HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた準定常電磁界解析に関する研究
Author(s)	藤田, 祥伍
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(情報科学)
Dissertation Number	甲第14142号
Issue Date	2020-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k14142
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/78438
Type	doctoral thesis
File Information	Shogo_Fujita.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

SSI-DT79175029

博士論文

均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた準定常電磁界解析に関する研究

藤田　祥伍

2020 年 1 月

北海道大学 大学院情報科学研究科
システム情報科学専攻

本論文は北海道大学 大学院情報科学研究科に
博士（情報科学）授与の要件として提出した博士論文である.

藤田　祥伍

審査委員：　主査　五十嵐　　一　教授
副査　小笠原　悟司　教授
北　裕幸　教授
野口　聡　准教授

均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた準定常電磁界解析に関する研究*

藤田　祥伍

概要

現在，わが国における消費エネルギーのうち，50 %以上が電気エネルギーを占めており，さらにその内の 50 %はモータや変圧器を駆動するために消費されている．これらの電気機器の損失には，鉄芯中の鉄損と巻線内部の Joule 損に起因する銅損がある．これら損失の低減と電気機器利用効率の改善は，温室効果ガスの排出量の削減，環境汚染や地球温暖化の防止に寄与する．

こうした目的のための電気機器の高効率化に伴い，それぞれの素子の小型化が図られている．そのために，近年電気機器の駆動周波数が高くなる傾向にある．高周波化が進むと，体積は小さくなるものの，界磁巻線における銅損が顕著となる．銅損には電源からの電流による表皮効果と，素線に印加される交番磁界がもたらす近接効果から発生する渦電流損がある．

近接効果による渦電流損の低減のためには，銅線を薄い磁性体で被覆した磁性被覆線が有効である．磁性被覆線においては，外部磁束は磁性体に集中し，銅線と鎖交する磁束が低減するため，近接効果を抑制することが可能である．

別の方策として，占積率を向上するために，素線の平角線化が注目されている．平角線を用いると，表皮効果を抑制でき，占積率が 90 %程度にまで改善できる．

一方で，鉄損の低減のために，現在圧粉磁芯を用いた磁性体コアを用いることが検討されている．この磁性体コアは，フェライト等とは異なり，透磁率がやや低いものの，磁気飽和と渦電流損を抑制できる．また，磁性粉体は 3 次元形状を生成しやすく，製造に向いているという利点も有している．

上記のような電気機器の構造を変化させることによる銅損，鉄損の損失の低減に加えて，外部漏洩磁界の低減も重要になる．そのためには，電気機器の一部を電磁シールドで覆うことが必要になる．電気機器を高周波で駆動する場合，数 μm の厚さの電磁シールドを用いることが一般的である．

これらを考慮した電気機器の設計には，多数のパラメータがあり，実験ベースでは試作・製造コストが膨大である．したがって，計算機シミュレーションによる最適設計が有効である．そのためには，電磁界有限要素解析により電気機器の特性を評価し，最適化アルゴリズムと合わせてトポロジー最適化を行うことが必要になる．しかし，磁性被覆線や電磁シールドを含む系はいずれも微細な構造を有しており，直接的な有限要素解析が難しい．本博士論文においては，これらの渦電流特性を考慮した解析を行うための均質化有限要素法，インピーダンス境界条件の導入を行い，電気機器の特性を精度よく評価するための準定常電磁界解析手法を提案する．

Key words：**マルチターンコイル，磁性被覆線，電磁シールド，インダクタ，モータ，圧粉磁芯，渦電流，準定常電磁界，電磁界有限要素解析，複素透磁率，均質化有限要素法，インピーダンス境界条件**

*北海道大学 大学院情報科学研究科システム情報科学専攻博士論文，
SSI-DT79175029，2020 年 1 月

Study on Quasi-Static Electromagnetic Field Analysis Using Homogenization-Based Finite Element Method and Impedance Boundary Conditions †

Shogo Fujita

Abstract

These days, electric power is account for about 50 ~ 70 % of the total consumed energy, over a half of which is consumed for driving motors or inductors. The energy loss in these electric apparatuses mainly consists of the copper and iron losses. The copper loss means the power loss in armature windings due to the eddy current while the iron loss is the eddy current and hysteresis losses in magnetic materials. Reduction of these losses and improvement of the efficiency of these electric devices contribute to prevent environment pollution and global warming.

In order to realize them, miniaturization of electric devices is desired for increasing switching frequency of wideband semiconductors in power devices. This results, however, in the copper loss in armature windings and magnetic cores due to higher harmonics. There are two types of the copper loss: the skin and proximity effects. The skin effect means that total currents flow near by the surface of a wire conductor due to the eddy currents generated by the self-current. On the other hand, the proximity effect means that the anti-parallel eddy currents are induced by an applied alternating magnetic induction.

For the sake of reduction of the copper loss due to the proximity effect, a magnetically shielded wire (MSW) which is composed of a wire conductor coated by magnetic-conductive thin layers is effective. When a MSW is immersed in a magnetic induction, magnetic fluxes tend to pass not through the central conductor but through the shielding layers. For this reason, the losses due to the proximity effect are expected to be reduced. Because of its high space factor and the low DC resistance, rectangular coils with relatively large cross-sectional area is effective for electric machines and devices. From this structure, the skin effect loss is expected to be reduced and the filling factor of wire conductors in a slot becomes nearly 90 %.

On the other hand, soft magnetic composite (SMC) cores composed of small iron particles embedded in an insulation medium have advantages for reduction of the eddy current loss and suppressing magnetic saturation. Moreover, desired three-dimensional shapes can be easily formed.

There is another indispensable consideration: suppressing a leakage magnetic field. To reduce it, thin electromagnetic shields should be placed near electric devices.

As mentioned above, there are a lot of parameters for optimization of these electric machines. To do so, electromagnetic field analysis using finite element method (FEM) and optimization algorithms are required for designing them. Native application of FEM considering eddy currents results, however, in a large system of equations. This doctor thesis presents a homogenization method and impedance boundary conditions (IBCs) which allow us to analysis quasi-static electromagnetic field by using usual computational environments. The scientific originality of this doctor thesis lies in developing these two methods for quasi-static electromagnetic field analysis.

Key words: multi-turn coil, magnetically shielded wire, electromagnetic shield, inductor, motor, soft magnetic composite, eddy current, quasi-static electromagnetic field, finite element method (FEM), complex permeability, FEM based on homogenization method, impedance boundary conditions

† Doctor's Thesis, Division of Systems and Information Engineering, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, SSI-DT79175029, January, 2020.

目 次

第 1 章　序論: 研究背景と目的　1

1.1　研究背景: 高周波帯で駆動する電気機器の高効率化 …… 1

1.2　電気素子・機器の小型化に要請される事項 …… 3

1.3　界磁巻線中の銅損と磁性体コアの磁気非線形特性 …… 4

1.3.1　界磁巻線中の銅損：細線中の表皮効果・近接効果 …… 4

1.3.2　磁性体コア中の磁気非線形特性 …… 5

1.4　研究背景: 高周波帯で駆動する電気機器の高効率化 …… 6

1.4.1　磁性被覆線の導入…… 6

1.4.2　平角線を用いた占積率の向上 …… 7

1.4.3　磁性平角線を用いた表皮・近接効果に伴う損失の提減 …… 8

1.4.4　圧粉磁芯(SMC)コアを用いた鉄損低減の検討…… 8

1.4.5　電磁シールドによる外部漏洩磁界の抑制 …… 9

1.5　研究課題: 高周波帯で駆動する電気機器の高効率化 …… 10

1.5.1　計算電磁気学の必要性…… 10

1.5.2　電磁界有限要素解析上の問題点 …… 11

1.5.3　均質化有限要素法とインピーダンス境界条件の導入 …… 11

1.5.4　本研究の独自性・新規性…… 14

1.6　本研究成果の概要…… 16

1.7　本論文の構成…… 19

1.7.1　本論文のフローチャートと全体像 …… 19

1.7.2　各章の概説…… 20

第 1 章 参考文献 …… 28

第 2 章　電磁界数値解析のための有限要素法　31

2.1　電磁界解析における有限要素法 …… 32

2.2　電磁界の支配方程式…… 33

2.2.1　静磁界における支配方程式 …… 33

2.2.2　時間領域準静電磁界における支配方程式 …… 34

2.2.3　周波数領域準静電磁界における支配方程式 …… 36

2.3　有限要素方程式の導出…… 36

2.3.1　重み付残差法…… 36

2.3.2　2 次元静磁界における有限要素方程式 …… 37

2.3.3　2 次元準静電磁界における有限要素方程式 …… 38

2.3.4　時間領域における軸対称 2 次元準静電磁界の有限要素方程式 …… 39

2.3.4.1 A_θ を未知数とした場合の有限要素方程式…… 40

2.3.4.2 ψ を未知数とした場合の有限要素方程式…… 42

2.3.4.3 周波数領域における軸対称 2 次元準静電磁界の有限要素方程式 …… 43
2.3.5 3 次元解析の場合 …… 43
2.3.5.1 3 次元静磁界における有限要素方程式 …… 43
2.3.5.2 時間領域 3 次元準静電磁界の場合 …… 44
2.3.5.3 周波数領域 3 次元準静電磁界の場合 …… 45
2.4 有限要素の定義 …… 45
2.4.1 1 次三角形要素と節点要素(0 次 Whitney 要素) …… 46
2.4.2 1 次四角形要素と節点要素(0 次 Whitney 要素) …… 49
2.4.3 辺要素(1 次 Whitney 要素)と 1 次四面体要素・1 次六面体要素 …… 50
2.4.3.1 辺要素の定義 …… 51
2.4.3.2 1 次四面体要素 …… 55
2.4.3.3 1 次六面体要素 …… 57
2.5 有限要素方程式の空間・時間の離散化 …… 58
2.5.1 空間の離散化 …… 58
2.5.1.1 2 次元xy空間における静磁界有限要素方程式の離散化 …… 59
2.5.1.2 2 次元xy空間における準静電磁界有限要素方程式の離散化 …… 59
2.5.1.3 軸対称準静電磁界の有限要素方程式の離散化 …… 59
2.5.1.4 3 次元静磁界の有限要素方程式の離散化 …… 61
2.5.1.5 3 次元準静電磁界の有限要素方程式の離散化 …… 62
2.5.2 時間方向の離散化 …… 63
2.6 境界条件 …… 63
2.6.1 Dirichlet 境界条件 …… 64
2.6.2 Neumann 境界条件 …… 64
2.6.3 非適合境界条件 …… 65
2.6.4 周期境界条件 …… 66
2.7 各有限要素における補間関数の計算と有限要素行列の生成 …… 67
2.7.1 1 次三角形要素におけるスカラー補間関数の計算 …… 67
2.7.2 軸対称座標系空間の 1 次三角形要素による離散化 …… 68
2.7.2.1 A_θ を未知数とした場合の離散化 …… 69
2.7.2.2 ψ を未知数とした場合の離散化 …… 70
2.7.3 1 次四角形要素の扱いと局所座標系 …… 71
2.7.3.1 局所座標系の導入の妥当性 …… 71
2.7.3.2 局所座標系における 1 次四角形要素の補間関数の計算 …… 75
2.7.3.3 1 次四角形要素におけるスカラー補間関数の勾配の計算 …… 77
2.7.3.4 1 次四角形要素における電流項の離散化 …… 79
2.7.4 1 次四面体要素を用いた有限要素行列の構築 …… 80
2.7.4.1 スカラー補間関数の計算と勾配 …… 80
2.7.4.2 ベクトル補間関数の計算と回転・勾配 …… 80
2.7.4.3 体積積分の評価 …… 81

2.7.5 1 次六面体要素を用いた有限要素行列の構築 ……82
2.7.5.1 局所座標系における 1 次六面体要素の補間関数 ……83
2.7.5.2 局所座標系における共変・反変ベクトルの扱い ……85
2.7.5.3 局所座標系における補間関数の回転・勾配の計算 ……89
2.7.5.4 局所座標系における 1 次六面体要素の体積積分 ……92
2.8 3 次元解析における電流無発散条件 ……93
2.8.1 ICCG 法による行列のランク落ちについて ……94
2.8.2 1 次 Whitney 要素の辺要素と節点要素の包含関係 ……95
2.8.3 Laplace 方程式の解の一意性の証明 ……96
2.8.4 3 次元空間における電流項の扱い ……97
2.9 磁性体の非線形性の考慮……97
2.9.1 Newton-Raphson 法を用いた非線形方程式の解法……98
2.9.2 Akima 補間による透磁率の計算……99
2.10 電圧源と有限要素方程式の結合解析 …… 100
2.11 第 2 章の総括…… 101
第 2 章 参考文献 …… 101

第 3 章 周波数領域における均質化有限要素法 103
3.1 Unit-cell approach によるマクロ複素透磁率の評価 …… 104
3.1.1 2 次元解析の場合 …… 105
3.1.2 3 次元解析の場合 …… 106
3.2 静磁界中の磁性粒子群に対する Ollendorff の式 …… 108
3.2.1 線形材質の磁性粒子群に対する Ollendorff の式 …… 109
3.2.2 非線形材質の磁性粒子群に対する Ollendorff の式 ……111
3.3 磁気双極子から定義した各種磁性体の複素透磁率 ……112
3.5 電磁鋼板の複素透磁率……113
3.5 円柱導体の複素透磁率……114
3.5.1 円形断面導体の電磁界……115
3.5.2 円形断面導体の複素透磁率 ……117
3.5.3 均質化された円形断面導体の回路方程式と複素電力の評価 …… 120
3.6 磁性被覆線の均質化有限要素解析(磁性被覆が絶縁体の場合) …… 122
3.6.1 磁性被覆が絶縁体の場合の 2 層型磁性被覆線の電磁界 …… 123
3.6.2 2 層型磁性被覆線の複素透磁率 …… 125
3.6.3 均質化された絶縁皮膜の 2 層型磁性被覆巻線の回路方程式と複素電力の評価…… 127
3.7 磁性被覆が導体の場合の磁性被覆線の均質化有限要素解析 …… 129
3.7.1 直接的に求めた電磁界と複素透磁率 …… 130
3.7.2 電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の電磁界と複素透磁率 …… 133
3.8 多層構造を有する磁性被覆線の均質化有限要素解析 …… 135
3.8.1 直接的に求めた電磁界と複素透磁率 …… 136

3.8.2　磁性被覆に電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の電磁界……145
3.9　楕円柱細線の均質化有限要素解析……153
3.9.1　楕円柱細線の座標系と電磁界……154
3.9.2　楕円柱細線のテンソル型複素透磁率……159
3.9.3　均質化された楕円柱細線の回路方程式と複素電力の評価……161
3.10　磁性被覆楕円柱細線の均質化有限要素解析……164
3.10.1 磁性被覆楕円柱細線の座標系と電磁界……165
3.10.2 磁性被覆楕円柱細線のテンソル型複素透磁率……166
3.10.3 磁性被覆部分の蓄積磁気エネルギーの解析的評価……168
3.10.4 均質化された磁性被覆楕円柱細線の回路方程式と複素電力の評価…169
3.11　真球形圧粉磁芯の複素透磁率と均質化有限要素法……171
3.11.1 磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルと磁気双極子……172
3.11.2 真球圧粉磁芯の複素透磁率……175
3.12　回転楕円体形圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率と均質化……180
3.12.1 扁球楕円体内外の磁気ベクトルポテンシャルと磁気双極子……182
3.12.2 扁平圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率……187
3.12.3 SMC コアのマクロ複素透磁率……194
3.13　複素透磁率一覧……195
3.14　局所座標系と全体座標系の複素透磁率の関係……197
3.14.1 3 次元空間中のコイルのテンソル型マクロ複素磁気抵抗率……197
3.14.2 基底ベクトルの変換による有限要素行列の変更……199
3.14.3 Litz 線の 3 次元構造を考慮した座標変換行列……200
3.15　第 3 章の総括……204
第 3 章 参考文献……205

第 4 章　複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素解析の妥当性　207
4.1　複素透磁率の周波数特性……207
4.1.1　電磁鋼板の場合……207
4.1.2　導線の場合……209
4.1.3　真球の場合……210
4.1.4　絶縁皮膜の磁性被覆線の場合……211
4.2　複素透磁率の数値不安定性……213
4.2.1　磁性被覆線の複素透磁率……213
4.2.2　多層磁性被覆線の複素透磁率……216
4.2.3　磁性楕円体の複素透磁率……220
4.3　Unit-cell approach とのマクロ複素透磁率の比較 (2 次元)……223
4.3.1　銅巻線のマクロ複素透磁率……223
4.3.2　磁性被覆コイルのマクロ複素透磁率……224
4.3.3　楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率……228
4.3.4　磁性被覆楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率……230

4.4 Unit-cell approach とのマクロ複素透磁率の比較 (3 次元)…… 232
4.4.1 真球圧粉磁芯のマクロ複素透磁率 …… 233
4.4.2 磁性楕円体のテンソル型マクロ複素透磁率 …… 238
4.4.3 Unit-cell approach の 3 次元問題における問題点 …… 242
4.5 均質化されたマルチターンコイルの解析(電流入力) …… 242
4.5.1 銅巻線の場合…… 243
4.5.2 絶縁皮膜を有する磁性被覆線の場合 …… 244
4.5.3 導電性の磁性被覆を有する磁性被覆線の場合 …… 246
4.5.4 多層磁性被覆線の場合…… 248
4.5.4 電流入力の場合の 3 次元解析の妥当性 …… 250
4.6 均質化されたマルチターンコイルの解析(電圧入力) …… 252
4.6.1 銅巻線の場合…… 253
4.6.2 多層磁性被覆線の場合…… 254
4.6.3 平角線・楕円柱細線の場合 …… 255
4.6.4 磁性平角線・磁性楕円柱細線の場合 …… 256
4.6.5 3 次元空間中の磁性被覆線の場合 …… 258
4.6.6 係数行列に対角スケーリングを導入した場合の収束性改善 …… 260
4.6.7 Litz 線の 3 次元構造を考慮した細線の交流抵抗の評価…… 261
4.7 第 4 章の総括…… 263
第 4 章 参考文献 …… 264

第 5 章 磁性被覆コイルの構造最適化 265
5.1 絶縁皮膜を有する磁性被覆線の構造最適化に関する検討 …… 265
5.1.1 交流抵抗の磁性被覆の比透磁率への依存性 …… 265
5.1.2 交流抵抗の磁性被覆の厚さへの依存性 …… 267
5.2 磁性被覆が導電性の場合の最適化 …… 267
5.3 GA を用いた多層磁性被覆線の構造最適化 …… 268
5.3.1 遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm : GA)…… 269
5.3.2 REX^{star} GA …… 270
5.3.3 最適化問題：多層磁性被覆線の交流抵抗最小化 …… 271
5.3.4 最適化問題：絶縁皮膜を考慮した解析 …… 275
5.4 第 5 章の総括…… 277
第 5 章 参考文献 …… 277

第 6 章 SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率 279
6.1 磁気回路法を用いたマクロ複素透磁率の推定 …… 280
6.1.1 磁気スカラーポテンシャルを用いたマクロ透磁率 …… 280
6.1.2 乱数を用いた単位セル間の磁気結合の確率モデル …… 283
6.1.3 複素透磁率を用いた渦電流の効果の反映 …… 284
6.2 マクロ複素透磁率の数値解析結果 …… 284
6.2.1 充填率への依存性…… 284

6.2.2 周波数への依存性……285
6.2.3 接触確率への依存性……286
6.3 磁性楕円体のテンソル型複素透磁率を用いた異方性の考慮……287
6.4 テンソル型マクロ複素透磁率の数値解析結果……288
6.4.1 長軸と短軸の比較……288
6.4.2 接触確率・周波数への依存性……288
6.4.3 充填率への依存性……289
6.5 第 6 章の総括……290
第 6 章 参考文献……290

第 7 章 均質化有限要素法の時間領域解析への拡張 291
7.1 マクロ実効磁気抵抗と畳み込み積分の評価……292
7.1.1 逆 Laplace 変換によるマクロ実効磁気抵抗……293
7.1.2 均質化された磁性体を含む系の時間領域の有限要素方程式……293
7.1.3 均質化された磁性体を含む系の時間領域の有限要素方程式……295
7.1.4 均質化されたコイルの回路方程式との連成……298
7.2 円筒形マルチターンコイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形……301
7.2.1 複素透磁率の連分数展開とマクロ実効磁気抵抗……301
7.2.2 マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度……302
7.2.3 表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現……303
7.2.4 表皮効果のインピーダンスの項の連分数表示の計算精度……304
7.2.5 素線の電流波形の時間波形……304
7.3 円筒形磁性被覆コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形……305
7.3.1 複素透磁率の連分数展開とマクロ実効磁気抵抗……306
7.3.2 マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度……307
7.3.3 表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現……308
7.3.4 入力電流に対するインピーダンスの連分数表示の計算精度……310
7.3.5 磁性被覆線の電流波形の時間波形……311
7.4 楕円柱・平角コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形……312
7.4.1 テンソル型複素透磁率の連分数展開とテンソル型マクロ実効磁気抵抗……313
7.4.2 テンソル型マクロ実効磁気抵抗を用いた有限要素方程式……314
7.4.3 テンソル型マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度……316
7.4.4 楕円柱細線と平角線の表皮効果に起因するインピーダンス……317
7.4.5 楕円柱コイル・平角線コイルの電力の時間波形……318
7.5 磁性平角線コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形……320
7.5.1 磁性平角線コイルのテンソル型マクロ実効磁気抵抗……320
7.5.2 テンソル型マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度……322
7.5.3 表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現……323
7.5.4 Cauer 型等価回路表現の数値解析結果……325

7.5.5 素線の電流波形の時間波形 …… 326
7.6 第 7 章の総括…… 326
第 7 章 参考文献 …… 327

第 8 章 磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減 329
8.1 磁性体コアに非線形性が存在する場合の解析 …… 329
8.2 PWM 入力の問題…… 331
8.2.1 PWM 信号の生成…… 331
8.2.2 磁性被覆コイルに PWM を入力した際の電流波形…… 334
8.3 円筒形磁性被覆線の有効性…… 334
8.3.1 損失評価の妥当性の確認…… 335
8.3.2 磁性被覆コイルに PWM を入力した際の電流波形…… 335
8.3.3 インダクタの損失の実効値 …… 337
8.3.4 IPM モータの損失の実効値 …… 338
8.4 磁性被覆平角線の有効性…… 340
8.4.1 PWM を入力した際の電流・銅損評価の妥当性の確認 …… 340
8.4.2 インダクタの損失評価…… 342
8.5 第 8 章の総括…… 344
第 8 章 参考文献 …… 344

第 9 章 インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング 345
9.1 周波数領域におけるインピーダンス境界条件の定式化 …… 348
9.1.1 電磁シールドの境界インピーダンスと境界条件 …… 348
9.1.2 磁気ベクトルポテンシャルを用いた伝達関数 …… 351
9.1.2.1 一般的な座標系における伝達関数 …… 351
9.1.2.2 2 次元平面における伝達関数 …… 352
9.2 有限要素行列とインピーダンス境界条件の連成 …… 355
9.3 周波数領域における数値解析結果 …… 355
9.3.1 磁束線分布の確認…… 356
9.3.2 渦電流変位センサモデルの解析 …… 356
9.3.3 実測との比較…… 358
9.3.4 電磁シールドが多層構造を有している場合の伝達関数 …… 359
9.3.5 電磁シールドが多層構造を有している場合の数値解析 …… 359
9.4 伝達関数の直接的な時間領域への変更 …… 362
9.4.1 伝達関数の Cauer 型等価回路表示と有理関数表示…… 362
9.4.2 伝達関数の変形の数値解析結果 …… 365
9.4.3 部分分数展開の極と留数…… 367
9.5 修正インピーダンス境界条件による時間領域の伝達関数 …… 368
9.5.1 インピーダンス境界条件の修正 …… 368
9.5.2 修正されたインピーダンス境界条件の部分分数展開 …… 369
9.5.3 時間領域インピーダンス境界条件 …… 370

9.5.4　時間領域における伝達関数……376
9.5.5　周波数が十分高い場合の伝達関数の近似……379
9.5.6　時間領域インピーダンス境界条件の妥当性……380
9.6　第 9 章の総括……382
第 9 章 参考文献……382

第 10 章　結論と今後の研究課題　383

謝辞・編集後記　397

研究業績　399

Appendix A　Clausius-Mossotti の式と Maxwell-Garnett の式によるマクロ誘電率

Appendix B　表皮・近接効果に関する補足

Appendix C　静磁界中の磁化ベクトルと反磁界係数の導出

Appendix D　Bessel 関数と Mathieu 関数の関係・球 Bessel 関数と回転波動関数の関係

Appendix E　直交曲線座標系と空間微分演算子

Appendix F　超幾何級数による伝達関数の統一的表現

図目次

第 1 章　序論 : 研究背景と目的
1.1 Cross-section of a vehicle equipped with contact power transfer systems …… 2
1.2 Cross-section of an IPMSM …… 2
1.3 Illustration of coil pairs connected to a voltage source and a switching device …… 4
1.4 Stranded wires and isolated wire in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ …… 5
1.5 Schematic illustrations of the skin and proximity effects in an isolated wire conductor 5
1.6 BH characteristic of 50A400 …… 6
1.7 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW) …… 7
1.8 Wire conductor with rectangular-cross section and IPM motor equipped with rectangular coils …… 8
1.9 Cross-section of a MSW with rectangular cross-section …… 8
1.10 Soft magnetic composite: SMC …… 9
1.11 Magnetic-conductive thin shield …… 10
1.12 Example of discretization of problem region using finite elements …… 10
1.13 Multi-scale problem of FEM …… 11
1.14 Homogenization of a bundle of wire conductors …… 13
1.15 Impedance boundary conditions (IBCs) on thin layers …… 14
1.16 Example of FE meshes using proposed approaches …… 16
1.17 Finite elements of a 81-turn MSC …… 17
1.18 Impedance of the MSC shown in Fig.1.17 …… 17
1.19 FE discretizations required in applying the proposed approach and the standard FEM 18
1.20 Time-response of the current flowing in the MSW calculated by the proposed approach and the standard FEM …… 18
1.21 Overview and illustration of this doctor thesis with a flow-chart and magnetic materials …… 19
1.22 Finite elements of an 81-turn coil connected with voltage source …… 21
1.23 Impedance of the coil shown in Fig.1.22 connected with the voltage source …… 22
1.24 Finite elements of a 25-turn multi-layered MSC …… 22
1.25 Magnetic resistances between two unit-cells …… 23
1.26 Effective permeabilities of SMC cores calculated by the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula …… 24
1.27 Multi-turn copper coil with elliptic cross-section placed above a conductive disk …… 25
1.28 Transient power in the multi-turn coil shown in Fig.1.27 …… 25
1.29 Cross-section of an inductor equipped with a MSC …… 26
1.30 Dependence of the copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of

the magnetic shield μ_{2r}^{shield} ····· 26
1.31 Eddy current displacement sensor model ····· 27
1.32 Impedance of the sensor-coil shown in Fig.1.31 connected with voltage source ····· 27

第 2 章 電磁界数値解析のための有限要素法
2.1 Example of analysis models in 2D space····· 38
2.2 Example of analysis models including a conductive material in 2D space ····· 39
2.3 Example of analysis models in the axisymmetric coordinates (r, θ, z) ····· 40
2.4 Example of analysis models in 3D space····· 43
2.5 Triangle element (0^{th} order Whitney element) ····· 47
2.6 Finite element (FE) space of 2D analysis ····· 47
2.7 1D Interpolation function for scalar functions in a triangular fine element····· 48
2.8 Cross-section of an IPM motor discretized by finite elements ····· 50
2.9 Compatibility condition required to edge elements in the first order Whitney element 51
2.10 Schematic illustrations of edge elements····· 54
2.11 Tetrahedral element with edge elements (the first order Whitney element) ····· 55
2.12 3D FE space discretized using tetra elements with the first order Whitey element····· 55
2.13 Hexahedron element with edge elements (the first order Whitney element) ····· 58
2.14 Magnetic flux lines of an example model ····· 65
2.15 Non-conforming boundary condition for motor analysis ····· 66
2.16 Periodic boundary condition of motor analysis····· 66
2.17 Triangle element in the local coordinates ····· 72
2.18 Coordinate transformation of the first order quadrature elements ····· 77
2.19 Hexahedron element (the first order Whitney element) in the local coordinates····· 83
2.20 Discretized bulk-coil with the first order Whitney elements.····· 94
2.21 Right hand vector $\boldsymbol{b}$ and a modified vector $\boldsymbol{b}'$ ····· 95
2.22 BH characterisitic of 50A400.····· 98
2.23 Armature coil connected to a power source····· 101

第 3 章 周波数領域における均質化有限要素法
3.1 Unit-cell approach for numerical evaluation of the macroscopic complex permeability (e.g. MSW)····· 105
3.2 Magnetic flux lines of the MSW in the unit-cell as shown in Fig.3.1 ····· 106
3.3 Magnetic particle in a unit-cell immersed in a uniform magnetic field.····· 107
3.4 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell as shown in Fig.3.3····· 108
3.5 Magnetic fields of two cases: (a) Lorentz field around a hole in an outer media and (b) Magnetization inside in a magnetic particle induced by an applied magnetic field.··· 110
3.6 Homogenization using the macroscopic permeability····· 111
3.7 Sufficiently long slab along to the z–axis immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 114
3.8 Cross-section of a straight round wire conductor immersed in a uniform, time-harmonic

magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ and the real and imaginary parts of magnetic flux ($f = 100$ kHz, $\mu_r = 10, \sigma = 5.76 \times 10^7$ S/m). ····· 115
3.9 Diamagnetic field and eddy current field due to the proximity effect ····· 117
3.10 Homogenization of a bundle of wire conductors with the macroscopic complex permeability····· 122
3.11 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 123
3.12 Diamagnetic field in a magnetically shielded wire (MSW) ····· 125
3.13 Homogenization of a bundle of MSWs with the macroscopic complex permeability 129
3.14 Cross-section of a multi-layered magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 136
3.15 Diamagnetic field in a multi-layered magnetically shielded wire (MSW) ····· 140
3.16 Homogenization of a bundle of multi-layered MSWs with the macroscopic complex permeability····· 145
3.17 Cross-section of an elliptic wire immersed in a time-harmonic uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ in the elliptical-cylindrical coordinate system (η, ψ, z)····· 154
3.18 Diamagnetic field and the magnetization stem from the proximity effect in the elliptic wire conductor····· 156
3.19 Homogenization of a bundle of elliptic conductors with the tensor macroscopic complex permeability····· 163
3.20 Demagnetizing factor along to the long axis N_x ····· 164
3.21 Magnetically shielded wire (MSW) with elliptic cross-section using a magnetic-conductive thin shield immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ··· 164
3.22 Diamagnetic field and magnetization stem from the proximity effect in a MSW with elliptic cross-section ····· 167
3.23 Homogenization of a bundle of MSWs with elliptic cross-section with the tensor macroscopic complex permeability····· 171
3.24 Soft magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 172
3.25 Diamagnetic field in a spherical SMC caused by the proximity effect ····· 175
3.26 Homogenization of a SMC core composed of assembled spherical magnetic particles with the macroscopic complex permeability ····· 179
3.27 Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 182
3.28 Diamagnetic field in an oblate SMC caused by the proximity effect ····· 187
3.29 Homogenization of a SMC core composed of assembled spheroidal magnetic particles with the tensor macroscopic complex permeability ····· 194
3.30 Local coordinates for a wire conductor $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\mathbf{e}_{n_1}, \mathbf{e}_{n_2}, \mathbf{e}_t)$ ····· 199
3.31 Unit-cell including a twisted bundle of wire conductors ····· 201
3.32 Unit vectors in woven wires ····· 203

第 4 章　複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素解析の妥当性

4.1 Infinity wide slab immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 208
4.2 Profile of the complex permeability of the slab ····· 208
4.3 Straight round conducting wire immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 209
4.4 Frequency characteristics of the macroscopic complex permeability of the coils with different volume fractions ····· 210
4.5 Soft magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 211
4.6 Profiles of the complex permeability of a spherical SMC ····· 211
4.7 MSW immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 212
4.8 Frequency characteristics of the macroscopic complex permeabilities of the MSCs with different permeability of the shield ····· 212
4.9 Frequency characteristics of the complex permeabilities of the MSW with the lower parameters ····· 214
4.10 Frequency characteristics of two types of the complex permeability of the MSW with the high parameters ····· 214
4.11 Frequency characteristics of the complex permeabilities of the MSW with the lower parameters in which the thickness of the slab is moderately large ····· 215
4.12 Profiles of $J_0(k_2 b)$ at high arguments $k_2 b$ ····· 215
4.13 Bundle of multi-layered MSWs ····· 216
4.14 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the magnetic-conductive shields are assumed to be normal insulators ····· 217
4.15 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the outer magnetic-conductive shield is assumed to be a normal insulator ····· 218
4.16 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the shield layers have the low parameters ····· 219
4.17 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the shield layers have the actual parameters ····· 220
4.18 Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 220
4.19 Comparison of the complex permeabilities of the spheroidal SMC ····· 222
4.20 Comparison of the complex permeabilities of the spheroidal SMC ····· 222
4.21 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the multi-turn coil ····· 224
4.22 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the multi-turn MSC with the low parameters ····· 225
4.23 Magnetic flux lines of the unit-cell including the MSW with the low parameters ····· 225
4.24 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the MSC with the actual parameters ····· 225
4.25 Magnetic flux lines of the unit-cell including the MSW with the actual parameters ·· 226

4.26 MSW with square cross-section ····· 226
4.27 Macroscopic permeability of cylindrical and square shaped MSWs with the actual parameters····· 227
4.28 MSW with square cross-section whose layer is assumed to be an insulator ····· 227
4.29 Macroscopic permeability of cylindrical and square shaped MSWs with the lower parameters····· 228
4.30 Bundle of wire conductors with elliptic cross-section immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 229
4.31 Frequency characteristic of $[\langle \dot{\mu}_r \rangle]$ evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 230
4.32 Bundle of wire conductors with elliptic cross-section immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 230
4.33 Frequency characteristics of $[\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle]$ of the MSC with elliptic cross-section evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 231
4.34 Frequency characteristics of $[\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle]$ of the MSC with elliptic cross-section evaluated by the proposed formula and that with rectangular cross-section computed by the unit-cell approach····· 232
4.35 Magnetic particle in a unit-cell immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ · 233
4.36 Unit-cell including a spherical SMC in $1/8$ region discretized by tetrahedral finite elements ····· 234
4.37 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 235
4.38 Unit-cell including a magnetic-conductive cubic particle ····· 235
4.39 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC approximated to a cubic model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 237
4.40 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell ····· 237
4.41 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC approximated cubic model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell when filling factor is sufficiently low ····· 238
4.42 Unit-cell including a spheroidal SMC in $1/8$ region discretized by tetrahedral finite elements ····· 239
4.43 Frequency characteristics of the complex permeability of a spheroidal SMC evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 239
4.44 Unit-cell including a magnetic-conductive rectangular solid whose long and short axes are 2α and 2β, respectively····· 240
4.45 Frequency characteristics of the complex permeability along to the x and y axes of the SMC approximated rectangular solid model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell ····· 241
4.46 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell $(\mu_r = 28.0)$ ····· 242
4.47 Finite elements of the 25-turn coil····· 243

4.48 Impedance of the coil shown in Fig.4.47 …… 244
4.49 Comparison of magnetic fluxes …… 244
4.50 Finite elements of the 81-turn MSC …… 245
4.51 Impedance of the MSC shown in Fig.4.50 …… 245
4.52 Comparison of magnetic fluxes …… 246
4.53 Finite elements of the 9-turn MSC …… 246
4.54 Impedance of the coil shown in Fig.4.53 with the low parameters …… 247
4.55 Impedances of the MSC and copper coil shown in Fig.4.53 …… 247
4.56 Finite elements of the 9-turn multi-layered MSC …… 248
4.57 Impedance of the coil shown in Fig.4.56 with the low parameters …… 249
4.58 FE meshes of an isolated multi-layered MSW …… 249
4.59 Magnetic fluxes around the multi-layered MSC …… 249
4.60 Impedance of the two types of coils shown in Fig.4.56 …… 250
4.61 Cross-sectional view of a test model …… 250
4.62 Bird's eye view of the test model …… 251
4.63 Frequency characteristics of the coil impedance of the multi-turn copper coil …… 252
4.64 Finite elements of an 81-turn coil connected with a voltage source …… 253
4.65 Impedances of the coil shown in Fig.4.64 connected with the voltage source …… 253
4.66 Finite elements of a 9-turn multi-layered MSC connected with a voltage source …… 254
4.67 Impedances of the MSC shown in Fig.4.66 connected with a voltage source …… 254
4.68 Finite elements of 16-turn elliptic and rectangular coils …… 255
4.69 Impedances of the MSC shown in Fig.4.68 connected with the voltage source …… 255
4.70 Finite elements of the 9-turn MSC with rectangular cross-section …… 256
4.71 Impedances of the MSC shown in Fig.4.70 connected with the voltage source …… 257
4.72 Cross-section of the pseudo motor armature winding wound surround one slot …… 257
4.73 Dependence of the AC resistance of the MSC with rectangular cross-section …… 257
4.74 3D half model of the MSC connected with a voltage source …… 259
4.75 Convergence history of the ICCG method …… 259
4.76 Convergence history of the ICCG method introduced the diagonal scaling …… 260
4.77 Impedances of the coil shown in Fig.4.74 connected with the voltage source …… 261
4.78 9 woven MSW connected with a voltage source (pseudo MS Litz coil) …… 262
4.79 Dependence of the impedances of Litz MSWs shown in Fig.4.78 on the operating frequency …… 263

第 5 章 磁性被覆コイルの構造最適化

5.1 Finite elements of a 81-turn MSC …… 266
5.2 Dependence of the impedance of the MSC on the relative permeability of the shield μ_{2r} …… 266
5.3 Dependence of the AC resistance of the MSC on the radii ratio a/b …… 267
5.4 Finite elements of a 25-turn MSC …… 268

5.5 Dependence of the AC resistance of the MSC on the radii ratio a/b and the conductivity of the shield ····· 268
5.6 Flow chart of genetic algorithm (GA) ····· 270
5.7 Illustration of X_g and globally descent direction in REX star algorithm ····· 270
5.8 25-turn multi-layered MSC ····· 272
5.9 Convergence history of the AC-resistance of the multi-layered MSC shown in Fig.5.8 (current input) ····· 272
5.10 Frequency characteristics of the AC resistance of the coils without the shielding layer and the optimized coil (current input) ····· 273
5.11 Convergence history of the AC-resistance of the multi-layered MSC shown in Fig.5.8 (voltage input) ····· 274
5.12 Frequency characteristics of the AC resistance of the coils without a shielding layer and the optimized coil (voltage input) ····· 274
5.13 25-turn MSC including an insulator film ····· 275
5.14 25-turn multi-layer-type MSC including an insulator film ····· 276

第 6 章 SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率
6.1 SMC in a unit-cell ····· 282
6.2 Magnetic resistance and the lengths of a unit-cell ····· 282
6.3 Magnetic resistances and magnetic scalar potentials of a SMC core (xy-plane) ····· 283
6.4 Magnetic resistances between two unit-cells ····· 284
6.5 Effective permeabilities calculated by the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula ····· 285
6.6 Macroscopic complex permeabilities calculated by the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula ····· 286
6.7 Macroscopic effective permeabilities is plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part) ····· 287
6.8 Spheroidal SMC in a unit-cell ····· 288
6.9 Comparison of the macroscopic complex permeabilities $\langle \dot{\mu}_r^{\alpha} \rangle$ and $\langle \dot{\mu}_r^{\beta} \rangle$ ····· 288
6.10 Macroscopic effective permeabilities of spheroidal SMC cores approximated to cuboid shape are plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part) ····· 289
6.11 Macroscopic permeability calculated by the magnetic circuit method ····· 289

第 7 章 均質化有限要素法の時間領域解析への拡張
7.1 Illustration of the RC (Recursive convolution) scheme ····· 297
7.2 Cauer-type equivalent circuit ····· 299
7.3 Cross-section of a straight round conducting wire immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$ ····· 301
7.4 Homogenized multi-turn coil using the macroscopic effective magnetic reluctance ····· 302
7.5 Macroscopic magnetic reluctivities calculated by (7.25) and (7.28) ····· 303

7.6 Frequency characteristics of the impedance due to the skin effect calculated by (7.30) and (7.31). ····· 304
7.7 Multi-turn copper wire placed above a disk conductor ····· 305
7.8 Dependence of the total current flowing in the wire conductor on time ····· 305
7.9 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$ ····· 306
7.10 Homogenized multi-turn magnetically shielded coil (MSC) using the macroscopic effective magnetic reluctance ····· 307
7.11 Macroscopic magnetic reluctivities of MSC calculated by (7.34) and (7.37), continued fraction expansion and the unit-cell approach ····· 308
7.12 Frequency characteristics of the circuit impedance calculated by (7.39), (7.40) and (7.43) ····· 311
7.13 9-turn MSC and two types of finite element meshes ····· 311
7.14 Dependence of the total current in the MSW on time ····· 312
7.15 Cross-section of an elliptic wire immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$ in elliptical-cylindrical coordinate system (η, ψ, z) ····· 312
7.16 Complex permeabilities of elliptic wire calculated by (7.46) and (7.47) in the tensor form ····· 316
7.17 Macroscopic magnetic reluctivities calculated by (7.49) and (7.50) in the tensor form ····· 316
7.18 Multi-turn copper coil with elliptic cross-section placed above a conductive disk · 319
7.19 Finite elements in the coil region ····· 319
7.20 Transient power of the multi-turn coils as shown in Fig.7.18 ····· 319
7.21 Magnetically shielded wire (MSW) with elliptic cross section immersed in uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$ ····· 320
7.22 9-turn MSW with rectangular cross-section ····· 322
7.23 Macroscopic magnetic reluctivities of the MSW with rectangular cross-section calculated by the partial fraction expansion form and the close form defined in the tensor form ····· 323
7.24 Frequency characteristics of the circuit impedance calculated by (7.67) and (7.69) ····· 325
7.25 Transient current flowing in the MSW with rectangular cross-section shown in Fig.7.22 ····· 326

第 8 章　磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減
8.1 Multi-turn MS coil placed above a discoid conductor ····· 330
8.2 Instantaneous electric power of the MSC shown in Fig.8.1 with respect to time ··· 330
8.3 Time response of the magnetic induction in the magnetic core ····· 330
8.4 Spectrum of the magnetic induction shown in Fig.8.1 ····· 331
8.5 Example of a pulse width modulation (PWM) ····· 333

8.6 Current waveformes obtained by the proposed method and the native application of FEM ····· 334
8.7 Instantaneous copper loss of the MSC ····· 335
8.8 100-turned MSC to the terminals of which a PWM voltage is applied ····· 336
8.9 Dependence of the copper loss in the MSC on the permeability of the shield ····· 336
8.10 Cross-section of an inductor equipped with a cylindrical MSC ····· 337
8.11 Dependence of the copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of the magnetic shield μ_{2r}^{shield} ····· 337
8.12 Magnetic flux lines at 1msec ····· 337
8.13 Cross-section of the IPM motor which is equipped with the MSC in stator slots ····· 339
8.14 Numerical results: distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ $\left(\mu_{2r}^{shield} = 50, t = 20.1\ \mu\text{sec}\right)$ and dependence of the copper loss due to the proximity effect W_{prox} on the permeability of the shielding layer μ_{2r}^{Shield} of the MSC ····· 339
8.15 9-turn MSC with rectangular cross-section above a discoid conductor ····· 340
8.16 Instantaneous current flowing in the MSW with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15 ····· 341
8.17 Instantaneous copper loss of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15 ····· 341
8.18 Cross-section of an inductor equipped with a rectangular MSC ····· 342
8.19 Dependence of effective value of copper loss on the permeability of the shield ··· 343
8.20 Magnetic flux lines at 1msec ····· 343

第 9 章 インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング
9.1 Illustration of impedance boundary conditions (IBCs) ····· 345
9.2 Cross section of a thin and infinity wide magnetic conductive slab with thickness d, permeability μ and conductivity σ, immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ ····· 347
9.3 MSW imposed IBCs on the shield in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ · 356
9.4 Magnetic flux line around a cylindrical MSW ····· 356
9.5 Eddy current displacement sensor model ····· 357
9.6 Impedances of the sensor-coil shown in Fig.9.5 connected with voltage source ····· 357
9.7 Magnetic flux lines at 200 kHz ····· 357
9.8 Experiment model for the homogenization scheme and impedance boundary conditions (IBCs) ····· 358
9.9 Frequency characteristic of the coil impedance of the experiment model as shown in Fig.9.8 ····· 358
9.10 Multi-layered magnetic-conductive slab ····· 359
9.11 Impedance of the sensor-coil shown in Fig.9.5 ····· 360
9.12 Magnetic flux lines at 200 kHz ····· 360
9.13 Multi-layered magnetic-conductive slab made of Fe and Cu ····· 361

9.14 Frequency characteristic of the coil impedance calculated by the proposed approach 361
9.15 Cauer-type equivalent circuit for a passive element ……363
9.16 Frequency characteristics of the boundary impedances expressed by the continued fraction expansion and the closed form……365
9.17 Frequency characteristics of the coefficients expressed by the continued fraction expansion and the closed form……366
9.18 Frequency characteristics of the coefficients expressed by (9.59) and (9.60)……366
9.19 Frequency characteristics of the modified boundary impedances expressed by the continued fraction expansion and the closed form ……370
9.20 Multi-turn MS coil placed above a discoid conductor plate ……380
9.21 FE discretizations required in applying the proposed approach and the standard FEM ……381
9.22 Time-response of the current flowing in the MSW calculated by the proposed approach and the standard FEM……381

第 10 章 結論と今後の研究課題

10.1 3D half model of a MSC connected with a voltage source (Fig. 4.74)……388
10.2 Impedance of the coil shown in Fig.4.74 connected with the voltage source (Fig.4.77) ……388
10.3 25-turn multi-layer-type MSC including an insulator film (Fig.5.14)……389
10.4 Spheroidal SMC in a unit-cell. (Fig.6.8) ……390
10.5 Macroscopic effective permeabilities of spheroidal SMC cores approximated as cuboid are plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part) (Fig.6.10) ……390
10.6 9-turn MSC and two types of finite element meshes (Fig.7.13)……391
10.7 Dependence of total current in the MSW on time (Fig.7.14)……391
10.8 9-turn MSC with rectangular cross-section above a discoid conductor (Fig.8.15) ….392
10.9 Example of pulse width modulation (PWM) (Fig.8.5) ……392
10.10 Instantaneous copper losses of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15 (Fig.8.17)……393
10.11 Cross-section of an inductor using a cylindrical MSC (Fig.8.10)……393
10.12 Dependence of copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of the magnetic shield μ_{2r}^{shield} (Fig.8.11)……394
10.13 Experiment model for the homogenization scheme and impedance boundary conditions (IBCs) (Fig.9.8)……395
10.14 Frequency characteristic of the coil impedance of experiment model shown in Fig.9.8 (Fig.9.9)……395

表目次

第 1 章　序論：研究背景と目的
1.1 Table 1.1 (Table 5.5) Optimization results (100 kHz・1 Volt input)…… 22
1.2 Comparison of the AC resistance [Ω] at 100 kHz (1 Volt input)…… 23

第 2 章　電磁界数値解析のための有限要素法
2.1 Nomenclature of this chapter…… 31
2.2 Classification of finite element analyses employed in this doctor thesis …… 32
2.3 Relationship between w_k and ξ_{kl} in a triangular element …… 71
2.4 Local edge number and values of a hexahedral element in the local coordinates …… 85
2.5 List of the number of integral points, weighting functions, and integral points: Gauss integration for one-dimensional problem to numerically evaluate an integral in the local coordinates…… 93

第 3 章　周波数領域における均質化有限要素法
3.1 Nomenclature of this section: Unit-cell approach …… 104
3.2 Specification of the MSW depicted in Fig.3.1 …… 105
3.3 Setting of the magnetic vector potentials for the unit-cell approach in 3D space …… 107
3.4 Nomenclature of this section: Ollendorff formula for a magnetic particle in a magnetostatic field…… 109
3.5 Diamagnetic properties of a magnetic material with a diamagnetic constant…… 109
3.6 Nomenclature of the magnetic-conductive slab as shown in Fig.3.7 ……113
3.7 Nomenclature of the straight round conducting wire as shown in Fig.3.8 ……115
3.8 Nomenclature of the MSW as shown in Fig.3.10 …… 122
3.9 Nomenclature of the multi-layered MSW as shown in Fig.3.14…… 135
3.10 Nomenclature of the wire conductor with elliptic cross-section as shown in Fig.3.17 153
3.11 Nomenclature of the spherical soft magnetic composite (SMC) as shown in Fig.3.23…… 171
3.12 Nomenclature of the spheroidal soft magnetic composite (SMC) as shown in Fig.3.25…… 181
3.13 Complex permeability for each shape defined in the closed form…… 195

第 4 章　複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素解析の妥当性
4.1 Specification of the magnetic-conductive slab shown in Fig. 4.1 …… 208
4.2 Specification of the isolated wire conductor as shown in Fig. 4.3…… 209
4.3 Specification of the isolated SMC as shown in Fig. 4.5 ……211
4.4 Specification of the MSC with the insulator film as shown in Fig. 4.7…… 212
4.5 Specification of the isolated MSW composed of the wire conductor and magnetic-conductive layer with the low parameters as shown in Fig. 4.7 …… 214

4.6 Specification of the MSW shown with the actual parameters as shown in Fig.4.7 ···· 214
4.7 Specification of the MSW with a relatively thick shield layer ····· 215
4.8 Specification of the MSC as shown in Fig. 4.12 with the low parameters ····· 218
4.9 Specification of the MSC as shown in Fig. 4.12 ····· 218
4.10 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig. 4.12 with the low parameters ····· 219
4.11 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig. 4.12 with the actual parameters ····· 219
4.12 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig. 4.17 ····· 221
4.13 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig. 4.17 ····· 222
4.14 Specification of the multi-turn coil as shown in Fig. 4.3 ····· 223
4.15 Specification of the multi-turn MSC as shown in Fig. 4.7 with the low parameters ·· 224
4.16 Specification of the multi-turn MSC as shown in Fig. 4.7 with the actual parameters 225
4.17 Specification of the MSW as shown in Fig. 4.26 ····· 226
4.18 Specification of the MSW as shown in Fig. 4.28 with the lower parameters ····· 227
4.19 Specification of the multi-turn coil with elliptic cross-section as shown in Fig.4.30 ·· 229
4.20 Specification of the multi-turn coil with elliptic cross-section as shown in Fig.4.32 ·· 231
4.21 Boundary conditions of a unit-cell for the unit-cell approach in 3D space ····· 233
4.22 Specification of the spherical SMC as shown in Fig.4.36 ····· 234
4.23 Specification of the cubic SMC as shown in Fig.4.38 ····· 236
4.24 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig.4.42 ····· 239
4.25 Specification of the cuboid SMC as shown in Fig.4.44 ····· 241
4.26 Specification of the MSC with the insulator film as shown in Fig.4.50 ····· 245
4.27 Specification of the MSC as shown in Fig. 4.53 with the low parameters ····· 247
4.28 Specification of the MSC as shown in Fig.4.54 with the actual parameters ····· 247
4.29 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig.4.56 with the low parameters ····· 248
4.30 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig.4.56 with the actual parameters ····· 249
4.31 Specification of the test model in 3D space as shown in Fig.4.62 ····· 251
4.32 Specification of the coil as shown in Fig.4.64 ····· 253
4.33 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig. 4.66 with the low parameters ····· 254
4.34 Specification of the wire with elliptic cross section as shown in Fig. 4.68 ····· 255
4.35 Specification of the multi-turn coil with rectangular cross-section as shown in Fig.4.70 ····· 256
4.36 Specification of the wire with elliptic cross section as shown in Fig.4.72 ····· 258
4.37 Specification of the MSC as shown in Fig.4.74 with the low parameters ····· 259
4.38 Specification of the woven MSC as shown in Fig.4.78 with the actual parameters ··· 262

第 5 章　磁性被覆コイルの構造最適化
5.1 Specification of the MSC as shown in Fig. 5.1 …… 266
5.2 Specification of the MSC as shown in Fig. 5.4 …… 268
5.3 Optimization results (100 kHz・1 mA input)…… 272
5.4 Comparison of the AC resistance [Ω] at 100 kHz (1 mA input) …… 273
5.5 Optimization results (100 kHz・1 Volt input) …… 274
5.6 Comparison of the AC resistance of the MSC as shown in Fig.5.8 at 100 kHz (1 Volt input)…… 275
5.7 Optimization results (100 kHz・1 Volt input) …… 276
5.8 Comparison of the AC resistance of the MSC as shown in Fig.5.13 at 100 kHz (1 Volt input)…… 276
5.9 Optimization results (100 kHz・1 Volt input) …… 277
5.10 Comparison of the AC resistance of the multi-layered MSC as shown in Fig.5.14 at 100 kHz (1 Volt input)…… 277

第 6 章　SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率
6.1 Nomenclature of this chapter: magnetic circuit approach …… 280
6.2 Specification of assembled spherical SMC particles…… 285
6.3 Specification of assembled spherical SMC particles…… 285
6.4 Specification of assembled spherical SMC particles…… 286
6.5 Specification of an isolated spheroidal SMC…… 288

第 7 章　均質化有限要素法の時間領域解析への拡張
7.1 Nomenclature of this section: Macroscopic magnetic reluctance for time-domain analysis …… 292
7.2 Specification of the multi-turn coil as shown in Fig.7.4 …… 303
7.3 Specification of the MSC as shown in Fig.7.10 …… 308
7.4 Elements of the Cauer-type equivalent circuit of the MSC……311
7.5 Specification of the test model as shown in Fig.7.15 …… 316
7.6 Specification of the MSC shown as in Fig.7.22 …… 322
7.7 Elements of the Cauer-type equivalent circuit of the MSC…… 325

第 8 章　磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減
8.1 Specification of the test model as shown in Fig. 8.1 …… 329
8.2 Specification of the MSC as shown in Fig. 8.2 …… 334
8.3 Specification of the MSC using for armature windings of the IPM motor as shown in Fig. 8.13 …… 337
8.4 Specification of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15…… 338
8.5 Specification of the MSC with rectangular cross-section using for the inductor as shown in Fig.8.18…… 340

第 9 章　インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング
9.1 Nomenclature of this chapter: impedance boundary conditions for a magnetic-conductive

thin slab as shown in Fig.9.1 …… 346
9.2 Specification of the multi-layered magnetic-conductive slab with the low parameters as shown in Fig.9.5 …… 360
9.3 Specification of the multi-layered magnetic-conductive slab with the actual parameters as shown in Fig.9.5 …… 361
9.4 Poles and residues of (9.61) …… 367
9.5 Specification of the magnetic-conductive slab …… 369
9.6 Poles and residues of the modified impedances with the parameters as shown in Table 9.5 …… 369
9.7 Specification of the MSC as shown in Fig. 9.20 …… 380

第 10 章　結論と今後の研究課題

10.1 Complex permeability permeability for each shape defined in the closed form (Table 3.13) …… 385
10.2 Optimization results (100 kHz・1 Volt input) (Table 5.9) …… 389
10.3 Comparison of the AC resistance of the multi-layered MSC as shown in Fig.5.14 at 100 kHz (1 Volt input) (Table 5.10) …… 389

第 1 章 序論：研究背景と目的

本章では，本研究の研究背景と本論文の目的・構成・全体像を示す．1.1 節では，本研究の社会的意義である環境負荷低減について述べ，1.2 節では，近年の電気機器の設計において高周波化が進められている理由を述べる．つぎに 1.3 節で，電気機器における銅損と鉄損が発生する原因について述べる．1.4 節では，細線，平角線，磁性被覆線を用いたマルチターンコイル，圧粉磁芯を用いた磁性体コアの導入による渦電流損失が抑制できることを述べる．1.5 節では，電磁界有限要素解析の問題点の 1 種―マルチスケール問題―について示し，本論文の主題である均質化有限要素法，インピーダンス境界条件の概念について図解し，これらを渦電流場の有限要素解析に導入することが効率的であることを述べる．1.6 節では，1.5 節で述べた新しい電磁界解析手法により得られた成果の要点を列挙する．最後に 1.7 節にて，図解により本論文の構成，並びに各章で取り扱う項目について，解析対象とともに示す．さらに要点の理解を容易にするために，各章で得られた数値解析結果のうち，代表的なデータを先に掲載する．

1. 1 研究背景：高周波帯で駆動する電気機器の高効率化

現在，わが国における消費エネルギーのうち，約 50 %以上が電気エネルギーを占めており，電気エネルギー消費の割合に関して，約 57 %がモータにより消費されているという報告(新機能素子研究協会)がある．また，インダクタをはじめとする電気電子素子も電気機器には数多く使用されており，加えて変圧器などの電力変換器も広く用いられているため，これらのエネルギー消費の抑制と効率改善は大きな課題である[1.1, 2]．近年，電気・磁気部品の小型化，低損失化，効率改善等の要請から高周波化が進んでおり，これらの損失低減や利用効率の改善は温暖化ガスの排出量の削減，及び環境負荷低減に直結する. したがって, 各種要請に合わせた電気機器の構造最適化は重要な課題である．

例えば自動車の設計に関しては，2030 年には，わが国の自動車のうち 20〜30 %が電気自動車になると予想されているため，その高効率化は必須である．現在，高効率かつエネルギー損失が抑制できる電気自動車への給電方式としてワイヤレス電力伝送が有望視されている[1.3, 4]. ワイヤレス電力伝送を用いた電気自動車への給電の例を Fig. 1.1 に示す．ワイヤレス電力伝送の受電効率の改善には，機器そのもののエネルギー損失を最小化しながら効率を最大化するという装置全体の構造最適化が重要な課題である．

さらに, このような電気自動車の設計の際には充電装置そのものの効率改善のみならず，モータの高効率化も必須である．周知の通り，モータには様々な形状があり，用途も多種多様である．文献[1.5]においては，寿命，保守性，体格・容量の観点から性能を評価すると，永久磁石同期モータ(PMSM: Permanent Magnet Synchronous Motor)が優れていると報告されている．PMSM は，永久磁石を界磁磁束の発生源とするモータであり，誘導モータとは異なり，すべり(同期速度と回転子速度との相対速度差)によって生じる二次銅損，励磁に伴う損失がないため，損失が小さく高効率なモータとして注目されている[1.5, 1.6].

PMSM には，回転子の磁石の位置により，表面磁石式(SPMSM: Surface Permanent Magnet Synchronous Motor) と 埋 め 込 み 磁 石 式 (IPMSM: Interior Permanent Magnet Synchronous Motor)の 2 種類がある．PMSM は，自動車駆動用モータ，エアコンコンプレッサ駆動用モータに適しており，特に，IPMSM の特性がよく，高効率であることが知られている．IPMSM の断面図の例を Fig.1.2 に示す．IPMSM にはスロットに三相交流電源に接続された界磁巻線が巻いてあり，回転子に永久磁石が埋め込まれている．界磁巻線の磁界が回転磁界を発生させ，内部磁石がこの回転磁界と同期して回転する．現在，CAD(Computer Aided Design)ソフトウェアを用いた電磁界解析と最適化アルゴリズムにより，IPMSM の回転子等のトポロジー最適化が盛んに行われている[1.7-9].

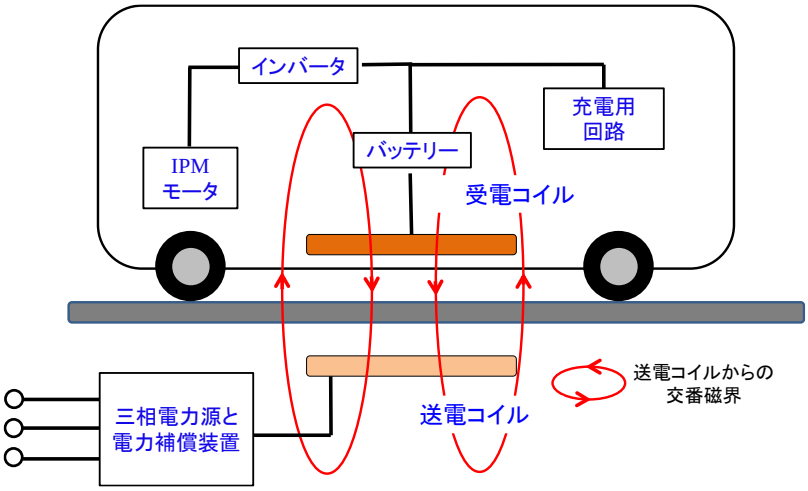


Fig.1.1 Cross-section of a vehicle equipped with contact power transfer systems.

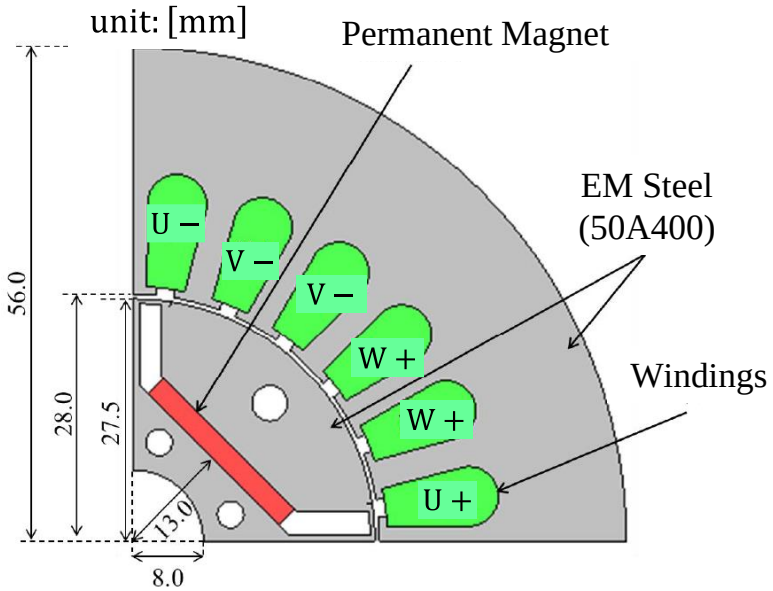


Fig.1.2 Cross-section of an IPMSM.
Input currents flowing in the coil windings from the supplier are the three-phase sinusoidal currents. These currents generate the revolving magnetic field which leads to the torque of the rotor with permanent magnets. Topology optimization of the stator and rotor has been attracted for the sake of reducing the copper and iron losses and increasing the average torque, and so on.

1. 2 電気素子・機器の小型化に要請される事項：高周波化

電気素子・機器を電源に接続することにより，励磁源から供給される交流によって，電気素子・機器内部ではエネルギー損失が発生する．本節では導入として，電気素子・機器の小型化に伴い高周波化が必要な理由についてスイッチングデバイスと電気素子そのものが発生する磁束の特性から考察する．電気素子・機器の交流抵抗が $R_{ac}(t)$ [Ω] の場合の抵抗の電圧が $v(t)$ [V]，負荷を流れている電流の瞬時値が $i(t)$ [A] の場合の 1 周期 $T = 1/f\ [s]$ 当たりの損失の実効値 p [W] は

$$p = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T R_{ac}(t)i(t)^2\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

より計算できる．電気素子・機器の設計の上では損失 p を小さくすることが望まれる．現在用いられているトランジスタ等を用いた半導体スイッチングデバイスを用いた電力変換装置においては，スイッチが ON 状態と OFF 状態の時間があり，このスイッチング動作に伴いスイッチング損失が発生する．このスイッチング動作に伴う時間を ΔT [sec] とし，入力電圧が E [V] のパルス波形で，負荷に流れる電流の実効値が I [A] であることを仮定すると，スイッチングデバイス内部の損失は(1.1)より

$$p = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{EI}{3}\frac{\Delta T}{T} \tag{1.2}$$

と見積もることができることが知られている．この計算の詳細については，例えば文献[1.10，chapter 4-6]等を参考とする．(1.2)から $\Delta T/T = \Delta T/f\ [s]$を小さくするとスイッチングデバイス内部の損失は抑制できるとわかる．したがって，ΔT が一定の場合，f を大きくすることが必要になる．なお，スイッチングデバイスの高周波化は SiC デバイスや GaN デバイスの普及により可能となっている．

つぎに界磁巻線の磁束に関する観点から考察する．いま Fig.1.3 のような非接触給電コイル対を考える．これは，磁性体コア等を除いた非接触給電装置の一部である．Fig.1.1 の非接触給電装置を用いた電気自動車の例のように送電回路が三相交流電源に接続されていると仮定し，界磁巻線が発生する磁束密度の瞬時値が

$$b(t) = B\sin\omega t \tag{1.3}$$

であると仮定すると Faraday の電磁誘導の法則から受電コイルの誘導起電力 $v_i(t)$ は

$$v_i(t) = -NS\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -NS\omega B\cos\omega t \tag{1.4}$$

を得る．ここで N [−] はコイル巻数，S [m^2] はコイルの面積で，鎖交磁束は $\Phi = BS$ [Wb] である．いま外部印加電圧が一定とすると非接触給電コイルの小型化，すなわち S を小さくするためには(1.4)より B を大きくするとよいとわかるが，この際には電流の実効値を大きくしなければならず，(1.1)から界磁巻線の発熱が大きくなり，焼損の危険性があるという問題が発生する[1.11]．したがって，N を一定とすると，(1.4)から $\omega = 2\pi f\ [\mathrm{rad}/s]$ を高くする必要があるとわかる．ただし，実際の非接触給電装置では共振状態に近づけて駆動させるために，2 つのコイルの自己・相互インダクタンス，回路に付け加えた共振用のコンデンサーを考慮した周波数が設定される[1.12].

これらのことより，機器の小型化・高効率化のためには，f を大きくすることが求められている．同じ特性でも，例えばインダクタ等の素子や機器のインピーダンス特性が $Z = R + \mathrm{j}\omega L$ [Ω] の場合では，小型化に伴いインダクタンス L [H] が低下するが，f を大きくすることでインピーダンス特性を一定に保てる．しかし，高周波化に伴い，界磁巻線中の銅損 W_c と磁性体コア中の鉄損 W_h が顕著となってしまう．一般的には，銅損と鉄損は次式で見積もられる[e.g. 1.5, 6, 10].

$$W_c = k_c (f B_m)^2 \tag{1.5a}$$

$$W_h = k_h f (B_m)^2 \tag{1.5b}$$

ここで，k_c, k_h は物質毎に決まる定数であり，B_m は磁束密度の振幅である．(1.5)は大まかな損失の評価であるため，部品毎の損失特性の詳細ついては反映できない．そこで次節では，界磁巻線の銅損，および磁性体コアの磁気非線形特性に関して述べる．

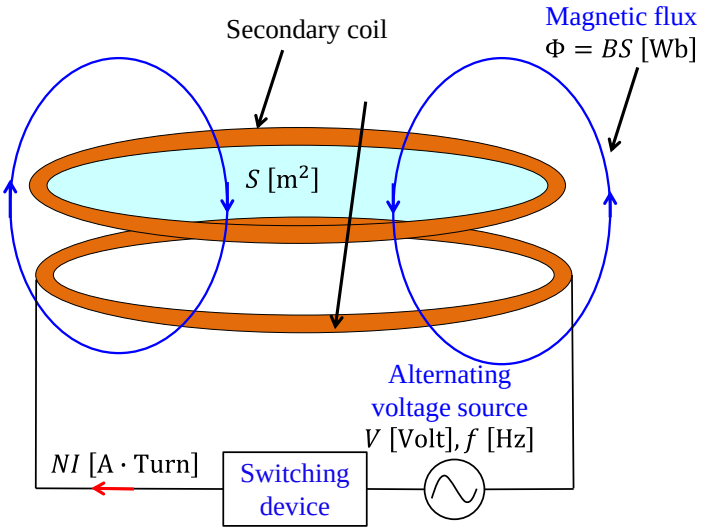


Fig.1.3 Illustration of coil pairs connected to a voltage source and a switching device.
Fast switching can be performed by developing of power devices equipped with wideband semiconductors such as GaN or SiC devices. However, as discussed in the next section 1.3, the copper and iron losses cannot be neglected at high frequency band, say, about 10 kHz ~ 10 MHz band.

1. 3 界磁巻線中の銅損と磁性体コアの磁気非線形特性

1 . 3. 1　界磁巻線中の銅損：細線中の表皮効果・近接効果

1.2 節で述べたように, 近年, 高速スイッチング素子の開発や機器の小型化のために, 高周波化が進んでいる．しかし，駆動周波数が高くなるに従い，励磁源となるコイル素線中には Fig.1.4 に示すように表皮・近接効果による渦電流が発生し，素線内部の電流分布が変化するとともに，銅損が増加する．表皮効果とは，Fig.1.5 (left)に示すように，入力電流が発生する磁界により素線内に渦電流が生じ，その結果電流が素線表面近傍の表皮厚と呼ばれる領域に局在して流れる現象である．表皮厚は周波数が高くなるに従い薄くなるため，高周波化に伴い実効的な抵抗が高くなることになる．したがって，高周波帯で駆動する電気機器においては，このような表皮効果に起因する渦電流損失を抑制する目的で，Fig.1.4 のようにコイル素線を細線化して多重巻きにすることが多い．

しかしながらコイルを多重巻きにすることで，近接効果に起因する渦電流損失が発生してしまう．近接効果とは Fig.1.5 (right)のように，近接したコイル素線が発生する磁束の時間変化による電磁誘導によって，素線中に渦電流が生じる現象である．1.1, 2 節で述べたように，磁気部品の小型，及びワイヤレス電力装置の起電力を上げるには駆動周波数を上げる必要があるが，同時に表皮・近接効果によるコイル素線の渦電流損失が顕著となってしまう．

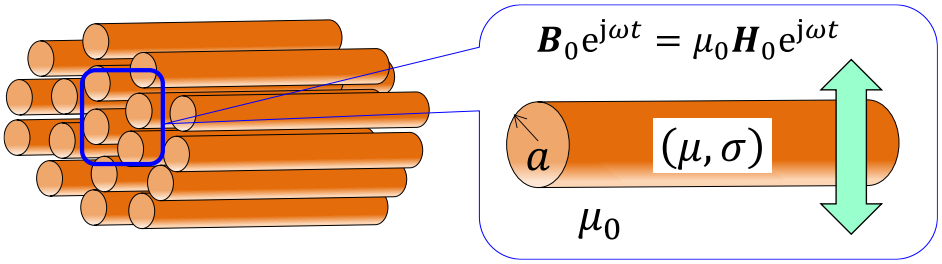


Fig.1.4 Stranded wires and isolated wire in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this model, each wire is assumed in a uniform magnetic field generated by ambient sources.

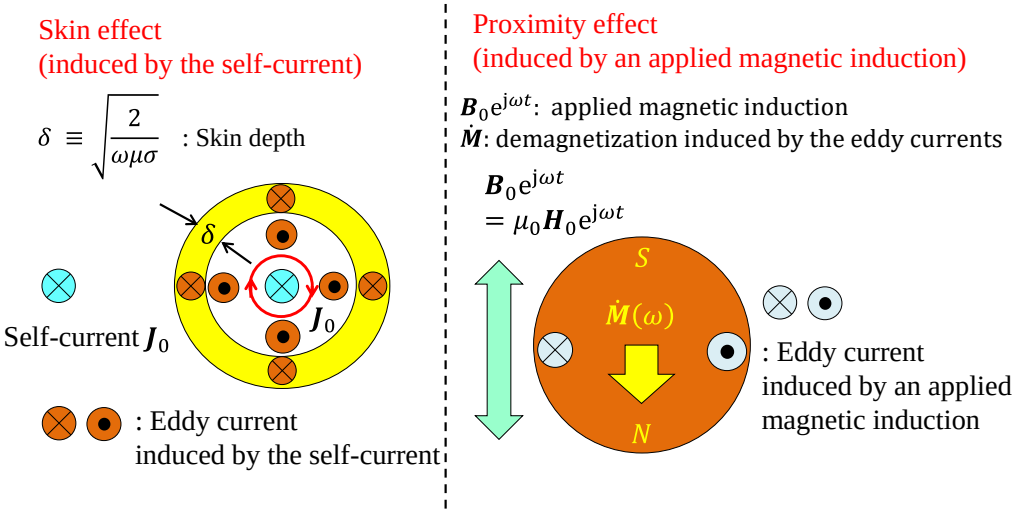


Fig.1.5 Schematic illustrations of the skin and proximity effects in an isolated wire conductor.
As depicted in the left side, the skin effect is the phenomenon that alternating magnetic flux denoted by the red line generated by the input current induces the eddy currents. As a result, the total current flows only in the vicinity of the wire conductor surface which is called the skin depth δ as depicted in the yellow region. On the other hand, as depicted in the right side, the proximity effect is the phenomenon that an applied magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ generated by ambient currents induces the anti-parallel eddy currents. These eddy currents are also a source of the magnetization $\dot{\boldsymbol{M}}$ of the wire conductor. The eddy current field and the diamagnetic field induce the self-consistent field. As a result, asymmetric current distribution appears in the wire conductor.

1. 3. 2　磁性体コア中の磁気非線形特性

高速スイッチング素子の開発や機器の小型化はコイル巻線の銅損のみならず，鉄芯の鉄損の増加をもたらす．鉄損は外部磁界による磁気ヒステリシス損，並びに渦電流損からなる[e.g. 1.5, 6]．また，小型の機器を開発するために，界磁巻線が発生する磁界の強度が高くなる傾向にあり，磁性体コア内部の磁気飽和に伴う磁気非線形性が無視できない場合がある．このような磁気非線形特性は，例えば Fig.1.6 に示すような，BH曲線を持

って表される．したがって，磁界強度が十分に大きい場合には，磁気飽和による漏れ磁束が増加するため，銅損と鉄損の低減に加えて，外部漏洩磁界を抑制し，高周波の交流で電磁機器の設計を行う必要がある．

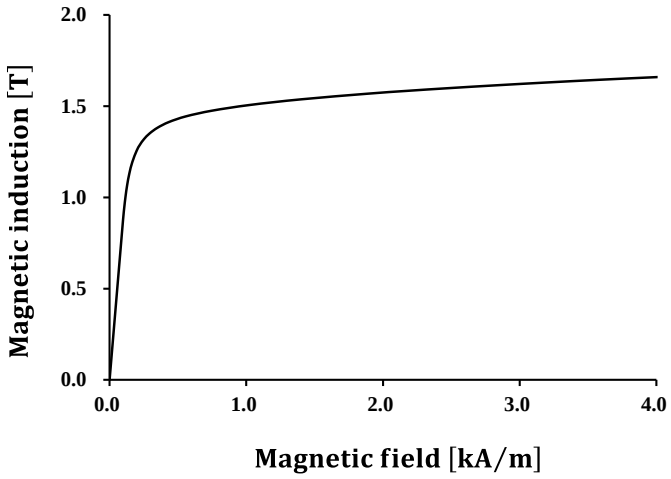


Fig.1.6 BH characteristic of 50A400 (Fig.2.22).
Abscissa and ordinate denote the amplitudes of an applied magnetic field and the response magnetic induction along to one direction, respectively. When we consider magnetic saturation of a magnetic material, we have to solve the nonlinear equations（2.236 − 238）as derived later by the Newton-Raphson method.

1. 4 研究背景：高周波帯で駆動する電気機器の高効率化

1. 4. 1　磁性被覆線の導入

磁界結合式によるワイヤレス電力伝送で用いられる周波数帯域は，主に数 10～数 100 kHz である．この周波数大域では，1.3 節で述べたように，表皮効果と近接効果に伴う銅損が顕著となる．表皮効果を抑制するためには，Fig.1.4 のようにコイルの細線化を行えばよいが，素線半径が小さくなるに従い，直流抵抗が増大する．

一方で，この周波数帯域ではコイル断面に鎖交する磁束による電磁誘導に起因する近接効果が表れる．近接効果を抑制するために，現在コイル素線を磁性体で被覆した磁性被覆巻線 (Magnetically shielded coils : MSC)を用いることが検討されている[1.13, 14]．磁性被覆線(Magnetically shielded wires : MSW)は，Fig.1.7 に示すように，通常の導線とは異なり，導線を薄い強磁性体で被覆した細線である．この構造から，磁気遮蔽効果によって，導線の近接効果に伴う渦電流損失を抑制できる．

また，コイル全体での透磁率が高くなるため，コイルの Q 値が向上し，漏れ磁束を抑制でき，インダクタンスが改善される見込みがある．したがって，渦電流変位センサーや近接センサー，および磁歪式トルクセンサーの高感度化が期待できる[1.15, 16]．これらの機器は，磁性被覆線を導入すると，インダクタンスの向上により，外部磁界の変化量に対する感度向上に直結できる．

特に Fig.1.8 に示すような渦電流形変位センサー(EC センサー)は，コイルの実効インピーダンスの変化により，非接触・非破壊でターゲットとなる数 μm 程度の金属の傷・破損検出を行うことができる点で注目されている．特徴としては，ターゲットとの間に油，埃，非金属のコンタミや障害物等が介在していても問題なく傷・破損の検出が可能

であることが挙げられる．このような利点は，光学式センサーや画像識別法にはない点で EC センサーの有効性・汎用性は高いと言える．主な検査対象となる金属ターゲットとしては，鉄道レール，タービン，回転機，半導体ウエハ等が挙げられる．

一方で，このような利点は，非接触給電装置の受電特性向上や高周波で駆動するインダクターの銅損抑制等その波及効果は大きい．例えば文献[1.17]においては，生体内の非接触給電カプセルへの磁性被覆コイルの適用において，3 つのコイルを 3 軸構造をとるように巻くことで，磁界の印加方向によらず十分に受電特性が図られるように設計されている．また，文献[1.18]においては，磁性被覆線を撚り合わせて作られる磁性 Litz 線を用いた非接触給電システムの受電効率が通常の銅巻線を用いる場合と比較して，83.3 %から 87.7 %にまで改善したと報告されている．

現在製造されている磁性被覆線の磁性被覆層の厚さは一般的には数十 μm である．近接効果を十分に抑制しながら機器の小型化を行うためには，磁性被覆層の厚みを透磁率と合わせて適切に調整する必要があるが, その際には直流抵抗の変化をももたらすため, 最適な厚さや着磁により最適な透磁率を与えること等を行うことが求められる．

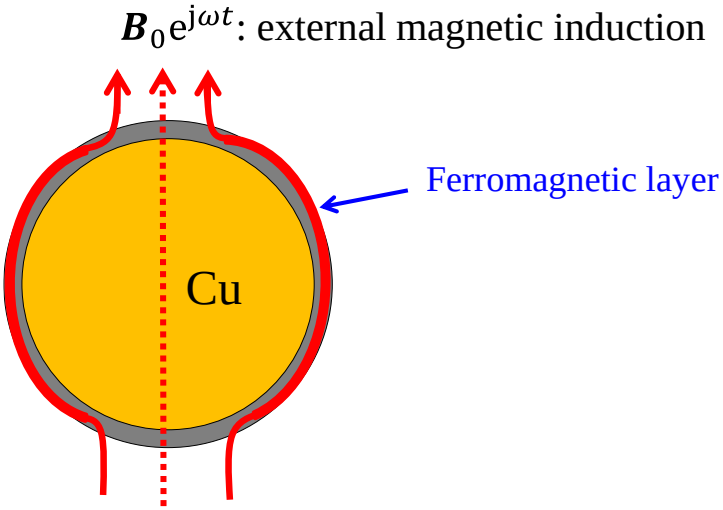


Fig.1.7 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW).
MSW is a wire conductor coated by magnetic-conductive thin layers. Due to this structure, when a MSW is immersed in a magnetic field, magnetic fluxes tend to pass not through the central conductor but through the shielding layers because of magnetic shielding effect by the thin magnetic-conductive layer. For this reason, the eddy current loss in the wire conductor due to the proximity effect is expected to be reduced.

1. 4. 2　平角線を用いた占積率の向上

モータの設計においては, 磁界強度を高くするために固定子スロットの導線占積率を高くすることも要求される．その一つの方策として，Fig.1.8 のようなコイル素線の角線化が注目されている[1.9, 19, 20]．従来用いられている円筒形断面コイルでは線間の無効空間があり，占積率は高くても 70 %程度である．しかし，平角線を用いた場合，整列巻により 80 %程度にまで改善できることが報告されている[1.19]．したがって，これからのモータ設計において, 平角線を用いた場合の効率に関して議論することは重要である．

実用化されている平角線には，導体の周りを絶縁皮膜で塗布したリボン線がある．現在は試験段階ではあるが，IPM モータの界磁巻線として用いることも大規模数値シミュレーション等により検討されている[1.20]．したがって，これからの電磁機器の開発において，平角線を用いた電気・電子部品の開発はより進んでいくものと考えられる．そのためには，平角線を用いた際に，巻き方の構造や，磁性体コアのトポロジー最適化が必要となる．

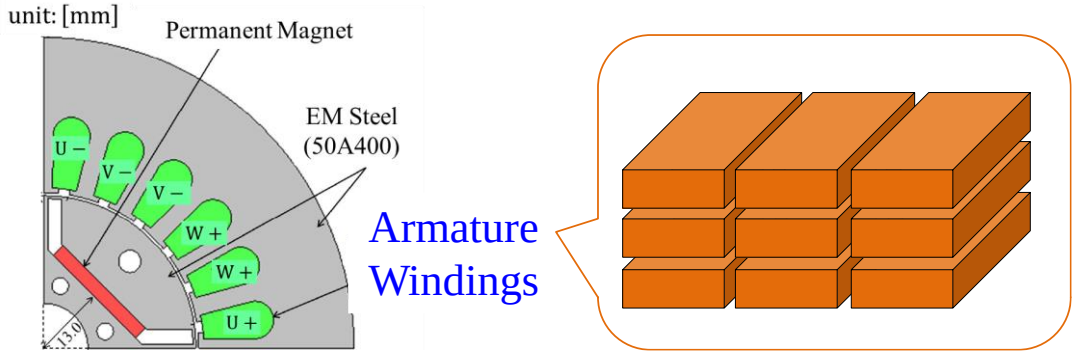


Fig.1.8 Wire conductor with rectangular-cross section and an IPM motor equipped with rectangular coils.
Rectangular coils with relatively large cross-sectional area have widely used for electric apparatuses because it is expected to improve the filling factor of armature coils of IPM motors, and so force. Moreover, the DC resistance can be smaller than the wire conductor with cylindrical cross-section by adjusting the size of rectangular wires.

1. 4. 3　磁性平角線を用いた表皮・近接効果に伴う損失の低減

1.4.1 節，1.4.2 節で紹介したように，近接効果損失を抑制する磁性被覆を塗布すること，及び直流抵抗損失の抑制，並びに占積率向上のために素線を平角線状にすることが有効であるので，Fig.1.9 に示すような平角線を磁性体で被覆した磁性平角線を電気機器の界磁巻線として採用することは，銅損の低減，並びに効率改善に有効である．したがって，Fig.1.9 に示すような平角線を磁性体で被覆した磁性平角線の電気機器への適用を検討することは有効である．

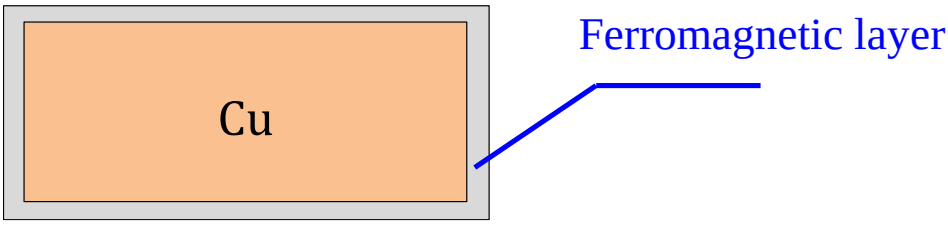


Fig.1.9 Cross-section of a MSW with rectangular cross-section.
MSW is effective for reduction of the DC resistance and the eddy current loss due to the proximity effect. Moreover, it is expected to improve the filling factor of armature spaces.

