 100, 200, …, 1500Hz)

上記条件により，回路段数 q を 1~5 段とし，それぞれ回路を生成した．生成した各段数の回路における，GA の最適解の評価値 f を図 4.14 に示す．q=3 で評価値は急激に改善され，その後は段数を増やしても変化が見受けられない．したがって，本問題においては回路段数 q は 3 段で十分と考える．

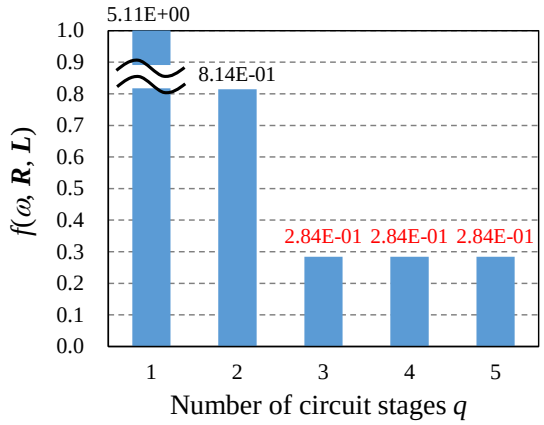


図 4.14　回路段数 q と GA の評価値

回路素子値の考察

生成した回路の素子値と目的関数 f を表 4.6 に示す．比較のため，回路段数 q=2, 3, 4 の 3 ケースの結果を記載した．また，各ケースで GA の初期個体をランダムに変更して 5 回生成を実施した(ciruit1~5)．以下に回路素子値についての考察を述べる．

(a) まず，q=2, 3 では，ciruit1~5 の回路素子値と f はほぼ一致している．一方，q=4 では，R は 4 段目，L は 3, 4 段目で，ciruit1~5 の素子値にばらつきが出ている．しかし，f はいずれも一致している．

(b) また，q=2 と q=3 では回路素子値は全く異なっている．一方，q=3 と q=4 では，R は 3 段目とも，L も 3 段目以外はよく一致している．

(a), (b)に加え，図 4.14 にて q=3 で f の改善が収束していることを鑑みると，q=4 の 4 段目以降の素子は冗長であると考えられる．冗長な素子を除けば，いずれの場合も ciruit1~5 の回路素子値は一意となった．

表 4.6　回路素子値

(a) q=2

Element [Ω]or[H]	circuit 1	circuit 2	circuit 3	circuit 4	circuit 5
$R_{1,1}$	3.153E+00	3.153E+00	3.153E+00	3.153E+00	3.153E+00
$R_{1,2}$	3.203E-04	3.203E-04	3.203E-04	3.203E-04	3.203E-04
$R_{2,1}$	3.750E-01	3.750E-01	3.750E-01	3.750E-01	3.750E-01
$R_{2,2}$	1.994E+00	1.994E+00	1.994E+00	1.994E+00	1.994E+00
L_1	6.963E-06	6.963E-06	6.963E-06	6.963E-06	6.963E-06
L_2	4.871E-05	4.871E-05	4.871E-05	4.871E-05	4.871E-05
$f(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L})$	**8.143E-01**	**8.143E-01**	**8.143E-01**	**8.143E-01**	**8.143E-01**

(b) q=3

Element [Ω]or[H]	circuit 1	circuit 2	circuit 3	circuit 4	circuit 5
$R_{1,1}$	2.062E-01	2.062E-01	2.063E-01	2.062E-01	2.063E-01
$R_{1,2}$	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04
$R_{2,1}$	8.161E-01	8.161E-01	8.161E-01	8.163E-01	8.160E-01
$R_{2,2}$	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02
$R_{3,1}$	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01
$R_{3,2}$	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01
L_1	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06
L_2	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05
L_3	5.371E-05	5.371E-05	5.371E-05	5.371E-05	5.371E-05
$f(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L})$	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**

(c) q=4

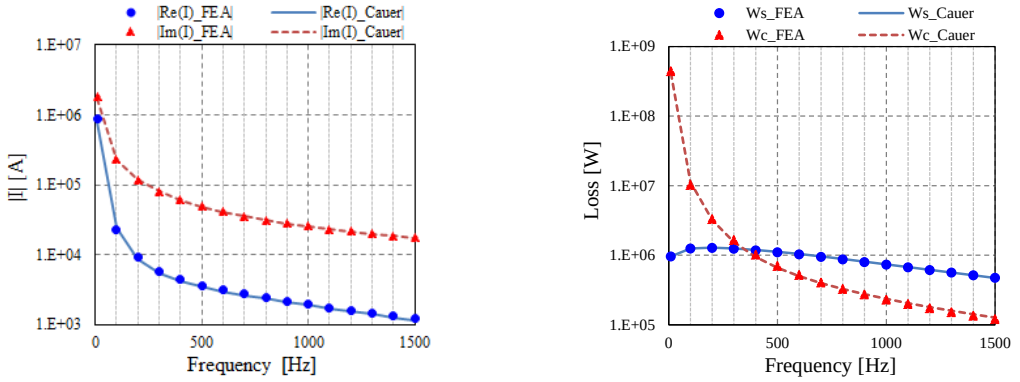
Element [Ω]or[H]	circuit 1	circuit 2	circuit 3	circuit 4	circuit 5
$R_{1,1}$	2.062E-01	2.063E-01	2.063E-01	2.064E-01	2.063E-01
$R_{1,2}$	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04	2.115E-04
$R_{2,1}$	8.163E-01	8.161E-01	8.160E-01	8.158E-01	8.158E-01
$R_{2,2}$	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02	1.312E-02
$R_{3,1}$	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01	3.632E-01
$R_{3,2}$	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01	1.492E+01
$R_{4,1}$	1.484E-04	2.739E-04	2.646E-05	1.417E-04	2.768E-04
$R_{4,2}$	2.389E-13	8.845E-12	1.007E-03	2.091E-11	5.870E-08
L_1	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06	7.922E-06
L_2	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05	5.004E-05
L_3	3.064E-04	3.242E-04	5.397E-05	6.796E-04	5.514E-05
L_4	6.513E-05	6.437E-05	1.103E-02	5.832E-05	2.077E-03
$f(\omega_i, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{L})$	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**	**2.839E-01**

回路による解析結果

生成した修正 Cauer 回路（α=1.0×10^{-3}, 回路段数 q=3）による解析結果について述べる.

(1) 周波数応答解析

生成した回路と FEM それぞれにより，誘導コイルの電流周波数応答と，誘導コイル・被加熱材のジュール損失（W_c, W_s）を解析した結果を図 4.15 に示す．いずれも，回路による解析結果は FEM とよく一致している．また，従来 Cauer 回路では計算できなかった誘導コイル・被加熱材それぞれのジュール損失についても，修正 Cauer 回路では精度よく計算できた．



(a) 誘導コイル電流　　(b) ジュール損失

図 4.15　周波数応答計算結果

(2) 過渡応答解析

次に，生成した Cauer 回路を用いて，電源系に対する過渡応答解析を行った．電源系は簡単のため，図 4.16 に示すよう，内部抵抗を持つ正弦波電圧源とした．

生成した修正 Cauer 回路と FEM により求めた，誘導コイルの電流過渡応答および，効率の計算結果を図 4.17 に示す. なお, 電源の内部抵抗は Cauer 回路に含むものとした．まず，誘導コイルの電流については，修正 Cauer 回路の解析結果は FEM とほぼ一致している．また，効率については，変曲点で多少の誤差はあるものの大凡一致しているため，精度としては十分と考える．

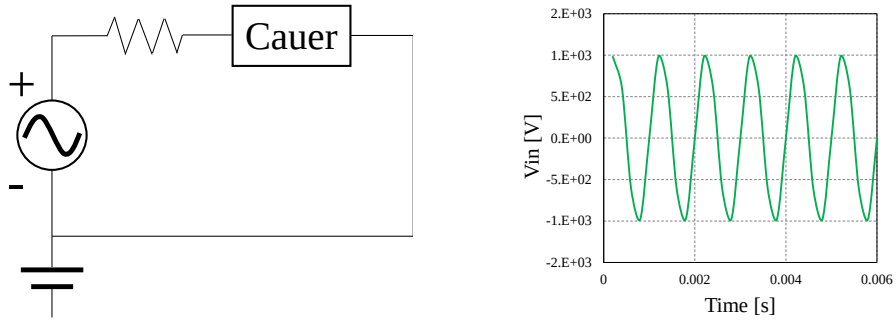
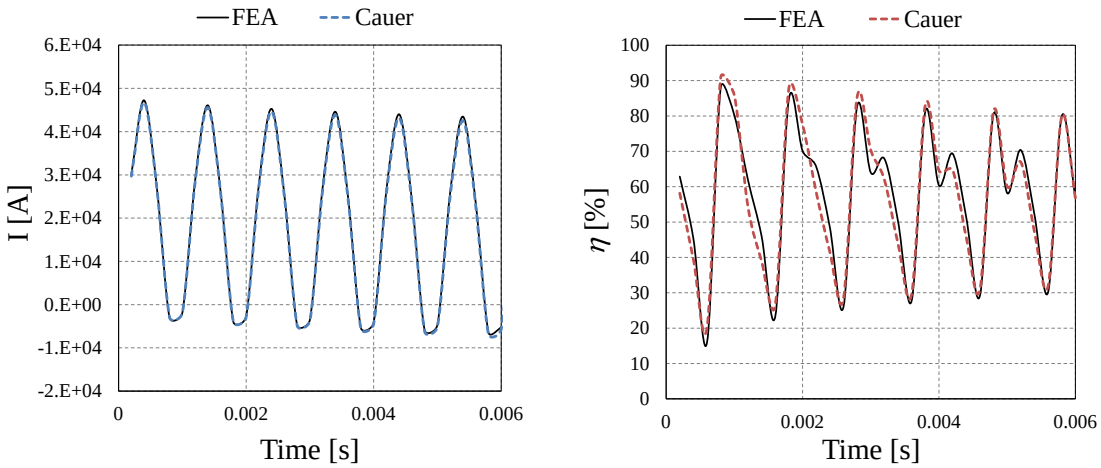


図 4.16　過渡応答解析モデル



(a) 誘導コイル電流　　(b) 効率

図 4.17　過渡応答解析結果

(1), (2)の解析結果より，修正 Cauer 回路では，周波数応答，過渡応答のいずれにおいても，精度よく IH の入出力解析ができることを確認できた．

(3) 計算時間

最後に，FEM と Cauer 回路の解析時間を表 4.7 に示す．FEM では周波数・過渡応答解析それぞれのサンプル 1 点あたりの解析に 40-50 分要するのに対し，Cauer 回路ではいずれも 1 秒未満であり，大幅に時間を短縮できた．

表4.7　計算時間の比較

	FEM	Cauer
Frequency response (for 1　freq. sample)	About 50min	Less than 1sec
Transient response (for 1 time step)	About 40min	Less than 1sec

Machine info.　Intel(R) Xeon(R) E-2186M CPU@2.90GHz, 64.0GB RAM

4.5. 4 章のまとめ

IH の電源系に対する応答解析高速化のため，Cauer 回路を基本とした，IH の等価回路生成手法に関する検討について述べた．

Cauer 回路生成に関する先行研究では，解析対象に導電性材料が複数ある場合を前提としていない．IH の場合，少なくとも，被加熱材と，IH 自身の誘導コイルが導電性材料となり，それぞれの渦電流とジュール損失を考慮する必要がある．そこで本研究では，複数の導電性材料に生じる渦電流・ジュール損を分離して考慮するため，POD とカーブフ

ィッティングを用いた修正 Cauer 回路の生成手法を提案した.

従来 Cauer 回路による解析結果では, 誘導コイルの電流周波数応答については精度よく計算できたが，誘導コイルと被加熱材の各部に生じるジュール損失を分離して計算できなかった.

一方，本研究の成果である修正 Cauer 回路では，上記のいずれも精度よく解析することができた．また，電源系に対する過渡応答解析も同様に，精度よく解析することができた．解析時間では，FEM では周波数・過渡応答解析それぞれのサンプル 1 点あたりの解析に 40-50 分要するのに対し，Cauer 回路に要する時間はいずれも 1 秒未満と，大幅に短縮できた.

以上の結果より，提案手法で生成した等価回路によって，周波数領域，時間領域の応答解析を高速かつ精度良く計算できることが分かった．修正 Cauer 回路により，IH の出力制御の高精度化が期待される．今後の課題としては，導電性材料数が増加した場合の解析精度の確認や，最適な回路段数 q の決定方法等が挙げられる.

第5章　機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築

実際の熱延における IH 制御は，圧延の条件によって変化する種々の条件を考慮し，IH の出側（通常，仕上圧延機の入側）に設置される温度計による測定温度（仕上入側温度：Finishing Entry Temperature: FET）を，目標温度に制御する必要がある．熱延中のバーヒータによる加熱の概要を図 5.1 に示す．上記の圧延条件の内，IH の加熱に影響を与えるものとしては例えば，被加熱材の板厚や板幅，鋼種等の材料諸元，IH 進入時の速度・入側での温度分布等の他の制御との関連により決まる条件，更には，周囲温度や熱放射率の環境条件等，多岐に渡る．これらの多様な因子を全て考慮し，物理的な意味合いを有する数理モデル*)を構築することは困難である．

一方，ここ数年で AI・IoT 技術の産業応用が急激に普及している．大量の機器やセンサが設置されるプラントから得られるデータは，そのデータ量と非線形性から，機械学習・深層学習によるデータ分析と親和性が高い．熱延ラインにおいても，これらのデータを用いた設備監視や異常検知に関する技術開発や，制御応用として，データ駆動型制御モデル（データドリブンモデル）の研究開発が盛んに行われている[55-58].

熱延制御に用いられる従来の数理モデルは，理論式や，現象を支配すると想定されるモデル式を準備し，実績データを用いたパラメータ同定により精度向上を図っている．これらのモデルは変数が物理的な意味合いを有しているため，現象と関連付けやすく，解釈性がよいという利点がある．一方，先に挙げたデータドリブンモデルは，機械学習モデル等の複雑系に対しても有効なモデル式を準備し，実績データを使ってパラメータを同定する．従って，従来モデルよりも解釈性は劣るが，より複雑な現象に対しても精度よい予測が期待できる．

そこで本研究では，機械学習を用いたデータドリブン型の数理モデルに注目し，熱延中の多様な因子を考慮した， IH の制御モデルを構築する．制御モデルとして，IH による加熱後の被加熱材温度を予測する温度予測モデルと，被加熱材を所望の温度分布に加熱するための IH の電力を予測する電力予測モデルの 2 つを提案する．

本章の構成を述べる．5.1 節では，本研究で機械学習モデルとして用いるニューラルネットワーク(Neural Network：NN)の概要を述べる．次に，5.2 節で，提案する制御モデルの概要を述べる．5.3 節で，提案した制御モデルの適用結果について述べる．5.4 節で，構築した制御モデルを用いて行った加熱シミュレーションについて述べる．最後に，5.5 節にて総括を行う．

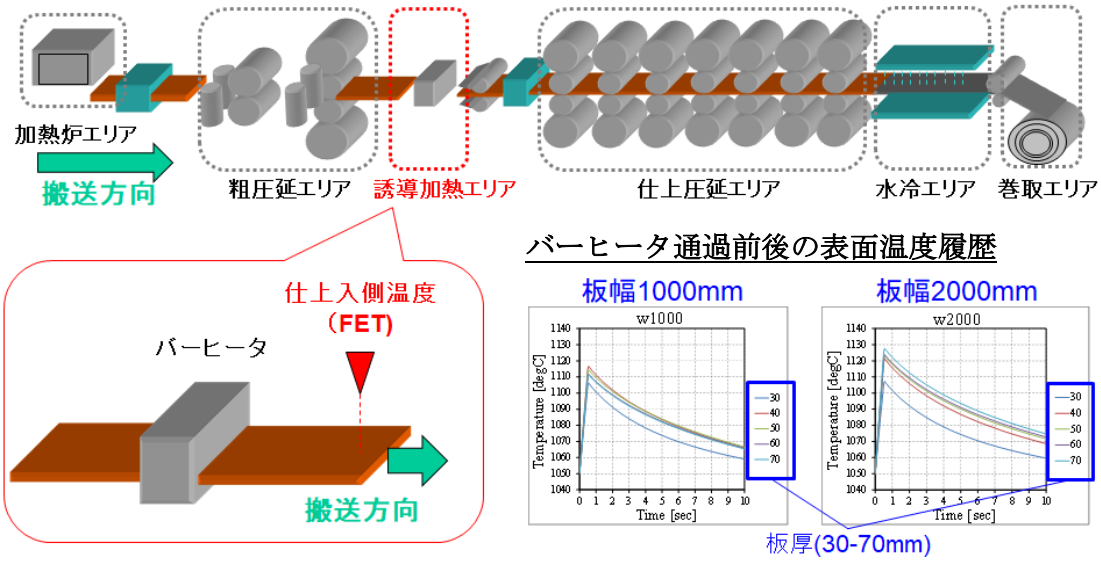


図 5.1　熱延中のバーヒータによる加熱概要

*) 本論文においては数理モデルを「数学の言葉により記述された系」の意味で使用する．機械学習を用いたモデルも含まれる．

5.1. ニューラルネットワーク

本研究では，IH の制御モデル構築のため，機械学習の一種である NN を用いる[59]. NN は，脳の神経系を模した数学モデルである．NN は柔軟な学習器として知られ，分類や回帰，パターン認識等，幅広く応用できる．　本節では NN の概要について述べる．

5.1.1. メカニズム

NN は，脳細胞であるニューロンの発火による信号伝達を模している．脳内には数百億のニューロンがあり，相互接続されネットワークを構成している．ニューロンが他の神経細胞からいくつかの刺激を受け，その和がある閾値を超えると，発火（活性化）されて出力を出す．この出力は軸の末端まで送られ，シナプスを通じて近隣のニューロンに伝達される（図 5.2）．NN では，本プロセスを単純化し，数学モデルにより表現している．

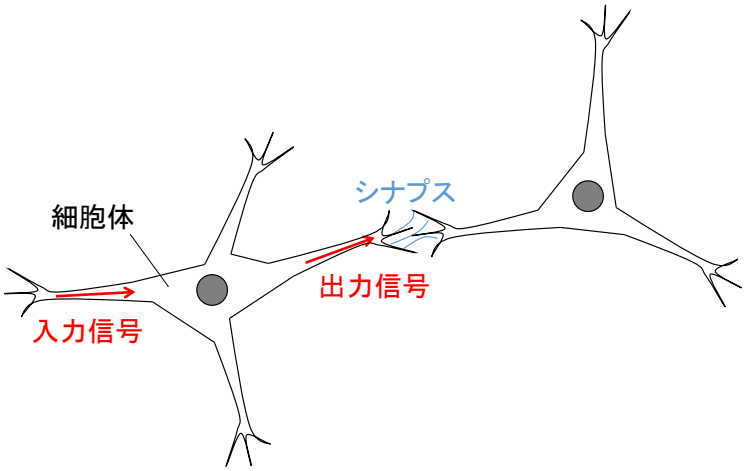


図 5.2　ニューロンの構造

5.1.2. 数学モデル

NN のモデル図を図 5.3 以下に示す．NN では，入力信号 $\boldsymbol{x}$ を重み係数 $\boldsymbol{w}$ により重みづけし，その和を，関数 f を介して出力する．このようなモデルは次式のように表すことができる．

$$y(\boldsymbol{x}) = f\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\right) \tag{5.1}$$

ここで，f は活性化関数と呼ばれ，ニューロンの発火を模擬する関数である．活性化関数にはステップ関数や，シグモイド関数，双曲線関数（tanh 関数）などが用いられる．非線形な活性化関数を用いることで，ニューラルネットにより非線形モデルを構築することができる．

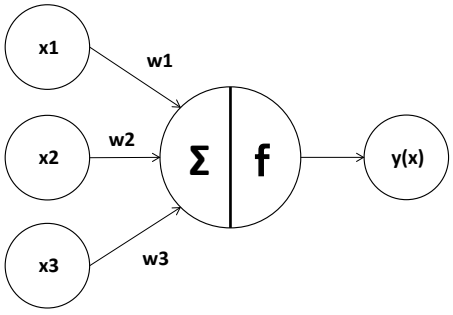


図 5.3　NN のモデル図

本研究では, 活性化関数として tanh 関数を採用する. tanh 関数は図 5.4 に示すように, -1 ~ +1 の範囲で値を持つ分布特性の関数である.

また，NN の階層を多層とすることで，より複雑なネットワークを実現できる．このような多層 NN の構成を図 5.5 に示す（中間層：層数 m，ノード数 n）．z1, z2 ノードにより構成される層は中間層と呼ばれる．中間層の層数やノード数を増やすことで，NN の表現力も増加する．

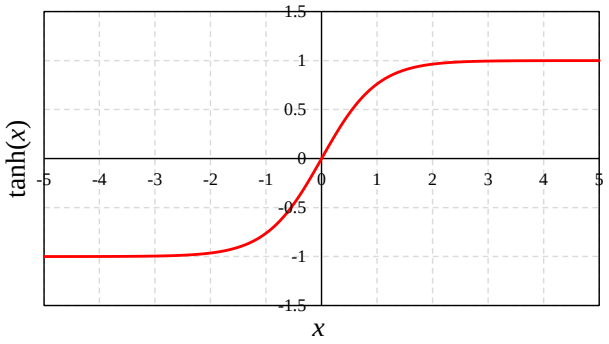


図 5.4　tanh 関数

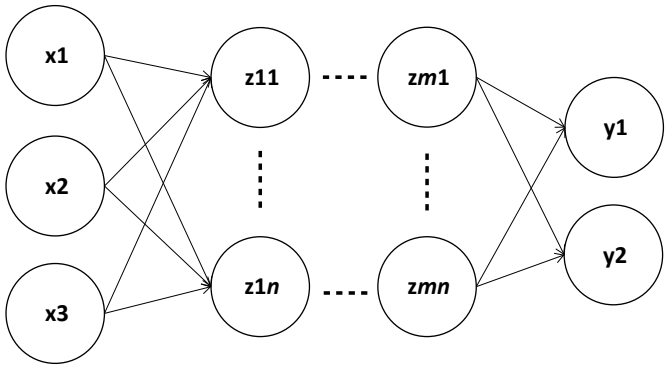


図 5.5　多層 NN のモデル

5.2. 制御モデルの概要

NN を用いた，IH の制御モデルの概要について述べる．本研究では制御モデルとして，以下の 2 つを提案する．

(1) 温度予測モデル

IH により加熱した被加熱材の温度を予測するモデルである．熱延中の圧延材（被加熱材）の温度は，被加熱材の空間方向，時間方向に分割した差分法により，ステップバイステップで計算されている．IH で加熱する場合は，前述差分法において，IH による板投入電力から計算される熱流を発熱項として与えて計算し，所望の地点における温度を求める．本プロセスを，制御過程で IH の出力が変更される度に実行する必要がある．

本研究で提案する温度予測モデルは，上記のステップバイステップによる温度計算負荷を軽減するため，加熱後の任意時刻における被加熱材の温度を直接求める予測モデルである．

(2) 電力予測モデル

被加熱材を所望の温度分布に制御するための，IH の板投入電力を予測するモデルである．熱延中の IH の出力設定において， FET 位置における計算温度が目標値となるまで，

IH の出力を変更し，上記の差分法による計算を繰り返す必要がある．

本研究で提案する電力予測モデルは，上記の繰り返し計算による出力設定の計算負荷を軽減するため，加熱後の任意時刻において，被加熱材を目標温度分布とするための IH の板投入電力を直接求める予測モデルである．

以下に，各モデルの詳細を述べる．

5.2.1. 温度予測モデル

温度予測モデルの概要を図 5.6 に示す．まず，図中の左に示す圧延条件とは，熱延時に搬送される被加熱材の寸法や温度，鋼種等の条件である．一般的な圧延条件の内，IH の加熱昇温に関係するものを記載している．また，温度目標が与えられる FET（仕上圧延入側温度計）で計測される被加熱材の温度は，搬送速度や計測位置次第に依存するため，加熱後の被加熱材温度の時間変化を予測できるようにする．上記の圧延条件に加え，IH による被加熱材投入電力も入力変数とする．これらの入力変数を予測モデルに入力し，当該条件における板厚方向の温度分布を予測し出力する．