1. 4. 4　圧粉磁芯(SMC)コアを用いた鉄損低減の検討

高速スイッチング素子の開発や機器の小型化はコイル巻線の銅失のみならず，鉄芯の鉄損の増加をもたらす．通常の積層電磁鋼板を用いた鉄芯においては渦電流損失が顕著となってしまう．また，磁性体コアとして，フェライトを用いると，渦電流損失は低減できる一方で，磁気飽和が生じるという欠点がある．そこで，現在は Fig.1.10 に示すような圧粉磁芯(Soft magnetic composite：SMC)は，数 10 μm 程度の磁性粒子を絶縁皮膜で被覆されており，透磁率はフェライト等と比較してやや低いが，磁気飽和を発生しにくくできる上に，渦電流損は比較的小さい[1.21, 22]．その上，3 次元形状を成型しやすく，設計・加工が容易であるという利点をも有する．

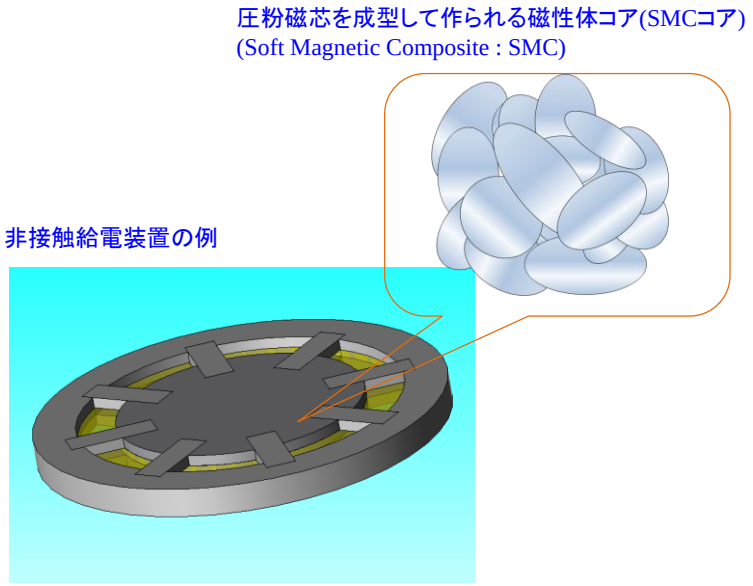


Fig.1.10 Soft magnetic composite: SMC.
SMC is an iron particle surrounded by a thin insulation medium. In SMC cores, the eddy currents tend to flow in a magnetic particle. Thus, the total eddy current loss in the core can be reduced. Moreover, desired shapes of SMC cores can be easily manufactured. Due to this advantage, SMC cores have high affinity with optimization algorithms.

1. 4. 5　電磁シールドによる外部漏洩磁界の抑制

一般に電気機器の磁界により外部の電気部品に渦電流が生じ，この渦電流により渦電流損失が増加することに加え，電磁ノイズが発生してしまうという問題がある．特に，非接触給電装置設計においては，Fig.1.11 に示すような薄い電磁シールドで，電気機器周囲を覆い，漏洩磁界をできるだけ低減し，電磁ノイズの抑制を行う必要がある[1.12, 23, 24]．電磁シールドによって，外部の電気部品と鎖交する磁束を低減し，結果として電磁ノイズを抑制できることになる．

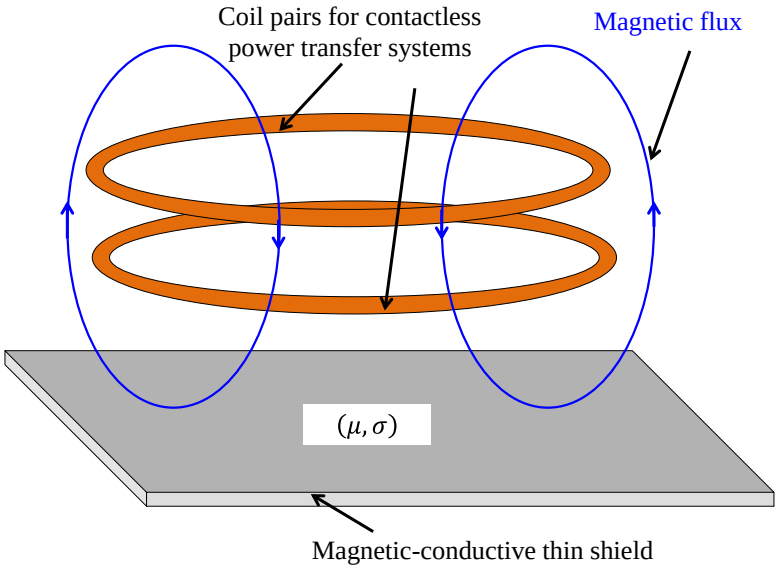


Fig.1.11 Magnetic-conductive thin shield.
Normally, the shape of the shield is assumed to be a slab. Introducing the magnetic shield, electromagnetic noise can be suppressed because of the diamagnetic field from the magnetic-conductive thin shield.

1.5 研究課題：高周波帯で駆動する電気機器の高効率化

1.5.1　計算電磁気学の必要性

1.4 節では銅損や鉄損を低減するための電気機器の構造上の工夫に関して述べた．これらの損失の最小化，部品の小型化，および効率の最大化のための，電気機器全体の構造最適化を行うことは，高効率化・環境負荷低減にとって必須であることは 1.1 節で述べた通りである．しかし実際の最適化においては，銅巻線のサイズ・巻数，磁性体コアの透磁率や寸法，駆動周波数の設定，等様々なパラメータがあり，試作・実験ベースでの最適化は予算や時間の関係から困難である．また，最適化にあたっては，電気機器内部の物理的特性，例えば磁束線分布や渦電流分布等を把握する必要があるが，電磁気現象を視認することは一般に困難である．したがって，迅速に電気部品・機器の最適形状を決定するための計算機シミュレーションによる電磁界数値解析が重要となる．

電磁界数値解析においては，有限要素法，境界要素法，FDTD 法，MoM 法等様々な手法が開発されており，実際の電気機器の設計に既に導入されている[1.25-28]．本論文においては，有限要素法(Finite element method : FEM)を用いて，電気機器の有限要素解析を行う．有限要素法においては，Fig.1.12 に示すように解析領域を有限要素と呼ばれる小領域に分割し，その内部で物理量を離散化し，この物理量を未知数とする微分方程式を連立 1 次方程式に変換して，これを数値解析により解くことで系全体での解析を行う数値解析手法である．後に述べるように，一般的には解くべき方程式の係数行列が対称，かつスパースであるので，計算負荷が一般的に小さい．また，磁気非線形特性の考慮も可能である．したがって，本研究では，電気機器の設計において広く用いられる空間分割型の有限要素法を用いて，上述した磁性被覆線や圧粉磁芯からなる磁性体コア，および電磁シールドを有する電気機器，例えば IPM モータや非接触給電装置等のトポロジー最適化を行うことを最終目標とする．

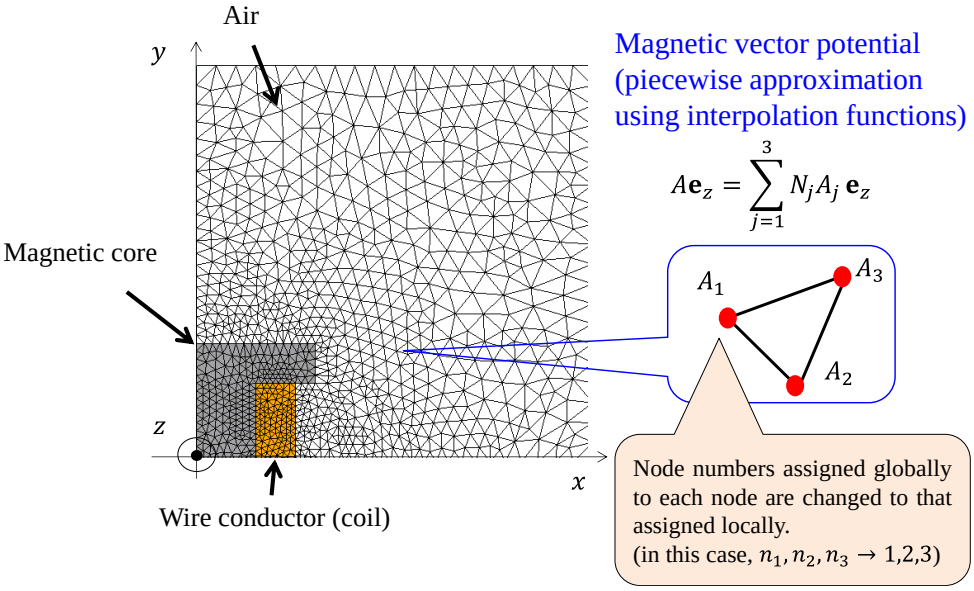


Fig.1.12 Example of discretization of problem region using finite elements. (Fig.2.6)
In standard FEM, the whole region must be subdivided into finite elements in which electromagnetic potentials are discretized into each node or edge. By introducing interpolation functions, as introduced in chapter 2, electromagnetic fields can be numerically evaluated in each finite element.

1. 5. 2 電磁界有限要素解析上の問題点

電磁界有限要素解析においては，解析領域の全てが微小な有限要素に分割できることが前提となる．1.4 節で紹介した損失低減のための機器の工夫では，細線と圧粉磁芯，および電磁シールドを導入することについて述べたが，一般的に細線のサイズは 0.1 mm～10 mm 程度，磁性粒子サイズは数 10 μm 程度である．また，磁性被覆線の場合，磁性被覆の厚さも約数 0.1 μm ~ 10 μm 程度である．一方で，IPM モータや非接触給電装置等のサイズは数 mm 程度のものから数 cm のものまで幅広くある．これらの異なる空間スケールを有する系の電磁界を直接的な有限要素法で解析する際には，磁性導体内部の渦電流を考慮した小さな空間スケールに合わせた有限要素が発生し，例えば Fig1.13 のような有限要素が発生してしまう．特に 3 次元解析の場合には，億を超える有限要素が発生してしまうため，解析が困難となる．さらに，1.4.5 節で述べたような薄い電磁シールドを考慮すると，その渦電流の効果を考慮した有限要素が必要になる．また，連立方程式を数値解析手法で解く際には，条件数の悪化をもたらす．このような問題はマルチスケール問題と呼ばれ，電磁界解析上の一つの問題となっている．

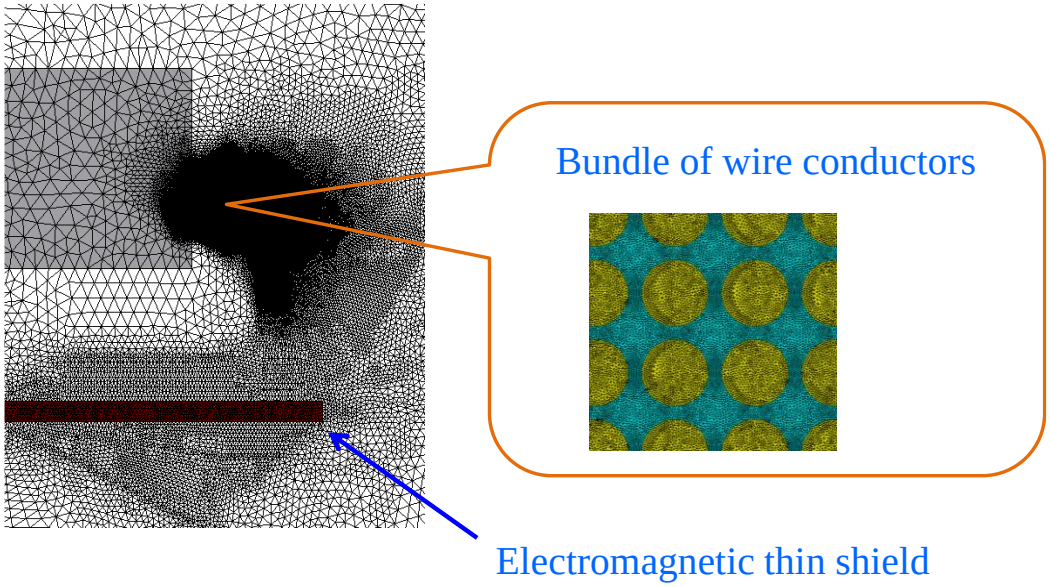


Fig.1.13 Multi-scale problem of FEM.
Native application of FEM considering the eddy currents requires fairly fine discretization of the winding regions because the size of these fine elements have to be set smaller than the skin depth. Moreover, when we treat SMC cores, the same difficulty arises in discretization by finer elements. As a result, the conventional FEM requires too large resultant equation systems to solve under normal computational environments.

1. 5. 3 均質化有限要素法とインピーダンス境界条件の導入

電磁界解析により，高周波で駆動する電磁機器の最適化においては，前節で示した有限要素サイズのマルチスケール性に起因する膨大な有限要素が発生する問題を解決することが必要になる．文献[1.29, 30]では，例えば渦電流変位センサモデルの解析において，コイルのインピーダンスを解析的に求める方法が提案されている．これらの方法では，有限要素法を用いないで，コイル領域の磁気ベクトルポテンシャルを解析的に求め，コイルの誘導起電力から実効インピーダンスを計算している．しかし定式化の上で，コイルと磁性体の位置関係は固定されている上，実効インピーダンスは複雑な関数で表されるため，時間領域への移項が困難である．またこれらの方法では，磁性体の磁気非線形

特性を反映できないことに加え，磁性被覆線や SMC コア等を用いた電気機器の特性評価にも適用できない．一方で，磁性被覆線の実効インピーダンスの解析的な評価[1.31]・SMC コアの磁気特性の評価[1.32]も提案されているが，これらの方法を直接的に有限要素法に導入することは困難なため，トポロジー最適化とは親和性がない．したがって，Fig.1.13 で述べたマルチスケール問題を解決するためには，磁性体の微細な構造，及び渦電流を考慮した新たな有限要素解析法が必要になる．

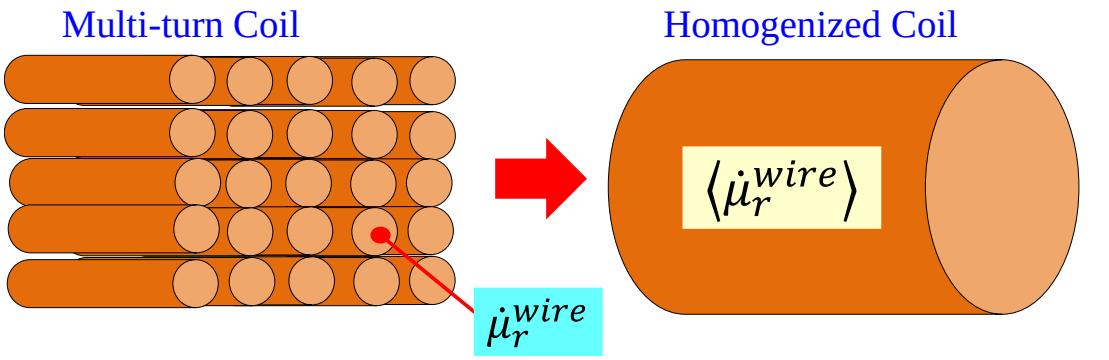
このようなマルチスケール問題を解決するための 1 つの有力な方法は，磁性体の微細な構造を等価な物質定数で置き換える均質化有限要素法である[1.33-48]．均質化法は，微細構造を持つ要素が集合してできるモデルを，巨視的な特性を持つ物理定数によって置き換える手法である．電磁界均質化有限要素法においては，微小な誘電体や磁性体が集合したモデルをマクロ誘電率 $\langle\epsilon\rangle$，マクロ透磁率 $\langle\mu\rangle$ で表す方法が導入されている．ここで，マルチターンコイルに対する均質化有限要素法の概念図を Fig.1.14 に示す．均質化有限要素法においては，磁性体領域を，近接効果により生じる反磁性(Fig.1.4)を考慮したマクロ複素透磁率を割り当てることで，1 つのバルクコイルとして扱う．コイル素線内部の渦電流，及び充填率は，このマクロ複素透磁率において反映されているので，有限要素分割は不要となる．この概念は，圧粉磁芯の場合においても同様である．

文献[1.33, 34]では，渦電流を考慮した準静電磁界解析において，細線単体を含む領域の単位セルを設定し，外部一様磁界を印加し，有限要素解析を行うことで，マクロ透磁率を数値的に評価している．しかし，この方法においては，物質定数や周波数を変更する度に有限要素解析を必要とする上，時間領域解析への移項が難しい．

現在，精力的に研究が進められている均質化有限要素解析は，磁性体内部の反磁性を考慮した磁性体のマクロ透磁率を解析的に求める方法である[e.g. 1.35-1.39]．準定常電磁界の問題では，渦電流が流れるので，透磁率は複素数になる．本法では，近接効果に伴う磁性体の反磁性を表す磁気双極子から定義した複素透磁率 $\dot{\mu}_r(\omega)$ を Ollendorff の式(第 3 章で導出)と呼ばれる磁性粒子群の均質化のためのマクロ透磁率 $\langle\mu_r\rangle$ の式中の比透磁率とし，均質化された磁性体のマクロ複素透磁率 $\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$ を得る[1.26]．本法は，上記に述べたような制約がなく，有限要素法との親和性が高い．また 3 次元モデルにおいても本法は適用できる．なお Ollendorff の式は，誘電体に対する均質化法でよく知られた Clausius-Mossotti の式や Maxwell-Garnett の式と本質的に同じである[e.g. 1.36, 39]．このことについては，Appendix A で詳述する．

Fig.1.14 に高周波の電流が流れるマルチターンコイルの均質化の概念図を示す．Fig.1.14 においては，素線の近接効果に伴う反磁性を表す $\dot{\mu}_r^{wire}(\omega)$ を素線の透磁率とし，コイル領域の物質定数は巨視的な透磁率 $\langle\dot{\mu}_r^{wire}(\omega)\rangle$ とする．いま，渦電流の効果と空隙は全て $\langle\dot{\mu}_r^{wire}(\omega)\rangle$ に反映されているので，細線が集合したコイル領域を渦電流を考慮した微細な有限要素で離散化する必要はなく，1 つのバルクコイルとして扱うことができる．したがって，静磁界解析で通常のバルクコイルを離散化するように，粗い有限要素分割でコイル素線内の渦電流特性を考慮した電磁界解析が可能になる．一方で，表皮効果に起因する渦電流特性については，回路方程式中で入力電流に対応するインピーダンスを用いることで反映する．本法の妥当性はいくつかの数値解析結果，および実験値とも良好に一致することで確認されている[e.g. 1.39].

SMC コアの場合でも同様に，圧粉磁芯の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{SMC}(\omega)$ を解析的に求め，周波数領域に拡張した Ollendorff の式(the extended Ollendorff formula)から $\langle\dot{\mu}_r^{SMC}(\omega)\rangle$ を得る．しかし，細線の場合とは異なり，圧粉磁芯同士の磁気的接触が存在する．現在，磁気回路法を用いた粒子同士の磁気的接触を反映した透磁率を求める方法も提案されている[1.37, 41]．また磁性粒子の非線形特性を考慮した均質化法も提案されている[1.38].



渦電流を反映した複素透磁率 (aは導線半径)

$$\dot{\mu}_r^{wire} = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)}, \zeta := a\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = \frac{a}{\delta}(1-\mathrm{j})$$

渦電流が流れるので，
透磁率は複素数となる．
(虚部で渦電流損失を表す)

マクロ複素透磁率(周波数領域に拡張したOllendorffの式)

$$\langle \dot{\mu}_r \rangle = 1 + \frac{2\eta\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)}{2 + (1-\eta)\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)}$$

η： 導線充填率

Fig.1.14 Homogenization of a bundle of wire conductors.
In this approach, a bundle of conductive wires are modeled as a homogenous material with the macroscopic complex permeability $\langle \dot{\mu} \rangle$ representing the proximity effect in each wire and air-gap between wires. This method is effective for multi-scale problems because FE analysis can be conducted with rather coarse finite elements in the homogenized region and finished within reasonable duration of time by using usual computational environments.

一方で，電磁シールドについては，均質化法ではなく，Fig.1.15 のように，インピーダンス境界条件(Impedance Boundary Conditions：IBCs)を用いて，電磁シールド内部の離散化を回避する手法が提案されている[1.49-54]．文献[1.49, 50]においては，薄い導体からなる誘電体層を透過する電磁波を FDTD 法により解析する際に課すべき境界条件を与えている．一方で，文献[1.51-54]においては，準定常電磁界中の渦電流が流れる磁性板に対する境界条件を与えている．現在，両者の関係については明らかとはなっていないが，本質的には同値であり，文献[1.49, 50]で紹介されているインピーダンス境界条件は準定常電磁界の周波数帯域に近い場合において，文献[1.51-54]の場合の境界条件に一致するものと考えられる．

本法では，電磁シールド表面に，内部の渦電流の効果を反映したインピーダンス境界条件を課すことで，電磁シールドの有限要素分割を避けることができる．文献[1.51, 52]においては，境界要素法における境界条件が提案されているが，磁界を求める際に磁位を計算している．この方法では，問題が単連結の場合に限られてしまうという欠点がある．一方で，文献[1.53]においては，このような問題を回避するために，磁性板表面の電磁界の関係式を求めることで，解析を容易にしている．しかし，本論文で議論の対象となる電磁機器の設計・開発には，1.3.2 節で述べた磁性体の磁気非線形特性を反映でき，係数行列が疎行列，かつスパース性を有する有限要素法が望ましい．また，実際の磁性層は多層構造を有しているので，このような系に対してもインピーダンス境界条件を導入することが望ましい．

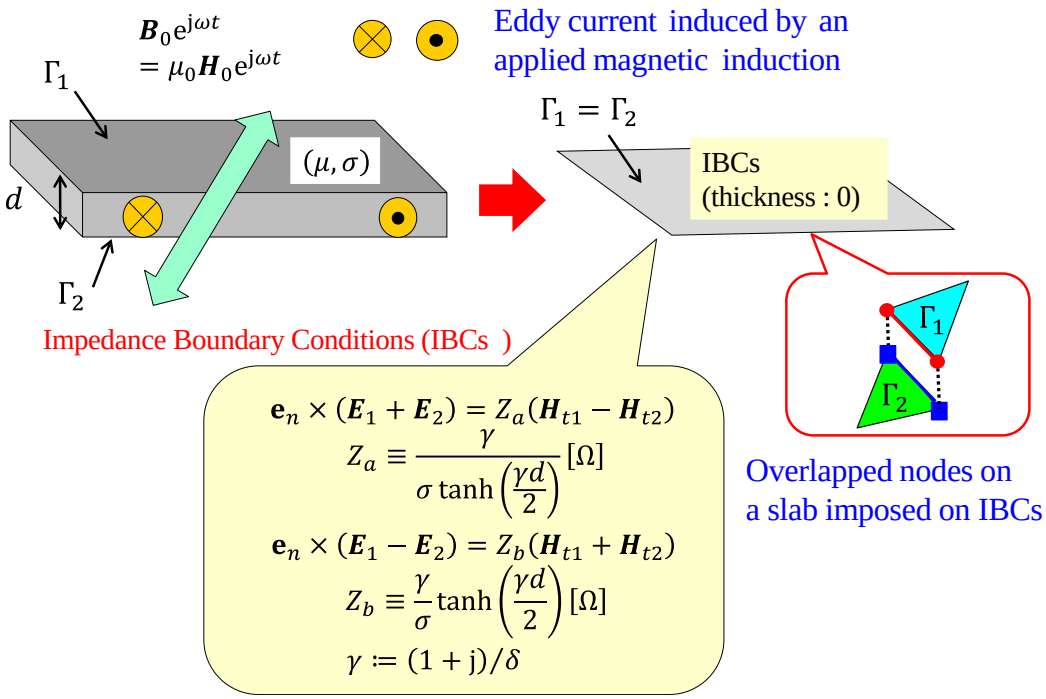


Fig.1.15 Impedance boundary conditions (IBCs) on thin layers. (Fig.9.1)
In this approach, a magnetic conductive thin slab is replaced with boundary conditions considering the eddy current and the diamagnetic field. Hence, it can be modeling by IBCs without subdividing its inside into finer elements considering skin effect. In order to apply IBCs to FE analysis, the double nodes on this boundary have to be introduced because we have to distinguish one interface Γ_1 from the other interface Γ_2.

1. 5. 4　本研究の独自性・新規性

これら均質化法とインピーダンス境界条件を有限要素解析に導入することで，例えば Fig.1.16 のように有限要素数を十分に抑えた解析を行うことができるため，電気機器の解析を迅速に，かつ精度よく行うことが可能となる．また，3 次元モデルの解析においても，静磁界解析の場合と同様に解析を行える点で有用性が高い．したがって，本法を適用することが確立できれば，最適化アルゴリズムと組み合わせることで，迅速に新しい電磁機器の最適化を行うことが可能になると期待される．

本博士論文では，均質化有限要素法，インピーダンス境界条件を拡張させていくことが主目的である．複素透磁率を解析的に求めるための均質化有限要素法については，磁性板，磁性円柱，磁性球については報告されている[1.37-43]が，磁性被覆線や平角線，及び磁性楕円体の均質化モデルに関しては，これまで報告されていなかった．本論文では，これらへの拡張を検討する[1.44-48].

さらに，文献[1.54]の報告では，文献[1.53]の方法を，有限要素解析に導入するための方法を示し，コイルの均質化と合わせて，有限要素数を十分に削減しても従来法と良好な解が得られていることが示されている．有限要素法でインピーダンス境界条件を扱う場合は，形状モデリング上，厚さ 0 の面として電磁シールドを扱うが，境界上で 2 重のポテンシャルが割り当てられる．この変換に伴うアルゴリズムの作成が複雑であるが，

有限要素数が十分に削減できる点で十分に有効性はある．また，実験値とも良好な一致を示すことが文献[1.54]にて示されており，本理論の妥当性が確認されている．

上記で述べた均質化有限要素法やインピーダンス境界条件においては周波数領域で定義された複素関数を用いる．しかしながら実際には磁気非線形特性を有する磁性体コアが解析領域内に存在することがあり，時間領域解析を行わなければならない場合がある．特に IPMSM 等の解析においては，動的に変化する物理量を扱うため，時間領域解析が必要となる．文献[1.40]では等価回路等を用いた時間領域解析が提案されているが，この方法で提案されている方法では磁気特性は等方性を仮定しているため，磁性被覆線や平角線等の磁気的異方性を有するモデルに対応できない．

一方で，SMC コアの解析において，文献[1.37, 38, 41, 42]では圧粉磁芯の形状は一様な球体を仮定しているが，実際にはプレス成型の過程で，扁平な形状となっている．このような問題に対しては，異方性の磁気特性を反映した均質化法が必要になる．本論文では，磁性粒子の磁気異方性の取り扱いについても議論する[1.49].

以上を総じて，本博士論文では主に下記に示す課題に関する研究報告を行う．

(1) 均質化有限要素法について
① 磁性被覆コイルの均質化有限要素解析の検討
② 磁気特性が異方性の場合の均質化問題
③ 時間領域解析への拡張

(2) インピーダンス境界条件について
① 均質化有限要素法との連成 (2 重節点を導入することによる．)
② 磁性層が多層の場合の境界条件
③ 時間領域解析への拡張

本法を用いた場合の有限要素空間の例はまさに Fig.1.16 に示されている通りである．従来の準定常電磁界解析ではコイル素線と電磁シールドの渦電流を考慮した微細な有限要素が必要となるが，提案手法では，コイル領域は均質化され，バルクコイルとして扱うことができる一方で，電磁シールドはインピーダンス境界条件に置換されるので，渦電流場解析に必要な有限要素数を大幅に削減できる．

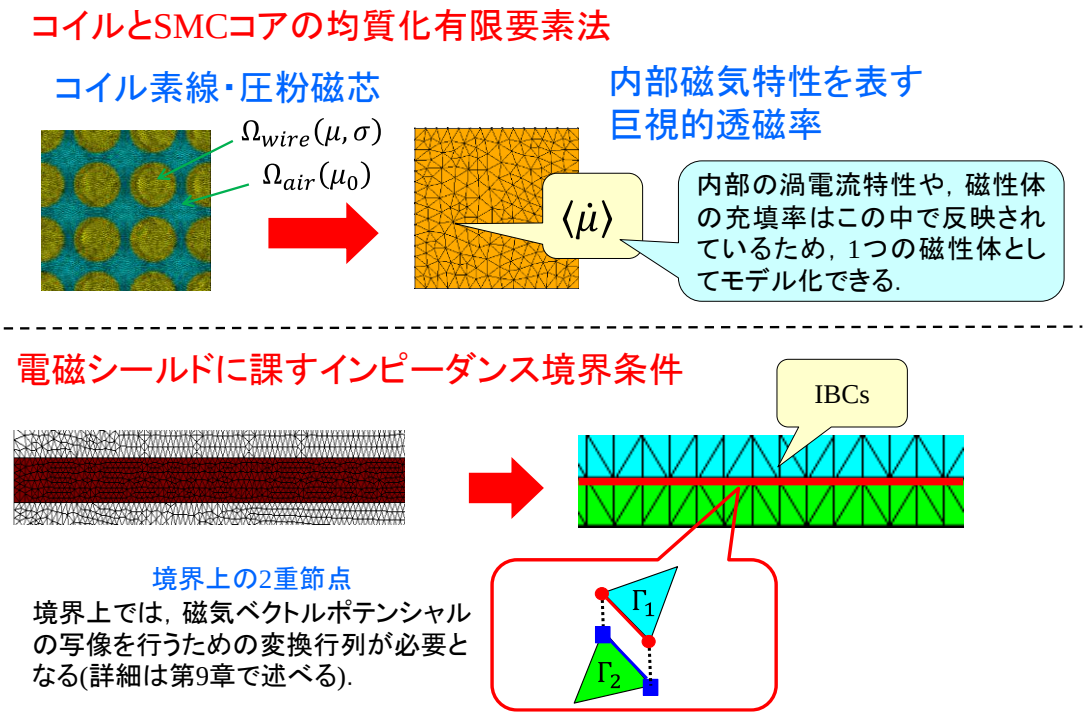


Fig.1.16 Example of FE meshes using proposed approaches.
Fast computation of quasi-electromagnetic fields can be conducted by introducing the homogenization method and impedance boundary conditions. As shown later, these approaches can be performed for frequency and time domain analyses. Moreover, in time domain analysis, nonlinearity of a magnetic core can be taken into account. Thus, these two schemes are promising for analyzing quasi-static electromagnetic field of electric apparatuses by using standard computational environments.

1.6 本研究成果の概要

1.5 節で述べたように，有限要素サイズのマルチスケール性を緩和した場合の有限要素解析により得られるデータが，従来の微細な有限要素を要する有限要素法で解析したデータが十分に一致することが，本論文において得られた最も重要な知見であり，新規性である．また，提案手法は周波数領域，時間領域いずれにおいても適用可能であり，解析結果は良好な精度で一致する．

周波数領域の解析例として，Fig.1.17 に示すような 81 回巻きの磁性被覆コイルの実効インピーダンスの周波数と磁性被覆の透磁率 μ_{2r} への依存性を，均質化有限要素法と従来の有限要素法で解析した結果を比較した例を Fig.1.18 に示す．Fig.1.18 より，十分に一致した結果が得られていることがわかる．Fig1.18, 19 はそれぞれ第 4 章の Fig.4.51,52 に対応する．均質化有限要素法の詳細は第 3 章に，マクロ複素透磁率の周波数特性，均質化有限要素法の妥当性，解析上の注意点等の詳細は第 4 章で示す．

なお，本論文では，特に断らない限り，従来の直接的な有限要素解析の際には，JMAG ソフトウエア(株式会社 JSOL 製)を用いていることを付記する．

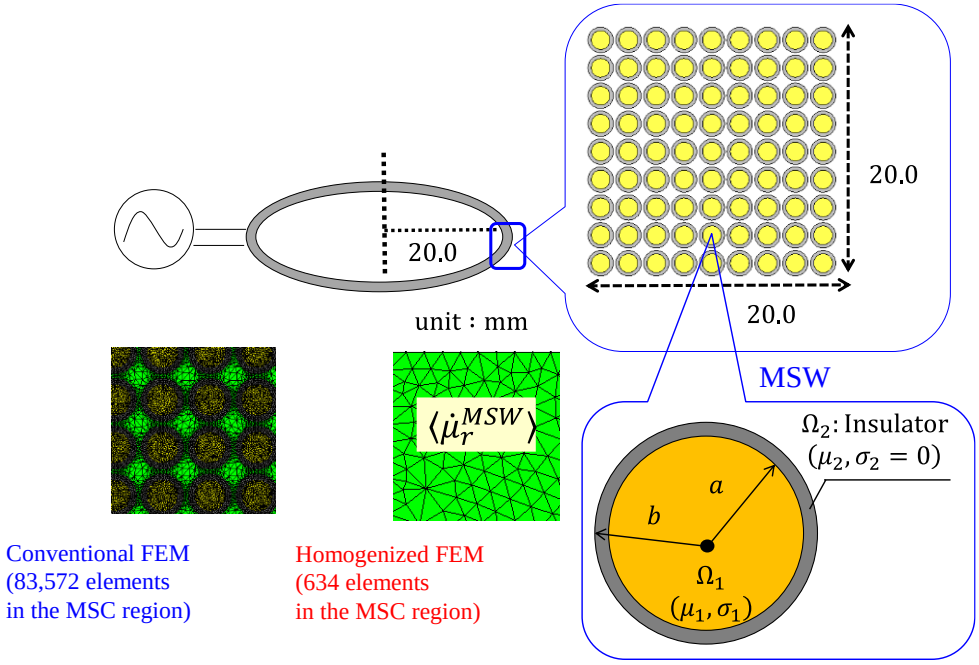
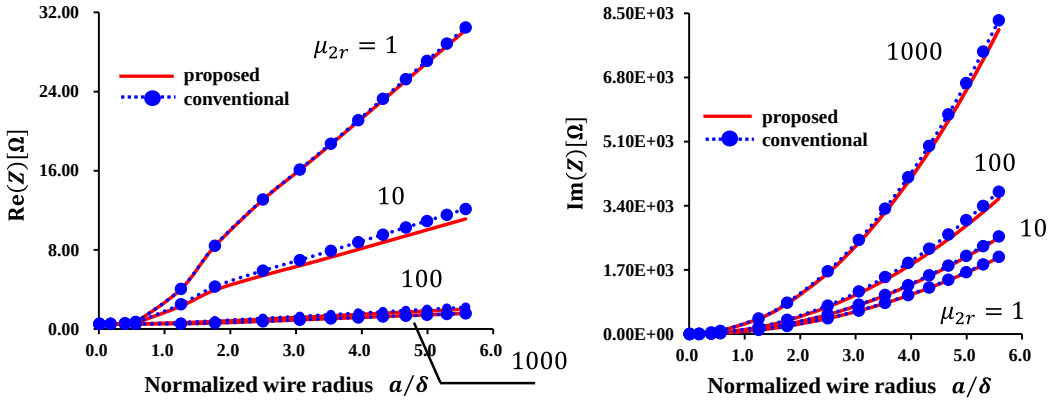


Fig. 1.17 (Fig.4.50) Finite elements of an 81-turn MSC.



(a) Real part (b) Imaginary part

Fig. 1.18 (Fig.4.51) Impedance of the MSC shown in Fig.1.17.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that both impedances calculated by the proposed approach and the conventional FEM are in good agreement.

つぎに，時間領域の解析例として，Fig.1.19 に示すような 9 回巻きの磁性被覆コイルを非線形特性を有する磁性体コアに巻き，外部に円板状の電磁シールドを配置する．この際に，磁性被覆コイルに流れる電流の波形を均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を適用した解析と従来法で比較する．入力電圧の波形は，PWM(Pulse Width Modulation)を仮定する．電流の波形を Fig.1.20 に示す．Fig.1.20 から，十分な精度で電流波形が得られていることがわかり，提案手法の有用性が確認できる．Fig.1.19, 20 はそれぞれ Fig.9.21, 22 に対応するが，均質化有限要素法の時間領域解析における定式化，及び畳み込み積分の効率的な評価法は第 7 章に，均質化有限要素法とインピーダンス境界条件の連成については，第 9 章にそれぞれ詳細を示した．

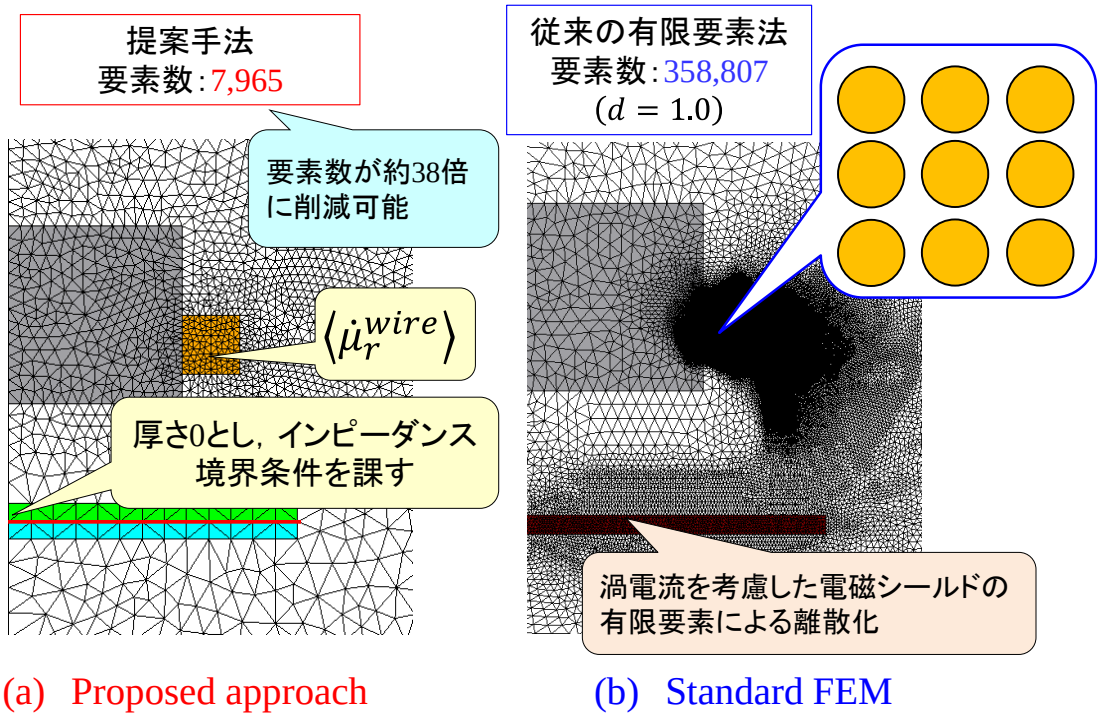


Fig.1.19 (Fig.9.21) FE discretizations required in applying the proposed approach and the standard FEM.
When we apply the homogenization method using the macroscopic effective magnetic reluctivity and impose IBCs on the electromagnetic shield, the number of finite elements is 22,241. On the other hand, the standard FEM requires over 2,000,000 elements because spatial discretization of the MSC and shield regions using much finer elements considering the eddy currents is needed.

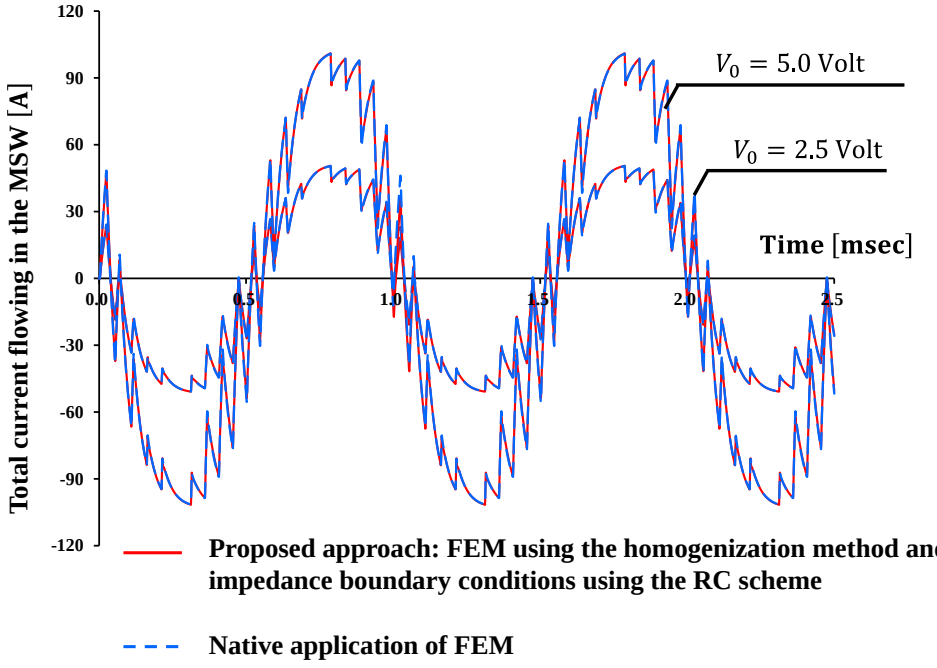
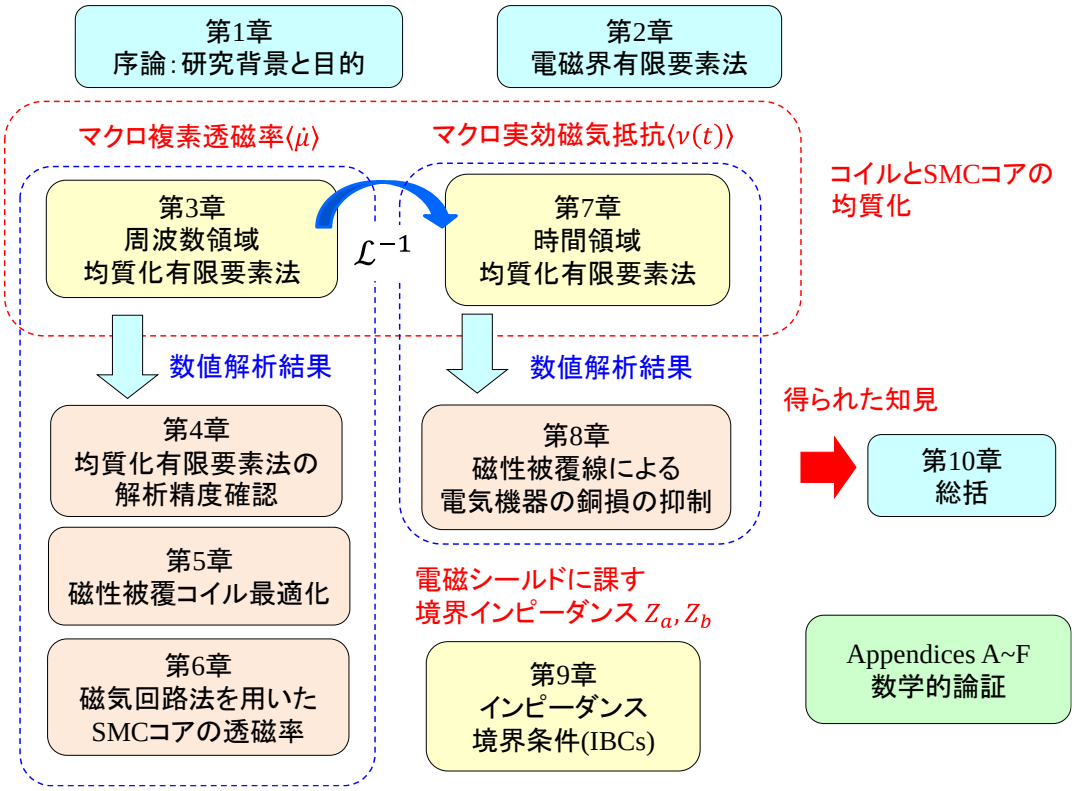


Fig.1.20 (Fig.9.22) Time-response of the current flowing in the MSW calculated by the proposed approach and the standard FEM.
From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory. Finally, we reach the conclusion that the proposed approach based on the homogenization method and IBCs is effective for numerical computation of quasi-static electromagnetic fields considering eddy currents.

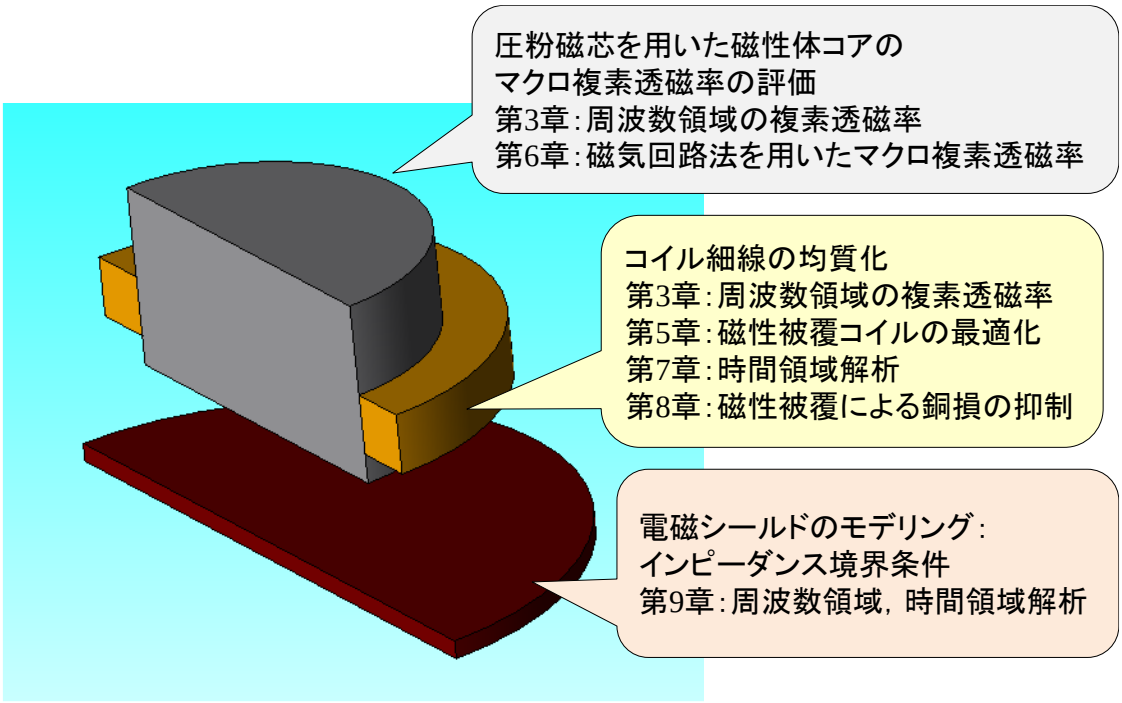
1. 7 本論文の構成

1. 7. 1　本論文のフローチャートと全体像

本論文の大きな構成を Fig.1.21 に示す．第 1 章では，研究背景とその新規性，通常の有限要素解析の問題点，均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を適用することの必要性を述べた．



(a) Flow-chart of this doctor thesis.
This doctor thesis mainly consists of two semi-analytical approaches for quasi-static electromagnetic field analysis: One is finite element method based on the homogenization method for assembled fine-structured magnetic particles using the macroscopic complex permeability, and the other is IBCs (abbreviated by impedance boundary conditions) for modelling of magnetic conductive thin shields.
This doctor thesis consists of ten chapters. In chapter 1, the purpose of this doctor thesis and its overview are described. In chapter 2, we introduce finite element method (abbreviated by FEM or FE analysis, FEA) for several types of electromagnetic field analysis. In chapter 3, the complex permeabilities for each shape of a magnetic particle are formulated and tabulated in a list. Moreover, the macroscopic complex permeability is obtained by the extended Ollendorff formula and the unit-cell approach. In chapter 4, the frequency characteristics of the complex permeabilities and the validity of the homogenization-based FEM are shown. In chapter 5, optimization of MSCs by a genetic algorithm is performed. In chapter 6, by introducing the magnetic circuit method, we will compute the macroscopic complex permeability of magnetic cores considering magnetic contacts among magnetic particles. In chapter 7, the effective magnetic reluctivity obtained by applying the inverse Laplace transformation to the complex permeabilites are derived for time-domain analysis of multi-turn coils. In chapter 8, to confirm the effectiveness of MSCs, we evaluate the copper losses of some electric apparatuses equipped with MSCs. In chapter 9, the boundary impedances for IBCs are formulated and the way to introducing IBCs to FEM using the homogenization method are shown. In chapter 10, this doctor thesis are summarized with several data.
When deriving these formulas, the reader might wonder that more detail mathematical discussions for these approaches, such as about the convergence or numerical stability of each complex function, are needed for confirming the validity of these approaches. To answer the questions, the appendices which give these mathematical discussions are attached at the end of this doctor thesis.



(b) Relationship of each chapter and magnetic material.

Fig.1.21 Overview and illustration of this doctor thesis with a flow-chart and magnetic materials.

1. 7. 2　各章の概説

以下に, 本論文の内容を各章ごとに概説する. なお, 全体の理解を容易にするために, 各章で示す解析結果のうち，代表的な数値解析結果を先取りする．以下の図番号は，各章の対応する図番号と共に付している．

第 1 章 序論: 研究背景と目的

環境負荷低減を実現する電気機器の設計を最終目的として, 本研究対象となる高周波帯域で駆動する電気機器における銅損・鉄損の抑制のために，磁性被覆線や平角線を用いることの有効性について述べた．つぎに，有限要素法のマルチスケール性に関して述べ, 均質化有限要素法, インピーダンス境界条件を導入することの意義について述べた．また，本法を用いることによって，渦電流が流れる細線，電磁シールドを考慮した解析においても，直接的な有限要素法と比較して大幅に有限要素数を削減した上で，解析精度を落とさずに解析ができることが本論文の新規性であることを述べた．

第 2 章 電磁界数値解析のための有限要素法

本研究で使用する電磁界数値解析手法である有限要素法について述べる．本章では本論文で使用する電磁ポテンシャルを割り当てるための 0 次，1 次 Whitney 要素について述べ，各有限要素毎に有限要素方程式を導く．さらに，軸対称系の場合，3 次元解析における有限要素法の定式化を与える．また，IPM モータ等の回転機解析のための基本に関して述べる．さらに，電圧源を考慮した解析手法に関しても述べる．

第 3 章 周波数領域における均質化有限要素法

第 1 章で述べた均質化有限要素法に必要なマクロ複素透磁率を求める方法を述べる．本論文ではこのマクロ複素透磁率を，unit-cell approach に基づく方法と，磁性体毎に求められる複素透磁率を Ollendorff の式中の透磁率として代入する方法の 2 通りで求める．本論文では，主に後者を用いた議論を行う．複素透磁率を，磁性板，導線，圧粉磁芯について，それぞれ求める．本論文で解析対象となる導線は，通常の円筒形細線，円筒形磁性被覆線，楕円近似された平角線，楕円近似された磁性平角線である．また，圧粉磁芯の形状は真球，楕円体を仮定する．なお，複素透磁率を解析的に求める際には，Helmholtz 方程式を解析的に解くことによって得られる基底関数の基本波の項を用いる．この項は，反磁性を表す磁気双極子に対応する．

第 4 章 複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素解析の妥当性

第 3 章で提案した均質化有限要素法の妥当性を周波数領域で確認する．まず，マクロ複素透磁率が，unit-cell approach で求めた場合と，Helmholtz 方程式の解析解から得られた複素透磁率を Ollendorff の式に代入することによって求めた場合で，十分に一致することを示す．解析対象として，マルチターンコイルの実効インピーダンス，磁束線の分布，外部磁界を提案手法と従来の準静電磁界解析で解析した結果が良好に一致することを示す．例えば，Fig.1.22 に示すような 81 回巻の銅巻線を電圧源に接続した場合に得られるコイルの実効インピーダンスを均質化有限要素法と従来の直接的な有限要素法で評価した結果を Fig.1.23 に示す．Fig.1.23 から，両者は十分に一致しているが，提案手法では，素線を 1 つ 1 つモデリングせず，均質化されたコイルとして扱っているため，十分に有限要素数が削減できる点において優位性がある．

なお，本解析手法が磁性被覆線の解析，及び 3 次元解析においても有効であることを示す．さらに，周波数領域において，磁性被覆線の交流抵抗が減少することについても本章で述べる．

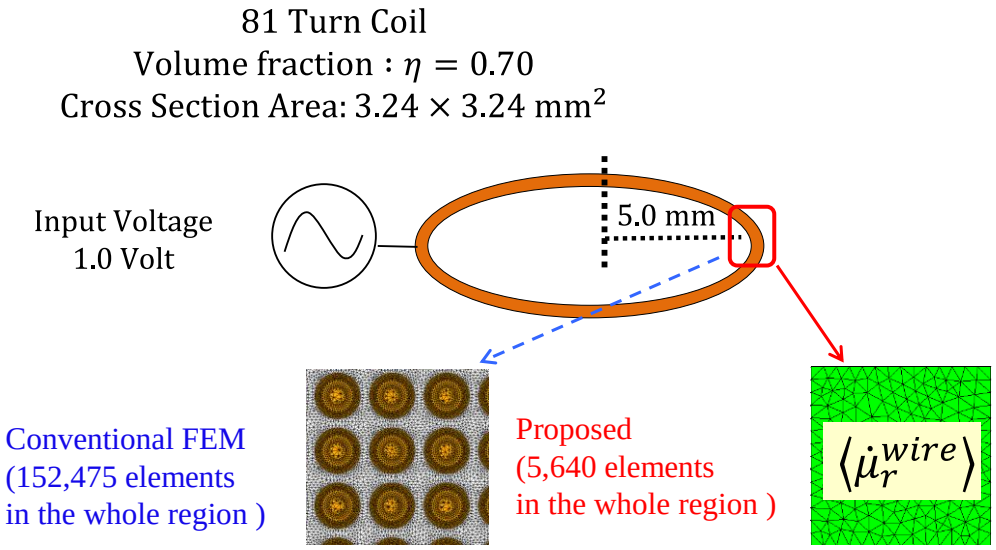
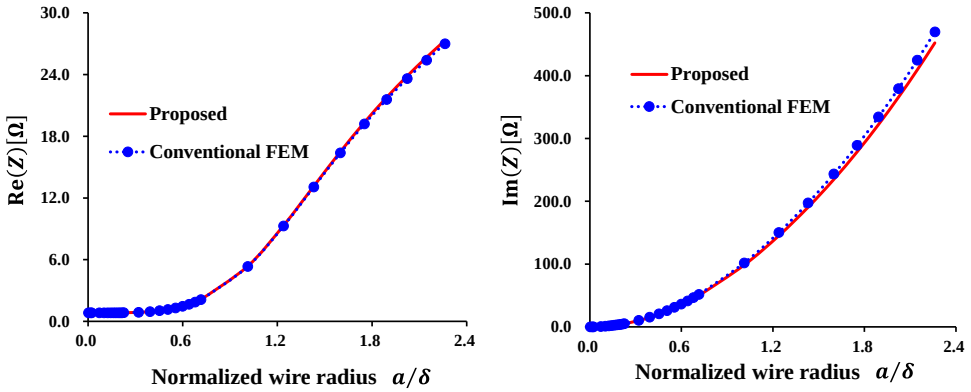


Fig.1.22 (Fig.4.64) Finite elements of an 81-turn coil connected with a voltage source.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.1.23 (Fig.4.65) Impedances of the coil shown in Fig.1.22 (Fig.4.64) connected with the voltage source. Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, we can confirm that there is no meaningful discrepancy between both impedances calculated by the homogenization-based FEM and the conventional FEM.

第 5 章　磁性被覆コイルの構造最適化

本章では，第 4 章において，均質化有限要素解析が妥当性であることを確認したことを踏まえて，磁性被覆コイルの構造最適化を行う．磁性被覆線の設計に求められる要件はいくつかあるが，本研究では交流抵抗の最小化を目的とする．まず，磁性被覆コイルの交流抵抗の磁性被覆厚や透磁率への依存性を調べる．さらに，本研究では第 3 章で導入した均質化有限要素法により，磁性被覆コイルの交流抵抗の最小化を遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm : GA)により行う．

例として, Fig.1.24 に示すような 25 回巻の磁性被覆線を GA により最適化した結果を Table 1.1, 2 に示す．最適化結果より，磁性被覆厚が十分に小さく，かつモデルとしては単層構造が望ましいとわかった．

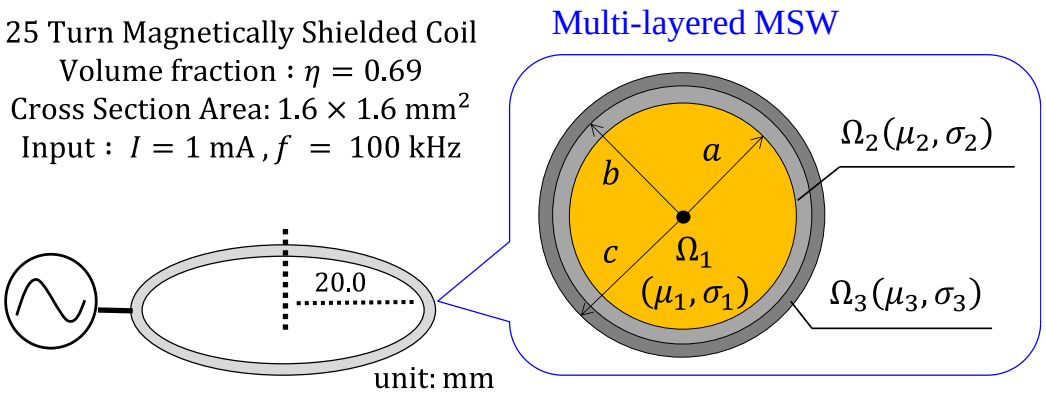


Fig.1.24 (Fig.5.8) 25-turn multi-layered MSC.

Table 1.1 (Table 5.5) Optimization results (100 kHz・1 Volt input)

a [mm]	0.148	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.149	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7
c [mm]	0.150	μ_{3r}	1000	σ_3 [S/m]	1.00×10^7

Table 1.2 (Table 5.6) Comparison of the AC resistance [Ω] at 100 kHz (1 Volt input)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.87

第 6 章　SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率

本章では，第 3 章で定義した磁性粒子の複素透磁率を用いて，磁気的接触を考慮した SMC コアの周波数領域のマクロ透磁率を数値的に求める方法について述べる．実際の SMC コアを考えると，コア内部の磁性粒子間の接触状態は全くランダムであり，確率的なシミュレーション技法が必要となる．そこで，Fig.1.25 のような磁性粒子間の磁気的接触を反映した磁気回路を考え，磁気抵抗の疎密で磁気特性を確率的に評価する方法について検討する．また，磁性粒子の磁気異方性を反映するために，磁性粒子を楕円体と見なした場合のテンソル型マクロ複素透磁率を導入し，異方性を考慮した磁気特性を評価する．

本法を用いて，SMC コアのマクロ複素透磁率の磁性粒子の充填率 η への依存性を周波数帯域別に評価した例を Fig.1.26 に示す．磁性粒子の半径 a と表皮厚 δ の比 a/δ が 1 以下の場合，渦電流の効果が十分に弱いため周波数を変更しても大きな差異はない．しかし一方で，$a/\delta > 1$ の場合には反作用磁界の効果が顕著になるため，周波数を変更すると有意な差が見られる．さらに，$\eta = 1$ の場合には磁気回路法により評価した場合と Ollendorff の式に基づく均質化法により評価されたマクロ複素透磁率は一致しているとわかる．磁性粒子形状を楕円体とした場合の磁気特性の差異については本章で詳細に述べる．

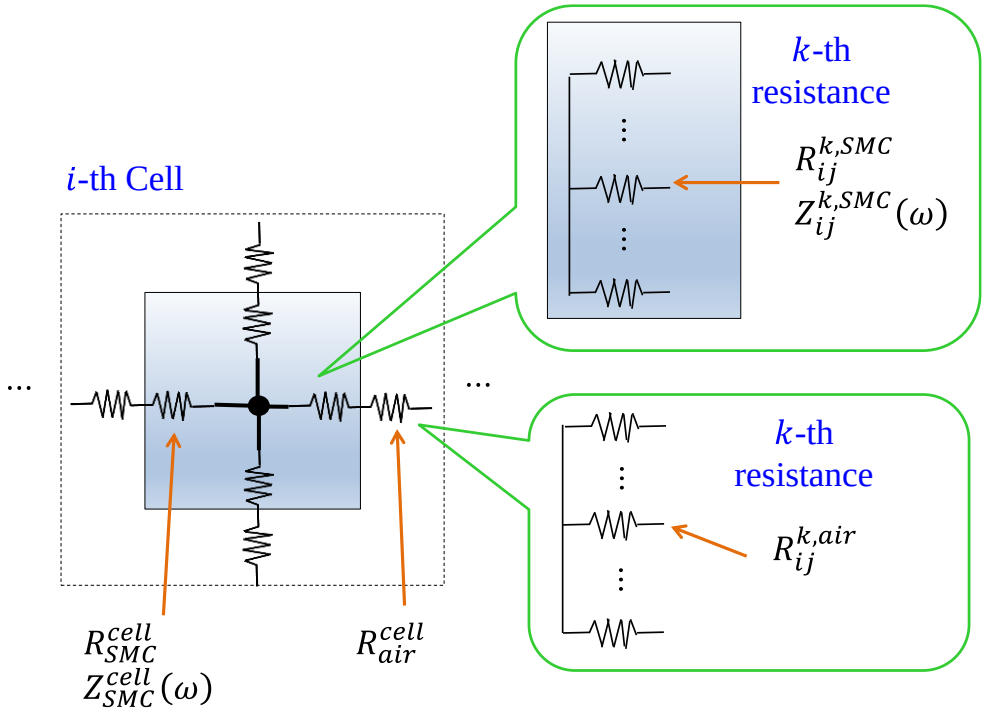
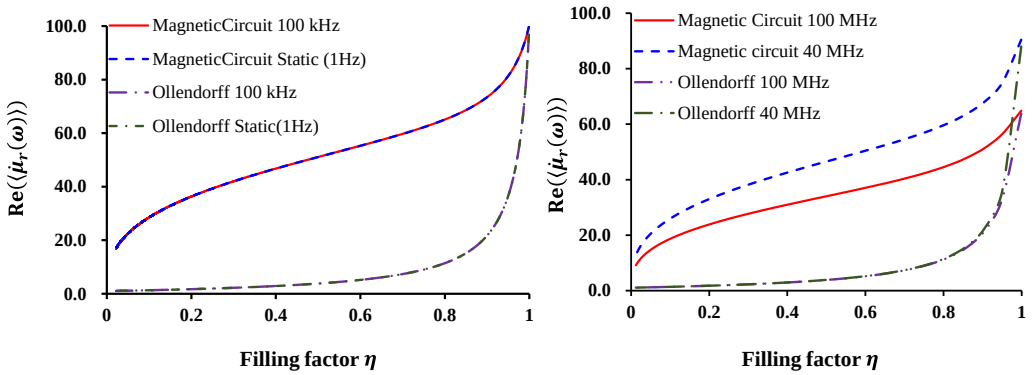


Fig.1.25 (Fig. 6.4) Magnetic resistances between two unit-cells.
In this model, magnetic contact between two SMCs is represented by a stochastic model using random number for determining whether it connects each other or not.



(a) $f = 1\ \mathrm{kHz}, 100\ \mathrm{kHz}$
$a/\delta < 1$

(b) $f = 40\ \mathrm{MHz}, 100\ \mathrm{MHz}$
$a/\delta > 1$

Fig.1.26 (Fig.6.5) Effective permeabilities of SMC cores calculated by the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula.
Abscissa and ordinate denote the filling factor η and $\mathrm{Re}(\langle\dot{\mu}\rangle)$, respectively. From this figure, we find that when η approaches 1, the extended Ollendorff formula and the magnetic circuit approach give almost the same results. On the other hand, when the normalized sphere radius a/δ becomes larger than 1, there are meaningful discrepancies between these results.

第 7 章　均質化有限要素法の時間領域解析への拡張

第 3 章で定義した周波数領域における複素透磁率を，時間領域の有限要素解析で適用するための手法に関して述べる．まず，複素関数を用いて表された磁性板と細線の複素透磁率の連分数表示を導入する．この連分数表示を用い，Padé 近似を介して部分分数分解されたマクロ複素透磁率の逆数であるマクロ複素磁気抵抗を逆 Laplace 変換することで，時間領域における実効磁気抵抗を求める．逆 Laplace 変換された有限要素方程式において，実効磁気抵抗と磁束密度の畳み込み積分を効率的に処理する RC(Recursive convolution)法について述べる．

本法を用いるにあたり，マクロ複素磁気抵抗の連分数表示・部分分数展開が，解析解と一致することを示す．この上で，通常の銅巻線，磁性被覆コイル，楕円柱コイル，平角線コイル，磁性平角線コイルの電流や電力の過渡特性が従来の有限要素法とよい精度で一致することを示す．

例として，Fig.1.27 に示すような系を考える．コイル断面は，楕円形状・長方形形状を仮定する．コイル素線の電流波形を上述したマクロ実効磁気抵抗を用いた均質化有限要素法と，直接的な有限要素法の 2 通りで評価する．なおコイル領域の有限要素数は前者では 78，後者では 975,016 であった．電流波形の時間特性を Fig.1.28 に示す．Fig.1.28 から時間領域においても，提案手法の妥当性は確認できる．また，この解析モデルは平角線の解析を想定しているため，IPM モータの銅損解析等への波及効果が期待できる．

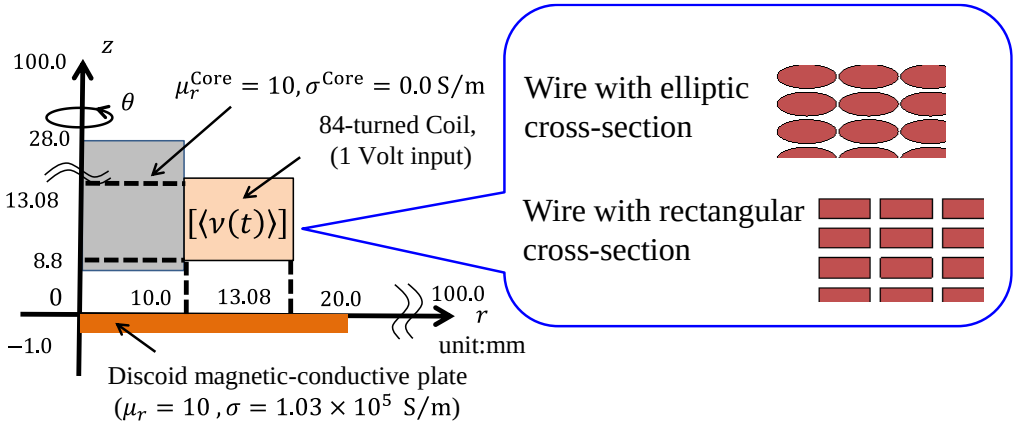


Fig.1.27 (Fig.7.18) Multi-turn copper coil with elliptic cross-section placed above a conductive disk.
This system is assumed axisymmetric. In this analysis, the cross-section of the coil area is assumed to be elliptic and rectangular shapes.

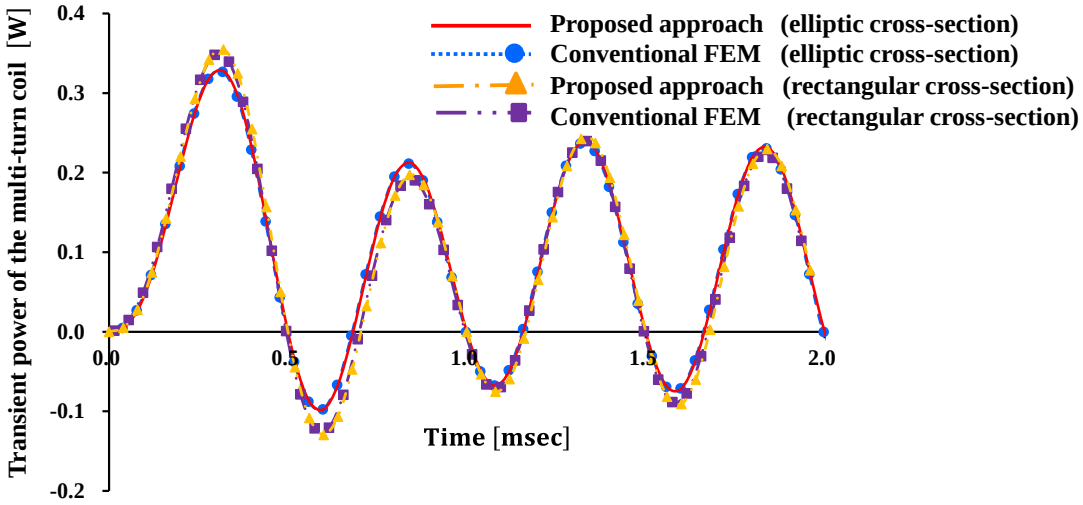


Fig.1.28 (Fig.7.20) Transient power of the multi-turn coil as shown in Fig.1.27 (Fig.7.18).
It is found that the coincidence between them is satisfactory. Moreover, the approximation of the rectangular coil with the elliptic coil is valid within the acceptable error.

第 8 章 磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減

第 7 章で議論した時間領域均質化有限要素法を用いて，磁性被覆線を用いた電気機器の銅損低減に関して議論する．解析対象として，インダクタ，IPM モータを例に挙げる．銅損の実効値の磁性被覆の透磁率への依存性を数値解析で評価し，磁性被覆線の有用性を明らかにする．また外部印加電圧の波形が，半導体スイッチングにより生成された PWM (Pulse Width Modulation)である場合を想定した解析をも行う．

磁性体コアに非線形性がある場合の，インダクタの例を Fig.1.29 に示し，この界磁巻線に磁性被覆線を用いた場合の銅損を Fig.1.30 に示す．Fig.1.30 において，横軸は磁性被覆線の磁性被覆の比透磁率を表し，縦軸は銅損の実効値を表す．Fig.1.30 から，磁性被覆の比透磁率が高くなるほど，銅損が抑制できるとわかる．したがって，磁性被覆線は，高周波で駆動する電気機器の設計に有効であるとわかる．

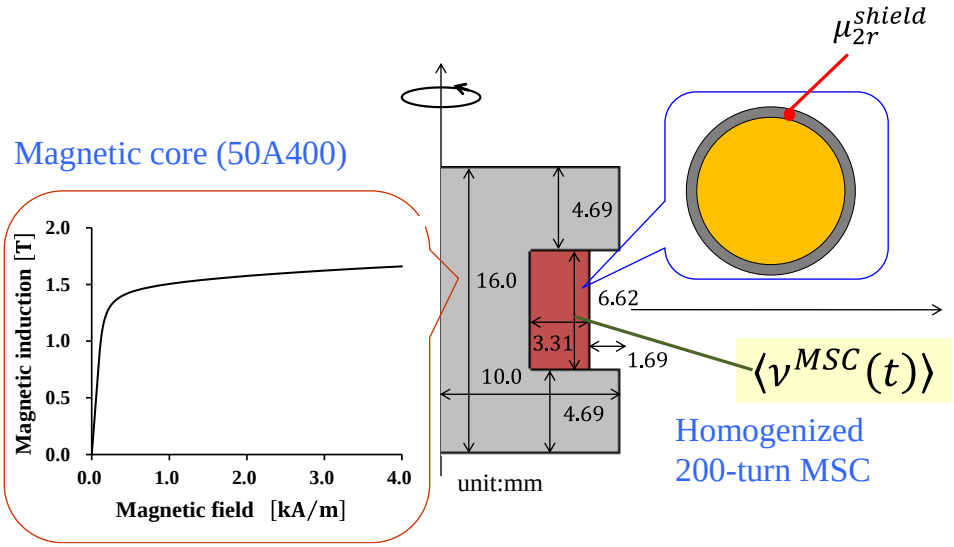


Fig.1.29 (Fig.8.10) Cross-section of an inductor equipped with a cylindrical MSC.
In this model, the magnetic core has the non-linear property due to magnetic saturation..

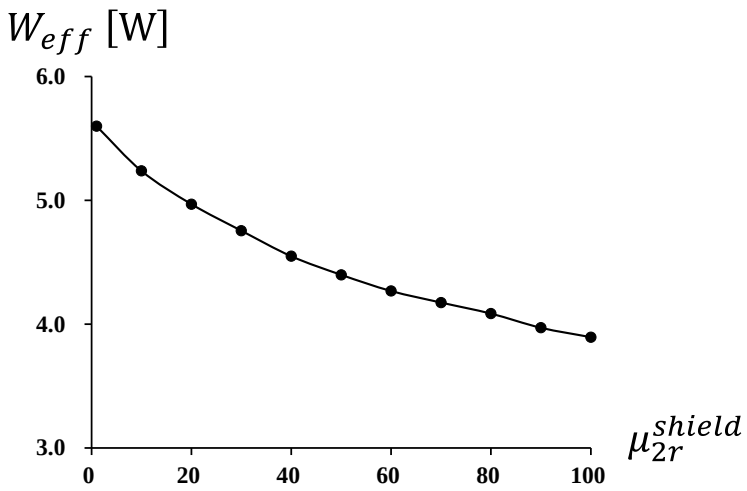


Fig.1.30 (Fig.8.11) Dependence of the copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of the magnetic shield μ_{2r}^{shield}.
From this figure, it can be concluded that MSCs are effective for reduction of the copper loss in the inductors due to the proximity effect.

第 9 章 インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング

本章では，電磁シールドのモデル化に有効なインピーダンス境界条件について，周波数領域で定義し，有限要素方程式と連成するための定式化について述べる．つぎに，周波数領域で，均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた解析結果が，従来の準静電磁界解析の場合と良好に一致することを示す．さらに，周波数領域において定義されたインピーダンス境界条件を，時間領域解析において適用するための方法に関しても議論する．

数値解析例として，Fig.1.31 に示すような系を考える．提案手法では，Fig.1.31 に示すようにコイル領域を第 3 章で述べたマクロ複素透磁率を用いて均質化する．一方で，電磁シールドにおいては，インピーダンス境界条件を課し，形状モデリング上厚さは 0 と

して扱うため，電磁シールド内部を離散化する必要はない．Fig.1.31 において解析領域全体の有限要素法においては，Fig.1.19 にも示したように，従来法では渦電流や素線間の空隙，並びに電磁シールド周辺の電磁界の局所的な変化を考慮するために十分な有限要素が必要であったため，解析に必要な有限要素数は 537,413 となった．一方で提案手法では，コイルは均質化され，さらに電磁シールドは境界条件に置換されているので，解析に必要な有限要素数は 7,965 となり，約 1 / 37 倍となった．

周波数領域におけるコイルの実効インピーダンスの評価を磁気シールドの厚さ d と共に Fig.1.32 に示す．Fig.1.32 から，両者の解析結果が $d = 1.0, 5.0$ mm いずれの場合においても十分に一致しているとわかる．本解析モデルでは，2 次元解析であれば従来法でも解析が可能であるが，提案手法を用いなければ 3 次元解析は難しいと思われる．なお，提案手法は磁気シールド表面にメッキが張られていても有効である．

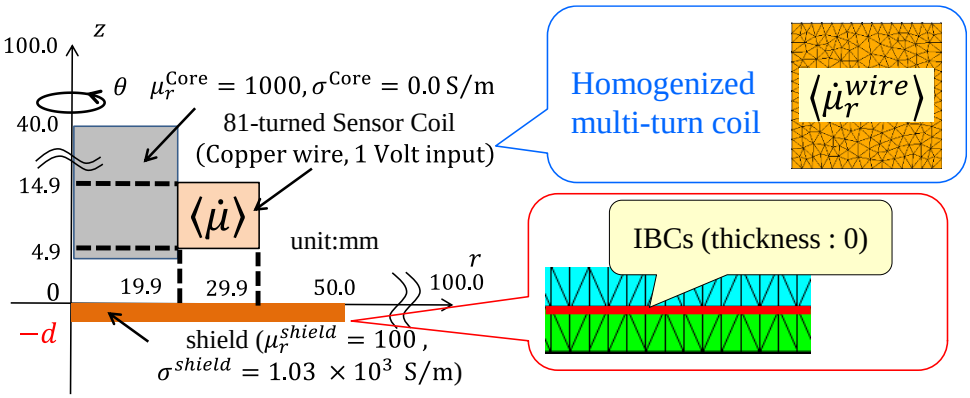
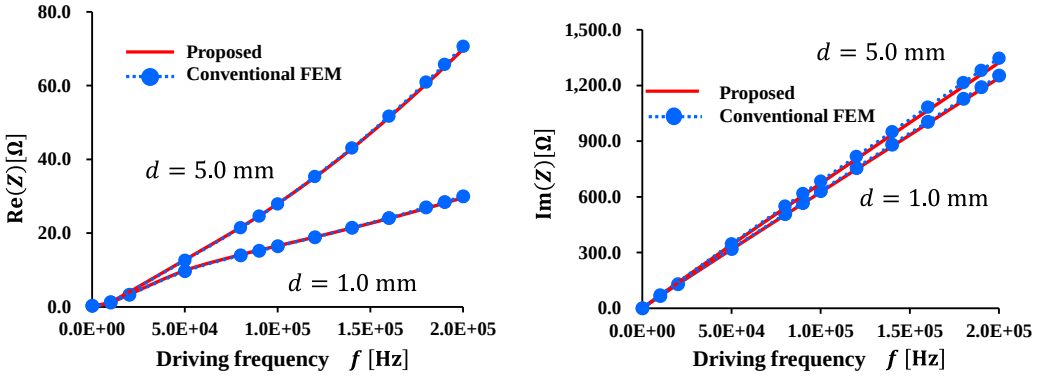


Fig.1.31 (Fig.9.5) Eddy current displacement sensor model.
In this model, the homogenized multi-turn copper coil placed above the magnetic-conductive shield. Here, when we apply the proposed method, we treat the magnetic-conductive shield as IBCs whose thickness is zero.



(a) Real part (b) Imaginary part

Fig.1.32 (Fig. 9.6) Impedances of the sensor-coil shown in Fig.1.31 (Fig.9.5) connected with a voltage source.
From this figure, it is found that the coil impedance obtained by using the homogenization method and IBCs coincides with that calculated by the conventional FEM.

第 10 章 結論と今後の研究課題

本博士論文の総括を行う．均質化有限要素法，インピーダンス境界条件を導入することによる有限要素数の低減，磁性被覆コイルの構造最適化，磁性被覆線による近接効果損失の低減，等についてまとめる．また，各章における数値解析結果から得られた知見についてまとめる．また，未解決の事項については，今後の研究課題として述べる．

第 1 章 参考文献

[1.1] 経済産業省資源エネルギー庁,「平成 26 年度エネルギーに関する年次報告」, http://www.enecho.meti.go.jp/about/whitepaper/2015pdf/. (2019.2.14 訪問)
[1.2] 財団法人新機能素子研究開発協会,「電力使用機器の消費電力量に関する現状と近未来の動向調査」, http://www.sicalliance.jp/data/doc/1504061424_doc_5_1.pdf. (2019.2.14 訪問)
[1.3] Y. Nagatsuka, N. Ehara, Y. Kaneko, S. Abe and T. Yasuda, “Compact Contactless Power Transfer System for Electric Vehicles”, IEEE, The 2010 International Power Electronics Conference, pp.807-813, 2010.
[1.4] Grant A. J. Elliot, Stefan Raabe, Grant A. Covic, and John T. Boys, “Mulitphase Pickups for Large Lateral Tolerance Contactless Power-Transfer Systems”, *IEEE Trans*., on Industrial Electronics, pp. 1590-1598, Vol. 57, No.5, MAY 2010.
[1.5] 森本茂雄, 真田雅之,「省エネモータの原理と設計法」, 科学情報出版株式会社, 2013.
[1.6] 松井信行,「電気機器学」, オーム社, 2000.
[1.7] H. Igarashi, et al., Shape optimization of rotor in interior permanent magnet motor based on topology optimization method using normalized Gaussian network, *IEEJ Trans*., Industry App., vol.135, no.3, pp.291-298, 2015 (in Japanese).
[1.8] 佐藤孝洋,「電磁界解析を用いた電気機器の最適設計に関する研究」, 北海道大学博士論文, 2015.
[1.9] J. Pyrhönen, T. Jokinen, V. Hrabovcova, "Design of rotating electrical machines, 2nd ed.", Wiely, 2014.
[1.10] 堀考正,「パワーエレクトロニクス」, オーム社, 2010.
[1.11] 高橋則雄, 「三次元有限要素法」 電気学会, 2006.
[1.12] 篠原真毅,「電界磁界結合型ワイヤレス給電技術」, 科学情報出版, 2014.
[1.13] Y. Chai, et. al., “Examination of LLC Resonant Converter Using Magnetoplated wire”, *IEEJ, Trans*., MAG-16-49, LD-16-41, pp.57-62, 2016.
[1.14] 水野勉, 他,「磁性めっき線を用いた磁界共振結合形非接触給電システム」, 日本 AEM 学会誌, pp.77-82 ,Vol. 21. No.1 2013.
[1.15] 水野勉, 米野史一, 林利明, 榎木茂美, 品川宏樹, 山田一, 渡辺誠一, 岸本哲, 竹下邦夫,「渦電流形変位センサの *Q* 値解析手法」, 日本磁気学会誌, Vol. 29, pp.296-301, 2005.
[1.16] 松村憲明, 町田博, 中原崇文,「渦電流式変位センサの抵抗成分推定法」, *IEEJ, Trans*., FM, Vol. 125, No.4, pp.301-308, 2005.
[1.17] 中山徳人, 卜穎剛, 水野勉,「非接触給電機構および誘導機構を有する消化管用体内ロボットの検討」, 日本 AEM 学会誌, vol.25, No.3, pp.332-337, 2017.
[1.18] 水野勉, 谷内慎太郎, 上田拓人, 大友隆平, 後藤徳仁,「磁性めっき線を用いた磁界共振結合形非接触給電システム」, 日本 AEM 学会誌, vol.21, No.1, pp.77-82, 2013.
[1.19] 平松広道, 石上孝, 長縄尚,「規制機構を用いた角線整列巻線技術の検討」, 精密

工学会，秋季大会，177-178, 2007.
[1.20]青山真大，他，「京コンピュータを用いた大規模電磁界解析―磁石形同期モータの導体渦電流損に関する検討―」，電気学会研究会資料，SA-18-23, RM-18-23, 2018.
[1.21] H. Shokrollahi, K. Janghorban, “Soft magnetic composite materials (SMCs),” *J.Mater*. Process. Technol., 189, pp. 1-12, 2007.
[1.22] G. Q. Lin, Z. W. Li, Linfeng Chen, Y. P. Wu, C. K. Ong, “Influence of demagnetizing field on the permeability of soft magnetic composites,” *J. Magn. Mater.*, vol. 305, pp. 291-295, 2006.
[1.23] 鋤柄あかね，倉橋貴彦，「磁気エネルギーの制御を目的とした磁気シールド構造のトポロジー最適化に関する考察」，日本材料学会，vol.68, no.12, pp.923-928, 2019.
[1.24] 今給黎明大， 徳永英明， 匹田政幸，「自動車運搬船内電源用の非接触給電システム構成の検討」，産業応用工学会論文誌，vol.7, no.1, pp.14-24, 2019.
[1.25] 本間利久，五十嵐一，川口秀樹，「数値電磁力学」，森北出版, 2002.
[1.26] 五十嵐一，亀有昭久，加川幸雄，西口磯春，A. Bossavit，「新しい計算電磁気学―基礎と数理―」，培風館，2003.
[1.27] 高橋則雄，「電気工学の有限要素法」，森北出版，1986.
[1.28] G. ダット, G. トゥゾー，「有限要素法全解」，パーソナルメディア, 1990.
[1.29] C. V. Dodd, W. E. Deeds, “Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems”, *J. Appl. Phys*., Vol.29, No.6, pp.2829-2838, May, 1968.
[1.30] S. K. Burke, “Eddy current induction in a uniaxically anisotropic plate”, *J. Appl. Phys*., vol.68, pp.3080-3090, 1990.
[1.31] H. Shinagawa, T. Suzuki, M. Noda, Y. Shimura, S. Enoki, and T. Mizuno, “Theoretical Analysis of AC Resistance in Coil Using Magnetoplated Wire”, *IEEE Trans., Magn.*, vol. 45, no. 9, pp.3251–3259, 2009.
[1.32] 斉藤貴伸，藤田雄一郎，武本聡，「反磁界の分布を考慮した圧粉磁芯の初磁化曲線考察」，日本磁気学会，vol.33, no.6, pp.434-440, 2009.
[1.33] J. Gyselinck and P. Dular, “Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1416–1419, 2005.
[1.34] A. Podoltsev and B. Lebedev, “Analysis of effective resistance and eddy current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components”, *IEEE Trans., Magn.*, vol. 39, no. 1, pp. 539–548, 2003.
[1.35] F. Ollendorff, "Magnetostatik der Massekerne", Arch. f. Eledtrotechnik., 25, pp. 436-447, 1931.
[1.36] 和木浩，「均質化法を用いた磁界解析に関する研究」，1996 年北海道大学修士論文.
[1.37] 伊藤泰久，「非適合要素および均質化を用いた電磁界解析に関する研究」，2016 年度北海道大学博士論文.
[1.38] 佐藤佑樹，「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」，2019 年度北海道大学博士論文.
[1.39] H. Igarashi, "Semi-Analytical Approach for Finite Element Analysis of Multi-turn Coil Considering Skin and Proximity Effects", *IEEE Trans., Magn.* vol.53, no. 1, 7400107, 2017.