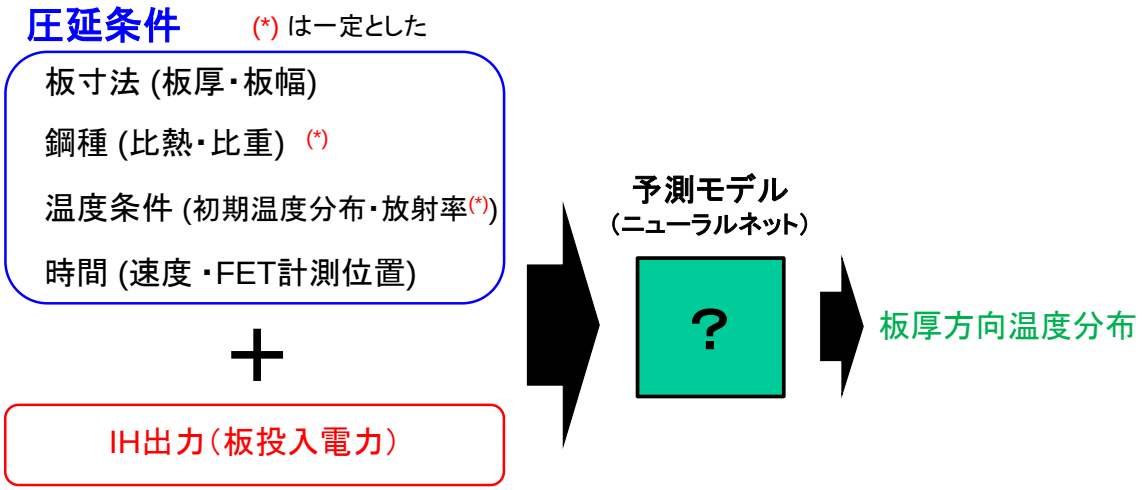


図 5.6　温度予測モデルの概要

温度予測モデルにおける NN の構成を図 5.7 に示す．入力層（9 次元）には，板厚，板幅，板投入電力，時間（IH 加熱開始からの経過時間）と板厚方向に分割した各要素（5 要素）の初期温度を入力する．中間層は 2 層の全結合層とし，ノード数は 10 とする．出力層（5 次元）からは，入力した時間における，板厚方向の各要素の温度が出力される．

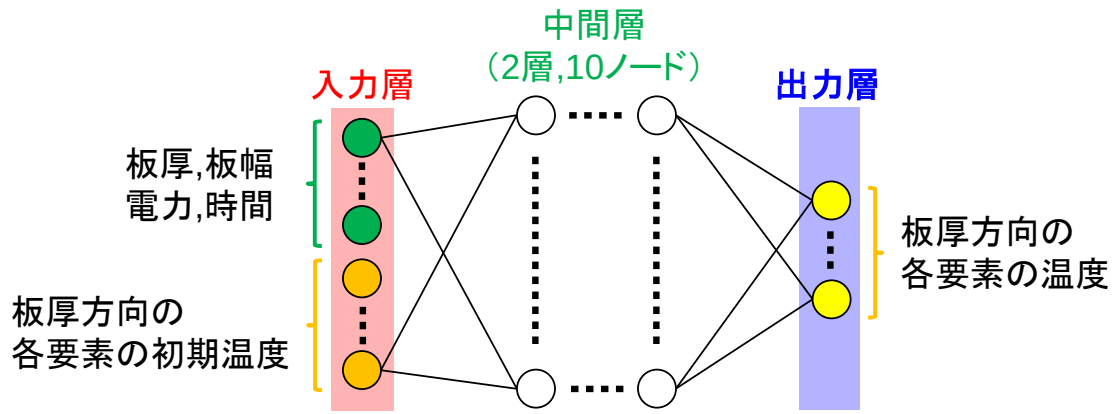


図 5.7　NN の構成（温度予測モデル）

5.2.2. 電力予測モデル

電力予測モデルの概要を図 5.8 に示す．入力変数とする圧延条件については温度予測モデルと同様であるが，本モデルでは，圧延条件に加え，当該条件における加熱後の板厚方向の目標温度分布を入力変数とする．予測モデルは，被加熱材を目標温度分布とするための板投入電力を予測し，出力する．

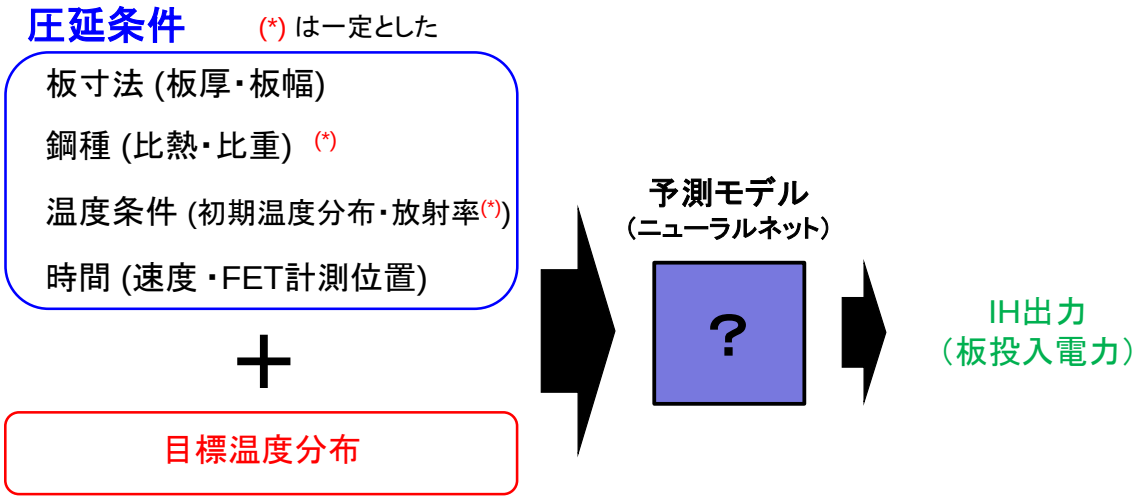


図 5.8　電力予測モデルの概要

電力予測モデルにおける NN の構成を図 5.9 に示す．入力層（14 次元）には，板厚，板幅，板投入電力，時間（IH 加熱開始からの経過時間），板厚方向の各要素（5 要素）の初期温度と，入力した時間における，板厚方向の各要素の目標温度を入力する．中間層は温度予測モデルと同様，2 層の全結合層とし，ノード数は 10 とする．出力層（1 次元）からは，入力した時間において目標温度とするための板投入電力が出力される．

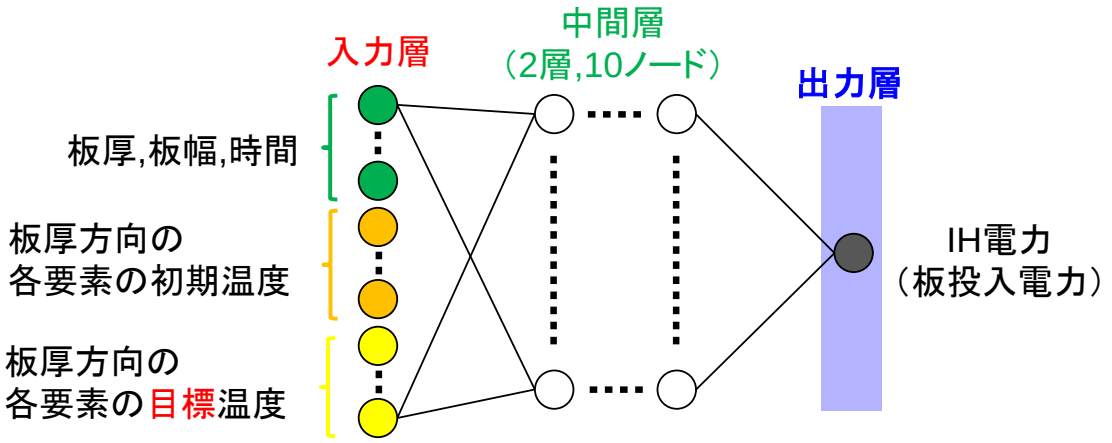


図 5.9　NN の構成（電力予測モデル）

5.3. 適用結果

本節では，本研究で提案する IH 予測モデルの構築結果について述べる．本手法の適用対象は，前章で用いた鉄心付き簡易バーヒータモデル(1/8 モデル)である．図 5.10 に再掲する．

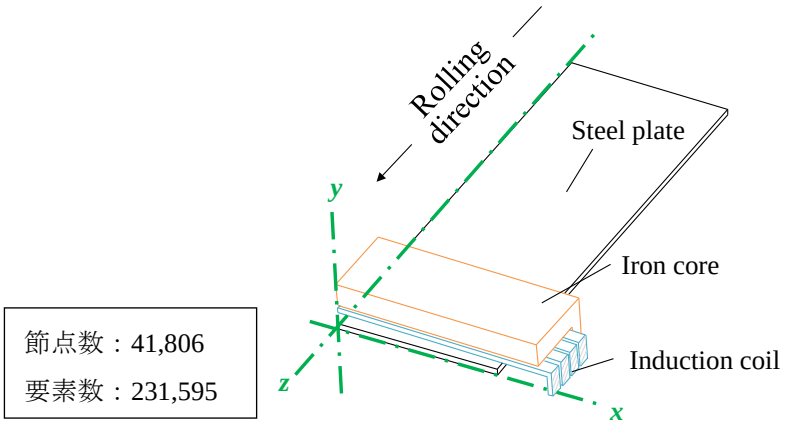


図 5.10　【再掲】鉄心付き簡易バーヒータモデル

5.3.1. データセット

NN の訓練・検証に使用するデータセットについて述べる．データセットは、準静磁場・熱伝導 FEM によるパラメータのケーススタディにより，以下のように用意した．

【データセット】
・板厚（5 区分）：30, 40, 50, 60, 70mm

・板幅（6 区分）: 1000, 1200, 1400, 1600, 1800, 2000mm
・時間（11 区分）: 0, 1.0, 2.0, …, 10.0sec
・初期温度分布（7 区分×6 パターン）: T_0=800, 850, ...,, 1100degC　各 T_0 に対し，後述する図 5.12 の 6 つの分布パターンを適用
・板投入電力（11 区分）: 板厚/板幅の組み合わせ（30 区分）に対し，それぞれ異なる 11 区分を用意
・上記入力データセットそれぞれに対する，加熱後の板厚方向温度分布（データ総数分）

データ総数：5×6×11×7×6×11=152460

なお，各データは[0,1]の範囲で値を取るよう，正規化した($p_{norm}=(p-p_{min})/(p_{min}-p_{max})$, p: 元データ，p_{norm}: 正規化後データ，p_{min}: p の最小値，p_{max}: p の最大値). 用意したデータセット（正規化後）の一例を図 5.11 に示す．表の 1 行が 1 つのデータセットに対応する．なお，表中の”T”は加熱後の温度，”T0”は初期温度，”seg”は要素番号を意味する．

Thick [-]	Width [-]	Power [-]	TIME [-]	T0[-] seg1	T0[-] seg2	T0[-] seg3	T0[-] seg4	T0[-] seg5
0.00025	0	0.004	0	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.1	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.2	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.3	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.4	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.5	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.6	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.7	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.8	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	0.9	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.00025	0	0.004	1	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.1	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.2	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.3	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.4	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.5	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.6	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.7	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.8	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	0.9	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069
0.25	0.2	0.345	1	0.156	0.122	0.087	0.069	0.069

T[-] seg1	T[-] seg2	T[-] seg3	T[-] seg4	T[-] seg5
0.169	0.134	0.114	0.113	0.113
0.155	0.138	0.119	0.114	0.114
0.145	0.137	0.124	0.119	0.119
0.138	0.136	0.127	0.124	0.124
0.133	0.134	0.130	0.128	0.128
0.128	0.133	0.131	0.130	0.130
0.124	0.131	0.131	0.131	0.131
0.121	0.129	0.131	0.131	0.131
0.118	0.128	0.131	0.131	0.131
0.116	0.126	0.130	0.131	0.131
0.114	0.124	0.129	0.130	0.130
0.315	0.214	0.149	0.137	0.124
0.283	0.223	0.161	0.137	0.131
0.262	0.223	0.170	0.144	0.137
0.246	0.219	0.176	0.152	0.144
0.233	0.215	0.180	0.159	0.152
0.223	0.211	0.183	0.164	0.158
0.214	0.207	0.184	0.169	0.164
0.207	0.203	0.186	0.173	0.169
0.200	0.199	0.186	0.176	0.173
0.195	0.196	0.187	0.179	0.176
0.190	0.193	0.187	0.181	0.178

図 5.11　データセット（一部）

訓練データ

上記データセットの内，ランダムに選んだ 60%を訓練データとする．なお，同一のデータセットが複数選ばれないようにする．

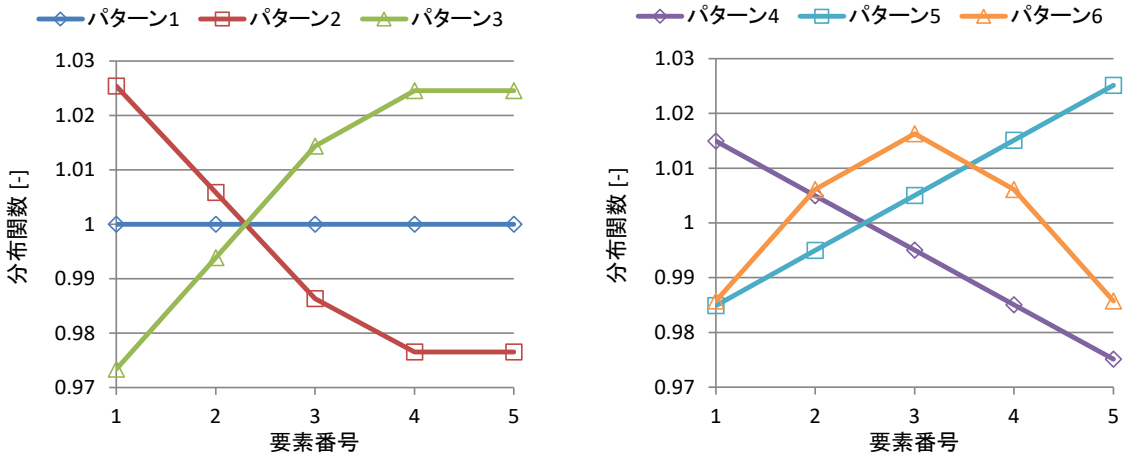
検証データ

上記データセットの内，訓練データ以外の 40%を検証データとする．

初期温度分布

訓練・検証データにおける初期温度分布の設定方法について述べる．通常，圧延中の圧延材（被加熱材）は，周囲の空気やスプレー水の影響で，板表面の温度が内部よりも低い．一方，バーヒータによる加熱では渦電流が板表面に集中するため，加熱直後は板表面の温度が高い．バーヒータによる加熱後，定常状態に遷移するまでの非定常状態の間は，板厚方向の温度分布は複雑になる．

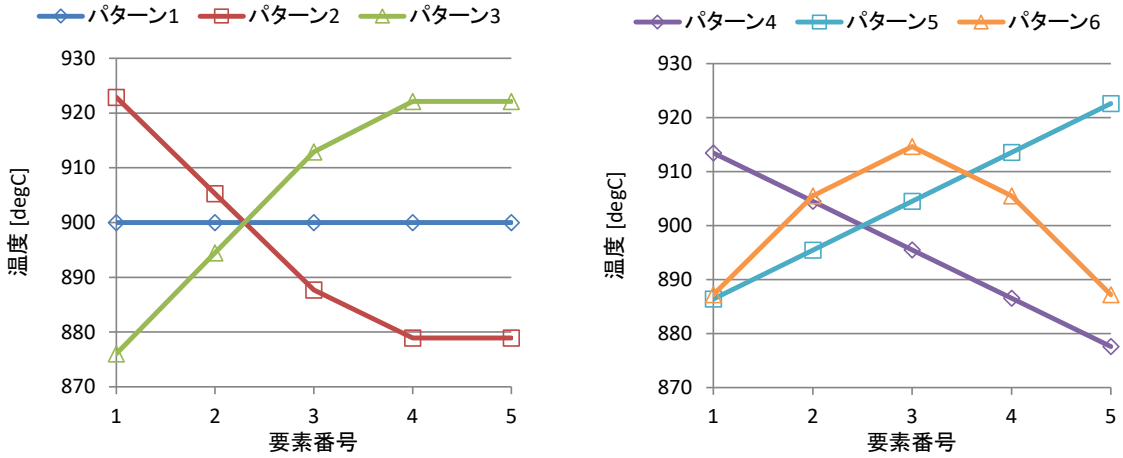
本研究では，典型的な板厚方向温度分布として用意した 6 パターンの分布関数を用いて，初期温度分布を作成した． 板厚方向分布を表す分布関数を図 5.12 に示す．ここで，横軸の要素番号は，被加熱材を板厚方向に分割したときの番号であり，要素番号 1 が被加熱材の板厚方向表面，要素番号 5 が被加熱材の板厚方向中心に対応する要素を示す．



(a) パターン 1~3　　(b) パターン 4~6

図 5.12　板厚方向の温度分布関数

上記の分布関数に初期温度 T_0 を乗ずることで，板厚方向の初期温度分布とする．例として，T_0=900degC における各パターンの板厚方向温度を図 5.13 に示す．



(a) パターン 1~3　　(b) パターン 4~6

図 5.13　板厚方向の温度分布（T_0=900degC）

5.3.2. 温度予測モデル

生成した温度予測モデルの精度を検証する．検証データに対し，FEM，NN それぞれで計算した温度（板厚方向各要素の温度）のプロットを図 5.14 に示す．いずれの温度域においても，NN によって FEM と相違なく温度を予測できている．

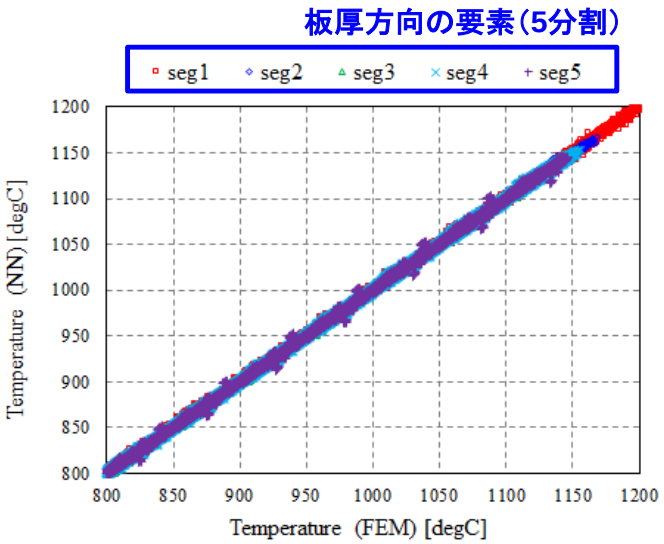


図 5.14　NN の予測結果

また，次式で定義する解析誤差を計算した結果，*Error*=0.264%であり，検証データに対する解析精度は良好であった．

$$Error = 100 * \sqrt{\frac{\sum_i^n \left(\boldsymbol{T}_i^{FEM} - \boldsymbol{T}_i^{NN} \right)^2}{\sum_i^n \left(\boldsymbol{T}_i^{FEM} \right)^2}} \tag{5.2}$$

ここで，

nx_1^{FEM} ： 検証データ総数 (=60984)

$\boldsymbol{T}_i^{FEM}$: i 番目データの温度（板厚方向 5 点分）（FEM）

$\boldsymbol{T}_i^{NN}$: i 番目データの温度（板厚方向 5 点分）（NN）

である．

生成した温度予測モデルによる予測結果の例を示す．今，検証データから表 5.1 に示す条件のデータセットを選んだ．本条件にて，FEM と NN で被加熱材温度を計算した結果を図 5.15 に示す．ここで，グラフ横軸は時間，縦軸は温度を示している．実線で示す”FEM_seg1”は，FEM による要素番号 1 の温度の解析結果，”NN_seg1”は温度予測モデルによる要素番号 1 の温度の予測結果であり，seg2~5 についても同様である．図 5.15 より，NN によって各板厚方向要素の温度履歴を，FEM と同等の精度で予測できていることが確認できる．

表 5.1　確認用の検証データ条件

板厚 [mm]	板幅 [mm]	初期温度[degC] /分布	板投入電力 [-]
40	1800	T_0=950 / パターン 4	0.584

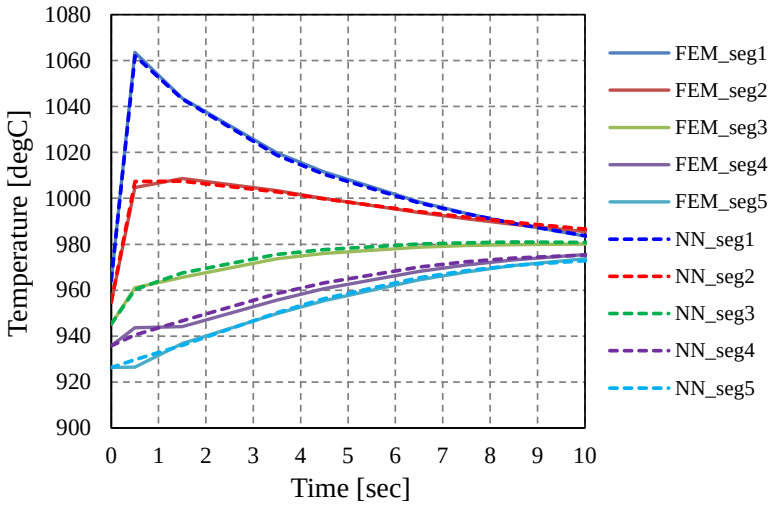


図 5.15　検証データの解析結果例（温度予測モデル）

5.3.3. 電力予測モデル

生成した電力予測モデルの精度を検証する．検証データに対し，FEM，NN それぞれで計算した電力のプロットを図 5.16 に示す. いずれの電力域においても, NN によって FEM と相違なく電力を予測できている．

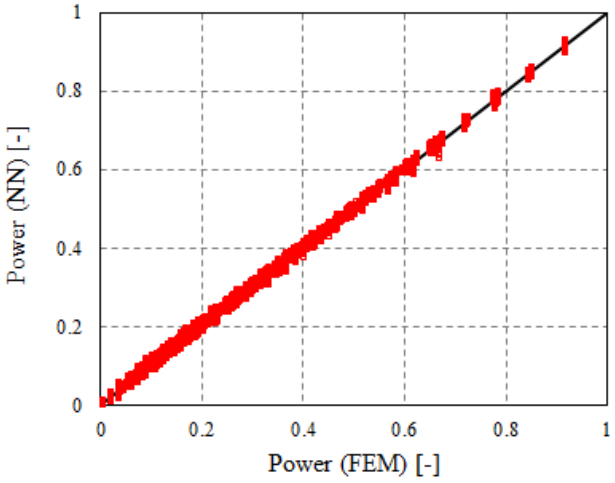


図 5.16　NN の予測結果（電力予測モデル）

また，次式で定義する解析誤差を計算した結果，*Error*=1.189%であり，検証データに対する解析精度は良好であった．

$$Error = 100 * \sqrt{\frac{\sum_i^n \left(P_i^{FEM} - P_i^{NN}\right)^2}{\sum_i^n \left(P_i^{FEM}\right)^2}} \tag{5.3}$$

ここで，

nx_1^{FEM} ： 検証データ総数 (=60984)

P_i^{FEM} : *i* 番目データの板投入電力（FEM）

P_i^{NN} : *i* 番目データの板投入電力（NN）

である．

生成した電力予測モデルによる予測結果の例を示す．今，検証データから，表 5.2 に示す寸法条件の内，適当数のデータセットを選んだ．本条件にて，FEM と NN で板投入電力を計算した結果を図 5.17 に示す．ここで，グラフ横軸は加熱後の被加熱材の表面温度（要素番号 1 の温度），縦軸は板投入電力を示している．また，例えば，”FEM_778”は，被加熱材表面の初期温度が 778degC のデータに対する FEM の計算結果を，”NN_778”は，同データに対する NN の予測結果を示す．図 5.17 より，いずれの条件に対しても，NN により必要な板投入電力を精度よく予測できていることが確認できる．