[1.40] Y. Sato, H. Igarashi, "Effective Time-Domain Finite Element Analysis of Multi-Turn Coil Windings Based on Homogenization", to be submitted, *IEEE Trans., Magn*.
[1.41] Y. Itoh, H. Igarashi. M. Suzuki, Y. Iwasaki, K. Kawano, "Effect of Magnetic Contact on Macroscopic Permeability of Soft Magnetic Composite", *IEEE Trans. Magn*., vol.52. no.3, 9400804, 2016.
[1.42] A. Berthault, D. Rousselle, G.Zerah, “Magnetic Properties of Permalloy Microparticles”, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol.112, pp. 477-480, 1992.
[1.43] H. Igarashi, Y. Sato, S. Fujita, S. Hiruma, Y. Otomo, “Homogenization and Model Order Reduction for Fast FE analysis”, Int. COMPUMAG Society, Newsletter, vol.24, no.1, pp.3-14, 2017.
[1.44] S. Fujita, H. Igarashi, "Homogenization of Multi-turn Coil with Elliptic Cross Section Using Complex Permeability", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, vol.38m no.3, pp.999-1008, 2019.
[1.45] S. Fujita, H. Igarashi, "Finite element analysis of multi‐turn magnetoplated coils using homogenization method," Wiley Online Library, DOI.org/10.1002/eej.23156, 2018.
[1.46] S. Fujita, H. Igarashi, "Finite-Element Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenization Method," *IEEE Trans. Magn*., vol. 54, no. 3, Art. no. 7401104, 2018.
[1.47] S. Fujita, H. Igarashi, "Reduction of Eddy Current Loss in Rectangular Coils Using Magnetic Shield Analysis with Homogenization Method," *IEEE Trans. Magn*., vol.55, no.6, 7000604, 2019.
[1.48] 藤田祥伍，五十嵐一，「異方性と渦電流を考慮した圧粉磁芯の均質化モデル」，平成 31 年電気学会全国大会，5-130，札幌，3 月，2019.
[1.49] Senior, T. B. A., "Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces," Applied Scientic Research, Section B 8.1, pp.418-436, 1960.
[1.50] M. Feliziani, F. Maradei, G. Tribellini, “Field Analysis of Penetrable Conductive Shields by the Finite-Difference Time-Domain Method with Impedance Network Boundary Conditions (INBC’s)”, *IEEE Trans.* Electromagnetic Compatibility, vol.41. no.4, pp.307-319, 1999.
[1.51] L. Krahenbiihl, D. Muller, “Thin layers in Electrical Engineering. Example of Shell Models in Analysing Eddy-currents by Boundary and Finite Element Methods”, *IEEE Trans. Magn*., vol.29, no.2, pp.1450-1455, 1993.
[1.52] I.D. Mayergoyz, “On calculation of 3D Eddy Currents in Conducting and Magnetic Shells”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.31, no.3, pp.1319-1324, 1995.
[1.53] H. Igarashi, A. Kost and T. Honma, “Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its applications to integral equations”, European *Phys. J*., AP 7, pp.103-110, 1998.
[1.54] 藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた渦電流変位センサの電磁界解析」，平成 30 年電気学会全国大会，5-119，福岡，3 月，2018.

第 2 章　電磁界数値解析のための有限要素法

本章では，本研究で使用する電磁界数値解析手法である有限要素法について述べる．2.1 節では，電磁界有限要素法解析の概要を示し，本論文で用いる有限要素と，解析モデルに関して述べる．2.2 節では電磁界の種類毎に支配方程式を導く．2.3 節では，電磁界数値解析のために必要となる重み付残差法について述べ，電磁界の種類毎に有限要素方程式を導く．2.4 節では，電磁ポテンシャルを有限の自由度に変換するための Galerkin 法に関して述べ，0 次 Whitney 要素，1 次 Whitney 要素を用いた場合の有限要素方程式の離散形の定式化を与える．2.5 節では有限要素毎に離散化した連立方程式を導く．2.6 節では電磁界解析に必須な Dirichlet 境界条件，Neumann 境界条件について述べ，モータ解析に必要な非適合境界条件，周期境界条件に関して説明する．2.7 節では境界条件を考慮した上で，有限要素行列の構築に関して述べる．2.8 節では，3 次元空間における電流無発散条件に関して示す．2.9 節では磁気飽和を考慮した非線形解析に関して示す．2.10 では電圧源を考慮した回路方程式と有限要素方程式の連成に関して述べる．最後に 2.11 節で本章の内容をまとめる．

なお，本論文で使用する記号は Table 2.1 の通りである．

Table 2.1 Nomenclature of this chapter.

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field	$\boldsymbol{D}$ [C/m^2]	electric displacement
φ [V]	electric scalar potential	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
μ [H/m]	permeability of a magnetic material	$\nu = 1/\mu$ [m/H]	magnetic reluctivity
ϵ [F/m]	permittivity of a dielectric material	σ [S/m]	conductivity of a conductive material
R_{dc} [Ω]	DC resistance of an armature coil	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization of a magnetic material
f [Hz]	frequency	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	angular frequency
I [A]	current	V [V]	voltage
$\boldsymbol{J}$ [A/m^2]	current density	$\boldsymbol{j}$ [1/m^2]	unit current vector
j	imaginary unit	$\mathbf{e}_\xi$	base vector of the ξ-component
w [−]	scalar weighting function	$\boldsymbol{W}$ [1/m]	vector weighting function
N [−]	scalar interpolation function	$\boldsymbol{N}$ [1/m]	vector interpolation function

ϵ_{ijk}	Levi-Civita symbol	$(r,s),(\xi,\eta,\zeta)$	local coordinates (in 2D and 3D spaces)
$A_\xi \mathbf{e}^\xi$	covariant component of a vector $\boldsymbol{A}$	$A^\xi \mathbf{e}_\xi$	contravariant component of a vector $\boldsymbol{A}$
$\mathcal{J}$	Jacobi matrix	$\lvert\mathcal{J}\rvert$	Jacobian

2.1　電磁界解析における有限要素法の概要

電磁界解析においては，解析モデルの形状が複雑であることや磁性体の磁気非線形特性をも考慮する必要があるために，解くべき微分方程式の厳密解を求めることは一般には難しい．本研究では，電磁界解析において使用される手法のうち，有限要素法を用いて数値解析を行う．有限要素法とは，まず解析領域全体を有限要素とよばれる微小領域に離散化し，1 要素内での考察から得られた量を，最後に重ね合わせて解くべき微分方程式を連立 1 次方程式に変換し，求めるべき未知数を数値解析で求める手法である．本法は微分・積分法の基礎に基づく発想に立脚しているために利便性が高く，現在では構造力学，流体力学，熱力学，電磁気学などの様々な分野で応用されている．電磁界解析における有限要素法では，電磁ポテンシャルを有する有限要素を用いて解析空間を離散化し，無限の自由度を有する電磁ポテンシャルを有限の自由度の離散化された関数に変換することで，Maxwell 電磁方程式を，電磁ポテンシャルを未知数とする連立方程式に置き換え，数値計算により求められた電磁ポテンシャルから電磁界を得る[2.1-2.7].

一般的な有限要素法では，まず解析領域全体を有限要素と呼ばれる単純な形状の小領域に分割する．このようにして得られた空間を有限要素空間と呼ぶ．そして，各要素に含まれる節点や辺上に電磁ポテンシャルを割り当て，補間関数を用いて線形補間する．そして系に対する連立 1 次方程式を作成し，有限要素空間における電磁ポテンシャルを求め，電磁界を計算する．2 次元モデルに対しては三角形要素や四角形要素，3 次元モデルに対しては四面体要素や六面体要素等の様々な形状の要素で離散化する．なお 3 次元解析においては，後に述べる辺要素を有する 1 次 Whitney 要素を用いることで，隣接した有限要素同士の物理的な接続条件をも満足した解析を行うことが可能になる．

本章では，電磁界解析を有限要素法により行うための定式化を与える．なお，本研究において使用する有限要素と，解析対象となるモデルについて Table 2.2 に示す．

Table 2.2 Classification of finite element analyses employed in this doctor thesis.

解析空間	電磁界	有限要素	解析対象
2 次元平面	静磁界	1 次四角形要素	IPM モータ
	周波数領域準静電磁界	1 次三角形要素	Unit-Cell 中の磁性体
軸対称 2 次元平面	静磁界	1 次三角形要素	均質化されたマルチターンコイル

	周波数領域準静電磁界	1 次三角形要素	• 渦電流形変位センサ • インピーダンス境界条件を適用した電磁シールドを含む系 • インダクタ
	時間領域準静電磁界	1 次三角形要素	• 渦電流形変位センサ • インピーダンス境界条件を適用した電磁シールドを含む系 • インダクタ
3 次元空間	静磁界	1 次四面体要素	• 均質化されたマルチターンコイル
	周波数領域準静電磁界	1 次四面体要素	• 3 次元 Unit-Cell 中の圧粉磁芯解析
	周波数領域準静電磁界	1 次六面体要素	• 3 次元 Unit-Cell 中の圧粉磁芯解析

2. 2　電磁界の支配方程式

2. 2. 1　静磁界における支配方程式

静磁界はつぎの Maxwell 電磁方程式に支配される[2.8-10].

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} \tag{2.1a}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.1b}$$

(2.1a)は磁性体の磁化電流を考慮した Ampère の法則で, (2.1b)は磁気に関する Gauss の法則であり， $\boldsymbol{B}$ はソレノイダル界を形成し，磁束の湧き出しや吸い込みがないことを表す．(2.1a)の右辺第 1 項は，強制電流による項で，例えばコイルに流れる電流等を表す．一方で，(2.1a)の右辺第 2 項の磁化電流は，例えばモータ解析等で永久磁石を考慮する際にソースとして必要となる(等価磁化電流密度)．また，解析領域に存

在する磁性体はヒステリシス性が無視できる線形性の材質からなると仮定し，そのテンソル型透磁率を $[\mu]$ とすると，構成関係式は下記のようになる．

$$\boldsymbol{B} = [\mu]\,\boldsymbol{H} \tag{2.2}$$

(2.1b)から，Poincare の捕題より、$\boldsymbol{B}$ は磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{2.3}$$

と表すことができる．ただし，ここでは $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャルによる任意性を取り除くため，Coulomb ゲージ

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.4}$$

を適用して，$\boldsymbol{A}$ は一意に決定されるとする．(2.3)を(2.2)に代入し，さらにこれを(2.1)に代入することで，

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}_0 + [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} \tag{2.5}$$

を得る．ここで $[\nu] = [\mu]^{-1}$ はテンソル型磁気抵抗率である．(2.5)が，一般的な静磁界の支配方程式である．なお，磁化電流の効果を無視できる場合には，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ としてよい．

2. 2. 2　時間領域準静電磁界における支配方程式

渦電流を考慮した電磁界はつぎの Maxwell 電磁方程式に支配される[2.8-2.10].

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} \tag{2.6a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.6b}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.6c}$$

ここで，Ampère の法則(2.6a)の右辺は解析領域中の電流項であり，第 1 項は強制電流(電源による電流)，第 2 項は渦電流，第 3 項は変位電流(真空の変位電流と分極電流を含む)，第 4 項は磁化電流である．また，(2.6b)は Faraday の電磁誘導の法則であり，導体に渦電流が流れることを示す．

いま，電流が流れている素線が純銅線 $\left(\mu_r^{\mathrm{Cu}} \approx 1.0, \sigma^{\mathrm{Cu}} \approx 5.76 \times 10^7\ \mathrm{S/m}\right)$ を仮定する．この場合，磁化電流は十分に弱いだろう．構成関係式 $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ を考え，電界が周期変動する場合には，$\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E}$ であるから，この場合の(2.6a)の右辺第 2 項，第 3 項の比をとると，

$$\left|\frac{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}}{\sigma\boldsymbol{E}}\right| = \frac{\epsilon\omega}{\sigma} \tag{2.7}$$

である．銅の比誘電率を 1 とすると，準定常電磁界の周波数帯域では(2.7)の値は小さい．したがって，変位電流の効果が現れるのは非常に周波数が高い場合であるが，一般的には渦電流問題ではこのような周波数帯は考えない[2.10]．したがって，本論文では変位電流の項の影響がないとして考える．

変位電流，及び磁化電流の効果を無視し，さらに，時間変動する電磁界を考えると，(2.6)は結局

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} \tag{2.8a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.8b}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.8c}$$

に帰着する．このような近似を準静近似とよぶ．(2.8c)から(2.3)が得られるので，電界は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.9}$$

と記述できる．(2.9)右辺第 1, 2 項はそれぞれ電磁誘導による電界，静電界を表している．(2.8a)に(2.3), (2.9)を代入して，

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right) = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.10}$$

を得る．なお，2 次元解析の際に，断面で全ての導体が導電位にある場合には，$\mathrm{grad}\,\varphi = 0$ としてもよい[2.4]．(2.9)は未知関数として $\boldsymbol{A}, \varphi$ を含んでいるので，このままでは方程式が閉じない．そこで，(2.9)の両辺の発散をとると，電流無発散条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$ と合わせて

$$\mathrm{div}\,\sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right) = 0 \tag{2.11}$$

を得る．(2.10)が一般的な準静電磁界の支配方程式となる．従って，準静電磁界における支配方程式は，

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right) = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.10}$$

$$\mathrm{div}\,\sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right) = 0 \tag{2.11}$$

という連立方程式となる．(2.10), (2.11)のように導体に電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}, \varphi$ を割り当て，導体以外の領域では磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のみを未知関数として，方程式を解き，電磁界を求める方法を $\boldsymbol{A} - \varphi$ 法と呼ぶ．後に示すように，$\varphi = 0$として有限要素方程式を解ける場合もあり，この場合は $\boldsymbol{A}$ 法と呼ぶ．後述するが，実際に，辺要素で $\boldsymbol{A}$ を表現する場合，$\mathrm{grad}\,\varphi$ は辺要素によって張られる空間に含まれ，辺要素で表すことが可能であるから，$\mathrm{grad}\,\varphi = 0$ としても差し支えない[e.g. 2.1]．しかしながら，導体内で電位差を考慮する場合，$\mathrm{grad}\,\varphi = 0$ とはできない[e.g. 2.4, 5].

2. 2. 3　周波数領域準静電磁界における支配方程式

電磁界が周期変動する場合には，(2.10), (2.11)において，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ に置き換えた以下の方程式が周波数領域での支配方程式となる．

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + \sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\varphi) = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.12a}$$

$$\mathrm{div}\,\sigma(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\varphi) = 0 \tag{2.12b}$$

この場合，準定常電界は(2.9)からつぎのように表される．

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.13a}$$

ただし，後に述べるように，有限要素方程式を解く際には，係数行列を対称行列にするために，

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \mathrm{j}\omega\mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.13b}$$

とする場合が多い[e.g. 2.1].

2. 3 有限要素方程式の導出

本節では，2.2 節で導いた支配方程式を解くための有限要素方程式を導入する．本研究では，解析領域全体を 2 次元解析では節点要素(0 次 Whitney 要素)を，3 次元解析では磁気ベクトルポテンシャルを辺に，電気スカラーポテンシャルを節点に割り当てた 1 次 Whitney 要素を用いて離散化する．

2. 3. 1　重み付残差法

例えば静電磁界の支配方程式(2.5)は $\boldsymbol{A}$ を未知関数とする 2 階微分方程式であり，一般的にはこのままでは解を求めることは困難である．そこで，重み付残差法を導入し，解くべき連立方程式を求めることを考える[e.g. 2.2]．静磁界の支配方程式(2.5)の $\boldsymbol{A}$ に近似解 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ を代入すると，一般的には右辺と左辺の差

$$\boldsymbol{R} \coloneqq \mathrm{rot}\left([\nu]\,\mathrm{rot}\,\widehat{\boldsymbol{A}}\right) - \boldsymbol{J}_{all} \tag{2.14}$$

は 0 にはならない．ここで，右辺の表記を全電流 $\boldsymbol{J}_{all}$ とした．この $\boldsymbol{R}$ はベクトルの残差である[2.2]．この残差を重み付平均の意味で 0 にすることを考える．$\boldsymbol{A}-\varphi$ 法を用いた準静電磁界解析の場合においても(2.10), (2.11)の $\boldsymbol{A}, \varphi$ に近似解 $\widehat{\boldsymbol{A}}, \hat{\varphi}$ を代入すると，一般的には右辺と左辺の差について

$$\boldsymbol{R}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}, \hat{\varphi}\right) \neq \boldsymbol{0} \tag{2.15a}$$

$$r\left(\hat{A}, \hat{\varphi}\right) \neq 0 \tag{2.15b}$$

である．ここで，r は $\widehat{\boldsymbol{A}}$ の一成分 $\hat{A}$ のみに注目した場合の支配方程式の左辺と右辺の差から得られるスカラーの残差である．

ここで最小二乗法の発想と同様に，分布した残差 $\boldsymbol{R}, r$ に重み付関数 $\boldsymbol{W}, w$ を乗じて，解析領域全体 Ω を積分した値が 0 となる必要条件を課すと

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{R}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}, \hat{\varphi}\right)\mathrm{d}\Omega \neq 0 \tag{2.16a}$$

$$\int_{\Omega} wr(\hat{A},\hat{\varphi})\mathrm{d}\Omega \neq 0 \tag{2.16b}$$

を考えることができる．逆に，任意の $\boldsymbol{W}, w$ に対して，(2.16)が成立するなら，元の支配方程式(2.10), (2.11)が得られるので，(2.10), (2.11)を解く代わりに(2.16)を満足するような $\boldsymbol{A}, \varphi$ を求める問題に置き換えて議論することができる．

このようにして導かれた有限要素方程式は，解析力学で現れる Euler-Lagrange 方程式を導く際に用いられる変分最小原理からも同じ式に帰着する(Rayleigh-Ritz 法)[e.g. 2.4].

2. 3. 2　2 次元静磁界における有限要素方程式

本節では, 2 次元静磁界問題に対する有限要素方程式を考える. 簡単のため Fig.2.1 に示すような xy 平面での解析モデルを考えると， $\boldsymbol{A} = A_z\mathbf{e}_z$ であるので，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁化電流密度 $\boldsymbol{J}_m$ は

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\mathbf{e}_y = \nabla A_z(x,y) \times \mathbf{e}_z \tag{2.17a}$$

$$\boldsymbol{J}_m = \nu_0\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} = \nu_0\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \tag{2.17b}$$

である．ここで，$A \coloneqq A_z, J \coloneqq J_z$ とし，磁気抵抗はテンソル型

$$[\nu_{xy}] = \begin{bmatrix}\nu_x & 0\\ 0 & \nu_y\end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\nu_x,\nu_y) \tag{2.18}$$

を想定し，各領域内では一様な磁気抵抗を有するものとする．この仮定の下で,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) &= \mathrm{rot}\left([\nu]\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\mathbf{e}_y\right)\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\nu_y\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_x\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right)\mathbf{e}_z\\ &= -\nabla\cdot\left(\nu_y\frac{\partial A_z}{\partial x} + \nu_x\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z\\ &= -\nabla\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{2.19}$$

となる．ここで,

$$[\nu_{yx}] = \begin{bmatrix}\nu_y & 0\\ 0 & \nu_x\end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\nu_y,\nu_x) \tag{2.20}$$

とおいた．以上から，静磁界の支配方程式(2.5)は，Poisson 方程式

$$\nabla\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)=-J_0-\nu_0\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right) \tag{2.21}$$

となる．

さて，(2.20)に対して，重み付残差法を用いて，A を求めることを考える．両辺にスカラー重付関数 $w:=w(x,y)$ を乗じて，解析領域 Ω で面積積分すると，

$$\int_\Omega w\{\nabla\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\}\,\mathrm{d}S=-\int_\Omega w\left\{J_0+\nu_0\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}S \tag{2.22}$$

を得る．ここで，φ をスカラー関数，$\boldsymbol{a}$ をベクトル関数として，ベクトル公式 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ が成立するので，$w\to\varphi,\boldsymbol{a}\to\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)$ とすると

$$w\nabla\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)=\nabla\cdot\Big(w\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\Big)-\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\cdot\nabla w \tag{2.23}$$

であるから，(2.22)は

$$\int_\Omega\nabla w\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla\cdot\Big(w\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\Big)\mathrm{d}S$$

$$=\int_\Omega w\left\{J_0+\nu_0\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}S \tag{2.24}$$

となる．ここで，左辺第 2 項に対して，Gauss の発散定理を適用すると

$$\int_\Omega\nabla w\cdot\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega}w\left([\nu_{yx}]\nabla A\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_\Omega w\left\{J_0+\nu_0\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}S \tag{2.25}$$

ここで，解析領域の境界を $\partial\Omega$，$\partial\Omega$ 上の線素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ とした．(2.5)では未知関数 A について 2 階微分が要求されていたのに対して，(2.25)では 1 階微分のみが現れる．従って，(2.5)は $\boldsymbol{A}$ が少なくとも 2 階微分できる関数でなければならなかったが，(2.25)が解けるためには解析領域内に発散するポテンシャルが含まれていないこと，つまり積分が有界であれば十分で，∇A は一般に不連続関数であってもよい[2.2]．この意味で，(2.25)は弱形式(weak form)と呼ばれる．(2.25)が静磁界における有限要素方程式となり，有限要素を用いた離散化は後に述べる．

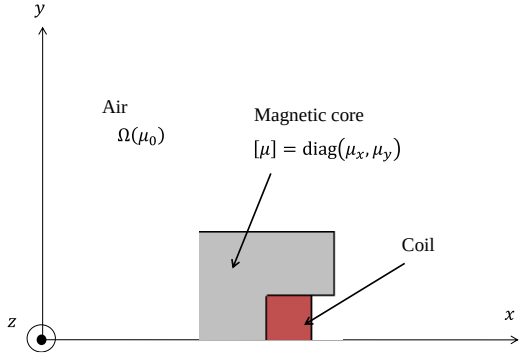


Fig.2.1 Example of analysis models in 2D space.

2. 3. 3　2 次元準静電磁界における有限要素方程式

Fig.2.2 に示すような 2 次元平面 xy 内に導体があり，電磁界が時間的に周期変動する場合の解析を行う．このような電磁界は，渦電流を考慮した 2 次元準静電磁界である．本論文では，この定式化を後に示す Unit-Cell approach による均質化法の際に用いる．なお本論文では，2 次元準静電磁界解析において，永久磁石が存在する問題は扱わないので，本定式化では磁化電流は無視し，導体内の電位差を考慮しなくてもよい問題，すなわち $\varphi = 0$ の場合を考える．これらの条件で，支配方程式は

$$\mathrm{rot}\left([\nu_{xy}]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\right) + \mathrm{j}\omega\sigma\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0 \tag{2.26}$$

と書ける．以下では 2 次元解析を想定し，$A \equiv A_z, J \equiv J_z$ とする．さて，(2.21)を導いたように，(2.26)に対して重み付残差法から

$$\int_\Omega w\{\nabla\cdot([\nu_{yx}]\nabla A) + \mathrm{j}\omega\sigma A + J_0\}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{2.27}$$

を得る．(2.21)から(2.25)を導いた過程と同様の過程で，つぎの方程式が導ける．

$$\int_\Omega \nabla w\cdot([\nu_{yx}]\nabla A)\,\mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega\sigma\int_\Omega wA\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} w([\nu_{yx}]\nabla A)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\Omega wJ_0\,\mathrm{d}S \tag{2.28}$$

(2.28)が(2.10)の弱形式であり，2 次元準静電磁界の支配方程式である．

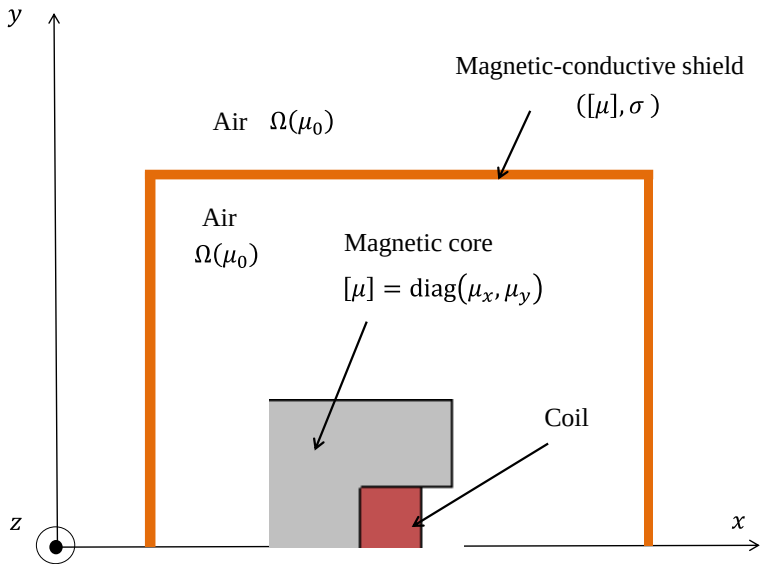


Fig.2.2 Example of analysis models including a conductive material in 2D space.

2. 3. 4　軸対称 2 次元準静電磁界の有限要素方程式

Fig.2.3 に示すような軸対称系(r,θ,z)の電磁界解析を行う．本定式化は，マルチターンコイルを含む系の有限要素解析に用いることができる．(r,θ,z)座標系において，準静電磁界解析の場合，$\varphi=0$としてよい．また $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{J}$ は θ 成分のみを有するので，$\boldsymbol{A}=A_\theta\mathbf{e}_\theta,\boldsymbol{J}=J_\theta\mathbf{e}_\theta$ である．軸対称場においては，2 通りの解法が知られており，A_θ を未知数とする方法と，$\psi:=rA_\theta$で定義される ψ を未知数とする方法がある[2.5]. 以下ではそれぞれの場合で有限要素方程式を導く．なお，本論文では，軸対称座標で永久磁石が存在する問題は扱わないので，本定式化では磁化電流は 0 とする．

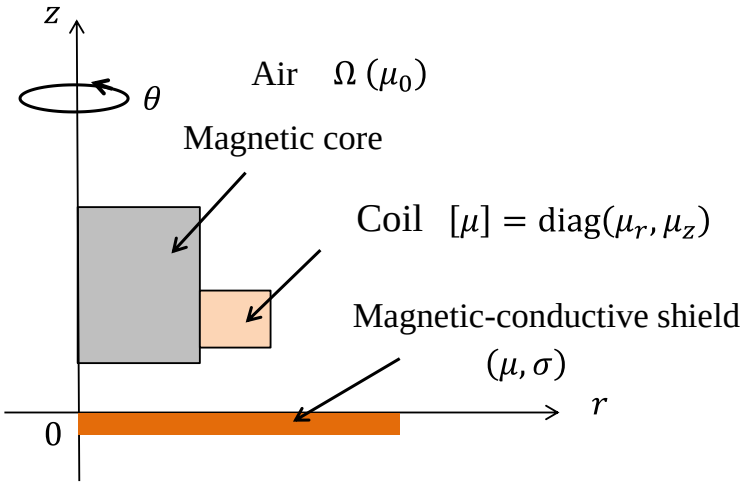


Fig.2.3 Example of analysis models in the axisymmetric coordinates (r,θ,z).

2. 3. 4. 1　A_θ を未知数とした場合の有限要素方程式

(r,θ,z)座標系において，磁束密度は A_θ を用いると

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\mathbf{e}_z \tag{2.29}$$

と書ける．従って，

$$\mathrm{rot}\,([\nu_{rz}]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{rot}\left([\nu_{rz}]\left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\mathbf{e}_z\right)\right)$$

$$=-\left(\nu_z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right)+\nu_r\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\theta=-\tilde{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\tilde{\nabla}(rA_\theta)\right\}\mathbf{e}_\theta \tag{2.30}$$

となる．(2.30)において，(r,z)平面での空間微分演算子 $\tilde{\nabla}$ を

$$\tilde{\nabla}:=\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{2.31}$$

と定義した．この表示は計量(Appendix E 参照)を除いた表示となっている．(2.31)を導入することで得られる(2.30)の表示が(2.19)に対応しているとわかる．さらに磁気抵抗はテンソル型

$$[\nu_{rz}] = \begin{bmatrix} \nu_r & 0 \\ 0 & \nu_z \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\nu_r, \nu_z) \tag{2.32a}$$

$$[\nu_{zr}] = \begin{bmatrix} \nu_z & 0 \\ 0 & \nu_r \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\nu_z, \nu_r) \tag{2.32b}$$

を考え，各要素内では一様な磁気抵抗を有するものとする．

さて，準静電磁界における支配方程式(2.10)を円筒座標系で $\boldsymbol{A}$ 法により解くことを考える．(2.10)の $\mathbf{e}_\theta$ 成分に注目し，重み付残差法を適用する．両辺にスカラー重付関数 $w \coloneqq w(r,z)$ を乗じて，解析領域 Ω で体積積分すると (2.12a), (2.30) から

$$\int_\Omega w\left[-\widetilde{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\right\} + \sigma\frac{\partial A_\theta}{\partial t}\right]\mathrm{d}v = \int_\Omega wJ_0\mathrm{d}v \tag{2.33}$$

を得る．ここで，φ をスカラー関数，$\boldsymbol{a}$ をベクトル関数として，ベクトル公式 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ において，$\varphi \to rw, \boldsymbol{a} \to (1/r)[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)$ とすると

$$\frac{1}{r}\times rw\left[\widetilde{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\right\}\right] = \frac{1}{r}\widetilde{\nabla}\cdot\left(w[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\right) - \frac{1}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\cdot\frac{1}{r}\widetilde{\nabla}(rw) \tag{2.34}$$

であるから，(2.33)は

$$\int_\Omega \frac{1}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\cdot\frac{1}{r}\widetilde{\nabla}(rw)\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{1}{r}\widetilde{\nabla}\cdot\left(w[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\right)\mathrm{d}S$$

$$+\int_\Omega w\sigma\frac{\partial A_\theta}{\partial t}\mathrm{d}S = \int_\Omega wJ_0\mathrm{d}S \tag{2.35}$$

となる．ここで，円筒座標系の体積素は $\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，面積素は $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ であり，θ 方向の積分については 2π であるが，(2.35)両辺の被積分項には θ に依存する項がないため，(2.35)では θ 成分は省略している．(2.35)左辺第 1 項に対して，Gauss の発散定理を適用すると

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\widetilde{\nabla}(rw)\cdot\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega}\frac{w}{r}[\nu_{zr}]\widetilde{\nabla}(rA_\theta)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$+\int_\Omega w\sigma\frac{\partial A_\theta}{\partial t}\mathrm{d}S = \int_\Omega wJ_0\mathrm{d}S \tag{2.36}$$

を得る．ここで，解析領域の境界を $\partial\Omega$，$\partial\Omega$ 上の線素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ とした．(2.36)は(2.10)の弱形式(weak form)と呼ばれる．(2.33)が A_θ を未知数とする準静電磁界における有限要素方程式となり，有限要素を用いた離散化は後に述べる．なお，静磁界解析の際は(2.36)において $\sigma = 0$ とすればよい．

2. 3. 4. 2　ψ を未知数とした場合の有限要素方程式

(r,θ,z)座標系において，磁束密度は流束関数 $\psi \coloneqq rA_\theta$ を用いると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_z \tag{2.37}$$

となる．(2.37)を(2.10)に代入することで，

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu_r}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi}{r} = -\frac{1}{r}J_0 \tag{2.38a}$$

を得る．(2.38a)は勾配を用いて

$$\frac{1}{r}\left(\nabla\cdot\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\nabla\psi\right)-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi}{r} = -\frac{1}{r}J_0 \tag{2.38b}$$

と表記することもできる．ここで，電流項を $\boldsymbol{J} = J_\theta\mathbf{e}_\theta$ とした．(2.38)が，軸対称 2 次元準静電磁界において，ψ を未知数とした支配方程式である．つぎに，重付残差法を用いて，2.3.3.1 節と同様に弱形式を導く．体積素 $\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ で(2.38)の両辺にスカラー重付関数 $w(x,y)/r$ を乗じて体積積分すると

$$\int_z\int_r \frac{w}{r}\left[\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu_r}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}-\sigma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi}{r}\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = -\int_z\int_r\frac{w}{r}\left[\frac{1}{r}J_0\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.39}$$

となる．ここで，合成関数の微分則より，次の関係式を得る．

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_z w}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\nu_z w}{r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\nu_z w}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{2.40a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu_r w}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\nu_r w}{r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\nu_r w}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{2.40b}$$

さらに(2.31)で定義した空間微分演算子 $\tilde{\nabla}$ を用いると，(2.39)は

$$\int_z\int_r\left\{\frac{1}{r}\tilde{\nabla}w\cdot\left([\nu_{zr}]\tilde{\nabla}\psi\right)+w\sigma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi}{r}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}z-\int_z\int_r\tilde{\nabla}\cdot\left(\frac{w}{r}[\nu_{zr}]\tilde{\nabla}\psi\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$= \int_z\int_r\frac{w}{r}J_0\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.41}$$

と改めることができる．また，(2.41)の左辺第 2 項において，解析領域の境界を $\partial\Omega$，$\partial\Omega$ 上の線素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ とし，Gauss の発散定理を適用すると，

$$\int_z\int_r\left\{\frac{1}{r}\tilde{\nabla}w\cdot\left([\nu_{zr}]\tilde{\nabla}\psi\right)+w\sigma\frac{\partial}{\partial t}\frac{\psi}{r}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}z-\int_{\partial\Omega}\frac{w}{r}\left([\nu_{zr}]\tilde{\nabla}\psi\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_z\int_r\frac{wJ_0}{r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.42}$$

となる．(2.42)は(2.9)の弱形式であり，軸対称座標系における $\psi \coloneqq rA_\theta$ を未知数とした準静電磁界の有限要素方程式となる．なお，静磁界解析の際は(2.42)において $\sigma = 0$ とすればよい．

2. 3. 4. 3　周波数領域における軸対称 2 次元準静電磁界の有限要素方程式

電磁界が周期変動する場合には，(2.36), (2.42)において，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ に置き換えると，周波数領域において，解くべき方程式が得られる．すなわち，A_θ を未知数とする場合には

$$\int_\Omega \left\{\frac{1}{r}\tilde{\nabla}(rw)\cdot\frac{1}{r}[\nu_{zr}]\tilde{\nabla}(rA_\theta) + \mathrm{j}\omega w\sigma A_\theta\right\}\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega}\frac{w}{r}[\nu_{zr}]\tilde{\nabla}(rA_\theta)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\Omega wJ_0\mathrm{d}S \quad (2.43)$$

を，$\psi \coloneqq rA_\theta$ を未知数とする場合には

$$\int_z\int_r \frac{1}{r}\tilde{\nabla}w\cdot[\nu_{zr}]\frac{1}{r}\tilde{\nabla}\psi + \mathrm{j}\omega\sigma w\frac{\psi}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z - \int_{\partial\Omega}\frac{w}{r}\left([\nu_{zr}]\tilde{\nabla}\psi\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_z\int_r w\,J_0\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.44)$$

を解けばよい．この場合，定常状態に達した電磁界の議論となる．

2. 3. 5　3 次元解析の場合

2. 3. 3 節までは 2 次元問題を取り扱ったが，本節では，Fig.2.4 に示すような 3 次元問題を取り扱う．なお，本論文では，3 次元空間で永久磁石が存在する問題は扱わないので，本定式化では，簡単のため $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ とする．また，特に断らない限り，磁気抵抗は $[\nu] = [\nu_{xyz}] = \mathrm{diag}(\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ とする．局所座標系との整合性は第 3 章 3.14 節で取り扱う．

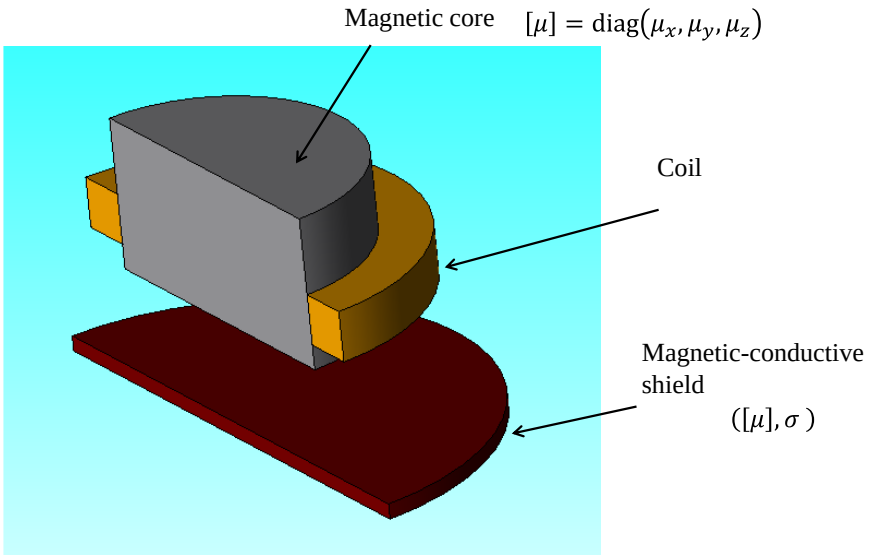


Fig.2.4 Example of analysis models in 3D space.

2. 3. 5. 1　3 次元静磁界における有限要素方程式

まず本節においては，静磁界の解析を行うための有限要素方程式を導出する．静磁界の支配方程式(2.5)において，両辺とベクトル補間関数 $\boldsymbol{W}$ の内積をとり，解析領域 Ω で体積積分して

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.45}$$

を得る. (2.45)の左辺に対して, ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に関するベクトル公式 $\boldsymbol{A} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) - \mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ を適用して

$$\int_{\Omega} \{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} \cdot [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{div}(\boldsymbol{W} \times [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.46}$$

と変形できる．さらに，(2.46)左辺第 2 項に対して，Gauss の発散定理を適用して

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} \cdot [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{W} \times [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.47}$$

となる. ここで, $\partial\Omega$ は Ω の境界面, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ はその表面積ベクトルである. (2.47)は, (2.5)に比べて，未知数 $\boldsymbol{A}$ に対する微分の階数が 1 になっているので，(2.47)もまた弱形式と呼ばれる. (2.47)が, 3 次元静磁界解析において解くべき有限要素方程式である.

2. 3. 5. 2　時間領域 3 次元準静電磁界の場合

本節においては，3 次元空間での準静電磁界の解析を行うための有限要素方程式を導出する．準静電磁界の支配方程式(2.10)において，両辺とベクトル補間関数 $\boldsymbol{W}$ の内積をとり, 解析領域で体積積分し, (2.11)において両辺とスカラー補間関数 w の積をとり，解析領域 Ω で体積積分することで

$$\int_{\Omega} \left\{\boldsymbol{W} \cdot \mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{W} \cdot \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right)\right\}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.48a}$$

$$\int_{\Omega} w\left\{\mathrm{div}\,\sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right)\right\}\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.48b}$$

を得る．(2.50a)の左辺第 1 項に対して，ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に関するベクトル公式 $\boldsymbol{A} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) - \mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ を，(2.50b)の左辺に対して，ベクトル公式 $\varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \mathrm{div}\varphi\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{A}$ をそれぞれ適用して(2.47)は

$$\int_{\Omega} \left\{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} \cdot [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{div}(\boldsymbol{W} \times [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{W} \cdot \sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\right)\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \qquad (2.49a)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathrm{div}\, w\sigma \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \varphi \right) - \mathrm{grad}\, w \cdot \sigma \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \varphi \right) \right\} \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (2.49b)$$

と変形できる．さらに，(2.49a)左辺第 2 項，(2.49b)左辺第 1 項に対して，Gauss の発散定理を適用して

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{W} \cdot [\nu] \, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{W} \times [\nu] \, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$+ \int_{S} \boldsymbol{W} \cdot \sigma \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \varphi \right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \qquad (2.50a)$$

$$\int_{\partial\Omega} w\sigma \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \varphi \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_{\Omega} \mathrm{grad}\, w \cdot \sigma \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \varphi \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (2.50b)$$

と変形できる．ここで，$\partial\Omega$ は Ω の境界面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ はその面素ベクトルである．(2.50)が弱形式であり，3 次元準静電磁界解析において，解くべき有限要素方程式である．

2. 3. 5. 3　周波数領域 3 次元準静電磁界の場合

電磁界が 3 次元空間において周期変動する問題を考える場合には，(2.50)において，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ に置き換えると，周波数領域において，解くべき方程式が得られる．すなわち，解くべき方程式は

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{W} \cdot [\nu] \, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{W} \times [\nu] \, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$+ \int_{S} \boldsymbol{W} \cdot \mathrm{j}\omega\sigma (\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\, \varphi) \cdot \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \qquad (2.51a)$$

$$\mathrm{j}\omega\sigma \int_{\partial\Omega} w(\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\, \varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \mathrm{j}\omega\sigma \int_{\Omega} \mathrm{grad}\, w \cdot (\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\, \varphi) \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (2.51b)$$

となる．(2.51)を解くことで，定常状態での議論を行うことができる．なお，(2.51b)について，(2.51)を $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\varphi}$ 法で解く際に，本来電磁気学的には電界は(2.9)で与えられるが，後で得られる有限要素方程式を ICCG 法で解く際には，有限要素行列が対称行列であることが必要なので，ここでは $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \mathrm{j}\omega\boldsymbol{\varphi}$ と改めて定義した[e.g. 2.1].

2.4　有限要素の定義と Galerkin 法を用いた有限要素方程式

有限要素法では，解析領域全体を有限要素を用いて離散化し，各有限要素内の物理量を補間関数で近似して計算する．一般的な有限要素解析の場合には，未知数として，電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}, \varphi$ を選ぶ場合が多い[e.g. 2.1]．また，要素内の物理量を要素の節点上で定義するのか辺上で定義するかで，有限要素の種類が異なる．節点にスカラー量を定義した要素を 0 次 Whitney 要素，辺上にベクトルを用いた辺要素を定義した要素を 1 次 Whitney 要素と呼ぶ[e.g. 2.7]．有限要素の形状には，2 次元問題では例えば三角形，四角形が用いられ，3 次元問題では例えば四面体，六面体等が使用される．本論文では，軸対称場の解析においては 1 次三角形要素，モータの 2 次元解析では節点に磁気ベクトルポテンシャルを離散化した 1 次四角形要素，3 次元解析では辺に磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を，節点に電気スカラーポテンシャル φ をそれぞれ離散化した 1 次四面体要素，1 次六面体要素を用いることとする．なお，電磁界解析においては，磁束が無限遠に広がるため，無限遠方まで領域を取る必要がある．しかし，原理的に無限領域を作成することは不可能なので，解析精度が十分になるように，一般的には磁性体や導体のサイズの約 5~10 倍を全解析領域とする必要がある．

さて，2.3 節において，それぞれの場合における有限要素方程式を導いたが，この状態では，まだ無限の自由度がある．そこで，有限要素を用いて空間を離散化した際の有限な未知数と，方程式の数を合わせるために，重み関数 $\boldsymbol{W}, w$ として，それぞれ E, N 個の独立な未知関数を導入する．本論文では，重み関数 $\boldsymbol{W}, w$ と補間関数 $\boldsymbol{N}, N$ を一致させる．この方法を Galerkin 法と呼ぶ．Galerkin 法を用いると，重み付き関数を用いて表されている(2.16)は電磁ポテンシャルを各有向辺，節点間を $\boldsymbol{N}_i, N_u$ で線形補間することによって

$$\boldsymbol{A} \approx \sum_{i=1}^{E} A_i \boldsymbol{N}_i, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{R} \ \mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{0} \tag{2.52a}$$

$$\varphi \approx \sum_{u=1}^{N} \varphi_u N_u \ , \quad \int_{\Omega} N_u \, r \ \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.52b}$$

という方程式で改めることができる．(2.52a)は，ベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_i$ と残差ベクトル $\boldsymbol{R}$ の内積が，(2.52b)はスカラー補間関数 N_u と残差ベクトル r の積がそれぞれ $\boldsymbol{0}, 0$ になる事を表している．従って，これらはそれぞれのベクトルが直交し，全辺数 E , 全節点数 N の独立な関数 $\boldsymbol{N}_i,\ N_u$ が張る空間に $\boldsymbol{R}, r$ が含まれることはないことを意味している．すなわち，$\boldsymbol{R}, r$ はそれぞれ $\boldsymbol{N}_i,\ N_u$ の線形結合では表現できず，1 次独立となる．ゆえに，E, N を増加させると，$\boldsymbol{R}, r$ の大きさが減少する．

以下では，各有限要素について述べ，Galerkin 法を用いて電磁界有限要素方程式を解くための定式化について述べる．

2.4.1　1 次三角形要素と節点要素(0 次 Whitney 要素)

2 次元解析領域全体を，Fig.2.5 に示すような 1 次三角形要素(0 次 Whitney 要素)を用いて分割することを考える．1 次三角形要素を用いて，例えば Fig.2.6 のような有限要素空間が生成される．いま，簡単のため，解析領域は xy 平面であるとする．三

角形要素は Fig.2.5 に示すように，3 個の節点，1 つの面，3 つの辺で構成される要素である．三角形要素の各節点に磁気ベクトルポテンシャルを離散化し，スカラー補間関数 $N_j(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$A = \sum_{j=1}^{3} A_j N_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.53}$$

と三角形要素内で $A = A_z$ を線形補間する．ここで，$\boldsymbol{x} \coloneqq (x, y)$ は位置ベクトルを示している．いま，1 次三角形要素内部で透磁率，導電率等の物質定数は一様であるとする．スカラー補間関数 $N_j(\boldsymbol{x})$ を，面積座標

$$N_j = \lambda_j(\boldsymbol{x}) = \frac{S_j(\boldsymbol{x})}{S}, j = 1,2,3 \tag{2.54}$$

に一致させる(Isoparametric element)．ただし，$j = 1,2,3$ は要素内で反時計回りに巡回するように付した局所節点番号であり，三角形要素の中にある点 P と，局所節点番号が j 節点の対辺で作られる三角形 S_j の面積を $S_j(\boldsymbol{x})$ とする．ここでの位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は各節点座標(x_j, y_j)であり，S は三角形要素の面積である．点 P が三角形内部にある場合，

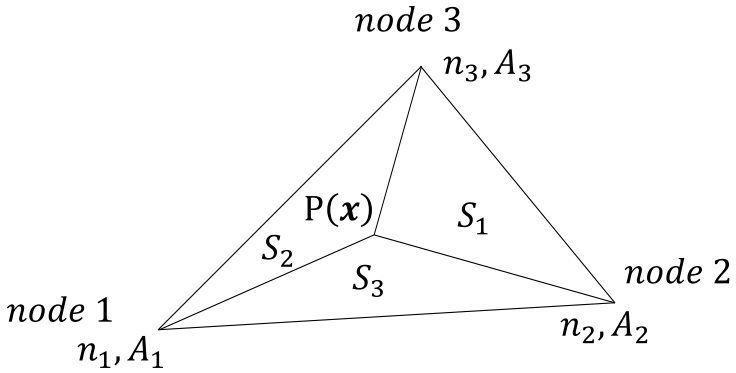


Fig.2.5 Triangle element (0^{th} order Whitney element).
Each node on the triangle element has a discretized magnetic vector potential A_z.

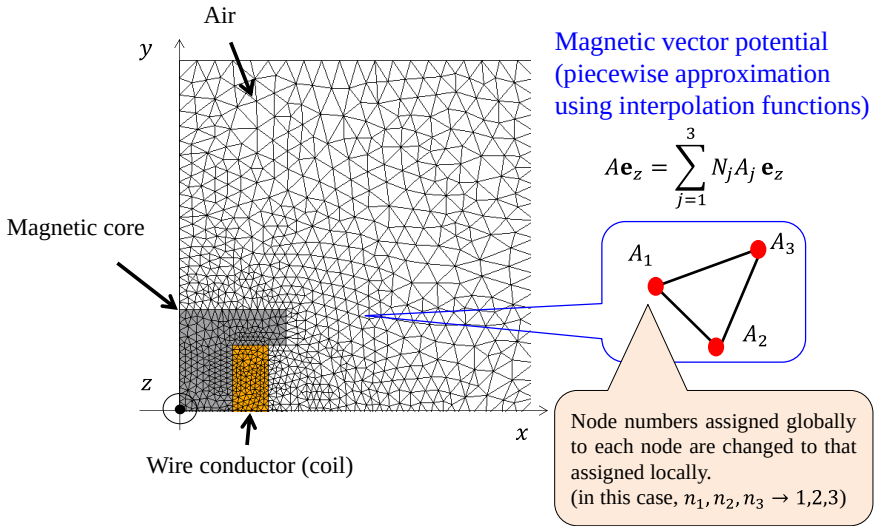


Fig.2.6 Finite element (FE) space of 2D analysis.

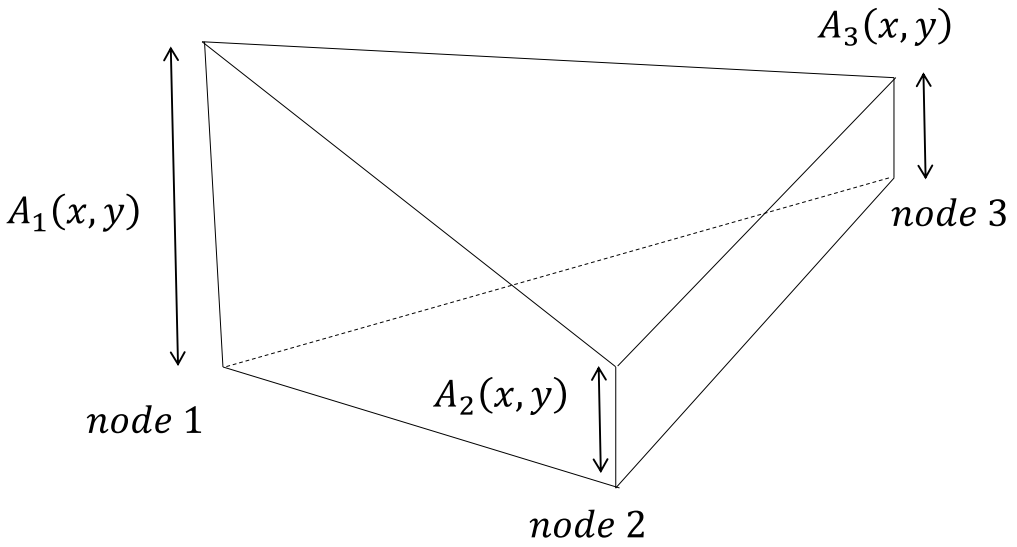


Fig.2.7 1D Interpolation function for scalar functions in a triangular fine element.
In this triangular element, the magnetic vector potential A_j on node j is interpolated by N_j ($j = 1,2,3$).

$$0 \leq \lambda_j \leq 1 \tag{2.55}$$

となり，三角形外部にある場合は

$$\lambda_j(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.56}$$

とする．つまり、点 P が節点 j にある場合には

$$\lambda_j(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{2.57}$$

となり，節点 j に向かい合う面にある場合には

$$\lambda_j(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.58}$$

となる．また，(2.54)の定義から

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2(\boldsymbol{x}) + \lambda_3(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{2.59}$$

このような補間関数の特徴を示したテント関数の図を Fig.2.7 に載せる．

さて，面積座標を用いると点 P は

$$x = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 \tag{2.60a}$$

$$y = y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 \tag{2.60b}$$

と書くことができる．(2.59), (2.60)より座標系と面積座標系の関係は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

である．(2.61)の両辺に右辺の行列の逆行列を左から乗ずることにより，

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2S}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix} \tag{2.62}$$

となる．ただし，簡単のため次のような置換を行った．

$$S=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} \tag{2.63a}$$

$$a_k=d_k\begin{vmatrix}b_l & c_l\\ b_m & c_m\end{vmatrix} \tag{2.63b}$$

$$b_k=-d_k\begin{vmatrix}a_l & c_l\\ a_m & c_m\end{vmatrix} \tag{2.63c}$$

$$c_k=d_k\begin{vmatrix}a_l & b_l\\ a_m & b_m\end{vmatrix} \tag{2.63d}$$

であり，$\{k,l,m\}$は$\{1,2,3\},\{2,1,3\},\{3,1,2\}$と巡回する局所節点番号を表わし，$d_1=d_3=-d_2=1$ である．さらに，これらの式を陽に書き下すと，

$$S=\frac{1}{2}\{(x_2y_3-y_2x_3)-(x_1y_3-y_1x_3)+(x_1y_2-y_2x_3)\} \tag{2.64a}$$

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2y_3-y_2x_3 & y_2-y_3 & x_3-x_2\\ x_3y_1-y_1x_3 & y_3-y_1 & x_1-x_3\\ x_1y_2-y_1x_2 & y_1-y_2 & x_2-x_1\end{bmatrix} \tag{2.64b}$$

となる．

2. 4. 2　1 次四角形要素と節点要素(0 次 Whitney 要素)

本節では，Fig.2.8 に示す 1 次四角形要素を用いた離散化に関して検討する．本研究において，四角形要素は IPM モータの解析を行う際に用いる． この場合，磁気ベクトルポテンシャルの補間は

$$A=\sum_{j=1}^{4}A_jN_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.65}$$

となり，要素内の座標は

$$x=\sum_{j=1}^{4}x_jN_j \tag{2.66a}$$

$$y = \sum_{j=1}^{4} y_j N_j \tag{2.66b}$$

で与えられる．補間関数については

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \tag{2.67}$$

を満たす必要がある．基本的な流れは 1 次三角形要素の場合と同様であるが，1 次四角形要素の場合は，直接的に補間関数の座標による陽な表現を得ることは難しい．このことについては，2.7 節で述べる．

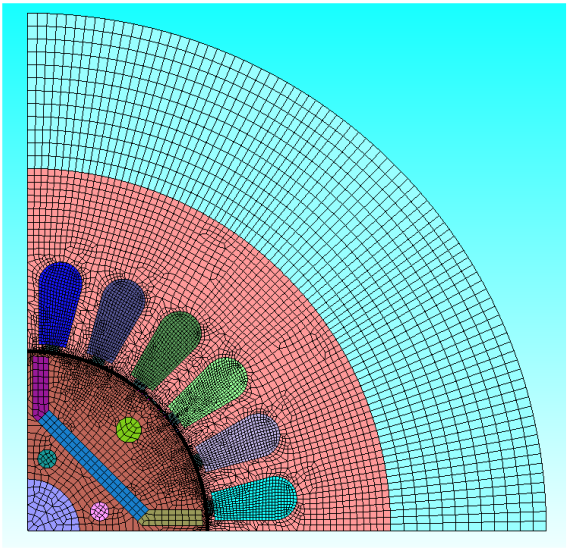


Fig.2.8 Cross-section of an IPM motor discretized by quadrature-shaped finite elements.

2. 4. 3　辺要素(1 次 Whitney 要素)と 1 次四面体要素・1 次六面体要素

前節までの 2 次元空間の離散化とは異なり，3 次元空間の離散化には，Fig.2.9 に示すような辺要素を用いる. 3 次元解析において節点要素を用いると, 要素の境界で, 磁束密度の法線成分と接線成分の両方が連続することなり，電磁気学の境界条件より厳しい条件を課す事になる．なお，電磁気学的には，磁束密度の法線成分が連続，磁界の接線成分が連続になる[e.g. 2.8-10]．そのため，節点要素のみではなく，1 形式のベクトル量である $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ を辺要素を用いて離散化する[e.g. 2.1, 2, 7]．辺要素では，ベクトル量を辺，スカラー量を節点に定義する．一般的に準定常電磁界解析では，磁気ベクトルポテンシャルを辺要素で離散化し，電気スカラーポテンシャルを節点に割り当てる．この場合，要素境界では，磁束密度の法線成分のみが連続となり，電磁気学の基本法則に適合する．本研究では，1 次四面体要素，1 次六面体要素を用いて空間を離散化する．

2. 4. 3. 1　辺要素の定義

辺要素において，要素の磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を辺 c_j 上に離散化した未知変数 A_{c_j} は $\boldsymbol{A}$ の辺 c_j への射影成分を有向辺 c_j に沿って積分した値

$$A_{c_j} = \int_{c_j} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.68}$$

と定義する．ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は c_j 上の線素ベクトルである．さらに局所辺要素 j におけるベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_j$ はつぎの 2 つの条件を満足する必要がある[e.g. 2.2].
(a) 直交性(Orthogonality)を有すること

$$\int_{c_i} \boldsymbol{N}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \delta_{ij} \tag{2.69a}$$

(b) 2 つの節点 m (始点)，n (終点)からなる有向辺 c_{mn} のスカラー関数 w_{mn} の勾配 ∇w_{mn} が次式で示されること

$$\nabla w_{mn} = \sum_j \mathrm{G}_{mn} \boldsymbol{N}_j \tag{2.69b}$$

条件(b)は Fig.2.9 のように，連続関数を用いて表される空間について，勾配 ∇ という写像で移される空間の包含関係が，有限要素空間でも成立しなければならないということを表していると解釈できる[2.2].

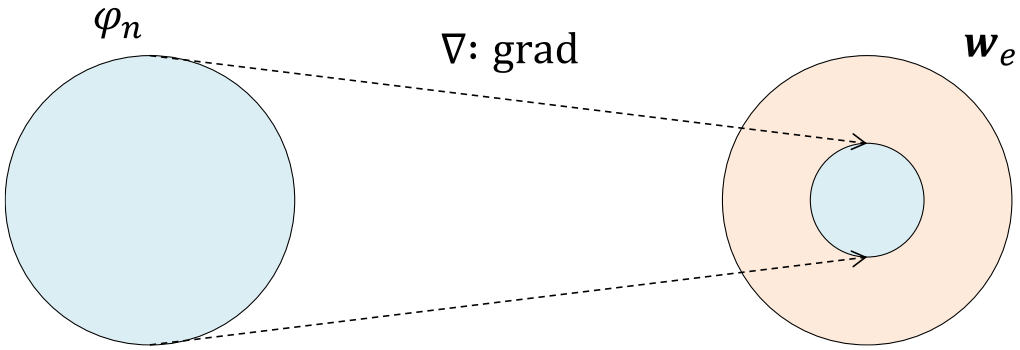


Fig.2.9 Compatibility condition required to edge elements in the first order Whitney element.
Gradient of a scalar interpolation function must be expressed by an edge element.

(2.69b)はつぎのようにして導出できる．いま，スカラーポテンシャル φ が解析領域全体の節点に割り当てられている状況を考え，各要素の体積座標を $\lambda_n(x, y, z)$ とする．いま，解析領域における節点の内任意の 1 点を n，1 要素内の節点数を n_e とすると，解析領域全体では

$$\varphi = \sum_{n \in n_e} \lambda_n \varphi_n = \{\lambda\}^t \{\varphi\} \tag{2.70a}$$

$$\{\lambda\} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N]^t \tag{2.70b}$$

$$\{\varphi\} = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N]^t \tag{2.70c}$$

となる．2.4 節冒頭で述べた Galerkin 法を適用することを考えると，$w_n = \lambda_n$ となるので，節点は 0 次の補間関数を有する単体として考えることができる．このような要素を 0 次 Whitney 要素と呼ぶ.

(2.70a)の両辺の勾配をとると，

$$\nabla\varphi = \{\nabla\lambda\}^t \{\varphi\} \tag{2.71}$$

を得る．ここで，要素内の体積座標の条件から

$$\sum_{n \in n_e} \lambda_n = 1 \tag{2.72}$$

なので，(2.71)の右辺の勾配は

$$\nabla\lambda_m = \left(\sum_{n \in n_e} \lambda_n \right) \nabla\lambda_m - \left(\sum_{n \in n_e} \nabla\lambda_n \right) \lambda_m$$

$$= \sum_{n \in n_e} (\lambda_n \nabla\lambda_m - \nabla\lambda_n \lambda_m) \tag{2.73}$$

となる. さて, (2.73)の左辺の勾配 $\nabla\lambda_m$ は, 2 節点 n, m 上のポテンシャルの差分 $\lambda_n - \lambda_m$と考えることができるので，ベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_{mn}$ を

$$\boldsymbol{N}_{mn} \equiv \lambda_n - \lambda_m = \nabla\lambda \tag{2.74}$$

で定義すると，節点 m から節点 n へ向かう有向辺を e とし，このベクトル補間関数を改めて $\boldsymbol{N}_e = \boldsymbol{N}_{mn}$ とすると，(2.73)から

$$\boldsymbol{N}_e = \lambda_n \nabla\lambda_m - \nabla\lambda_n \lambda_m \tag{2.75}$$

を得る．(2.73) − (2.75)を有限要素空間内の全ての辺に適用すると

$$\nabla\lambda_m = \sum_{e \in e_e} \mathrm{G}_{mn} \boldsymbol{N}_e \tag{2.76}$$

となる．ここで，1 要素内の辺の数を e_e とした．(2.76)において， G_{mn} は勾配行列であり，c_{mn} の向きが有向辺 e の向きと一致している場合は $\mathrm{G}_{mn} = 1$ ，逆向きの場合は $\mathrm{G}_{mn} = -1$ ，辺 e が c_{mn} に含まれない場合は $\mathrm{G}_{mn} = 0$ とする.

さて， $\boldsymbol{N}_e$ を全体の辺番号に適用するため,

$$\{\boldsymbol{N}_e\} \equiv [\boldsymbol{N}_{e1}, \boldsymbol{N}_{e2}, \cdots, \boldsymbol{N}_{eN}]^t \tag{2.77}$$

という全体のベクトル補間関数の番号を定義すると，(2.76)から

$$\{\nabla\lambda\} = [\mathrm{G}]^t\{\boldsymbol{N}_e\} \tag{2.78}$$

を得る．したがって，(2.71)から

$$\nabla\varphi = \{\boldsymbol{N}_e\}[\mathrm{G}]\{\varphi\} \tag{2.79}$$

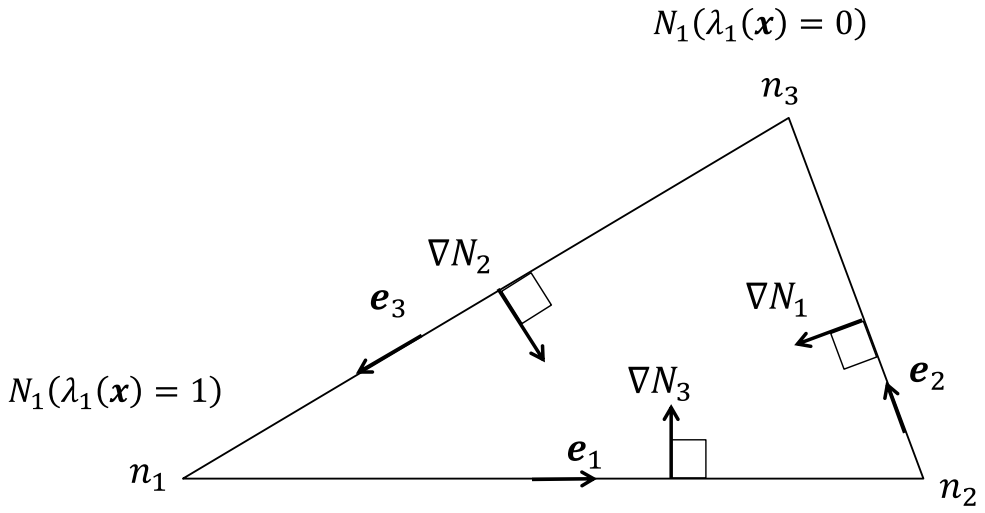
と書ける．この様に定義されたベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_e$ を用いて，あるベクトル場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{N}_e\}^t\{\varphi\} \tag{2.80}$$

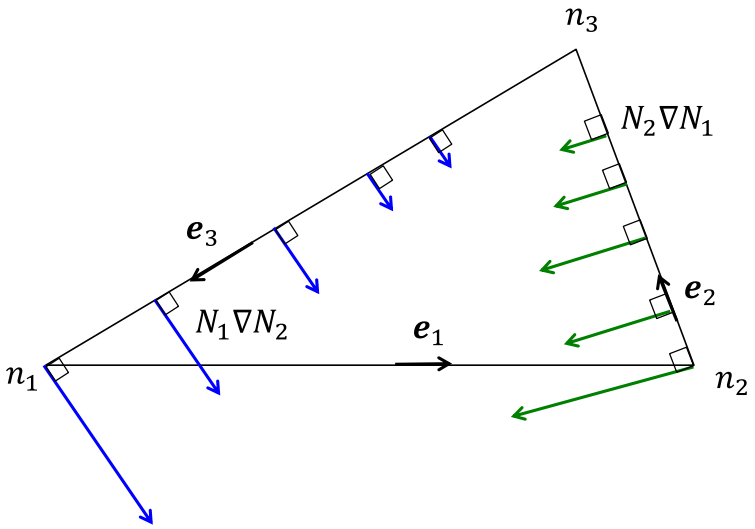
と表現できる．(2.80)は物理的には，離散化されたポテンシャルからベクトル場を求められることを表す．このように，ベクトル補間関数(2.75)を用いてベクトル場を(2.80)のように離散化した量を有向辺に持つ有限要素を 1 次 Whitney 要素と呼ぶ[e.g. 2.2]．このようなベクトル場の集合を W^1 と記すと， grad $W^0 \subset W^1$ の関係にある．

このような辺要素の簡単な概念図を 2 次元平面の三角形要素で説明した図を Fig.2.10 に示す[2.4]．Fig.2.10 において，n_k が局所節点番号，$\boldsymbol{e}_j$ が局所辺番号である $(k, j = 1,2,3)$．Fig.2.10(a)には，$\nabla N_1, \nabla N_2, \nabla N_3$ を，(b)には $N_1\nabla N_2, N_2\nabla N_1$ というベクトルをそれぞれ青色，緑色のベクトルで示している．いま有向辺の向きから，$\nabla N_1 \perp \boldsymbol{e}_2 = 0, \nabla N_2 \perp \boldsymbol{e}_3 = 0$ がわかる．さらに，Fig.2.10(c)には，辺要素 $\boldsymbol{N}_1 = N_1\nabla N_2 - N_2\nabla N_1$ の分布を示している．Fig.2.10(c)に示すように，$-N_2\nabla N_1$ は Fig.2.10(b)に示した $N_2\nabla N_1$ と反対向きのベクトルとなるために，$N_1\nabla N_2, -N_2\nabla N_1$ という 2 つのベクトルの合成から，$\boldsymbol{N}_1$ は図の赤いベクトルとなる．また，各節点からみた位置で N_1, N_2 の大きさが決まり，$\boldsymbol{N}_1$ は節点 n_1 周りに反時計周りのベクトル場を形成することがわかる．また $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 上ではそれぞれ $N_1 = 0, N_2 = 0$ なので，$\boldsymbol{N}_1 \perp \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{N}_1 \perp \boldsymbol{e}_3$ がわかる．さらに，$\boldsymbol{N}_1$ の $\boldsymbol{e}_1$ 上での積分は，2.4.1 節の面積座標の特徴(2.57), (2.58)から 1 に等しい．このような辺要素は，3 次元空間でも適用できる．

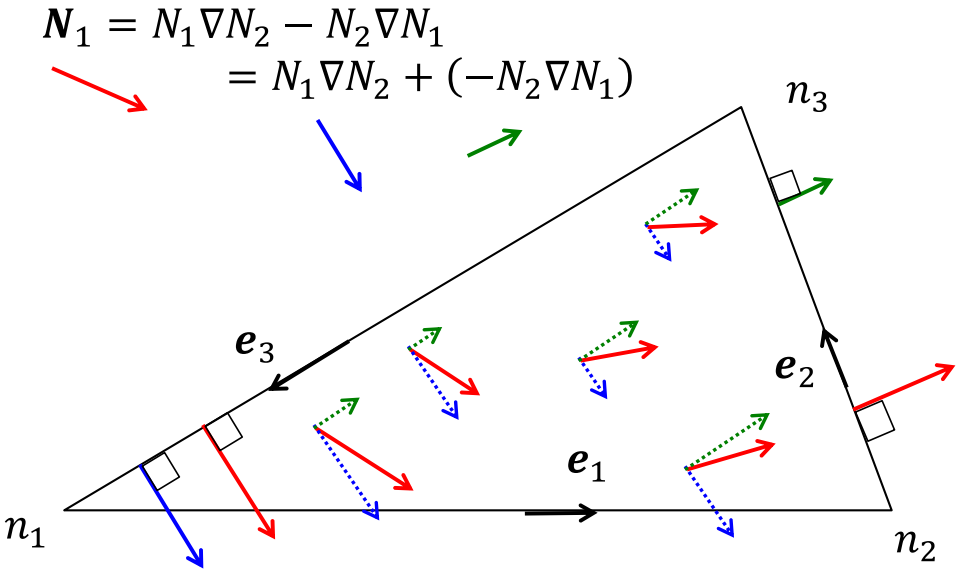
以下では，Galerkin 法により，ベクトル重み付き関数を(2.75)のベクトル補間関数を(2.72)で求められる λ_j を N_j に一致させて，有限要素空間での $\boldsymbol{A}, \varphi$ を求める．2.4.3.2 節では 1 次四面体要素を扱い，2.4.3.3 節では 1 次六面体要素を扱う．有限要素方程式については，2.7.4, 2.7.5 節で導く．



(a) Directions of ∇N_1, ∇N_2 and ∇N_3.



(b) Directions of $N_1\nabla N_2$ and $N_2\nabla N_1$.



(c) Distributions of edge element $\boldsymbol{N}_1 = N_1\nabla N_2 - N_2\nabla N_1$.

Fig.2.10 Schematic illustrations of edge elements.
From these figures, we find that the edge element can express the vector field. If the vector variables are discretized into only nodal elements, all the components must be continuous between adjacent elements everywhere throughout the whole finite element space. Thus, the discontinuity of the normal component of the electric and magnetic fields cannot be taken into account. On the other hand, each edge element represents only the tangential continuity but not the normal continuity on the interface. Hence, it can express a spatial step of the normal component of the electric and magnetic fields between the two elements.

2. 4. 3. 2　1 次四面体要素

本節では，Fig.2.11 に示す 1 次四面体要素を用いて，Fig.2.12 のような有限要素空間を生成する際の定式化を与える．Fig.2.11 に示す四面体要素は，4 個の節点，4 つの面，6 個の辺からなる．

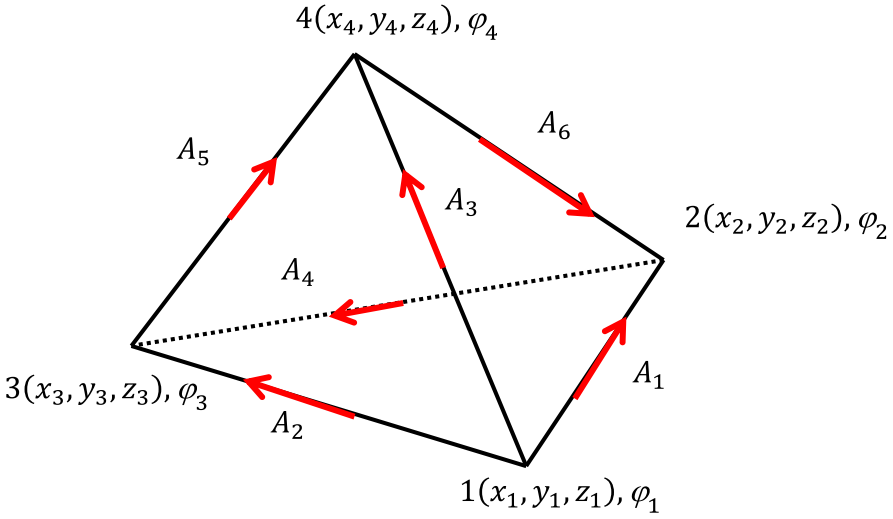


Fig.2.11 Tetrahedral element with sn edge elements (the first order Whitney element).
When we use the first order Whitney element, magnetic vector potential is discretized and assigned into each edge elements. On the other hand, each node has a discretized electric scalar potential.

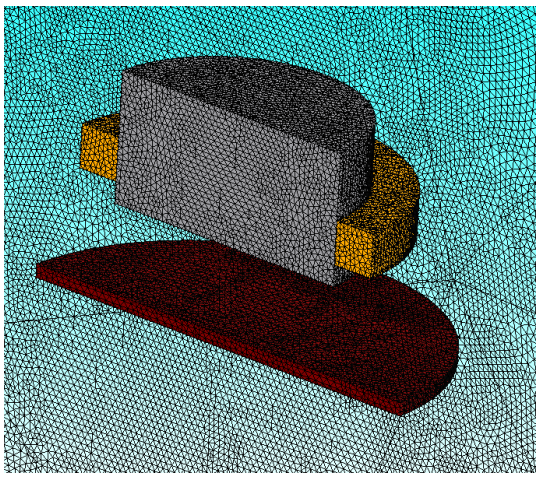


Fig.2.12 3D FE space discretized using tetra element with the first order Whitey element.

2.3.1 節の面積座標と同様に，四面体要素内の体積座標

$$\lambda_k = \frac{V_k}{V} \tag{2.81}$$

を導入する．ここで，k は局所節点番号$(k = 1,2,3,4)$であり，V, V_k は四面体要素体積，頂点 k 以外の四面体の節点と任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ からなる四面体の体積である．このとき，点 P が要素外，点 P と向かい合う面上にある場合は $\lambda_k = 0$，点 P が頂点 k 上にある場合は $\lambda_k = 1$ である．この定義から

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1 \tag{2.82}$$

が成立する．いま原点を $\boldsymbol{x}_0$，観測点を $\boldsymbol{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ とすると，四面体要素内の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{k=1}^{4} \lambda_k (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) \tag{2.83}$$

と表記できる．(2.82), (2.83)から

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

を得る．(2.84)から λ_k を

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.85a}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \tag{2.85b}$$

$$a_k \coloneqq \sigma_k \begin{vmatrix} x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \tag{2.85c}$$

$$b_k \coloneqq -\sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_l & y_m & y_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \tag{2.85d}$$

$$c_k \coloneqq \sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ z_l & z_m & z_n \end{vmatrix} \tag{2.85e}$$

$$d_k \coloneqq -\sigma_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \end{vmatrix} \tag{2.85f}$$

と陽に表せる．ここで，$\{k, l, m, n\}$ は $\{1,2,3,4\}, \{2,1,3,4\}, \{3,1,2,4\}, \{4,1,2,3\}$ と頂点 1 から見た底面の三角形上で巡回する局所節点番号を表し，符号 σ_k の定義については $\sigma_1 = \sigma_3 = 1, \sigma_2 = \sigma_4 = -1$ とする[e.g. 2.1, section 5.2].

さて，辺要素において，四面体要素の磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を辺 $c_j (j = 1\sim6)$ 上に離散化した未知変数 A_{c_j} は $\boldsymbol{A}$ の辺 c_j への射影成分を有向辺 c_j に沿って積分した値

$$A_{c_j} = \int_{c_j} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.86}$$

と定義する．ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は c_j 上の線素ベクトルである．

つぎに，1 次四面体要素における電磁ポテンシャルを補間により求める．まず，Galerkin 法により，重み付き関数 w_i を体積座標 λ_i に一致させる．すると，(2.86)は辺 j に対するベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_j$ (2.75)を用いて，

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{N}_j A_{c_j} \tag{2.87a}$$

と評価できる．ここで，Galerkin 法を適用すると，ベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_j$ はベクトル重み付き関数 $\boldsymbol{W}_j$ に一致する．なお，このように辺要素を用いて磁気ベクトルポテンシャルを補間する場合には次元について，(2.75)からもわかるように $\left[\boldsymbol{N}_j\right] = [\mathrm{m}]$ なので，辺要素に離散化された磁気ベクトルポテンシャル A_{c_j} の次元は $\left[A_{c_j}\right] = [\mathrm{Wb}]$ となることに注意する．

電気スカラーポテンシャルについては，節点において

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} N_k \varphi_k \tag{2.87b}$$

と補間すれば求められる．なお節点補間関数の次元は(2.85)から $[N_k] = [-]$ であるので，節点要素に離散化された電気スカラーポテンシャルの次元は $[\varphi_k] = [\mathrm{V}]$ である．

2. 4. 3. 3　1 次六面体要素

本節では，Fig.2.13 に示す 1 次六面体要素を用いて，有限要素空間を生成することを考える．1 次六面体要素は，8 個の節点，6 つの面，12 本の有向辺からなる．Fig.2.13 において，黒字の数字が要素内の局所節点番号，青字の数字が局所辺番号である．1 要素内の電磁ポテンシャルは，2.4.3.3 節と同様に考えれば

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{12} \boldsymbol{N}_j A_{c_j} \tag{2.88a}$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{8} N_k \varphi_k \tag{2.88b}$$

と補間されるが，1 次六面体要素の場合には，2.4.2 節の 1 次四角形要素の補間関数の場合のように，解析的に陽な表現を得ることが難しい．

この場合には，任意の 1 次六面体を局所座標系に写像して得られる立方体上の辺要素・節点要素で議論し，逆写像を行うことで，元の 1 次六面体要素の辺要素・節点番号に関する有限要素方程式を得ることが望ましい．このことについては，2.7 節で述べる．

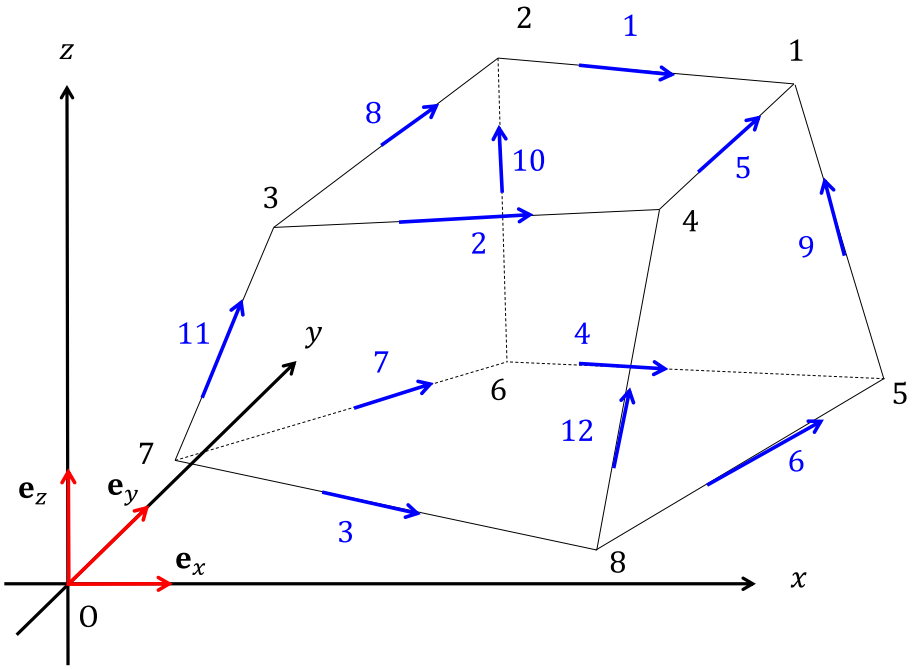


Fig.2.13 Hexahedron element with edge elements (the first order Whitney element).
Generally, the shape of a hexahedron element is distorted, which gives rise to difficulty in formulation. Hence, the coordinate transformation from the global coordinates to the local coordinates have to be introduced.

2. 5　有限要素方程式の空間・時間の離散化

一般的な有限要素方程式においては，空間と時間に関する偏微分項が含まれている．したがって，数値計算の際には，これらの適切な離散化を解析精度を保ちながら行う必要がある．本節では，2.4 節で定義した有限要素を用いて空間を離散化した際の空間微分の離散化について述べ，時間微分については Wilson の θ 法を用いた離散化を導入することを検討する．

2. 5. 1　空間の離散化

前節で示した，Galerkin 法に基づき，スカラー補間関数，ベクトル補間関数を用いた有限要素を用いて，それぞれの有限要素空間の離散化を行い，1 次連立方程式を導く．このとき，面積座標，体積座標は補間関数に一致し，重み関数は $w_u = N_u, \boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{N}_i$ となる．それぞれの有限要素方程式において，未知関数は無限の自由度を持つ磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と電気スカラーポテンシャル φ であった．これら電磁ポテンシャルを，2.4 節で導入した有限要素によって離散化し，有限の自由度の関数に変更する．以下では，有限要素空間の全節点数，全辺数をそれぞれ n, e とする．2 次元解析においては，i は有限要素空間全体における節点番号を，j は 1 要素についての局所的な節点番号をそれぞれ表す．一方で，3 次元空間での有限要素方程式において，i, u は有限要素空間全体における辺番号，節点番号を，j, k は 1 要素についての局所的な辺番号，節点番号をそれぞれ表す．なお，j, k は系全体の有限要素方程式を作成する際には全体番号に付け直すことに注意する．

2. 5. 1. 1　2 次元 xy 空間における静磁界有限要素方程式の離散化

2 次元 xy 空間においては，$A = A_z$ とし，節点要素を用いて

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j N_j \tag{2.89a}$$

$$\mathscr{b} \coloneqq \sum_{j=1}^{n_b} \mathscr{b}_j N_j = \sum_{j=1}^{n_b} N_j \frac{\partial A_j}{\partial n} \tag{2.89b}$$

と離散化する．ここで，$\mathscr{b}_j$ は境界 Γ 上の磁束密度で，n_b は境界上の節点数である．また，ここでは境界上で $\mathscr{b}_j$ は一定と仮定する．解くべき方程式は，1 次三角形要素，1 次四角形要素いずれの場合においても(2.25)より

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}] \nabla N_j \right) \mathrm{d}S - \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right) \int_{\Gamma_j} N_i \, \mathrm{d}l$$

$$= \int_{\Omega} N_i J_0 \, \mathrm{d}S + \nu_0 \int_{\Omega} \left(M_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \mathrm{d}S \tag{2.90}$$

である．ここで，境界 Γ_j 上の磁気抵抗は法線成分 ν_n に対応するが，一般的にこの取り扱いは難しい．ただし，xy 平面における境界が x 軸の場合には $\nu_n = \nu_y$ である．境界 Γ_j では $\nabla A \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathscr{b}$ であり，線積分に伴い上面下面での磁束密度の法線成分の差 $\left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right)$ が現れる．その際に補間関数の $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に沿った線積分は $|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|/2$ となる．

2. 5. 1. 2　2 次元 xy 空間における準静電磁界有限要素方程式の離散化

本節では準静電磁界解析の場合の定式化を行う．解くべき方程式は(2.28)に対して，Galerkin 法を適用し，(2.89)を代入することにより，

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}] \nabla N_j \right) \mathrm{d}S - \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right) \int_{\Gamma_j} N_i \, \mathrm{d}l$$

$$+ \mathrm{j}\omega\sigma \sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} N_i N_j \mathrm{d}S = \int_{\Omega} N_i J_0 \, \mathrm{d}S \tag{2.91}$$

と書ける．ν_n についての注意は前節と同様である．

2. 5. 1. 3　軸対称準静電磁界の有限要素方程式の離散化

軸対称 2 次元 xy 空間においては 2.3 節で述べたように，A_θ を未知数とする方法と，$\psi \coloneqq rA_\theta$ で定義される ψ を未知数とする方法で，異なった有限要素方程式が導

ける．以下では，それぞれの場合で，離散化された有限要素方程式を導く．本定式化では，1 次三角形要素を仮定する．

(1) A_θ を未知数とする方法

A_θ を未知数とする方法では，(2.36)が有限要素方程式となる．いま，

$$A_\theta = \sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} N_j \tag{2.92a}$$

$$\mathscr{b} \coloneqq \sum_{j=1}^{n_b} \mathscr{b}_j N_j \tag{2.92b}$$

として，(2.36)を 1 次三角形要素を用いて離散化を行い，(2.92)を代入すると，

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} \int_{S_e} \frac{1}{r} \tilde{\nabla}(rw) \cdot \frac{1}{r} [\nu_{zr}] \tilde{\nabla}(rN_j) \mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{n} \int_{S_e} w\sigma N_j \frac{\partial A_{\theta j}}{\partial t} \mathrm{d}S$$
$$- \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} (\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j) \int_{\Gamma_j} \frac{w}{r} \mathrm{d}l = \int_{S_e} w J_0 \, \mathrm{d}S \tag{2.93}$$

となる．ここで，Galerkin 法を適用すると

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} \int_{S_e} \frac{1}{r} \tilde{\nabla}(rw) \cdot \frac{1}{r} [\nu_{zr}] \tilde{\nabla}(rN_j) \mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{n} \int_{S_e} \sigma N_i N_j \frac{\partial A_{\theta j}}{\partial t} \mathrm{d}S$$
$$- \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} (\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j) \int_{\Gamma_j} \frac{N_i}{r} \mathrm{d}l = \int_{S_e} N_i J_0 \, \mathrm{d}S \tag{2.94}$$

を得る．(2.94)において，

$$\mathscr{b}_j = \frac{\partial}{\partial n} (r A_{j\theta}) \tag{2.95}$$

は軸対称座標系での境界 Γ_j 上の磁束密度を表す．ここでは境界上で $\mathscr{b}_j$ は一定と仮定する．また，rz 平面における境界 Γ_j が r 軸の場合には $\nu_n = \nu_z$ である．

なお，周波数領域の解析では，電磁界が周期的に変動すると考えれば，(2.94)において，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ として得られる

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} \int_{S_e} \frac{1}{r} \tilde{\nabla}(rw) \cdot \frac{1}{r} [\nu_{zr}] \tilde{\nabla}(rN_j) \mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega\sigma \sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} \int_{S_e} N_i N_j \, \mathrm{d}S$$
$$- \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} (\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j) \int_{\Gamma_j} \frac{N_i}{r} \mathrm{d}l = \int_{S_e} N_i J_0 \, \mathrm{d}S \tag{2.96}$$

が離散化された有限要素方程式となる．

(2) ψ を未知数とする方法

一方で，ψ を未知数とする方法では，ψ を(2.92)と同じように三角形要素で

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j N_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.97a}$$

$$\mathscr{b} = \sum_{j=1}^{n_b} \mathscr{b}_j N_j \tag{2.97b}$$

と離散化する．ここで，

$$\mathscr{b}_j \coloneqq \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \tag{2.98}$$

は境界 Γ_j 上の磁束密度で，n_b は境界上の節点数である．ここでは境界上で $\mathscr{b}_j$ は一定と仮定する．さて，2.3.3. 2 節で導いた(2.42)に対して，Galerkin 法を適用すると

$$\int_z \int_r \left(\frac{1}{r} \tilde{\nabla} N_i \cdot \left([\nu_{zr}] \tilde{\nabla} \psi \right) + N_i \sigma \frac{\partial}{\partial t} \frac{\psi}{r} \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{N_i}{r} \left([\nu_{zr}] \tilde{\nabla} \psi \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_z \int_r N_i J_0 \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.99}$$

となる．(2.99)に(2.97), (2.98)を代入すると

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j \int_z \int_r \frac{1}{r} \tilde{\nabla} N_i \cdot \left([\nu_{zr}] \tilde{\nabla} N_j \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}z + \sigma \sum_{j=1}^{n} N_i N_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \int_z \int_r \frac{1}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$-\nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right) \int_{\Gamma_j} \frac{N_i}{r} \mathrm{d}l = \int_z \int_r N_i J_0 \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.100}$$

という有限要素方程式が得られる．

2. 5. 1. 4　3 次元静磁界の有限要素方程式の離散化

3 次元有限要素空間においては，2.4.3 節で述べた辺要素に，磁気ベクトルポテンシャル，節点要素に電気スカラーポテンシャルを割り当てた 1 次 Whitney 要素を用いて

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{e} A_j \boldsymbol{N}_j \tag{2.101a}$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k N_k \tag{2.101b}$$

と離散化する．ここで，k は有限要素空間全体での節点番号を表し，系全体の有限要素方程式を作成する際には全体番号に付け直す．

静磁界においては，(2.49)に Galerkin 法を適用し，(2.101a)で離散化することで

$$\sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}\Omega - \sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{N}_i \times [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.102}$$

となる．

2. 5. 1. 5　3 次元準静電磁界の有限要素方程式の離散化

準静電磁界においては，(2.50)に Galerkin 法を適用し，(2.101)の 1 次 Whitney 要素で離散化することでつぎの有限要素方程式を得る．いま，有限要素空間における節点番号を u とすると，1 要素内の局所節点番号が k であるから，

$$\sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}\Omega - \sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{N}_i \times [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$+\sigma \sum_{j=1}^{e} \frac{\partial A_j}{\partial t} \int_{S} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega + \sigma \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{S} \boldsymbol{N}_i \cdot \, \mathrm{grad}\, N_k \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.103a}$$

$$\sigma \sum_{j=1}^{e} \frac{\partial A_j}{\partial t} \int_{S} N_u \, \boldsymbol{N}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \sigma \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{S} N_u \, \, \mathrm{grad}\, N_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$-\sigma \sum_{j=1}^{e} \frac{\partial A_j}{\partial t} \int_{\Omega} \, \mathrm{grad}\, N_u \cdot \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega - \sigma \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{\Omega} \mathrm{grad}\, N_u \cdot \, \mathrm{grad}\, N_k \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.103b}$$

したがって，3 次元準静電磁界解析の場合は，(2.103a, b)を連立して $\{\boldsymbol{A}, \varphi\}$ を求めることになる．

なお，周波数領域の解析では，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ として得られる

$$\sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}\Omega - \sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{N}_i \times [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$+\mathrm{j}\omega\sigma \sum_{j=1}^{e} A_j \int_{S} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega + \mathrm{j}\omega\sigma \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{S} \boldsymbol{N}_i \cdot \, \mathrm{grad}\, N_k \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.104a}$$

$$\mathrm{j}\omega\sigma\sum_{j=1}^{e}A_j\int_S N_u\boldsymbol{N}_j\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}-\mathrm{j}\omega\sigma\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\int_S N_u\ \mathrm{grad}\,N_k\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$-\mathrm{j}\omega\sigma\sum_{j=1}^{e}A_j\int_\Omega \mathrm{grad}\,N_u\cdot\boldsymbol{N}_j\,\mathrm{d}\Omega-\mathrm{j}\omega\sigma\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\int_\Omega \mathrm{grad}\,N_u\cdot\ \mathrm{grad}\,N_k\,\mathrm{d}\Omega=0 \quad (2.104\mathrm{b})$$

という連立方程式を解くことになる．なお，2.3.5.3 節と同様に，$\varphi\to\mathrm{j}\omega\varphi$ とする．

2. 5. 2　時間方向の離散化

前節までの議論で, 解析空間を有限要素により離散化することができた. しかし, 時間領域解析の場合には, 時間の偏微分項の離散化はまだ完了していない. 有限要素方程式に時間微分項が含まれているため，時間方向の離散化が必要となる．本節では，Wilson の θ 法を用いた時間方向の離散化について述べる[e.g. 2.11].

あるベクトル $\boldsymbol{u}$ に関して，時間微分の項を

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\Delta t} \quad (2.105)$$

と表すことを考える. (2.105)において, 添え字の m は時間ステップを表す. ここで, $\boldsymbol{u}^m$ について,

$$\boldsymbol{u}^m\to\theta\boldsymbol{u}^m+(1-\theta)\boldsymbol{u}^{m-1} \quad (2.106)$$

という補間を考える．ここで θ は $0\le\theta\le1$ を満たす定数である．以下に，θ によって，時間微分の項の離散化について分類する．

- $\theta\ge1/2$ では条件安定である．すなわち陽解法の成分が強いことを意味する．
- $\theta\le1/2$ では無条件安定である．すなわち陰解法の成分が強いことを意味する．

なお，$\theta=1$ の場合は陽解法(後退差分)に，$\theta=0$ の場合は陰解法(前進差分)に，それぞれ一致する．また，$\theta=1/2$ の場合は，Clank-Nicolson 法と呼ばれる[e.g. 2.11].

本節の時間方向の離散化により, 時間領域の有限要素方程式を解くことができる. しかし, 境界項の取り扱いに関しては, 現段階ではまだ扱っていない. 次節では境界条件について述べる.

2. 6 境界条件

電磁界は，その影響が無限遠方まで及ぶため，計算結果への境界項の影響は無視できることが望ましい．したがって境界で $w=0,\boldsymbol{W}=\boldsymbol{0}$ となる，もしくは $\partial A/\partial n=0$ が満足されるように，適切な境界条件を課す必要がある．境界条件には，有限要素解析の際に基本となる Dirichlet 条件(固定境界条件)と Neumann 条件(自然境界条件)[2.1], 回転機解析の際に必要となるスライド境界条件，周期境界条件[2.4, 5], また電磁シールドのモデル化に有効なインピーダンス境界条件等がある[2.12-14]. 本節では, Dirichlet 条件(固定境界条件), Neumann 条件(自然境界条件), スライド境界条件, 周期境界条件についてまとめる．インピーダンス境界条件については，第 9 章で改めて議論する．

2. 6. 1　Dirichlet 境界条件

Dirichlet 条件は，境界に強制的に値を与え，電気壁を設定する場合に使用する．Dirichlet 境界条件上では，磁束密度と電界に対して

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathbf{e}_n = 0 \tag{2.107a}$$

$$\boldsymbol{E} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.107b}$$

という条件を課す．$\mathbf{e}_n$ は，例えば Fig.2.14 に示すような方向を向く単位法線ベクトルである．Fig. 2.14 の場合，磁束密度，電束密度は $\partial\Omega_D$ に平行となる．さて，電磁界の表現(2.3), (2.9)を用いて，(2.108)を電磁ポテンシャルの形に改めると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{e}_n = 0 \tag{2.108a}$$

$$\boldsymbol{A} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.108b}$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi \times \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.108c}$$

を得る．(2.108)を強制的に境界上で設定することで，境界項を 0 として扱うことができる．したがって，境界に対して，磁界が平行になり，電界が垂直になる．

2. 6. 2　Neumann 境界条件

Neumann 境界条件は，磁気壁を設定する場合に使用する．Neumann 境界条件上では，磁束密度と電界に

$$\boldsymbol{B} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.109a}$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathbf{e}_n = 0 \tag{2.109b}$$

という境界条件を課す．さて，電磁界の表現(2.3), (2.9)を用いて，(2.109)を電磁ポテンシャルの形で改めると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \times \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.110a}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{e}_n = 0 \tag{2.110b}$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathbf{e}_n = 0 \tag{2.110c}$$

とする．(2.110)は境界項の影響を落とすことで自然に満たされるので，特別に磁気ベクトルポテンシャルの制限を課す必要はない．

Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を用いて，電磁界解析をした例を Fig.2.14 に示す．Fig.2.14 においては，$\partial\Omega_D$ が Dirichlet 境界条件，$\partial\Omega_N$ が Neumann 境界条件をそれぞれ課した境界を表す．

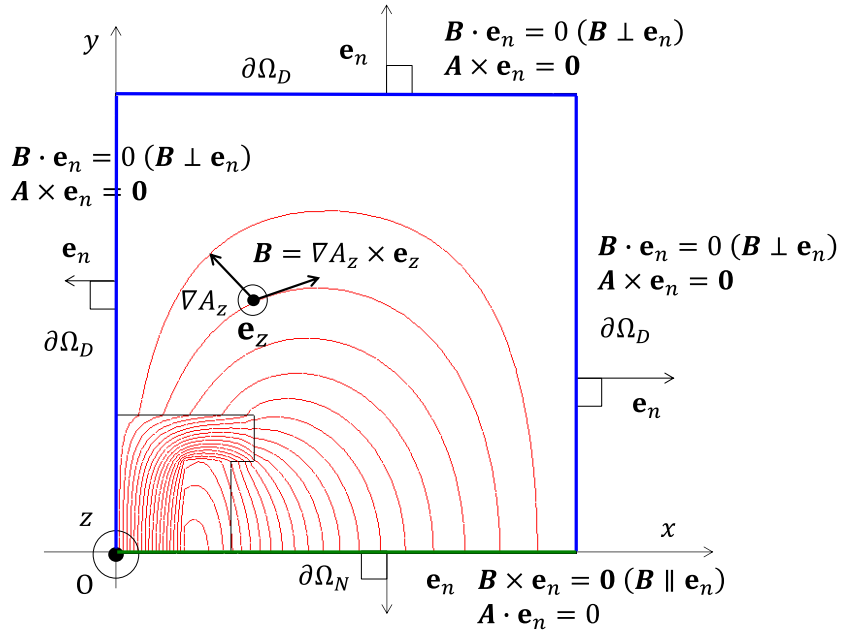


Fig.2.14 Magnetic flux lines of an example model.
In this model, $\partial\Omega_D$ and $\partial\Omega_N$ denote the Dirichlet and Neumann conditions, respectively. In this figure, the red, blue, green lines represent magnetic flux lines, the boundaries imposed on the Dirichlet condition, the boundary imposed on the Neumann condition, respectively.

2. 6. 3　非適合境界条件

例えばモータや，誘導加熱装置の有限要素解析の際においては，回転や平行移動に伴い，有限要素空間が時々刻々変化する．したがって，時間と共に有限要素を再生成しなければならない．しかし，タイムステップが細かくなるにつれ，すべてのステップで有限要素を生成し，解析を行うことには長大な時間を要する．また，後述するスライド境界条件を設ける際に，計算負荷が生じてしまうことも問題となる．

そこで，可動子と固定子のモデル化に有効な，非適合境界条件を導入する[2.5]．本法は，可動子の位置が時間と共に変化し，有限要素間で有限要素を接続していない浮き節点が生じる場合に，浮き節点の磁気ベクトルポテンシャルを補間から求める方法である．非適合境界条件の概念を Fig.2.15 に示す．図中の節点に割り当てられた整数は全体節点番号を表している．例えば，節点 v に割り当てられた磁気ベクトルポテンシャル A_v は次式のように 2 節点間の距離 $\mathrm{dist}(u,v)$ を用いて補間される．

$$A_v = \frac{\mathrm{dist}(u,v)}{\mathrm{dist}(u,v)+\mathrm{dist}(v,w)}A_u + \frac{\mathrm{dist}(v,w)}{\mathrm{dist}(u,v)+\mathrm{dist}(v,w)}A_w \qquad (2.111)$$

ここで，節点 u,w は節点 v に隣接する固定子の 2 つの全体節点番号を表す．固定子側の磁気ベクトルポテンシャル A_u, A_w は前ステップの解析で既知とする．例えば A_{19} はつぎのように補間される．

$$A_{19} = \frac{\mathrm{dist}(10,19)}{\mathrm{dist}(10,19)+\mathrm{dist}(19,11)}A_{10} + \frac{\mathrm{dist}(19,11)}{\mathrm{dist}(10,19)+\mathrm{dist}(19,11)}A_{11} \qquad (2.112)$$

非適合境界条件を用いることで，浮き節点における磁気ベクトルポテンシャルを求めることができる．したがって，可動子の移動に伴う有限要素の再生成は不要となり，効率的に回転機の解析を行うことが可能となる．

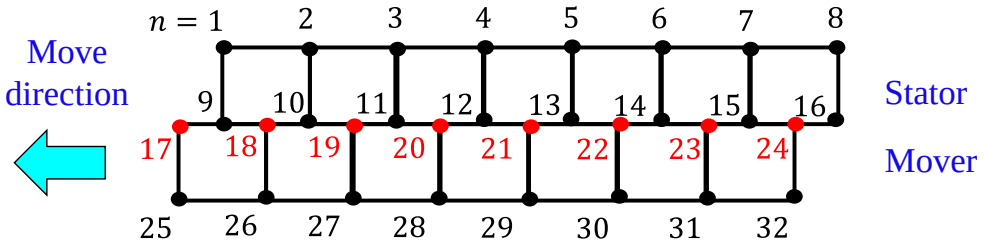


Fig.2.15 Non-conforming boundary condition for motor analysis.
Discretized magnetic vector potentials on nodes of a mover can be evaluated by interpolating those on each neighborhood node.

2. 6. 4　周期境界条件

例えばモータの解析においては, 磁束が周期的に現れることが多い. いま, Fig.2.16 に示す 1/4 領域では，90° 毎に空間的な対称性を有しているため, 磁気ベクトルポテンシャル A_p と A_q は 90° 反時計回りに回転させることで，重なる関係にある．したがって,

$$A_p = -A_q \tag{2.113}$$

を満足するように回転子の境界に設定することで，解析領域を 1/4 モデルに制限しても，系全体の解析ができることになる．ただし，(2.113)は 2 次元解析において適用可能な境界条件である.

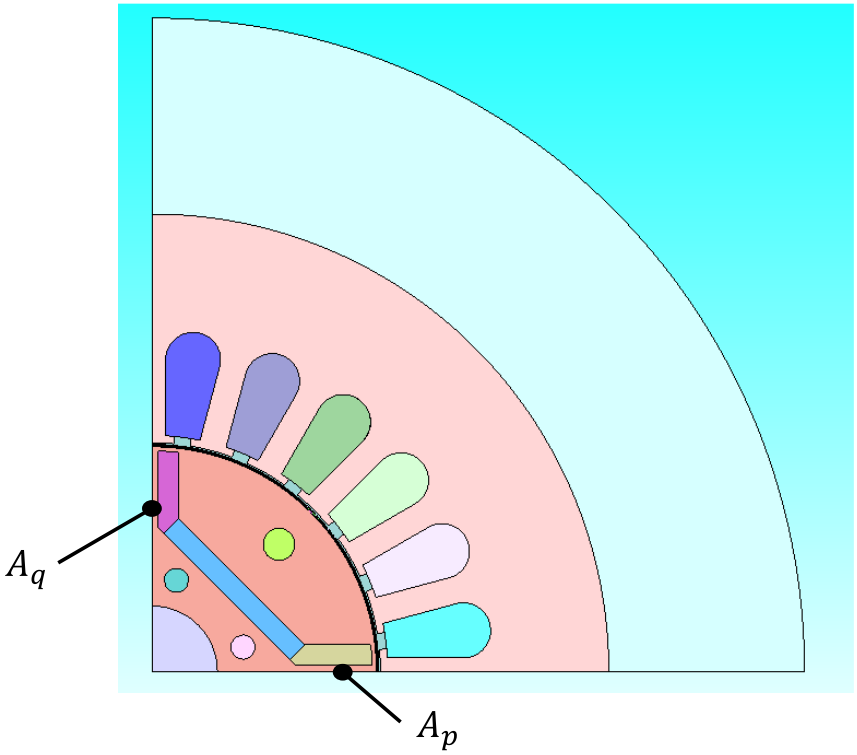


Fig.2.16 Periodic boundary condition of motor analysis.
In this condition, the magnetic vector potential $A_p(\boldsymbol{x})$ on node p is assigned to the node which is located on $\boldsymbol{x}' = \mathrm{R}\boldsymbol{x}$, where R denotes the rotation matrix with the rotation angle 90°.

2. 7 各有限要素における補間関数の計算と有限要素行列の生成

2.6 節で述べた境界条件を課すことにより，2.5 節で述べた有限要素方程式を，境界項を落として解くことが可能となる．以下では，各解析条件における有限要素行列を作成するに当たっての補間関数の扱いと，要素の生成について述べる[2.1, 2.6].

2. 7. 1　1 次三角形要素におけるスカラー補間関数の計算

離散化された有限要素方程式は，2.5.1.1 節で導いた

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}]\nabla N_j\right) \mathrm{d}S - \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j\right) \int_{\Gamma_j} N_i \, \mathrm{d}l$$

$$= \int_{\Omega} N_i J_0 \, \mathrm{d}S + \nu_0 \int_{\Omega} \left(M_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \mathrm{d}S \qquad (2.90)$$

である．いま，離散化された磁気ベクトルポテンシャル $A = A_z$ は，スカラー補間関数(2.53)を用いて補間されている．ここで(2.90)の左辺第 1 項の計算には $\nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}]\nabla N_j\right)$ の計算が必要になる．$\nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}]\nabla N_j\right)$ は(2.62)において，面積座標 λ_j と補間関数 N_j を一致させて，

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{b_j}{2S} \quad , \qquad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{c_j}{2S} \, , \qquad \text{for } j = 1,2,3 \qquad (2.114)$$

から

$$\nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}]\nabla N_j\right) = \frac{\nu_y b_i b_j + \nu_x c_i c_j}{4S^2} \, , \qquad \text{for } i,j = 1,2,3 \qquad (2.115)$$

と求めることができる．また左辺に関して，積分公式

$$\int_S \lambda_1^l \lambda_2^m \lambda_3^n \, \mathrm{d}S = \int_S N_1^l N_2^m N_3^n \, \mathrm{d}S = 2S \frac{l \,!\, m \,!\, n \,!}{(l+m+n+2) \,!} \qquad (2.116)$$

を用いると，(2.90)の 1 要素内における有限要素行列 [k] と電流ベクトル項(非同次ベクトル項) { j } は境界項を除くと

$$[\,\mathrm{k}\,] = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} \nu_y b_1 b_1 + \nu_x c_1 c_1 & \nu_y b_1 b_2 + \nu_x c_1 c_2 & \nu_y b_1 b_3 + \nu_x c_1 c_3 \\ & \nu_y b_2 b_2 + \nu_x c_2 c_2 & \nu_y b_2 b_3 + \nu_x c_2 c_3 \\ \text{sym.} & & \nu_y b_3 b_3 + \nu_x c_3 c_3 \end{bmatrix} \qquad (2.117a)$$

$$\{\, j \,\} = \frac{J_0 S}{3} [1,1,1]^t \qquad (2.117b)$$

となる．なお，磁気抵抗が等方性の場合，つまり $\nu_y = \nu_x = \nu$ ならば，(2.20)より

$$[\,\mathrm{k}\,] = \frac{\nu}{4S}\begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{sym.} & & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix} \tag{2.117c}$$

と評価する．(2.117)の 1 要素内の局所節点番号 j を全体番号として付け直し，それぞれの磁気ベクトルポテンシャルを重ね合わせることで，境界項を除いて

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.118a}$$

$$\boldsymbol{a} = [A_1, A_2, \cdots, A_n,]^t \tag{2.118d}$$

$$\boldsymbol{b} = [j_1, j_2, \cdots, j_n]^t \tag{2.118c}$$

という 2 次元有限要素空間における連立方程式が求められる．境界上で磁束密度が不連続とならない場合には，2.6.1 節で述べた Dirichlet 条件により，境界項は落とすことができる．(2.118a)で k_{ij} は有限要素行列 $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の第 i 行 j 列の要素の値であり，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ は離散化された磁気ベクトルポテンシャルからなる未知ベクトル，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ はソースを離散化して作られる右辺ベクトルである．なお有限要素の辺が境界と一致し，かつ磁束密度が不連続となる場合には(2.90)の左辺第 2 項の係数を加える必要がある．この際には補間関数の $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に沿った線積分は $|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|/2$ とする．

つぎに，磁化電流を考慮する際には，磁石領域において

$$M_i = \nu_0 \int_{\Omega} \left(M_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \mathrm{d}S \tag{2.119}$$

を(2.118c)に加えればよい．

また，準静電磁界解析の場合の離散化された有限要素方程式，すなわち渦電流を考慮した解析の場合においては，2.5.1.2 節で導いた

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left([\nu_{yx}] \nabla N_j \right) \mathrm{d}S - \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right) \int_{\Gamma_j} N_i \,\mathrm{d}l$$

$$+\mathrm{j}\omega\sigma \sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega} N_i\, N_j \mathrm{d}S = \int_{\Omega} N_i\, J_0 \,\mathrm{d}S \tag{2.91}$$

を解くことになる．(2.91)左辺第 3 項の係数を(2.119)から評価した

$$\mathrm{j}\omega\sigma \int_{\Omega} N_i N_j \mathrm{d}S = \mathrm{j}\omega\sigma \frac{1}{9} \tag{2.120}$$

を(2.118c)の b_i に加えればよい．

2. 7. 2　軸対称座標系空間の 1 次三角形要素による離散化

軸対称座標系においても，2.7.1 節と同様にして，1 次三角形要素で離散化が可能である．この場合，$x \to r, y \to z$ と読み替えて，同じように有限要素行列を導けばよい．以下では，A_θ を未知数とした場合，ψ を未知数とした場合それぞれで分けて考える[2.5].

2. 7. 2. 1　A_θ を未知数とした場合の離散化

離散化された有限要素方程式は，2.5.1.3 節で導いた(2.94)の微分項を計算し

$$\sum_{j=1}^{n} A_{\theta j} \int_{S_e} \left\{ \nu_z \left(N_i + \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left(N_j + \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \nu_r \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} r \mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{S_e} \sigma N_i N_j \frac{\partial A_{\theta j}}{\partial t} r \mathrm{d}r\mathrm{d}z - \nu_n \sum_{j=1}^{n_b} \left(\mathscr{b}_i - \mathscr{b}_j \right) \int_{\Gamma_j} \frac{N_i}{r} \mathrm{d}l = \int_{S_e} N_i J_0 \, r \mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.94)'$$

となる．基本的には，(2.117a)を導く際の定式化と同様であるが， $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ なので被積分関数に $r, N_i r, N_i N_j r$ を含む積分項が現れる．これは xy 平面の場合では現れなかった項である. 以下では, (2.94)の係数に表れるそれぞれの積分の評価を与える．なお， b_i, c_i 等の計算については， x を r に，z を y にそれぞれ読み替えればよい．

まず被積分関数に r を含む積分については,

$$\int_{S_e} r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_{S_e} \sum_{j=1}^{3} r_j N_j \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{3} r_j \int_{S_e} N_j \mathrm{d}r\mathrm{d}z = 3 r_g \times \frac{S_e}{3} = r_g \, S_e \quad (2.121a)$$

である．一方で被積分関数に $N_i r, N_i N_j r$ が入る積分の評価は，積分公式(2.116)から

$$\int_{S_e} N_i r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_{S_e} N_i \sum_{j=1}^{3} r_j N_j \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{3} r_j \int_{S_e} N_i N_j \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{S_e}{4} \left(r_g + \frac{r_i}{3} \right) \quad (2.121b)$$

$$\int_{S_e} \sigma N_i N_j \, r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \sigma \int_{S_e} N_i N_j \sum_{s=1}^{3} r_s N_s \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \sigma \sum_{j=1}^{3} r_j \int_{S_e} N_i N_j N_s \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.121c)$$

と計算できる[2.5]．(2.121c)については有限要素行列を作成する段階で積分公式(2.116)を用いて計算するとよい．さて，1 要素について静磁界の成分と電流項は

$$k_{ij} = \frac{r_g}{4S} \left\{ \nu_z \left(\frac{2}{3 r_g} + b_i \right) \left(\frac{2}{3 r_g} + b_j \right) + \nu_r c_i c_j \right\} \quad (2.122a)$$

$$\int_{S_e} N_i \, J_0 \, r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{J_0}{4} \left(r_g + \frac{r_i}{3} \right) \quad (2.122b)$$

となる．ここでは境界項を除いて表示している．(2.122)の 1 要素内の局所節点番号 j を全体番号として付け直し，(2.121c)の渦電流の項を(2.122a)に加えて

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \quad (2.123a)$$

$$\boldsymbol{x} = [A_{\theta 1}, A_{\theta 2}, \cdots, A_{\theta n}]^t \quad (2.123b)$$

という有限要素方程式が得られる．(2.123a)において $\boldsymbol{c}$ は(2.121b)を用いて計算された電流項からなるソースに対応するベクトルである．有限要素の辺が境界と一致し，かつ磁束密度が不連続となる場合には (2.94)′の左辺第 3 項の係数を加える．なお，N_i/r の $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に沿った線積分は $|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|/2r_g$ となる．

2. 7. 2. 2　ψ を未知数とした場合の離散化

離散化された有限要素方程式は，2.5.1.3 節で導いた

$$\sum_{j=1}^{n}\psi_j\int_z\int_r\frac{1}{r}\tilde{\nabla}N_i\cdot\left([\nu_{zr}]\tilde{\nabla}N_j\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z+\sigma\sum_{j=1}^{n}N_iN_j\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\int_z\int_r\frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$-\nu_n\sum_{j=1}^{n_b}\left(\mathscr{b}_i-\mathscr{b}_j\right)\int_{\Gamma_j}\frac{N_i}{r}\mathrm{d}l=\int_z\int_r N_i\,J_\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.100)$$

である．ψ を(2.53)と同じように 1 次三角形要素で離散化すると

$$\psi=\sum_{j=1}^{3}\psi_jN_j(\boldsymbol{x}) \quad (2.124)$$

となる．(2.124)を(2.100)に代入し，Dirichlet 境界条件を課すと

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{b} \quad (2.125a)$$

$$\boldsymbol{\psi}=[\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n]^t \quad (2.125d)$$

$$\boldsymbol{b}=[j_1,j_2,\cdots,j_n]^t \quad (2.125c)$$

$$k_{ij}=\int_z\int_r\frac{1}{r}\left(\nu_z\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r}+\nu_r\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z+\sigma\frac{\partial}{\partial t}\int_z\int_r\frac{N_iN_j}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.125d)$$

$$b_i=-\int_z\int_r N_i\,J_\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (2.125e)$$

を得る．(2.125)から，有限要素方程式が構築できる．(2.125)は時間領域の定式化であるが，周波数領域の定式化においても，時間微分項を $\mathrm{j}\omega$ とすれば，有限要素行列の構築の流れは同様である．前節と同様に，有限要素の辺が境界と一致し，かつ磁束密度が不連続となる場合には (2.100)の左辺第 3 項の係数を加える．なお本問題においても，N_i/r の $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に沿った線積分は $|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|/2r_g$ とすればよい．

しかし，A_θ を未知数とした場合とは異なり，$1/r$ が入る項の積分が現れてしまい，この積分を含む項の評価に際して，z 軸上，あるいは z 軸上近傍に節点を有する場合，$1/r$ が 0 に近くなってしまう問題がある．この特異性の回避方法として，n 点 Gauss 積分がある[2.1]．この方法は，重み関数を用いた補間関数の変更方法である．具体的には，(2.100)左辺第 2 項の評価で

$$\int_z\int_r\frac{N_iN_j}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\approx\sum_{k=1}^{n}w_k\frac{N_i(r_k,z_k)N_j(r_k,z_k)}{r_k} \quad (2.126)$$

を用いる．ここで，w_k は重み係数であり，積分点 (r_k,z_k) は規格化座標 ξ_{kl} を用いて

$$r_k = \sum_{l=1}^{n} r_l \xi_{kl} \quad , \quad z_k = \sum_{l=1}^{n} z_l \xi_{kl} \tag{2.127}$$

と求める．重み係数と規格化座標 ξ_{kl} は Table 2.3 のように決める[e.g. 2.2]．なお，本論文では特に断らない限り，Gauss の 1 点積分を適用し

$$\int_z \int_r \frac{N_i N_j}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \approx \frac{N_i(r_k, z_k) N_j(r_k, z_k)}{9\, r_g} \tag{2.128}$$

として計算する．より一般的な補間の方法は Table 2.1 に示す．以上の(2.124) − (2.128)から，(2.123)と同形の有限要素行列を得ることができる．導体領域については，(2.128)を用いて，(2.125d)左辺第 2 項を(2.123)に加えればよい.

Table 2.3 Relationship between w_k and ξ_{kl} in a triangular element

Number of integration point m	Node Number i	Normalized coordinates ξ_{i1}	ξ_{i2}	ξ_{i3}	weight function w_i
1	1	1/3	1/3	1/3	1
3	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3

2. 7. 3　1 次四角形要素の扱いと局所座標系

本節では，1 次四角形要素を用いた離散化に関して検討する．本研究において，1 次四角形要素はモータの解析を行う際に用いる．上記に述べたような有限要素行列の各要素は，三角形要素の場合と同様に行うことが可能であるが，補間関数の座標による陽な表現を得ることは難しい. そこで, 文献[2.2]で紹介されている局所座標系(正規座標系)を導入し，Jacobi 行列を用いることで，有限要素行列の成分を数値的に求めることを考える．以下では，1 次三角形要素において，局所座標系における補間関数から求めた有限要素方程式と，直接的に求めた有限要素方程式と一致することを示し，1 次四角形要素への適用を示す.

2. 7. 3. 1　局所座標系の導入の妥当性

まず，Fig.2.17 に示すような局所座標系 (r, s) に写像された三角形要素を考える．以下では，導入として，磁気抵抗は等方性を仮定する．このとき補間関数は

$$N_1 = 1 - r - s, N_2 = r, N_3 = s \tag{2.129}$$

と書くことができる．(2.129)から，N_j $(j = 1,2,3)$ が節点 j では 1，他の節点では 0 になるとわかる．従って，局所座標系の補間関数(2.129)は，補間関数(2.54)と本質的には同じであるとわかる．しかし元の座標系に変換するためには Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ を乗じる必要がある．

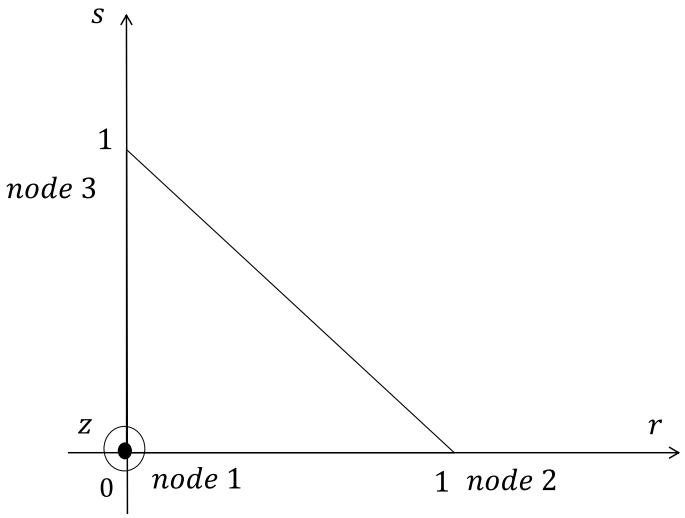


Fig.2.17 Triangle element in the local coordinates.

ここで，局所座標系(r,s)において，有限要素行列を求める際には(2.90)における(2.115)の評価を座標変換して求めればよい．行列形式で示された 1 要素の有限要素行列は次式で与えられる．

$$[\,\mathrm{k}\,] = \int_{\Omega'} \left[N_{xy}\right]^t \begin{bmatrix} \nu_y & 0 \\ 0 & \nu_x \end{bmatrix} \left[N_{xy}\right] \det(\mathcal{J})\, \mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{2.130a}$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{2.130b}$$

$$\left[N_{xy}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} & \dfrac{\partial N_2}{\partial s} & \dfrac{\partial N_3}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{2.130c}$$

と書ける．ここで，Ω' は (r,s) 上での積分領域を表す．

さて，座標 (x,y) と (r,s) の微分の関係は，偏微分の連鎖則から

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{2.131a}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathcal{J}^t \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.131b}$$

である．(2.131b)を(2.131a)に代入すると，

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \mathcal{J}^t \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.132}$$

なので，係数行列が単位行列となるための条件から

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-t} \tag{2.133}$$

が従う．ここで，$\mathcal{J}^{-t}$ は Jacobi 行列の転置の逆行列を表す.

以上の設定から(2.130a)は $\left[N_{xy}\right] = \mathcal{J}^{-t}[N_{rs}]$ なので

$$[\,\mathrm{k}\,] = \int_{\Omega'} [N_{rs}]^t \mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} \nu_y & 0 \\ 0 & \nu_x \end{bmatrix} \mathcal{J}^{-t} [N_{rs}] \det(\mathcal{J})\, \mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{2.134a}$$

となる．なお，磁気特性が等方性の場合には

$$[\,\mathrm{k}\,] = \nu \int_{\Omega'} [N_{rs}]^t \mathbf{g}^{-1} [N_{rs}] \det(\mathcal{J})\, \mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{2.134b}$$

となる．ここで，$\mathbf{g} \coloneqq \mathcal{J}^t\mathcal{J}$ と定義する．$\mathbf{g}$ は計量テンソル(metric tensor)と呼ばれる．

さて，2 次元平面の(x, y)座標系中の三角形要素で考えると，(2.64)を用いて

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} x_3 = -x_1 + x_2 = c_3 \tag{2.135a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} y_3 = -y_1 + y_2 = -b_3 \tag{2.135b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial N_1}{\partial s} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial s} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial s} x_3 = -x_1 + x_3 = -c_2 \tag{2.135c}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial N_1}{\partial s} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial s} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial s} y_3 = -y_1 + y_3 = b_2 \tag{2.135d}$$

から，

$$\mathcal{J} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -x_1 + x_3 \\ -y_1 + y_2 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \\ -b_3 & b_2 \end{bmatrix} \tag{2.136}$$

となる．(2.136)から Jacobian は

$$\det(\mathcal{J}) = (-x_1 + x_2)(-y_1 + y_3) - (-x_1 + x_3)(-y_1 + y_2) = c_3 b_2 - b_3 c_2 \tag{2.137}$$

となる．さらに，(2.136)の逆行列は

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{1}{c_3 b_2 - b_3 c_2}\begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2.138a}$$

$$\mathcal{J}^{-t} = \frac{1}{c_3 b_2 - b_3 c_2}\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2.138b}$$

である．一方で，三角形要素の面積はベクトル外積から

$$S = \frac{1}{2}|(-x_1 + x_2)(-y_1 + y_3) - (-x_1 + x_3)(-y_1 + y_2)| = \frac{1}{2}|c_3 b_2 - b_3 c_2| \tag{2.139}$$

と表せるので,

$$|\det(\mathcal{J})| = 2S \tag{2.140}$$

が成り立つ.

さて，補間関数について(2.129)から

$$[N_{rs}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} & \dfrac{\partial N_2}{\partial s} & \dfrac{\partial N_3}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.141a}$$

$$[N_{rs}]^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.141b}$$

である．また,

$$\mathcal{J}^{-t}\begin{bmatrix} \nu_y & 0 \\ 0 & \nu_x \end{bmatrix}\mathcal{J}^{-1} = \frac{1}{(c_3 b_2 - b_3 c_2)^2}\begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_y & 0 \\ 0 & \nu_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{[\det(\mathcal{J})]^2}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4S^2}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \tag{2.142a}$$

$$G_{11} \coloneqq b_2^2 \nu_y + c_2^2 \nu_x \tag{2.142b}$$

$$G_{12} \coloneqq b_2 b_3 \nu_y + c_2 c_3 \nu_x \tag{2.142c}$$

$$G_{21} \coloneqq b_2 b_3 \nu_y + c_2 c_3 \nu_x \tag{2.142d}$$

$$G_{22} \coloneqq b_3^2 \nu_y + c_3^2 \nu_x \tag{2.142e}$$

となる．したがって，(2.134a)は

$$[\,\mathrm{k}\,] = \int_{\Omega'} \frac{1}{4S^2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{1}{4S^2} \begin{bmatrix} G_{11}+G_{12}+G_{21}+G_{22} & -G_{11}-G_{21} & -G_{12}-G_{22} \\ -G_{11}-G_{12} & G_{11} & G_{12} \\ -G_{21}-G_{22} & G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}s \quad (2.143)$$

となる．ここで，

$$G_{11}+G_{12}+G_{21}+G_{22} = (b_2+b_3)^2\nu_y + (c_2+c_3)^2\nu_x = b_1^2\nu_y + c_1^2\nu_x \quad (2.144a)$$

$$-G_{11}-G_{21} = -b_2^2\nu_y - c_2^2\nu_x - b_2b_3\nu_y - c_2c_3\nu_x = b_1b_2\nu_y + c_1c_2\nu_x \quad (2.144b)$$

$$-G_{12}-G_{22} = b_2b_3\nu_y + c_2c_3\nu_x - b_3^2\nu_y - c_3^2\nu_x = b_1b_3\nu_y + c_1c_3\nu_x \quad (2.144c)$$

$$-G_{11}-G_{12} = -b_2^2\nu_y - c_2^2\nu_x - b_2b_3\nu_y - c_2c_3\nu_x = b_2b_1\nu_y + c_2c_1\nu_x \quad (2.144d)$$

$$G_{11} = b_2^2\nu_y + c_2^2\nu_x \quad (2.144e)$$

$$G_{12} = b_2b_3\nu_y + c_2c_3\nu_x \quad (2.144f)$$

$$-G_{21}-G_{22} = -b_2b_3\nu_y - c_2c_3\nu_x - b_3^2\nu_y - c_3^2\nu_x = b_3b_1\nu_y + c_3c_1\nu_x \quad (2.144g)$$

$$G_{21} = -b_2b_3\nu_y - c_2c_3\nu_x \quad (2.144h)$$

$$G_{22} = b_3^2\nu_y + c_3^2\nu_x \quad (2.144i)$$

であるので，積分公式(2.116)において $l=0, m=0, n=0$ とすれば(x,y)座標系の 1 要素の有限要素行列

$$[\,\mathrm{k}\,] = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} \nu_y b_1 b_1 + \nu_x c_1 c_1 & \nu_y b_1 b_2 + \nu_x c_1 c_2 & \nu_y b_1 b_3 + \nu_x c_1 c_3 \\ & \nu_y b_2 b_2 + \nu_x c_2 c_2 & \nu_y b_2 b_3 + \nu_x c_2 c_3 \\ \text{sym.} & & \nu_y b_3 b_3 + \nu_x c_3 c_3 \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

を導ける．(2.145)は(2.117a)に一致する．したがって，局所座標系で示された有限要素行列の成分の被積分関数は，Jacobian，計量テンソルを介して，元の座標系における有限要素行列の成分と一致することがわかる．

ゆえに，1 次四角形要素のように，補間関数の陽な表現を得ることが難しい場合には，本節で導いた(2.134a)のように，局所座標系における補間関数に Jacobian を乗じて，有限要素行列の係数を計算することで対応できるとわかる．以下では，局所座標系を用いて 1 次四角形要素の有限要素行列を導く．

2. 7. 3. 2　局所座標系における 1 次四角形要素の補間関数の計算

Fig.2.18(a)に示す 1 次四角形要素における離散化は，Fig.2.18(b)に示す局所座標系においてつぎのような補間関数を用いることによって可能となる．

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \tag{2.146a}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \tag{2.146b}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \tag{2.146c}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \tag{2.146d}$$

よって，補間関数については

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \tag{2.147}$$

が成立する．ただし，この場合，磁気ベクトルポテンシャルの補間は

$$A = \sum_{j=1}^{4} A_j N_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.148}$$

となり，要素内の座標は

$$x = \sum_{j=1}^{4} x_j N_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.149a}$$

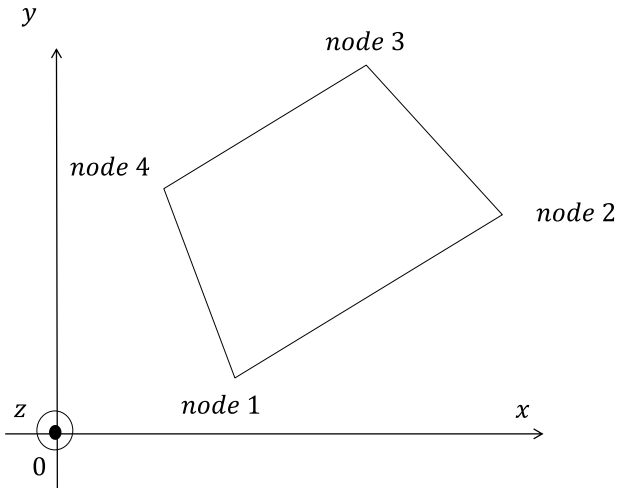
$$y = \sum_{j=1}^{4} y_j N_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.149b}$$

で与えられる．ここで，1 次四角形要素の局所座標系における補間関数は

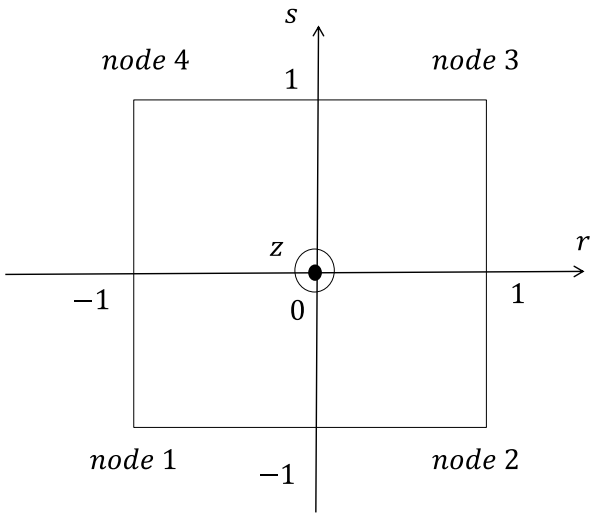
$$[N_{rs}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & \dfrac{\partial N_4}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} & \dfrac{\partial N_2}{\partial s} & \dfrac{\partial N_3}{\partial s} & \dfrac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & (1-r) \end{bmatrix} \tag{2.150}$$

と求めることができる．次節では，この補間関数の勾配の計算を行う．



(a) Quadrature element in the xy coordinates.



(b) Quadrature element in the local coordinates (r, s).

Fig.2.18 Coordinate transformation of the first order quadrature elements.
In the local coordinates, interpolation function can be defined in the closed form. From this interpolation function defined in the local coordinates, the interpolation function in the xy coordinates can be calculated from that of the local coordinates via the Jacobi matrix.

2. 7. 3. 3　1 次四角形要素におけるスカラー補間関数の勾配の計算

(2.146)から節点 j におけるスカラー補間関数の勾配は

$$\nabla N_j = \frac{\partial N_j}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial N_j}{\partial y}\mathbf{e}_y \tag{2.151}$$

である．局所座標系では，(2.151)は微分の連鎖則から

$$\nabla N_j = \left(\frac{\partial N_j}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial N_j}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\mathbf{e}_s \tag{2.152}$$

と変形できる．したがって，

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial N_1}{\partial r}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial r}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial r}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial r}x_4 \tag{2.153a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial N_1}{\partial r}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial r}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial r}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial r}y_4 \tag{2.153b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial N_1}{\partial s}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial s}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial s}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial s}x_3 \tag{2.153c}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial N_1}{\partial s}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial s}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial s}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial s}y_4 \tag{2.153d}$$

と(2.146)より(2.152)が計算できるとわかる．ここで,

$$j_{11}=\frac{\partial x}{\partial r} \tag{2.154a}$$

$$j_{12}=\frac{\partial y}{\partial r} \tag{2.154b}$$

$$j_{21}=\frac{\partial x}{\partial s} \tag{2.154c}$$

$$j_{22}=\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.154d}$$

とおくと，(r,s)座標系についての Jacobi 行列は

$$\mathcal{J}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}j_{11} & j_{12}\\ j_{21} & j_{22}\end{bmatrix} \tag{2.155}$$

となるので,

$$\mathcal{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det(\mathcal{J})}\begin{bmatrix}j_{22} & -j_{12}\\ -j_{21} & j_{11}\end{bmatrix} \tag{2.156a}$$

$$\mathcal{J}^{-t}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{bmatrix}^{t}=\frac{1}{\det(\mathcal{J})}\begin{bmatrix}j_{22} & -j_{21}\\ -j_{12} & j_{11}\end{bmatrix} \tag{2.156b}$$

を得る．要素の座標値は(2.149)から求められる．したがって，局所座標系における有限要素行列は(2.134a), (2.155), (2.156)から計算ができるが，その際には Gauss 積分が有効である．Gauss 積分を適用すると，被積分項の関数を$f(r,s)$とすると

$$[\,\mathrm{k}\,]=\int_{\Omega'}[N_{rs}]^t\mathcal{J}^{-1}\begin{bmatrix}\nu_y & 0\\ 0 & \nu_x\end{bmatrix}\mathcal{J}^{-t}[N_{rs}]\det(\mathcal{J})\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(r,s)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$= \sum_{p=1}^{n_1} \sum_{q=1}^{n_2} w_p w_q f(r_p, s_q) \tag{2.157}$$

と計算できる[e.g. 2.6]．ここで，w_p, w_q は重み係数，n_1, n_2 は補間点数である．

2. 7. 3. 4　1 次四角形要素における電流項の離散化

本節では, 1 次四角形要素を用いた(2.35)の右辺第 1 項の入力電流項の離散化を行う．この項は，例えばモータの界磁巻線に流れる電流を表す．巻線領域での要素の節点 i において

$$\int_{S_e} J_0 N_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{S_e} \sum_{i=1}^{4} J_{0i} N_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = S_e \sum_{i=1}^{4} J_{0i} N_i \tag{2.158}$$

となる．つぎに，有限要素方程式(2.25)の右辺第 2 項で表されている磁化ベクトルの離散化を考える．この項は，モータ内部の磁石が発生する磁化電流に対応する．いま，磁石の特性が線形性を仮定できるなら，回転の計算は 2 次元空間で

$$\boldsymbol{J}_m = \nu_0 \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{M} = \nu_0 \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \tag{2.159}$$

である．さて，2. 4. 4. 2 節で述べた 1 次四角形要素を用いて離散化すると，磁石領域での要素の節点 i において

$$\int_{S_e} J_m N_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \nu_0 \int_{S_e} \sum_{i=1}^{4} \left(M_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= S_e \nu_0 \sum_{i=1}^{4} \left(M_y \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \tag{2.160}$$

となる．しかし，磁石が境界上に存在する場合や，磁石内部の非線形特性を考える場合には，磁化電流の評価(2.159)には工夫を要する場合もあるだろう．

したがって，(2.157), (2.160)から，1 要素内の局所節点番号 j を全体番号として付け直し，それぞれの磁気ベクトルポテンシャルを重ね合わせることで，つぎのように 1 次四角形要素を用いた場合の有限要素方程式が得られる．

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.161a}$$

$$\boldsymbol{a} = [A_1, A_2, \cdots, A_n]^t \tag{2.161d}$$

$$\boldsymbol{b} = [j_1 + j_{m1}, j_2 + j_{m2}, \cdots, j_n + j_{mn}]^t \tag{2.161c}$$

ここで $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ であり，右辺ベクトルである(2.162c)の j_i はコイル電流，j_{mi} は磁化電流を表す．

2.7.4　1 次四面体要素を用いた有限要素行列の構築

本節では，1 次四面体要素を用いた有限要素方程式の構築に必要な補間関数の扱いに関して以下に述べる．

2.7.4.1　スカラー補間関数の計算と勾配

本節では，2.4.3 節で導出した，四面体要素のスカラー補間関数，およびその勾配の計算方法について述べる．まず，スカラー補間関数は(2.81)の体積座標 λ_k と N_k を一致させて，

$$N_k = \frac{1}{6V}(b_k + c_k x + d_k y + e_k z), k = 1,2,3,4 \tag{2.162}$$

を得る．

四面体要素における節点補間関数の勾配は，例えば $k = 1$ で

$$\mathrm{grad}\, N_1 = \frac{1}{6V}\left(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.163}$$

である．他の節点における勾配も同様に求めることが可能である．

2.7.4.2　ベクトル補間関数の計算と回転・勾配

本節では，2.4.3 節で導出した，四面体要素のベクトル補間関数，およびその回転の計算方法について述べる．まず，ベクトル補間関数は(2.78), (2.163)からつぎのように計算できる．

$$\boldsymbol{N}_1 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z)\left(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z\right)$$
$$-\left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z)\left(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164a}$$

$$\boldsymbol{N}_2 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z)\left(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z\right)$$
$$-\left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z)\left(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164b}$$

$$\boldsymbol{N}_3 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z)\left(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z\right)$$
$$-\left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z)\left(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164c}$$

$$\boldsymbol{N}_4 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (c_1 + c_2x + c_3y + c_4z)\left(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z\right) - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)\left(c_2\mathbf{e}_x + c_3\mathbf{e}_y + c_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164d}$$

$$\boldsymbol{N}_5 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z)\left(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z\right) - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)\left(a_2\mathbf{e}_x + a_3\mathbf{e}_y + a_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164e}$$

$$\boldsymbol{N}_6 = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (b_1 + b_2x + b_3y + b_4z)\left(d_2\mathbf{e}_x + d_3\mathbf{e}_y + d_4\mathbf{e}_z\right) - \left(\frac{1}{6V}\right)^2 (d_1 + d_2x + d_3y + d_4z)\left(b_2\mathbf{e}_x + b_3\mathbf{e}_y + b_4\mathbf{e}_z\right) \tag{2.164f}$$

これらからベクトル補間関数の回転が計算できる．例えば，局所辺番号が 1 の場合においては

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_1 = 2\left(\frac{1}{6V}\right)^2 \left\{(c_3a_4 - a_3c_4)\mathbf{e}_x - (c_2a_4 - a_2c_4)\mathbf{e}_y + (c_2a_3 - a_2c_3)\mathbf{e}_z\right\} \tag{2.165}$$

である．他の辺要素における回転も同様に計算できる．したがって，1 次四面体要素を用いた有限要素方程式は，静磁界の場合

$$\mathrm{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.166a}$$

$$k_{ij} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_i \cdot \begin{bmatrix} \nu_x & 0 & 0 \\ 0 & \nu_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{bmatrix} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_j \,\mathrm{d}\Omega \tag{2.166b}$$

$$b_i = \int_\Omega \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.166b}$$

となる．ここで，k_{ij} は有限要素行列 $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{e\times e}$ の第 i 行 j 列の要素の値であり，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{e\times 1}$ は離散化された磁気ベクトルポテンシャルからなる解ベクトル，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{e\times 1}$ はソースを離散化して得られる右辺ベクトルである．ただし，準定常電磁界解析の場合には，(2.162 − 164)を(2.103b)に代入し，連立方程式(2.103)を解く必要がある．なお，本論文では 3 次元解析では境界項については Dirichlet 境界条件を課す．

2. 7. 4. 3　体積積分の評価

3 次元解析において，例えば(2.102)を 1 次四面体要素を用いて解く際には，2.7.4.1 節で求めたスカラー補間関数，2.7.4.2 節で求めたベクトル補間関数を用いた連立方程式(2.166)を解くことになるが，(2.166b, c)の体積積分の評価が必要になる．この場合，つぎの積分公式を用いて計算が可能である．

$$\int_\Omega \lambda_1^w \lambda_2^x \lambda_3^y \lambda_4^z \,\mathrm{d}\Omega = 6V \frac{w!\,x!\,y!\,z!}{(w + x + y + z + 3)!} \tag{2.167}$$

また，補間関数同士の内積の体積積分は，例えばつぎのように計算することができる[2.13].

$$\int_{\Omega} xy \, \mathrm{d}\Omega = \frac{V}{20}\left(\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_k y_l + \sum_{m=1}^{4} x_m y_m\right) \tag{2.168a}$$

$$\int_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}\Omega = \frac{V}{20}\left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{4} x_k^2 \tag{2.168b}$$

したがって，1 要素内の局所節点番号と辺番号を全体番号に付け直すことによって，2.5.1.4 節で導いた 3 次元有限要素方程式を連立 1 次方程式の形式に記述(2.166a)でき，各種解法によって解くことができる．

2. 7. 5　1 次六面体要素を用いた有限要素行列の構築

本節では，1 次六面体要素を用いた有限要素方程式の構築に必要な補間関数の扱いに関して以下に述べる．しかし，1 次六面体要素の場合においても，2.7.3 節で扱った 1 次四角形要素の場合と同様に，直接的に補間関数の陽な表現を得ることが難しいため，局所座標(ξ,η,ζ)に六面体要素を写像し，補間関数の計算を行う．

Fig.2.13 の写像として，Fig.2.19 のように，各座標が -1 から 1 までの立方体を考え，この有向辺上に磁気ベクトルポテンシャル，節点上に電気スカラーポテンシャルを割り当てる．ただし，有向辺は，各座標の正の方向を向くように向き付け，その座標の正の方向から見て反時計回りに順番をつけることにする[e.g. 2.4, 5].

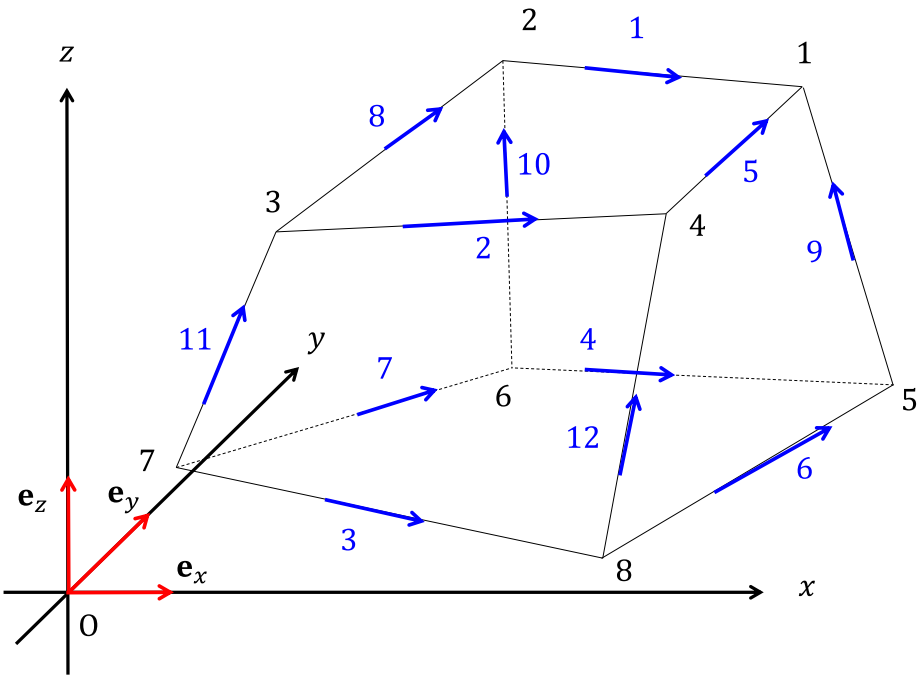


Fig.2.13 Hexahedron element (the first order Whitney element).
Generally, the shape of a hexahedron element is distorted, which gives rise to the difficulty in formulation. Hence, the coordinate transformation from the global coordinates to the normal coordinates has to be introduced.

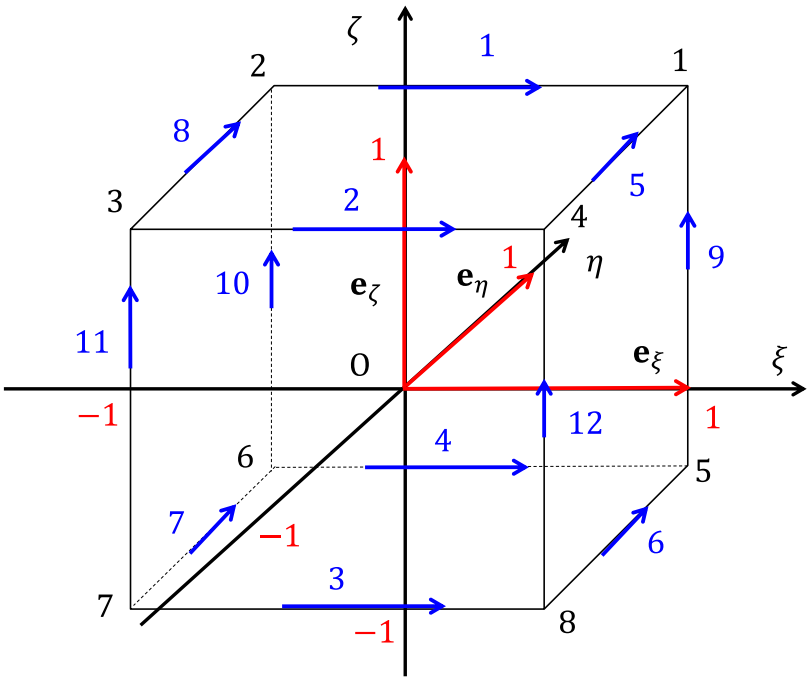


Fig.2.19 Hexahedron element (the first order Whitney element) in the normal coordinates.
In the normal coordinates, the vector interpolation function can be expressed by covariant and contravariant vectors. However, as derived later, so as to obtain the vector interpolation function which can be used in the global coordinates, the Jacobi matrix have to be introduced.

2. 7. 5. 1　局所座標系における 1 次六面体要素の補間関数

局所座標系における 1 次六面体の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，基準ベクトルを $\boldsymbol{x}_0$，六面体の各節点の座標値を $\boldsymbol{x}_j$ として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{j=1}^{8} N_j(\xi,\eta,\zeta)\left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_0\right) \tag{2.169}$$

で規定される．$N_j(\xi,\eta,\zeta)$ はつぎのように求められる．

$$N_j(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}\left(1+\xi_j\xi\right)\left(1+\eta_j\eta\right)\left(1+\zeta_j\zeta\right) \tag{2.170}$$

このスカラー補間関数を用いて表されるベクトル補間関数においても，2.4.3.1 節の辺要素の条件(2.69)を満足する必要がある．

いま，(2.170)は 3 成分からなるスカラー関数なので，1 成分に注目し，Fig.2.13 の局所辺番号が 1 の補間関数を

$$\boldsymbol{N}_1(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\mathbf{e}^{\xi} \tag{2.171}$$

と考える．ここで，$\mathbf{e}^{\xi}$ は反変基底ベクトル(逆基準ベクトル)であることに注意する．このとき，局所節点番号が 1 の節点については，勾配行列の定義から

$$\sum_{k=1}^{8} G_{1k}\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_5 - \boldsymbol{N}_9$$

$$= \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\mathbf{e}^{\xi} + \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}\mathbf{e}^{\eta} + \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta}\mathbf{e}^{\zeta} = \nabla N_1 \tag{2.172}$$

なので，(2.69b)を満足することがわかる．

つぎに，η 方向（$j = 5,6,7,8$）上の辺の線素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ に関して，$\mathbf{e}^{\xi} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ なので

$$\int_{c_j} \boldsymbol{N}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{c_j} \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\mathbf{e}^{\xi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.173}$$

となる．ζ 方向（$j = 9,10,11,12$）上の辺の線素 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ に関しても同様に

$$\int_{c_j} \boldsymbol{N}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{c_j} \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\mathbf{e}^{\xi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{2.174}$$

となる．一方で，ξ 方向（$j = 1,2,3,4$)においては，$j = 2,3,4$ の場合，局所辺番号が 1 の辺とは物理量が補間されていないので，N_1^k を局所節点番号が k の節点上の補間関数であるとすると，辺上の線素 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ に関して，

$$\int_{c_j} \boldsymbol{N}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \int_{c_j} \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\mathbf{e}^{\xi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

$$= \int_{c_j} \frac{\partial N_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}\mathbf{e}^{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\xi}\,\mathrm{d}\xi = N_1^1 - N_1^2 = 1 \tag{2.175}$$

となるので，(2.69a)を満足することがわかる．

したがって，(2.171)は $\mathbf{e}^{\xi}$ 方向の補間関数の一つとして考えられる．1 次六面体要素には，8 個の節点があり，$N_l^k = \delta_{lk}$ なので，(2.171)を用いることによって，各座標毎につぎのように表すことができる．

ξ 方向（$j = 1,2,3,4$）

$$\boldsymbol{N}_j(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}\left(1+\eta_j\eta\right)\left(1+\zeta_j\zeta\right)\mathbf{e}^{\xi} \tag{2.176a}$$

η 方向（$j = 5,6,7,8$）

$$\boldsymbol{N}_j(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}\left(1+\zeta_j\zeta\right)\left(1+\xi_j\xi\right)\mathbf{e}^{\eta} \tag{2.176b}$$

ζ 方向（$j = 9,10,11,12$）

$$\boldsymbol{N}_j(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}\left(1+\xi_j\xi\right)\left(1+\eta_j\eta\right)\mathbf{e}^{\zeta} \tag{2.176c}$$

このように定義されたベクトル補間関数(2.176)によって規定される局所座標の値を Table 2.4 にまとめる.

Table 2.4 Local edge number and values of a hexahedral element in the normal coordinates.

edge number e	ξ_e	η_e	ζ_e
1	0	1	1
2	0	−1	1
3	0	−1	−1
4	0	1	−1
5	1	0	1
6	1	0	−1
7	−1	0	−1
8	−1	0	1
9	1	1	0
10	−1	1	0
11	−1	−1	0
12	1	−1	0

2. 7. 5. 2　局所座標系における共変・反変ベクトルの扱い

一般に，補間関数と面積座標，並びに座標の補間関数によって表された物理量と未知関数は等しいとは限らない．これらが等しい要素はアイソパラメトリック要素と呼ばれる．前節までに扱った要素はいずれもアイソパラメトリック要素であった．2.7.3.1, 2.7.3.2 節で扱ったように，2 次元解析における 1 次三角形要素，1 次四角形要素は局所座標を用いて議論することができた．これらは，局所座標を用いてアイソパラメトリック要素として扱うことができる．

本節でも，この考え方を踏襲して，ベクトル補間関数の定式化を行う．ただし，今回の 1 次六面体要素の場合には 3 次元空間での写像となるため，容易には求めることができない．そこで，共変・反変ベクトルを用いて，補間関数の計算を行い，電磁ポテンシャルを表すことを考える．共変・反変ベクトルについては，例えば文献[e.g. 2.15-18]等に詳細が示されているが，ここでは，共変・反変ベクトルを用いた 1 次六面体要素における電磁ポテンシャルの補間関数の計算について述べる．

まず，アイソパラメトリック要素であることを仮定すると，位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は局所座標系 $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]^t$ において，つぎのように表すことができる．

$$\boldsymbol{x} = \sum_j N_j(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{x}_j \tag{2.177}$$

このように$\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}$を表示すると，スカラー関数は

$$\varphi = \sum_j N_j(\boldsymbol{\xi})\varphi_j \tag{2.178}$$

と離散化できる．ここで，空間的な変化は

$$\xi = \xi(x,y,z), \eta = \eta(x,y,z), \zeta = \zeta(x,y,z) \tag{2.179a}$$

$$x = x(\xi,\eta,\zeta), y = y(\xi,\eta,\zeta), z = z(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.179b}$$

と表される．全体座標系とは異なり，局所座標系における基底ベクトルは互いに正規直交基底とは限らない(一般曲線座標系)．このとき，任意のベクトル$\boldsymbol{A}$は共変成分・反変基底ベクトルを用いた

$$\boldsymbol{A}_\xi = A_\xi \mathbf{e}^\xi + A_\eta \mathbf{e}^\eta + A_\zeta \mathbf{e}^\zeta \tag{2.180a}$$

という表示と，反変成分・共変基底ベクトルを用いた

$$\boldsymbol{A}^\xi = A^\xi \mathbf{e}_\xi + A^\eta \mathbf{e}_\eta + A^\zeta \mathbf{e}_\zeta \tag{2.180b}$$

という 2 通りの表示が考えられる．

この場合，共変基底ベクトルは

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}, \mathbf{e}_\eta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}, \mathbf{e}_\zeta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta} \tag{2.181a}$$

と表示される．一方で，反変基底ベクトルは,

$$\mathbf{e}^\xi = \frac{\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta}{\sqrt{g}}, \mathbf{e}^\eta = \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi}{\sqrt{g}}, \mathbf{e}^\zeta = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\sqrt{g}} \tag{2.181b}$$

$$\sqrt{g} = \mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta) \tag{2.181c}$$

である．(2.181c)は局所座標系$\boldsymbol{\xi} = [\xi,\eta,\zeta]^t$における平行六面体の体積であり，(2.181b)の行ベクトルを並べることにより得られる行列が，(2.181a)からなる列ベクトルを並べて作った行列の逆行列となるようになっている．

(2.181)から，例えば

$$\mathbf{e}^\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta}{\mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta)} \cdot \mathbf{e}_\xi = 1 \tag{2.182a}$$

$$\mathbf{e}^\eta \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi}{\mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta)} \cdot \mathbf{e}_\xi = 0 \tag{2.182b}$$

$$\mathbf{e}^\zeta \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta)} \cdot \mathbf{e}_\xi = 0 \tag{2.182c}$$

なので,

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.183}$$

が従う．この共変・反変ベクトルを用いて，

$$\boldsymbol{A}_\xi = [g_{ij}]\boldsymbol{A}^\xi \tag{2.184a}$$

$$\boldsymbol{A}^\xi = [g^{ij}]\boldsymbol{A}_\xi \tag{2.184b}$$

と表すことができる．ここで，計量テンソルは

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{2.185a}$$

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \tag{2.185b}$$

で与えられる．さて，(2.184)から

$$\boldsymbol{A}_\xi = [g_{ij}][g^{ij}]\boldsymbol{A}_\xi \tag{2.186}$$

が従うので，

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \tag{2.187}$$

を得る．これは，2.7.3.1 節の 1 次三角形要素を局所座標で表示した場合の定式化に表れる(2.134b)と類似している．また，(2.183)から共変・反変成分はそれぞれ

$$A_\xi = \mathbf{e}_\xi \cdot \boldsymbol{A}, A_\eta = \mathbf{e}_\eta \cdot \boldsymbol{A}, A_\zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{A} \tag{2.188a}$$

$$A^\xi = \mathbf{e}^\xi \cdot \boldsymbol{A}, A^\eta = \mathbf{e}^\eta \cdot \boldsymbol{A}, A^\zeta = \mathbf{e}^\zeta \cdot \boldsymbol{A} \tag{2.188b}$$

という表示が可能である．

つぎに，座標変換に必要な Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ と Jacobian を求める．いまの場合

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\right]^t \tag{2.189}$$

である．(2.189)から

$$\left[\mathbf{e}^\xi, \mathbf{e}^\eta, \mathbf{e}^\zeta\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-t} \tag{2.190}$$

が得られる．

さて，(2.183)と(2.189), (2.190)から

$$\mathcal{J}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{bmatrix}J_{[1][1]} & J_{[2][1]} & J_{[3][1]}\\ J_{[1][2]} & J_{[2][2]} & J_{[3][2]}\\ J_{[1][3]} & J_{[2][3]} & J_{[3][3]}\end{bmatrix} \tag{2.191a}$$

$$J_{[i][j]}=\epsilon_{[i][j][k]}\left(\mathbf{e}_{[j]}\times\mathbf{e}_{[k]}\right)_{[(x,y,z)[j]]} \tag{2.191b}$$

を導ける．ここで，(2.191b)において $\epsilon_{[i][j][k]}$ は Levi-Civita 記号

$$\epsilon_{[i][j][k]}=\begin{cases}1\ (i,j,k:clockwise)\\ -1\ (i,j,k:anticlockwise)\\ 0\ (otherwise)\end{cases} \tag{2.191c}$$

である．また，$[i][j][k]$は $\xi\to\eta\to\zeta$ で巡回する添字，$\left[(x,y,z)[m]\right]$ は，$m=1,2,3$ で x,y,z とする記号である．例えば $[i][j][k]=[2][3][1]$ であれば

$$J_{[2][3]}=\epsilon_{[2][3][1]}\left(\mathbf{e}_{[3]}\times\mathbf{e}_{[1]}\right)_{[(x,y,z)[3]]}=\left(\mathbf{e}_{\zeta}\times\mathbf{e}_{\xi}\right)_{z} \tag{2.191d}$$

である．$J_{[i][j]}$ を具体的に示すと，つぎのようになる．

$$J_{[1][1]}=\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\zeta}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta}=\left(\mathbf{e}_{\eta}\times\mathbf{e}_{\zeta}\right)_{x} \tag{2.192a}$$

$$J_{[1][2]}=\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\zeta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\left(\mathbf{e}_{\eta}\times\mathbf{e}_{\zeta}\right)_{y} \tag{2.192b}$$

$$J_{[1][3]}=\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\zeta}=\left(\mathbf{e}_{\eta}\times\mathbf{e}_{\zeta}\right)_{z} \tag{2.192c}$$

$$J_{[2][1]}=\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\left(\mathbf{e}_{\zeta}\times\mathbf{e}_{\xi}\right)_{x} \tag{2.192d}$$

$$J_{[2][2]}=\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\xi}=\left(\mathbf{e}_{\zeta}\times\mathbf{e}_{\xi}\right)_{y} \tag{2.192e}$$

$$J_{[2][3]}=\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\xi}=\left(\mathbf{e}_{\zeta}\times\mathbf{e}_{\xi}\right)_{z} \tag{2.192f}$$

$$J_{[3][1]}=\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}=\left(\mathbf{e}_{\xi}\times\mathbf{e}_{\eta}\right)_{x} \tag{2.192g}$$

$$J_{[3][2]}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}=\left(\mathbf{e}_{\xi}\times\mathbf{e}_{\eta}\right)_{y} \tag{2.192h}$$

$$J_{[3][3]}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}=\left(\mathbf{e}_{\xi}\times\mathbf{e}_{\eta}\right)_{z} \tag{2.192i}$$

このようにして求められた反変ベクトルは(2.181b), (2.181c)を満たす.

2. 7. 5. 3　局所座標系における補間関数の回転・勾配の計算

本節では 1 次六面体要素を用いて解析空間を離散化し，2.5.1.4 節，2.5.1.5 節で導いた 3 次元有限要素方程式を解くために必要な補間関数の回転・勾配の計算を，前節で導入した共変・反変ベクトルを用いて行う[2.1, 2.12].

まず，局所座標系の任意の 2 つのベクトル内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ の計算については共変・反変ベクトルの直交性(2.183)と，共変成分(2.180a)・反変成分(2.180b)の表記から

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_\xi B^\xi + A_\eta B^\eta + A_\zeta B^\zeta \tag{2.193a}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A^\xi B_\xi + A^\eta B_\eta + A^\zeta B_\zeta \tag{2.193b}$$

と共変・反変ベクトルが混在した 2 通りの形で求められる．しかしこれらは計量テンソルにより，(2.184)の表示から

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{A}_\xi\}^t\{\boldsymbol{B}^\xi\} = \{\boldsymbol{A}_\xi\}^t[g^{ij}]\{\boldsymbol{B}_\xi\} \tag{2.194a}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{A}^\xi\}^t\{\boldsymbol{B}_\xi\} = \{\boldsymbol{A}^\xi\}^t[g_{ij}]\{\boldsymbol{B}^\xi\} \tag{2.194b}$$

と統一されたベクトルで記述できる．いま，局所座標系では，1 次六面体要素はアイソパラメトリック要素であるとして議論しているので，スカラー補間関数は $N_j(\boldsymbol{\xi})$ であり，(2.177)から座標が規定され，この場合の基底ベクトルは(2.181a)であり，計量 $[g^{ij}]$ は(2.187)から求められる．しかし $[g^{ij}]$ は $\boldsymbol{\xi}$ の有理式となるため，有限要素行列を作成する際に，全体座標系での積分は，例えば Gauss 積分のような数値積分により評価する必要がある．体積積分に伴う局所座標系における Jacobian の計算と，この Gauss 積分に関する説明は後の 2.7.5.4 節で行う．

局所座標系におけるスカラー補間関数の勾配は

$$\nabla N_j(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial N_j}{\partial \xi}\mathbf{e}^\xi + \frac{\partial N_j}{\partial \eta}\mathbf{e}^\eta + \frac{\partial N_j}{\partial \zeta}\mathbf{e}^\zeta \tag{2.195}$$

である．したがって，勾配同士の内積は(2.194a)から

$$\nabla N_i\cdot\nabla N_j = \{(\nabla N_i)_\xi\}^t[g^{ij}]\left\{\left(\nabla N_j\right)_\xi\right\} \tag{2.196a}$$

$$(\nabla N_i)_\xi = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right]^t \tag{2.196b}$$

と求められる．

つぎに，ベクトル補間関数(2.176)について，計算した結果を共変成分に分解すると，反変基底ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{N}_j = N_{j\xi}\mathbf{e}^\xi + N_{j\eta}\mathbf{e}^\eta + N_{j\zeta}\mathbf{e}^\zeta \tag{2.197}$$

なので，ベクトル補間関数の回転については

$$\nabla \times \boldsymbol{N}_j = \left(\frac{\partial N_j^{\zeta}}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j^{\eta}}{\partial \zeta}\right) N_i^{\xi}\left(\mathbf{e}^{\eta} \times \mathbf{e}^{\zeta}\right) - \left(\frac{\partial N_j^{\zeta}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j^{\xi}}{\partial \zeta}\right)\left(\mathbf{e}^{\zeta} \times \mathbf{e}^{\xi}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial N_j^{\zeta}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j^{\xi}}{\partial \zeta}\right)\left(\mathbf{e}^{\xi} \times \mathbf{e}^{\eta}\right) \tag{2.198}$$

と計算できる．この計算結果は，通常の 3 次元空間における回転の計算結果と類似していることがわかる．さて，(2.176)の計算結果を代入して整理すると

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\xi} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\eta_j\eta\right)\zeta_j\left(\mathbf{e}^{\zeta} \times \mathbf{e}^{\xi}\right) - \eta_j\left(1+\zeta_j\zeta\right)\left(\mathbf{e}^{\xi} \times \mathbf{e}^{\eta}\right)\right\} \tag{2.199a}$$

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\eta} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\zeta_j\zeta\right)\xi_j\left(\mathbf{e}^{\zeta} \times \mathbf{e}^{\xi}\right) - \zeta_j\left(1+\xi_j\xi\right)\left(\mathbf{e}^{\xi} \times \mathbf{e}^{\eta}\right)\right\} \tag{2.199b}$$

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\zeta} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\xi_j\xi\right)\eta_j\left(\mathbf{e}^{\zeta} \times \mathbf{e}^{\xi}\right) - \xi_j\left(1+\eta_j\eta\right)\left(\mathbf{e}^{\xi} \times \mathbf{e}^{\eta}\right)\right\} \tag{2.199c}$$

となる．さて，(2.199)に共変成分(2.180a)・反変成分(2.180b)の変換(2.181)を代入すると

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\xi} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\eta_j\eta\right)\zeta_j\frac{\mathbf{e}_{\eta}}{\sqrt{g}} - \eta_j\left(1+\zeta_j\zeta\right)\frac{\mathbf{e}_{\zeta}}{\sqrt{g}}\right\} \tag{2.200a}$$

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\eta} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\zeta_j\zeta\right)\xi_j\frac{\mathbf{e}_{\zeta}}{\sqrt{g}} - \zeta_j\left(1+\xi_j\xi\right)\frac{\mathbf{e}_{\xi}}{\sqrt{g}}\right\} \tag{2.200b}$$

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j\right)_{\zeta} = \frac{1}{8}\left\{\left(1+\xi_j\xi\right)\eta_j\frac{\mathbf{e}_{\xi}}{\sqrt{g}} - \xi_j\left(1+\eta_j\eta\right)\frac{\mathbf{e}_{\eta}}{\sqrt{g}}\right\} \tag{2.200c}$$

となるので，共変基底ベクトルを基底として，回転を統一的に記述することができ，添え字の巡回性も確認できる．

しかし，回転同士の内積については，計量 $\left[g^{ij}\right]$ を用いてつぎのように求めることもできる．まず，回転を計算した結果を反変成分に分解し，共変基底ベクトルを用いて，(2.180b)より例えばつぎのように書ける．

$$\nabla \times \boldsymbol{N}_j = N_j^{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + N_j^{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + N_j^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta} \tag{2.201}$$

したがって，磁気異方性を考慮した回転同士の内積は反変成分表示でそれぞれ

$$\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_i\right) \cdot \left[\nu_{xyz}\right]\left(\nabla \times \boldsymbol{N}_i\right) = \left(N_i^{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + N_i^{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + N_i^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta}\right) \cdot \left(\nu_x N_i^{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + \nu_y N_i^{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + \nu_z N_i^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta}\right)$$

$$= \nu_x\left(N_i^{\xi}\right)^2\mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\xi} + \nu_y\left(N_i^{\eta}\right)^2\mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_{\eta} + \nu_z\left(N_i^{\zeta}\right)^2\mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_{\zeta}$$

$$+\left(\nu_x+\nu_y\right)N_i^{\xi}N_i^{\eta}\mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_{\eta} + \left(\nu_y+\nu_z\right)N_i^{\eta}N_i^{\zeta}\mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} + \left(\nu_z+\nu_x\right)N_i^{\zeta}N_i^{\xi}\mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_{\xi} \tag{2.202a}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)\cdot[\nu_{xyz}](\nabla\times\boldsymbol{N}_j)=\left(N_i^{\xi}\mathbf{e}_{\xi}+N_i^{\eta}\mathbf{e}_{\eta}+N_i^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta}\right)\cdot\left(\nu_x N_j^{\xi}\mathbf{e}_{\xi}+\nu_y N_j^{\eta}\mathbf{e}_{\eta}+\nu_z N_j^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta}\right)$$

$$=\nu_x N_i^{\xi}N_j^{\xi}\mathbf{e}_{\xi}\cdot\mathbf{e}_{\xi}+\nu_y N_i^{\eta}N_j^{\eta}\mathbf{e}_{\eta}\cdot\mathbf{e}_{\eta}+\nu_z N_i^{\zeta}N_j^{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta}\cdot\mathbf{e}_{\zeta}+\left(\nu_y N_i^{\xi}N_j^{\eta}+\nu_x N_i^{\eta}N_j^{\xi}\right)\mathbf{e}_{\xi}\cdot\mathbf{e}_{\eta}$$

$$+\left(\nu_z N_i^{\eta}N_j^{\zeta}+\nu_y N_i^{\zeta}N_j^{\eta}\right)\mathbf{e}_{\eta}\cdot\mathbf{e}_{\zeta}+\left(\nu_z N_i^{\xi}N_j^{\zeta}+\nu_x N_i^{\zeta}N_j^{\xi}\right)\mathbf{e}_{\zeta}\cdot\mathbf{e}_{\xi}\qquad(2.202b)$$

と書くことができる．ゆえに，(2.189), (2.190), (2.201), (2.202)から

$$(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)\cdot[\nu_{xyz}](\nabla\times\boldsymbol{N}_i)=\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]^t\mathcal{J}^{-1}[\nu_{xyz}]\mathcal{J}^{-t}\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]\qquad(2.203a)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)\cdot[\nu_{xyz}](\nabla\times\boldsymbol{N}_j)=\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]^t\mathcal{J}^{-1}[\nu_{xyz}]\mathcal{J}^{-t}\left[N_j^{\xi},N_j^{\eta},N_j^{\zeta}\right]\qquad(2.203b)$$

と計算できる．また，磁気特性が等方性の場合には，計量$[g^{ij}]$を用いて

$$(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)\cdot\nu(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)=\nu\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]^t[g_{ii}]\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]\qquad(2.204a)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)\cdot\nu(\nabla\times\boldsymbol{N}_j)=\nu\left[N_i^{\xi},N_i^{\eta},N_i^{\zeta}\right]^t[g_{ij}]\left[N_j^{\xi},N_j^{\eta},N_j^{\zeta}\right]\qquad(2.204b)$$

と計算できる[2.1, 2.4].

同様にして，ベクトル補間関数を共変成分に分解して表示した(2.197)から，ベクトル補間関数同士の内積は

$$\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{N}_i=\left(N_{i\xi}\mathbf{e}^{\xi}+N_{i\eta}\mathbf{e}^{\eta}+N_{i\zeta}\mathbf{e}^{\zeta}\right)\cdot\left(N_{i\xi}\mathbf{e}^{\xi}+N_{i\eta}\mathbf{e}^{\eta}+N_{i\zeta}\mathbf{e}^{\zeta}\right)$$

$$=\left(N_{i\xi}\right)^2\mathbf{e}^{\xi}\cdot\mathbf{e}^{\xi}+\left(N_{i\eta}\right)^2\mathbf{e}^{\eta}\cdot\mathbf{e}^{\eta}+\left(N_{i\zeta}\right)^2\mathbf{e}^{\zeta}\cdot\mathbf{e}^{\zeta}$$

$$+2N_{i\xi}N_{i\eta}\mathbf{e}^{\xi}\cdot\mathbf{e}^{\eta}+2N_{i\eta}N_{i\zeta}\mathbf{e}_{\eta}\cdot\mathbf{e}_{\zeta}+2N_{i\zeta}N_{i\xi}\mathbf{e}^{\zeta}\cdot\mathbf{e}^{\xi}\qquad(2.205a)$$

$$\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{N}_j=\left(N_{i\xi}\mathbf{e}^{\xi}+N_{i\eta}\mathbf{e}^{\eta}+N_{i\zeta}\mathbf{e}^{\zeta}\right)\cdot\left(N_{j\xi}\mathbf{e}^{\xi}+N_{j\eta}\mathbf{e}^{\eta}+N_{j\zeta}\mathbf{e}^{\zeta}\right)$$

$$=N_{i\xi}N_{j\xi}\mathbf{e}^{\xi}\cdot\mathbf{e}^{\xi}+N_{i\eta}N_{j\eta}\mathbf{e}^{\eta}\cdot\mathbf{e}^{\eta}+N_{i\zeta}N_{j\zeta}\mathbf{e}^{\zeta}\cdot\mathbf{e}^{\zeta}+\left(N_{i\xi}N_{j\eta}+N_{i\eta}N_{j\xi}\right)\mathbf{e}^{\xi}\cdot\mathbf{e}^{\eta}$$

$$+\left(N_{i\eta}N_{j\zeta}+N_{i\zeta}N_{j\eta}\right)\mathbf{e}^{\eta}\cdot\mathbf{e}^{\zeta}+\left(N_{i\zeta}N_{j\xi}+N_{i\xi}N_{j\zeta}\right)\mathbf{e}^{\zeta}\cdot\mathbf{e}^{\xi}\qquad(2.205b)$$

なので,

$$\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{N}_i=\left[N_{i\xi},N_{i\eta},N_{i\zeta}\right]^t\left[g^{ii}\right]\left[N_{i\xi},N_{i\eta},N_{i\zeta}\right]\qquad(2.206a)$$

$$\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{N}_j=\left[N_{i\xi},N_{i\eta},N_{i\zeta}\right]^t\left[g^{ij}\right]\left[N_{j\xi},N_{j\eta},N_{j\zeta}\right]\qquad(2.206b)$$

を得る.