表 5.2　確認用の検証データ条件

板厚 [mm]	板幅 [mm]
60	1200

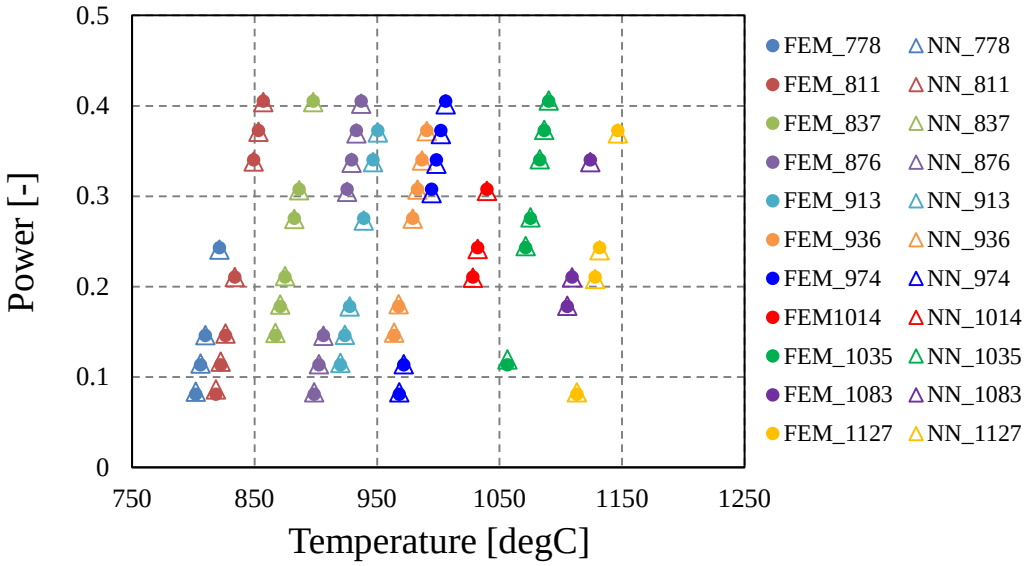


図 5.17　検証データの解析結果例（電力予測モデル）

5.4. 加熱シミュレーション

本節では，5.3 節で構築した温度予測モデルを用いた，バーヒータによる熱延中の被加熱材の加熱シミュレーションについて述べる．バーヒータは通常，搬送方向に 2 台並んで設置される．従って，本節の加熱シミュレーションも，バーヒータは 2 台として実施する．まず，バーヒータ 1 による加熱を温度予測モデルで予測し，その出力を初期温度として再度，バーヒータ 2 による加熱を温度予測モデルで予測する．便宜上，上流側（加熱炉側）をバーヒータ 1，下流側（ダウンコイラ側）をバーヒータ 2 と称する．

以下に，各シミュレーションの共通条件を示す．

A)　初期温度分布

実際の熱延時の状態を模擬するため，事前解析として，図 5.12 のパターン 1 の分布関数を初期分布として熱伝導解析（熱源なし，空気冷却のみ）を行い，板厚方向分布が定常状態になったときの各要素の温度を，バーヒータ 1 の入側における初期温度とする．

B)　板搬送速度

被加熱材のバーヒータ通過時の搬送速度は 1.5m/s と想定する．

C)　シミュレーション時間

シミュレーションする時間の範囲は，現実的な被加熱材の搬送速度と FET 設置位置を鑑みて，12sec を上限とする．

5.4.1. シミュレーション 1（薄物）

まず，製品厚が比較的薄い（薄物）場合を想定し，当該圧延においてバーヒータ入側で想定される板厚の条件（30mm）により，シミュレーションを行った．その他の条件も表 5.3 にまとめて示す．

表 5.3　シミュレーション条件 1

板厚 [mm]	板幅 [mm]	板投入電力 バーヒータ 1 [-]	板投入電力 バーヒータ 2 [-]
30	1000	0.106	0.106

シミュレーション結果を図 5.18 に示す．被加熱材の解析点がバーヒータ 1 の入側（昇温が始まる位置）に来た時を Time=0sec としている．また，バーヒータ 1, 2 それぞれで加熱昇温している時間範囲を，半透明の赤い短冊で示している．

温度予測モデルによる，バーヒータ 1 の加熱後の温度予測結果は，FEM とほぼ一致している．バーヒータ 2 での加熱直後で，被加熱材表面の要素（seg1）の温度誤差が若干増加しているが，実制御上の外乱による変動程度の誤差であることと，それ以外の予測はよく一致していることから，精度としては十分と考える．

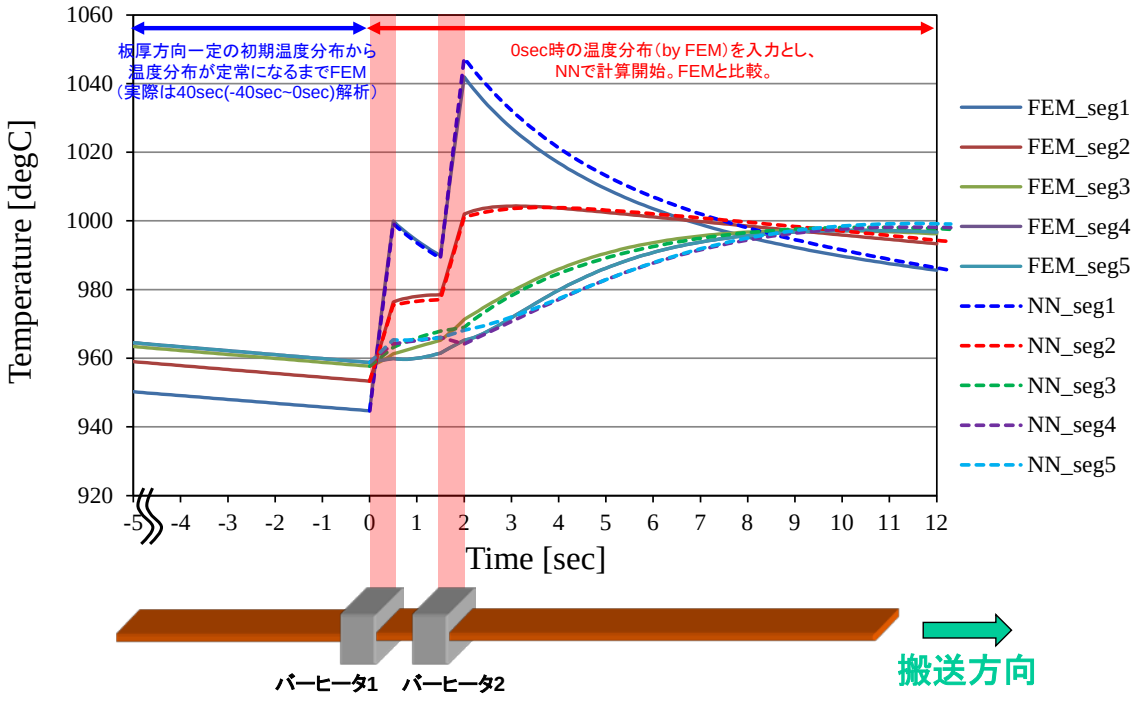


図 5.18　加熱シミュレーション 1

5.4.2. シミュレーション 2（厚物，広幅）

次に，製品厚が比較的厚く（厚物），かつ，コイルの幅が広い（広幅）場合を想定し，当該圧延においてバーヒータ入側で想定される板厚・幅の条件（50mm，2000mm）より，シミュレーションを行った．その他の条件も表 5.4 にまとめて示す．

表 5.4　シミュレーション条件 2

板厚 [mm]	板幅 [mm]	板投入電力 バーヒータ 1 [-]	板投入電力 バーヒータ 2 [-]
50	2000	0.320	0.320

シミュレーション結果を図 5.19 に示す．シミュレーション 1 と板寸法・初期温度が異なっているが，温度予測モデルにより，板厚方向の各要素の温度を精度よく予測できていることが確認できる．

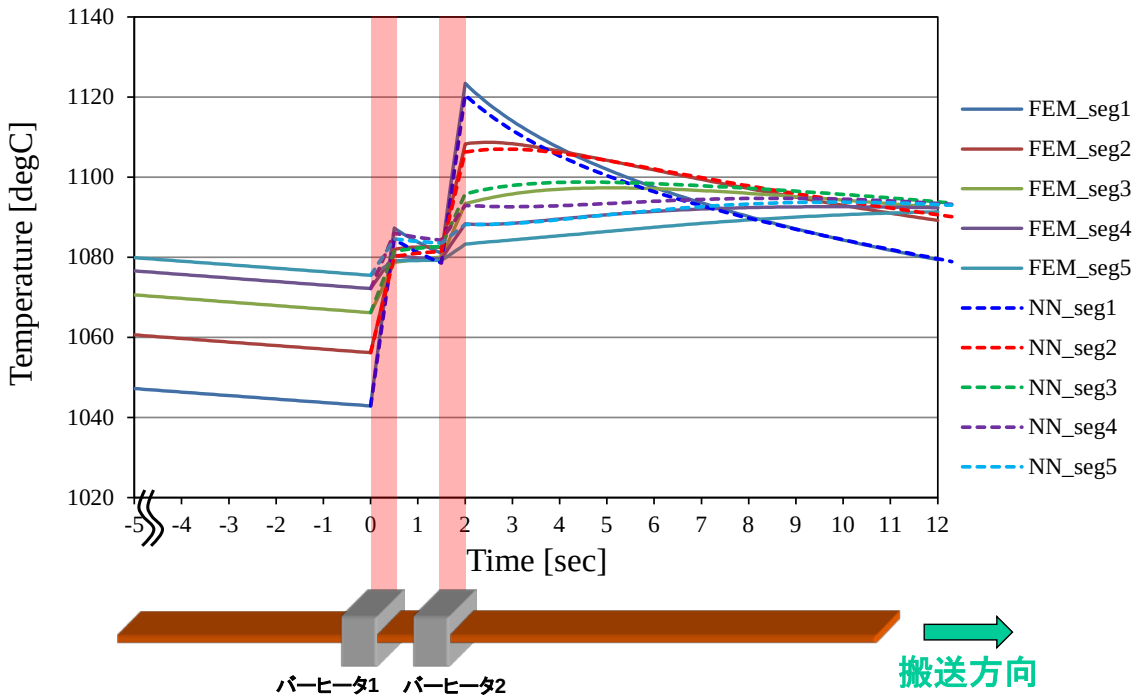


図 5.19　加熱シミュレーション 2

5.4.3. シミュレーション 3（中物，ヒータ出力配分）

最後に，製品厚が普通程度（中物）で，2 台のバーヒータの出力が異なる場合を想定し，シミュレーションを行った．その他の条件も表 5.5 にまとめて示す．

表 5.5　シミュレーション条件 3

板厚 [mm]	板幅 [mm]	板投入電力 バーヒータ 1 [-]	板投入電力 バーヒータ 2 [-]
40	1600	0.114	0.308

シミュレーション結果を図 5.20 に示す．バーヒータ 1, 2 で板投入電力が異なる場合でも，温度予測モデルにより，板厚方向の各要素の温度を精度よく予測できていることが確認できる．

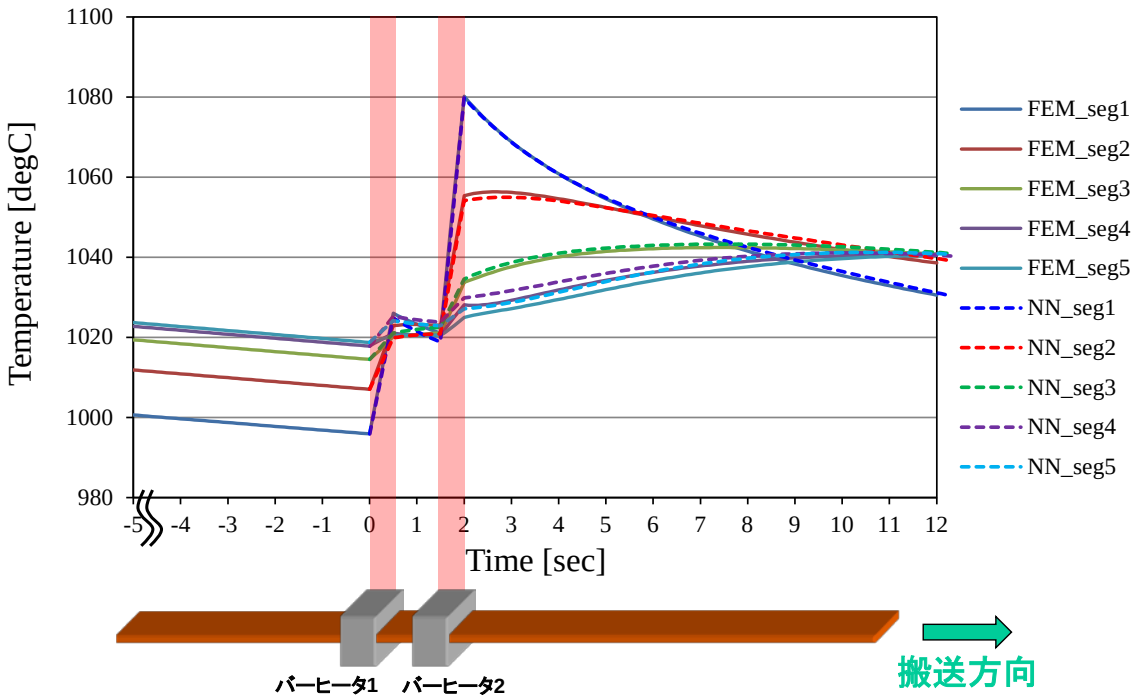


図 5.20　加熱シミュレーション 3

5.5. 5 章のまとめ

本章では，熱延中の多様な因子を考慮した，IH の制御モデルの構築について述べた．実際の熱延における IH 制御では，圧延の条件によって変化する種々の条件（被加熱材の板厚や板幅，鋼種等の材料諸元，IH 搬入時の速度・入側での温度分布等の他の制御との関連により決まる条件，周囲温度や熱放射率の環境条件等）を考慮しながら，IH の出側の温度を目標温度に制御する必要がある．しかし，理論ベースの数理モデルで上記を直接考慮するのは困難であるという問題があった．