2. 7. 5. 4　局所座標系における 1 次六面体要素の体積積分

最後に，2.7.5.3 節で導いた補間関数の計算を用いて，2.5.1.3 節で導いた 3 次元有限要素方程式を解く．なお，本節で取り扱っている 1 次六面体は局所座標系で表示されているので，つぎのように Jacobian $|\mathcal{J}|$ を用いて，局所座標系における体積素から，全体座標系における体積素を計算することができる．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= |\mathcal{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &= \mathbf{e}_\xi \cdot \left(\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{2.207}$$

ここで，ベクトル補間関数の内積を簡単に記述するため，(2.200)を

$$\nabla \times \boldsymbol{N}_j = \frac{1}{8\sqrt{g}} \sum_{t=1}^{3} u_t^j(\xi,\eta,\zeta)\mathbf{e}_t \tag{2.208}$$

と記す．$u_t^j(\xi,\eta,\zeta)$は(2.201)から

$$u_1^j = 0, \quad u_2^j = \left(1+\eta_j\eta\right)\zeta_j,\ u_3^j = -\eta_j\left(1+\zeta_j\zeta\right), 1 \le j \le 4 \tag{2.209a}$$

$$u_1^j = -\zeta_j\left(1+\xi_j\xi\right),\ u_2^j = 0,\ u_3^j = \left(1+\zeta_j\zeta\right)\xi_j, 5 \le j \le 8 \tag{2.209b}$$

$$u_1^j = \left(1+\xi_j\xi\right)\eta_j,\ u_2^j = -\xi_j\left(1+\eta_j\eta\right),\ u_3^j = 0, 9 \le j \le 12 \tag{2.209c}$$

である．よって，体積素(2.207)を用いると，

$$\int_{v_e} (\nabla \times \boldsymbol{N}_i)\cdot\left[\nu_{xyz}\right](\nabla \times \boldsymbol{N}_j)\mathrm{d}v = \frac{1}{64}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\int_{-1}^{1} u_m^i u_n^j\,\mathbf{e}_m \cdot \left[\nu_{xyz}\right]\mathbf{e}_n \frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{2.210}$$

を評価することになる．磁気特性が等方性の場合には(2.210)は

$$\int_{v_e} (\nabla \times \boldsymbol{N}_i)\cdot\left[\nu_{xyz}\right](\nabla \times \boldsymbol{N}_j)\mathrm{d}v = \frac{\nu}{64}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\int_{-1}^{1} u_m^i u_n^j\,\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \frac{1}{\sqrt{g}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{2.211}$$

となる．(2.210), (2.211)の評価においては, Gauss 積分が有効である．Gauss 積分は，積分を重み付の有限和で近似する方法であり

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)|\mathcal{J}|\mathrm{d}\xi \approx \sum_{l=1}^{m} w_l f(\xi_l)|\mathcal{J}(\xi_l)| \tag{2.212}$$

のように評価する．ここで ξ_l は積分点，w_l は重み関数，m は積分点数であり，これらの関係を表した表を Table 2.5 に示す．例えば標本点が 2 個の場合は

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)|\mathcal{J}|\mathrm{d}\xi \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left|\mathcal{J}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left|\mathcal{J}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \qquad (2.213)$$

と評価できる[2.6, 7].

2.7.5.3 節で導いた補間関数の陽な表示と，(2.208), (2.210), (2.212)を用いて評価した積分値を係数行列とすることにより, 局所座標系に写像された 1 次六面体から，全体座標系における一般の 1 次六面体要素を用いた 1 要素での有限要素方程式が得られる．後は，1 次四面体要素の場合の有限要素方程式(2.166)と同様にして，局所節点番号と辺番号を全体番号に付け替えることによって，2.5.1.4, 5 節で導いた 3 次元有限要素方程式を連立 1 次方程式の形式に記述でき，各種解法によって解くことができる．ただし，準定常電磁界解析の場合には，(2.195 − 197), (2.206)を(2.103b)に代入し，連立方程式(2.103)を解く必要がある．なお，本論文では 3 次元解析では境界項については Dirichlet 境界条件を課す.

Table 2.5 List of the number of integral points, weighting functions, and integral points: Gauss integration for one-dimensional problem to numerically evaluate an integral in the local coordinates.

the number of integral points m	integral points l	value of ξ_l in the local coordinates	value of weighting function w_l
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	1
4	1	0.8611	0.3479
	2	−0.8611	0.3479
	3	0.33400	0.6521
	4	−0.33400	0.6521

2. 8　3 次元解析における電流無発散条件

Fig.2.20 に示すように，コイル等に電流密度 $\boldsymbol{J}_0$ を与えて電磁界解析を行う場合，素線外に電流が流出しない条件，すなわち $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}_0 = 0$ が満足されている必要がある．2 次元解析の場合は三角形要素の各節点に一定の $\boldsymbol{J}_0$ を与えることで，容易に電流密度の連続条件を満足する．

3 次元解析の場合, このような条件を厳密に満たす $\boldsymbol{J}$ の分布を求める方法として，電流ベクトルポテンシャルを用いる方法と，電気スカラーポテンシャルを用いる方法が提案されているが，本論文では後者の方法を用いる．本節では，3 次元解析において，有限要素解析上の問題点について述べ，その後で，電気スカラーポテンシャルを修正することで，強制印加電流が素線外部に流出しない条件を満足させる方法について示す.

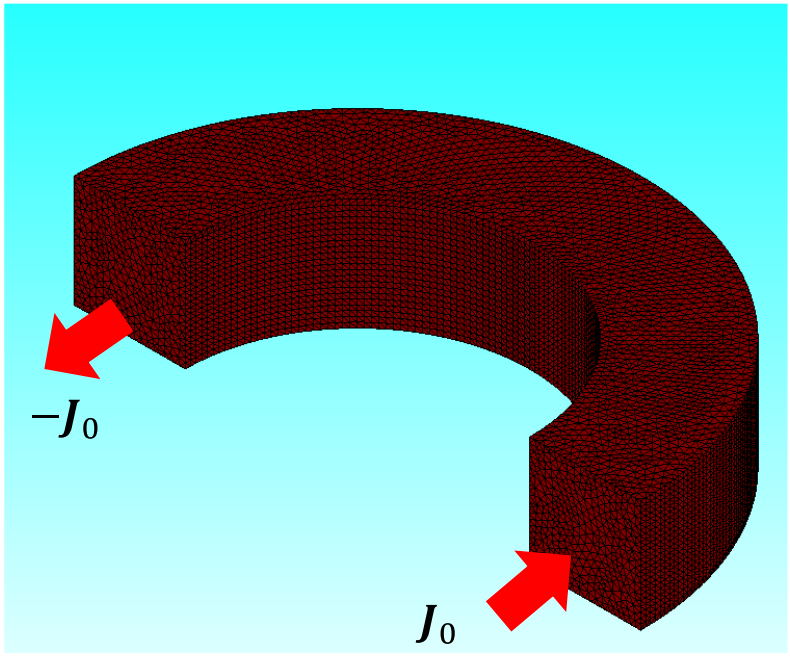


Fig.2.20 Discretized bulk-coil with the first order Whitney elements.
In this figure, the inflow and outflow currents are depicted by the two vectors $\boldsymbol{J}_0$ and $-\boldsymbol{J}_0$, respectively. When we perform 3D analysis, input current $\boldsymbol{J}_0$ must be satisfied with the condition $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}_0 = 0$.

2. 8. 1　ICCG 法による行列のランク落ちについて

本節では簡単のため，静磁界の有限要素方程式

$$\sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\Omega} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_i \cdot [\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_j \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 \,\mathrm{d}\Omega \tag{2.214a}$$

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.214b}$$

を考える．有限要素行列 $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は対称かつ疎行列であるので，ICCG 法を用いて解くことが一般的である．対称行列である K を用いた連立 1 次方程式(2.214b)が解をもつためには右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ が K の零空間 $N(\mathrm{K})$ と直交する，すなわち $N(\mathrm{K}) \perp \boldsymbol{b}$ であることが必要になる[2.20]．しかしながら，3 次元解析の場合には，入力電流が各要素内で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$ を満足する保証はなく，さらに ICCG 法においては，単位行列生成の際に，成分の一部を強制的に 0 としてしまう操作がある．これらから

$$\mathrm{rank}\,(\mathrm{K}) + \mathrm{Ker}\,(\mathrm{K}) = e \tag{2.215}$$

となる可能性があることになる[2.21]．このような場合，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} \neq 0$ となり電流が導線外部に湧き出してしまうことになり，非物理的な状況での解析となってしまう．このような状況を回避するために，右辺ベクトルを $\boldsymbol{b}$ から $N(\mathrm{K}) \perp \boldsymbol{b}'$ を満足する $\boldsymbol{b}'$ に修正する必要がある．このとき，$\boldsymbol{b}'$ は K の列ベクトル $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ からなる空間に含まれることになる．ベクトル空間における概念図を Fig.2.21 に示す．

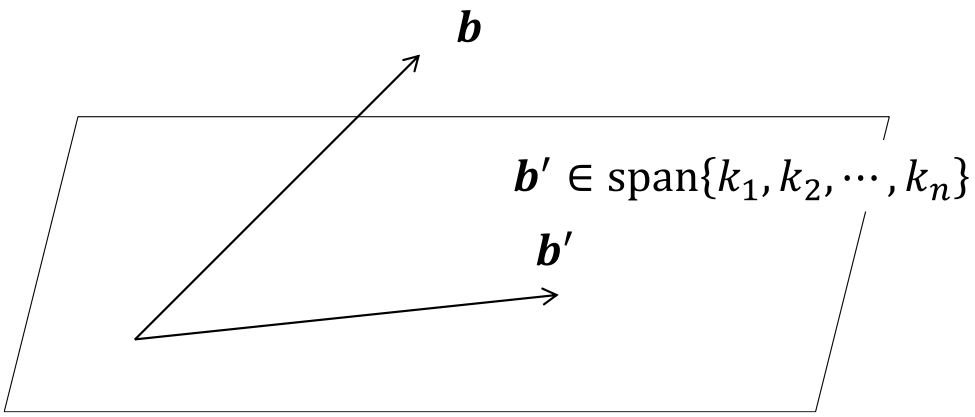


Fig.2.21 Right hand vector $\boldsymbol{b}$ and a modified vector $\boldsymbol{b}'$.
In the 3D analysis, there is a possibility that FE equation (2.214) is inconsistency since the condition $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$ is not always satisfied in every elements in wire conductor regions. Thus, for avoiding this situation, it has to be corrected to modified $\boldsymbol{J}'$ so that the imposed current must strictly observe the condition $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}' = 0, N(\mathrm{K}) \perp \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}' \in \mathrm{span}\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$. Under this condition, the ICCG method can be executable.

2. 8. 2　1 次 Whitney 要素の辺要素と節点要素の包含関係

有限要素空間内の辺要素の両端の 2 つの節点を結び，向きを指定すると，有効辺が形成されるので，$W^0 : N_u (u = 1 \sim n)$ によって表現されるスカラー場の集合(n :全節点数)，$W^1 : \boldsymbol{N}_i (i = 1 \sim e)$ によって表現されるベクトル場の集合(e :全辺数)，$\mathrm{grad}\, W^0 : W^0$ の要素(代数学における集合論での要素の意味であることに注意)の勾配からなる集合とすると，0 次 Whitney 要素と 1 次 Whitney 要素の包含関係は 2.4.3.1 節で述べたように $\mathrm{grad}\, W^0 \subset W^1$ の関係が成立することから，静磁界の支配方程式の $\boldsymbol{N}_i$ に $\mathrm{grad}\, N_u$ を代入しても方程式が閉じる必要がある[2.2]．実際に(2.214a)の $\boldsymbol{N}_i$ に $\mathrm{grad}\, N_u$ を代入すると

$$\sum_{j=1}^{e} A_j \int_{\Omega} \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, N_u) \cdot [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \mathrm{grad}\, N_u \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.216}$$

を得る．ここで，スカラー関数 f に対して，ベクトル公式

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \boldsymbol{0} \tag{2.217}$$

が成り立つので

$$\int_{\Omega} \mathrm{grad}\, N_u \cdot \boldsymbol{J}_0 \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.218}$$

が従う．

さて，Ohm の法則から，$\boldsymbol{J}_0$ は電界を用いて

$$\boldsymbol{J}_0 = \sigma \boldsymbol{E} \tag{2.219}$$

と表される．素線中に渦電流が無い場合は電界が保存界であるための条件

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{2.220}$$

を満たす必要がある．(2.220)から

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi \tag{2.221}$$

と電気スカラーポテンシャル φ を用いて電界を表記できるので，電流は静電界を用いて

$$\boldsymbol{J}_0 = -\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.222}$$

と記述されるから，(2.218)は

$$\int_{\Omega} \mathrm{grad}\,N_u \cdot \mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.223}$$

となる．さて φ を(2.101b)で示される節点要素を用いて離散化すると，(2.223)は

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{\Omega} \mathrm{grad}\,N_u \cdot \mathrm{grad}\,N_k\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.224}$$

となる．(2.224)は φ に関する Laplace 方程式である．Laplace 方程式は，厳密に解が一意に定まらなくてはならない．したがって，電流を正確に与えるためには，1 次 Whitney 要素内での辺要素，節点要素の包含関係から，Laplace 方程式が閉じるように，ソース領域の電気スカラーポテンシャルを修正する必要がある[2.2]．これは，Fig.2.20 に示すように，解空間に核が含まれてはいけないこと，つまり 1 次独立が厳密に保証されていることが必要であることを意味している．一般の Laplace 方程式の解の一意性については次節で証明する．

2. 8. 3　Laplace 方程式の解の一意性の証明

前節において示した，Laplace 方程式の解が一意に定まることが要請されることを証明する．すなわち，最初に求めた電気スカラーポテンシャルの係数がランク落ちしている場合は，電気スカラーポテンシャルの修正が必要となることを証明する[e.g. 2.22, section 4.8].

いま，あるスカラー関数 f, f_1, f_2 が領域 Ω における調和関数であるとする(すなわち $\nabla^2 f_1 = 0, \nabla^2 f_2 = 0$). このとき Green の第 1 公式より得られる境界 $\partial\Omega$ 上の面積分

$$\int_{\partial\Omega} f_1 \nabla f_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} (f_1 \nabla^2 f_2 + \nabla f_1 \cdot \nabla f_2)\mathrm{d}\Omega \tag{2.225}$$

において，$f = f_1 = f_2$ とおき，領域 Ω で区分的に滑らかであると仮定する．すると，(2.225)の左辺と右辺はそれぞれ

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.226a}$$

$$\int_{\Omega} (f_1 \nabla^2 f_2 + \nabla f_1 \cdot \nabla f_2) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\Omega \qquad (2.226\mathrm{b})$$

よって,

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (2.227)$$

なので, $|\nabla f|$ は境界 $\partial\Omega$ 上で連続, かつ負にはならないので領域 Ω の内部で 0 になる. したがって領域 Ω で f は定数となるが，(2.226a)から $f = 0$ となる．また，f_1, f_2 が $(2.225 - 227)$を満たすとすると，f のとり方は任意だったので，$f \coloneqq f_1 - f_2$ とした場合，境界 $\partial\Omega$ 上の任意の点で $f_1 - f_2 = 0$ なので，結局 $f_1 = f_2$ を得る.

2. 8. 4　3 次元空間における電流項の扱い

本節では, 前節で示した Laplace 方程式を厳密に満たすための電気スカラーポテンシャルの修正手法について示す.

素線断面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ に通電する全電流 I は，(2.222)より

$$I = \int_{S} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sigma \int_{S} \mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (2.228)$$

である．3 次元解析においては，Fig.2.16 のように流入面，流出面を定義し，それらに一定の φ を与えることで電流が流れることを表現する．しかし，有限要素を用いて離散化している場においては，電流無発散の条件はこの時点では近似的にしか満足されていない. そこで, 電流密度の発散が 0 になるように補正を行う. いま, (2.228)から電流無発散の条件は

$$\mathrm{div}\,(-\sigma\, \mathrm{grad}\varphi) = 0 \qquad (2.229)$$

となる．(2.224), (2.229)から求めた $\boldsymbol{J}$ より，修正後の電流密度 $\boldsymbol{J}'$ を

$$\boldsymbol{J}' \coloneqq \boldsymbol{J} - \sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi' = -\sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi - \sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi' \qquad (2.230)$$

と定義する．ここで，φ' は修正後の電気スカラーポテンシャルである．このとき，電流無発散条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}' = 0$ を満たす．これは，電流無発散の条件を満足するので,

$$\mathrm{div}\,(\,\sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi') = -\mathrm{div}\,(\,\sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi) \qquad (2.231)$$

を得る．(2.231)は φ' が未知数の Poisson 方程式である．(2.229)を離散化して得られる連立方程式を解いて得られた φと，(2.231)を離散化して得られる連立方程式を解いて得られた φ' から計算された修正後の電流密度 $\boldsymbol{J}'$, すなわち(2.230)の左辺が与えるべき電流密度分布である[2.20].

2. 9　磁性体の非線形性の考慮

2. 5 節で導いた有限要素方程式は, 磁気抵抗はスカラー関数であるとして扱った. しかしながら，一般的には磁性材料の透磁率 $\mu_r(\boldsymbol{H})$ は磁気飽和等に伴う磁気非線形

特性のため，外部磁界 $\boldsymbol{H}$ によって変化する．例として，50A400 という磁性材料のBHカーブを Fig.2.22 に示す. 一般に磁性体中の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は場所によって異なるので，透磁率は空間的に変化する[2.4,8, 9]．すなわち構成関係式は(2.2)ではなく

$$\boldsymbol{B} = \mu_r(\boldsymbol{H})\mu_0\boldsymbol{H} \tag{2.232}$$

とする必要がある．この場合，有限要素方程式は非線形方程式となる．以下では，この方程式を解くための方法について述べる．

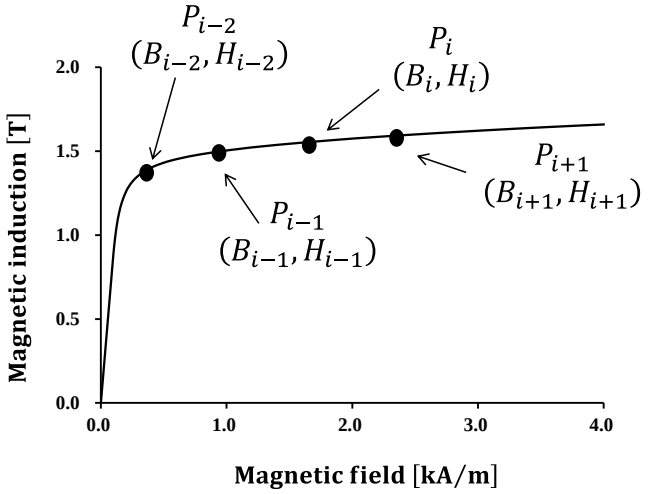


Fig.2.22 BH characterisitic of 50A400.
Abscissa and ordinate denote the amplitudes of an applied magnetic field and the response magnetic induction along to one direction, respectively. When we consider magnetic saturation of a magnetic material, we have to solve the nonlinear equations $(2.236 - 238)$ as derived later by the Newton-Raphson method.

2. 9. 1　Newton-Raphson 法を用いた非線形方程式の解法

いま，非線形有限要素方程式

$$\mathrm{K}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.233}$$

を考える．ただし有限要素方程式の成分の中には非線形性を有する成分があるとする．左辺と右辺の差を

$$\mathrm{G}\big(\nu(\boldsymbol{B})\big) = \mathrm{K}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \tag{2.234}$$

と定義する．(2.234)の G が(2.233)を満たすように $\boldsymbol{a}$ を決定することを考える．

いま，外部磁界の微小増分に対して Newton-Raphson 法を適用する．すなわち G の各要素 g_i の $\boldsymbol{a}$ に関する Taylor 展開

$$g_i(\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a}) \approx g_i(\boldsymbol{a}) + \sum_k \frac{\partial g_i(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}_k}\Delta\boldsymbol{a}_k = 0 \tag{2.235}$$

を考える．ここで，i, k は 2 次元解析なら全体節点番号，3 次元解析なら全体辺番号を表す．なお，ここでは磁気特性が等方性であることを仮定する．異方性の場合の取り扱いは，例えば文献[2.3, section 4.3]等を参考とする．(2.235)を用いると，磁気ベクトルポテンシャルの増分に対して，有限要素方程式は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial A_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial A_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial A_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial A_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \Delta A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 \\ \vdots \\ -g_n \end{bmatrix} \tag{2.236}$$

と記述できる．このとき磁気ベクトルポテンシャルの近似評価は

$$A_k^{(u+1)} = A_k^{(u)} + \Delta A_k^{(u)} \tag{2.237a}$$

となる．ここで，添字 u は u 回目の反復計算の結果を表す．$A_k^{(u+1)}$ が絶対値の基準を満たしたら計算を終了し，近似的な解とする．なお，非線形反復計算毎に解が振動し収束しにくい場合には，減速係数 α を導入し

$$A_k^{(u+1)} = A_k^{(u)} + \alpha \Delta A_k^{(u)} \tag{2.237b}$$

とする方法が知られている[e.g. 2.3-5]．減速係数 α を決定するにはいくつかの方法があるが，例えば n 回目の反復計算で $\alpha = 1/2^n$ とするとよい．

いま，簡単のため，2 次元解析における(2.236)の微分を陽に示すと

$$\frac{\partial g_i(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}_k} = \int_\Omega \nabla N_i \cdot \nu \nabla N_j \, \mathrm{d}\Omega + \sum_{j=1}^{n} A_j \int_\Omega \nabla N_i \cdot \frac{\partial \nu(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}_k} \nabla N_j \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.238}$$

である．

実際の解析では，非線形性を有する磁性体領域の各要素に適当な透磁率を割り当て，反復計算毎に与えられた透磁率を修正することになるが，その際には，BH曲線のデータと有限要素解析から得られた外部磁界に応じて透磁率を数値的に補間する必要がある．次節では補間に必要な Akima 補間について述べる[2.4, 19].

2. 9. 2　Akima 補間による透磁率の計算

磁性体のBH曲線が例えば Fig.2.22 のように与えられているとする．例えばこのデータは，csv ファイル等で，離散的なデータを補間して表示されたグラフであるとする．なお，前提として，このグラフは区分的に滑らかであると仮定する．例えば点 P_i~P_{i+1} の区間を 3 次式で補間する場合，このとき，磁束密度の ξ 成分 $B \coloneqq B_\xi$ は磁界の ξ 成分 $H \coloneqq H_\xi$ を用いて，つぎのように近似できる．

$$B = a_i(H - H_i)^3 + b_i(H - H_i)^2 + c_i(H - H_i) + d_i \tag{2.239}$$

未定係数 a_i, b_i, c_i, d_i については，BH 曲線が区分的に滑らかであるという条件から，区間での $B_i, H_i, \mathrm{d}B(H_i)/\mathrm{d}H\,, B_{i+1}, H_{i+1}, \mathrm{d}B(H_{i+1})/\mathrm{d}H$ が与えられている場合には

$$B_i = d_i \tag{2.240a}$$

$$B_{i+1} = a_i(H_{i+1} - H_i)^3 + b_i(H_{i+1} - H_i)^2 + c_i(H_{i+1} - H_i) + d_i \tag{2.240b}$$

$$\frac{\mathrm{d}B(H_i)}{\mathrm{d}H} = c_i \tag{2.240c}$$

$$\frac{\mathrm{d}B(H_{i+1})}{\mathrm{d}H} = 3a_i(H_{i+1} - H_i)^2 + 2b_i(H_{i+1} - H_i) + c_i \tag{2.240d}$$

を得る．$\mathrm{d}B(H_i)/\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}B(H_{i+1})/\mathrm{d}H$ については

$$\frac{\mathrm{d}B(H_i)}{\mathrm{d}H} = \frac{|m_{i+1} - m_i|m_{i-1} + |m_{i-1} - m_{i-2}|m_i}{|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}|} \tag{2.241a}$$

$$\frac{\mathrm{d}B(H_{i+1})}{\mathrm{d}H} = \frac{|m_{i+2} - m_{i+1}|m_i + |m_i - m_{i-1}|m_{i+1}}{|m_{i+2} - m_{i+1}| + |m_i - m_{i-1}|} \tag{2.241b}$$

$$m_i \coloneqq \frac{B_{i+1} - B_i}{H_{i+1} - H_i} \tag{2.241c}$$

と補間することで得られる．m_i は，BH 曲線上の 2 点$(B_i, H_i), (B_{i+1}, H_{i+1})$の傾きに対応する．(2.241)を(2.240)に代入し，(2.240)を全ての標本点に対して適用することで得られる連立方程式を解き，a_i, b_i, c_i, d_i を得る．

本手続きにより，磁性体の磁気飽和を考慮した解析が可能となる．

2. 10　電圧源と有限要素方程式の結合解析

電気機器は外部電気回路に接続されていることが一般的なので，外部電源の効果を含めた解析が必要となることがある．線形問題の場合には電流入力で解析が可能であるが，2.9 節で示すように磁性体が非線形特性を有する場合や，後に示す PWM 入力の問題，励磁源コイルに鎖交する磁束による電流波形のひずみ等を考慮する際には，本節で示す有限要素解析と外部回路との連成のための定式化が必要になる．なお，本節では，励磁源コイルには渦電流が流れないとして解析を行うが，素線内の渦電流を考慮した有限要素解析の方法は，第 3・4 章にて議論する[2.4, 5, 19].

いま，Fig.2.23 に示す励磁源コイルと電気機器を含む系の接続を考える．有限要素解析領域と示されている部分が有限要素法により解析を行う領域であり，この領域では，外部回路は有限要素解析の対象としない．励磁源コイルの回路方程式は，

$$v_{in} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + R_{dc}i + v_{out} \tag{2.242}$$

と記述できる．(2.242)の右辺第 1 項は素線に鎖交する磁束による誘導起電力，第 2 項は直流電流による素線内の電圧降下，第 3 項は外部回路の電圧降下を表す．ここで，N, S を励磁源コイルの巻数，断面積とすると Φ は素線に鎖交する磁束であるから，

$$\Phi = \frac{N}{S}\int_{S_c} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\frac{N}{S}\int_{S_c} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{N}{S}\int_{\partial\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N\int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega_{coil} \tag{2.243}$$

となる．したがって，有限要素方程式と連立すると

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{c}^t & R_{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ v_{in} - v_{out} \end{bmatrix} \tag{2.244a}$$

$$c_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}\Omega_{coil} \tag{2.244b}$$

という連立方程式を導ける．この場合にも，有限要素行列に電流項を加えた(2.244a)の左辺の係数行列 $\mathrm{N} \in \mathbb{R}^{(e+1)\times(e+1)}$ は，対称かつスパース性があるので，ICCG 法等を用いて解くことが可能である．ここで，e は有限要素空間の全辺数である．なお，コイルの数が一般に n 個になっても同様の手順で電圧源を考慮した連立方程式が導ける．

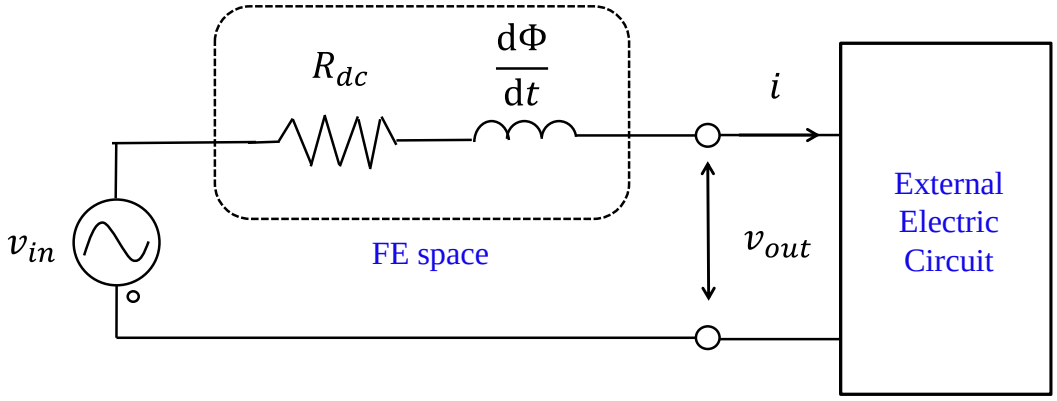


Fig.2.23 Armature coil connected to a power source.
In FE analysis, when we consider the voltage input problem for nonlinear analysis, the total current must be calculated by solving the FE equation coupled with the circuit equation of armature wire conductors.

2. 11 第 2 章の総括

本章においては，本研究で取り扱う電磁界の種類とそれぞれの支配方程式，および解析領域を離散化した際の有限要素方程式を導いた．さらに各 0, 1 次 Whitney 要素の形状毎に補間関数を導き，Galerkin 法に基づいて有限要素方程式の構築に必要な係数行列の成分を陽に示した．また，境界項の取り扱いにおいて Dirichlet 条件，Neumann 条件，さらに可動体を考慮した非適合境界と周期境界を示した．実際には，磁性体の非線形性や電圧源の考慮が必要になるので，これらについても解析に必要な定式化を示し，有限要素法に導入する際の方法を示した．

第 2 章 参考文献

[2.1] 本間利久，五十嵐一，川口秀樹，「数値電磁力学」，森北出版, 2002.

[2.2] 五十嵐一，亀有昭久，加川幸雄，西口磯春，A. Bossavit，「新しい計算電磁気学―基礎と数理―」，培風館，2003.

[2.3] 高橋則雄，「三次元有限要素法」 電気学会, 2006.

[2.4] 高橋則雄,「磁気工学の有限要素法」, 朝倉書店, 2013.

[2.5] 高橋則雄,「電気工学の有限要素法」, 森北出版, 1986.

[2.6] G. ダット, G. トゥゾー,「有限要素法全解」, パーソナルメディア, 1990.

[2.7] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, “Finite elements for electrical engineers”, 3rd ed., Cambridge University Press, 1983.

[2.8] 小柴正則,「基礎からの電磁気学」, 培風館, 2011.

[2.9] 桂井誠,「基礎電磁気学」, オーム社, 2000.

[2.10] 砂川重信,「理論電磁気学」, 紀伊国屋書店, 2015.

[2.11] 高橋大輔,「数値解析」, 岩波書店, 1996.

[2.12] H. Igarashi, A. Kost and T. Honma, “Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its applications to integral equations”, European *Phys.J.*, AP 7, (1998), 103-110.

[2.13] Senior, T. B. A., "Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces", Applied Scientic Research, Section B 8.1, pp.418-436, 1960.

[2.14] M. Feliziani, F. Maradei, G. Tribellini, “Field Analysis of Penetrable Conductive Shields by the Finite-Difference Time-Domain Method with Impedance Network Boundary Conditions (INBC’s)”, *IEEE Trans.* Electromagnetic Compatibility, vol.41. no.4, pp.307-319, 1999.

[2.15] 岩堀長慶,「数学選書 2, 数学の基礎的諸分野への現代的入門, ベクトル解析」, 裳華房, 1982 年 12 月.

[2.16] 宮崎保光,「応用ベクトル解析」, コロナ社, 1981.

[2.17] 吉田善章,「電磁気学とベクトル解析」, 共立出版, 2019.

[2.18] 前野昌弘,「よくわかる解析力学」, 付録 C, 東京図書, 2013.

[2.19] 佐藤佑樹,「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」, 2019 年度北海道大学博士論文.

[2.20] G. Strang,「計算理工学」, 近代科学社, 2017.

[2.21] 電磁界解析高度利用技術調査専門委員会編,「電気学会技術報告第 1317 号」, 第 4 章,「電磁界解析の普及へ向けた高度利用技術の整理」, 2014.

[2.22] E. Kreyszig,「線形代数とベクトル解析」, 培風館, 2009.

第 3 章　周波数領域における均質化有限要素法

第 1 章で述べたように，周波数が高い場合の細線や圧粉磁芯を含む系の解析には，渦電流を考慮して系を離散化する必要があるために膨大な数の有限要素を必要とする．渦電流を考慮する際には，表皮厚よりも十分に小さい有限要素が最低でも 3~5 層程度必要となる．本章では，このような微細な要素分割を避けるため，第 1 章 1.5.2 節で述べた巨視的な透磁率を用いた均質化法を用いる．本論文では準定常電磁界を扱うため，マクロ透磁率は複素数となる．このマクロ複素透磁率の実部が反磁性を反映した実効透磁率，虚部が渦電流損失に対応する．したがって，このマクロ複素透磁率を用いて，磁性体領域を均質材料に置き換えることができる．ゆえに，準定常電磁界解析に必要な有限要素数を大幅に削減できる．この場合，均質化された磁性体内部では $\boldsymbol{B} = \langle \dot{\mu}_r \rangle \mu_0 \boldsymbol{H}$ となる．

マクロ複素透磁率を求める方法には，いくつかの方法があるが，本論文で使用する方法は，unit-cell approach と，Ollendorff の式に基づく均質化法の 2 通りである．unit-cell approach では，周期セルの中に磁性体が存在すると仮定し，適切な磁気ベクトルポテンシャル境界を設定することで，磁性体に一様交番磁界を印加した場合のエネルギー保存則からマクロ複素透磁率を数値計算で得る[3.1-4]．本法においては，任意の形状の磁性体に対して解析を行うことができる利点があるが，周波数や材質を変更するたびに解析を行う必要がある上，時間領域解析を直接的に行うことが難しい．また，有限要素解析が行えることが前提であるので，単位セルそのものの離散化に膨大な有限要素を要するモデルに対しては適用が難しい．

一方で，Ollendorff の式に基づいた均質化法では，磁性体の渦電流特性を反映した複素透磁率を求める．つぎに，Ollendorff の式に代入することで，磁性体の充填率，磁性体の形状を反映したマクロ複素透磁率を得る[3.5-19]．複素透磁率を求める方法にはいくつかある．一つは磁性体の内部磁化から求める方法であり，この方法では，有限要素解析を行うことにより磁気感受率を数値的に得ることから複素透磁率を求める[3.6, 7]．二つ目は準静電磁界の支配方程式である Helmholtz 方程式を解析的に解くことにより，反磁性を考慮した磁気双極子から複素透磁率を解析的に定義する方法である[3.5-10]．本章では，後者の方法で複素透磁率を求める[e.g. 3.11]．

本定式化は周波数領域で行い，磁性体同士の磁気的接触は考えない．磁性体同士の磁気的接触に関しては，第 6 章で扱う．また時間領域解析への適用は第 7 章にて行う．本章では，まず 3.1 節に，unit-cell approach によるマクロ複素透磁率の数値評価法に付いて述べる[3.5, 3.11]．つぎに 3.2 節では静磁界中の磁性体の均質化のための Ollendorff の式を導く[3.3]．3.3 節以降では，電磁鋼板[3.8-10]，導線[3.11, 14]，磁性被覆線[3.12-13, 15]，多層型磁性被覆線，真球形圧粉磁芯[3.16-18]，扁平圧粉磁芯[3.19]のマクロ複素透磁率をそれぞれ解析的に導く．3.13 節では，局所座標系で定義された複素透磁率をまとめ，3.14 節では座標変換を用いたテンソル型のマクロ複素透磁率について述べる．最後に，3.15 節で本章の内容をまとめる．なお，記号表については，説明の都合上各節毎に示す．

また，各座標系における空間微分の計算においては，計量という概念が必要になり，計算が複雑になる場合がある．各座標系の計量の詳細については Appendix E にまとめ，本節ではこの Appendix E を適宜参照して各座標系での空間微分の計算を行う．

3. 1　Unit-cell approach によるマクロ複素透磁率の評価

まず本節で使用する記号を Table 3.1 にまとめる．

Table 3.1 Nomenclature of this section: Unit-cell approach

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential	$\boldsymbol{B}_0$ [T]	applied uniform magnetic induction
Ω_m	magnetic-conductive material	Ω_{air}	air region
σ [S/m]	conductivity of Ω_1	μ_1 [H/m]	permeability of Ω_1
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$\nu = 1/\mu$ [m/H]	magnetic reluctivity
f [Hz]	frequency	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	angular frequency
j	imaginary unit	$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated magnetic-conductive material	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	macroscopic complex permeability

Unit-cell approach による均質化法においては，周期セル中に孤立した磁性粒子が存在する場合を想定し，外部一様交番磁界 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を磁性体に与えて，エネルギー保存則が成立するように設定した方程式から $\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$ を求める．この場合，$\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$ は準定常電磁界を有限要素法により解くことで数値的に評価できる．この単位セルに一様な交番磁束密度 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を外部から印加するためには，

$$\boldsymbol{B}_0 = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{A} \times \mathbf{e}_n = \boldsymbol{C} \tag{3.1b}$$

を電気壁とすればよい[3.20]．ここで $\boldsymbol{C}$ は定数ベクトルである．系のエネルギー保存則を満たすような $\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$ は，蓄積磁気エネルギーが線形場の場合には $(\mathrm{j}\omega/2) \times (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{H}_0^*) = (\mathrm{j}\omega/2) \times (|\boldsymbol{B}_0|^2/(\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle^* \mu_0))$ の体積積分で計算できることから

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2} \int_{\Omega_{all}} \frac{|\boldsymbol{B}_0|^2}{\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle^* \mu_0}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \sigma |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}\Omega_1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{2} \int_{\Omega_{all}} \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\mu}\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.2a}$$

$$\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle = \frac{\mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{all}} \dfrac{|\boldsymbol{B}_0|^2}{\mu_0}\,\mathrm{d}\Omega}{-\int_{\Omega_m} \sigma |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}\Omega_1 + \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{all}} \dfrac{|\boldsymbol{B}|^2}{\mu}\mathrm{d}\Omega} \tag{3.2b}$$

と記述できるだろう．なお，異方性の磁気特性を考慮する場合，磁界の印加方向を変更することで，各成分のマクロ複素透磁率を求め，テンソル型マクロ複素透磁率[$\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$]を得る．以下では，2 次元空間の場合，3 次元空間の場合それぞれで，必要な境界条件の設定について述べる．

3. 1. 1　2 次元解析の場合

Fig.3.1 に示すように，2 次元空間で一様交番磁界中の磁性体を考える．一様交番磁界 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathbf{e}_y$ を印加するためには，$x = l_x$ の境界で $A_y = |\boldsymbol{B}_0| l_x/2$，$x = -l_x$ の境界で $A_y = -|\boldsymbol{B}_0| l_x/2$ とすることで

$$\int_{-l_x}^{l_x} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = |\boldsymbol{B}_0| l_x \ = \Phi \tag{3.3}$$

となるから，一様磁界を単位セル内に印加することができる．このように定義した $\boldsymbol{A}$ は逆に(3.1a)を満たす．2.2.3 節で導いた周波数領域準静電磁界の方程式(2.12)を，この境界条件の下で解くことで，マクロ複素透磁率を(3.2)から求めることができる．1 次三角形要素を用いて離散化する場合には(2.91)を解くことになる．入力電流がない場合には(2.91)の右辺を 0 とし，境界項は Dirichlet 境界条件より 0 とすればよい．

解析例として，Fig.3.2 に示す磁性被覆線を Table 3.2 に示すような解析条件で解析した場合の磁束線を Fig.3.3 に示す．Fig.3.3 から，このようにして有限要素方程式を求めた結果，(3.3)より磁束線の実部については高透磁率の磁性被覆に集中しているが，その一部は導線と鎖交していることがわかる．一方で，磁束線の虚部の分布から，外部磁界を打ち消す反磁界が位相差で表れていることもわかる．$\langle \dot{\mu}_r(\omega) \rangle$ の周波数特性については，第 4 章にて Ollendorff の式で求めた方法との比較で述べる．

Table 3.2 Specification of the MSW depicted in Fig.3.1

η	σ_1 [S/m]	σ_2 [S/m]	μ_{1r}	μ_{2r}	a [mm]	b [mm]	Cell size [mm^2]
0.60	5.76×10^7	1.03×10^7	1.0	100.0	0.10	0.1050	0.24×0.24

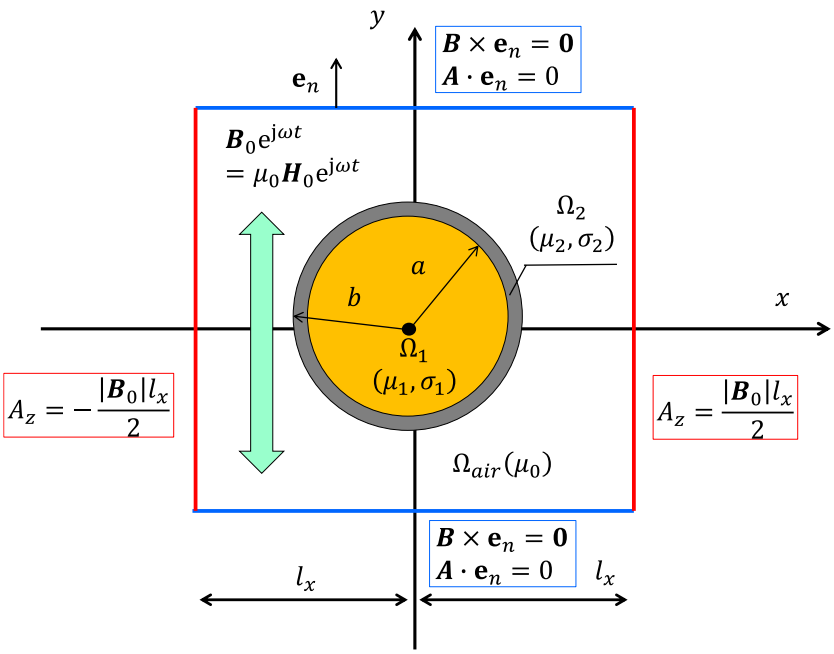


Fig.3.1 Unit-cell approach for numerical evaluation of the macroscopic complex permeability (e.g. MSW).
Uniform magnetic induction can be applied by assigning the fixed magnetic vector potentials to the boundaries. In this method, a magnetic-conductive material is assumed to be located in the periodically arranged unit cells. From the equivalence between expressions of the energy conversation law, we can numerically obtain the macroscopic complex permeability which reflects the eddy currents induced by an applied magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

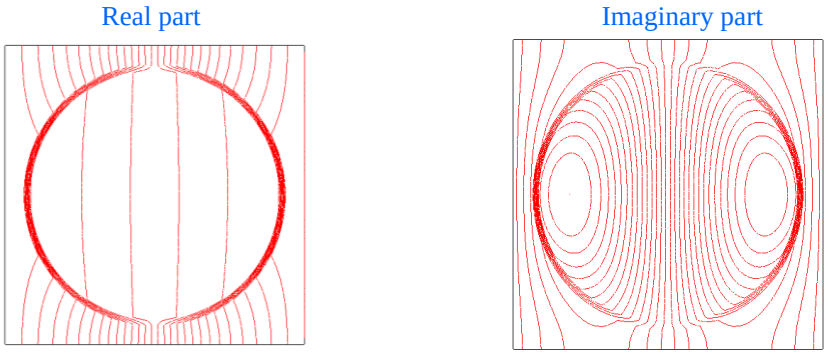


Fig.3.2 Magnetic flux lines of the MSW in the unit-cell as shown in Fig.3.1.
Real part (left) : Magnetic flux tends to pass not through the central conductor and the diamagnetic field due to the eddy current reduces the inner magnetic field.
Imaginary part (right) : Response magnetic field to the applied magnetic field leads to the diamagnetic field by the Faraday's law of induction.

3. 1. 2　3 次元解析の場合

Fig.3.3 に示すように，3 次元空間で一様交番磁界中に置かれた磁性体を考える．本論文では，圧粉磁芯の解析を行う際に用いる．3 次元空間において一様交番磁界 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mu_0 H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathbf{e}_y$ を印加するためには，Fig.3.3 に示した面番号において，A_z を Table 3.3 のように設定する[3.21, 22]．ただし，面$3, 3'$については，磁束が垂直に単位セルを抜けるように設定しているため，Neumann 境界条件とする．一般に，3 次元解析では準静電磁界解析の場合，渦電流を考慮した有限要素による離散化が必要となってしまう．そこで，系の対称性や磁気特性によっては，$1/8$ 領域のみの解析で行う場合もあるが，その場合には Table 3.3 の境界条件について適宜変更を加えることが必要になる．

一般の有限要素生成のためのソフトウエアを用いて，有限要素のデータを読み込む際においては，有向辺である辺要素が x 軸や z 軸に平行でない場合も想定される．このように，固定境界面上の要素の辺が x 軸や z 軸に平行でない一般的な場合は，固定境界として与える磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と要素の辺をベクトルで記述した $\boldsymbol{L}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}\,[(\mathrm{Wb/m})\cdot\mathrm{m}] = [\mathrm{Wb}]$ を固定境界の値とすればよい．例えば本問題の場合には

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \left(A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z\right)\cdot\left(L_x\mathbf{e}_x + L_y\mathbf{e}_y + L_z\mathbf{e}_z\right)$$

$$= A_xL_x + A_yL_y + A_zL_z = 0\times L_x + A_yL_y + 0\times L_z = A_y^0 l_y \tag{3.4}$$

となる．$x = l_x$ の境界で $A_y = |\boldsymbol{B}_0|l_x/2$, $z = -l_z$ の境界で $A_z = -|\boldsymbol{B}_0|l_z/2$ とすることで準静電磁界の有限要素方程式を解き，辺要素を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\left(\sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{N}_i A_i\right) \tag{3.5a}$$

$$\int_{-l_x}^{l_x}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{B}_0 l_x \;= \Phi \tag{3.5b}$$

となるから，$\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle$ を(3.2)から求めることができる．

解析例として，Fig.3.3 に示す $(\mu, \sigma) = (10\mu_0\ \mathrm{H/m}, 1.03 \times 10^7\ \mathrm{S/m})$ である半径 10 μm の圧粉磁芯を想定した磁性粒子を Table 3.3 に示すような解析条件で，$1/8$ 領域，及び全領域で解析した場合の磁束線を Fig.3.4(a, b)にそれぞれ示す．Fig.3.4 において，実部が静磁気特性と反磁界を含めた分布，虚部が位相差で現れる渦電流による反磁界分布を表している．$\langle \dot{\mu}_r(\omega) \rangle$ については，後の Ollendorff の式で求めた方法との比較で述べる．しかし，後述のように，3 次元解析から得られた $\langle \dot{\mu}_r(\omega) \rangle$ の評価については，Ollendorff の式と一致しない場合がある．この現象については後述するが，$1/8$ 領域のみの解析では，境界面と高透磁率を有する磁性体の領域の一部が一致していることに起因すると考えられる．

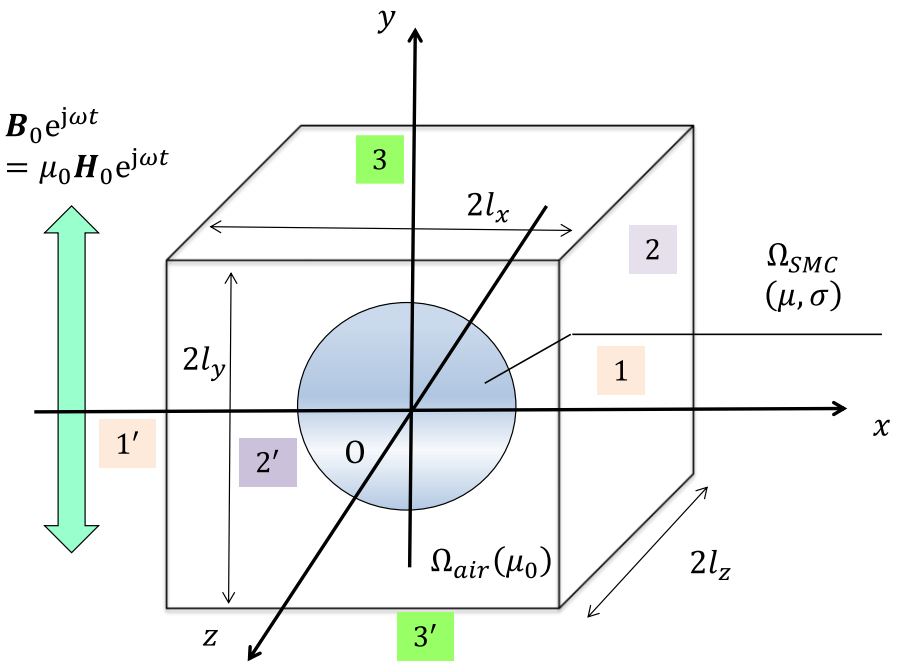
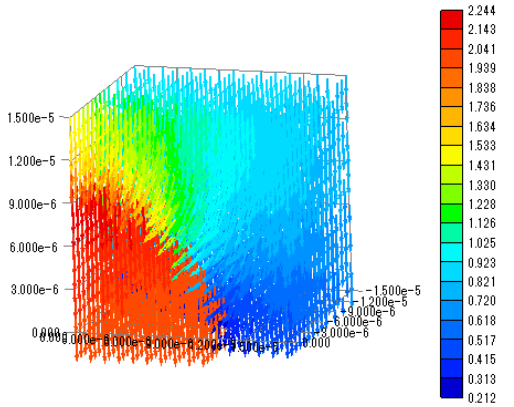


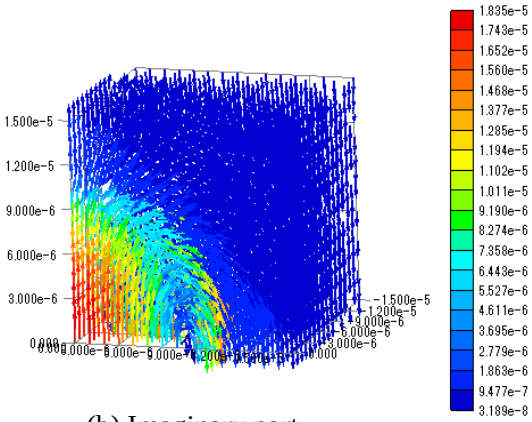
Fig.3.3 Magnetic particle in a unit-cell immersed in a uniform magnetic field.
In order to apply a uniform magnetic field, boundary conditions have to be set as Table 3.3.

Table 3.3 Setting of the magnetic vector potentials for the unit-cell approach in 3D space

Surface number	Conditions for the magnetic vector potentials
1	$A_z = 0\ [\mathrm{Wb/m}], A_x = A_x^0 [\mathrm{Wb/m}]$
$1'$	$A_z = 0\ [\mathrm{Wb/m}], A_x = 0\ [\mathrm{Wb/m}]$
2	$A_z = -A_z^0 [\mathrm{Wb/m}], A_x = 0\ [\mathrm{Wb/m}]$
$2'$	$A_z = 0\ [\mathrm{Wb/m}], A_x = 0\ [\mathrm{Wb/m}]$
3	Neumann boundary condition
$3'$	Neumann boundary condition

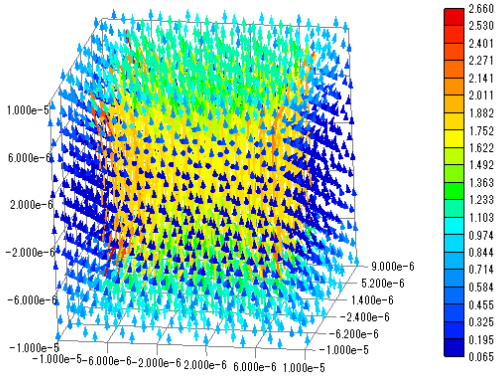


(a) Real part

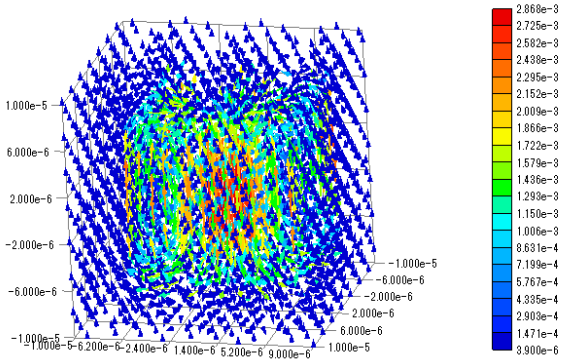


(b) Imaginary part

(a) 1/8 region discretized by tetrahedral elements.



(a) Real part



(b) Imaginary part

(b) Full model discretized by hexahedral elements.

Fig.3.4 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell as shown in Fig.3.3.
From these distributions, we find that the total tendency is the same as in the case Fig.3.2. Note here that the boundary conditions is set as Table 3.3.

3. 2　静磁界中の磁性粒子群に対する Ollendorff の式

まず本節で使用する記号を Table 3.4 にまとめる．本節においては，マクロ複素透磁率を求めるために，準備として静磁界中の磁性粒子群に対する Ollendorff の式の導出する[3.5, 11]．均質化される静磁界中の磁性粒子に対する Ollendorff の式を 3.2.1 節に，均質化される磁性粒子が非線形特性を持つ場合の拡張に関した場合の Ollendorff の式を 3.2.2 節にそれぞれ述べる．本節で導く Ollendorff の式は，分子の分極を考慮したマクロ誘電率を求めるための Clausius-Mosotti の式と，高周波解析において分散性誘電体のマクロ誘電率を求めるための Maxwell-Garnett の式と本質的に等価である[3.11, 23-25]．これらの等価性は，Appendix A にまとめた．

また，本論文で議論する内部磁化を求めるために，磁界，磁束密度，磁化の関係を Table 3.5 にまとめた[3.25]．この詳細については Appendix C に示す．

Table 3.4 Nomenclature of this section: Ollendorff formula for a magnetic particle in a magnetostatic field

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	applied magnetic field	$\boldsymbol{H}_{loc}$ [A/m]	local magnetic field
$\boldsymbol{H}_{in}$ [A/m]	magnetic field inside a magnetic particle	$\boldsymbol{B}$ [T]	macroscopic magnetic induction
$\boldsymbol{M}$ [A/m]	macroscopic magnetization	$\boldsymbol{M}_{in}$ [A/m]	magnetization inside a magnetic material
μ_r	relative permeability of Ω_1	μ_0 [H/m]	permeability of vacuum
η	volume fraction	N	diamagnetic constant
χ_m	magnetic susceptibility	$\langle\mu_r\rangle$	macroscopic relative permeability

Table 3.5 Diamagnetic properties of a magnetic material with a diamagnetic constant (cf. Appendix C)

Relationship	magnetic field $H = \nu B$	magnetic induction $B = \mu H = \mu_0(1+\mu_r)H$	magnetization $M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H$
General form of H, B, M inside in a magnetic material with a diamagnetic constant N	$\dfrac{H_0}{1+N(\mu_r-1)}$	$\dfrac{\mu_r\mu_0 H_0}{1+N(\mu_r-1)}$	$\dfrac{(\mu_r-1)H_0}{1+N(\mu_r-1)}$

3. 2. 1　線形材質の磁性粒子群に対する Ollendorff の式

Fig.3.5(a)に示すような静磁界中の磁性粒子群を考える．本問題では，Fig.3.5 (b)のように 1 つの磁性粒子と非磁性体からなる単位セルを単位要素と考える．いま，磁性粒子の比透磁率を μ_r，磁性粒子群の充填率を η，非磁性粒子の体積充填率を $(1-\eta)$ とする．外部磁界により，磁性体には $N\boldsymbol{M}$ の反磁性が発生する．ここで，N は粒子の形状により決定する反磁界係数である．さて，磁性粒子近傍の磁界 $\boldsymbol{H}_{loc}$ (Lorentz 磁界)は磁性粒子を取り除いたときにその空間に現れる磁界であるから

$$\boldsymbol{H}_{loc} = \boldsymbol{H} + N\boldsymbol{M} \tag{3.6}$$

が成立する．磁性粒子中の磁界 $\boldsymbol{H}_{in}$ は内部磁化ベクトル $\boldsymbol{M}_{in}$ の自己減磁作用を考慮すると

$$\boldsymbol{H}_{in} = \boldsymbol{H}_{loc} - N\boldsymbol{M}_{in} \tag{3.7}$$

となる．ここで，磁性粒子の磁気感受率 $\chi = (\mu_r - 1)$ を用いると，内部磁化は

$$\boldsymbol{M}_{in} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H}_{in} \tag{3.8}$$

となる．(3.6 − 8)から

$$\boldsymbol{M}_{in} = \frac{\mu_r - 1}{1 + N(\mu_r - 1)} \boldsymbol{H}_{loc} \tag{3.9}$$

を得る．(3.9)は，磁性粒子に注目した内部磁化と局所磁界の関係を表す．

さて，Fig.3.6 のように，磁性粒子群を巨視的にみたときのマクロな磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ は(3.9)から

$$\boldsymbol{M} = \eta \boldsymbol{M}_{in} = \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(\mu_r - 1)} \boldsymbol{H}_{loc} \tag{3.10}$$

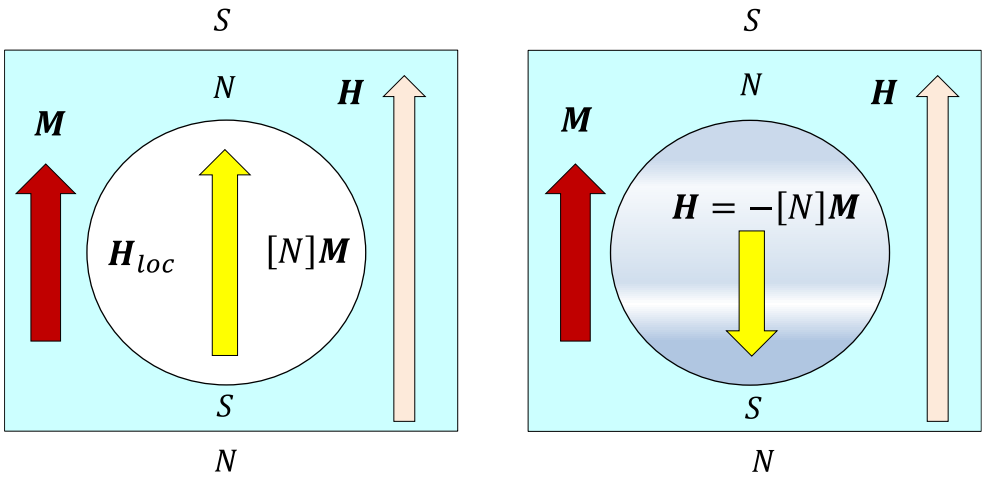
となる．(3.6), (3.10)から

$$\boldsymbol{M} = \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\mu_r - 1)} \boldsymbol{H} \tag{3.11}$$

という巨視的な磁界と磁化の関係式を得る．(3.11)の $\boldsymbol{H}$ の係数は巨視的に見た場合のマクロ磁気感受率 $\langle \chi_m \rangle$ を表している．ゆえに $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ に対して，$\boldsymbol{B} = \langle \mu \rangle \boldsymbol{H}, \langle \mu_r \rangle = 1 + \langle \chi_m \rangle$ となるマクロ透磁率を定義して，

$$\langle \mu_r \rangle = 1 + \frac{\eta(\mu_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\mu_r - 1)} \tag{3.12}$$

を得る．(3.12)が集合した磁性粒子群に一様磁界が印加されている状況での Ollendorff の式である．この場合は磁気特性は線形性を仮定している．なお，一般的に，反磁界係数は磁界の印加方向により異なるので，厳密には Fig.3.5,3.6 に示すように $[N]$ と記すのが正確である．この詳細についても Appendix C で述べる．



(a) Lorentz field　　(b) Magnetization of the magnetic particle

Fig.3.5 Magnetic fields of two cases: (a) Lorentz field around a hole in an outer media and (b) Magnetization inside in a magnetic particle induced by an applied magnetic field.
(a) Hole in the outer media: The Lorentz field, that is, the local magnetic field is the field which appears when the isolated magnetic particle is taken away.
(b) Magnetization of the magnetic material: Inside of the particle, the inner diamagnetic field toward the inverse direction is given by eq.(3.8).

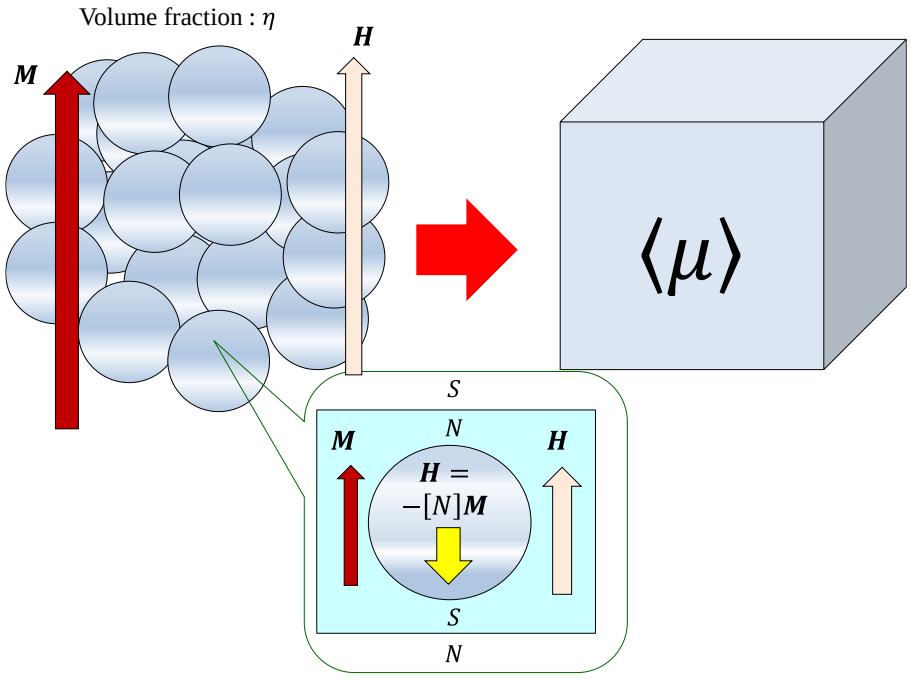


Fig.3.6 Homogenization using the macroscopic permeability.
In this method, we can treat a number of assembled fine-structured magnetic particles as a bulk homogenous material.

3. 2. 2　非線形材質の磁性粒子群に対する Ollendorff の式

磁性粒子群が非線形特性を有する場合には，磁気感受率の表現(3.7)と内部磁化の表現(3.8)を修正する必要がある．磁性粒子の磁気感受率は外部印加磁界により変化する効果を含めて $\chi_m(\boldsymbol{H}_{in}) = (\mu_r(\boldsymbol{H}_{in}) - 1)$ と表記すると，

$$\boldsymbol{M}_{in} = (\mu_r(\boldsymbol{H}_{in}) - 1)\boldsymbol{H}_{in} = \chi_m(\boldsymbol{H}_{in})\boldsymbol{H}_{in} \tag{3.13}$$

である．ここで，Lorentz 磁界を修正する．(3.7)から

$$\boldsymbol{H}_{in} = \boldsymbol{H} + N(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{H}_{in}) \tag{3.14}$$

である．非磁性粒子群を含めた単位セルの巨視的な磁化は内部磁化の空間平均であると考えると，$\boldsymbol{M} = \eta\boldsymbol{H}$ となるので，(3.9), (3.10)から

$$\boldsymbol{M} = \eta\chi_m(\tilde{\boldsymbol{H}})\tilde{\boldsymbol{H}} \tag{3.15a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)N\boldsymbol{M} \tag{3.15b}$$

という$\boldsymbol{M}$ の非線形方程式を得る．(3.15)を解くには，例えば Newton-Raphson 法等で数値解析を行えばよい．数値解析の結果，得られた磁性体の磁化を $\tilde{\boldsymbol{M}}$ とすると，外部磁束密度 $\boldsymbol{B}$ との関係は

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \tilde{\boldsymbol{M}}) \tag{3.16}$$

である．ここで，マクロ透磁率 $\langle\mu\rangle$ を $\boldsymbol{B}=\langle\mu\rangle\boldsymbol{H}$ を満たすように定義すると，

$$\langle\mu\rangle\boldsymbol{H}=\mu_0\left(\boldsymbol{H}+\widetilde{\boldsymbol{M}}\right) \tag{3.17}$$

を得る．(3.17)が非線形材料に対する Ollendorff の式となる．(3.17)において，$\langle\mu\rangle$ は非線形特性を考慮したテンソル型マクロ透磁率となっている．(3.17)は，例えば圧粉磁芯等の 3 次元モデルの解析に適用できる．2 次元問題については，Fig.3.3 では $\mathbf{e}_y$ 方向に磁界が印加されるとすると

$$\langle\mu_r^y\rangle=1+\chi_m\left(H_y\right)=1+\frac{M_y}{H_y}=1+\frac{\eta\left(\mu_r\left(H_y\right)-1\right)}{1+N(1-\eta)\left(\mu_r\left(H_y\right)-1\right)} \tag{3.18}$$

となる．ここで，$\langle\mu_r^y\rangle$ は $\mathbf{e}_y$ 方向に一様磁界を想定した場合の非線形磁性粒子群に対するスカラー型マクロ比透磁率である．また，(3.18)右辺の第 2 項は非線形を有するマクロ磁気感受率と考えることができる．(3.18)の評価には，2.9 節で述べた Newton-Raphson 法を用いればよい．

3. 3　磁気双極子から定義した各種磁性体の複素透磁率

本章では，3.1 節で述べたように，各種磁性体のマクロ複素透磁率を解析式で求める方法を議論する．渦電流問題では，電磁界は準静近似 Maxwell 電磁方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{3.19a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{3.19b}$$

に支配される．ここで，細線解析の場合，(3.19a)右辺の電界は電源から供給される印加電流と渦電流の効果を表す電界からなる．ここでは電界の重ね合わせで右辺ベクトルを表記しているが，これらを分離して記述しても以降の最終的な定式化に影響はない．これについては，Appendix B にて補足する．さて，(3.19)から導体内において，電磁界はつぎの Helmholtz 方程式を解くことで求められる．

$$\Delta\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \tag{3.20a}$$

ここで k は波数を表す．一方で，(3.19)から導体外において，電磁界はつぎの Laplace 方程式を解くことで求められる．

$$\Delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \tag{3.20b}$$

以下では，各問題に対して(3.20)を解くことで磁気双極子を解析的に求める．その際には，各磁性体の形状に合わせた基底関数を用いることになる[3.26, 37]．3.4 節では，電磁鋼板について，3.5-8 節では円筒形細線について，3.9,10 節では楕円柱細線について，3.11 節では真球形圧粉磁芯について，3.12 節では，楕円体圧粉磁芯について，それぞれ(3.20)を解析的に解く．この解析解と，静磁界中の磁化ベクトルから複素透磁率を求める．磁性体が集合している場合には，求めた複素透磁率を周波数領域に拡張した Ollendorff の式

$$\langle\dot{\mu}_r\rangle=1+\frac{\eta(\dot{\mu}_r-1)}{1+N(1-\eta)(\dot{\mu}_r-1)} \tag{3.21}$$

に代入することでマクロ複素透磁率を求める[e.g. 3.11]．この状況では，Fig.3.5(a)の局所磁界中の空洞に，物質定数が $(\dot{\mu}_r\mu_0,\sigma=0)$ である磁性体が Fig.3.5(b)のように埋め込ま

れている状況になる．(3.21)で表されるマクロ複素透磁率を用いて，一様交番磁界中の微細な磁性体の集合を 1 つの塊状に均質化された媒質として扱うことができる．

マクロ複素透磁率 $\langle\dot{\mu}_r\rangle$ を用いると，磁性体内部では $\boldsymbol{B}=\langle\dot{\mu}_r\rangle\mu_0\boldsymbol{H}$ が成立する．外部磁界 $\boldsymbol{H}$ が入力，伝達関数は反磁性を表す $\langle\dot{\mu}_r\rangle\mu_0$ で，出力が磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と考えられるが，以下では，真空中に置かれた微小な磁性体を考えるため，$\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$ が入力であると考えている．文献によっては，E − B 対応の意味で，$\boldsymbol{B}_0$ それ自体を磁場と称する場合もあるが，磁性体中では磁化 $\boldsymbol{M}$ によって $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ は Table 3.5 のように区別されること，また電磁誘導を引き起こすのは $\boldsymbol{B}$ の時間変化であることに注意する[e.g. 3.23, section 7-1].

3. 4　電磁鋼板の複素透磁率

解析モデルとして，Fig.3.7 に示す一様磁界中の電磁鋼板を考える．ここでは，磁界の向きは Fig.3.7 中の $\mathbf{e}_z$ 方向とする．本節で使用する記号を Table 3.6 に示す．電磁鋼板に一様に磁場が $\mathbf{e}_z$ 方向に印加されているので，(3.20a)は

$$\frac{\mathrm{d}^2H_z}{\mathrm{d}\xi^2}+k_2^2H_z=0 \tag{3.22}$$

となる．磁界は偶関数であることから，(3.22)を境界条件 $H_z(\pm d)=H_0, d=(b-a)/2$ の下で解くと，$H_z(x)=H_0\cos(kx)/\cos(kd)$ である．よって電磁鋼板内の磁束は

$$\Phi=2dS\int_{-d}^{d}\mu_2H_z\,\mathrm{d}x=2dS\int_{-d}^{d}\mu_2\frac{H_0}{\cos(kd)}\cos(kx)\,\mathrm{d}x=\mu_2S\frac{\tan\zeta}{\zeta}H_0 \tag{3.23}$$

より求められる．電磁鋼板は薄く，磁界の印加方向には十分長いと仮定しているので，$N\approx 0$ で，磁化の周波数特性に対応した複素透磁率は，$B_0=\Phi/S$ と H_0 の比で表すことができ

$$\dot{\mu}_r^{slab}(\omega)\equiv\frac{1}{\mu_0}\frac{\Phi/S}{H_z}=\mu_{2r}\frac{\tan\zeta}{\zeta} \tag{3.24}$$

となる．積層電磁鋼板を考える場合，(3.24)を(3.21)の μ_r として代入して

$$\langle\dot{\mu}_r^{slab}\rangle=1+\frac{\eta\left(\dot{\mu}_r^{slab}-1\right)}{1+N(1-\eta)\left(\dot{\mu}_r^{slab}-1\right)} \tag{3.25}$$

からマクロ複素透磁率を求めることができる．ただし，電磁鋼板の場合は，$N\approx 0$なので

$$\langle\dot{\mu}_r^{slab}\rangle\approx\eta\dot{\mu}_r^{slab}+1-\eta \tag{3.25}'$$

と近似できる．

Table 3.6 Nomenclature of the magnetic-conductive slab as shown in Fig.3.7

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
Ω_{slab}	slab region	Ω_{air}	air region
$2d$ [m]	thickness of a slab	$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field
μ [H/m]	permeability of Ω_{slab}	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction

σ [S/m]	conductivity of Ω_{slab}	$\boldsymbol{B}_0$ [T]	applied uniform magnetic induction
S [m^2]	cross-sectional area of a slab	$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$N \approx 0$	diamagnetic constant
f [Hz]	frequency	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	angular frequency
$\zeta = kd$ [−]	argument	η	volume fraction
δ [m]	skin depth	$k = (1-\mathrm{j})/\delta = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma}$ [1/m]	wave number

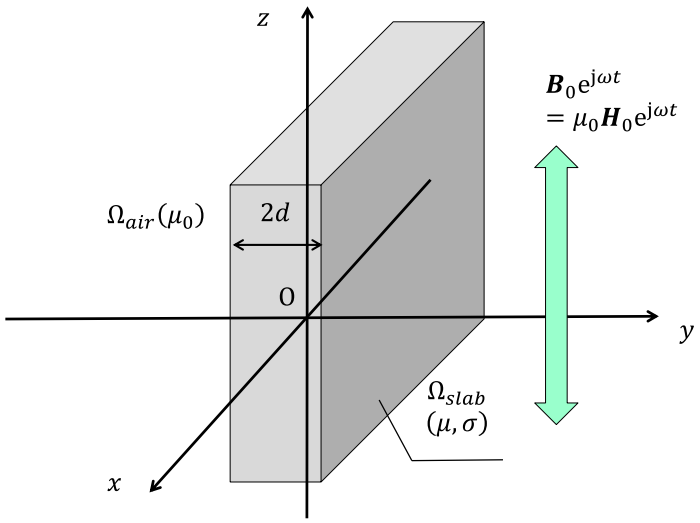


Fig. 3.7 Sufficiently long slab along to the z–axis immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.

3.5　円柱導体の複素透磁率

本節では，円柱導体の複素透磁率を解析的に求める．これは，第 1 章で示した Fig.1.4 の近接効果を反映した透磁率である．本研究では，一様交番磁界中にある円柱導体の集合は，素線に交流が流れているマルチターンコイルと考える．一方で表皮効果に起因する渦電流損は有限要素法では求めず，エネルギー保存則から導かれる回路方程式で反映する．本研究では 3.5-8 節で，通常の導線，磁性被覆線，多層被覆線の 3 種類を扱う．

なお，いずれの場合においても，電流の通電方向を $\mathbf{e}_z$，$\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ の方向を $\mathbf{e}_y$ とする．系の対称性から，導線内外の電界は $\boldsymbol{E} = E_z(r,\theta)\mathbf{e}_z$ と表せる．この条件では，(3.20a)および(3.20b)は

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z = 0 \tag{3.26a}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.26b}$$

となる．(3.26a)左辺第 3 項が θ に依存する外部磁界の効果を表す．以下では，各細線毎に(3.26)の解を求め，複素透磁率を求める．求めた複素透磁率 $\dot{\mu}_r$ を周波数領域に拡張した Ollendorff の式(3.26)に代入し，$\langle\dot{\mu}_r\rangle$ を得る．なお，導線の形状が円柱形の場合の議論では，反磁界係数はいずれの場合でも $N = 1/2$ である．

3. 5. 1　円形断面導線の電磁界

解析モデルとして，Fig.3.7 に示す円形断面導線を考える．本節で使用する記号を Table 3.7 に示す．(3.26a)において，変数分離 $E_z(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ を行うことにより，つぎの常微分方程式を得る．なお，(3.27a)は Bessel 微分方程式と呼ばれている．

Table 3.7 Nomenclature of the straight round conducting wire as shown in Fig.3.8

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
a [m]	radius of a wire conductor	$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field
l [m]	wire length	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
Ω_1	wire conductor	$\boldsymbol{B}_0$ [T]	applied uniform magnetic induction
μ_1 [H/m]	permeability of Ω_1	$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field
σ [S/m]	conductivity of Ω_1	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
Ω_2	air region	Z [Ω]	impedance of a multi-turn coil
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$N=1/2$	diamagnetic constant
V [V]	voltage	$\boldsymbol{m}$ [A·m^2]	magnetic moment
I [A]	current	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization
$\boldsymbol{j}$ [1/m^2]	unit current vector	$J_n(\zeta)$	n-th order Bessel function
f [Hz]	frequency	$\zeta=ka$ [−]	argument
$\omega=2\pi f$ [rad/s]	angular frequency	η	volume fraction
δ [m]	skin depth	$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated conducting wire
$k=(1-\mathrm{j})/\delta$ $=\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu_1\sigma}$ [1/m]	wave number	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	homogenized complex permeability

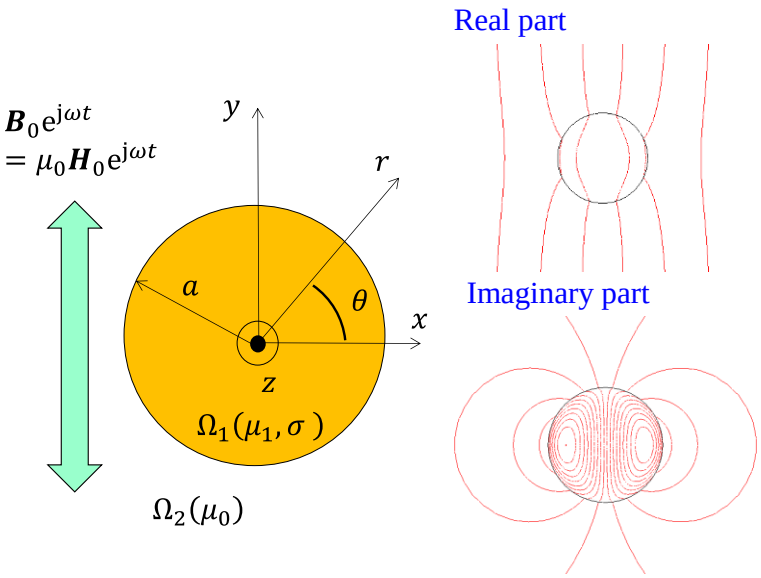


Fig.3.8 Cross-section of a straight round wire conductor immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ and the real and imaginary parts of magnetic flux ($f=100$ kHz, $\mu_r=10, \sigma=5.76\times10^7$ S/m).
In this model, the electromagnetic fields obey the Helmholtz and Laplace equations.

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(k^2r^2-\beta^2)R(r)=0 \tag{3.27a}$$

$$\Theta''(\theta)+\beta^2\Theta(\theta)=0 \tag{3.27b}$$

ただし，β は分離定数である．いま，一様交番磁界が印加されると Fig.3.8 の磁束線や Fig.1.5 に示した模式図に示すように，導線断面に渦電流に伴う磁気双極子が現れ，反電界は $\cos 0=+1, \cos\pi=-1$ に従って，円柱導体の中心に関して逆向きの分布をとる．したがって電界は，θ に依存しない表皮効果に対応する成分と，$\cos\theta$ への依存性がある近接効果に対応する成分を重ね合わせて得られる．よって(3.23)の解は(3.27)より

$$E_z(r,\theta)=p_0J_0(kr)+p_1J_1(kr)\cos\theta \tag{3.28}$$

である．ここで p_0, p_1 は定数である．ここで，(3.28)の第 1 項は表皮効果を表す電界，第 2 項は Fig.3.8 の磁束線の虚部に示すように，外部磁界により発生する近接効果を表す反平行の電界を示している．本問題では，導線中の一様磁界を想定し，高次の近接効果は十分弱いとして，(3.28)の解からは $\cos n\theta\,, n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ の項は省略している．また，Neumann 関数は原点で発散する関数であるため解としては不適なので，(3.28)ではその係数は 0 としている．(3.28)を(3.19b)に代入することにより，Ω_1 中の磁界

$$H_\theta(r,\theta)=\frac{\mathrm{j}k}{\omega\mu_1}\{p_0J_1(kr)-p_1J_1'(kr)\cos\theta\} \tag{3.29}$$

を得る．つぎに，Ω_2 における一般解は，電界は Laplace 方程式(3.20b)を解くことにより双極子成分を求め，これに外部一様磁界に対応する成分を加えて求められる．双極子成分については，(3.27a)において $k=0$ を代入し，$R(r)=r^l, l\in\mathbb{Z}$ を仮定すると，$l=\pm\beta$ を得るので，無限遠方で 0 に減衰する $l=\beta=-1$ を選べばよい．一方で外部一様磁界に対しては(3.19b)より，無限遠方では反磁界の効果がなくなるので，$-\mathrm{j}\omega\left(B_0^r\sin\theta\,\mathbf{e}_r+B_0^\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta\right)=(1/r)(\partial E_z/\partial\theta)\mathbf{e}_r-(\partial E_z/\partial r)\mathbf{e}_r$ を満足する必要がある．したがって，

$$E_z(r,\theta)=\left(\frac{q_1}{r}+\mathrm{j}\omega B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.30}$$

が一般解となる．ここで，q_1 は定数である．また，今後の議論と無関係であるため，θ に依存しない成分($\log r$ に関する項)を除いて表示している．(3.30)の第 1 項は近接効果による導線の反磁性を表す磁気双極子に関する項，第 2 項は外部交番磁界に対応する成分を表している．(3.30)を(3.19b)に代入し，Ω_2 の磁界をつぎのように求められる．

$$H_\theta(r,\theta)=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(-\frac{q_1}{r^2}+\mathrm{j}\omega B_0\right)\cos\theta \tag{3.31}$$

以上$(3.28-31)$が円形断面導線内外の電磁界を与える．つぎに，電磁界の未定係数 p_0, p_1, q_1を決定する. まず表皮効果を示す p_0 は, 導線内部の全電流を I と書くと, Ampère の周回積分の法則から

$$p_0=\frac{kI}{2\pi a\sigma J_1(\zeta)} \tag{3.32}$$

と決めることができる．一方，$\cos\theta$ を含む項の未定係数については，電界と磁界の接線成分の連続性から決定する． Ω_1 と Ω_2 の境界 $\partial\Omega_{21}$ において，電磁界の接線方向成分が連続するから

$$p_1J_1(\zeta)=\frac{q_1}{a}+\mathrm{j}\omega B_0 a \tag{3.33a}$$

$$-\frac{\mathrm{j}k}{\omega\mu_1}p_1J_1'(\zeta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(-\frac{q_1}{a^2}+\mathrm{j}\omega B_0\right) \tag{3.33b}$$

が成立する．したがって，次の連立方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} J_1(\zeta) & 1/a \\ \nu_1\zeta J_1'(\zeta) & 1/a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \mathrm{j}\omega a^2 B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

ここで $\nu_1 \coloneqq \mu_0/\mu_1$ とおいた．(3.34)より，

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{j}\omega a^2 B_0}{J_1(\zeta)+\nu_1\zeta J_1'(\zeta)}\begin{bmatrix} 2/a \\ J_1(\zeta)-\nu_1\zeta J_1'(\zeta) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

を得る．(3.32), (3.35)により，一様磁界が印加されていると仮定した導線内外の電磁界を得ることができる．

3. 5. 2　円形断面導体の複素透磁率

一様磁界中の導線は，Fig.3.9 に示すように鎖交磁束を打ち消すような磁界を発生する渦電流が流れる(近接効果)．この反磁界は双極子磁界と近似できるため，導線内には外部磁界とは逆向きの極性を持つ反磁性 $\dot{\boldsymbol{M}}(\omega)$ が生じる．

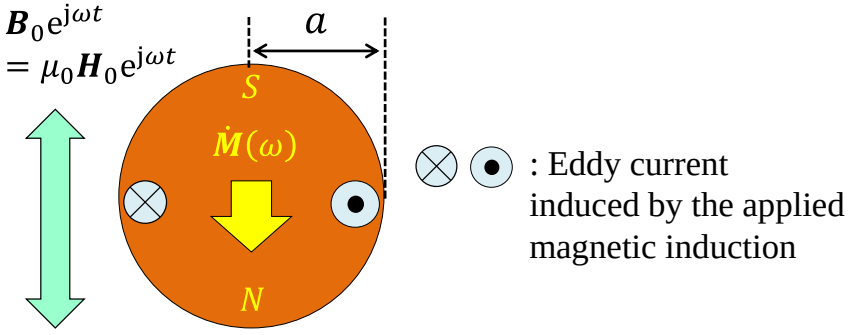


Fig.3.9 Diamagnetic field and eddy current field due to the proximity effect.
Proximity effect is caused by the magnetic field generated by ambient other sources. This results in the polarization of the current and diamagnetic field which is represented by the magnetization $\dot{\boldsymbol{M}}(\omega)$ in a magnetic material. From this illustration, we find that the eddy currents and the magnetic dipole field are simultaneously generated as following the Faraday's law of induction, so that the dipole field cancels out the applied magnetic induction $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. This results in generating the self-consistent field. Thus, the complex permeability representing the diamagnetic property can be defined from the magnetization $\dot{\boldsymbol{M}}(\omega)$.

この反磁性に起因する双極子磁界を求める．いま，(3.19)と Coulomb ゲージ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ から Poisson 方程式

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{3.36}$$

が導ける．ソースとなる導線の位置を $\boldsymbol{r}'$，観測点を $\boldsymbol{r}$ とすると，(3.36)の基本解は

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\int_\Omega J_z(\boldsymbol{r}')\log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}S' \tag{3.37}$$

である．ここで，(3.37)の $\log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ の項を Taylor 展開すると，磁性円柱に一様磁界が印加されるという仮定の下，$|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$ の関係と合わせて

$$\log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \approx \log|\boldsymbol{r}| - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|^2} \tag{3.38}$$

となる．さらにベクトル公式 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ と電流保存則 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$ より

$$\int_{\Omega} \log|\boldsymbol{r}|\, J_z(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' = \int_{\Omega} \log|\boldsymbol{r}|\,(J_z(\boldsymbol{r}')\nabla z)\cdot\mathrm{d}S' = \int_{\Omega} \log|\boldsymbol{r}|\,\mathrm{div}(J_z(\boldsymbol{r}')z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

$$= \int_{\Omega} \log|\boldsymbol{r}|\,(J_z(\boldsymbol{r}')z)\mathbf{e}_n\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = 0 \tag{3.39}$$

であるので，(3.37)は

$$A_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{\Omega} J_z(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S' \tag{3.40}$$

となる．ここでベクトル公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ より

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z = \boldsymbol{r}\times(J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z\times\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{r}'(J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{r}) = -(-\boldsymbol{r}'\times J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z)\times\boldsymbol{r} \tag{3.41}$$

である．ここで磁気モーメントの定義式は

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{r}'\times J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z\mathrm{d}S' \tag{3.42}$$

なので双極子磁界は $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ より

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\times\frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{r}'\times J_z(\boldsymbol{r}')\mathbf{e}_z\mathrm{d}S' \tag{3.43}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\times\frac{1}{2}\int_{\Omega} J_z(\boldsymbol{r}')\big(y'\mathbf{e}_x - x'\mathbf{e}_y\big)\mathrm{d}S' \tag{3.43}$$

となる．Fig.3.9 に示した $-\mathbf{e}_y$ 方向の反磁性は無限長の円柱導体に反平行に流れる電流から生じるとしているので

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m_y}{r}\cos\theta \tag{3.44}$$

となる[3.1]．ここで，導線の磁気双極子に起因する電界は(3.30)の第 1 項で示されている．この電界と，(3.44)から得られる電界 $E_z = -\mathrm{j}\omega A_z$ は一致するから $m \equiv m_y$ として

$$m \equiv m_y = -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mu_0\omega}q_1 \tag{3.45}$$

となる．(3.45)に(3.35)から得られる q_1 を代入して

$$m = 2\pi \frac{B_0}{\mu_0} a^2 \frac{\mu_1 J_1(\zeta) - \mu_0 \zeta J_1'(\zeta)}{\mu_1 J_1(\zeta) + \mu_0 \zeta J_1'(\zeta)} \tag{3.46}$$

という周波数領域の関数で表された m を得る．これより，導線断面の磁化 M は，素線に一様な磁界が印加されている場合を想定している場合，$M \equiv M_y = m/(\pi a^2)$ であるから

$$M = 2 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu_r J_1(\zeta) - \zeta J_1'(\zeta)}{\mu_r J_1(\zeta) + \zeta J_1'(\zeta)} \tag{3.47}$$

という M の周波数特性を得る. (3.47)は, 静磁界の極限 $\omega \to 0$ で, $\zeta \in \mathbb{C}$ に対する Bessel 関数の極限 $J_0(\zeta) \to 1, J_1(\zeta)/\zeta \to 1/2, J_1'(\zeta)/\zeta \to 1/2$ から，よく知られた一様磁界中の円柱の磁化(反磁界係数$1/2$)

$$M \to 2 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \tag{3.48}$$

に帰着することがわかる(Appendix C)．さて，いま任意の周波数において(3.47)で示されている導線の磁化が(3.48)の形で書けるように，導線の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{wire}(\omega)$ を定義する．このとき(3.44)は形式的に

$$M = 2 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\dot{\mu}_r - 1}{\dot{\mu}_r + 1} \tag{3.49}$$

となるため，(3.47)と一致すると考えると

$$2 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu_r J_1(\zeta) - \zeta J_1'(\zeta)}{\mu_r J_1(\zeta) + \zeta J_1'(\zeta)} = 2 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\dot{\mu}_r - 1}{\dot{\mu}_r + 1} \tag{3.50}$$

が成立する．(3.50)を $\dot{\mu}_r^{wire}$ について解くと，

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{3.51}$$

を得る．(3.51)は静磁界の極限 $\omega \to 0$ においては Bessel 関数の極限から，μ_r に収束し，導線の比透磁率に一致することが確認できる．

$\dot{\mu}_r^{wire}$ には近接効果が反映されているため，導線は $\dot{\mu}_r^{wire}$ により均質化できる．この場合の近接効果に起因する電力は

$$P_{prox} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2} \int_{\Omega_1} \dot{\mu}_r^{wire} \mu_0 |\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\pi a^2 l \frac{\dot{\mu}_r^{wire}\mu_0}{2} \left| \frac{2}{\dot{\mu}_r^{wire}\mu_0 + \mu_0} \right|^2 B_0^2$$

$$= \mathrm{j}2\pi\omega a^2 l B_0^2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{J_1(\zeta)\left(\zeta J_0(\zeta) - J_1(\zeta)\right)^*}{|\zeta J_0(\zeta) + J_1(\zeta)(-1 + \mu_1/\mu_0)|^2} \tag{3.52}$$

と評価できる．

3. 5. 3　均質化された円形断面導体の回路方程式と複素電力の評価

本節では導線内外の複素電力に関して考察する. まず, 準静近似 Maxwell 方程式(3.19)から,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{E} = \sigma|\boldsymbol{E}|^2 \tag{3.53a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}^* = -\mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2 \tag{3.53b}$$

を得る．(3.53a)と(3.53b)の差分を取って,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{E} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}^* = \sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2 \tag{3.54}$$

が導かれる．ここで，ベクトル公式 $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$ から(3.54)は

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*) = \sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2 \tag{3.55}$$

と変形できる．両辺をコイル領域で体積分して，さらに Gauss の発散定理を適用することで，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (\sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_1|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.56}$$

を得る．(3.56)の右辺は Poynting ベクトルの表面積分であり，渦電流の効果を含めた導線において消費されるエネルギーを表す．電力源から供給される複素電力は導線内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので,

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.57}$$

が成立する．ここで導線と周囲の空気領域を $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ とする．(3.56), (3.57)より

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.58}$$

を得る．(3.58)に導線内の電磁界を代入すると

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2$$

$$+ \mathrm{j}2\pi\omega a^2 l B_0^2 \frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{J_1(\zeta)\big(\zeta J_0(\zeta) - J_1(\zeta)\big)^*}{|\zeta J_0(\zeta) + J_1(\zeta)(-1 + \mu_1/\mu_0)|^2} \tag{3.59}$$

となる．(3.59)の右辺第 1 項は空間に蓄積される磁気エネルギー，第 2 項は θ に依存しない成分から計算された表皮効果に起因する複素電力，第 3 項は $\cos\theta$ に依存する成分から計算された双極子磁界の近接効果に起因する複素電力を示す．なお，表皮効果と近接効果は直交性を有しているため，相互干渉項は現れない(Appendix B).

さて，磁気双極子から定義した複素透磁率から求めた近接効果による電力 P_{prox}，(3.52)と(3.59)右辺第 3 項は一致しているとわかるので，(3.59)は結局

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 \tag{3.60}$$

となる．ただし，Ω_1 においては右辺第 1 項の透磁率は $\dot{\mu}_r^{wire}\mu_0$ とする．(3.60)右辺第 1 項は均質化された導線の近接効果に起因する複素電力とその外部に蓄積される磁気エネルギーの増分であり，第 2 項が表皮効果に起因する複素電力である．有限要素解析の際には，素線の渦電流は複素透磁率で反映されているため，渦電流を考慮した有限要素分割は不要である．(3.60)は Fig.3.8 に示す素線単線の場合の複素透磁率を用いた電力であるが，マルチターンコイルの有限要素解析においては，素線，絶縁皮膜，空気領域を区別して有限要素分割をしなければならない．この場合，これらの材質をすべて均質化することが有効である．そのため，周波数領域に拡張した Ollendorff の式(3.21)において，μ_r を $\dot{\mu}_r^{wire}$ に置き換えて得られるマクロ複素透磁率

$$\langle\dot{\mu}_r^{wire}\rangle = 1 + \frac{\eta\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)}{1 + N(1-\eta)\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)} \tag{3.21}$$

を均質化したコイル領域に与えればよい．これにより，Fig.3.10 のようにマルチターンコイル領域は磁性体と非磁性体からなる物質を均質化した材質に置き換えることができる．

また，準静近似の場においては，第 2 章 2.2 節で述べたように解析領域外部に伝播する電磁界は存在しないとするので，コイルの十分遠方で

$$\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{0} \tag{3.61}$$

とすると，(3.60)の両辺を $I^*/2$ で除し，さらにベクトル公式 $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$ と Ampère の法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ から

$$V = \frac{2}{I^*}\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*\,\mathrm{d}\Omega + Z_{skin}I = \frac{\mathrm{j}\omega}{I^*}\int_{\Omega} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}^*\,\mathrm{d}\Omega + Z_{skin}I$$

$$= \frac{1}{I^*}\int_{\Omega}\{\mathrm{div}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}^*) + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\}\,\mathrm{d}\Omega + Z_{skin}I = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^*\mathrm{d}v + Z_{skin}I \tag{3.62a}$$

$$Z_{skin} \equiv \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} \tag{3.62b}$$

という回路方程式の形で表示できる．ここで，$\boldsymbol{j}$ [1/m^2] は導線 1 本に単位電流が流れる場合の電流密度であり，全電流 I が流れる場合の電流密度は $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{j}$ で与えられる．

したがって，コイル素線に電圧を印加する問題では，第 2 章 2.10 節で述べたように，有限要素方程式と回路方程式を連立して

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{c}^t & \mathrm{j}Z_{skin}/\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mathrm{j}V/\omega \end{bmatrix} \tag{3.63a}$$

$$c_i = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_{coil}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega_{coil} \tag{3.63b}$$

を解けばよい．(3.63a)で，マルチターンコイル外部に導電性の磁性体が存在しない場合は静磁界の有限要素方程式，存在する場合は準静電磁界の有限要素方程式と連立すればよい．ただし，いずれの場合もマルチターンコイル領域の透磁率は $\langle \dot{\mu}_r^{wire} \rangle \mu_0$, 導電率は 0 とする．

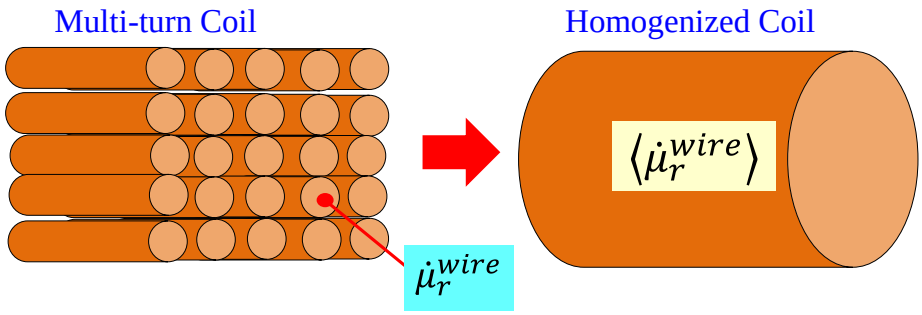


Fig. 3.10 Homogenization of a bundle of wire conductors with the macroscopic complex permeability.
By introducing this macroscopic complex permeability, a bundle of wire conductors is recognized as a bulk coil homogenized with the macroscopic complex permeability. When we consider 3D problem, the permeability tensor $[\langle \dot{\mu}_r \rangle] = \mathrm{diag}[\langle \dot{\mu}_r \rangle, \langle \dot{\mu}_r \rangle, 1]$ and coordinate transform matrix have to be introduced as shown later.

3. 6　磁性被覆線の均質化有限要素解析(磁性被覆が絶縁体の場合)

本節では，Fig.3.11 に示す磁性被覆線の複素透磁率を求める．本節で使用する変数を Table 3.8 にまとめる．実際の磁性被覆線(Magnetically shielded Wire : MSW)の被覆には導電率が存在するが，本節では，まずは簡単化のため，MSW の磁性被覆を絶縁体と仮定する．なお，磁性被覆の導電性を考慮した解析は 3.7 節にて行う．

Table 3.8 Nomenclature of the MSW as shown in Fig.3.10

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
a [m]	radius of a wire conductor	b [m]	radius of a MSW
Ω_1	wire conductor	Ω_2	shielding layer
Ω_3	air region	$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field
$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction	$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field
$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential	Z [Ω]	impedance of a multi-turn MS coil
σ [S/m]	conductivity of Ω_1	μ_0 [H/m]	permeability of vacuum
μ_1 [H/m]	permeability of Ω_1	μ_2 [H/m]	permeability of Ω_2
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
I [A]	current	V [V]	voltage
l [m]	wire length	j	imaginary unit
δ [m]	skin depth	$k = (1-\mathrm{j})/\delta$ $= \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu_1\sigma}$ [1/m]	wave number
J_n	n-th order Bessel function	$\boldsymbol{j}$ [1/m^2]	unit current vector
η	volume fraction	N	diamagnetic constant
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated MSW	$\langle \dot{\mu} \rangle$ [H/m]	homogenized complex permeability

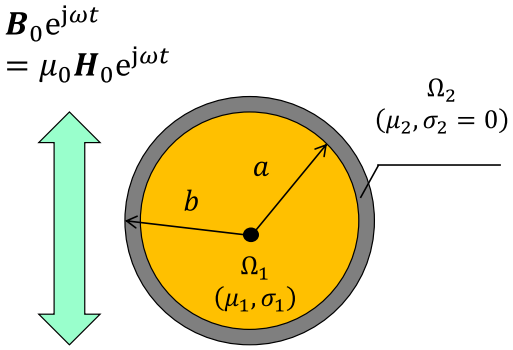


Fig. 3.11 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
MSW is a kind of a wire conductor coated by a magnetic-conductive thin layer. Generally, the layer is a magnetic-conductive thin slab. However, in this section, for the first step, the layer is assumed to be an insulator. Hence, in this section, σ_2 is set to zero.

3. 6. 1　磁性被覆が絶縁体の場合の 2 層型磁性被覆線の電磁界

最初に，領域別に準静近似 Maxwell 電磁方程式(3.19)を解くことで磁性被覆線内外の電磁界を求める．まず Ω_1 においては，(3.19)は Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z = 0 \tag{3.26a}$$

に帰着する．対応する(3.26a)の解は，3.5.1 節で導いたように

$$E_z(r,\theta) = p_0 J_0(kr) + p_1 J_1(kr)\cos\theta \tag{3.28}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{jk}{\omega\mu_1}\{p_0 J_1(kr) - p_1 J_1'(kr)\cos\theta\} \tag{3.29}$$

である. つぎに, Ω_2 においては, 磁性被覆は絶縁体と仮定しているため, 電磁界は Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.26b}$$

に支配される．(3.26b)の解は(3.30)との対応から

$$E_z(r,\theta) = \left(\frac{q_1}{r} + j\omega\alpha B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.64}$$

となる．ここで，q_1, α は定数である．また，3.4.1 節で述べたように，今後の議論と無関係であるため，θ に依存しない成分($\log r$ に関する項)を除いて表示している．(3.64)の第 1 項は導線の磁気双極子に関する項，第 2 項は外部交番磁界に対応する成分を表している(α は磁気遮蔽効果を表す)．(3.64)を(3.19b)に代入し，さらに，導線内部の全電流を I と書くと，Ampère の周回積分の法則から Ω_2 内の磁界

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{j}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{r^2} + j\omega\alpha B_0\right)\cos\theta \tag{3.65a}$$

$$H_r(r,\theta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{r^2} + \mathrm{j}\omega\alpha B_0\right)\sin\theta \tag{3.65b}$$

最後に，Ω_3 においては Ω_2 の場合と同様に(3.26b)を解くことにより，電界と磁界を

$$E_z(r,\theta) = \left(\frac{q_2}{r} + \mathrm{j}\omega B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.66}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(-\frac{q_2}{r^2} + \mathrm{j}\omega B_0\right)\cos\theta \tag{3.67}$$

と決めることができる．ここで，q_2 は定数である．(3.66)の第 1 項は外部から見た MSW の磁気モーメントを表す．

以上$(3.64-67)$が MSW 内外の電磁界を与える．つぎに，未定係数 $p_0, p_1, q_1, q_2, \alpha$ を決定する．まず表皮効果を示す p_0 は，Ampère の周回積分の法則から 3.5.1 節と同様に

$$p_0 = \frac{kI}{2\pi a\sigma J_1(\zeta)} \tag{3.32}$$

と決めることができる．一方，$\cos\theta$ を含む項の未定係数は，電界と磁界の接線成分の連続性から決定する．まず，Ω_1 と Ω_2 の境界 $\partial\Omega_{21}$ において

$$p_1 J_1(\zeta) = \frac{q_1}{a} + \mathrm{j}\omega\alpha B_0 a \tag{3.68a}$$

$$\frac{\mathrm{j}k}{\omega\mu_1} p_1 J_1'(\zeta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{a^2} + \mathrm{j}\omega\alpha B_0\right) \tag{3.68b}$$

が成立する．同様に，Ω_2 と Ω_3 の境界 $\partial\Omega_{32}$ において

$$\frac{q_1}{b} + \mathrm{j}\omega\alpha B_0 b = \frac{q_2}{b} + \mathrm{j}\omega B_0 b \tag{3.69a}$$

$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{b^2} + \mathrm{j}\omega\alpha B_0\right) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(-\frac{q_2}{b^2} + \mathrm{j}\omega B_0\right) \tag{3.69b}$$

が成立する．(3.68), (3.69)から連立方程式

$$\begin{bmatrix} J_1(\zeta) & -1/a & -\mathrm{j}\omega a B_0 & 0 \\ k\nu_1 J_1'(\zeta) & 1/a^2 & -\mathrm{j}\omega B_0 & 0 \\ 0 & 1/b & \mathrm{j}\omega b B_0 & -1/b \\ 0 & \nu_2/b^2 & -\mathrm{j}\omega b B_0 & -1/b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ \alpha \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{j}\omega b B_0 \\ -\mathrm{j}\omega B_0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

を得る．ここで，$\nu_1 \coloneqq \mu_2/\mu_1, \nu_2 \coloneqq \mu_0/\mu_2$ とおいた．(3.70)を解くと，未定係数を次のように求めることができる．

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ \alpha \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 b^3}{\mathrm{j}\omega b B_0 \left(\lambda_3 J_1(\zeta) + \lambda_4 \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)\right)} \begin{bmatrix} -4(\mathrm{j}\omega B_0)^2/ab \\ 2(\mathrm{j}\omega B_0)^2 \left(J_1(\zeta) - \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)\right)/b \\ -2\mathrm{j}\omega B_0 \left(J_1(\zeta) + \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)\right)/a^2 b \\ 2(\mathrm{j}\omega B_0)^2 \left(\lambda_1 J_1(\zeta) + \lambda_2 \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)\right)/a^2 b \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

ここで,

$$\lambda_1 \coloneqq -c_1 \nu_2 - c_2 \tag{3.72a}$$

$$\lambda_2 \coloneqq c_2 \nu_2 + c_1 \tag{3.72b}$$

$$\lambda_3 \coloneqq c_1 \nu_2 - c_2 \tag{3.72c}$$

$$\lambda_4 \coloneqq -c_2 \nu_2 + c_1 \tag{3.72d}$$

ただし，$c_1 \coloneqq a^2 - b^2$，$c_2 \coloneqq a^2 + b^2$ である．なお，(3.71)において，磁性被覆がない場合の極限 $b \to a, \mu_2 \to \mu_0$ では，1, 2 行目について

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{j}\omega a^2 B_0}{J_1(\zeta) + \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)} \begin{bmatrix} 2/a \\ J_1(\zeta) - \nu_1 \zeta J_1'(\zeta) \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

となり，磁性被覆がない通常の導線の場合の定数(3.35)に一致し，同時に $\alpha \to 1, q_2 \to q_1$ となる．

3. 6. 2　2 層型磁性被覆線の複素透磁率

一様磁界中の MSW において，磁束は磁性被覆に集中しやすいが，一部の磁束は素線部分を通過し，この鎖交磁束を打ち消すように渦電流が導線内に流れる(近接効果)．例えば，Fig.3.1.1 節 Fig.3.2 の unit-cell approach で見た磁束線分布の通りである．この渦電流は，Fig.3.12 に示すように導線断面方向に反磁界を形成する．

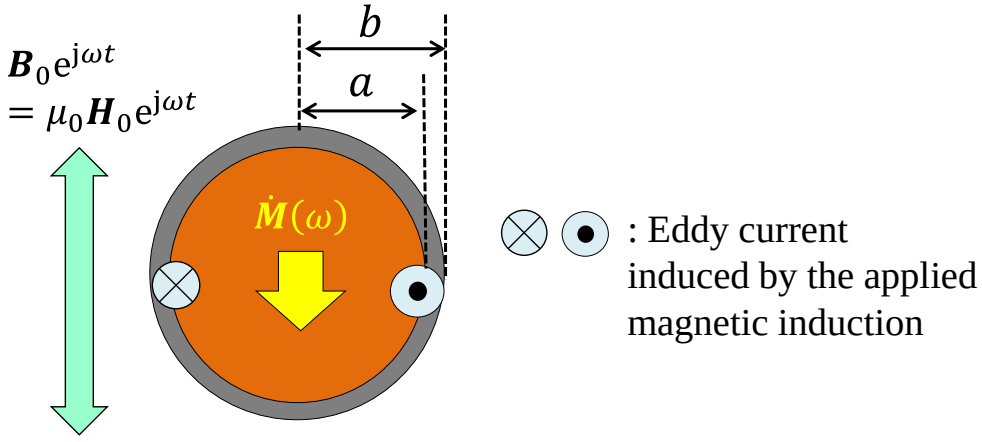


Fig. 3.12 Diamagnetic field in a magnetically shielded wire (MSW).

このような渦電流は，3.5.2 節と同様に， Ω_3 に双極子磁界

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r}\cos\theta \tag{3.74}$$

を発生する．導線の磁気双極子が MSW の外部に発生する電界は(3.64)第 1 項で示されている．q_2 は(3.71)より，

$$q_2 = \mathrm{j}\omega B_0 b^2 \Lambda_2(\omega) \tag{3.75a}$$

$$\Lambda_2(\omega) = \frac{\lambda_1 J_1(\zeta) + \lambda_2 \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)}{\lambda_3 J_1(\zeta) + \lambda_4 \nu_1 \zeta J_1'(\zeta)} \tag{3.75b}$$

で与えられる．さて，$E_z = -\mathrm{j}\omega A_z$ と(3.64)の第 1 項は一致するので，(3.74)から

$$m \equiv m_y = -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mu_0 \omega} q_2 \tag{3.76}$$

を得る．さらに，MSW 断面の磁化を M とすると，いまの場合 $M = m/(\pi b^2)$ なので

$$M = -\mathrm{j}\frac{2}{\mu_0 \omega b^2} q_2 \tag{3.77}$$

が成立する．(3.77)に(3.75)を代入すると，M の周波数特性

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\Lambda_2(\omega) \tag{3.78}$$

が得られる．(3.78)は静磁界の極限 $\omega \to 0$ では， $\zeta \in \mathbb{C}$ に対する Bessel 関数の極限 $J_0(\zeta) \to 1, J_1(\zeta)/\zeta \to 1/2, J_1'(\zeta)/\zeta \to 1/2$ より，

$$M \to 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\lambda_1 + \nu_1\lambda_2}{\lambda_3 + \nu_1\lambda_4} \tag{3.79}$$

となる．さらに磁性被覆が通常の絶縁皮膜の場合，つまり $\mu_2 \to \mu_0$ の極限においては，(3.79)は(3.48)で示した一様磁界中の円柱の磁化(反磁界係数$1/2$)

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_{1r} - 1}{\mu_{1r} + 1} \tag{3.48}$$

に帰着する．

さて，いま任意の周波数において，(3.79)で示されている MSW の磁化が(3.48)の形で書けるように，MSW の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)$ を定義する．このとき(3.48)は形式的に

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{MSW} - 1}{\dot{\mu}_r^{MSW} + 1} \tag{3.49}$$

となるため，

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\Phi_2(\omega) = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{MSW} - 1}{\dot{\mu}_r^{MSW} + 1} \tag{3.80}$$

が成立する．(3.80)から

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1 + \Lambda_2(\omega)}{1 - \Lambda_2(\omega)} \tag{3.81}$$

を得る．(3.81)は磁性被覆が通常の絶縁皮膜の場合の極限 $\mu_2 \to \mu_0$ で,

$$\dot{\mu}_r^{MSW} \to \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} = \dot{\mu}_r^{wire}(\omega) \tag{3.82}$$

となり, 通常の導線の複素透磁率に帰着する. さらに, 静磁界の極限 $\omega \to 0$ においては, Bessel 関数の極限から, (3.82)は μ_r に収束し, 導線の比透磁率に一致することがわかる.

$\dot{\mu}_r^{MSW}$ より，MSW 全体の磁気遮蔽効果をも含めた近接効果に関する複素電力 P_{prox} は

$$P_{prox} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_c} \dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\pi b^2 l \frac{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0}{2}\left|\frac{2}{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0 + \mu_0}\right|^2 B_0^2$$

$$+ \mathrm{j}\omega\pi b^2 l \frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\big(\Lambda_2(\omega)\big) - |\Lambda_2(\omega)|^2 + 1\right\} \tag{3.83}$$

で評価できる．ここで磁性被覆線領域は $\Omega_c = \Omega_1 + \Omega_2$ で示されている．

3. 6. 3　均質化された絶縁皮膜の 2 層型磁性被覆巻線の回路方程式と複素電力の評価

本節では MSW の電力に関して考察する．エネルギー保存則は 3.5.3 節の場合と同様に

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (\sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_1|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + P_{skin} + P_{shield} \tag{3.84}$$

となる(右辺第 1 項は近接効果に起因する電力である). ここで, (3.84)の右辺第 1 項は導線内の磁気双極子に関連する電力(すなわち近接効果に関する電力)，P_{skin} は表皮効果による電力，P_{shield} は磁性被覆に蓄積される磁気エネルギーの増分を表す((3.84)右辺第 1 項の電磁界に循環電流による項を含めると第 2, 3 項は不要となる). また，電力源から供給される電力は MSW 内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので,

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.85}$$

が成立する．ここで $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ である． (3.84), (3.85)より

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_3} \mu_0 |\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + P_{skin} + P_{shield} \tag{3.86}$$

を得る．(3.86)の右辺第 2 項は Ω_3 の電磁界(3.66), (3.67)から

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{j}\omega\pi b^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\big(\Lambda_2(\omega)\big) - |\Lambda_2(\omega)|^2 + 1\right\} \tag{3.87}$$

となる．(3.87)は複素透磁率から求めた近接効果に起因する複素電力 (3.83)と一致することがわかる．したがって， (3.83)を用いて MSW を均質化して，近接効果に関係する電力を正しく評価することができる．

一方， Poynting ベクトルを $\partial\Omega_{21}$ 上で積分することにより導線 Ω_1 内の電力を求めることができる．すなわち Ω_1 の電磁界(3.28), (3.29)から，

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 - \mathrm{j}\frac{l\pi\zeta^*}{2\omega\mu_1}|p_1|^2 J_1(\zeta)\big(J_1'(\zeta)\big)^* \tag{3.88}$$

を得る．ここで，$R_0 = l/(\sigma\pi a^2)$ は導線の直流抵抗を表す．(3.88)第 2 項は近接効果に起因する項であるが，これは(3.83)に含まれる．よって，P_{skin} は(3.88)右辺第 1 項で与えられる．

さらに，磁性被覆部分 Ω_2 の磁気エネルギーの増分を評価すると

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\mu_2 l\pi\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$+\mathrm{j}\frac{l\pi}{2\omega\mu_2}\times\left\{\frac{q_1^2}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) + \mathrm{j}2\omega q_1\alpha B_0\log\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\omega^2\alpha^2 B_0^2}{2}(b^2-a^2)\right\} \tag{3.89}$$

となる．(3.89)の第 1 項目以外は磁気双極子に起因する項であり，これらも(3.83)に含まれる．よってP_{shield} は(3.89)の右辺第 1 項である．

以上の考察より，均質化された MSW の回路方程式は

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_2 l\pi\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.90}$$

と表せることがわかる．ただし，MSW においては，右辺第 1 項の比透磁率は $\dot{\mu}_r^{MSW}$ とする．(3.90)右辺第 1 項は近接効果による電力と空間に蓄積される磁気エネルギーの増分，第 2 項は表皮効果による電力，第 3 項は入力電流により磁性被覆に蓄積される磁気エネルギーの増分を示す．なお，MSW の場合においても表皮効果と近接効果は直交性を有しているため，相互干渉項は現れない．なお，(3.90)においての $b \to a$ の極限，すなわち磁性被覆がない場合の極限においては

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 \tag{3.91}$$

となり通常の導巻線の電力を与える(3.60)に帰着する．

MSW を巻いて作られる MSC(MS Coil)の解析においては，$\dot{\mu}_r^{MSW}$ を周波数領域に拡張した Ollendorff の式

$$\langle\dot{\mu}_r^{MSW}\rangle = 1 + \frac{\eta(\dot{\mu}_r^{MSW} - 1)}{1 + N(1-\eta)(\dot{\mu}_r^{MSW} - 1)} \tag{3.21}$$

に代入して得られるマクロ複素透磁率に代入して得られる $\langle\dot{\mu}_r\rangle$ を用いて有限要素方程式を解けばよい．この際，MSW は Fig.3.13 のように均質化される．

さらに，準静近似の場を仮定しているので，(3.61)から，MSW の十分遠方で

$$V = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} I + \mathrm{j}\omega\mu_2 l\frac{I}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.92}$$

と表示できる．また，$\boldsymbol{j}\,[1/\mathrm{m}^2]$ は MSW 1 本に単位電流が流れる場合の電流密度を表し，電流 I が流れる場合の電流密度は $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{j}$ で与えられる．(3.92)で，マルチターンコイル外部に導電性の磁性体が存在しない場合は静磁界の有限要素方程式，存在する場合は準静電磁界の有限要素方程式と連立すればよい．ただし，いずれの場合もマルチターンコイル領域の透磁率は $\langle\dot{\mu}_r^{MSW}\rangle\mu_0$, 導電率は 0 とする．

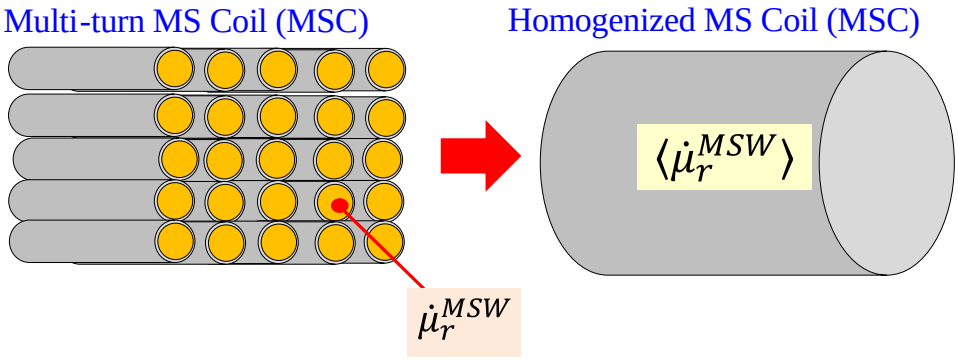


Fig. 3.13 Homogenization of a bundle of MSWs with the macroscopic complex permeability.
By introducing this macroscopic complex permeability, a bundle of MSWs is recognized as a homogenized bulk coil.
When we consider 3D problem, the permeability tensor $[\langle\dot{\mu}_r\rangle] = \mathrm{diag}[\langle\dot{\mu}_r\rangle, \langle\dot{\mu}_r\rangle, 1]$ and coordinate transform matrix have to be introduced as shown later.

3. 7　磁性被覆が導体の場合の磁性被覆線の均質化有限要素解析

本節では，Fig.3.11 に示した MSW の磁性被覆が導体の場合を扱う．定式化の大きな方針は 3.6 節と同様であるが，磁性被覆が導体であることで，支配方程式が異なる．さらに，第 4 章で述べるように，直接的に複素透磁率を定義すると，数値不安定な関数が現れる．このことについては第 4 章で詳述する．本節では，つぎの 2 通りで磁性被覆が導体の場合の複素透磁率の定義を行う．3.7.1 節では，直接的に Helmholtz，Laplace 方程

式(3.26a, b)を解いた場合による複素透磁率を, Neumann 関数を用いて定義する. 一方で, 3.7.2 節では，通常の MSW の磁性被覆層が十分に薄いという近似の下で，3.4 節で定義した電磁鋼板の複素透磁率を用いて，Neumann 関数を用いないで複素透磁率を定義する. なお，本節で使用する記号は，特に断らない限り Table 3.6 の通りである.

3. 7. 1　直接的に求めた電磁界と複素透磁率

本節では磁性被覆が導体の場合の MSW の複素透磁率を Neumann 関数を用いて定義する. いまの場合, Ω_1, Ω_2 では Helmholtz 支配方程式(3.26a), Ω_3 では Laplace 方程式(3.26b)が支配方程式となる．それぞれの場合で支配方程式を解くと以下のように電磁界を得られる.

- 導体領域 Ω_1

$$E_z(r,\theta) = p_0 J_0(k_1 r) + p_1 J_1(k_1 r)\cos\theta \tag{3.93}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{\mathrm{j}k_1}{\omega\mu_1}\left\{p_0 J_1(k_1 r) + p_1 J_1'(k_1 r)\cos\theta\right\} \tag{3.94}$$

- 磁性被覆領域 Ω_2

$$E_z(r,\theta) = \left(p_2 J_0(k_2 r) + n_2 N_0(k_2 r)\right) + \left(p_3 J_1(k_2 r) + n_3 N_1(k_2 r)\right)\cos\theta \tag{3.95}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{\mathrm{j}k_2}{\omega\mu_2}\left\{\left(p_2 J_1(k_2 r) + n_2 N_1(k_2 r)\right) + \left(p_3 J_1'(k_2 r) + n_3 N_1'(k_2 r)\right)\cos\theta\right\} \tag{3.96}$$

- 空気領域 Ω_3

$$E_z(r,\theta) = q_0 \log r + \left(\frac{q_1}{r} + \mathrm{j}\omega B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.96}$$

$$H_\theta(r,\theta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left\{\frac{q_0}{r} + \left(-\frac{q_1}{r^2} + \mathrm{j}\omega B_0\right)\cos\theta\right\} \tag{3.97}$$

ここで，$N_n(k_2 r)$は第 1 種第 n 次 Neumann 関数であり，$k_i = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\sigma_i\mu_i} = (1-\mathrm{j})/\delta_i \in \mathbb{C}\ \text{in}\ \Omega_i, i = 1,2$ である.

つぎに，未定係数を決定する．導線内部の全電流を I と書くと，(3.96)に対して，Ampère の周回積分の法則から

$$p_2 J_1(k_2 r) + n_2 N_1(k_2 r) = \frac{k_2 I}{2\pi b\sigma_2} \tag{3.98}$$

という関係を得る.

さて，(3.70)を導いたように，Ω_1 と Ω_2 の境界 $\partial\Omega_{21}$，Ω_2 と Ω_3 の境界 $\partial\Omega_{32}$ での電磁界の連続性から，つぎの連立方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} J_1(k_1a) & -J_1(k_2a) & -N_1(k_2a) & 0 \\ J_1'(k_1a) & -\tau_{12}J_1'(k_2a) & -\tau_{12}N_1'(k_2a) & 0 \\ 0 & bJ_1(k_2b) & bN_1(k_2b) & -1 \\ 0 & b^2J_1'(k_2b) & b^2N_1'(k_2b) & \mu_2/(k_2\mu_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ n_3 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{j}\omega b^2 B_0 \\ \mathrm{j}\omega b^2 B_0\,\mu_2/(k_2\mu_0) \end{bmatrix} \tag{3.99a}$$

$$\tau_{12} \coloneqq \delta_1\mu_1/\delta_2\mu_2 \tag{3.99b}$$

(3.99)から，MSW の磁気双極子に関する定数 q_1 をつぎのように求めることができる．

$$q_1 = -\frac{\mu_0\omega b^2}{\mathrm{j}\pi}\frac{B_0}{\mu_0}\Phi_2(\omega) \tag{3.100a}$$

$$\Phi_2(\omega) \coloneqq \frac{\xi_1 + (\mu_2\xi_2)/(k_2\mu_0)}{J_1(k_1a)\xi_3 - J_1'(k_1a)\xi_4} \tag{3.100b}$$

$$\xi_1 \coloneqq -b^2\tau_{12}\{-N_1'(k_2b)J_1'(k_2a) + N_1'(k_2a)J_1'(k_2b)\}J_1(k_1a)$$

$$+b^2\{-N_1'(k_2b)J_1(k_2a) + N_1(k_2a)J_1'(k_2b)\}J_1'(k_1a) \tag{3.100c}$$

$$\xi_2 \coloneqq b\,\tau_{12}\{-N_1(k_2b)J_1'(k_2a) + N_1'(k_2a)J_1(k_2b)\}J_1(k_1a)$$

$$-b\{-N_1(k_2b)J_1(k_2a) + N_1(k_2a)J_1(k_2b)\}J_1'(k_1a) \tag{3.100d}$$

$$\xi_3 \coloneqq -J_1'(k_2a)\tau_{12}\left\{b\frac{\mu_2}{k_2\mu_0}N_1(k_2b) + b^2N_1'(k_2b)\right\}$$

$$+N_1'(k_2a)\tau_{12}\left\{b\frac{\mu_2}{k_2\mu_0}J_1(k_2b) + b^2J_1'(k_2b)\right\} \tag{3.100d}$$

$$\xi_4 \coloneqq -J_1(k_2a)\left\{b\frac{\mu_2}{k_2\mu_0}N_1(k_2b) + b^2N_1'(k_2b)\right\}$$

$$+N_1(k_2a)\left\{b\frac{\mu_2}{k_2\mu_0}J_1(k_2b) + b^2J_1'(k_2b)\right\} \tag{3.100e}$$

さて，(3.100)を用いると MSW の磁化は

$$M = -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mu_0\omega b^2}q_1 = 2\frac{B_0}{\mu_0}\Phi_2(\omega) \tag{3.101}$$

となる．3.6 節の場合と同様に，(3.101)は，$\xi \in \mathbb{C}$ に対する Bessel 関数の極限 $J_0(\xi) \to 1$, $J_1(\xi)/\xi \to 1/2$, $J_1'(\xi)/\xi \to 1/2$ と Neumann 関数の極限 $\xi N_0(\xi)/2 \to 0, \xi N_1(\xi)/2 \to -1/\pi, \xi^2 N_1'(\xi)/2 \to 1/\pi\,(as\ \xi \to 0)$ を用いて

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_{1r} - 1}{\mu_{1r} + 1} \tag{3.48}$$

に一致する．任意の周波数で(3.101)が(3.48)の形で記述できるように，複素透磁率$\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)$を定義すると

$$2\frac{B_0}{\mu_0}\Psi_2(\omega) = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{MSW}-1}{\dot{\mu}_r^{MSW}+1} \tag{3.102}$$

となるから，

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1+\Phi_2(\omega)}{1-\Phi_2(\omega)} \tag{3.103}$$

を得る．(3.103)は静磁界の極限$\omega \to 0$，かつ磁性被覆が無い場合の極限$b \to a$でμ_{1r}に収束する．(3.103)を用いると，近接効果に伴う電力は

$$P_{prox} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_c}\dot{\mu}^{MSW}|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\pi b^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\left(\Phi_2(\omega)\right)-|\Phi_2(\omega)|^2+1\right\} \tag{3.104}$$

で評価できる．MSC の均質化のためには，Ollendorff の式(3.21)に代入するとよい．この場合も，Fig.3.13 と同様に均質化される．

つぎに，MSW の電力について考察する．エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_c}(\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.105}$$

である．また，電力源から供給される電力は MSW 内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので，

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{\Omega_c}\sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.106}$$

が成立する．ここで$\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3, \Omega_c=\Omega_1+\Omega_2$である．

さて，(3.105), (3.106)より，

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_3}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.107}$$

を得る．ここで，磁性被覆が絶縁体の場合とは異なり，(3.84)のP_{skin}, P_{shield}が現れないことに注意する．つぎに，(3.107)の右辺第 2 項，Poynting ベクトルの表面積分の評価は(3.95), (3.96)を用いて

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{l}{2}\left(p_2J_0(k_2r)+n_2N_0(k_2r)\right)I^*+P_{dp2} \tag{3.108}$$

と表すことができる．ここで，P_{dp2}は近接効果に伴う電力を表す．また，(3.97), (3.98)を用いて

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$\mathrm{j}\frac{l\pi}{\omega\mu_0}\log b\,|q_0|^2+\mathrm{j}\omega\pi b^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\left(\Phi_2(\omega)\right)-|\Phi_2(\omega)|^2+1\right\} \quad (3.109)$$

とも記述できる．

さて，(3.109)の右辺第 2 項は(3.104)と一致する．さらに，(3.108)の右辺第 1 項は表皮効果に起因する渦電流損失に対応するから(3.107)より磁性被覆線の全電力は

$$\frac{VI^{*}}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{R_0}{4}\frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}|I|^2 \quad (3.110a)$$

$$\gamma_1(\omega)\coloneqq k_2 b\left\{J_0(k_2a)\left(-J_0(k_1a)\tau_{12}N_1(k_2a)+J_1(k_1a)N_0(k_2a)\right)\right\}$$

$$+k_2 b\left\{N_0(k_2b)\left(J_0(k_1a)\tau_{12}J_1(k_2a)-J_1(k_1a)J_0(k_2a)\right)\right\} \quad (3.110b)$$

$$\gamma_2(\omega)\coloneqq\left\{J_0(k_2a)\tau_{12}\left(-J_1(k_2a)N_1(k_2b)+J_1(k_2b)N_1(k_2a)\right)\right\}$$

$$-\left\{J_1(k_2a)\left(-J_0(k_2a)N_1(k_2b)+J_1(k_2b)N_0(k_2a)\right)\right\} \quad (3.110c)$$

ここで $R_0=l/(\pi b^2\sigma_2)$ は直流抵抗である．さて，電圧源入力の場合は，3.6.3 節で導いたように

$$V=\mathrm{j}\omega\int_{\Omega_c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^{*}\mathrm{d}v+\frac{R_0}{2}\frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}I \quad (3.111)$$

と有限要素方程式を連立すればよい．ただし，いずれの場合も磁性被覆コイル領域の透磁率は $\langle\dot{\mu}_r^{MSW}\rangle\mu_0$, 導電率は 0 とする．

上記の定式化は，数学的には磁性被覆の緒元に係らず成立する．しかし第 4 章で議論するように，Neumann 関数は数値不安定性の強い関数であり，本論文で取り扱う準定常電磁界解析の際には直接使用することが難しい．しかし，本定式化は，磁性被覆の緒元を十分に小さくして，次節で示す方法との比較のために用いることができる．

3. 7. 2　電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の電磁界と複素透磁率

一般的に, 磁性被覆線の磁性被覆の厚みは数 μm であり, 導線の半径は数 mm である．そのため，一様磁界中の磁性被覆線の磁性被覆は，曲率が十分に無視できる電磁鋼板としてモデル化できるだろう．この場合，磁性被覆の透磁率は電磁鋼板の透磁率と見なしてもよいので，Fig.3.11 において，磁性被覆の比透磁率を

$$\dot{\mu}_{2r}(\omega)\approx\dot{\mu}_r^{slab}(\omega)=\mu_{2r}\frac{\tan\zeta}{\zeta} \quad (3.112)$$

と近似する．この場合，外部磁界による渦電流の項は(3.112)に含まれるため，磁性被覆の導電率は 0 となる．ただしこの近似は導線に十分に薄い磁性被覆が塗布された場合にのみ成立するため，厳密には(3.24)を導いた状況とは異なることに注意する．このことについては，第 4 章 4.2.1 節の Fig.4.11 に示す電磁鋼板の複素透磁率を導入した場合の複素透磁率の周波数特性に基づく議論を参考とする．

この場合の磁性被覆線の電磁界は 3.6.1 節で導いた電磁界において，μ_{2r} を $\dot{\mu}_r^{slab}$ に変更するだけでよい．また，導線内部の近接効果に起因する複素透磁率は

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{3.51}$$

を用いて表現できるので，磁性被覆の渦電流を考慮した複素透磁率は(3.81)においてμ_{2r} を $\dot{\mu}_r^{slab}$ に変更して

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1 + \Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right)}{1 - \Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right)} \tag{3.113a}$$

$$\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right) \coloneqq \frac{\left(-c_1 - c_2\dot{\mu}_r^{slab}\right)\dot{\mu}_r^{wire} + \left(c_1\dot{\mu}_r^{slab} + c_2\right)\dot{\mu}_r^{slab}}{\left(c_1 - c_2\dot{\mu}_r^{slab}\right)\dot{\mu}_r^{wire} + \left(c_1\dot{\mu}_r^{slab} - c_2\right)\dot{\mu}_r^{slab}} \tag{3.113b}$$

$$c_1 \coloneqq a^2 - b^2 \tag{3.113c}$$

$$c_2 \coloneqq a^2 + b^2 \tag{3.113d}$$

と求めることができる．MSC の均質化のためには，Ollendorff の式(3.21)に代入するとよい．この場合においても，磁性被覆コイルは Fig.3.13 と同様に均質化される．

さて，均質化された MSC に対する電力は，(3.90)において μ_{2r} を $\dot{\mu}_r^{slab}$ に変更することで

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\mu}_r^{slab} l\pi \left|\frac{I}{2\pi}\right|^2 \log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.114}$$

と表せることがわかる．(3.90)右辺第 3 項には磁性被覆の表皮効果も含まれている．一方で，均質化された MSW に対する回路方程式は(3.92)において μ_{2r} を $\dot{\mu}_r^{slab}$ に変更すればよいので

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} I + \mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\mu}_r^{slab} l \frac{I}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.115}$$

と表示できる．有限要素解析の際には，磁性被覆コイル領域の透磁率は $\langle\dot{\mu}_r^{MSW}\rangle\mu_0$, 導電率は 0 とする．

(3.113) − (3.115)は磁性被覆が十分に薄いという近似の下で成立するが，第 4 章で述べるように，数値不安定性がない．したがって，実際の磁性被覆線の解析においては，本節の定式化を用いるほうがよい．

3. 8　多層構造を有する磁性被覆線の均質化有限要素解析

3.6 節では, 磁性被覆は単層であるとして定式化したが, 円筒形の磁性被覆線の場合, Fig.3.14 のように，磁性被覆が多層構造を有している製品がある．また，磁性被覆と導線の間に絶縁皮膜を挿入する場合もある．したがって，磁性被覆が多層構造で，異なる磁性体が使用されている場合の均質化有限要素解析が必要になることもある．そこで，本節では 3.6 節を拡張して，磁性被覆が多層構造を有する場合の定式化を与える．3.8.1 節では，直接的に Helmholtz 方程式，Laplace 方程式を解いて得られる複素透磁率，3.8.2 節では電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の複素透磁率を導く．本問題でも，実際の解析においては 3.8.2 節で導く複素透磁率を用いるとよい．なお本節で使用する記号については Table 3.9 にまとめている．

Table 3.9 Nomenclature of the multi-layered MSW as shown in Fig.3.14

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
a [m]	radius of a wire conductor	b [m]	radius of the inner MS layer
c [m]	radius of the outer MS layer	l [m]	wire length
Ω_1	wire conductor	Ω_2	inner MS layer
Ω_3	outer MS layer	Ω_4	air region
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field
$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
$\boldsymbol{m}$ [A · m^2]	magnetic moment	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization
Z [Ω]	impedance of multi-layered MSW	σ_1 [S/m]	conductivity of Ω_1
σ_2 [S/m]	conductivity of Ω_2	σ_3 [S/m]	conductivity of Ω_3
μ_1 [H/m]	permeability of Ω_1	μ_2 [H/m]	permeability of Ω_2
μ_3 [H/m]	permeability of Ω_3	μ_0 [H/m]	permeability of vacuum
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
I [A]	current	V [V]	voltage
δ_1 [m]	skin depth in Ω_1	$k_1 = (1-\mathrm{j})/\delta_1 = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu_1\sigma_1}$ [1/m]	wave number in Ω_1
δ_2 [m]	skin depth in Ω_2	$k_2 = (1-\mathrm{j})/\delta_2 = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu_2\sigma_2}$ [1/m]	wave number in Ω_2
δ_3 [m]	skin depth in Ω_3	$k_3 = (1-\mathrm{j})/\delta_3 = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu_3\sigma_3}$ [1/m]	wave number in Ω_3
J_n	n-th order Bessel function	N_n	n-th order Neumann function
η	volume fraction	N	diamagnetic constant
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated multi-layered MSW	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	homogenized complex permeability

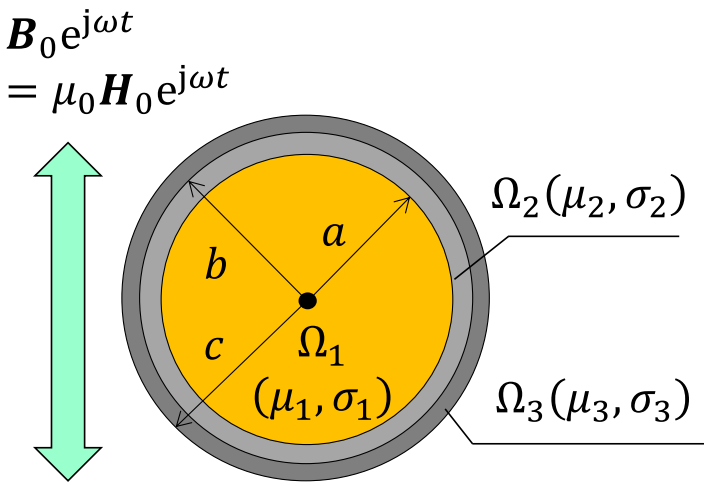


Fig.3.14 Cross-section of a multi-layered magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this model, the thicknesses $b-a, c-b$ of the shielding layers in multi-layered magnetically shielded wire (MSW) is assumed to be much smaller than the wire radius a. Moreover, the curvature of the wire conductor and these thin layers can be negligible and spatial change of the magnetic induction in each layer would be neglected under the assumption that the thickness is fairly thin.

3. 8. 1　直接的に求めた電磁界と複素透磁率

本節では磁性被覆が導体の場合の MSW の複素透磁率を Neumann 関数を用いて定義する．いまの場合，$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ では Helmholtz 支配方程式(3.26a)，Ω_4 では Laplace 方程式(3.26b)が支配方程式となる．それぞれの場合で支配方程式を解くと以下のように電磁界を得られる．

- 導体領域 Ω_1

$$E_z(r,\theta) = p_0 J_0(k_1 r) + p_1 J_1(k_1 r)\cos\theta \tag{3.116}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{jk_1}{\omega\mu_1}\{p_0 J_1(k_1 r) + p_1 J_1'(k_1 r)\cos\theta\} \tag{3.117}$$

- 内側の磁性被覆領域 Ω_2

$$E_z(r,\theta) = \big(p_2 J_0(k_2 r) + n_2 N_0(k_2 r)\big) + \big(p_3 J_1(k_2 r) + n_3 N_1(k_2 r)\big)\cos\theta \tag{3.118}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{jk_2}{\omega\mu_2}\big\{\big(p_2 J_1(k_2 r) + n_2 N_1(k_2 r)\big) + \big(p_3 J_1'(k_2 r) + n_3 N_1'(k_2 r)\big)\cos\theta\big\} \tag{3.119}$$

- 外側の磁性被覆領域 Ω_3

$$E_z(r,\theta) = \big(p_4 J_0(k_3 r) + n_4 N_0(k_3 r)\big) + \big(p_5 J_1(k_3 r) + n_5 N_1(k_3 r)\big)\cos\theta \tag{3.120}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{jk_3}{\omega\mu_3}\big\{\big(p_4 J_1(k_3 r) + n_4 N_1(k_3 r)\big) + \big(p_5 J_1'(k_3 r) + n_5 N_1'(k_3 r)\big)\cos\theta\big\} \tag{3.121}$$

- 空気領域 Ω_4

$$E_z(r,\theta) = q_0 \log r + \left(\frac{q_1}{r} + \mathrm{j}\omega B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.122}$$

$$H_\theta(r,\theta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left\{\frac{q_0}{r} + \left(-\frac{q_1}{r^2} + \mathrm{j}\omega B_0\right)\cos\theta\right\} \tag{3.123}$$

以上 (3.116) − (3.123) が MSW 内外の電磁界を与える．つぎに，未定係数 $p_0, p_1, p_2, n_2, p_3, n_3, p_4, n_4, p_5, n_5, q_0, q_1$ を決定する．まず，MSW と空気の境界$\partial\Omega_{43}$において，Ampère の周回積分の法則から

$$p_4\, J_1(k_3 c) + n_4\, N_1(k_3 c) = \frac{k_3 I}{2\pi c \sigma_3} \tag{3.124}$$

が成立する．ここで，I は導線，磁性被覆の入力電流，渦電流を全て含んでいる．I は導線に強制電流を印加した場合，磁性被覆にも通電するので，導体のインピーダンスと外部電圧で決定される．したがって，(3.124)の表示は回路方程式で $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ における表皮効果に起因する複素電力の評価を議論する際に用いることができる．

つぎに，表皮効果に関する係数に関して，各境界での電磁界の接線成分の連続性からつぎのような連立方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} J_0(k_1 a) & -J_0(k_2 a) & -N_0(k_2 a) & 0 & 0 & 0 \\ J_1(k_1 a) & -\tau_{12} J_1(k_2 a) & -\tau_{12} N_1(k_2 a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_0(k_2 b) & N_0(k_2 b) & -J_0(k_3 b) & -N_0(k_3 b) & 0 \\ 0 & J_1(k_2 b) & N_1(k_2 b) & -\tau_{23} J_1(k_3 b) & -\tau_{23} N_1(k_3 b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0(k_3 c) & N_0(k_3 c) & -\log c \\ 0 & 0 & 0 & J_1(k_3 c) & N_1(k_3 c) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_0 \\ p_2 \\ n_2 \\ p_4 \\ n_4 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (k_3 I)/(2\pi c \sigma_3) \end{bmatrix} \tag{3.125}$$

ここで, $\tau_{12} \coloneqq \delta_1\mu_1/\delta_2\mu_2$, $\tau_{23} \coloneqq \delta_2\mu_2/\delta_3\mu_3$とおき, (3.125)左辺の係数行列を L とおく．このとき(3.124)の評価に関係する未定係数は p_4, n_4 はつぎのように求められる．

$$p_4 = \frac{\mathrm{L}_{64}}{\det \mathrm{L}} \frac{k_3\, I}{2\pi c \sigma_3} \tag{3.126a}$$

$$n_4 = -\frac{\mathrm{L}_{65}}{\det \mathrm{L}} \frac{k_3\, I}{2\pi c \sigma_3} \tag{3.126b}$$

$$\mathrm{L}_{64} = -\log c\, (J_0(k_1 a)\tau_{12} k_1^{64} - J_1(k_1 a) k_2^{64}) \tag{3.126c}$$

$$k_1^{64} \coloneqq -J_1(k_2 a) c_1^{64} + N_1(k_2 a) c_2^{64} \tag{3.126d}$$

$$k_2^{64} \coloneqq -J_0(k_2 a) c_3^{64} + N_0(k_2 a) c_4^{64} \tag{3.126e}$$

$$c_1^{64} \coloneqq -\tau_{23} N_1(k_3 b) N_0(k_2 b) + N_0(k_3 b) N_1(k_2 b) \tag{3.126f}$$

$$c_2^{64} \coloneqq -\tau_{23} N_1(k_3 b) J_0(k_2 b) + J_0(k_2 b) N_1(k_3 b) \tag{3.126g}$$

$$c_3^{64} \coloneqq -\tau_{23} N_0(k_2 b) N_1(k_3 b) + N_0(k_3 b) N_1(k_2 b) \tag{3.126f}$$

$$c_4^{64} \coloneqq -\tau_{23} N_1(k_3 b) J_0(k_2 b) + N_0(k_3 b) J_1(k_2 b) \tag{3.126g}$$

$$\mathrm{L}_{65} \coloneqq -\log c \left(J_0(k_1 a) \tau_{12} k_1^{65} - J_1(k_1 a) k_2^{65} \right) \tag{3.126h}$$

$$k_1^{65} \coloneqq -J_1(k_2 a) c_1^{65} + N_1(k_2 a) c_2^{65} \tag{3.126i}$$

$$k_2^{64} \coloneqq -J_0(k_2 a) c_3^{65} + N_0(k_2 a) c_4^{65} \tag{3.126j}$$

$$c_1^{65} \coloneqq -\tau_{23} J_1(k_3 b) N_0(k_2 b) + J_0(k_3 b) N_1(k_2 b) \tag{3.126k}$$

$$c_2^{65} \coloneqq -\tau_{23} J_1(k_3 b) J_0(k_2 b) + J_0(k_2 b) J_1(k_3 b) \tag{3.126l}$$

$$c_3^{65} \coloneqq -\tau_{23} N_0(k_2 b) J_1(k_3 b) + J_0(k_3 b) N_1(k_2 b) \tag{3.126m}$$

$$c_4^{65} \coloneqq -\tau_{23} J_1(k_3 b) J_0(k_2 b) + J_0(k_3 b) J_1(k_2 b) \tag{3.126n}$$

$$\det \mathrm{L} = J_0(k_1 a) \tau_{12} \log c \, k_1^{det} - J_1(k_1 a) \log c \, k_2^{det} \tag{3.126h}$$

$$k_1^{det} \coloneqq -J_1(k_2 a) c_1^{det} + N_1(k_2 a) c_2^{det} \tag{3.126i}$$

$$k_2^{det} \coloneqq -J_0(k_2 a) c_1^{det} + N_0(k_2 a) c_2^{det} \tag{3.126j}$$

$$c_1^{det} \coloneqq N_0(k_2 b) \tau_{23} \left(-J_1(k_3 b) N_1(k_3 c) + J_1(k_3 c) N_1(k_3 b) \right)$$

$$-N_1(k_2 b) \left(-J_0(k_3 b) N_1(k_3 c) + J_1(k_3 c) N_0(k_3 b) \right) \tag{3.126k}$$

$$c_2^{det} \coloneqq -J_0(k_2 b) \tau_{23} \left(-J_1(k_3 b) N_1(k_3 c) + J_1(k_3 c) N_1(k_3 b) \right)$$

$$-J_1(k_2 b) \left(-J_0(k_3 b) N_1(k_3 c) + J_1(k_3 c) N_0(k_3 b) \right) \tag{3.126l}$$

一方，$\cos\theta$ を含む項(すなわち近接効果に起因する項)の定数についても，電界と磁界の接線成分の連続性から決定する．得られる連立方程式は

$$\begin{bmatrix} J_1(k_1a) & -J_1(k_2a) & -N_1(k_2a) & 0 & 0 & 0 \\ J_1'(k_1a) & -\tau_{12}J_1'(k_2a) & -\tau_{12}N_1'(k_2a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(k_2b) & N_1(k_2b) & -J_1(k_3b) & -N_1(k_3b) & 0 \\ 0 & J_1'(k_2b) & N_1'(k_2b) & -\tau_{23}J_1'(k_3b) & -\tau_{23}N_1'(k_3b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cJ_1(k_3c) & cN_1(k_3c) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c^2J_1'(k_3c) & c^2N_1'(k_3c) & \mu_3/(k_3\mu_0) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ n_3 \\ p_5 \\ n_5 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{j}\omega B_0 c^2 \\ \mathrm{j}\omega B_0 c^2 \mu_3/(k_3\mu_0) \end{bmatrix} \tag{3.127}$$

である．ここで，(3.127)左辺の係数行列を Π とおく．前節までの議論から，MSW を均質化するために必要な未定係数は，近接効果に関する未定係数のうち，磁気双極子を示す q_1 のみである．そのため，(3.127)から q_1 のみを求めると，つぎのようになる．

$$q_1 = \mathrm{j}\omega B_0 c^2 \frac{1}{\det \Pi}\left(-c^2\Pi_{56} + \frac{\mu_3}{k_3\mu_0} c\Pi_{66}\right) \tag{3.127a}$$

$$\begin{aligned} \det \Pi = {} & \left(-\lambda_1\tau_{23}J_1'(k_3b) + \lambda_2 J_1(k_3b)\right)\left(cN_1(k_3c)\frac{\mu_3}{k_3\mu_0} + c^2N_1'(k_3c)\right) \\ & + \left(\lambda_1\tau_{23}N_1'(k_3b) - \lambda_2 N_1(k_3b)\right)\left(cJ_1(k_3c)\frac{\mu_3}{k_3\mu_0} + c^2J_1'(k_3c)\right) \end{aligned} \tag{3.127b}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{56} = {} & \lambda_1\tau_{23}\left(-J_1'(k_3b)N_1'(k_3b) + J_1'(k_3c)\right) \\ & -\lambda_2\left(-J_1(k_3b)N_1'(k_3c) + J_1'(k_3c)\tau_{23}N_1(k_3b)\right) \end{aligned} \tag{3.127c}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{66} = {} & \lambda_1\tau_{23}\left(-J_1'(k_3b)N_1(k_3c) + J_1(k_3c)N_1'(k_3b)\right) \\ & -\lambda_2\left(-J_1(k_3b)N_1(k_3c) + J_1(k_3c)N_1(k_3b)\right) \end{aligned} \tag{3.127d}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \coloneqq {} & N_1(k_2b)\left(-\tau_{12}J_1(k_1a)J_1'(k_2a) + J_1'(k_1a)J_1(k_2a)\right) \\ & -J_1(k_2b)\left(\tau_{12}J_1(k_1a)N_1'(k_2a) - J_1'(k_1a)N_1(k_2a)\right) \end{aligned} \tag{3.127e}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \coloneqq {} & N_1'(k_2b)\left(-\tau_{12}J_1(k_1a)J_1'(k_2a) + J_1'(k_1a)J_1(k_2a)\right) \\ & -J_1'(k_2b)\left(\tau_{12}J_1'(k_1a)N_1'(k_2a) - J_1'(k_1a)N_1(k_2a)\right) \end{aligned} \tag{3.127f}$$

さて，前節までと同様に磁気双極子から近接効果を表す複素透磁率を求める．一様磁界中の MSW において，外部の鎖交磁束を打ち消すように素線，磁性被覆に渦電流が流れる(近接効果)．この渦電流は，Fig.3.15 に示すように導線断面方向に反磁界を形成する．

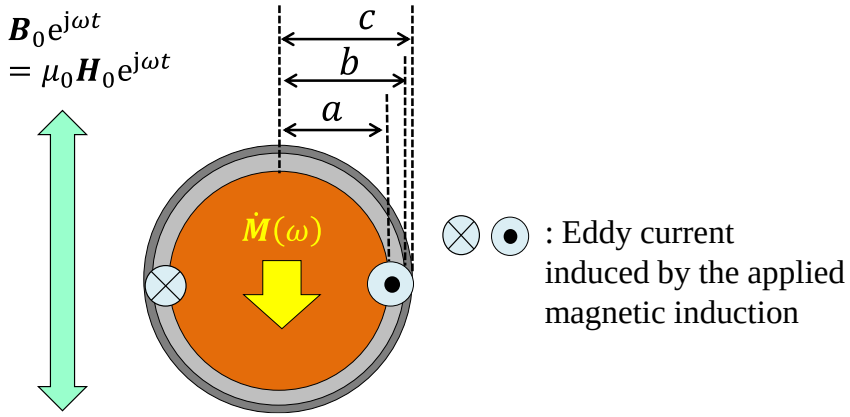


Fig. 3.15 Diamagnetic field in a multi-layered magnetically shielded wire (MSW).

このような渦電流は，3.2.2 節と同様に，Ω_4 に双極子磁界

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r}\cos\theta \tag{3.74}$$

を発生する．MSW に現れる磁化は $M = m/(\pi c^2)$ なので，

$$M = -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mu_0 \omega c^2} q_1 \tag{3.128}$$

となる．(3.128)に(3.127)を代入して整理すると

$$M = 2\frac{B_0}{\mu_0}\Phi_3(\omega) \tag{3.129a}$$

$$\Phi_3(\omega) := \frac{-(\lambda_1\zeta_1 - \lambda_2\zeta_2) + \frac{\mu_3}{k_3\mu_0}(\lambda_1\zeta_3 - \lambda_2\zeta_4)}{\left[\begin{array}{l}\left(-\lambda_1\tau_{23}J_1'(k_3b) + \lambda_2 J_1(k_3b)\right)\left(cN_1(k_3c)\frac{\mu_3}{k_3\mu_0} + c^2N_1'(k_3c)\right) \\ +\left(\lambda_1\tau_{23}N_1'(k_3b) - \lambda_2 N_1(k_3b)\right)\left(cJ_1(k_3c)\frac{\mu_3}{k_3\mu_0} + c^2J_1'(k_3c)\right)\end{array}\right]} \tag{3.129b}$$

$$\zeta_1 := -\tau_{23}c^2J_1'(k_3b)N_1'(k_3c) + \tau_{23}c^2J_1'(k_3c)N_1'(k_3b) \tag{3.129c}$$

$$\zeta_2 := -c^2J_1(k_3b)N_1'(k_3c) + c^2J_1'(k_3c)N_1(k_3b) \tag{3.129d}$$

$$\zeta_3 := -\tau_{23}cN_1(k_3c)J_1'(k_3b) + \tau_{23}cJ_1(k_3c)N_1'(k_3b) \tag{3.129e}$$

$$\zeta_4 := -cJ_1(k_3b)N_1(k_3c) + cJ_1(k_3c)N_1(k_3b) \tag{3.129f}$$

さて，前節までの議論と同様に静磁界の極限 $\omega \to 0$ で，(3.129a)が円柱の磁化に一致することを確認する．補助変数の極限に関しては，$\xi \in \mathbb{C}$ に対する Bessel 関数の極限 $J_0(\xi) \to 1,\ J_1(\xi)/\xi \to 1/2,\ J_1'(\xi)/\xi \to 1/2$ と Neumann 関数の極限 $\xi N_0(\xi)/2 \to 0, \xi N_1(\xi)/2 \to -1/\pi, \xi^2 N_1'(\xi)/2 \to 1/\pi\ (as\ \xi \to 0)$ に注意して，

$$\lambda_1 \to -\frac{1}{2\pi}\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\} \tag{3.130a}$$

$$k_3\lambda_2 \to \frac{\tau_{23}}{2\pi a}\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right\} \tag{3.130b}$$

$$k_3^2\zeta_1 \to -\frac{\tau_{23}}{\pi}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.130c}$$

$$k_3\zeta_2 \to -\frac{b}{\pi}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.130d}$$

$$k_3\zeta_3 \to \frac{\tau_{23}}{\pi}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.130e}$$

$$\zeta_4 \to \frac{b}{\pi}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.130f}$$

という補助変数の収束値を得る．(3.130)から，$\Phi_3(\omega)$の静磁界での極限は

$$\Phi_3(\omega) \to \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5} \tag{3.131a}$$

$$\gamma_1 \coloneqq -\mu_0\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$-\mu_0\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}+\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.131b}$$

$$\gamma_2 \coloneqq -\mu_3\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$-\mu_3\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}+\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right) \tag{3.131c}$$

$$\gamma_3 \coloneqq -\mu_3\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}-\mu_0\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\} \tag{3.131d}$$

$$\gamma_4 \coloneqq -\mu_3\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\frac{c^2}{b^2}-\mu_0\left\{\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\frac{c^2}{b^2} \quad (3.131e)$$

$$\gamma_5 \coloneqq \mu_3\left\{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}-\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\frac{c^2}{b^2}-\mu_0\left\{\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{a}{b}+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{b}{a}\right\}\frac{c^2}{b^2} \quad (3.131f)$$

となる．(3.131)で磁性被覆が絶縁体の場合の極限 $\mu_2,\mu_3\to\mu_0,\sigma_2,\sigma_3\to 0$ をとると，磁性被覆は絶縁皮膜に一致するので，導体面積は元の a^2/c^2 倍であることに注意すると，

$$\Phi_3(\omega)\to\frac{\mu_{1r}-1}{\mu_{1r}+1} \quad (3.132)$$

となる．したがって，(3.129a)は

$$M\to 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_{1r}-1}{\mu_{1r}+1} \quad (3.133)$$

となり，(3.48)に一致する．前節までの議論と同様に，任意の周波数で(3.129a)で示されている MSW の磁化が(3.133)の形で書けるように，MSW の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{MSW}$ を定義すると

$$2\frac{B_0}{\mu_0}\Phi_3(\omega)=2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{MSW}-1}{\dot{\mu}_r^{MSW}+1} \quad (3.134)$$

となるから，

$$\dot{\mu}_r^{MSW}=\frac{1+\Phi_3(\omega)}{1-\Phi_3(\omega)} \quad (3.135)$$

を得る．(3.135)の複素透磁率には電磁鋼板の複素透磁率を使用しておらず，直接的に(3.26a)を解いて得られる Bessel 関数，Neumann 関数を使用しているが，これらを用いたことに起因する(3.135)の数値的な取り扱いの難しさは改めて第 4 章にて示す．

$\dot{\mu}_r^{MSW}$ には各層の磁気遮蔽効果をも含めた近接効果が反映されているので，MSW は $\dot{\mu}_r^{MSW}$ を用いて均質化できる．この場合，MSW の近接効果に関する複素電力 P_{prox} は

$$P_{prox}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_c}\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v=\mathrm{j}\omega\pi c^2 l\frac{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0}{2}\left|\frac{2}{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0+\mu_0}\right|^2 B_0^2$$

$$+\mathrm{j}\omega\pi c^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\left(\Phi_3(\omega)\right)-|\Phi_3(\omega)|^2+1\right\} \quad (3.136)$$

で評価できる．ここで多層磁性被覆線領域は $\Omega_c=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$ で示されている．

つぎに，均質化された MSW の複素電力の評価を考える．まず準静近似 Maxwell 電磁方程式(3.19)よりエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_c}(\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v=-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{43}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.137}$$

を得る．(3.137)の右辺第 1 項は導線内の磁気双極子に関連する電力(すなわち近接効果に関する電力)を表す．電力源から供給される複素電力は導線内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので，

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{\Omega_c}\sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.138}$$

が成立する．ここで $\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3+\Omega_4, \Omega_c=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$ とした．(3.137), (3.138)から

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_4}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{43}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.139}$$

を得る．(3.139)右辺第 2 項の Poynting ベクトルの計算結果は 2 通りで表記できる．まず，(3.139)右辺第 2 項に Ω_3 の電磁界(3.120), (3.121)を代入すると

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{43}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{l}{2}\big(p_4J_0(k_3c)+n_4N_0(k_3c)\big)I^*+P_{dp3} \tag{3.140}$$

となる．(3.140)の右辺第 1 項は $\cos\theta$ に依存しない成分から計算された表皮効果に起因する複素電力，第 2 項は $\cos\theta$ に依存する成分から計算された双極子磁界の近接効果に起因する複素電力を示す．つぎに，(3.139)右辺第 2 項に Ω_4 の電磁界(3.122), (3.123)を代入すると

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{43}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\mathrm{j}\frac{l\pi}{\omega\mu_0}\log c\,|q_0|^2+\mathrm{j}\frac{lc\pi}{2\omega\mu_0}\left(-\frac{|q_1|^2}{c^3}-\mathrm{j}\omega B_0\frac{q_1}{c}+\mathrm{j}\omega B_0\frac{q_1^*}{c}+\omega^2B_0^2c\right)\\&=\mathrm{j}\frac{l\pi}{\omega\mu_0}\log c\,|q_0|^2+\mathrm{j}\omega\pi c^2l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\big\{2\mathrm{Im}\big(\Phi_3(\omega)\big)-|\Phi_3(\omega)|^2+1\big\}\end{aligned} \tag{3.141}$$

となる．(3.141)の右辺第 2 項は $\cos\theta$ に依存する成分から計算された双極子磁界の近接効果に起因する複素電力を示すが，これは，$\dot{\mu}_r^{MSW}$ から計算した(3.141)と一致することがわかる．

以上の考察から，(3.139)は

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{l}{2}\big(p_4J_0(k_3c)+n_4N_0(k_3c)\big)I^* \tag{3.142}$$

と表記できる．(3.142)に(3.126a, b)を代入して整理すると，均質化された MSW の電力は次式で評価できる．

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\kappa(\omega)\frac{R_0}{4}|I|^2 \tag{3.143a}$$

$$\kappa(\omega) \coloneqq \frac{k_3 c\{r_1 J_0(k_3 c) - r_2 N_0(k_3 c)\}}{r_3} \tag{3.143b}$$

$$r_1 \coloneqq J_0(k_1 a)\tau_{12}\big(-u_1 J_1(k_2 a) + u_2 N_1(k_2 a)\big)$$

$$-J_1(k_1 a)\big(-u_1 J_0(k_2 a) + u_2 N_0(k_2 a)\big) \tag{3.143c}$$

$$r_2 \coloneqq J_0(k_1 a)\tau_{12}\big(-u_3 J_1(k_2 a) + u_4 N_1(k_2 a)\big)$$

$$-J_1(k_1 a)\big(-u_3 J_0(k_2 a) + u_4 N_0(k_2 a)\big) \tag{3.143d}$$

$$r_3 \coloneqq J_0(k_1 a)\tau_{12}\big[J_1(k_2 a)\big(u_5 N_0(k_2 b) - u_6 N_1(k_2 b)\big) - N_1(k_1 a)\big(u_5 J_0(k_2 b) - u_6 J_1(k_2 b)\big)\big]$$

$$-J_1(k_1 a)\big[J_0(k_2 a)\big(u_5 N_0(k_2 b) - u_6 N_1(k_2 b)\big) - N_0(k_2 a)\big(u_5 J_0(k_2 b) - u_6 J_1(k_2 b)\big)\big] \tag{3.143e}$$

$$u_5 \coloneqq -\tau_{23} J_1(k_3 b) N_1(k_3 c) + N_1(k_3 b) J_1(k_3 c) \tag{3.143f}$$

$$u_6 \coloneqq -\tau_{23} J_0(k_3 b) N_1(k_3 c) + J_1(k_3 c) N_0(k_3 b) \tag{3.143g}$$

ここで，$\kappa(\omega)$ は表皮効果の周波数応答成分に対応し，$R_0 = l/(\pi c^2 \sigma_3)$ は MSW の直流抵抗である．また，右辺第 1 項において，MSW 領域においては，右辺第 1 項の比透磁率は(3.135)の $\dot{\mu}_r^{MSW}$ とする．(3.143a)右辺第 1 項は近接効果による電力と空間に蓄積される磁気エネルギーの増分，第 2 項は導線及び磁性被覆の表皮効果による電力を示す．さらに，多層構造を有している MSW の場合も，表皮効果と近接効果は直交性を有しているので，相互干渉項は現れない(Appendix B).

なお，均質化された MSC を考える際には，前節までと同様に(3.135)の $\dot{\mu}_r^{MSW}$ を Ollendorff の式(3.21)に代入して得られる $\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle$ を用いる．この場合，MSC は Fig.3.15 のように均質化される．

さらに，磁性被覆をすべて導線の緒元に一致させた場合，(3.143)は Lommel の公式

$$J_\nu(\xi) N_{\nu+1}(\xi) - J_{\nu+1}(\xi) N_\nu(\xi) = -\frac{2}{\pi\xi} \tag{3.144}$$

($\nu \in \mathbb{R}$ は次数， $\xi \in \mathbb{C}$ は引数)を用いると

$$\gamma_1 \to -\frac{4}{\pi k_3^2 ab} \tag{3.145a}$$

$$\gamma_2 \to 0 \tag{3.145b}$$

$$\gamma_3 \to -\frac{4}{\pi k_3^2 ab} J_1(k_3 c) \tag{3.145c}$$

$$\kappa(\omega) \to \frac{(k_3 c) J_0(k_3 c)}{J_1(k_3 c)} \tag{3.145d}$$

となるので，(3.143a)は結局

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0(k_3c)J_0(k_3c)}{4J_1(k_3c)}|I|^2 \tag{3.146}$$

と変形できる．同時に $\dot{\mu}_r^{MSW}$ は通常の導線の複素透磁率に帰着するので，(3.146)は通常の巻線の電力の式(3.60)に帰着する．

また，回路方程式も前節と同様に

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \kappa(\omega)\frac{R_0}{2}I \tag{3.147}$$

と表示できる．ここで，$\boldsymbol{j}\ [1/\mathrm{m}^2]$ は磁性被覆線単線に単位電流が流れる(磁性被覆にも流れる)場合の規格化した電流密度を示し，電流 I が流れる場合の電流密度は $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{j}$ で与えられる．

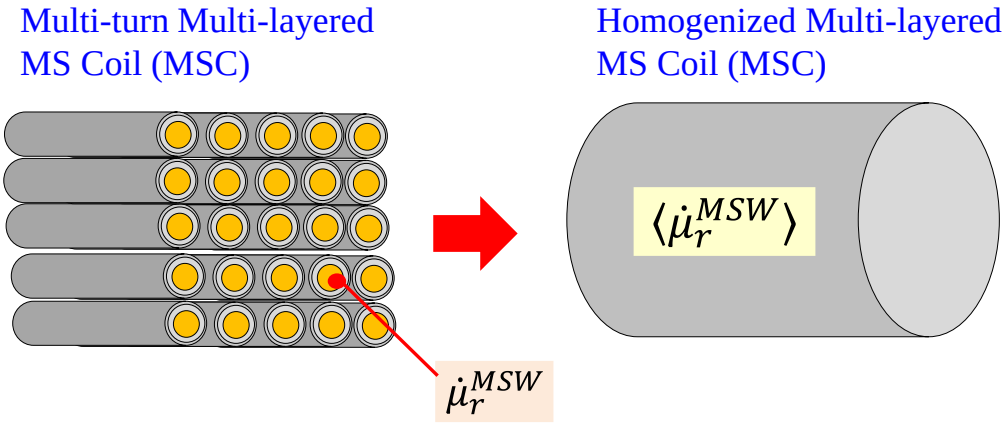


Fig. 3.16 Homogenization of a bundle of multi-layered MSWs with the macroscopic complex permeability. By using this method, the MSW is recognized as a bulk coil homogenized with the macroscopic complex permeability. When we consider 3D problem, the permeability tensor $[\langle\dot{\mu}_r\rangle] = \mathrm{diag}[\langle\dot{\mu}_r\rangle, \langle\dot{\mu}_r\rangle, 1]$ and coordinate transform matrix have to be introduced as shown later.

3. 8. 2　磁性被覆に電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の電磁界

3.8.1 節で定義した 3 層型磁性被覆線の複素透磁率(3.135)には Neumann 関数が含まれている．第 4 章で示すように，(3.135)は数値不安定な関数となっている．そこで，Fig.3.14 に示す 3 層型磁性被覆線の磁性被覆の導電率が十分小さい場合，Ω_1 においては Helmholtz 方程式(3.26a)，$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ においては Laplace 方程式(3.26b)が支配方程式となる．以下では，それぞれの領域において 3.7.1 節の議論と同様に電磁界を求めると以下のようになる．まず，磁性被覆がすべて絶縁体であるとして定式化を行い，3.7.1 節と同様に，磁性被覆に電磁鋼板の複素透磁率を用いて，導電性の考慮を行う．

- 導体領域 Ω_1

$$E_z(r,\theta) = p_0J_0(kr) + p_1J_1(kr)\cos\theta \tag{3.148}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{\mathrm{j}k_1}{\omega\mu_1}\{p_0J_1(kr) - p_1J_1'(kr)\cos\theta\} \tag{3.149}$$

- 内側の磁性被覆領域 Ω_2

$$E_z(r,\theta) = \left(\frac{q_1}{r} + \mathrm{j}\omega\alpha_2 B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.150}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{r^2} + \mathrm{j}\omega\alpha_2 B_0\right)\cos\theta \tag{3.151}$$

$$H_\theta(r,\theta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2}\left(-\frac{q_1}{r^2} + \mathrm{j}\omega\alpha_2 B_0\right)\sin\theta \tag{3.152}$$

- 外側の磁性被覆領域 Ω_3

$$E_z(r,\theta) = \left(\frac{q_2}{r} + \mathrm{j}\omega\alpha_3 B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.153}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_3}\left(-\frac{q_2}{r^2} + \mathrm{j}\omega\alpha_3 B_0\right)\cos\theta \tag{3.154}$$

$$H_\theta(r,\theta) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_3}\left(-\frac{q_2}{r^2} + \mathrm{j}\omega\alpha_3 B_0\right)\sin\theta \tag{3.155}$$

- 空気領域 Ω_4

$$E_z(r,\theta) = \left(\frac{q_3}{r} + \mathrm{j}\omega B_0 r\right)\cos\theta \tag{3.156}$$

$$H_\theta(r,\theta) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(-\frac{q_3}{r^2} + \mathrm{j}\omega B_0\right)\cos\theta \tag{3.157}$$

以上(3.148) − (3.157)が MSW 内外の電磁界を与える．ここで，Ω_2 においては一様磁界を $\alpha_2 B_0\cos\theta$ とおき，Ω_3 においては一様磁界を $\alpha_3 B_0\cos\theta$ とおいた．

つぎにこれら電磁界の未定定数を決定する．まず(3.149)に対して，Ampère の周回積分の法則を適用して

$$p_0 = \frac{k_1 I}{2\pi a\sigma_1 J_1(\zeta)} \tag{3.158}$$

を得る．ここで前節までと同様に $\zeta \coloneqq k_1 a$ と定義する．一方，$\cos\theta$ を含む未定定数については，それぞれの境界における電界と磁界の接線成分の連続性より得られるつぎの連立方程式を解くことで求められる．

$$\begin{bmatrix} J_1(\zeta) & -1/a & -\mathrm{j}\omega a B_0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1\nu_1 J_1'(\zeta) & 1/a^2 & -\mathrm{j}\omega B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & \mathrm{j}\omega b B_0 & -1/b & -\mathrm{j}\omega b B_0 & 0 \\ 0 & \nu_2/b^2 & -\mathrm{j}\omega\nu_2 B_0 & -1/b^2 & \mathrm{j}\omega B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/c & \mathrm{j}\omega c B_0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3/c^2 & -\mathrm{j}\omega\nu_3 B_0 & -1/c^2 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ \alpha_2 \\ q_2 \\ \alpha_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{j}\omega c B_0 \\ -\mathrm{j}\omega B_0 \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

ここで，$\zeta_1 \coloneqq k_1 a, \nu_1 \coloneqq \mu_2/\mu_1, \nu_2 \coloneqq \mu_3/\mu_2, \nu_2 \coloneqq \mu_0/\mu_3$ とおいた．(3.159)左辺の係数行列を G とおき，MSW を十分遠方から見た場合の断面に現れる磁気双極子に起因する未定係数 q_3 を次のように求めることができる．

$$q_3 = \frac{\mathrm{j}\omega B_0}{\det \mathrm{G}}(-c\mathrm{G}_{56} - \mathrm{G}_{66}) \tag{3.160a}$$

$$\det \mathrm{G} = \left(J_1(\zeta) + k_1\nu_1 J_1'(\zeta)\right)\frac{1}{a^2}(\mathrm{j}\omega B_0)^2\left\{\frac{(1+\nu_2)(1+\nu_3)}{bc} + \frac{b(1-\nu_2)(1-\nu_3)}{c^3}\right\}$$

$$-\left(J_1(\zeta) - k_1\nu_1 J_1'(\zeta)\right)(\mathrm{j}\omega B_0)^2\left\{\frac{(1+\nu_2)(1+\nu_3)}{b^3 c} + \frac{(1-\nu_2)(1-\nu_3)}{bc^3}\right\} \tag{3.160b}$$

さて，以下では 3.7.2 節と同様に磁性被覆が絶縁体の場合の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{MSW}$ を定義する． MSW が Ω_4 につくる双極子磁界は

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r}\cos\theta \tag{3.74}$$

と表示できる．(3.156)右辺第 1 項と，$E_z = -\mathrm{j}\omega A_z$ は対応する項であるから，

$$m = -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mu_0\omega}q_3 \tag{3.162}$$

を得る．したがって，磁化 M は $M = m/(\pi c^2)$ から

$$M = -\mathrm{j}\frac{2}{\mu_0\omega c^2}q_3 = 2\frac{B_0}{\mu_0}\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_{2r}^{slab}, \dot{\mu}_{3r}^{slab}\right) \tag{3.163a}$$

$$\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_{2r}^{slab}, \dot{\mu}_{3r}^{slab}\right) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3} \tag{3.163b}$$

$$\psi_1 \coloneqq -\left(J_1(\zeta) + k_1\nu_1 J_1'(\zeta)\right)\frac{b}{a^2}\left\{\nu_3\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \frac{\nu_2}{b^2}\left(1 + \nu_3\frac{b^2}{c^2}\right)\right\}$$

$$-\left(J_1(\zeta) - k_1\nu_1 J_1'(\zeta)\right)\frac{1}{b}\left\{\nu_3\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \frac{\nu_2}{b^2}\left(1 + \nu_3\frac{b^2}{c^2}\right)\right\} \tag{3.163c}$$

$$\psi_2 \coloneqq -\left(J_1(\zeta) + k_1\nu_1 J_1'(\zeta)\right)\left\{\frac{b}{a^2}\left(-\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \frac{\nu_2}{b^2}\left(-\frac{1}{b} + \frac{b}{c^2}\right)\right\}$$

$$-\left(J_1(\zeta)-k_1\nu_1J_1'(\zeta)\right)\left\{\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{\nu_2}{b^2}\left(-\frac{1}{b}+\frac{b}{c^2}\right)\right\} \tag{3.163d}$$

$$\psi_3 \coloneqq \left(J_1(\zeta)+k_1\nu_1J_1'(\zeta)\right)\frac{b}{a^2}\left\{\frac{1}{b^2}(1+\nu_2)(1+\nu_3)+\frac{1}{c^2}(1-\nu_2)(1-\nu_3)\right\}$$

$$\left(J_1(\zeta)-k_1\nu_1J_1'(\zeta)\right)\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{b^2}(1-\nu_2)(1+\nu_3)-\frac{1}{c^2}(1-\nu_2)(1-\nu_3)\right\} \tag{3.163e}$$

である．(3.163a)は静磁界の極限 $\omega\to 0$,および磁性被覆がない場合の極限 $\mu_2,\mu_3\to\mu_0$ において，Bessel 関数の極限，及び反磁性を示す磁気モーメントの空間分布が変化することに注意して，

$$\Psi_3\to\frac{\mu_{1r}-1}{\mu_{1r}+1} \tag{3.164}$$

を示すことができる．したがって，(3.163a)は

$$M\to 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_{1r}-1}{\mu_{1r}+1} \tag{3.165}$$

となり，(3.49)に一致する．さて，任意の周波数で(3.163a)が(3.165)の形に書けるように複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{MSW}$ を定義すると，

$$2\frac{B_0}{\mu_0}\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_{2r}^{slab},\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)=2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{MSW}-1}{\dot{\mu}_r^{MSW}+1} \tag{3.166}$$

となる．(3.166)から

$$\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)=\frac{1+\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire}\right)}{1-\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire}\right)} \tag{3.167}$$

を得る．ここで，磁性被覆が無い場合の極限では，(3.163b)は

$$\Psi_3(\omega)\to\frac{J_1(\zeta)-\nu_1\zeta J_1'(\zeta)}{J_1(\zeta)+\nu_1\zeta J_1'(\zeta)} \tag{3.168}$$

となるので，(3.167)は結局

$$\dot{\mu}_r^{MSW}\to\mu_{1r}\frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)}=\mu_{1r}\frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)}-1}=\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) \tag{3.169}$$

となり，3.5.2 節で定義した通常の導線の複素透磁率(3.51)に帰着する．

さらに， Ω_3 が絶縁皮膜の場合，すなわち極限 $\mu_3\to\mu_0$ においては

$$\Psi_3(\omega)=\frac{\{J_1(\zeta)+\nu_1\zeta J_1'(\zeta)\}\frac{(1-\nu_2)}{a^2b}+\{J_1(\zeta)-\nu_1\zeta_1 J_1'(\zeta)\}\frac{(1-\nu_2)}{b^3}}{\{J_1(\zeta)+\nu_1\zeta J_1'(\zeta)\}\frac{(1+\nu_2)}{a^2b}+\{J_1(\zeta)-\nu_1\zeta_1 J_1'(\zeta)\}\frac{(1+\nu_2)}{b^3}} \tag{3.170}$$

であるから，(3.167)は結局

$$\dot{\mu}_r^{MSW}=\frac{(a^2-b^2)J_1(\zeta)+(-a^2+b^2)\nu_1\zeta J_1'(\zeta)}{(-a^2+b^2)\nu_2 J_1(\zeta)+(a^2+b^2)\nu_1\nu_2\zeta J_1'(\zeta)} \tag{3.171}$$

になるので，3.6.1 節で定義した磁性被覆が絶縁体の場合の単層の磁性被覆の複素透磁率(3.81)に帰着することもわかる．

3.7.2 節と同様に，$\dot{\mu}_r^{MSW}$ より，MSW は均質化できる．この場合，MSW 全体の近接効果に関する複素電力 P_{prox} は

$$P_{prox}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_c}\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v=\mathrm{j}\omega\pi c^2 l\frac{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0}{2}\left|\frac{2}{\dot{\mu}_r^{MSW}\mu_0+\mu_0}\right|^2 B_0^2$$

$$+\mathrm{j}\omega\pi c^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\left(\Psi_3(\omega)\right)-|\Psi_3(\omega)|^2+1\right\} \tag{3.172}$$

で評価できる．

つぎに，磁性被覆が絶縁体の場合の MSW のエネルギー保存則に関して考察する．準静近似 Maxwell 電磁方程式からエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\mathrm{j}\omega\mu_1|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v+\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{43}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+P_{skin}+P_{shield1}+P_{shield2} \tag{3.173}$$

を得る．ここで，(3.173)の右辺第 1 項は導線内の磁気双極子に関連する電力(すなわち近接効果に関する電力)，P_{skin} は導線の表皮効果による電力，$P_{shield1}$ は内側の磁性被覆 Ω_2 に蓄積される磁気エネルギーの増分，$P_{shield2}$ は外側の磁性被覆 Ω_3 に蓄積される磁気エネルギーの増分を表す((3.173)右辺第 1 項の電磁界に循環電流による項を含めると第 2,3,4 項は不要となる)．また，電力源から供給される電力は MSW 内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので，

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.174}$$

が成立する．ここで(3.174)右辺第 1 項において，多層磁性被覆線と周囲の空気領域を合わせた解析領域を $\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3+\Omega_4$ とする．(3.173), (3.174)より

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_3} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + P_{skin} + P_{shield1} + P_{shield2} \quad (3.175)$$

を得る．(3.175)の右辺第 2 項は(3.156), (3.157)から

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{32}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{j}\omega\pi c^2 l\frac{B_0^2}{2\mu_0}\left\{2\mathrm{Im}\left(\Psi_3(\omega)\right) - |\Psi_3(\omega)|^2 + 1\right\} \quad (3.176)$$

となる．(3.176)は複素透磁率から求めた近接効果に起因する電力(3.172)と一致することがわかる．したがって，(3.169)を用いて磁性被覆が絶縁体の場合において，MSW を均質化して，近接効果に関係する電力を正しく評価することができる．

一方， Poynting ベクトルを $\partial\Omega_{21}$ 上で積分することにより導線 Ω_1 内の電力を求めることができる．すなわち(3.148), (3.149)から，

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + P_{dp1} \quad (3.177)$$

を得る．ここで，$R_0 = l/(\sigma\pi a^2)$ は導線の直流抵抗を表す．(3.177)第 2 項は近接効果に起因する項であるが，これは(3.167)に含まれる．よって，P_{skin} は(3.177)右辺第 1 項で与えられる．また磁性被覆部分 Ω_2 の磁気エネルギーの増分を評価すると

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\mu_2 l\pi\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\log\left(\frac{b}{a}\right) + P_{dp2} \quad (3.178)$$

となる．(3.178)の右辺第 2 項は磁気双極子に起因する項であり，これらも(3.172)に含まれる．よって $P_{shield1}$ は(3.178)の右辺第 1 項である．同様に磁性被覆部分 Ω_3 の磁気エネルギーの増分を評価すると

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_3} \mu_3|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v = \mathrm{j}\omega\mu_3 l\pi\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\log\left(\frac{c}{b}\right) + P_{dp3} \quad (3.179)$$

となる．(3.179)の右辺第 2 項は磁気双極子に起因する項であり，これらも(3.172)に含まれる．よって $P_{shield2}$ は(3.179)の右辺第 1 項である．

以上の考察より，均質化された磁性被覆が絶縁体の場合の MSW の回路方程式は

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + \mathrm{j}\omega l\pi\left\{\mu_2\log\left(\frac{b}{a}\right) + \mu_3\log\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2 \quad (3.180)$$

と表せることがわかる．ただし，MSW 領域においては，右辺第 1 項の透磁率は(3.167)で求められる μ_r^{MSW} とする．(3.180)右辺第 1 項は近接効果による電力と空間に蓄積される磁気エネルギーの増分，第 2 項は表皮効果による電力，第 3, 4 項は入力電流により磁性被覆に蓄積される磁気エネルギーの増分を示す．なお，本問題でも表皮効果と近接効

果は直交性を有しているため，相互干渉項は現れない (Appendix B)．磁性被覆がない場合，(3.180)は

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 \tag{3.181}$$

となり通常の導巻線の電力を与える(3.60)に帰着する

さて，Fig.3.16 のように，MSW を均質化するためには，前節と同様に，$\dot{\mu}_r^{MSW}$ を周波数領域に拡張した Ollendorff の式(3.21)から得られるマクロ複素透磁率 $\langle\dot{\mu}_r^{MSW}\rangle$ を用いればよい.