そこで本研究では，データドリブン型の数理モデルに注目し，機械学習の一種である NN を用いた，熱延中の多様な因子を考慮可能な， IH の制御モデルを構築した．制御モデルとして，IH による加熱後の被加熱材温度を予測する温度予測モデルと，被加熱材を所望の温度分布に加熱するための IH の電力を予測する電力予測モデルの 2 つを提案した．

提案した温度予測モデルにより，FEM に対して約 0.26%の誤差で，任意時間の被加熱材の，板厚方向温度分布を予測できた．また，提案した電力予測モデルにより，FEM に対して約 1.19%の誤差で, 被加熱材を所望の温度分布に制御するために必要な板投入電力を予測できた．また，温度予測モデルを用いて行った 3 ケースの加熱シミュレーションでは，いずれも FEM で行った場合と同等の結果を得ることができた．以上より，提案した制御モデルの有効性を確認できた．本モデルを用いることで，熱延中の IH 制御の計算の効率化が期待できる．

今後の課題としては, 実際の圧延データを用いたモデル精度の向上, 入力変数の増加, 板厚-板幅 2 次元平面の温度分布予測への拡張等が挙げられる．

第6章　結論

本研究では，IH による熱延温度制御の精度向上を目的とし，FEM を基礎技術とし，FEM の計算量が膨大になる欠点を取り除き，高速かつ高精度な数理モデル構築を目指し，要素技術である①固有直交分解法，②等価回路生成，③機械学習により各種の提案をした．以下に各提案に至った IH の技術課題と，要素技術による成果を総括する．

6.1. 固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の解析縮約（3 章）

IH の FEM 解析のためには，被加熱材の搬送を考慮し，3 次元 FEM モデルの準静磁場解析と熱伝導解析を連成して行う必要がある．本解析を種々の電源・被加熱材条件に対し逐一行う場合，膨大な解析時間を要するという問題があった．

そこで本研究では，(a)IH による被加熱材の加熱解析に特化した，準静磁場-熱伝導連成解析手法を提案した．また，(b)準静磁場の特性解析高速化のため，MOR の一種である POD を，電源周波数特性と導電率特性の解析に適用し，その有効性について議論した．

本研究による成果

a)　準静磁場-熱伝導連成解析の高速化

3 次元準静磁場解析と 2 次元熱伝導解析による IH と被加熱材の連成解析方法を提案し，その有効性を確認した．本手法によって解析した被加熱材の平均温度は，本来の 3 次元熱伝導解析の結果とよく一致しており，提案手法に基づく解析結果が妥当であることを確認した．

b)　POD による準静磁場の特性解析高速化

IH の周波数特性の解析高速化のため，周波数特性に対する POD を FEM に適用した．POD を用いて得られたコイル電流，被加熱材のジュール損失密度は，コイル渦電流を考慮しない場合とする場合の何れにおいても，FEM に対し精度の劣化はほぼなく，解析時間は大幅な短縮となった．また，被加熱材の導電率特性の解析高速化のため，導電率特性に対する POD を FEM に適用した結果，同様に解析精度・時間とも良好であった．

6.2. 誘導加熱装置の等価回路生成（4 章）

電磁機器及び駆動・制御回路の設計等において，電磁数値解析と回路系の連成解析の時間短縮のため，電磁機器の入出力特性を等価回路により表現する方法がある．近年では，Cauer 回路と呼ばれる梯子回路を用いた，機器の特性表現に関する研究が盛んに行われている．しかし，Cauer 回路は準静磁場の磁束と渦電流を精度よく表現できるが，従来の Cauer 回路は，IH による加熱解析のように，解析対象に導電性材料が複数ある場合に，各導電性材料のジュール損失を分離して考慮できないという問題があった．

そこで本研究では，複数の導電性材料に生じる渦電流・ジュール損を分離して考慮するため，POD とカーブフィッティングを用いた修正 Cauer 回路の生成手法を提案した．

本研究による成果

従来 Cauer 回路による解析では，誘導コイルの電流周波数応答については精度よく計算できたが，誘導コイルと被加熱材の各部に生じるジュール損失を分離して計算できず，IH の効率を求めることができなかった．

一方，修正 Cauer 回路では，上記のいずれも精度よく解析することができた．また，電源系に対する過渡応答解析も同様に，精度よく解析することができた．解析時間は，FEM の場合，周波数・過渡応答解析それぞれのサンプル 1 点あたりの解析に 40-50 分要するのに対し，Cauer 回路の場合はいずれも 1 秒未満と，大幅な短縮となった．以上より，提案手法で生成した等価回路によって，周波数領域，時間領域の応答解析を高速かつ精度良く計算できることが確認できた．提案した修正 Cauer 回路を用いることで，IH の出力制御の高精度化が期待される．

6.3. 機械学習を用いた誘導加熱装置の制御モデル構築（5 章）

実際の熱延における IH 制御では，圧延の条件によって変化する種々の条件（被加熱材の板厚や板幅，鋼種等の材料諸元，IH 搬入時の速度・入側での温度分布等の他の制御との関連により決まる条件，周囲温度や熱放射率の環境条件等）を考慮し，IH の出側の温度を目標温度に制御する必要がある．しかし，理論ベースの数理モデルで上記を直接考慮するのは困難であるという問題があった．

そこで本研究では，データドリブン型の数理モデルに注目し，機械学習の一種である NN を用いた，熱延中の多様な因子を考慮可能な， IH の制御モデルを構築した．制御モデルとして，IH による加熱後の被加熱材温度を予測する温度予測モデルと，被加熱材を所望の温度分布に加熱するための IH の電力を予測する電力予測モデルを提案した．

本研究による成果

提案した温度予測モデルにより，FEM に対して約 0.26%の誤差で，任意時間の被加熱材の，板厚方向温度分布を予測できた．また，提案した電力予測モデルにより，FEM に

対して約 1.19%の誤差で，被加熱材を所望の温度分布に制御するために必要な板投入電力を予測できた．また，温度予測モデルを用いて行った 3 ケースの加熱シミュレーションでは，いずれも FEM で行った場合と同等の結果を得ることができた．以上より，提案した制御モデルの有効性を確認できた．本モデルを用いることによって，熱延プロセス進行中における IH 制御の計算の効率化が期待できる．

6.4. 今後の展望

本論文では，IH の高速かつ高精度な数理モデル構築を目指し，①固有直交分解法，②等価回路生成，③機械学習を用いた要素技術により，IH の数理モデル構築に関して述べた．以下に，IH における技術課題解決のための，各要素技術の利用のガイドライン案を示す．

要素技術①では，IH の準静磁場-熱伝導 FEM を高速に解くことができるため，所望の電源周波数・被加熱材導電率の条件に対する場の分布を求めるために利用できる．準静磁場-熱伝導連成解析高速化では，エッジヒータを適用対象としたが，バーヒータへの適用も容易である．

要素技術②では, IH の電源系に対する周波数･過渡応答を高速に求めることができる．周波数応答解析の高速化は IH の電源系の設計検討の効率化に有効であり，過渡応答解析の高速化は今後のオンラインでの出力制御に有効である．本要素技術はバーヒータを適用対象としたが，フィッティングベースの等価回路生成手法は解析モデルへの依存性が小さく汎用性が高いため，エッジヒータや，それ以外の機械構造を有する IH に対しても適用可能である．

要素技術③では， IH の加熱による被加熱材の温度分布（板厚方向の 1 次元分布）や，被加熱材を所望の温度分布に制御するための IH の出力電力を, 繰り返し計算を要さず，高速に求めることができる．そのため，オンライン制御を目指した IH の設定計算，被加熱材の温度計算に利用できる．本要素技術はバーヒータを適用対象とした．エッジヒータに適用する場合は，被加熱材幅方向に昇温量が分布するため，被加熱材の 2 次元温度分布を考慮する必要があり，手法の拡張が必要である．

なお，本論文の提案手法は，特性を簡易化した IH モデルに対して適用し，有効性を検証した．従って，提案手法の制御応用に向けては，実機モデルに提案手法を適用し，実機データとの比較が必要である．

本研究で扱った IH であるバーヒータおよびエッジヒータは，経験的に鉄心の磁気特性を線形と仮定できることから，磁気非線形性を考慮していなかった。しかし，それ以外の鉄心構造の異なる IH にはこのような仮定ができないことも想定される．磁気非線形性を考慮した電磁機器の POD は文献[42]で提案されており，IH においても適用可能と考える．また，従来 Cauer 回路に磁気ヒステリシス性を付与する方法が文献[60]等で提案されており，修正 Cauer 回路への適用可能性の検証が必要である．修正 Cauer 回路に磁気非線形性を付与することができれば，本回路の汎用性はより向上し，IH のみならず

多様な電磁機器への適用が期待できる.

4 章の IH の等価回路生成においては, 正則化項のゲインは L カーブ法により決定したが，回路段数については，段数を変更しながら逐一 GA を実行し，適切な段数を検討した．このような試行錯誤による回路段数の決定は，フィッティングベースの回路生成の特長の 1 つである適用の容易さを損ないかねないため，最適な回路段数の決定方法が望まれる.

また, 5 章の機械学習を用いた制御モデルにおいて，本研究では，被加熱材の温度分布を，板厚方向の 1 次元分布により取り扱った．ソレノイド方式であるバーヒータによる加熱昇温は通常，幅方向で均一のため，1 次元分布で問題ないが，トランスバース方式（1.2.2 項参照）の IH と組み合わせた場合の適用を考えると，板厚-板幅の 2 次元分布を考慮できるよう拡張が望まれる．また，提案した制御モデルは，最適化計算と組み合わせ，熱延中の消費エネルギーや被加熱材材質を最適化することで，熱延ラインの付加価値向上にも貢献するものと期待される.

参考文献

[1] 例えば，曽谷 保博, “圧延の現在，過去，未来” 塑性と加工, vol. 58, no. 672, pp. 1-2, 2017.

[2] 例えば，宇都宮 裕, “圧延加工のビジョン” 塑性と加工, vol. 57, no. 668, 2016.

[3] 日本鉄鋼協会 生産技術部門, “2018 年鉄鋼生産技術の歩み” ふぇらむ, vol. 24, no. 5, 2019.

[4] 小原一浩, ”熱間圧延ラインにおける温度制御と材質予測” 塑性と加工, vol. 58, no. 676, pp. 366-370, 2017.

[5] 十河 吉昭, “誘導加熱の歴史と将来,” 電氣學會雜誌, vol. 98, no. 3, pp. 216-223, 1978.

[6] O. Lucia, P. Maussion, D. E. J. Burdio, “Induction Heating Technology and its Applications : Past developments, current technology, and future challenges”, *IEEE Trans. Ind. Electron*., vol. 61, no. 5, 2014.

[7] W. H. Schilders, H. A. Vorst, J. Rommes, ”Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications: 13 (Mathematics in Industry), ” Springer, 2008

[8] D. Schmidthausler, M. Clemens, “Low-Order Electro-quasistatic Field Simulations Based on Proper Orthogonal Decomposition,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 48, no. 2, pp. 567-570, 2012.

[9] W. Wang et al., “Fast Frequency Sweep of FEM Models via the Balanced Truncation Proper Orthogonal Decomposition,” *IEEE Trans. antennas Propag*., vol. 59, no. 11, pp. 4142-4154, 2011.

[10] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto, “A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 18, no. 4, pp. 395-404, 2011.