さらに，(3.180)から，MSW の回路方程式は

$$V = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} I + \mathrm{j}\omega l\left\{\mu_2 \log\left(\frac{b}{a}\right) + \mu_3 \log\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\frac{I}{2\pi} \tag{3.182}$$

と表示できる. ここで磁性被覆領域を $\Omega_\mathrm{c} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ と示す. また, $\boldsymbol{j}\ [1/\mathrm{m}^2]$ は MSW 中の導線 1 本に単位電流が流れる場合の電流密度を示し，電流 I が流れる場合の電流密度は $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{j}$ で与えられる．(3.182)の磁気ベクトルポテンシャルは，有限要素方程式と(3.182)を連立して得られる連立方程式の解から求めればよい.

上記の定式化においては，磁性被覆が絶縁体を仮定して定式化を行った．つぎに電磁鋼板の導電性を考慮する方法を考える．多層線の場合でも，一般的に磁性被覆線の厚みは数 μm であり，導線の半径は数 mm である．そのため，一様磁界中の磁性被覆線の磁性被覆は，曲率が十分に無視できる電磁鋼板としてモデル化できるだろう．この場合，磁性被覆の透磁率は電磁鋼板の透磁率と見なしうるので, Fig.3.14 において，磁性被覆の緒元を

$$\dot{\mu}_{2r}^{slab}(\omega) = \mu_{2r}\frac{\tan\zeta_2}{\zeta_2} \tag{3.183a}$$

$$\dot{\mu}_{3r}^{slab}(\omega) = \mu_{3r}\frac{\tan\zeta_3}{\zeta_3} \tag{3.183b}$$

に変更することを考える．この場合，外部磁界による渦電流の項は(3.183)に含まれるため，磁性被覆の導電率は 0 となる．ただし，この近似は磁性被覆が十分に薄い場合にのみ成立することに注意する.

この場合の磁性被覆線の電磁界は本節で導いた電磁界において，μ_{2r}, μ_{3r} を $\dot{\mu}_{2r}^{slab}, \dot{\mu}_{3r}^{slab}$ に変更するだけでよい．また，導線内部の近接効果に起因する複素透磁率は

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r\frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r\frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{3.51}$$

を用いて表現できるので，磁性被覆の渦電流を考慮した複素透磁率は(3.81)において μ_{2r} を $\dot{\mu}_r^{slab}$ に変更し，(3.51), (3.183)を用いて書き換えると

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1 + \Psi_3\left(\dot{\mu}_{1r}^{wire}, \dot{\mu}_{2r}^{slab}\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)}{1 - \Psi_3\left(\dot{\mu}_{1r}^{wire}, \dot{\mu}_{2r}^{slab}\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)} \tag{3.184a}$$

$$\Psi(\omega) \coloneqq \frac{\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega)}{\psi_3(\omega)} \tag{3.184b}$$

$$\psi_1(\omega) \coloneqq \frac{c\dot{\nu}_3}{\dot{\nu}_1}\dot{\mu}_r^{wire}\left\{\frac{b}{a}(g_1 + \dot{\nu}_2 g_2) + \frac{a}{b}(g_1 - \dot{\nu}_2 g_2)\right\}$$

$$-c\dot{\nu}_3\left\{\frac{b}{a}(g_1 + \dot{\nu}_2 g_2) + \frac{a}{b}(-g_1 + \dot{\nu}_2 g_2)\right\} \tag{3.184c}$$

$$\psi_2(\omega) \coloneqq \frac{1}{b\dot{\nu}_1}\dot{\mu}_r^{wire}\left\{\frac{b}{a}(h_1 + \dot{\nu}_2 h_2) + \frac{a}{b}(h_1 - \dot{\nu}_2 h_2)\right\}$$

$$-\frac{1}{b}\left\{\frac{b}{a}(h_1 + \dot{\nu}_2 h_2) - \frac{a}{b}(-h_1 + \dot{\nu}_2 h_2)\right\} \tag{3.184d}$$

$$\psi_3(\omega) \coloneqq \frac{1}{\dot{\nu}_1}\dot{\mu}_r^{wire} \times$$

$$\left[\left\{\frac{1}{abc}(1 + \dot{\nu}_2) + \frac{a}{b^3 c}(1 - \dot{\nu}_2)\right\}(1 + \dot{\nu}_3) + \left\{\frac{b}{ac^3}(1 - \dot{\nu}_2) + \frac{a}{b^3 c}(1 + \dot{\nu}_2)\right\}(1 - \dot{\nu}_3)\right]$$

$$+\left[\left\{\frac{1}{abc}(1 + \dot{\nu}_2) - \frac{a}{b^3 c}(1 - \dot{\nu}_2)\right\}(1 + \dot{\nu}_3) + \left\{\frac{b}{ac^3}(1 - \dot{\nu}_2) - \frac{a}{b^3 c}(1 + \dot{\nu}_2)\right\}(1 - \dot{\nu}_3)\right] \tag{3.184e}$$

と求めることができる．ここで，$\dot{\nu}_1 \coloneqq \dot{\mu}_2^{slab}/\mu_1$,$\dot{\nu}_2 \coloneqq \dot{\mu}_3^{slab}/\dot{\mu}_2^{slab}$, $\dot{\nu}_3 \coloneqq \mu_0/\dot{\mu}_3^{slab}$ である．MSC の均質化のためには，Ollendorff の式(3.21)に代入するとよい．この場合も，Fig.3.16 と同様に均質化される．

いまの場合，均質化された磁性被覆が絶縁体の場合の MSW の回路方程式は

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + \mathrm{j}\omega l\pi\left\{\dot{\mu}_2^{slab}\log\left(\frac{b}{a}\right) + \dot{\mu}_3^{slab}\log\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2 \tag{3.185}$$

と表せることがわかる．さらに，均質化された MSW の回路方程式は

$$V = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)}I + \mathrm{j}\omega l\left\{\dot{\mu}_2^{slab}\log\left(\frac{b}{a}\right) + \dot{\mu}_3^{slab}\log\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\frac{I}{2\pi} \tag{3.186}$$

と表示できる．なお，磁性被覆がない場合の極限，つまり$a \to c, b \to c$では，(3.186)は

$$V = \mathrm{j}\omega\int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^* \mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)}I \tag{3.187}$$

に帰着する．また複素透磁率(3.184)は通常の円柱の複素透磁率(3.51)に帰着する．(3.184), (3.186)の方が，(3.135), (3.147)よりも実用的であることは第 4 章の数値結果において述べる．

3. 9　楕円柱細線の均質化有限要素解析

3.5-3.8 節では，細線の形状はすべて円柱形を仮定して定式化を行った．しかし第 1 章でも述べたように，無効空間をできるだけ少なくし，充填率を向上すること，直流抵抗を小さくすることの要請から，平角線が使用される場合が年々増加している．有限要素解析において，複素透磁率を用いた均質化法が有効であることはここまでに述べた通りであるが，定式化の際には Helmholtz 方程式(3.20a)の解となる基底関数，すなわち電磁鋼板では，$\tan z$，円柱形では Bessel 関数，Neumann 関数を用いていた．しかし，平角線断面を長方形として考える場合，長方形断面の場合の Helmholtz 方程式の基底関数および Laplace 方程式の一般解は現在発見されていない．

そこで，Fig.3.17 のように平角線を楕円柱細線に近似して考える．近接効果を取り扱う際には，楕円柱細線のつくる双極子磁界を，3.5-3.8 節のように磁気双極子から表す．なお，楕円座標系における Helmholtz 方程式(3.20a)の基底関数として，Mathieu 関数という特殊関数が知られている[3.26-29]. 本節では Mathieu 関数を用いて，楕円柱細線の表皮・近接効果に起因する渦電流特性を評価することを考える．本問題の場合，磁界の印加方向によって，磁気特性が異なるため，テンソル型複素透磁率を導入する．平角線を扱う際には，楕円柱細線のテンソル型複素透磁率を用いて近接効果損を近似評価し，表皮効果に起因するインピーダンスの項に現れる直流抵抗の面積を楕円断面の面積から長方形断面の面積で置き換える．

なお，本節で使用する記号を Table 3.10 にまとめた．本節では特に断らない限り η が楕円柱座標，η_1 が楕円柱導体の表面を規定する座標とする．η, η_1 は 3.5 節の円柱座標系での議論ではそれぞれ r, a に対応する．

Table 3.10 Nomenclature of the wire conductor with elliptic cross-section as shown in Fig.3.17

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
α [m]	long axis of an elliptic wire	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
β [m]	short axis of an elliptic wire	$\boldsymbol{B}_0$ [T]	applied uniform magnetic induction
a_f [m] $= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	focus of an elliptic wire	$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field
Ω_c	wire conductor	$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field
Ω_{out}	air region	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
S_c [m^2] $= \pi\alpha\beta$	area of Ω_c	$\boldsymbol{m}$ [A · m^2]	magnetic moment
μ [H/m]	permeability of a wire	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$\mathrm{se}_v, \mathrm{ce}_v$	first kind v–th order Mathieu functions
σ [S/m]	conductivity of a wire	$\mathrm{Se}_v, \mathrm{Ce}_v$	first kind modified v–th order Mathieu functions
f [Hz]	driving frequency	$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability
ω [rad/s]	angular frequency	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	macroscopic complex permeability

δ [m]	skin depth	$N_x = \beta/(\alpha+\beta)$	diamagnetic constant along to the x-axis
l [m]	wire length	$N_y = \alpha/(\alpha+\beta)$	diamagnetic constant along to the y-axis
η	surface coordinate of an elliptic-cylinder	η_0	surface coordinate of an elliptic conductor
ψ	coordinate of hyperbolic-cylinder (Asymptotic line)	j	imaginary unit
k [1/m] $= (1-\mathrm{j})/\delta$	wave number	V [V]	voltage
q [−]	$(k^2 a_f^2)/4$	I [A]	current
$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component	Z [Ω]	impedance of a multi-turn coil

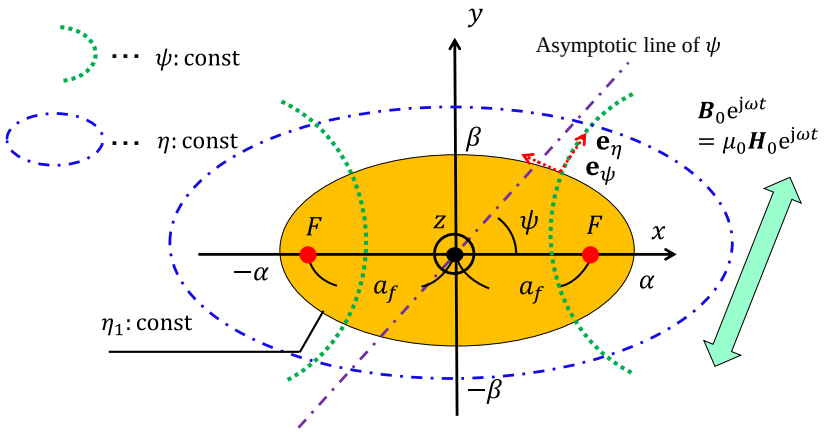


Fig.3.17 Cross-section of an elliptic wire immersed in a time-harmonic uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$in the elliptical-cylindrical coordinate system (η, ψ, z).
By following the Faraday's law of induction, the anti-parallel eddy currents are induced by $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ generated by the ambient currents. In this problem, the electromagnetic fields can be expressed with the Mathieu functions, which are the counter parts of the Bessel functions used in discussing a cylindrical wire as seen in section 3.5.

3. 9. 1　楕円柱細線の座標系と電磁界

Fig.3.17 に示す楕円断面導線の座標系(η, ψ, z)は

$$\left(\frac{x}{a_f \cosh\eta}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_f \sinh\eta}\right)^2 = 1 \tag{3.188a}$$

$$\left(\frac{x}{a_f \cos\psi}\right)^2 - \left(\frac{y}{a_f \sin\psi}\right)^2 = 1 \tag{3.188b}$$

によって規定される．楕円柱表面座標は$\eta = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right), u \coloneqq \alpha/a_f$ により計算することができ，$\eta = \eta_1, a_f = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ で導体表面となる．なお，$e \coloneqq 1/u$ が離心率となる．この状況では，電磁界はつぎの Helmholtz 方程式に支配される．

$$\frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \psi^2} + k^2 E_z = 0 \tag{3.189a}$$

$$H_\psi = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \eta} \tag{3.189b}$$

(3.189a)において，変数分離 $E_z(\eta,\psi) = H(\eta)\Psi(\psi)$ を行うことにより，つぎの常微分方程式を得る．

$$H''(\eta) + \left(k^2 a_f^2 \cosh^2\eta - \gamma^2\right)H(\eta) = 0 \tag{3.190a}$$

$$\Psi''(\psi) - \left(k^2 a_f^2 \cos^2\psi - \gamma^2\right)\Psi = 0 \tag{3.190b}$$

ただし，γ は分離定数である．(3.190)において，

$$\cosh^2\eta = \frac{\cosh 2\eta + 1}{2} \tag{3.191a}$$

$$\cos^2\psi = \frac{\cos 2\psi + 1}{2} \tag{3.191b}$$

から

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial \eta^2} - (\lambda - 2q\cosh 2\eta)H(\eta) = 0 \tag{3.192a}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial \psi^2} + (\lambda - 2q\cos 2\psi)\Psi(\psi) = 0 \tag{3.192b}$$

を得る．ここで，$k \coloneqq (1-\mathrm{j})/\delta$, $q \coloneqq k^2 a_f^2/4$, $\lambda \coloneqq \gamma^2 - k^2 a_f^2/4 = \gamma^2 - 2q$ とおいた．(3.192)は Mathieu 微分方程式と呼ばれる．(3.192)の一般解は，

$$H(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n^x \mathrm{se}_n(\mathrm{j}\eta, q) + B_n^x \mathrm{ge}_n(\mathrm{j}\eta, q)\} \tag{3.193a}$$

$$\Psi(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\{C_n^x \mathrm{se}_n(\psi, q) + D_n^x \mathrm{ge}_n(\psi, q)\} \tag{3.193b}$$

または

$$H(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n^y \mathrm{ce}_n(\mathrm{j}\eta, q) + B_n^y \mathrm{fe}_n(\mathrm{j}\eta, q)\right\} \tag{3.194a}$$

$$\Psi(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n^y \mathrm{ce}_n(\psi, q) + D_m^y \mathrm{fe}_n(\psi, q)\right\} \tag{3.194b}$$

である[e.g. 3.28]．(3.193)において，$\mathrm{se}_n, \mathrm{ce}_n$ は第 1 種 Mathieu 関数，$\mathrm{ge}_n, \mathrm{fe}_n$ は第 2 種 Mathieu 関数である(se は sine elliptic，ce は cosine elliptic の略)．$\mathrm{se}_n, \mathrm{ce}_n$ は円柱細線の問題では第 1 種第 n 次 Bessel 関数，第 2 種第 n 次 Neumann 関数に相当する．なお，数学公式においては，第 1 種変形 Mathieu 関数とはそれぞれ

$$\mathrm{Se}_n(\eta,q)=\mathrm{se}_n(\mathrm{j}\eta,q)=\sum_{m=0}^{\infty}K_{2m}^{(2m)}\sinh 2m\eta \tag{3.195a}$$

$$\mathrm{Ce}_n(\eta,q)=\mathrm{ce}_n(\mathrm{j}\eta,q)=\sum_{m=0}^{\infty}L_{2m}^{(2m)}\cosh 2m\eta \tag{3.195b}$$

の関係にある．また，物理的には，(3.193)は $\mathbf{e}_x$ 方向に印加される磁界に対する一般解を，(3.194)は $\mathbf{e}_y$ 方向に印加される磁界に対する一般解をそれぞれ表す．

さて，$E_z(\eta,\psi)=H(\eta)\Psi(\psi)$から楕円形細線の電界を決定できるが，ここで物理的な対応関係を明らかにするために，3.5.1 節で議論した円柱形細線の渦電流問題に立ち返る．外部入力電流によって生じる表皮効果に起因する電界には θ の依存性はなかったが，外部磁界により発生する近接効果に伴う渦電流には $\cos\theta$ への依存性があった(Fig.3.9).

したがって，楕円柱の電磁界の議論においても，必要な次数は 0, 1 次である．準定常電磁界の問題では, 第 1 種第 0, 1 次 Mathieu 関数はつぎのような級数展開で記述できる．

$$\mathrm{ce}_0(\zeta,q)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{q}{2}\cos 2\zeta+q^2\left(\frac{\cos 4\zeta}{32}-\frac{1}{16}\right)-q^3\left(\frac{\cos 6\zeta}{1152}-\frac{11\cos 2\zeta}{128}\right)+O(q^4)\right] \tag{3.196a}$$

$$\mathrm{se}_1(\zeta,q)=\sin\zeta-\frac{q}{8}\sin 3\zeta+q^2\left[\frac{\sin 5\zeta}{192}+\frac{\sin 3\zeta}{64}-\frac{\sin\zeta}{128}\right]+\cdots \tag{3.196b}$$

$$\mathrm{ce}_1(\zeta,q)=\cos\zeta-\frac{q}{8}\cos 3\zeta+q^2\left[\frac{\cos 5\zeta}{192}-\frac{\cos 3\zeta}{64}-\frac{\cos\zeta}{128}\right]+\cdots \tag{3.196c}$$

今回の楕円柱細線の問題では，径方向，角度方向の座標が$(\eta,\psi)\to(r,z)$で円筒座標系と対応する．ただし，ψ については Fig.3.17 に示すように，放物線の漸近線を与える座標である．しかし，準定常電磁界の周波数帯において q が十分に小さいと見なしうる範囲においては(3.196b,c)から，$\mathrm{se}_1(\psi,q)\approx\sin\psi$, $\mathrm{ce}_1(\psi,q)\approx\cos\psi$ と近似できる．したがって，近似的には，Fig.3.18 に示すように，外部磁界の印加方向が $\mathbf{e}_x$ 方向の場合，近接効果に伴う渦電流には $\cos(\psi+\pi/2)=\sin\psi$ への依存性がある一方で，外部磁界の印加方向が $\mathbf{e}_y$ 方向の場合，近接効果に伴う渦電流には $\cos\psi$ への依存性がある．

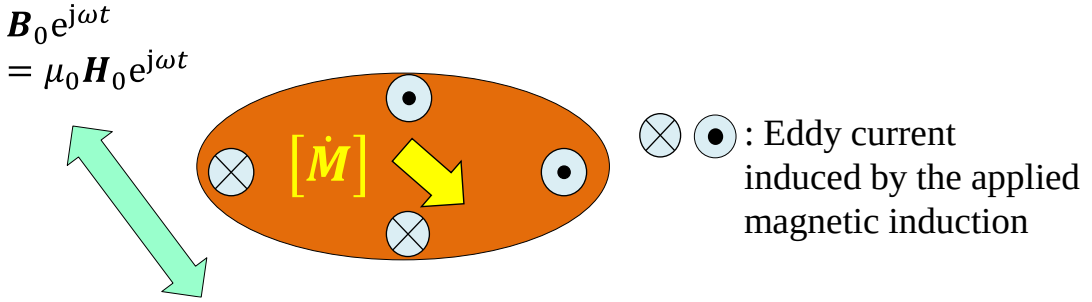


Fig.3.18 Diamagnetic field and the magnetization stem from the proximity effect in the elliptic wire conductor. Anisotropic complex permeability tensor can be defined in the closed form as shown later.

よって，楕円柱導体内の電界は

$$\boldsymbol{E}_z = p_1^x \mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{se}_1(\psi, q)\mathbf{e}_x + \left(c_0^y \mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q) + c_1^y \mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q) + c_2^y \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q) + c_3^y \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q)\right)\mathbf{e}_y$$

$$\approx p_1^x \mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta, q)\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \left(p_0^y \mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q) + p_1^y \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta, q)\cos\psi\right)\mathbf{e}_y \quad (3.197)$$

となる．ここで，Appendix B でも述べるように，表皮効果と近接効果は直交性を有していることから，$\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q), \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q)$ の項の係数は強制的に 0 とした．また，本問題では電界は $\mathbf{e}_z$ 成分のみであるが，今回はベクトル関数であるので，$\boldsymbol{E}_z$ と表記している．磁界は楕円座標における Faraday の電磁誘導の法則(3.189b)から

$$\boldsymbol{H}_\psi = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}} p_1^x \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{se}_1(\psi, q)\mathbf{e}_x - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(p_0^y \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q) + p_1^y \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q)\right)\mathbf{e}_y \quad (3.198)$$

となる．本問題でも磁界は $\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\psi$ 成分を有しており，後の議論で必要になるのは $\mathbf{e}_\psi$ 成分であるが，今回はベクトル関数であるので，$\boldsymbol{H}_\psi$ と再表記している．

上記は導体内の電磁界である．一方で導体外では，(3.189)は Laplace 方程式

$$\frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\eta^2} + \frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\psi^2} = 0 \quad (3.199a)$$

$$H_\psi = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\eta} \quad (3.199b)$$

に帰着する．(3.199a)に変数分離 $E_z(\eta, \psi) = H(\eta)\Psi(\psi)$ を適用して

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial\eta^2} - \gamma^2 H(\eta) = 0 \quad (3.200a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial\psi^2} + \gamma^2 \Psi(\psi) = 0 \quad (3.200b)$$

を得る．(3.200)の一般解は

$$H(\eta) = c_0 \mathrm{e}^{\gamma\eta} + \frac{c_1}{\mathrm{e}^{\gamma\eta}} \quad (3.201a)$$

$$\Psi(\psi) = d_0 \sin\gamma\psi + d_1 \cos\gamma\psi \quad (3.201b)$$

である．ここで c_0, c_1, d_0, d_1 は未定定数である．本問題では反平行に流れる渦電流を表すことを考えているので，$\gamma \cdot 2\pi = n\pi$ として，基本波を選ぶために，$\gamma = 1$ とする．また磁界は渦電流がつくる反磁界と外部磁界があり，導体の十分遠方では反磁界は 0 に減衰することが要請される．したがって，(3.200)の一般解は

$$H(\eta) = \frac{c_0}{\mathrm{e}^{\eta}} + \mathrm{j}\omega B_0 \mathrm{e}^{\eta} \tag{3.202a}$$

$$\Psi(\psi) = d_0 \sin\psi + d_1 \cos\psi \tag{3.202b}$$

と表せる．ゆえに，$E_z(\eta,\psi) = H(\eta)\Psi(\psi)$ に代入すると，角度成分について，$\mathbf{e}_x$ は成分は $\sin\psi$ の項のみ，$\mathbf{e}_y$ 成分は $\cos\psi$ の項のみがそれぞれ有効であり，3.5.1 節の議論と同様に，無限遠方では反磁界の効果がなくなるので，外部一様磁界に対しては(3.19b)から $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\left(B_0^x \sin\psi\,\mathbf{e}_x + B_0^y \cos\psi\,\mathbf{e}_y\right)$ の境界条件が必要になる．したがって，楕円柱導体外での一般解は円筒形の場合の(3.30)の形から類推すると

$$\boldsymbol{E}_z = \left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^{\eta}} - \mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^{\eta}} + \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.203}$$

となるだろう．この境界条件の詳細な導出は Appendix E にて示す．なお，外部磁界の符号については反磁界の方向が正の向きとなるので，Fig.3.17, 3.18 の座標系では $\mathbf{e}_x$ 方向が負，$\mathbf{e}_y$ 方向が正である．ここで，q_1^x, q_1^y はそれぞれ x 方向，y 方向の磁気双極子が作る反磁界に関係する係数である．一方で，磁界は楕円座標における Faraday の電磁誘導の法則(3.199b)において(3.203)を代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\psi} = &-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^{\eta}} + \mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x \\ &-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^{\eta}} - \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y\end{aligned} \tag{3.204}$$

と求められる．

つぎに，電磁界の未定係数 p_0, p_1, q_1 を決定する．まず表皮効果を表す p_0 を求める，導線内部の全電流を I と書くと，Ampère の周回積分の法則から

$$\begin{aligned}\oint_c \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = &-\oint_c \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\, p_1^x \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{se}_1(\psi, q) \times a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \\ &+\oint_c \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}} \\ &\times \left\{p_0^y \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q) + p_1^y \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q)\right\} a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \\ &= -\mathrm{j}\frac{2\pi}{\omega\mu\sqrt{2}} p_0 \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q)\left(1 - \frac{q^2}{16}\right) = I\end{aligned} \tag{3.205}$$

を得る．ここで，$\mathrm{se}_1(\psi, q) \approx \sin\psi$, $\mathrm{ce}_1(\psi, q) \approx \cos\psi$ と近似しているので，

$$\int_0^{2\pi} \sin\psi\,\mathrm{d}\psi = 0 \tag{3.206a}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\psi \, \mathrm{d}\psi = 0 \tag{3.206b}$$

を用いた．(3.205)において，準定常問題では $q^2 \approx 0$ と見なしてもよいので，

$$p_0 = -\frac{\omega\mu\sqrt{2}}{\mathrm{j}2\pi \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} I = \frac{\mathrm{j}\omega\mu\sigma\sqrt{2}}{2\pi\sigma \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} I = -\frac{k^2 I}{\sqrt{2}\pi\sigma \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \tag{3.207}$$

と求められる．

一方，$\sin\psi, \cos\psi$を含む項の未定係数 $p_1^x, p_1^y, q_1^x, q_1^y$ については，電界と磁界の接線成分の連続性から決定する．Ω_1 と Ω_2 の境界 $\partial\Omega_{21}(\eta = \eta_1)$ において，電磁界の接線方向成分が連続するから，x, y 成分について，それぞれ

$$\begin{bmatrix} \mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q) & -\mathrm{e}^{-\eta_1} \\ \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)/\mu_r & \mathrm{e}^{-\eta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^x \\ q_1^x \end{bmatrix} = -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.208}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q) & -\mathrm{e}^{-\eta_1} \\ \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)/\mu_r & \mathrm{e}^{-\eta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^y \\ q_1^y \end{bmatrix} = \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.209}$$

という連立方程式を得る．(3.208), (3.209)を解くことで，磁気双極子に関係する係数 q_1^x, q_1^y を決定することができる．

3. 9. 2　楕円柱細線のテンソル型複素透磁率

Fig.3.17 に示す一様交番磁界中の楕円断面導体には，Fig.3.18 に示すように渦電流により反磁性が発生するため，透磁率は等価的に減少する．また，この反磁性は，磁界の印加方向により異なる．さらに，導体細線中の渦電流により，渦電流損失が発生する．この現象をつぎのテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r]$ で表すことを考える．基本的な方針は 3.5.2 節で求めた円筒形の細線の場合と同様である．磁気ベクトルポテンシャルの支配方程式は Poisson 方程式

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{3.36}$$

であった．円筒形細線の場合は，(3.40)という基本解の形で表示できたが，楕円座標系における基本解は知られていない．そこで，$(\eta, \psi) \to (r, z)$で円筒座標系と対応することから，円筒形細線の双極子磁界

$$A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r}\cos\theta \tag{3.44}$$

において，$r \to \mathrm{e}^{\eta}, \theta \to \psi$と置き変えて

$$\boldsymbol{A}_z = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{m_x}{\mathrm{e}^{\eta}}\sin\psi\,\mathbf{e}_x - \frac{\mu_0}{\pi}\frac{m_y}{\mathrm{e}^{\eta}}\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.210}$$

と記述できるだろう．なお，今回の問題では ψ は Fig.3.17 に示している放物線の漸近線の角度を表す角度であるが，(3.196b, c)のような展開と準定常電磁界の近似から，角度成分については，$\mathrm{se}_1(\psi, q) \approx \sin\psi, \mathrm{ce}_1(\psi, q) \approx \cos\psi$とみなすことで，外部磁界の印加方向毎の双極子磁界を(3.210)のように表現することができる．また，本問題では磁気ベク

トルポテンシャルは $\mathbf{e}_z$ 成分のみであるが，今回はベクトル関数であるので，$\boldsymbol{A}_z$ と表記している．これは，磁気特性が異方性を有していることに起因する．

さて，導線の磁気双極子モーメントは(3.203)の各成分の第 1 項で与えられるので，$\boldsymbol{E}_z = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_z$ の関係から

$$\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^{\eta}} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{\pi}\frac{m_x}{\mathrm{e}^{\eta}} \tag{3.211a}$$

$$\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^{\eta}} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{\pi}\frac{m_y}{\mathrm{e}^{\eta}} \tag{3.211b}$$

が成り立つ．ここで，未定係数は(3.208), (3.209)より

$$q_1^x = -\mathrm{j}\omega B_0\mathrm{e}^{2\eta_1}\frac{\mu_r\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)-\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mu_r\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)+\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} \tag{3.212a}$$

$$q_1^y = \mathrm{j}\omega B_0\mathrm{e}^{2\eta_1}\frac{\mu_r\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)-\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mu_r\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)+\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} \tag{3.212b}$$

と求められる．(3.211)で求めた m_x, m_y を(3.210)に代入することで，磁化ベクトル $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}/S$ は

$$\dot{\boldsymbol{M}}(\omega) = -\frac{\pi\mathrm{e}^{2\eta_1}}{S}\frac{B_0^x}{\mu_0}\frac{\mu_r^x\dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}-1}{\mu_r^x\dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}+1}\mathbf{e}_x + \frac{\pi\mathrm{e}^{2\eta_1}}{S}\frac{B_0^y}{\mu_0}\frac{\mu_r^y\dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}-1}{\mu_r^y\dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}+1}\mathbf{e}_y \tag{3.213}$$

と求められる．ここで楕円の面積は $S = \pi\alpha\beta$ である．(3.213)において，静磁界の極限 $\omega \to 0$ を取ると，Mathieu 関数の定義から

$$\boldsymbol{M} = -\frac{\pi\mathrm{e}^{2\eta_1}}{S}\frac{B_0^x}{\mu_0}\frac{\mu_r^x\dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}-1}{\mu_r^x\dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}+1}\mathbf{e}_x + \frac{\pi\mathrm{e}^{2\eta_1}}{S}\frac{B_0^y}{\mu_0}\frac{\mu_r^y\dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}-1}{\mu_r^y\dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}+1}\mathbf{e}_y \tag{3.214}$$

を得る．(3.214)は楕円細線の静磁界における磁化ベクトルを近似的に表していると考えられる．

さて，3.5.2 節で，(3.47)が任意の周波数で(3.48)の形に記述できるように円柱細線の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{wire}(\omega)$ を定義したように，(3.213)が任意の周波数で(3.214)の形に記述できるようにテンソル型複素透磁率$\left[\dot{\mu}_r^{elli}(\omega)\right]$を定義すると

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) = \mu_r^x\frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} = \mu_r^x\frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{Se}_1(\eta_1,q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta_1,q)} \tag{3.215a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) = \mu_r^y\frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} = \mu_r^y\frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{Ce}_1(\eta_1,q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta_1,q)} \tag{3.215b}$$

を得る．(3.215a, b)は，磁界の印加方向がそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の場合の複素透磁率を表している．また，(3.196b, c)において $\zeta = \mathrm{j}\eta_1$ を代入し静磁界の極限を取ると $q \to 0$ より，$\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q) = \sin\mathrm{j}\eta_1$, $\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q) = \cos\mathrm{j}\eta_1$ を得るので，複素双曲線関数と複素三角関数の

関係 $\sin\eta = \mathrm{j}\sinh\eta\,, \cos\mathrm{j}\eta = \cosh\eta$ から, (3.215a, b)はそれぞれ μ_r^x, μ_r^y に収束する. さらに, 楕円柱細線の形状が極めて円柱細線に近く, 磁性が等方性の場合, すなわち Fig.3.17 での極限 $\alpha \to \beta = a, a_f \to 0$ をとり, かつ $\mu_r^x = \mu_r^y = \mu_r$ とすると

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) \to \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{3.216a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) \to \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{3.216b}$$

となり, 円柱の複素透磁率(3.51)に一致する(詳細な証明は Appendix D に示す).

(3.216)を用いると, 近接効果に関する電力は

$$P_{prox} = p_{prox}^x + p_{prox}^y \tag{3.217a}$$

$$p_{prox}^x = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_1} \dot{\mu}_r^x \mu_0 |\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v \tag{3.217b}$$

$$p_{prox}^y = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_1} \dot{\mu}_r^y \mu_0 |\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v \tag{3.217c}$$

と記述できる.

3. 9. 3　均質化された楕円柱細線の回路方程式と複素電力の評価

本節では, 楕円柱細線の電力と回路方程式を導く. さて, エネルギー保存則は 3.5.3 節の場合と同様に

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (\sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_1|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.56}$$

を得る. この式は, 座標系に依存せず成立する. (3.56)の右辺第 1 項は導線内の磁気双極子に関連する電力(すなわち近接効果に関する電力)を表す. 電力源から供給される複素電力は導線内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので,

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{3.57}$$

が成立する. ここで楕円柱導体と周囲の空気領域を合わせて $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ と表す. (3.56), (3.57)より

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.58}$$

を得る．(3.58)に楕円柱細線内の電磁界(3.197), (3.198)を代入すると

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v - \cosh\eta_1 \sinh\eta_1 \frac{R_0^{elli} q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)}|I|^2$$

$$+2\mathrm{j}\omega B_0^2 l\pi \mathrm{e}^{2\eta_1} \frac{\mu_r^x}{\mu_0} \frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)\left(\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)\right)^*}{|\mu_r \mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q) + \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)|^2}$$

$$-2\mathrm{j}\omega B_0^2 l\pi \mathrm{e}^{2\eta_1} \frac{\mu_r^y}{\mu_0} \frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)\left(\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)\right)^*}{|\mu_r \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q) + \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)|^2} \tag{3.218}$$

となる．ここで，$R_0^{elli} \coloneqq l/(\sigma\pi\alpha\beta)$ は楕円柱細線の直流抵抗を表す．なお，(3.58)の Poyinting ベクトルの表面積分項の評価においては，Mathieu 関数の直交性

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m(q, z)\mathrm{ce}_n(q, z)\mathrm{d}z = \begin{cases} 0\ (m \neq n) \\ \pi\ (m = n) \end{cases} \tag{3.219}$$

を用いた．(3.218)の右辺第 1 項は空間に蓄積される磁気エネルギー，第 2 項は ψ に依存しない成分から計算された表皮効果に起因する複素電力，第 3, 4 項は $\sin\psi, \cos\psi$ に依存する成分から計算された双極子磁界の近接効果に起因する複素電力を示す．なお，表皮効果と近接効果は直交性を有しているため，相互干渉項は現れない(Appendix B)

さて，3.5.3 節の議論では，複素透磁率から求めた近接効果による電力 P_{prox}，(3.52)と(3.59)右辺第 3 項は一致していることがわかった．しかし，今回のテンソル型複素透磁率(3.215)は，反磁界係数が決まっている磁化ベクトルからではなく，静磁界の極限の磁化ベクトルから定義しているため，(3.217a)と(3.218)の右辺第 3, 4 項は厳密には一致しない. しかし, 概ね近い形の式が現れるため, (3.215)から得られる磁気エネルギーが, 近接効果に起因する電力に対応すると考えると，(3.218)は

$$\frac{VI^*}{2} \approx \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v - \cosh\eta_1 \sinh\eta_1 \frac{R_0^{elli} q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)}|I|^2 \tag{3.220}$$

と近似できるだろう．ただし，(3.220)右辺第 1 項において，楕円柱細線領域では $[\mu] = \left[\mu_r^{elli}(\omega)\mu_0\right]$ とする．この近似の妥当性は，第 4 章にて示す．なお，平角線を考える際には，(3.219)において R_0^{elli} を $R_0^{rect} \coloneqq l/(\sigma 4\alpha\beta)$ と変更すればよい.

さて，集合した楕円柱細線を巻いて作られるコイルを考える際には，周波数領域に拡張した Ollendorff の式(3.21)から得られるマクロ複素透磁率を用いればよいが，今回は反磁界係数が磁界の印加方向ごとに異なり，

$$N_x = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tag{3.221a}$$

$$N_y = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \tag{3.221b}$$

となるので，つぎのテンソル型マクロ複素透磁率 $\left[\langle\dot{\mu}_r^{elli}(\omega)\rangle\right]$ を用いて Fig.3.19 のように均質化することができる．ここで，η_v は素線充填率である．なお，反磁界係数は楕円形状に依存し，N_x の長軸と短軸の比 β/α への依存性は Fig.3.20 のようになる．

$$\langle\dot{\mu}_r^x(\omega)\rangle = 1 + \frac{\eta_v(\dot{\mu}_r^x(\omega) - 1)}{1 + N_x(1-\eta_v)(\dot{\mu}_r^x(\omega) - 1)} \tag{3.222a}$$

$$\langle\dot{\mu}_r^y(\omega)\rangle = 1 + \frac{\eta_v(\dot{\mu}_r^y(\omega) - 1)}{1 + N_y(1-\eta_v)(\dot{\mu}_r^y(\omega) - 1)} \tag{3.222b}$$

つぎに，楕円柱から十分に離れた領域でも

$$\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{0} \tag{3.61}$$

が成立するため，(3.219)から

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^*\,\mathrm{d}v + Z_{skin}^{elli} I \tag{3.223a}$$

$$Z_{skin}^{elli} \coloneqq -2\cosh\eta_1 \sinh\eta_1\, R_0^{elli} \frac{q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \tag{3.223b}$$

を導くことができる．ここで，(3.221b)は表皮効果による実効インピーダンスを表す．平角線を考える際には，(3.221b)において R_0^{elli} を $R_0^{rect} \coloneqq l/(\sigma 4\alpha\beta)$ と変更すればよい．なお，(3.223b)において，$\alpha \to \beta = a$ の極限では

$$Z_{skin}^{elli} \to \frac{l}{\sigma\pi a^2}\frac{(ka)J_0(ka)}{2J_1(ka)} \tag{3.224}$$

となり，(3.62b)に一致する．(3.223a)の磁気ベクトルポテンシャルは，3.5.3 節と同様に連立方程式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{c}^t & \mathrm{j}Z_{skin}^{elli}/\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mathrm{j}\,V/\omega \end{bmatrix} \tag{3.225a}$$

$$c_i \coloneqq \frac{I}{S_c}\int_{\Omega_c} N_i \mathrm{d}S \tag{3.225b}$$

を解くことで得られる．ただし均質化された楕円柱コイル領域ではテンソル型透磁率を $[\mu] = \left[\langle\dot{\mu}_r^{elli}(\omega)\rangle\mu_0\right]$, 導電率を 0 とする．

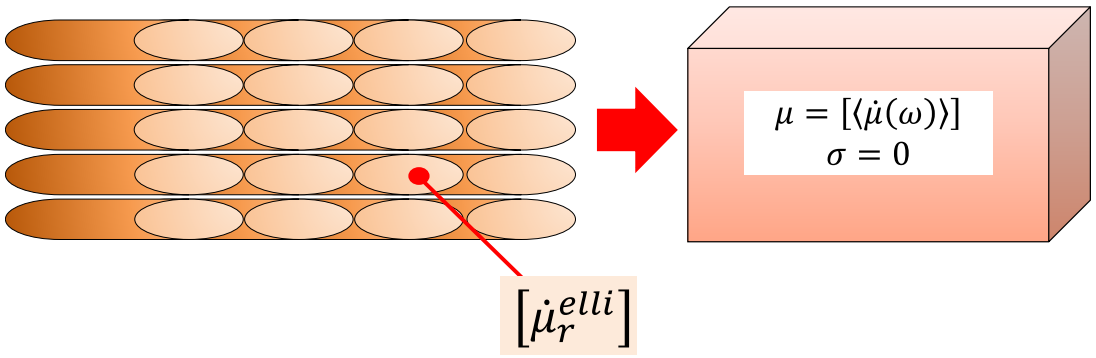


Fig. 3.19 Homogenization of a bundle of elliptic conductors with the tensor macroscopic complex permeability.
In this method, the stranded wires with elliptic cross-section is recognized as a bulk coil homogenized with the macroscopic tensor permeability which reflects the diamagnetic property and the eddy current loss. When we consider 3D problem, the permeability tensor $[\langle\dot{\mu}_r\rangle] = \mathrm{diag}\left[\langle\dot{\mu}_r^x\rangle, \langle\dot{\mu}_r^y\rangle, 1\right]$ and coordinate transform matrix have to be introduced as shown later.

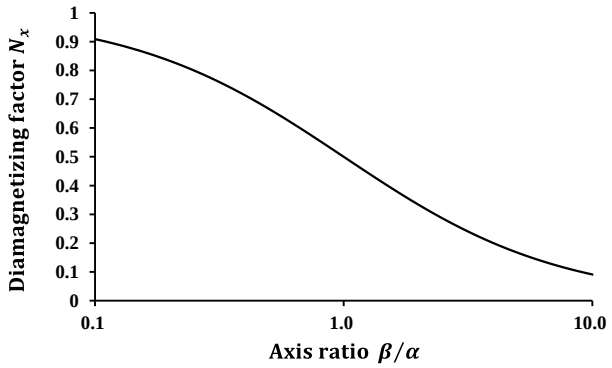


Fig. 3.20 Demagnetizing factor along to the long axis N_x.
Abscissa is the ratio of two axes β/α. From this figure, we find that N_x becomes smaller as α shorter.

3. 10　磁性被覆楕円柱細線の均質化有限要素解析

3.9 節では，楕円柱細線のテンソル型マクロ複素透磁率を用いて，近似的に平角線の均質化解析を行うことを検討した．しかし，第 1 章でも述べたように，磁性平角線についても検討が必要である．磁性被覆線についての議論は，3.6-3.8 節で行ったとおりであるが，本論文では Fig.3.21 のように，磁性被覆が単層の場合に，断面形状を楕円に近似した場合を取り扱う．また，定式化に際し第 4 章で述べるような数値安定性を考慮するため，磁性被覆の材質として，電磁鋼板の複素透磁率(3.24)を用いる方法を採用する．この基本的な議論は，3.6.3 節で述べた通りである．また，本節で使用する記号は，Table 3.10 に，磁性被覆の緒元を加えたものであり，楕円柱導体表面座標，および磁性被覆表面座標をそれぞれ η_1, η_2 とする．

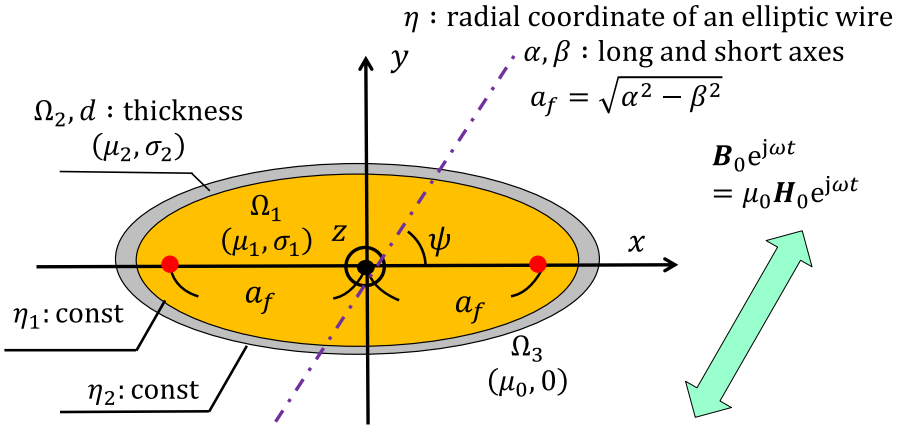


Fig.3.21 Magnetically shielded wire (MSW) with elliptic cross-section using a magnetic-conductive thin shield immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
For eliminating the numerical difficulty as discussed in section 4, the complex permeability of a magnetic-conductive plate, $\dot{\mu}_r^{slab}$ (3.24), as derived in section 3.4 is employed as the permeability of the shield region. When we introduce the tensor complex permeability, the conductivity σ_2 of the shield is set to zero because the eddy current of the shield has already been reflected in this complex permeability.

3. 10. 1　磁性被覆楕円柱細線の座標系と電磁界

楕円断面導線の座標系(η, ψ, z)は，前節と同様に，

$$\left(\frac{x}{a_f \cosh\eta}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_f \sinh\eta}\right)^2 = 1 \tag{3.188a}$$

$$\left(\frac{x}{a_f \cos\psi}\right)^2 - \left(\frac{y}{a_f \sin\psi}\right)^2 = 1 \tag{3.188b}$$

によって規定される．楕円柱表面座標は$\eta = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), u \coloneqq \alpha / a_f$ により計算することができ，$\eta = \eta_1$ で導体表面，$\eta = \eta_2$ で磁性被覆表面に一致する．なお，$e \coloneqq 1/u$ が離心率となる．本問題においても，楕円座標系における楕円柱細線内外の電磁界はつぎの Helmholtz 方程式に支配される．

$$\frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \cos^2\psi)}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \psi^2} + k^2 E_z = 0 \tag{3.189a}$$

$$H_\psi = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \eta} \tag{3.189b}$$

(3.189)の解は，3.9.1 節と同様に考えることで，領域別につぎのように求められる．いまの場合，Ω_1, Ω_2 では Helmholtz 支配方程式(3.189a)，Ω_3 では Laplace 方程式(3.199a)が支配方程式となる．なお，Ω_1 における一般解は (3.197), (3.198)と同じである．

- 導体領域 Ω_1

$$\boldsymbol{E}_z(\eta, \psi) = p_1^x \mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta, q)\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \left(p_0^y \mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q) + p_1^y \mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta, q)\cos\psi\right)\mathbf{e}_y \tag{3.197}$$

$$\boldsymbol{H}_\psi(\eta, \psi) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_1 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}} p_1^x \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{se}_1(\psi, q)\mathbf{e}_x$$

$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_1 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(p_0^y \mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_0(\psi, q) + p_1^y \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta, q)\mathrm{ce}_1(\psi, q)\right)\mathbf{e}_y \tag{3.198}$$

- 磁性被覆領域 Ω_2

$$\boldsymbol{E}_z(\eta, \psi) = \left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^\eta} - \mathrm{j}\omega c^x B_0^x \mathrm{e}^\eta\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^\eta} + \mathrm{j}\omega c^y B_0^y \mathrm{e}^\eta\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.226}$$

$$\boldsymbol{H}_\psi(\eta, \psi) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^\eta} + \mathrm{j}\omega c^x B_0^x \mathrm{e}^\eta\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x$$

$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^\eta} - \mathrm{j}\omega c^y B_0^y \mathrm{e}^\eta\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y + \frac{I}{2\pi\mathrm{e}^\eta}\mathbf{e}_\psi \tag{3.227}$$

- 空気領域 Ω_3

$$\boldsymbol{E}_z(\eta,\psi)=\left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^{\eta}}-\mathrm{j}\omega B_0^x\mathrm{e}^{\eta}\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x+\left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^{\eta}}+\mathrm{j}\omega B_0^y\mathrm{e}^{\eta}\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.228}$$

$$\boldsymbol{H}_{\psi}(\eta,\psi)=-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0\tilde{a}_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^{\eta}}+\mathrm{j}\omega B_0^x\mathrm{e}^{\eta}\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x$$

$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0\tilde{a}_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^{\eta}}-\mathrm{j}\omega B_0^y\mathrm{e}^{\eta}\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.229}$$

ここで磁性被覆内の一様磁界を $c^xB_0^x\sin\psi+c^yB_0^y\cos\psi$ とし，$k_i=\sqrt{-\mathrm{j}\omega\sigma_i\mu_i}=(1-\mathrm{j})/\delta_i\in\mathbb{C}\ \text{in}\ \Omega_i, i=1,2$ である．また，$\tilde{a}_f\coloneqq\sqrt{(\alpha+d)^2-(\beta+d)^2}$ は磁性被覆の厚さを考慮した磁性被覆線の焦点である．

つぎに，(3.197), (3.198), (3.226) − (3.229)中の未定係数を決定する．まず，表皮効果に起因する項については，(3.207)と同様に

$$p_0=-\frac{k^2I}{\sqrt{2}\pi\sigma\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta,q)} \tag{3.207}$$

とする．つぎに，近接効果については，それぞれの境界で，電界と磁界の接線成分の連続性から決定する．各境界 Ω_{21},Ω_{32} 毎に，$\eta=\eta_1,\eta_2$ とおいて得られるつぎの連立方程式を解けばよい．

$$\begin{bmatrix}\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q) & -1/\mathrm{e}^{\eta_1} & -\mathrm{e}^{\eta_1} & 0\\ \nu_1\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q) & 1/\mathrm{e}^{\eta_1} & -\mathrm{e}^{\eta_1} & 0\\ 0 & 1 & \mathrm{e}^{2\eta_2} & -1\\ 0 & -\nu_2 & \nu_2\mathrm{e}^{2\eta_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1^x\\ q_1^x\\ c^x\\ q_2^x\end{bmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{2\eta_2}B_0^x\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \tag{3.230a}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q) & -1/\mathrm{e}^{\eta_1} & -\mathrm{e}^{\eta_1} & 0\\ \nu_1\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q) & 1/\mathrm{e}^{\eta_1} & -\mathrm{e}^{\eta_1} & 0\\ 0 & 1 & \mathrm{e}^{2\eta_2} & -1\\ 0 & -\nu_2 & \nu_2\mathrm{e}^{2\eta_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1^y\\ q_1^y\\ c^y\\ q_2^y\end{bmatrix}=\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{2\eta_2}B_0^y\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \tag{3.230b}$$

ここで，$\nu_1\coloneqq\dot{\mu}_2^{slab}/\mu_1\,,\nu_2\coloneqq\mu_0/\dot{\mu}_2^{slab}$ とおいた．

3. 10. 2　磁性被覆楕円柱細線のテンソル型複素透磁率

Fig.3.21 に示す一様交番磁界中の磁性被覆楕円細線には，3.6 節の導電性の磁性被覆を有する磁性被覆線の場合と同様に，Fig.3.22 のように外部磁界を打ち消すような磁界を発生させるように流れる渦電流が生じる．また 3.9 節の楕円柱細線の場合と同様に，磁界の印加方向により異なる反磁性を持つため，磁気遮蔽効果をも含めたテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r]$ で均質化することを考える．基本的な方針は 3.9.2 節で求めた楕円柱細線の場合と同様である．

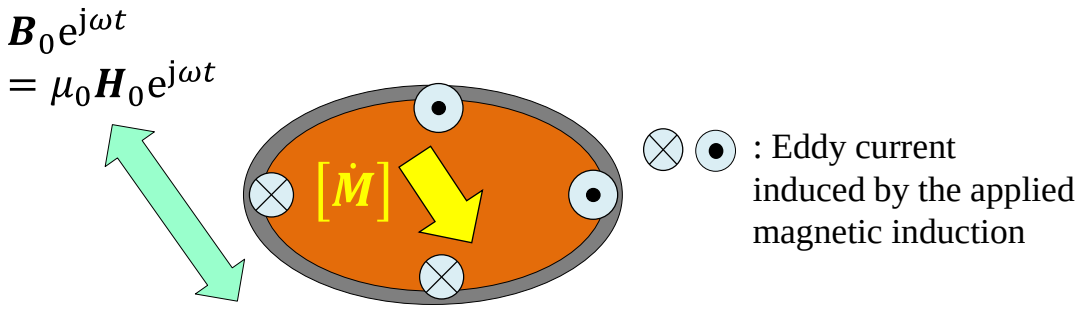


Fig.3.22 Diamagnetic field and magnetization stem from the proximity effect in a MSW with elliptic cross-section.

(3.230)を解いて，磁気双極子に関する未定係数 q_2^x, q_2^y を求め，3.6.2 節と同様に磁化ベクトルを求めると

$$\dot{\boldsymbol{M}}(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{2\eta_1}}{(\alpha+d)(\beta+d)} \frac{1}{\mu_0} \left(-B_0^x \dot{u}_x \mathbf{e}_x + B_0^y \dot{u}_y \mathbf{e}_y\right) \tag{3.231a}$$

$$\dot{u}_x = \frac{\lambda_1 \dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_2}{\lambda_3 \dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_4} \tag{3.231b}$$

$$\dot{u}_y = \frac{\lambda_1 \dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_2}{\lambda_3 \dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_4} \tag{3.231c}$$

を得る．ここで $\lambda_1 \coloneqq -h_1\nu_2 - h_2$, $\lambda_2 \coloneqq h_2\nu_2 + h_1$, $\lambda_3 \coloneqq h_1\nu_2 - h_2$, $\lambda_4 \coloneqq -h_2\nu_2 + h_1$, $h_1 \coloneqq \mathrm{e}^{2\eta_1} - \mathrm{e}^{2\eta_2}$, $h_2 \coloneqq \mathrm{e}^{2\eta_1} + \mathrm{e}^{2\eta_2}$ とおいた．(3.231a)は静磁界の極限，かつ磁性被覆が無い場合の極限をとると

$$\boldsymbol{M} \to -\frac{\pi \mathrm{e}^{2\eta_1}}{S} \frac{B_0^x}{\mu_0} \frac{\mu_r^x \dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} - 1}{\mu_r^x \dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} + 1} \mathbf{e}_x + \frac{\pi \mathrm{e}^{2\eta_1}}{S} \frac{B_0^y}{\mu_0} \frac{\mu_r^y \dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} - 1}{\mu_r^y \dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} + 1} \mathbf{e}_y \tag{3.214}$$

に帰着する．さて，3.9.2 節の議論と同様に，(3.231a)が任意の周波数で(3.214)の形に記述できるようにテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)]$ を定義すると

$$\dot{\mu}_r^x = \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{1 + \dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}} \dot{u}_x}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}} \dot{u}_x} \tag{3.232a}$$

$$\dot{\mu}_r^y = \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{1 + \dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}} \dot{u}_y}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}} \dot{u}_y} \tag{3.232b}$$

を得る．(3.232a, b)は，磁界の印加方向がそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の場合の複素透磁率を表している．また，(3.232a, b)はそれぞれ静磁界の極限，かつ磁性被覆が無い場合の極限では μ_r^x, μ_r^y に収束する．

3. 10. 3　磁性被覆部分の蓄積磁気エネルギーの解析的評価

本節では，磁性被覆楕円柱細線の電力と回路方程式を導く．本定式化には，3.6.3 節と 3.9.3 節の方法を全く同様に踏襲すればよい．本節では，基本的にはこの結果のみを示すが，磁性被覆の蓄積磁気エネルギーの導出に関して述べておく．(3.227)に対して，Ampère の周回積分の法則を適用すると

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_\psi \int_0^{2\pi} a_f \sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}\ \mathrm{d}\psi = I \tag{3.234}$$

を得るが，(3.234)から蓄積磁気エネルギーを直接的に評価することは難しい．

そこで，3.6.3 節と 3.9.3 節にて，円筒形磁性被覆線の磁気エネルギーを導出する際の議論を踏襲する．円筒形磁性被覆線の場合には，$\sin\psi, \cos\psi$ に依存しない成分，つまり磁気双極子に起因しない成分が，磁性被覆に蓄積する磁気エネルギーに寄与する成分であった．(3.227)における $\sin\psi, \cos\psi$ に依存しない成分は

$$\boldsymbol{H}_\psi = \frac{I}{2\pi \mathrm{e}^\eta}\mathbf{e}_\psi \tag{3.235}$$

である．(3.235)は，円筒座標系(r, θ, z)において，線電流が周囲に作る磁界と電流のよく知られた関係

$$\boldsymbol{H}_\theta = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta \tag{3.236}$$

と類似している．円筒座標系における r が，楕円座標系においては e^η に対応することから(3.235)が十分な近似表現であると言える．一方で，

$$\boldsymbol{H}_\psi(\eta,\psi) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2\tilde{a}_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^\eta} + \mathrm{j}\omega c^x B_0^x \mathrm{e}^\eta\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x$$

$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_2\tilde{a}_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}}\left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^\eta} - \mathrm{j}\omega c^y B_0^y \mathrm{e}^\eta\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{3.237}$$

の項はテンソル型複素透磁率(3.232)に含まれているので，再評価は不要である．(3.237)から評価した磁気エネルギーは，円筒形磁性被覆線の場合の(3.89)右辺第 2,3 項に相当し，最終的な評価には含まれていないことに対応する．

磁性被覆の蓄積磁気エネルギーは

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\mu_2 l\int_{\eta_1}^{\eta_2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{I}{2\pi\mathrm{e}^\eta}\right|^2 a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\psi \tag{3.238}$$

となる．(3.238)において，右辺の根号においては $\cosh^2\eta \gg \cos^2\psi$ なので，

$$\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}\Omega \approx \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\mu_2 l a_f 2\pi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\frac{I}{2\pi\mathrm{e}^{\eta}}\right|^2\cosh\eta\,\mathrm{d}\eta \tag{3.239}$$

と近似できる．さて，磁性被覆領域は電磁鋼板に近似し，電磁鋼板の複素透磁率を用いているので

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}\Omega &= \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l a_f\pi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\frac{1}{\mathrm{e}^{2\eta}}\frac{\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{-\eta}}{2}\mathrm{d}\eta\\ &= \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l a_f\pi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\frac{\mathrm{e}^{-\eta}+\mathrm{e}^{-3\eta}}{2}\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{3.240}$$

となる．ここで，楕円表面座標 η について，$\eta=\cosh^{-1}u=\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right), u\coloneqq\alpha/a_f$ なので ${}^{\forall}u\in\mathbb{R},\cosh^{-1}u\geq 1$ である．したがって，$\mathrm{e}^{-\eta}\gg\mathrm{e}^{-3\eta}$ のため，(3.240)は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}\Omega &\approx \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l a_f\pi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{2}\mathrm{d}\eta\\ &= \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l\pi\frac{a_f}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\end{aligned} \tag{3.241}$$

と近似できる．(3.241)が評価すべき磁性被覆の蓄積磁気エネルギーである．

本定式化では，双曲線関数と三角関数の大小関係などから，近似的に(3.241)を定義したが，この結果は，3.7.2 節の円柱形磁性被覆線の複素電力

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2+\mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\mu}_r^{slab}l\pi\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.114}$$

の右辺第 3 項と著しく類似しているとわかる．

3. 10. 4　均質化された磁性被覆楕円柱細線の回路方程式と複素電力の評価

本節では，3.10.2 節で求めた磁性被覆楕円柱細線テンソル型複素透磁率と 3.10.3 節で求めた磁性被覆の蓄積磁気エネルギーの解析的表現を用いての電力と回路方程式を導く．本定式化には，3.6.3 節と 3.9.3 節の方法を全く同様に踏襲すればよい．本節では，基本的にはこの結果のみを示す．まず，エネルギー保存則は

$$\frac{VI^*}{2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega}\mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v+\frac{1}{2}Z_{skin}^{elli}|I|^2+\mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{\mathrm{slab}}\mu_0 l\pi\frac{a_f}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\left|\frac{I}{2\pi}\right|^2 \tag{3.242a}$$

$$Z_{skin}^{elli}\coloneqq -2\cosh\eta_1\sinh\eta_1\,R_0^{elli}\frac{q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1,q)} \tag{3.242b}$$

となる．(3.242b)は(3.223b)と同形である．

さて，集合した楕円柱細線を巻いて作られるコイルを考える際には，周波数領域に拡張した Ollendorff の式(3.21)から，つぎのテンソル型マクロ複素透磁率 $[\langle\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)\rangle]$ を用いて Fig.3.23 のように均質化することができる．ここで，η_v は素線充填率である．

$$\langle\dot{\mu}_r^x(\omega)\rangle = 1 + \frac{\eta_v(\dot{\mu}_r^x(\omega) - 1)}{1 + N_x(1-\eta_v)(\dot{\mu}_r^x(\omega) - 1)} \tag{3.222a)′}$$

$$\langle\dot{\mu}_r^y(\omega)\rangle = 1 + \frac{\eta_v(\dot{\mu}_r^y(\omega) - 1)}{1 + N_y(1-\eta_v)(\dot{\mu}_r^y(\omega) - 1)} \tag{3.222b)′}$$

$$N_x = \frac{(\beta + d)}{(\alpha + d) + (\beta + d)} \tag{3.221a)′}$$

$$N_y = \frac{(\alpha + d)}{(\alpha + d) + (\beta + d)} \tag{3.221b)′}$$

つぎに，磁性楕円柱細線から十分に離れた領域でも

$$\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{0} \tag{3.61}$$

が成立するため，(3.242a)から磁性被覆楕円細線の回路方程式

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^*\,\mathrm{d}v + Z_{skin}^{elli} I + \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l\pi a_f \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\frac{I}{2\pi} \tag{3.243}$$

を導くことができる．(3.243)の磁気ベクトルポテンシャルは，3.5.3 節と同様に連立方程式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{c}^t & \mathrm{j}Z_{skin}^{elli}/\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mathrm{j}\,V/\omega \end{bmatrix} \tag{3.244a}$$

$$c_i \coloneqq \frac{I}{S_c}\int_{\Omega_c} N_i \mathrm{d}S \tag{3.244b}$$

を解くことで得られる．なお，平角線を考える場合には(3.243b)において，R_0^{elli} を $R_0^{rect} \coloneqq l/(\sigma 4\alpha\beta)$ と変更すればよい．また前節と同様に均質化された楕円柱コイル領域ではテンソル型透磁率を $[\mu] = [\langle\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)\rangle\mu_0]$，導電率を 0 とする．

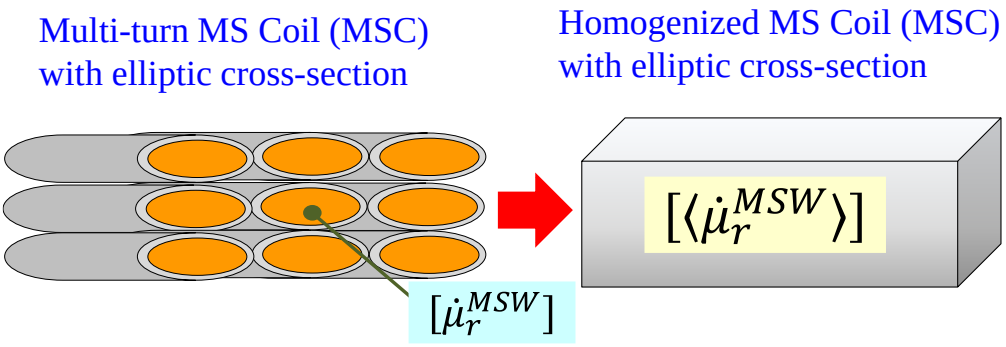


Fig.3.23 Homogenization of a bundle of MSWs with elliptic cross-section with the tensor macroscopic complex permeability.
In this method, the stranded MSWs with elliptic cross-section is recognized as a bulk coil homogenized with the macroscopic tensor permeability which represents the diamagnetic property and the eddy current loss. When we consider 3D problem, the complex permeability tensor $[\langle\dot{\mu}_r\rangle] = \mathrm{diag}[\langle\dot{\mu}_r^x\rangle, \langle\dot{\mu}_r^y\rangle, 1]$ and coordinate transform matrix have to be introduced as shown later.

3. 11　真球形圧粉磁芯の複素透磁率と均質化有限要素法

本節と次節では圧粉磁芯の均質化に関して検討する．前節までの細線の均質化解析においては，2 次元平面での均質化を検討したが，本節より，3 次元空間中に存在する外部一様交番磁界中の磁性体を考え，その際の磁性体の磁気双極子から解析的に複素透磁率を定義する．求めた複素透磁率を Ollendorff の式の比透磁率として代入することで，均質化された SMC コアのマクロ複素透磁率を得る．

本節では，圧粉磁芯の形状は真球であると仮定し，Fig.3.24 ような一様交番磁界 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathbf{e}_z$ 中に置かれた磁性球を考える．いま Fig.3.24 ように球座標系 (r, θ, φ) を導入する．系の対称性から，磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A} = A_\varphi(r, \theta)\mathbf{e}_\varphi$ と表せる．

なお，球座標系での計算過程は複雑であるため，一部を Appendix D に記す．また，使用する変数を Table 3.11 にまとめる．

Table 3.11 Nomenclature of the spherical soft magnetic composite (SMC) as shown in Fig.3.23

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
a [m]	radius of a spherical SMC	η	volume fraction
Ω_{SMC}	SMC region	Ω_{air}	air region
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
$\boldsymbol{m}$ [A · m^2]	magnetic moment	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	μ [H/m]	permeability of Ω_1
σ [S/m]	conductivity of Ω_1	N	diamagnetic constant
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
j	imaginary unit	$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component

δ [m]	skin depth	$k=(1-\mathrm{j})/\delta$ $=\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma}$ [1/m]	wave number
ζ [−]	$ka=(1-\mathrm{j})a/\delta$	i_n, n_n	n-th order modified spherical Bessel function
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated SMC	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	homogenized complex permeability

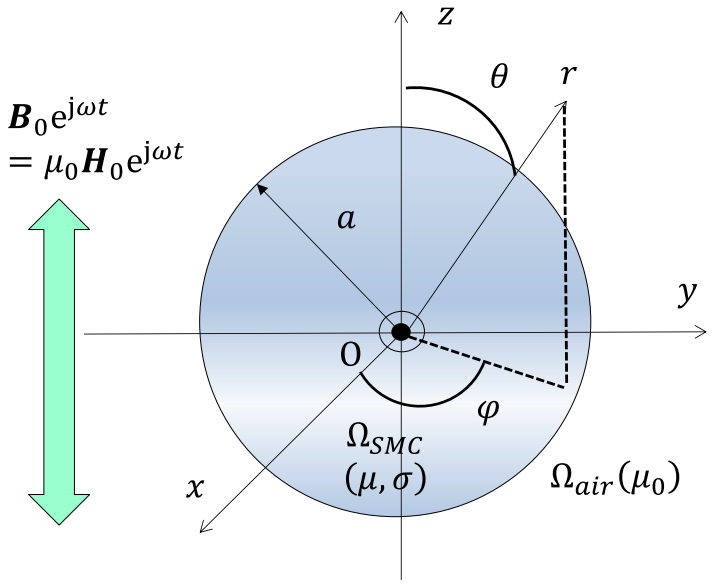


Fig. 3.24 Soft magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. SMC is a fairly small magnetic particle which is composed of small insulated iron particles. In this model, the magnetic vector potential $\boldsymbol{A}$ is generated by the eddy current due to the proximity effect flowing along the direction of $\mathbf{e}_\varphi$.

3. 11. 1　磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルと磁気双極子

準静近似 Maxwell 電磁方程式(3.19)，および $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ と Coulomb ゲージ$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ から，支配方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-k^2\boldsymbol{A}=0\ ,\ \ (r\le a) \tag{3.245a}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=0\ ,\ \ (r\ge a) \tag{3.245b}$$

を得る($\nabla^2(=\Delta)$ はベクトル Laplacian である. 詳細は Appendix E を参照とする). (3.245a)は磁気ベクトルポテンシャルを未知数とする Helmholtz 方程式, (3.245b)の Laplace 方程式である．いま，$\boldsymbol{A}=A_\varphi(r,\theta)\mathbf{e}_\varphi$ を仮定しているので，$A\equiv A_\varphi$ とすると(3.245)はスカラーLaplacian を用いて

$$\nabla^2 A-k^2A=0\ ,\ \ (r\le a) \tag{3.246a}$$

$$\nabla^2 A=0\ ,\ \ (r\ge a) \tag{3.246b}$$

となる．以下では，一様磁界により生じる渦電流は一様に $\mathbf{e}_\varphi$ 方向に流れるとする．ここで, 磁性球の十分遠方では, 磁性球に生じる渦電流による反磁界の効果がなくなるため, 外部磁界による磁気ベクトルポテンシャルのみが有効であるから,

$$A \to \frac{1}{2} r B_0 \sin\theta \quad , \quad (\text{as } r \to \infty) \tag{3.247}$$

という境界条件を得る. また, 磁性球内では磁界は有限であることも必要である. いま, 系の対称性から $\partial A/\partial\varphi = 0$ なので, (3.246a)は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{A}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) - \frac{A}{r^2\sin^2\theta} - k^2 A = 0 \tag{3.248}$$

となる．ここで，変数分離 $A = R(r)\Theta(\theta)$ を行うと，

$$\frac{\Theta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{R\Theta}{r^2\sin^2\theta} - k^2 R\Theta = 0 \tag{3.249}$$

が得られる．(3.249)からR, Θは

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - k^2 r^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{R\Theta}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = l(l+1) \tag{3.250}$$

を満足する．ここで $l(l+1)$ は分離定数である．(3.250)より R, Θ それぞれについて

$$r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \{k^2 r^2 - l(l+1)\}R = 0 \tag{3.251a}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left\{l(l+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right\}\Theta = 0 \tag{3.251b}$$

という常微分方程式を得る[e.g. 3.28]. (3.251)は Legendre の培微分方程式と呼ばれる. (3.251a)の一般解は変形第 1 次球 Bessel 関数

$$i_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \tag{3.252a}$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr) \tag{3.252b}$$

の線形結合で表される．しかし，$r \to 0$ のとき $n_l \to \infty$ であるので，磁性球内では磁界は有限であるという条件から，(3.251)の一般解として適切なのは Neumann 関数を含まない $i_l(kr)$ のみである[e.g. 3.28].

一方，(3.252b)の一般解は Legendre の培多項式 $P_l^1\cos\theta$ である．したがって，$A = R(r)\Theta(\theta)$から，

$$A = \sum_{l=1}^{n} p_l i_l(kr) P_l^1(\cos\theta) \tag{3.253}$$

と表される(p_l は未定係数). いま，角度方向に寄与する成分は基本波であり，一様磁界を想定しているので，$l = 1$ として

$$A = pB_0 i_1(kr)\sin\theta \tag{3.254}$$

を得る．ここで，p は未定定数である．

つぎに，Laplace 方程式(3.255b)を考える．先程と同様に，変数分離 $A = R(r)\Theta(\theta)$ を行うと(3.251a)は，$k = 0$ として

$$r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r^2} + 2r \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - l(l+1)R = 0 \tag{3.251c}$$

となる．(3.251c)の一般解は，数学的に知られた

$$R = c_1 r^{l+1} + \frac{c_2}{r^l} \tag{3.255}$$

という形である[3.25]．さて，反作用磁界の効果は無限遠方で 0 に減衰しなければならないので，適切な(3.251c)の解は $R(r) = c_2/r^{l+1}$ である．(3.251b)の解は導体内の場合と同様に $P_l^1 \cos\theta$ なので，$l = 1$とし，境界条件(3.247)と合わせて，(3.246b)の一般解は

$$A = \left(\frac{q}{r^2} + \frac{B_0}{2} r\right) \sin\theta \tag{3.256}$$

となる．ここで，q は未定定数であり，(3.256)の右辺第 1 項は双極子磁界を，第 2 項は磁性球から十分遠方における境界条件を表す．

以上(3.254), (3.256) が一様磁界が印加されることを想定した磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルである．つぎに，未定係数の決定を行う．磁性球の表面では磁束密度の法線成分と磁界の接線成分が連続となるので，(3.254)の A を A_{in}，(3.256)の A を A_{out} とそれぞれ記すと

$$A_{in} = A_{out} \tag{3.257a}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}(rA_{in}) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}(rA_{out}) \tag{3.257b}$$

が成立することが必要十分であるから

$$\begin{bmatrix} j_1(\zeta) & -a^{-2} \\ \nu \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rj_1(kr)\right)\Big|_{r=a} & a^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{B_0}{2} a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.258}$$

という連立方程式が導ける．ここで，$\nu \coloneqq \mu_0/\mu, \zeta \coloneqq ka$ とおいた．また

$$j_1(\zeta) = \frac{\sin(\zeta) - \zeta\cos(\zeta)}{\zeta^2} \tag{3.259a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(ri_1(kr)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\sin(kr) - (kr)\cos(kr)}{(kr)^2}\right) = -i_1(kr) + \sin(kr) \tag{3.259b}$$

と変形すると，(3.258)より

$$\begin{bmatrix} j_1(\zeta) & -a^{-2} \\ -\nu j_1(\zeta) + \nu\sin(\zeta) & a^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{B_0}{2} a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.260}$$

となる．(3.260)を解くと

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{a^3 B_0}{2\{(1-\nu)j_1(\zeta) + \sin(\zeta)\}} \begin{bmatrix} 3/a^2 \\ (\nu+2)j_1(\zeta) - \sin(\zeta) \end{bmatrix} \tag{3.261}$$

を得る．(3.261)から磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルが求められるので，$\boldsymbol{H} = \nu\boldsymbol{B} = \nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}$ から電磁界が計算できる．

3. 11. 2　真球圧粉磁芯の複素透磁率

前節の細線の場合と同様に，一様磁界中の磁性球には，Fig.3.25 に示すように鎖交磁束を打ち消すような磁界を発生する渦電流が流れる(近接効果). この渦電流は Fig.3.25 に示すような反磁界を形成する．この反磁性に起因する双極子磁界を求める．磁性球の双極子磁界の導出にはいくつかの方法があるが，ここでは，文献[3.25]で紹介されている磁気ベクトルポテンシャルの多重極展開から導く．

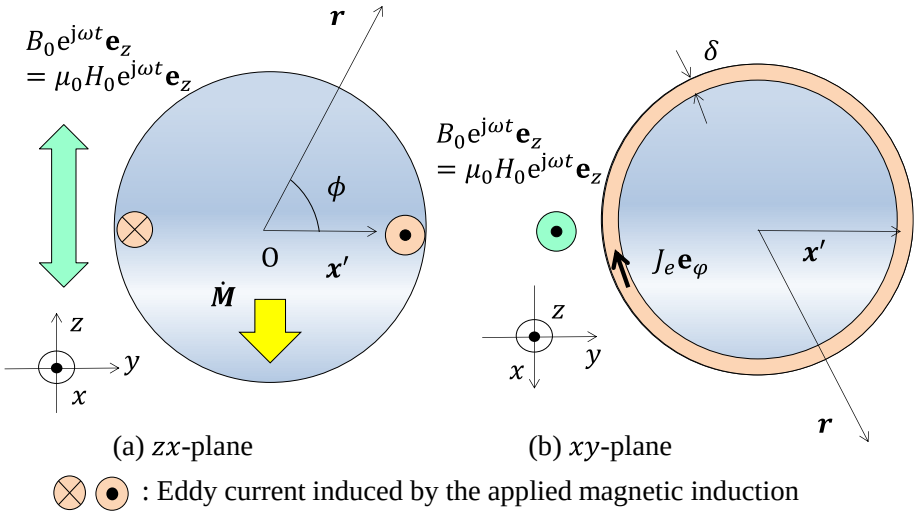


Fig. 3.25 Diamagnetic field in a spherical SMC caused by the proximity effect.
In this figure, $\boldsymbol{x}'$ and $\boldsymbol{r}$ denote the eddy current as a source of the magnetic dipole field and the observation point, respectively. In this 3D model, the eddy current makes a solenoidal field whereas the anti-parallel eddy current field induced in a cylinder which is infinity long toward the wire axis as discussed in section 3.5-3.9. In this model, the diamagnetic field is assumed to be uniform in the SMC region. Thus, the complex permeability possessing the diamagnetic property can be defined from the magnetic dipole field given by the magnetic vector potential.

いま，渦電流 $\boldsymbol{J}_e = J_e\mathbf{e}_\varphi$ は Fig.3.28(b)のように，外部磁界による渦電流により磁性体表面近傍にループ状に流れる．すなわち外部磁界により磁性球内に生じる渦電流はソレノイダル界である．渦電流による双極子磁界 $\boldsymbol{A}$ は Poisson 方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J}_e \tag{3.262}$$

に支配される．(3.262)の解は Green 関数を用いて，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|}\,\mathrm{d}v \tag{3.263}$$

と表すことができる[3.25]. なお, ここでは磁性球周囲には磁性体はないと仮定している．さて，$r \coloneqq |\boldsymbol{r}|, x' \coloneqq |\boldsymbol{x}'|$ として，Fig.3.25(a)において，余弦定理から

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+x'^2-2rx'\cos\phi}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'}{r}\right)^2 - 2\frac{x'}{r}\cos\phi + 1}} \tag{3.264}$$

を得る．さて，$r > a > x'$ である状況を仮定し，(3.264)の右辺を x'/r の関数と考え，Taylor 級数展開を行うと

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{x'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\phi) \tag{3.265}$$

を得る．ここで，$P_l(\cos\phi)$ は Legendre の多項式である．(3.265)を(3.264)に代入することによって，(3.263)の多重極展開

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}'|^l P_l(\cos\phi)\,\mathrm{d}v \tag{3.266}$$

を得る．以下では外部磁界に起因する成分を調べるため，(3.266)の初項と第 1 項に注目する．つまり $l = 0,1$ の場合について議論する．

まず，初項は $P_0(\cos\phi) = 1$ なので

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')P_0(\cos\phi)\,\mathrm{d}v = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}v \tag{3.267}$$

である．いま，$\boldsymbol{x}'$ における空間微分を ∇' とするとベクトル公式

$$\nabla'\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\nabla'\varphi + \varphi\nabla'\cdot\boldsymbol{a} \tag{3.268}$$

から

$$\nabla'\cdot\left(x'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right) = \left(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)_x + x'\nabla'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}') \tag{3.269}$$

を得るので，(3.269)を体積積分して

$$\int_v \nabla'\cdot\left(x'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)\mathrm{d}v = \int_v \left(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)_x\mathrm{d}v + \int_v x'\nabla'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v \tag{3.270}$$

である．ここで，$\left(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)_x$ は位置 $\boldsymbol{x}$ から見た場合の渦電流を表している．さて，Gauss の発散定理，及び磁性球は有限の大きさを仮定しているので，電流保存則から

$$\int_v \nabla'\cdot\left(x'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)\mathrm{d}v = \int_s x'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.271}$$

である．したがって，

$$\int_v \left(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)_x\mathrm{d}v = -\int_v x'\nabla'\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v \tag{3.272}$$

が従う．また，(3.272)の右辺も，電流保存則から 0 になるので，結局

$$\int_v \left(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)_x\mathrm{d}v = 0 \tag{3.273}$$

である．したがって，$l=0$ の項は 0，つまり外部磁界に起因しない成分は双極子磁界に影響しないという当然の結果を得る．

つぎに，$l=1$ の場合は，$P_1(\cos\phi)=\cos\phi$ なので

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'P_1(\cos\phi)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x}'|\cos\phi\;\mathrm{d}v=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_v \boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}v \tag{3.274}$$

を得る．ここで，内積 $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{x}'||\boldsymbol{r}|\cos\phi$ を用いた．さて，ベクトル公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{3.275}$$

から

$$\big(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\big)\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}' \tag{3.276}$$

なので,

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_v \big(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\big)\,\mathrm{d}v\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_v (\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}v \tag{3.277}$$

となる．さて，(3.277)右辺第 2 項の評価を考える．準備として，Gauss の発散定理の逆から

$$\int_v x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v=\int_v \nabla'\cdot\big(x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\big)\mathrm{d}v \tag{3.278}$$

を導いておく．さらにベクトル公式と合成関数の連鎖則

$$\nabla'\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\nabla'\varphi+\varphi\nabla'\cdot\boldsymbol{a} \tag{3.279a}$$

$$\nabla'(\varphi\phi)=\varphi\nabla'\phi+\phi\nabla'\varphi \tag{3.279b}$$

から

$$\nabla'\cdot\big(x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\big)=\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla'\big(x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\big)+x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\nabla'\cdot\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')$$

$$=(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\big(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\big)_x+x'(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r}) \tag{3.280}$$

となるので，(3.278)の右辺が電流保存則から 0 になることと合わせて，(3.280)を体積積分すると

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_v (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}v=0 \tag{3.281}$$

を得る．(3.278)と(3.281)の和をとると

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_v (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}v = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int_v \left(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)\mathrm{d}v\times\boldsymbol{r} \tag{3.282}$$

となる．さらに，(3.282)の右辺の一部は磁気双極子の定義式

$$\boldsymbol{m}\equiv\frac{1}{2}\int_v \left(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_e(\boldsymbol{x}')\right)\mathrm{d}v \tag{3.283}$$

と一致するので，(3.274)と(3.282)から結局

$$\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3.284}$$

という一様交番磁界中の磁性球の渦電流が生じる双極子磁界を得る．いま $\boldsymbol{A}=A_\varphi(r,\theta)\mathbf{e}_\varphi$ であるから，(3.284)は

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^2}\sin\theta \tag{3.285}$$

となる．さて，(3.256)と(3.285)は一致するので，

$$m=\frac{4\pi}{\mu_0}q \tag{3.286}$$

となる．ここで，(3.286)に(3.261)の q を代入し磁化ベクトルの定義から

$$M=\frac{m}{\frac{4\pi a^3}{3}}q=3\frac{B_0}{2\mu_0}\frac{(2\mu+\mu_0)j_1(\zeta)-\mu_0\sin(\zeta)}{(\mu-\mu_0)j_1(\zeta)+\mu_0\sin(\zeta)} \tag{3.286}$$

を得る．(3.286)は静磁界の極限 $\omega\to 0$ では

$$M\to 3\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2} \tag{3.287}$$

となり，よく知られた一様磁界中の球体の磁化(反磁界係数1/3)に帰着する(Appendix C).