[11] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto, “Recent Advances and New Challenges in the Use of the Proper Generalized Decomposition for Solving Multidimensional Models,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, no. 4, pp. 327-350, 2010.

[12] P. Feldmann and R. A. Freund,, ”Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process,” *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 14, no. 5, pp. 639-649, 1995.

[13] Celik M, Cangellaris AC., ”Simulation of Dispersive Multiconductor Transmission Lines by Pade Approximation via the Lanczos process,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 12, pp. 2525-2535, 1996.

[14] R. W. Freund, P. Feldmann, ”Reduced-order modeling of large linear passive multiterminal circuits using matrix-pad approximation” *Proceedings of the conference on Design*, automation and test in Europe, pp. 530-537, 1998.

[15] A. Odabasioglu, M. Celik, and L. T. Pileggi, ”PRIMA: Passive Reduced Order Interconnect Macromodeling Algorithm,” *IEEE Trans. ComputerAided Design*, vol. 17, no. 8, pp. 645-654, 1998.

[16] Y. Shindo and O. Noro, “Simple Circuit Simulation Models for Eddy Current in Magnetic Sheets and Wires,” *IEEE Trans. Fundamentals and Materials*, vol. 134, no. 4, pp. 173-181, 2014.

[17] T. Miyazaki, T. Mifune, T. Matsuo, Y. Shindo, Y. Takahashi and K. Fujiwara, “Equivalent Circuit Modeling of Dynamic Hysteretic Property of Silicon Steel under Pulse Width Modulation Excitation,” *Journal of Applied Physics*, 117, 17D110, 2015.

[18] T. Shimotani, Y. Sato, H. Igarashi, “Equivalent-Circuit Generation From Finite-Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no.3, 7206804, 2016.

[19] T. Shimotani, Y. Sato, H. Igarashi, “Direct Synthesis of Equivalent Circuits from Reduced FE Models Using Proper Orthogonal Decomposition,” *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*, vol. 35, no. 6, pp. 2035-2044, 2016.

[20] Y. Sato, T. Shimotani, H. Igarashi, “Synthesis of Cauer-Equivalent Circuit Based on Model Order Reduction Considering Nonlinear Magnetic Property,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 6, 1100204, 2017.

[21] A. Kameari, H. Ebrahimi, K. Sugahara, Y. Shindo, and T. Matsuo, “Cauer Ladder Network Representation of Eddy Current Fields for Model Order Reduction Using Finite-Element Method,” *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 54, no. 3, pp. 1-4, March 2018.

[22] Yuki Sato, Takuya Mori, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, ”Equivalent Circuit of Antennas Generated by Model Order Reduction,” *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, DOI: 10.3233/JAE-162061，2016.

[23] S. Hiruma, H. Igarashi, "Fast Computation of Copper and Iron Losses Using Model Order Reduction," *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 60, no. 5, pp. 1-8, 2019.

[24] N.Kubo, H.Imanari, T.Sakamoto, and T.Horikawa: “Technologies for Smart Rolling Mills”, *AISTech2018*, P. 2939-2949, 2018.

[25] H.Imanari, N.Shimoda, H.Inami, and N.Kubo:“Basic technologies to achieve smart rolling mills”, *4th ESTAD2019*, 2019.

[26] T.Horikawa and H.Imanari, “Future view of Automation Technologies for Smart Manufacturing in the Steel Industries,” *CAMP-ISIJ*, vol. 30, pp. 540~543, 2017.

[27] 脇田 淳一, 土師 純治, 河野 治, 中本 武広, 上尾 英孝, 高橋 学, 江坂 一彬, 熱延鋼板端部の混粒組織制御, 鉄と鋼, vol. 81, no. 8, 1995.

[28] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin and L.J.Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23, no. 9, pp.805-823, 1956.

[29] 小柴正則, “基礎からの電磁気学,” 培風館, 1998.

[30] 五十嵐一, 亀有昭久, 加川幸雄, 西口磯春, A. ボサビ, “新しい計算電磁気学,” 培風館, 2003.
[31] 中田高義, 高橋則雄, “電磁工学の有限要素法,” 森北出版, 1986.
[32] 高橋則雄, “磁気工学の有限要素法,” 朝倉書店, 2013.
[33] 高橋則雄, “三次元有限要素法,” 電気学会, 2006.
[34] G. ダット, G. トゥゾー, “有限要素法全解,” パーソナルメディア, 1990.
[35] 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹, “数値電磁力学.” 森北出版, 2002.
[36] P. Dular, F. Henrotte, W. Legros, “A General and Natural Method to Define Circuit Relations Associated with Magnetic Vector Potential Formulations,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 35, no.3, pp. 1630-1633, 1999.
[37] 日本機械学会（編）, “熱と流れのコンピュータアナリシス,” コロナ社, 1986.
[38] 大中逸雄, 大川富雄, 岡本達幸, 高城敏美, 平田好則, 山内勇, “輸送現象論,” 大阪大学出版会, 2003.
[39] K. Willcox and J. Peraire, ”Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition,” *AIAA J.*, vol. 40, no. 11, pp. 2323-2330, 2002.
[40] D. Schmidthausler S. Schops and M. Clemens, ”Reduction of Linear Subdomain for Non-Linear Electro-Quasistatic Field Simulation,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 49, no. 5, pp. 1669-1672, 2012.
[41] Y. Sato and H. Igarashi, ”Model Reduction Based on the Method of Snapshots for Eddy Current Problems,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 49, no. 5, pp. 1697-1700, 2013.
[42] T. Henneron and S. Clenet, “Model Order Reduction of Non-Linear Magnetostatic Problems Based on POD and DEI Methods,” *IEEE Trans. Magn*., Vol. 50, No. 2, 7000604, 2014.
[43] T. Henneron and S. Clnet,“ Model-Order Reduction of Multi-Input Non-Linear Systems Based on POD and DEI Methods, ”*IEEE Trans. Magn*, vol. 51, no. 3, Mar.., 2015.
[44] Y. Sato, F. Campelo, H. Igarashi, ”Fast Shape Optimization of Antennas Using Model Order Reduction,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 51. no. 3, Art. 7204304, 2015.
[45] Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Takahiro Sato, Hajime Igarashi, Fast Finite-Element Analysis of Motors Using Block Model Order Reduction, *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 52, no. 3, 7207004, 2016.
[46] 日本金属学会(編), “改訂 2 版　金属データブック” 丸善株式会社, 1984.
[47] K. Nakamura, H. Yoshida and O. Ichinokura, ”Electromagnetic and Thermal Coupled Analysis of Ferrite Orthogonal-Core Based on Three-Dimensional Reluctance and Thermal-Reluctance Network Model,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 40, no. 4, pp.2050-2052, 2004.
[48] 中村　健二, 一ノ倉　理, ”リラクタンスネットワーク解析に基づく電磁機器動特性解析” 日本応用磁気学会誌, vol. 28, no. 11, pp. 1089-1095, 2004.
[49] Toshihito. Shimotani, Hajime. Igarashi, Eiji. Hashimoto, Hiroyuki. Imanari, “Equivalent Circuit Allowing Loss Separation Synthesized from Field Computations: Application to Induction Heating,” *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 56, no. 2, 2020. (掲載決定)
[50] Omar Wing, “Classical Circuit Theory,” Springer, 2010.

[51] 小林重信, “実数値 GA の新展開”, システム制御情報学会, vol.52, no.10, pp.354-361, 2008.
[52] 小林重信, “実数値 GA のフロンティア”, 人工知能学会誌, vol.24, no.1, pp.128-143, 2009.
[53] 電気学会進化技術応用調査専門委員会（編）, “進化技術ハンドブック <第 1 巻> 基礎編,” 近代科学社, 2010.
[54] P. C. Hansen, D. P. O’leary, “The use of the L-Curve in the Regularization of discretization of discrete ill-posed problems,” S*IAMJ. Sci. Comput*., vol. 14, pp. 1487-1503, 1993.
[55] 森田ほか, ” プロセス制御・品質管理におけるデータモデリング技術” 新日鉄住金技報, vol. 411, pp. 96-103, 2018.
[56] 吉沢一郎, 中川繁政, ”製鉄設備におけるシステム・計測制御技術の進歩と展望” 新日鉄住金技報, vol. 411, pp. 2-9, 2018.
[57] 茂森ほか, ”所回帰モデルを用いた鋼材の品質制御” 計測自動制御学会論文集” vol. 44, no. 4, pp. 325-332, 2008.
[58] 角谷ほか, “局所回帰モデリングによるプロセス制御のモデル誤差学習” 計測自動制御学会論文集, vol. 50, no.7, pp. 528-535, 2014.
[59] 例えば, 佐藤義治, “統計モデルとしてのニューラルネット” 統計数理, vol.44, no. 1, pp. 85-98. 1996.
[60] Y. Shindo, T. Miyazaki, T. Matsuo, ”Cauer Circuit Representation of the Homogenized Eddy-Current Field Based on the Legendre Expansion for a Magnetic Sheet, ”*IEEE Trans. on Magn*., vol. 52, no. 3, 2015.

熱間圧延全般に関する圧延理論と制御の参考
[61] 日本鉄鋼協会生産技術部門圧延理論部会編”板圧延の理論と実際 (改訂版)” (社)日本鉄鋼協会, 2010.

謝辞

本研究の遂行にあたり，多くの方々にお世話になりました．ここに深く感謝の意を表します．

本論文をまとめるにあたり，終止暖かい激励とご指導，ご鞭撻をいただいた，北海道大学大学院情報科学研究科 五十嵐一教授に心より感謝申し上げます．五十嵐教授には学部・修士生時代より指導教員としてご指導いただき，電磁気学、数値解析，モデル縮約法をはじめとした多くの専門的な知識や，研究の考え方を学びました．社会人博士として再び入学した後も，研究方針・内容に多くの的確なご助言を頂き，また，学会参画や論文投稿に際する原稿・資料作成にも多大なご協力を承りました．心より感謝申し上げます．

北海道大学大学院情報科学研究科 小笠原悟司教授，北裕幸教授には，学位論文審査において貴重なご指導およびご助言を頂きました．心より感謝申し上げます．先生方のご助言により，本論文の完成度が高まりました．

北海道大学大学院情報科学研究科 野口聡准教授には，前記の学位論文審査時の他，個別にお話しさせていただいた際にも様々なご助言を頂きました．心より感謝申し上げます．

また，北海道大学大学院情報科学研究科の事務補佐員 斉藤尚代女様，技術職員 今井適様には，学位取得に際する各種手続きにご協力をいただきました。心より感謝申し上げます．

本研究は，東芝三菱電機産業システム株式会社(TMEIC)において実施いたしました．TMEIC 産業第二システム事業部 今成宏幸前技監には，社会人博士として挑戦する機会を与えていただきました．打合せの議論におけるご協力や，学位取得の工程についてのご助言など，多方面にわたるご指導およびご鞭撻をいただきました．心より感謝申し上げます．

TMEIC 産業第二システム事業部 植草和彦事業部長には，本論文を執筆するにあたり大きな推進力を与えていただきました．心より感謝申し上げます．

TMEIC 産業第二システム事業部 坂田昌彦チーフスペシャリスト，システム技術第一部 福島航部長，重工システム技術第一課 堀川徳二郎課長，重工システム技術第三課 馬場穣課長には，貴重な実機データ等の使用をご承諾いただき，本研究をご支援いただきました．心より感謝申し上げます．

TMEIC 産業第二システム事業部 システム技術第一部 重工システム技術第一課 橋本英二主任には，誘導加熱装置に関する専門的な知識・知見をご教示いただき，研究活動全般に渡って大変お世話になりました．心より感謝申し上げます．

筆者の学部・修士学生時代の研究室の先輩で，ご自身も北海道大学大学院情報科学研

究科で学位を取得された，Texas Instrument Japan 佐藤佑樹様には，筆者の学生時代より，電磁気・数値解析に関する多くのことを教えていただきました．心より感謝申し上げます．

TMEIC プロセス制御研究開発センター 小原一浩センター長，下田直樹副センター長，佐野光彦課長をはじめとする当センター所属の皆様，制御システム開発部 坂本匡副部長には，本研究を遂行する環境をご提供いただき，また，学会参画や本論文執筆をはじめ，学位取得のためのご支援をいただきました．心より感謝申し上げます．

最後に，日々の生活を支えてくれた筆者の家族に感謝します．

2020 年 3 月

下谷　俊人

研究業績

論文

1. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Hajime Igarashi, Equivalent-Circuit Generation from Finite-Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition, *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 52, no. 3, 7206804, 2016.
2. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Takahiro Sato, Hajime Igarashi, Fast Finite-Element Analysis of Motors Using Block Model Order Reduction, *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 52, no. 3, 7207004, 2016.
3. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Hajime Igarashi, Direct Synthesis of Equivalent Circuits from Reduced FE Models using Proper Orthogonal Decomposition, *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 35, no. 6, 2035-2044, 2016.
4. Yuki Sato, Takuya Mori, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, ”Equivalent Circuit of Antennas Generated by Model Order Reduction,” *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, DOI: 10.3233/JAE-162061， 2016.
5. Yuki Sato, Toshihito Shimotani, Hajime Igarashi, "Synthesis of Cauer-Equivalent Circuit Based on Model OrderReduction Considering Nonlinear Magnetic Property," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 53, no. 6, Art. 1100204, 2017.
6. Toshihito. Shimotani, Hajime. Igarashi, Eiji. Hashimoto, Hiroyuki. Imanari, “Equivalent Circuit Allowing Loss Separation Synthesized from Field Computations: Application to Induction Heating,” *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 56, no. 2, 2020. (掲載決定)

講演（国際会議）

1. Toshihito Shimotani, Yuki Sato and Hajime Igarashi, “Generation of Equivalent Circuit from Finite Element Model of Electromagnetic Devices Using Proper Orthogonal Decomposition,” Compumag2015, PC3-5, 2015.
2. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Takahiro Sato, and Hajime Igarashi, “Fast Finite Element Analysis of IPM Motors Using Block Model Order Reduction,” Compumag2015, PC4-9, 2015.
3. Toshihito Shimotani, Yuki Sato, Takahiro Sato and Hajime Igarashi, “Direct Generation of

Equivalent Circuits from Reduced FE Models Using Proper Orthogonal Decomposition," ISEF2015, JP167, 2015.

4. Toshihito. Shimotani, Hajime. Igarashi, Eiji. Hashimoto, Hiroyuki. Imanari, Equivalent Circuit Allowing Loss Separation Synthesized from Field Computations: Application to Induction Heating, Compumag2019, PA-A3-12, Paris, France, July, 2019.

講演（国内会議）

1. 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一, "モデル縮約法を用いた等価回路生成," 電気学会静止器/回転機合同研究会資料, SA-14-080, RM-14-096, 2014 年 9 月.
2. 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一, "固有直交分解を用いたモデル縮約法による電磁機器の有限要素解析," 日本機械学会第 27 回計算力学講演会, OS2-1, 0202, 2014 年 11 月.
3. 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一, "ブロックモデル縮約法によるモータ解析の高速化," 電気学会静止器/回転機合同研究会資料, SA-15-086, RM-15-124, 2015 年 9 月.
4. 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一, 橋本英二, 今成宏幸, 木原美怜, "モデル縮約法を用いた誘導加熱装置の電磁界-熱伝導連成解析," 日本機械学会第 28 回計算力学講演会, OS07-2, 162, 2015 年 10 月.
5. 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一, "固有直交分解法を用いた有限要素モデルの等価回路生成," 平成 27 年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会, OS-13, 2015 年 11 月.
6. 下谷俊人, 五十嵐一, 橋本英二, 今成宏幸, "固有直交分解法を用いた誘導加熱装置の制御モデル構成法の基礎検討," 第 27 回 MAGDA コンファレンス, OS4-2, 2018 年 10 月.

特許

1. 下谷俊人: 熱間エンドレス圧延ラインの鋼板温度制御装置, 特開 2019-209372.

賞罰

1. 「電気学会優秀論文発表賞 (IEEJ Excellent Presentation Award)」受賞 2015 年 3 月 31 日
2. 「北海道大学大学院　情報科学研究科　研究科長賞」受賞 2016 年 3 月 24 日

付録 A　電磁鋼板内磁界の解析解と等価回路生成

厚さ d の電磁鋼板の磁界を考える．今，電磁鋼板を無限平板と仮定すると，Maxwell 方程式より，次式の Helmholtz 方程式が導かれる．なお本付録では，複素数であることを意味するものとして，記号の上部にドット”・”を付けることとする．

$$\frac{\partial \dot{H}(z)}{\partial t^2} + k^2 \dot{H}(z) = 0, \quad k^2 = \mathrm{j}\omega\sigma\mu \tag{A.1}$$

ここで，$\dot{H}, \omega, \sigma, \mu$ はそれぞれ磁界の y 方向成分，角周波数，導電率，透磁率である．また，境界条件を次式のように設定する．

$$\dot{H}(\pm d/2) = \dot{H}_0 \tag{A.2}$$

(A.2)式を用いて(A.1)式を解くと，(A.1)式の解が次式のような電磁鋼板内磁界の解析解得られる．

$$\dot{H}(z) = \frac{\cos(kz)}{\cos(kz/2)}\dot{H}_0 \tag{A.3}$$

(A.3)式より，磁束$\dot{\Phi}$は次式のように表すことができる．

$$\dot{\Phi} = 2\int_0^{d/2} \mu \dot{H}(z)\mathrm{d}x = \frac{2\mu}{k}\tan\left(\frac{kd}{2}\right)\dot{H}_0 \tag{A.4}$$

従って，複素透磁率$\dot{\mu}_c$は次式のように表すことができる．

$$\dot{\mu}_c = \frac{\dot{\Phi}}{d\dot{H}_0} = \mu\frac{2}{kd}\tan\left(\frac{kd}{2}\right) \tag{A.5}$$

(A.5)式に次式の連分数展開を適用する．

$$\frac{1}{z}\tan z = \cfrac{1}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cdots}}} \tag{A.6}$$

(A.6)式を適用すると，$\dot{\mu}_c$ を次式のような Cauer 回路の形で表すことができる．

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_c &= \cfrac{1}{\cfrac{1}{\mu}+\cfrac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{3\mu+\mu\cfrac{j\omega\sigma\mu d^2/4}{5+\cdots}}} \\ &= \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{C1}}+\cfrac{1}{\cfrac{R_{C1}}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{C2}}+\cdots}}}\end{aligned} \tag{A.7}$$

ここで，L_{Ci}, R_{Ci} はそれぞれ i 段目の回路のインダクタンス，抵抗に対応し，次式である．

$$L_{Ci}=\frac{\mu}{4i-3},\quad R_{Ci}=\frac{4(4i-1)}{\sigma d^2} \tag{A.8}$$

また，(A.5)式を部分分数展開すれば，Foster 回路の形で表すことができる．

$$\dot{\mu}_c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\cfrac{s}{R_{Fi}}+\cfrac{1}{L_{Fi}}} \tag{A.9}$$

ここで，L_{Fi}, R_{Fi} はそれぞれ i 段目の回路のインダクタンス，抵抗に対応し，次式である．

$$L_{Fi}=\frac{8\mu}{\pi^2(2i-1)^2}\quad R_{Fi}=\frac{8}{\sigma d^2} \tag{A.10}$$

以上より，電磁鋼板内磁界の解析解を用いて Cauer 回路，Foster 回路を導出することができた．

付録 B　ルシャンドル多項式近似を用いた電磁鋼板内の磁界表現

電磁鋼板の厚さ方向（z 方向）の磁束密度 B 分布について考える．厚さを d としたとき，z 方向の B 分布はルジャンドル多項式（直交多項式）を用いて次式のように展開できる．

$$B(z,t)=\alpha_0(z)B_0(t)+\alpha_2(z)B_2(t)+\alpha_4(z)B_4(t)+\cdots \tag{B.1}$$

$$\alpha_0(z)=1,\quad \alpha_2(z)=-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2,\quad \alpha_4(z)=\frac{3}{8}-15\left(\frac{z}{d}\right)^2+70\left(\frac{z}{d}\right)^4 \tag{B.2}$$

ここで，a_i は次式のように互いに直交しており，境界で 1 となる．

$$\int_{-d/2}^{d/2}\alpha_i\alpha_j\mathrm{d}z=0\quad (i\neq j),\quad \alpha_i(\pm d/2)=1 \tag{B.3}$$

一方，鋼板内の渦電流の方程式は次式である．

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\sigma\frac{\partial B}{\partial t} \tag{B.4}$$

(B.4)式に(B.1)式を代入することで, 鋼板内の磁界 $H(z,t)$を次式のように求めることができる．

$$H(z,t)=H_s(t)-\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}-\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}-\cdots \tag{B.5}$$

$$\beta_2(z)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^2,\quad \beta_4(z)=-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{d}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^4 \tag{B.6}$$

ここで，H_s は表面磁界である。また，B_0 が既知として，B_2, B_4…は次式を満たすように決定される．

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\{H(z,t)-H_{DC}(B(z,t))\}\alpha_i(z)\mathrm{d}z=0 \tag{B.7}$$

ここで，$H_{DC}(B)$は鋼板の直流磁気特性であり，線形のときは $H_{DC}(B)=\nu B$ で与えられる．2 次の項($\alpha_0, \alpha_2, \beta_2, \beta_4$)まで用いた場合，未知数 H_s, B_2 を求める式は

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{H_s(t)-\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}-\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}-\nu(\alpha_0(z)B_0(t)+\alpha_2(z)B_2(t))\right\}\alpha_i(z)\mathrm{d}z=0 \tag{B.8}$$

(B.3)式の直交性より, (B.8)式において $\alpha_i=\alpha_0$ とすれば B_0, $\alpha_i=\alpha_2$ とすれば B_2 が得られる．

<1> $\alpha_i=\alpha_0$ とした場合

$$\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{H_s(t)-\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}-\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}-\nu B_0(t)\right\}\mathrm{d}z=0 \tag{B.9}$$

ここで，(B.9)式左辺第 2 項は

$$\begin{aligned}(\text{左辺第2項}) &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\frac{d}{12} \\ &= \frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{B.10}$$

また，(B.9)式左辺第 3 項は

$$\begin{aligned}(\text{左辺第3項}) &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{d}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^4\right\}\mathrm{d}z \\ &= -\frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\frac{d}{60} \\ &= \frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{B.11}$$

(B.10),(B.11)式より，結局(B.9)式は

$$H_s(t)=-\nu B_0(t)+\frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}-\frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t} \tag{B.12}$$

となる.

<2> $\alpha_1=\alpha_2$ とした場合

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{H_s(t)-\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}-\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}-\nu\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}B_2(t)\right\}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\ &=0 \\ &\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}H_s(t)\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z-\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\sigma d^2\beta_2(z)\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\ &-\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\sigma d^2\beta_4(z)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z-\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\nu\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}B_2(t)\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\ &=0\end{aligned} \tag{B.13}$$

ここで，(B.13)式左辺第 2 項は

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺第2項}) &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \sigma d^2 \beta_2(z) \frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\frac{d}{60} \\
&= \frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

また，(B.13)式左辺第 3 項は

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺第3項}) &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \sigma d^2 \beta_4(z) \frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{d}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{d}\right)^4\right\}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\sigma d^2}{d}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}\frac{d}{210} \\
&= \frac{\sigma d^2}{210}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

また，(B.13)式左辺第 4 項は

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺第4項}) &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \nu\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}B_2(t)\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{d}\nu B_2(t)\int_{-d/2}^{d/2}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\frac{z}{d}\right)^2+\frac{1}{36}\left(\frac{z}{d}\right)^4\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{d}\frac{\nu d}{5}B_2(t) \\
&= \frac{\nu}{5}B_2(t)
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

また，(B.13)式左辺第 1 項は，次式より零となる．

$$
\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\left\{-\frac{1}{2}+6\left(\frac{z}{d}\right)^2\right\}\mathrm{d}z = 0 \tag{B.17}
$$

従って，結局(B.13)式は

$$
0 = \frac{\nu}{5}B_2(t) - \frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma d^2}{210}\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t} \tag{B.18}
$$

<1>,<2>より，未知数 H_s,B_2 に関する式は以下となる．

$$
\begin{aligned}
H_s(t) &= \nu B_0(t) + \frac{\sigma d^2}{12}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t} \\
0 &= \frac{\nu}{5}B_2(t) - \frac{\sigma d^2}{60}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma d^2}{210}\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

(B.19)式は Cauer 型回路と等価であることが分かる．従って，Cauer 型回路における 1 段目のインダクタンスは，電磁鋼板内の主磁束を表現しており，n(>1)段目のインダクタンスは n 次の磁束を表現しているといえる．また，格段を流れる電流は n 次の渦電流に対応している．