さて，前節までの細線の複素透磁率を定義した方法と同様に，任意の周波数で(3.286)が(3.287)の形に書けるような複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{SMC}$ を定義すると，

$$3\frac{B_0}{2\mu_0}\frac{(2\mu+\mu_0)j_1(\zeta)-\mu_0\sin(\zeta)}{(\mu-\mu_0)j_1(\zeta)+\mu_0\sin(\zeta)}=3\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\dot{\mu}_r^{SMC}-1}{\dot{\mu}_r^{SMC}+2} \tag{3.287}$$

が成立するので，

$$\dot{\mu}_r^{SMC}=2\mu_r\frac{\zeta\cos\zeta-\sin\zeta}{\sin\zeta-\zeta\cos\zeta-\zeta^2\sin\zeta}$$

$$=2\mu_r\frac{1-\frac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\frac{\tan\zeta}{\zeta}-1} \tag{3.288}$$

を得る. この複素透磁率は, 文献[3.16]で報告されている複素透磁率と一致する. さらに, (3.288)は静磁界の極限で μ_r に収束する．また，Fig.3.26 のように圧粉磁芯を成型して作られる SMC コアを考える場合，前節までの細線の議論と同様に Ollendorff の式

$$\langle \dot{\mu}_r^{SMC} \rangle = 1 + \frac{\eta(\dot{\mu}_r^{SMC} - 1)}{1 + N(1-\eta)(\dot{\mu}_r^{SMC} - 1)} \tag{3.289}$$

に代入して得られるマクロ複素透磁率を SMC コアに与えればよい．均質化された圧粉磁芯を用いた磁性体コアの渦電流損失の実効値 P_e は

$$P_e = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{2} \int_{\Omega_{Core}} \langle \dot{\mu}_r^{SMC} \rangle \mu_0 |\boldsymbol{H}|^2 \mathrm{d}v \right) \tag{3.290}$$

で評価できる．より厳密に評価するためには，磁性粒子の分布状態を考慮する必要がある．本節の比論では，磁性球粒子半径はすべて均一であると仮定してきた．しかし，実際の磁性体コア中の圧粉磁芯の半径には分布がある. その分布をも考慮に入れた損失 $\hat{P}_e$ は確率密度関数 $f(a)$ により

$$\hat{P}_e = \int_0^\infty f(a) P_e \mathrm{d}a \tag{3.291}$$

と評価するとよい．(3.291)の評価は，磁性球の粒子形を平均化した場合の，磁性体コアの渦電流損失の平均的な実効値に対応する.

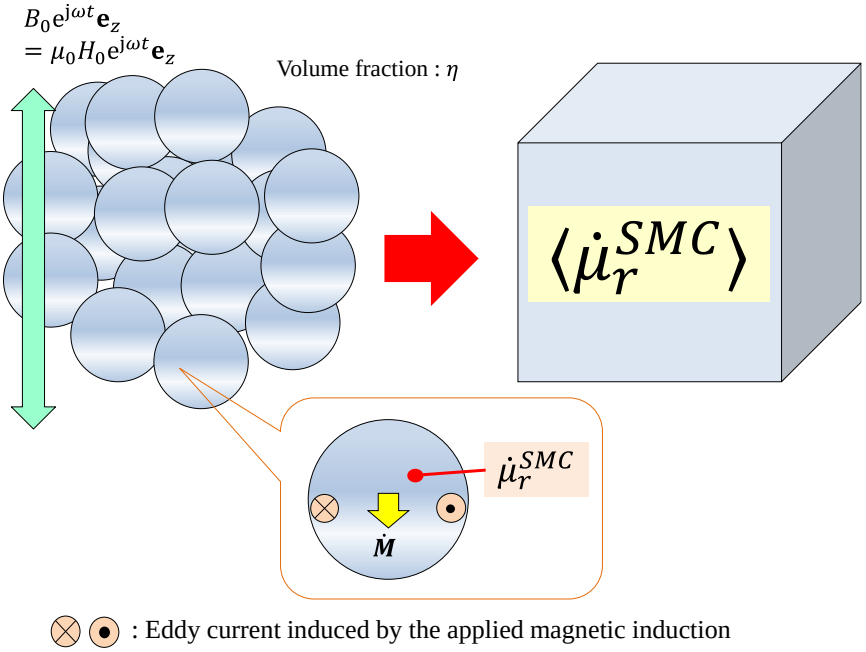


Fig. 3.26 Homogenization of a SMC core composed of assembled spherical magnetic particles with the macroscopic complex permeability.
When we perform the finite element analysis considering the eddy current in a SMC core, the SMC region can be treated as the homogenous material whose permeability is macroscopic the complex permeability. Thus, it can be discretized into rather coarse elements because the filling factor and the effect of the eddy current have been already included in this permeability. If a particle has the anisotropic magnetic property, the permeability tensor $[\langle \dot{\mu}_r \rangle] = \mathrm{diag}\left[\langle \dot{\mu}_r^x \rangle, \langle \dot{\mu}_r^y \rangle, \langle \dot{\mu}_r^z \rangle\right]$ have to be introduced.

3. 12　回転楕円体形圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率と均質化

前節では，圧粉磁芯の形状は真球であると仮定したが，第 1 章でも述べたように，磁性粒子を球体として扱っている以上，製造過程の異なる圧縮力に起因する異方性の取り扱いに関しては議論できない．そこで，本節では，圧粉磁芯の形状が回転楕円体である場合を扱う．一般的には，楕円体であるが，本節では簡単のため，3 軸のうち，2 軸の長さが等しいモデルを考える．解析モデルとして，Fig.3.27 のような一様交番磁界 $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 中に置かれた扁平磁性球を考える．使用する変数を Table 3.12 にまとめる．いま Fig.3.25 のように楕円体座標系(η, θ, ψ)を導入する[3.26]. なおこの楕円体座標の表記については，文献[3.26]の座標系の記法を参考とした．

Fig.3.27 において，(a)の扁球形と(b)の長球形は原点周りに x 軸から 90° だけ反時計回りに回転すると一致する関係にある．それぞれの座標系は，つぎの方程式群によって規定される．なお，いずれの場合においても $0 \le \eta \le \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$ である．以下の定式化では，(a)の扁球形を仮定して行うが，図形の対称性から，回転波動関数の引数の変更により，磁界の印加方向を 90° 回転させた場合の複素透磁率を得るので，片方の定式化を与えれば，もう一方の複素透磁率は関数の変更により得られる[3.26-29].

(a)　扁球形圧粉磁芯

$$x = a_f \cosh\eta \sin\theta \cos\psi \tag{3.292a}$$

$$y = a_f \cosh\eta \sin\theta \sin\psi \tag{3.292b}$$

$$z = a_f \sinh\eta \cos\theta \tag{3.292c}$$

$$\frac{x^2}{a_f^2 \cosh^2\eta} + \frac{y^2}{a_f^2 \cosh^2\eta} + \frac{z^2}{a_f^2 \sinh^2\eta} = 1 \tag{3.292d}$$

(Oblate spheroids, $\eta = \text{const}$)

$$\frac{x^2}{a_f^2 \sin^2\theta} + \frac{y^2}{a_f^2 \sin^2\theta} - \frac{z^2}{a_f^2 \cos^2\theta} = 1 \tag{3.292e}$$

(Hyperboloids of one sheet, $\theta = \text{const}$)

$$\tan\psi = \frac{y}{x} \tag{3.292f}$$

(Half planes, $\psi = \text{const}$)

(b)　長球形圧粉磁芯

$$x = a_f \sinh\eta \sin\theta \cos\psi \tag{3.293a}$$

$$y = a_f \sinh\eta \sin\theta \sin\psi \tag{3.293b}$$

$$z = a_f \cosh\eta \cos\theta \tag{3.293c}$$

$$\frac{x^2}{a_f^2 \sinh^2 \eta} + \frac{y^2}{a_f^2 \sinh^2 \eta} + \frac{z^2}{a_f^2 \cosh^2 \eta} = 1 \tag{3.293d}$$

(Prolate spheroids, $\eta = \text{const}$)

$$\frac{x^2}{a_f^2 \sin^2 \theta} - \frac{y^2}{a_f^2 \sin^2 \theta} + \frac{z^2}{a_f^2 \cos^2 \theta} = 1 \tag{3.293e}$$

(Hyperboloids of one sheet, $\theta = \text{const}$)

$$\tan \psi = \frac{y}{x} \tag{3.293f}$$

(Half planes, $\psi = \text{const}$)

楕円体表面座標は，楕円柱の場合と同様に，$\eta = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), u := \alpha / a_f$ により計算することができる．なお，$e := 1/u$ が離心率となる．本節では η が扁球座標，η_0 が扁球磁性体の表面を規定する座標であり，$\eta = \eta_0$ では $a_f = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ となる．η, η_0 は 3.11 節の球座標系での議論ではそれぞれ r, a に対応する．

Table 3.12 Nomenclature of the spheroidal soft magnetic composite (SMC) as shown in Fig.3.25

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
a_f [m]	focus of a spheroidal SMC	η_f	volume fraction
Ω_{SMC}	SMC region	Ω_{air}	air region
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field	$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential
$\boldsymbol{m}$ [A · m^2]	magnetic moment	$\boldsymbol{M}$ [A/m]	magnetization
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$[\mu]$ [H/m]	permeability of Ω_{SMC} in tensor form
η	coordinate surface of the spheroidal coordinates	η_0	coordinate surface of a spheroidal SMC
θ	hyperboloids of revolution	ψ	half plane
σ [S/m]	conductivity of Ω_{SMC}	N_ξ	diamagnetic constant of the ξ-component
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
j	imaginary unit	$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component
δ [m]	skin depth of the ξ-component (the symbol ξ is omitted for simplicity)	$k = (1 - \mathrm{j})/\delta$ $= \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma}$ [1/m]	wave number of the ξ-component (the symbol ξ is omitted for simplicity)
ζ [−]	$ka = (1 - \mathrm{j})a/\delta$ (wave number in case of spherical SMC (section 3.11))	p_n^m, q_n^m	spheroidal wave functions
P_n^m, Q_n^m	general form of Legendre associate functions	P_1, Q_1	Legendre associate functions
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of isolated SMC	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	homogenized complex permeability

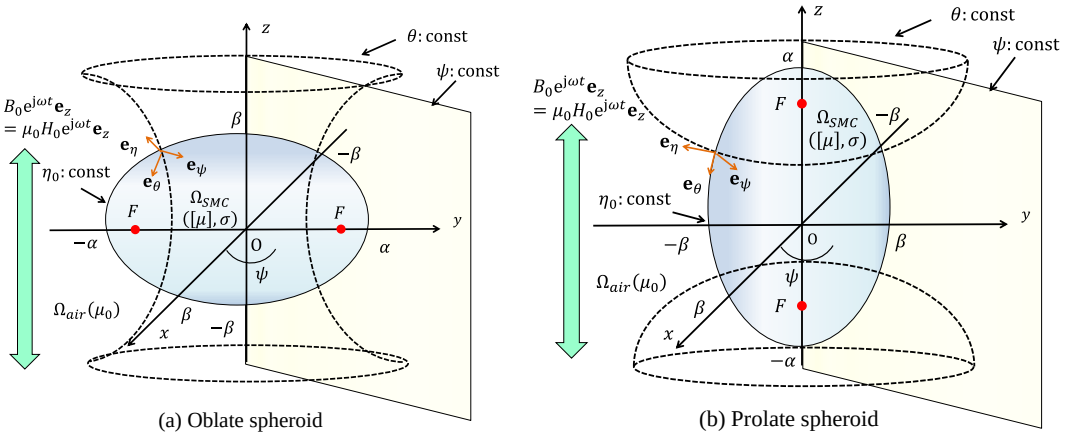


Fig. 3.27 Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$. This shape is obtained by rotating an elliptic cross-section as shown in Fig.3.17 around the x–axis. There are two types of coordinate: oblate (left) and prolate (right).
Anisotropic magnetic property in a SMC core due to the proximity effect can be taken into account in the tensor macroscopic complex permeability as derived later.

3. 12. 1　扁球楕円体内外の磁気ベクトルポテンシャルと磁気双極子

支配方程式は，3.11.1 節と同様に

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - k^2 \boldsymbol{A} = 0 \quad , \quad \text{(inside of magnetic particle)} \qquad (3.245a)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0 \quad , \quad \text{(outside of magnetic particle)} \qquad (3.245b)$$

である．なお，ここでは簡単のため k をスカラーで表記しているが，k の異方性は後に定義する複素引数 ζ^z, ζ^y の中で反映する．まず，磁気ベクトルポテンシャルに課される境界条件を考える．本問題においても磁性扁球の十分遠方では，磁性扁球の反磁界の効果がなくなるため，外部磁界による磁気ベクトルポテンシャルのみが有効であるから，

$$A \to \frac{1}{2} a_f \cosh\eta \, B_0 \sin\theta \, , \quad (\text{as } \eta \to 0) \qquad (3.294)$$

という境界条件を得る．(3.294)の導出には，直交曲線座標系における回転を計算する必要があり，計算が複雑なので，その詳細については Appendix E にて導く．(3.294)は磁性球の場合の

$$A \to \frac{1}{2} r B_0 \sin\theta \quad , \quad (\text{as } r \to \infty) \qquad (3.247)$$

という境界条件と対応する．また，この関係から，球座標の径方向の座標 r と扁平圧粉磁芯の定式化に現れる $a_f \cosh\eta$ が対応するとわかる．(3.294)の詳細な証明，及び(3.294)において真球の極限 $\alpha \to \beta, a_f \to 0$ をとり(3.247)に帰着することの証明は Appendix D で行う．

つぎに，Helmholtz 方程式(3.245a)の一般解を求める．前節では磁性体が真球形であったため $\boldsymbol{A} = A_\varphi(r,\theta)\mathbf{e}_\varphi$ を仮定したが，今回は磁気ベクトルポテンシャルは，η, θ, ψ のすべてに依存すると仮定する，つまり $\boldsymbol{A} = A_\psi(r,\theta,\psi)\mathbf{e}_\psi$ という角度方向によって規定され

るスカラーの磁気ベクトルポテンシャル $A \equiv A_\psi$ を用いて渦電流場を求める．この仮定の下では(3.245)はスカラーラプラシアンを用いて，3.11.1 節の場合と同様に，

$$\nabla^2 A - k^2 A = 0 \quad , \quad (r \le a) \tag{3.246a}$$

$$\nabla^2 A = 0 \quad , \quad (r \ge a) \tag{3.246b}$$

となる．扁球座標系での Laplacian の計算は

$$\nabla^2 A = \frac{1}{a_f^2(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2} + \tanh\eta\frac{\partial A}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{a_f^2\cosh^2\eta\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\psi^2} \tag{3.295}$$

となる(Appendix E を参照)．(3.295)に対して変数分離 $A = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi)$ を行い，各成分毎に整理して得られるつぎの Legendre 陪微分方程式を解くことを考える．

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}\eta^2} + \tanh\eta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} + \left(-k^2 a_f^2\cosh^2\eta - \lambda + \frac{m^2}{\cosh^2\eta}\right)H = 0 \tag{3.296a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left(-k^2 a_f^2\sin^2\theta + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{3.296b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\psi^2} + m^2\Psi = 0 \tag{3.296c}$$

(3.296a, b)を満たす基底関数は，$-1 \le z \le 1$ に関して正則であり，恒等的に 0 ではない解，すなわち扁平回転楕円体波動関数 $\mathscr{p}_n^m(\mathrm{j}ka, \zeta)$ である(ただし，$n \ge m$)[3.30]．一方で，(3.296c)は振動方程式なので，$\sin m\psi$, $\cos m\psi$ が基底関数であるが，本問題において，磁性楕円体内外の磁気ベクトルポテンシャルは角度方向 $\mathbf{e}_\psi$ について反対称性があるから，その極性は $\sin m(\psi+\pi)$, $\cos m(\psi+\pi)$ の符号に依存しないため，$m = 0$ とする．また分離定数 λ は数学的に $\lambda = n(n+1)$ と記述できるから，(3.296)の一般解は

$$H(\eta) = p_\eta \mathscr{p}_n^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right) \tag{3.297a}$$

$$\Theta(\theta) = p_\theta \mathscr{p}_n^0\left(\mathrm{j}ka_f, \cos\theta\right) \tag{3.297b}$$

と記述できる．結局，前節と同様に $\boldsymbol{A}$ の ψ への依存性はないと考えてよいので，以降では $\boldsymbol{A} = A_\psi(r,\theta)\mathbf{e}_\psi$ とする．ここで，p_η, p_θ はそれぞれの成分の定数である．したがって，(3.246a)の解は

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathscr{p}_n^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\mathscr{p}_n^0\left(\mathrm{j}ka_f, \cos\theta\right) \tag{3.298}$$

である．3.11.1 節と同様に，興味があるのは基本波成分であり，さらに，一様交番磁界中に存在する磁性楕円体は μm スケールのサイズなので，$n = 1$ と近似して，

$$A \approx p\mathscr{p}_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\mathscr{p}_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \cos\theta\right) \tag{3.299}$$

である．ここで，p は未定定数である．(3.299)には，径方向，角度方向の扁平回転楕円体波動関数が含まれている．ここで，準定常電磁界の周波数帯域では，引数が $\zeta, z \in \mathbb{C}$ である扁平回転楕円体波動関数はつぎの様に近似できる．

$$\mathscr{p}_p^q(\zeta, z) \approx z \times \left[1 - \frac{z^2}{3!}\{\zeta^2 + p(p+1) - q^2 - 2\} + \frac{z^4}{5!}h(\zeta) + O(z^6)\right] \tag{3.300a}$$

$$h(\zeta) \coloneqq \zeta^4 + 2\zeta^2\{p(p+1) - q^2 - 4\} + p(p+1)\{p(p+1) - 2q^2 - 14\} + q^4 + 20q^2 + 24 \tag{3.300b}$$

と近似できる．渦電流の θ 成分については，$\sin\theta$ への依存性があるので，(3.300a)において，$\zeta = \mathrm{j}ka_f, z = \sin\theta$ を代入した場合に，初項のみで打ち切ると

$$\mathscr{p}_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \sin\theta\right) \approx \sin\theta \tag{3.301}$$

と近似できる．この考え方は，3.9.1 節の楕円柱細線の問題で，角度方向の Mathieu 関数を $\sin\psi, \cos\psi$ と近似したことと同様である．したがって，(3.299)は結局

$$A = p\mathscr{p}_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\sin\theta \tag{3.302}$$

となる．(3.302)は真球の場合の

$$A = pB_0 i_1(kr)\sin\theta \tag{3.254}$$

と対応していることがわかる．なお，真球に極めて近い場合の極限を取ると，(3.302)は(3.254)に一致することを数学的に示すことができる．

つぎに，Laplace 方程式(3.245b)の一般解を求める．(3.296c)の解は不変なので，(3.296a, b)において $k = 0$ とした場合の微分方程式の解を求めることになる．考慮すべき解はつぎの様になる．

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{1n}\mathscr{p}_n^0(\mathrm{j}\sinh\eta) + c_{2n}\mathscr{q}_n^0(\mathrm{j}\sinh\eta)\right)\left(c_{3n}\mathscr{p}_n^0(\cos\theta) + c_{4n}\mathscr{q}_n^0(\cos\theta)\right)$$

$$= \left(c_1\mathscr{p}_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta) + c_2\mathscr{q}_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta)\right)\left(c_3\mathscr{p}_1^0(\cos\theta) + c_4\mathscr{q}_1^0(\cos\theta)\right) \tag{3.303}$$

ここで，q_1, q_2は未定定数である．(3.303)において，$n \geq 2$ の項は除いて表示している．(3.303)は Legendre 陪関数を用いて

$$A = \left(c_1 P_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta) + c_2 Q_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta)\right)\left(c_3 P_1^0(\cos\theta) + c_4 Q_1^0(\cos\theta)\right) \tag{3.304}$$

と表示することができる．

以下では(3.304)を簡単にするために，Legendre 陪関数の公式を用いて(3.304)を変形する．まず，$P_1^0(\cos\theta)$ に関しては

$$P_1^0(\cos\theta) = \sin\theta \tag{3.305a}$$

$$P_1^0(\sin\theta) = \cos\theta \tag{3.305b}$$

である[3.26]. つぎに, $P_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta), Q_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta)$ については, 文献[3.26]において, Legendre 陪多項式に帰着することが示されているから

$$P_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta) = P_1(\mathrm{j}\sinh\eta) \tag{3.306a}$$

$$Q_1^0(\mathrm{j}\sinh\eta) = Q_1(\mathrm{j}\sinh\eta) \tag{3.306b}$$

とする．(3.306a)に Rodrigus の公式

$$P_1(z) = z \tag{3.307a}$$

$$Q_1(z) = zQ_0(z) - 1 = z\frac{1}{\tanh^{-1} z} - 1 = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 \tag{3.307b}$$

を適用すると

$$P_1(\mathrm{j}\sinh\eta) = \mathrm{j}\sinh\eta \tag{3.308a}$$

$$Q_1(\mathrm{j}\sinh\eta) = \frac{\mathrm{j}\sinh\eta}{2}\ln\frac{\mathrm{j}\sinh\eta + 1}{\mathrm{j}\sinh\eta - 1} - 1 \tag{3.308b}$$

となる．(3.308a)の表示は採用しやすいが，(3.308b)の表示は採用しにくい．そこで, Legendre 陪微分に対する積分公式

$$Q_n(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\left(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cosh u\right)^{n+1}} \tag{3.309}$$

を用いる．すると

$$Q_1(\mathrm{j}\sinh\eta) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\left(\mathrm{j}\sinh\eta + (-\sinh^2\eta - 1)^{\frac{1}{2}}\cosh u\right)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(\mathrm{j}\sinh\eta + \mathrm{j}\cosh\eta\cosh u)^2} = -\frac{1}{\cosh^2\eta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(\tanh\eta + \cosh u)^2} \tag{3.310}$$

となる．ここで SMC の粒子サイズは数 μm なので, $\tanh\eta \ll \cosh t$ の関係にあるから,

$$Q_1(\mathrm{j}\sinh\eta) \approx -\frac{1}{\cosh^2\eta}\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}u}{\cosh^2 u}$$

$$= -\frac{1}{\cosh^2\eta}\lim_{\tau\to\infty}[\tanh u]_0^\tau = -\frac{1}{\cosh^2\eta} \tag{3.311}$$

を得る．ゆえに，境界条件(3.294)と，(3.302)と(3.311)から，$\sin\theta$ に依存する扁平磁性球外の磁気ベクトルポテンシャルは

$$A = \left(q_1 P_1^1(\mathrm{j}\sinh\eta) + q_2 Q_1^1(\mathrm{j}\sinh\eta)\right)\sin\theta$$

$$= \left(q_1 \mathrm{j} \cosh\eta - q_2 \frac{1}{\cosh^2\eta} \right) \sin\theta$$

$$= \left(\frac{q}{a_f^2 \cosh^2\eta} + \frac{B_0}{2} a_f \cosh\eta \right) \sin\theta \tag{3.312}$$

と求められる(本問題では A の $\cos\theta$ への依存性はない)．ここで，未定定数の定義に関して，定数の違いは任意であるので， q_1 については(3.294)の境界条件を満足するように決め，および $q := q_2$ については 3.11.1 節で議論した真球の場合の磁気ベクトルポテンシャル

$$A = \left(\frac{q}{r^2} + \frac{B_0}{2} r \right) \sin\theta \tag{3.256}$$

と対応するように調整した．ここで，(3.294)と(3.247)の関係で述べた，r と $a_f \cosh\eta$ の対応から，(3.312)の表示は妥当と思われる．また， q は双極子磁界に関係する未定定数である．

以上(3.302), (3.312) が一様磁界が印加されることを想定した磁性球内外の磁気ベクトルポテンシャルである．つぎに，未定係数の決定を行う．磁性球の表面 $\partial\Omega$ $(\eta = \eta_0)$ では磁束密度の法線成分と磁界の接線成分が連続となるので，(3.302)の A を A_{in}, (3.312)の A を A_{out} とそれぞれ記すと

$$A_{in} = A_{out} \tag{3.313a}$$

$$\frac{1}{\mu^z} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(a_f \cosh\eta \, A_{in} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(a_f \cosh\eta \, A_{out} \right) \tag{3.313b}$$

が成立することが必要十分であるから

$$\begin{bmatrix} \wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) & -\dfrac{1}{a_f^2 \cosh^2\eta_0} \\ \dfrac{\nu^z}{\sinh\eta_0} \dfrac{\partial}{\partial\eta} \left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right) \cosh\eta \right)\Big|_{\eta=\eta_0} & \dfrac{1}{a_f^2 \cosh^2\eta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{B_0}{2} \begin{bmatrix} a_f \cosh\eta_0 \\ 2a_f \cosh\eta_0 \end{bmatrix} \tag{3.314}$$

という連立方程式が導ける．ここで，$\nu^z := \mu_0/\mu^z$ とおいた．また(3.314)は 3.11.1 節で求めた境界条件

$$\begin{bmatrix} j_1(\zeta) & -a^{-2} \\ \nu \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r j_1(kr) \right)\Big|_{r=a} & a^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{B_0}{2} a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.258}$$

と対応する．さらに，(3.314)は磁性扁球が真球に近づく場合，つまり $\alpha \to \beta = a$ の極限で(3.258)に一致する．(3.314)を解くと，

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{B_0 a_f^2 \cosh^2\eta_0}{\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) + \dfrac{\nu^z}{\sinh\eta_0} \dfrac{\partial}{\partial\eta} \left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right) \cosh\eta \right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \times$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_f^2\cosh^2\eta_0} & \dfrac{1}{a_f^2\cosh^2\eta_0} \\ -\dfrac{\nu^z}{\sinh\eta_0}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0} & \wp_1^0(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta_0) \end{bmatrix} \frac{a_f}{2}\begin{bmatrix}\cosh\eta_0 \\ 2\cosh\eta_0\end{bmatrix} \quad (3.315)$$

を得る．(3.315)から磁性扁球内外の磁気ベクトルポテンシャル(3.302), (3.312) が求められるので，$\boldsymbol{H}=\nu\boldsymbol{B}=\nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}$ から扁平磁性楕円体の電磁界が計算できる．

3. 12. 2　扁平圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率

3.11.2 節の形状が真球の場合の議論と同様に，一様磁界中の扁平磁性体には，Fig.3.28 に示すように鎖交磁束を打ち消すような磁界を発生する渦電流が流れる(近接効果)．この渦電流は Fig.3.28 に示すような反磁界を形成する．この反磁性は磁界の印加方向によって異なるが，3.12 節冒頭で述べたように，本節では，扁平磁性体を考えて定式化を行い，磁界の印加方向は $\mathbf{e}_z$ とする．また，方向へ印加される磁界の効果は後に回転波動関数の引数の変更により，長球に対する複素透磁率を求め直すことで，テンソル型複素透磁率を再定義する．

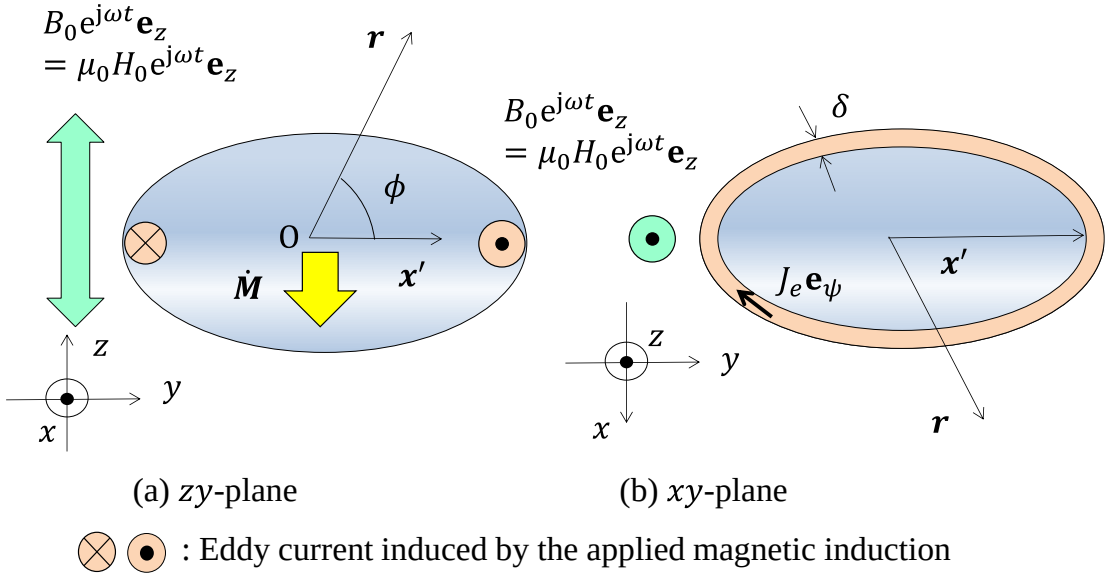


Fig.3.28 Diamagnetic field in an oblate SMC caused by the proximity effect.
In this figure, $\boldsymbol{x}'$ and $\boldsymbol{r}$ denote the eddy current as a source of the magnetic dipole field and the observation point, respectively.

いま，渦電流 $\boldsymbol{J}_e=J_e\mathbf{e}_\psi$ は Fig.3.28(b)のように，外部磁界による渦電流により磁性体表面近傍にループ状に流れる．すなわち磁性球内に生じる渦電流はソレノイダル界である．本問題でも 3.11.2 節と同様に，渦電流の双極子磁界 $\boldsymbol{A}$ は Poisson 方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}_e \quad (3.262)$$

に支配される．(3.262)の解は真球の場合は，解析的に

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^2}\sin\theta \quad (3.285)$$

と求められたが，扁平楕円体座標の場合には解析的に求めることは難しい．そこで，前節で述べた，r と $a_f \cosh\eta$ の対応から，

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_z}{a_f^2 \cosh^2\eta} \tag{3.316}$$

と近似する．(3.316)と(3.312)の右辺第 1 項は一致するので

$$B_0 \frac{q}{a_f^2 \cosh^2\eta}\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_z}{a_f^2 \cosh^2\eta}\sin\theta \tag{3.317}$$

が成立する．これより，磁気双極子は

$$m_z = \frac{4\pi B_0}{\mu_0} q$$

$$= \frac{2\pi B_0}{\mu_0} a_f^3 \cosh^3\eta_0 \frac{2\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) - \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}{\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) + \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.318}$$

と求められる．今の場合，磁化ベクトルの $\mathbf{e}_z$ 成分 M_z は

$$M_z = \frac{3a_f^3 \cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{2\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) - \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}{\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) + \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.319}$$

となる．(3.319)において，

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}$$

$$= \cosh\eta_0 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} + \sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka, \mathrm{j}\sinh\eta_0) \tag{3.320a}$$

$$2\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) - \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}$$

$$= 2\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0)$$

$$-\nu^z\left\{\cosh\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} + \sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right\}$$

$$= \sinh\eta_0\,(2-\nu^z)\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) - \nu^z \cosh\eta_0 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} \tag{3.320b}$$

$$\sinh\eta_0\, \mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) + \nu^z \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\cosh\eta\right)\Big|_{\eta=\eta_0}$$

$$= \sinh\eta_0\, \wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) + \nu^z\left\{\cosh\eta_0 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} + \sinh\eta_0\, \wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right)\right\}$$

$$= \sinh\eta_0\,(1+\nu^z)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) + \nu^z\cosh\eta_0 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} \quad (3.320c)$$

であるから

$$M_z = \frac{3a_f^3\cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\tanh\eta_0\,(2\mu_r^z-1)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}{\tanh\eta_0\,(\mu_r^z+1)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \quad (3.321)$$

を得る．さて，前節までの議論を踏襲し，複素透磁率を磁化ベクトルから定義するために，(3.321)の静磁界の極限($\omega \to 0$)をとることを考える．まず，回転波動関数の展開公式(3.300a)において $\omega \to 0$ の極限をとると

$$\wp_1^0(0, \mathrm{j}\sinh\eta) \to \mathrm{j}\sinh\eta \quad (3.322)$$

なので,

$$M_z \to \frac{3a_f^3\cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\tanh\eta_0\,(2\mu_r^z-1)\mathrm{j}\sinh\eta_0 - \frac{\partial}{\partial\eta}(\mathrm{j}\sinh\eta)\Big|_{\eta=\eta_0}}{\tanh\eta_0\,(\mu_r^z+1)\mathrm{j}\sinh\eta_0 + \frac{\partial}{\partial\eta}(\mathrm{j}\sinh\eta)\Big|_{\eta=\eta_0}} = \frac{3a_f^3\cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\tanh^2\eta_0\,(2\mu_r^z-1)-1}{\tanh^2\eta_0\,(\mu_r^z+1)+1} \quad (3.323)$$

を得る．さて，(3.323)において形状が球に近づく極限 $a_f\cosh\eta_0 \to a, \tanh\eta_0 \to 1$ をとると

$$M_z \to \frac{3a^3}{2a^3}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{(2\mu_r^z-1)-1}{(\mu_r^z+1)+1} = 3\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_r^z-1}{\mu_r^z+2} \quad (3.324)$$

となり(3.287)，すなわち一様磁界中の磁性球の磁化(反磁界係数が 1/3 の場合)に一致することがわかる(Appendix C).

ゆえに，3.11.2 節同様に，任意の周波数で(3.321)が(3.323)の形に書けるように扁平圧粉磁芯の短軸 $\mathbf{e}_z$ 方向に対する複素透磁率 $\dot{\mu}_r^z$ を定義すると

$$\frac{3a_f^3\cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\tanh\eta_0\,(2\mu_r^z-1)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}{\tanh\eta_0\,(\mu_r^z+1)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} = \frac{3a_f^3\cosh^3\eta_0}{2\alpha\beta^2}\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\tanh^2\eta_0\,(2\dot{\mu}_r^z-1)-1}{\tanh^2\eta_0\,(\dot{\mu}_r^z+1)+1} \quad (3.325)$$

が成立するから

$$\dot{\mu}_r^z = \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0)}{\tanh^2\eta_0\,\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) + \tanh\eta_0 \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.326}$$

を得る．なお(3.326)は静磁界の極限($\omega \to 0$)では

$$\dot{\mu}_r^z \to \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\cdot \mathrm{j}\sinh\eta_0}{\tanh^2\eta_0 \cdot \mathrm{j}\sinh\eta_0 + \tanh\eta_0 \cdot \mathrm{j}\cosh\eta_0} = \mu_r^z \frac{\tanh^2\eta_0 + 1}{\tanh^2\eta_0 + 1} = \mu_r^z \tag{3.327}$$

となり，扁平磁性体の元々の比透磁率に帰着する．

したがって，(3.326)が求めるべき複素透磁率であるといえる．しかし，第 4 章で述べるように，低周波でも $\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)$ は数値不安定性の強い関数である．そこで，$\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)$ を前節で用いた球 Bessel 関数 $j_n(z)$ を基底関数として展開する方法を用いる．これは，つぎの数学公式

$$\mathcal{P}_n^m(c,\xi) = \frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c)\dfrac{(2m+r)!}{r!}} \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r+m-n} d_r^{mn}(c) \frac{(2m+r)!}{r!} j_{m+r}(c\xi) \tag{3.328}$$

によって与えられる[3.30]．(3.328)に今回の双極子磁界に対応する $n=1, m=0$ を代入し，双極子磁界に無関係な項の係数 $d_r^{01}(c), r \neq 1$ を 0 として

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1^0(c,\xi) &\approx \frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{01}(c)} \sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_r(c\xi) \\ &= \frac{1}{\sum_{r=1}^{1} d_r^{01}(c)} \sum_{r=1}^{1} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_1(c\xi) = \frac{1}{d_1^{01}(c)} d_1^{01}(c) j_1(c\xi) = j_1(c\xi)\end{aligned} \tag{3.329}$$

となる．ここで(3.329)に $c = \mathrm{j}ka_f, \xi = \mathrm{j}\sinh\eta$ を代入すると

$$\mathcal{P}_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta) = j_1(-ka_f\sinh\eta) \tag{3.330}$$

を得る．したがって，(3.326)は球 Bessel 関数を用いると

$$\dot{\mu}_r^z = \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1) j_1(-ka_f\sinh\eta_0)}{\tanh^2\eta_0\, j_1(-ka_f\sinh\eta_0) + \tanh\eta_0 \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(j_1(-ka_f\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.331}$$

と表記できる．ここで，

$$\zeta^z \coloneqq -ka_f\sinh\eta_0\,, \tilde{\zeta}^z \coloneqq -ka_f\sinh\eta \tag{3.332}$$

とおくと，合成関数の連鎖則から，

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(j_1(-ka_f\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^z}\frac{\partial\tilde{\zeta}^z}{\partial\eta} j_1(\tilde{\zeta}^z)\Big|_{\eta=\eta_0} = -ka_f\cosh\eta_0 \frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^z} j_1(\tilde{\zeta}^z)\Big|_{\eta=\eta_0} \tag{3.333}$$

なので

$$\dot{\mu}_r^z = \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0+1)j_1(\zeta^z)}{\tanh^2\eta_0\, j_1(\zeta^z) - \tanh\eta_0\, ka_f \cosh\eta_0 \dfrac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^z} j_1\left(\tilde{\zeta}^z\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}$$

$$= \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0+1)j_1(\zeta^z)}{\tanh^2\eta_0\, j_1(\zeta^z) + \zeta^z \dfrac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^z} j_1\left(\tilde{\zeta}^z\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.334}$$

を得る．(3.334)が扁平圧粉磁芯の短軸に関する複素透磁率である．

つぎに，(3.334)の表示では，球 Bessel 関数を用いているが，3.11.2 節で定義した球磁性体の場合の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{SMC} = 2\mu_r \frac{1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}-1} \tag{3.288}$$

のように複素正接関数を用いて改めることを考える．球 Bessel 関数の定義と微分の計算

$$j_1(\zeta^z) = \frac{1}{k^2a_f^2\cosh^2\eta_0}\left(\sin(\zeta^z) - ka_f\cosh\eta_0\cos(\zeta^z)\right) \tag{3.335a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^z} j_1\left(\tilde{\zeta}^z\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = \left(\frac{1}{ka_f\cosh\eta_0} - \frac{2}{k^3a_f^3\cosh^3\eta_0}\right)\sin(\zeta^z) - 2\frac{\cos(\zeta^z)}{k^2a_f^2\cosh^2\eta_0} \tag{3.335b}$$

を(3.334)に代入すると，

$$\dot{\mu}_r^z = \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0+1)\dfrac{1}{(\zeta^z)^2}(\sin\zeta^z - \zeta^z\cos\zeta^z)}{\tanh^2\eta_0\dfrac{1}{(\zeta^z)^2}(\sin\zeta^z - \zeta^z\cos\zeta^z) + \zeta^z\left\{\left(\dfrac{1}{\zeta^z} - \dfrac{2}{(\zeta^z)^3}\right)\sin(\zeta^z) + 2\dfrac{\cos(\zeta^z)}{(\zeta^z)^2}\right\}}$$

$$= \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0+1)(\tan\zeta^z - \zeta^z)}{\tanh^2\eta_0\,(\tan\zeta^z - \zeta^z) + \{((\zeta^z)^2-2)\tan\zeta^z + 2\zeta^z\}}$$

$$= \mu_r^z \frac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta^z}{\zeta^z}\right)}{\left((2-(\zeta^z)^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^z}{\zeta^z} - (2-\tanh^2\eta_0)} \tag{3.336}$$

となる．(3.336)は，(3.288)に類似した形となっている．また(3.336)において形状が球に近づく極限 $\zeta^z \to ka = \zeta, \tanh\eta_0 \to 1$ をとると

$$\dot{\mu}_r^z \to \mu_r^z \frac{(1+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}\right)}{\left((2-\zeta^2)-1\right)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - (2-1)} = 2\mu_r^z \frac{1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}-1} \tag{3.337}$$

となるため，真球形の圧粉磁芯の複素透磁率に一致することもわかる．したがって，(3.337)は楕円体圧粉磁芯の短軸に対する透磁率であると言える．なお，Fig.3.25 から明らかに $\dot{\mu}_r^y = \dot{\mu}_r^z$ となるが，静磁気特性が異なる場合， k は磁界の印加方向毎に異なる．

つぎに，長軸，すなわち Fig.3.26(b)の $\mathbf{e}_y$ 軸方向の複素透磁率を求める．長球に関する Helmholtz, Laplace 方程式を解き, 定義することもできるが, 本節では簡単のため, (3.334)から定義することを考える．数学公式によると，長球座標系と扁球座標系の一般解は，回転波動関数 $\wp_n^m$ の引数の違いのみの差であることが知られている[3.26]. 扁球座標系における $\wp_n^m$ の引数 $\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0$ を，長球座標系では $ka_f, \cosh\eta_0$ と読み替えて，扁球座標系の議論と全く同様の手続きで定義した複素透磁率は(3.326)において回転波動関数 $\wp_n^m$ の引数の読み替えにより，$\tanh\eta_0$ の部分が $1/\tanh\eta_0$ に対応することに注意すると

$$\dot{\mu}_r^y = \mu_r^y \frac{\left(\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1\right)\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)}{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)+\frac{1}{\tanh\eta_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{3.338}$$

を得る．なお(3.338)は静磁界の極限($\omega \to 0$)では

$$\dot{\mu}_r^y \to \mu_r^y \frac{\left(\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1\right)\cdot\cosh\eta_0}{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}\cdot\cosh\eta_0+\frac{1}{\tanh\eta_0}\cdot\sinh\eta_0} = \mu_r^y \frac{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1}{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1} = \mu_r^y \tag{3.339}$$

となり，扁平磁性楕円体の元々の比透磁率に帰着する．また，(3.339)の極限を取る過程において，(3.327)と比較すると $\tanh\eta_0$ の部分が $1/\tanh\eta_0$ に対応しているとわかる．

(3.334)と同じように，(3.339)を球 Bessel 関数を用いて表すことを考える．(3.329)に $c = ka_f, \xi = \cosh\eta_0$ を代入すると

$$\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right) = j_1\left(ka_f\cosh\eta_0\right) \tag{3.340}$$

を得る．ここで，(3.340)の球 Bessel 関数の引数を

$$\zeta^y \coloneqq ka_f\cosh\eta_0, \tilde{\zeta}^y \coloneqq ka_f\cosh\eta \tag{3.341}$$

とおくと，合成関数の連鎖則から，

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^y}j_1\left(\tilde{\zeta}^y\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^y}\frac{\partial\tilde{\zeta}^y}{\partial\eta}j_1\left(\tilde{\zeta}^y\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = ka_f\sinh\eta_0\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^y}j_1\left(\tilde{\zeta}^y\right)\Big|_{\eta=\eta_0} \tag{3.342}$$

なので

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_r^y &= \mu_r^y \frac{\left(\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1\right)\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)}{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)+\frac{1}{\tanh\eta_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \\ &= \mu_r^y \frac{(\tanh^2\eta_0+1)j_1(\zeta^y)}{j_1(\zeta^y)+\tanh\eta_0\sinh\eta_0\,ka_f\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^y}j_1\left(\tilde{\zeta}^y\right)\Big|_{\eta=\eta_0}}\end{aligned} \tag{3.343}$$

を得る．(3.343)が楕円体圧粉磁芯の長軸に関する複素透磁率である．

つぎに，(3.343)の表示では，球 Bessel 関数を用いているが，3.11.2 節で定義した球形磁性体の場合の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{SMC} = 2\mu_r \frac{1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}-1} \tag{3.288}$$

ように三角関数を用いて改めることを考える．球 Bessel 関数の定義と微分の計算

$$j_1(\zeta^y) = \frac{1}{k^2 a_f^2 \sinh^2\eta_0}\left(\sin(\zeta^y) + k a_f \sinh\eta_0 \cos(\zeta^y)\right) \tag{3.344a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}^y} j_1\left(\tilde{\zeta}^y\right)\Big|_{\eta=\eta_0} = \left(-\frac{1}{k a_f \sinh\eta_0} + \frac{2}{k^3 a_f^3 \sinh^3\eta_0}\right)\sin(\zeta^y) + 2\frac{\cos(\zeta^y)}{k^2 a_f^2 \sinh^2\eta_0} \tag{3.344b}$$

を(3.343)に代入すると，

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_r^y &= \mu_r^y \frac{(\tanh^2\eta_0+1)\dfrac{1}{(\zeta^y)^2}(\sin\zeta^y - \zeta^y\cos\zeta^y)}{\dfrac{1}{(\zeta^y)^2}(\sin\zeta^y - \zeta^y\cos\zeta^y) + \tanh^2\eta_0\,\zeta^y\left\{\left(\dfrac{1}{\zeta^y}-\dfrac{2}{(\zeta^y)^3}\right)\sin(\zeta^y) + 2\dfrac{\cos(\zeta^y)}{(\zeta^y)^2}\right\}} \\ &= \mu_r^y \frac{(\tanh^2\eta_0+1)(\tan\zeta^y - \zeta^y)}{\{1+\tanh^2\eta_0\,((\zeta^y)^2-2)\}\tan\zeta^y + (2\tanh^2\eta_0 - 1)\zeta^y} \\ &= \mu_r^y \frac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta^y}{\zeta^y}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2-(\zeta^y)^2)-1\}\dfrac{\tan\zeta^y}{\zeta^y} - (2\tanh^2\eta_0 - 1)}\end{aligned} \tag{3.345}$$

となる．(3.345)は，(3.288)に類似した形となっている．また(3.345)において形状が球に近づく極限 $\zeta^y \to ka = \zeta, \tanh\eta_0 \to 1$ をとると

$$\dot{\mu}_r^y \to \mu_r^y \frac{(1+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}\right)}{\{1\cdot(2-\zeta^2)-1\}\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - (2\cdot 1 - 1)} = 2\mu_r^y \frac{1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}-1} \tag{3.346}$$

となるため，真球形の圧粉磁芯の複素透磁率に帰着することもわかる(Appendix D).

以上から，Fig.3.27 の楕円体圧粉磁芯に対するテンソル型複素透磁率は，長軸方向を α 軸，短軸方向を β 軸と改めて記すと，(a) 扁球座標系では

$$[\dot{\mu}_r^{SMC}] = \begin{bmatrix}\dot{\mu}_r^\beta & 0 & 0\\ 0 & \dot{\mu}_r^\alpha & 0\\ 0 & 0 & \dot{\mu}_r^\beta\end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left[\dot{\mu}_r^\beta, \dot{\mu}_r^\alpha, \dot{\mu}_r^\beta\right] \tag{3.347}$$

と定義できる. ここで, Fig.3.27(a)の座標系の定義では $\dot{\mu}_r^x = \dot{\mu}_r^z$ であり，$\dot{\mu}_r^\alpha$ は(3.345)に，$\dot{\mu}_r^\beta$ は(3.336)にそれぞれ相当する．一方で Fig.3.27(b)の座標系の定義では y と z の役割を変えて $[\dot{\mu}_r^{SMC}] = \mathrm{diag}\left[\dot{\mu}_r^\beta, \dot{\mu}_r^\beta, \dot{\mu}_r^\alpha\right]$ を得る．なお，静磁気特性が異なる場合，k は磁界の印加方向毎に異なることに注意する．

3. 12. 3　SMC コアのマクロ複素透磁率

3.11.2 節で求めた(3.347)は磁性粒子単体のテンソル型複素透磁率である. 実際の SMC コアは, Fig.3.29 に示すように, 磁性粒子のサイズも磁界に対する角度もランダムであるので, 確率的な考察が必要となる. しかし, 一様に磁性粒子がプレスされている状況を考え, 局所的には概ね等しい磁性を有していると仮定すると, Ollendorff の式

$$\left\langle \dot{\mu}_r^{\xi} \right\rangle = 1 + \frac{\eta_f \left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1 \right)}{1 + N_{\xi}(1 - v_f)\left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1 \right)}, \xi = x, y, z \tag{3.347a}$$

に代入するとテンソル型マクロ複素透磁率が求められる. 反磁界の異方性は

$$N_y = N_\alpha = \frac{1 - e^2}{2e^3}\left(\log\frac{1+e}{1-e} - 2e \right) = \frac{1}{k^2 - 1}\left\{ \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \log\left(k + \sqrt{k^2 - 1} \right) - 1 \right\} \tag{3.347b}$$

$$N_z = N_x = N_\beta = \frac{1}{2}(1 - N_\alpha) \tag{3.347c}$$

から求めることができる[3.31-33]. ここで, $e \coloneqq \sqrt{1 - \beta^2/\alpha^2}$, $k \coloneqq \alpha/\beta$ とおいた. (3.347b, c)については, Appendix C で導く. このようにして求められたマクロ複素透磁率 $[\langle \dot{\mu}_r^{SMC} \rangle]$ は, 各磁性粒子が磁気的に孤立し, 磁性粒子が一様にプレスされている状況を仮定しているため, 厳密には, Fig.3.29 の状況に適合しない. より正確な SMC コアのモデル化のためには, 各磁性粒子内部の磁化ベクトルが空間的に分布している状況, 及び電磁気的接触に関する考察が必要である. 本論文においては, 磁気的接触の取り扱いについては第 6 章にて述べる.

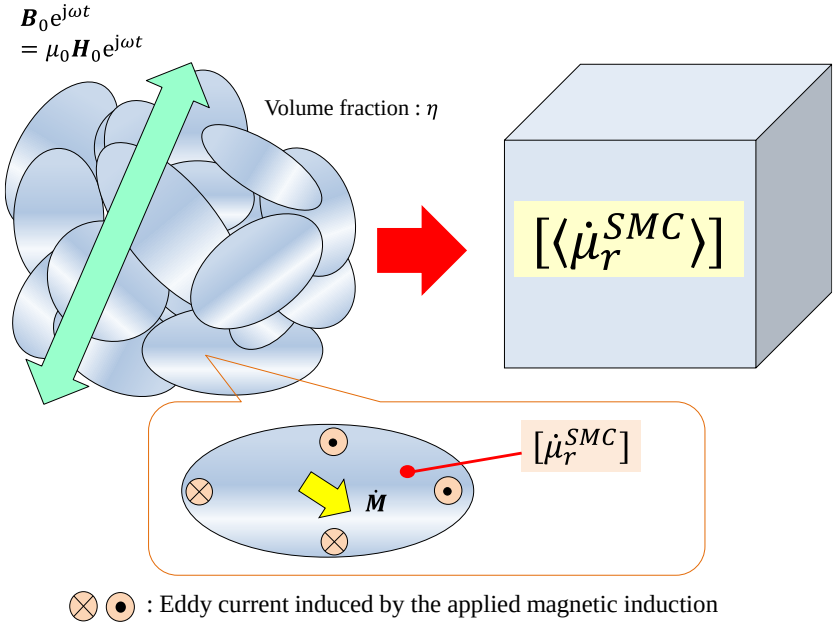
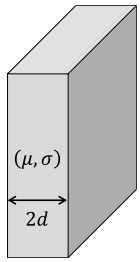
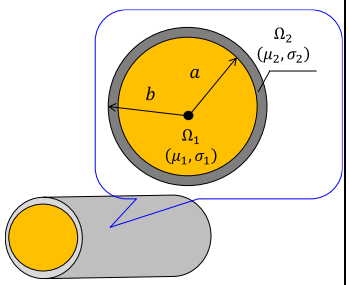


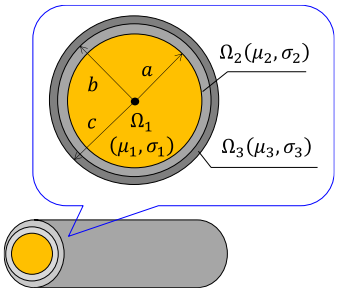
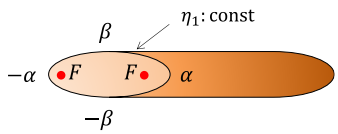
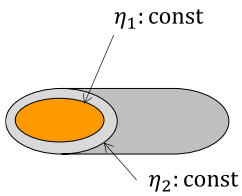
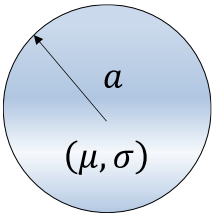
Fig. 3.29 Homogenization of a SMC core composed of assembled spheroidal magnetic particles with the tensor macroscopic complex permeability.
In this model, a SMC core which is compoused of assembled spheroidal magnetic particles has the anisotropic magnetic property which is represented by the permeability tensor $[\langle \dot{\mu}_r^{SMC} \rangle]$. Strictly speaking, distribution of the magnetization and electromagnetic contacts among the particles have to be considered.

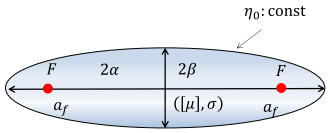
3. 13　複素透磁率一覧

本節では，本章にて定義した周波数領域での磁性体の反磁性を表すための複素透磁界率を Table 3.13 にまとめる．なお，以下では特に断らない限り，$k = (1 - \mathrm{j})/\delta$ は波数，δ は表皮厚を表すとする．また，楕円柱，楕円体の場合では 3.9 節-12 節の座標系の定義から，長軸方向を α，短軸方向を β と改めている．

Table 3.13 Complex permeability for each shape defined in the closed form

Shape of magnetic material	Argument ζ	Complex permeability $\dot{\mu}_r$	Demagnetizing factor
slab 	$\frac{kd}{2} = \frac{d}{\delta}(1 - \mathrm{j})$	$\mu_2 \frac{\tan\zeta}{\zeta}$ (3.24)	$N \approx 0$
cylinder 	$ka = \frac{a}{\delta}(1 - \mathrm{j})$	$\mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \frac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1}$ (3.51)	$N = \frac{1}{2}$
Magnetically shielded wire (MSW) 	$k_1 a = \frac{a}{\delta_1}(1 - \mathrm{j})$ $\frac{k_2 d}{2} = \frac{d}{2\delta_2}(1 - \mathrm{j})$	$\frac{1 + \Psi_2(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}{1 - \Psi_2(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}$ (3.113a − d)	$N = \frac{1}{2}$

Multi-layered MSW 	$k_1 a = \frac{a}{\delta_1}(1-\mathrm{j})$ $k_2 \frac{(b-a)}{2} = \frac{(b-a)}{2\delta_2}(1-\mathrm{j})$ $k_3 \frac{(c-b)}{2} = \frac{(c-b)}{2\delta_3}(1-\mathrm{j})$	$\frac{1+\Psi_3(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab})}{1-\Psi_3(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab})}$ $(3.184\mathrm{a}-\mathrm{e})$	$N = \frac{1}{2}$
elliptic-cylinder 	$q = \frac{k^2 a_f^2}{4}$	along to the long axis α $\cdots$ (3.215a) $\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}$ along to the short axis β $\cdots$ (3.215b) $\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}$	$N_x = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ $N_y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
MSW with elliptic cross-section shield thickness: d 	$q = \frac{k^2 a_f^2}{4}$ $\frac{k_2 d}{2} = \frac{d}{2\delta_2}(1-\mathrm{j})$	along to the long axis α $\cdots$ (3.232a), (3.231a) $\dot{\mu}_r^{\alpha} = \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{1+\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_{\alpha}}{1-\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_{\alpha}}$ along to the short axis β $\cdots$ (3.232b), (3.231b) $\dot{\mu}_r^{\beta} = \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{1+\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{\gamma}_{\beta}}{1-\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{\gamma}_{\beta}}$	$N_x = \frac{\beta+d}{(\alpha+d)+(\beta+d)}$ $N_y = \frac{\alpha+d}{(\alpha+d)+(\beta+d)}$
Spherical SMC 	$ka = \frac{a}{\delta}(1-\mathrm{j})$	$2\mu_r \frac{1-\frac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\frac{\tan\zeta}{\zeta}-1}$ (3.288)	$N = \frac{1}{3}$

Spheroidal SMC  	$\zeta^\alpha =$ $ka_f \cosh\eta_0$ $\zeta^\beta =$ $-ka_f \sinh\eta_0$	along to the long axis α … (3.336) $\mu_r^\alpha \dfrac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2-(\zeta^\alpha)^2)-1\}\dfrac{\tan\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha}-(2\tanh^2\eta_0-1)}$ along to the short axis β … (3.345) $\mu_r^\beta \dfrac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\dfrac{\tan\zeta^\beta}{\zeta^\beta}\right)}{\left((2-(\zeta^\beta)^2)-\tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^\beta}{\zeta^\beta}-(2-\tanh^2\eta_0)}$ ※Demagnetizing factor : (3.347)

以上が磁性体単体に対するテンソル型複素透磁率である(等方性媒質の場合も含む). 上記の磁性体が充填率 η_f で領域内に存在する場合，周波数領域に拡張した Ollendorff の式の比透磁率として用いることで，3.12.3 節に述べたように， $\mathbf{e}_\xi$ 成分に印加された磁界に対するマクロ複素透磁率

$$\left\langle \dot{\mu}_r^\xi \right\rangle = 1 + \frac{\eta_f\left(\dot{\mu}_r^\xi - 1\right)}{1 + N_\xi\left(1-v_f\right)\left(\dot{\mu}_r^\xi - 1\right)}, \xi = x, y, z \tag{3.347a}$$

を得る. (3.347a)から局所座標系で定義されたマクロ複素透磁率を解析的に得られるが，3 次元解析においては，全体座標系との整合を取るために，座標変換行列が必要になることがある．これに関しては次節に述べる.

3. 14　局所座標系と全体座標系の複素透磁率の関係

前節で述べたように，本章で定義した複素透磁率は，局所座標系で定義される場合があった. 例えば，円筒形の細線の複素透磁率は円筒座標系 (r, θ, z) で定義されている．そのため，Fig.3.28 に示すような 3 次元空間 (x, y, z) 上の解析モデルで，テンソル型複素透磁率を 3 次元空間の有限要素解析で適用するためには，適切な座標変換を行う必要がある. 本節では，例としてコイルのマクロ複素透磁率の座標変換を考える．ここで，Fig.3.28 中の ξ_k は局所座標を表す．このような座標変換には，座標変換行列を用いる方法と，基底ベクトルを変換する方法の 2 通りの方法がある[3.34]．3.14.1 節では，前者を，3.14.2 節では後者を示す．また，3.14.3 節では，ツイストされた素線に対するテンソル型マクロ複素透磁率を 3 次元的に求める方法を示す[3.35].

3. 14. 1　3 次元空間中のコイルのテンソル型マクロ複素磁気抵抗率

コイルに印加される磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を，コイル素線に平行な方向 $\mathbf{e}_t$ と垂直な方向 $\mathbf{e}_{n_1}, \mathbf{e}_{n_2}$ に分解する．いまの場合，座標系は $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\mathbf{e}_{n_1}, \mathbf{e}_{n_2}, \mathbf{e}_t\right)$ となる．この設定で $\boldsymbol{B}$ をつぎの 2 通りで表す.

$$\boldsymbol{B} = B_{n_1}\mathbf{e}_{n_1} + B_{n_2}\mathbf{e}_{n_2} + B_t\mathbf{e}_t \tag{3.348a}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z \tag{3.348b}$$

(3.348a)は局所座標系$(\mathbf{e}_{n_1}, \mathbf{e}_{n_2}, \mathbf{e}_t)$で求めた磁束密度，(3.348b)は全体座標系$(x, y, z)$で求めた磁束密度である．これらが一致するとき，

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} B_{n_1} \\ B_{n_2} \\ B_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{n_1} \\ B_{n_2} \\ B_t \end{bmatrix} \tag{3.349}$$

である．ここで，T は座標変換行列である．Fig.3.30 の座標系では $\mathbf{e}_{n_2} = \mathbf{e}_y$ なので，

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_{n_1} & \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_{n_2} & \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_{n_1}|\cos\phi & |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_y|\cos 90^\circ & |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_t|\sin\phi \\ |\mathbf{e}_y||\mathbf{e}_{n_1}|\cos 90^\circ & |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_y|\cos 0^\circ & |\mathbf{e}_y||\mathbf{e}_t|\cos 90^\circ \\ -|\mathbf{e}_z||\mathbf{e}_{n_1}|\sin\phi & |\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_y|\cos 90^\circ & |\mathbf{e}_z||\mathbf{e}_t|\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{3.350}$$

と求めることができる．

有限要素解析の際には，例えば静磁界解析では，コイル領域の有限要素内で，素線の長手方向，すなわち Fig.3.8 に示した局所座標系では $\mathbf{e}_z$ に相当する方向の磁界の変化が十分に弱いと仮定できる場合，有限要素方程式を作成する際には，マクロ複素磁気抵抗 $\langle\dot{\nu}(\omega)\rangle$ を用いて均質化されたコイル領域の 1 要素についての部分係数行列は

$$\mathrm{K}\{a\} = \{j\} \tag{3.351a}$$

$$k_{ij} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{T}^t[\langle\dot{\nu}(\omega)\rangle]_{\{\mathbf{e}_\xi\}}\mathrm{T}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_j\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.351b}$$

$$[\langle\dot{\nu}(\omega)\rangle]_{\{\mathbf{e}_\xi\}} = \mathrm{diag}[\dot{\nu}^{\mathbf{e}_{\xi_1}}, \dot{\nu}^{\mathbf{e}_{\xi_2}}, \nu_0] \tag{3.351c}$$

$$\{a\} = [A_1, \cdots, A_6] \tag{3.351d}$$

$$\{j\} = \int_\Omega \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.351e}$$

とすればよい．

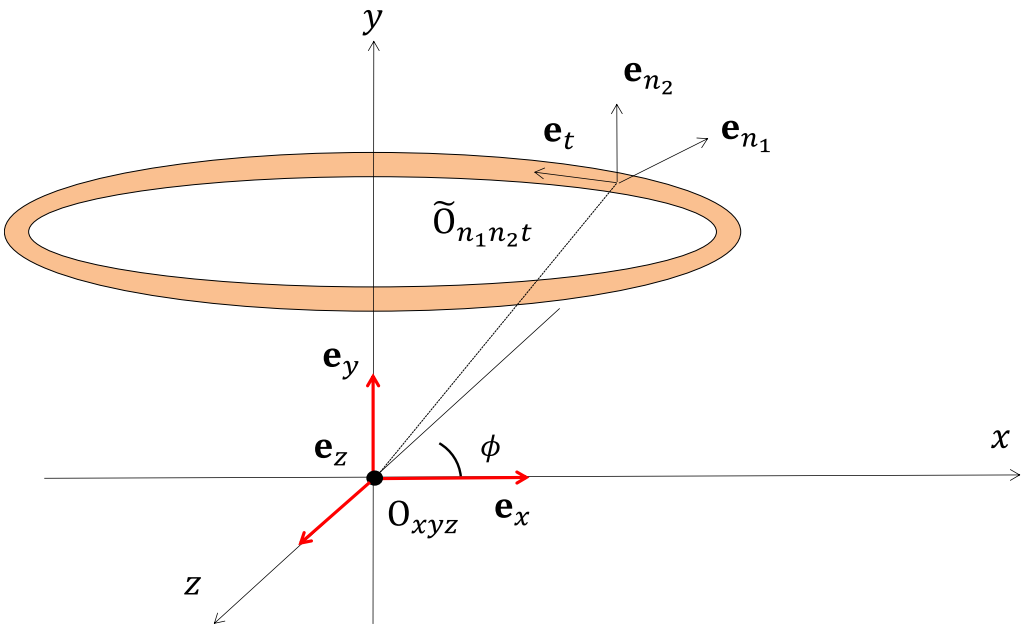


Fig. 3.30 Local coordinates for a wire conductor $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\mathbf{e}_{n_1}, \mathbf{e}_{n_2}, \mathbf{e}_t)$.
When we perform the homogenization-based FEM for a bundle of wire conductors using the macroscopic complex permeability defined in local coordinates, we have to conduct coordinate transformation for using this permeability in the Cartesian coordinates.

3. 14. 2　基底ベクトルの変換による有限要素行列の変更

一般的に，有限要素行列

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot [\nu]\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega \tag{3.352}$$

において，磁気抵抗率が局所座標系で成立する関数で記述される場合，例えば円柱形導体の複素透磁率(3.51)の場合は，(3.352)のように直接ベクトル補間関数と磁気抵抗テンソルの内積を取ることができない．そこで，(3.352)のような表示を行っても無矛盾に計算が可能であるようにする必要があるため，基底の変換を行う．いま，局所座標系における基底ベクトル $\hat{\mathbf{e}}_k = \{\hat{\mathbf{e}}_{\xi_1}, \hat{\mathbf{e}}_{\xi_2}, \hat{\mathbf{e}}_{\xi_3}\}$ を用いると，(x, y, z)座標での回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i$ はつぎのように表示できる．

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i = \sum_k a_k^i \hat{\mathbf{e}}_k \tag{3.353}$$

ここで，$\hat{\mathbf{e}}_k$ は座標系(x, y, z)の基底ベクトル $\mathbf{e}_l = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ によってつぎのように表示できる．

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \sum_k t_{kl} \mathbf{e}_l \tag{3.354}$$

ただし，

$$t_{kl} = \mathbf{e}_l \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \tag{3.355}$$

を満足する必要がある．(3.355)を(3.354)に代入すると，

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i = \sum_k a_k^i t_{kl} \boldsymbol{e}_l = [\mathrm{T}]^t \boldsymbol{a}_i \tag{3.356}$$

となる．ここで，変換行列 T は第 k 行 l 列目の要素が(3.355)の t_{kl} である行列である．また $\boldsymbol{a}_i$ は $\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i$ を (r,s,t) 座標で表示した成分からなる縦ベクトルである．(3.356)から

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j = \sum_k a_k^i t_{kl} \boldsymbol{e}_l = [\mathrm{T}]^t \boldsymbol{a}_j \tag{3.357}$$

であるので，(3.352)は結局

$$k_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{a}_i^t [\mathrm{T}][\nu][\mathrm{T}]^t \boldsymbol{a}_j \, \mathrm{d}S \tag{3.358}$$

となる．以上の変換は一般の局所座標系に関して成立する座標変換手順であるが，磁気抵抗率の変換以外にも，例えば座標系が異なる電磁界の内積を計算する場合にも応用できる．例として楕円座標系での電磁界の計算について Appendix E に示した．

3. 14. 3　Litz 線の 3 次元構造を考慮した座標変換行列

本節では，円筒形細線を撚り合わせて作られる Litz 線モデルの解析を行う．Litz 線の 3 次元構造から影響を受けるのは，近接効果に起因する渦電流である．表皮効果については第 3.6 節で議論したように, $\cos\theta$ に依存しないので, 巻き方に依存しないであろう．本節では, ねじれた円筒導体に外部磁界が印加した場合に流れる渦電流を考慮するため，平行導体に対する複素透磁率を座標変換することで，テンソル型マクロ複素透磁率を得ることを考える．座標変換行列を求めるためには，3.2 節 Ollendorff の式の導出における局所磁界を修正すればよい．なお, 本来では循環電流の効果を考慮すべきであり, Litz 線に印加される磁界は部位により異なることを考慮すべきであるが，ここでは，これらの効果が無視できる簡易モデルを考え，一様磁界中でのテンソル型マクロ複素透磁率を解析的に求める．

考察モデルとして, Fig.3.31 に示すような, ねじれた素線の束の一部を切り取った単位セルを考える．実際には，素線は密に配置されているが，Fig.3.31 では説明のため，間引いた表示となっているこの単位セル内部では外部磁界の強度は概ね一様であると仮定できるとする．また，外部磁界によって生じる双極子磁界の強度も概ね一様であるとする．いま，導体の方向を表す単位ベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ と示す．なお各セル毎に $\boldsymbol{\tau}$ と素線充填率は異なる．厳密には $\boldsymbol{\tau}$ は単位セル内でも異なるが，ここではこの曲率・戻率は概ね一様であると見なせる程度の小さいセルとする．このセルは有限要素と一致してもよい．この場合，有限要素の重心位置で $\boldsymbol{\tau}$ を近似すればよい．また，素線断面の透磁率は，3.5 節の複素透磁率を用いる．この状態では，Fig.3.31 に示すように，外部印加磁界の垂直成分を求め, 全体の座標変換行列を乗ずることが必要になる. 以下では，この方法を 2 通り示す.

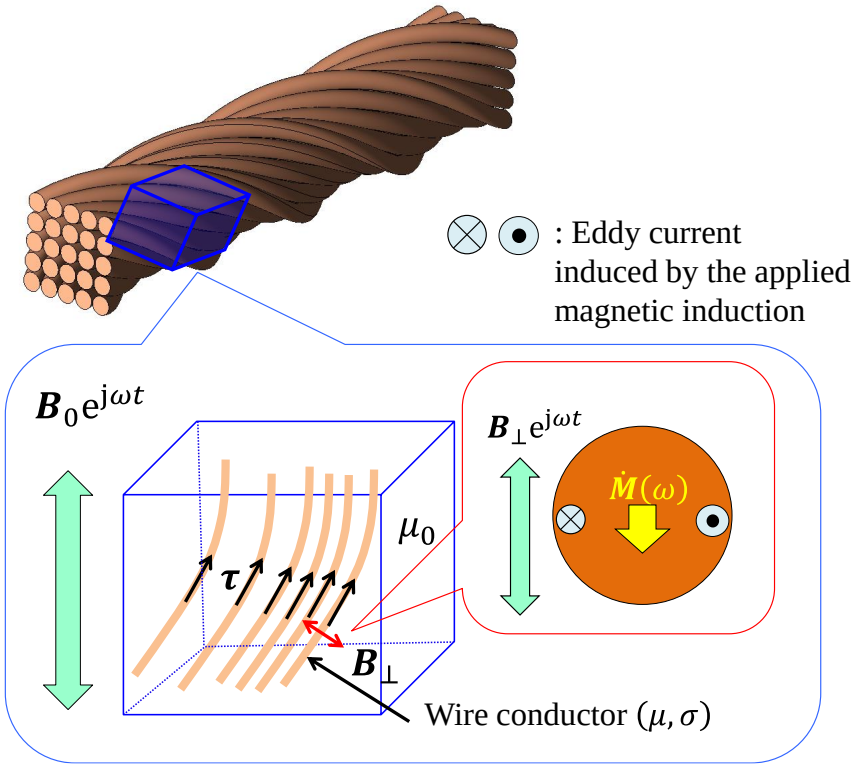


Fig. 3.31 Unit-cell including a twisted bundle of wire conductors.
This model is correspond to a Litz wire which is composed of fine twisted strand conductive wires. In the conventional FE analysis, the conductive wires and air-gap between these wires have to be discretized into fine FE meshes in 3D space. When we treat a Litz wire whose twisting pitch is shorter than wire radius, a tensor macroscopic complex permeability using a complex permeability of wire conductor as shown later have to be introduced in order to take the curvature and torsion into account.

(方法 1：局所磁界を修正したマクロ磁気感受率を与える方法)

Fig.3.31 の状況では，$\boldsymbol{\tau}$ に対する垂直方向の磁束密度 $\boldsymbol{B}_\perp$ は

$$\boldsymbol{B}_\perp = \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \tag{3.358}$$

となる．(3.358)の右辺は $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\tau}$ で外部磁束密度の $\boldsymbol{\tau}$ に沿う方向の成分の大きさを表し，$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$ を全体の磁界から引くことで，渦電流による磁界と外部磁界を含めた $\boldsymbol{\tau}$ に対する垂直方向の磁束密度 $\boldsymbol{B}_\perp$ を表している．ここで，ベクトル公式

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{3.359}$$

を用いると(3.358)は

$$\boldsymbol{B}_\perp = \boldsymbol{\tau}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\tau}) \tag{3.360}$$

となる．このとき，$\boldsymbol{B}_\perp$ の方向にできる導体中の磁化ベクトルは局所磁界 $\boldsymbol{H}_{loc}^{\perp}$ を用いると，静磁界中では，Table 3.5 の関係から

$$\boldsymbol{M}_{in} = \frac{\mu_r - 1}{1 + N(\mu_r - 1)}\boldsymbol{H}_{loc}^{\perp} \tag{3.361}$$

である．渦電流が流れる導体を考える際には，(3.361)の μ_r を，3.5 節で導いた円筒導体の複素透磁率を用いることでつぎのように表すことができる．

$$\boldsymbol{M}_{in} = \frac{\dot{\mu}_r^{wire} - 1}{1 + N\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)} \boldsymbol{H}_{loc}^{\perp} \tag{3.362}$$

さて，3.2 節において述べた Ollendorff の式の導出過程を踏襲すると，局所磁界は導体を除いた場合に現れる Lorentz 磁界なので，垂直方向成分については

$$\boldsymbol{H}_{loc}^{\perp} = \boldsymbol{H}_{\perp} + N\boldsymbol{M} \tag{3.363}$$

と示すことができる．単位セル内の導体の体積充填率を η とすると，単位セル全体を巨視的に見た場合の磁化は $\boldsymbol{M} = \eta \boldsymbol{M}_{in}$ なので，(3.362), (3.363)から

$$\boldsymbol{M} = \frac{\dot{\mu}_r^{wire} - 1}{1 + N\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)} (\boldsymbol{H}_{\perp} + N\boldsymbol{M}) \tag{3.364}$$

を得る．(3.364)を $\boldsymbol{M}$ について解くと

$$\boldsymbol{M} = \frac{\eta\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)}{1 + N(1-\eta)\left(\dot{\mu}_r^{wire} - 1\right)} \boldsymbol{H}_{\perp} \tag{3.365}$$

となる．(3.365)は 3.2 節の(3.11)と対応するが，本節で単位セルの巨視的な磁化は外部磁界の垂直成分により表現されていることに注意する．

ここで，$\boldsymbol{H}_{\perp}$ は導体の断面に垂直に印加する磁界なので(3.360)の導出過程を逆に考えると

$$\boldsymbol{H}_{\perp} = \boldsymbol{\tau} \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{H} - (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\tau_x^2 & -\tau_x\tau_y & -\tau_x\tau_z \\ -\tau_y\tau_x & 1-\tau_y^2 & -\tau_y\tau_z \\ -\tau_z\tau_x & -\tau_z\tau_y & 1-\tau_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{3.366}$$

となる．(3.366)右辺の $\boldsymbol{H}_{\perp}$ の係数は，単位セル内の渦電流を考慮したマクロ磁気感受率と考えることができるので，これを $\langle\chi\rangle$ とすると，磁束密度と磁化・磁界の構成関係式 $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ と(3.365), (3.366)から

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \langle\chi_m\rangle \begin{bmatrix} 1-\tau_x^2 & -\tau_x\tau_y & -\tau_x\tau_z \\ -\tau_y\tau_x & 1-\tau_y^2 & -\tau_y\tau_z \\ -\tau_z\tau_x & -\tau_z\tau_y & 1-\tau_z^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{3.367}$$

を得る．(3.367)の右辺が導体内の渦電流を反映したテンソル型マクロ複素透磁率となる．なお，$\boldsymbol{\tau}$ は単位セル毎に異なるので，(3.367)右辺第 2 項の行列に曲率・戻率が反映されている．

つぎに，$\boldsymbol{\tau}$ の設定について述べる．Litz 線の巻き方等によっても，単位方向ベクトルの向きの求め方は変わるが，ここでは Fig.3.32 に示すような円螺旋群からなる最も単純なツイストケーブルのモデルを想定する[3.35].

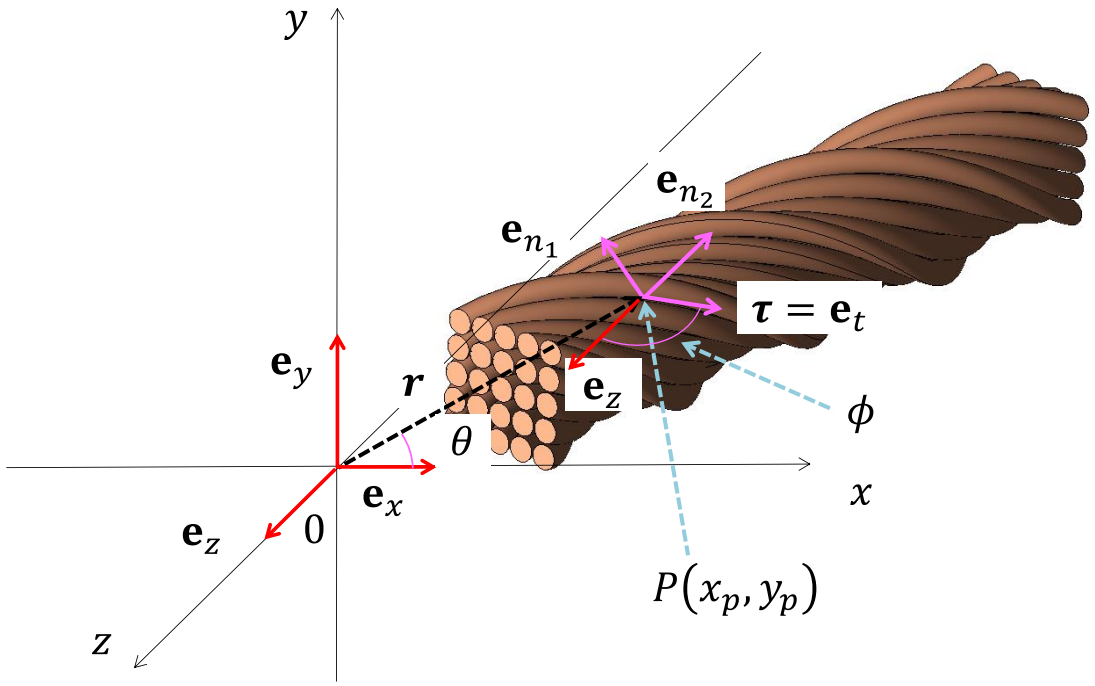


Fig. 3.32 Unit vectors in woven wire conductors.
In the local coordinates, the torsion and curvature are taken into account in the unit vector $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_t$.

円螺旋の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{e}_x + a\sin t\,\mathbf{e}_y + ct\mathbf{e}_z \tag{3.368}$$

である．ここで，a は円螺旋の半径，t はパラメータである．(3.368)のパラメータを弧の長さ $s(t)$ とすると

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)}dt = t\sqrt{a^2+c^2} \tag{3.369}$$

だから

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}} \tag{3.370}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\mathbf{e}_x + a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\mathbf{e}_y + c\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\mathbf{e}_z \tag{3.371}$$

を得る．$\boldsymbol{\tau}$ は円螺旋の接ベクトルなので

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(-a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\mathbf{e}_x + a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z\right) \tag{3.372}$$

となる[3.36].

(3.367), (3.372)を用いて，単位セルに対する有限要素行列の係数は

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \langle \chi_m \rangle \begin{bmatrix} 1-\tau_x^2 & -\tau_x\tau_y & -\tau_x\tau_z \\ -\tau_y\tau_x & 1-\tau_y^2 & -\tau_y\tau_z \\ -\tau_z\tau_x & -\tau_z\tau_y & 1-\tau_z^2 \end{bmatrix} \right\} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}\Omega \quad (3.373)$$

により計算できる. (3.373)においては素線上での局所的な座標系に対する変換行列が設定されており，補間関数の回転との内積を取ることができる.

(方法 2 : 概ね一様なねじり方が仮定できる場合の座標変換行列の近似)

Fig.3.31 の状況で，巻き数が十分に小さい場合には構成関係式は,

$$\begin{bmatrix} B_{n_1} \\ B_{n_2} \\ B_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_r\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mu}_r\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n_1} \\ H_{n_2} \\ H_t \end{bmatrix} \quad (3.374)$$

となる．(3.373)は局所座標系における構成関係式であるから，座標変換行列

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.375a)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y_p}{x_p} \quad (3.375b)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\pi\sqrt{x_p^2+y_p^2}}{L_s} \quad (3.375c)$$

を用いて，有限要素行列の成分を(3.351b)と同様に

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{U}^t \begin{bmatrix} \dot{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_0 \end{bmatrix} \mathrm{U}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega \quad (3.376)$$

と求めることができる[3.36].

3. 15　第 3 章の総括

本章では, 周波数領域における均質化に必要なマクロ複素透磁率を, unit-cell approach, Ollendorff の式に複素透磁率を代入する方法の 2 通りで求めた．特に，後者の方では，複素透磁率を解析的に定義し，マクロ複素透磁率により，集合した磁性体は 1 つの均質化された塊状の磁性体と見なすことができる．この場合，均質化された磁性体の導電率は 0 となり，渦電流と充填率の効果はすべてマクロ複素透磁率に反映される．このマクロ複素透磁率は有限要素解析と親和性が高い. 磁性体の形状毎の複素透磁率と反磁界係数, 微分方程式の一般解となる複素関数の引数をまとめた表は 3.13 節にて示した．また，必要に応じて，座標変換を行う方法を 3.14 節で述べた.

本章で定義したマクロ複素透磁率を用いた均質化有限要素法と，渦電流を考慮した微細な有限要素による離散化が必要である直接的な有限要素法による解析結果が一致することについては第 4 章で述べる．また，GA を用いた磁性被覆線の構造最適化については第 5 章，磁性粒子同士の磁気的な接触を反映した透磁率を求める方法は第 6 章において，それぞれ述べる．

第 3 章 参考文献

[3.1] A. Podoltsev and B. Lebedev, “Analysis of effective resistance and eddy current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components”, *IEEE Trans. Magn*, vol. 39, no. 1, 2003, pp. 539–548.

[3.2] J. Gyselinck and P. Dular, “Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations,” IEEE Trans. Magn., vol. 41, no. 5, 2005, pp. 1416–1419.

[3.3] 和木浩,「均質化法を用いた磁界解析に関する研究」, 1996 年北海道大学修士論文.

[3.4] Y. Ito and H. Igarashi, “Computation of macroscopic electromagnetic properties of soft magnetic composite”, *IEEE Trans. Magn*., 49, no.5, pp. 1953-1956, 2013.

[3.5] F. Ollendorff, "Magnetostatik der Massekerne", Arch. f. Eledtrotechnik., 25, 1931, pp. 436-447.

[3.6] 佐藤佑樹,「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」, 2019 年度北海道大学博士論文.

[3.7] 佐藤佑樹，五十嵐一,「均質化とモデル縮約法を用いたマルチスケール問題の時間領域有限要素解析」，電気学会静止器回転機合同研究会，SA-16-076,RM-16-122，沖縄，9 月, 2016.

[3.8] L. Krähenbühl, D. Muller, “Thin layers in electrical engineering.Examples of shell models in analyzing eddy-currents by boundary and finite element methods,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 29, no. 2, 1993, pp. 1450–1455.

[3.9] I. D. Mayergoyz and G. Bedrosian, “On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells,” *IEEE Trans. Magn*., vol. 31, no. 3, 1995, pp. 1319–1324.

[3.10] Y. Shindo, O. Noro, “Simple Circuit Simulation Models for Eddy Current in Magnetic Sheets and Wires”, *IEEJ, Trans*. on Fundamentals and Materials, Vol.134, No.4, pp.173-181, DOI:10.1541, 2013.

[3.11] H. Igarashi, "Semi-Analytical Approach for Finite Element Analysis of Multi-turn Coil Considering Skin and Proximity Effects", *IEEE Trans., Magn*. vol.53, no. 1, 7400107, 2017.

[3.12] S. Fujita, H. Igarashi, "Finite element analysis of multi‐turn magnetoplated coils using homogenization method," Wiley Online Library, DOI.org/10.1002/eej.23156, 2018.

[3.13] S. Fujita, H. Igarashi, "Finite-Element Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenization Method," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 54, no. 3, Art. no. 7401104, 2018.

[3.14] S. Fujita, H. Igarashi, "Homogenization of Multi-turn Coil with Elliptic Cross Section Using Complex Permeability", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, DOI: 10.1108/COMPEL-09-2018-0356, 2019.

[3.15] S. Fujita, H. Igarashi, "Reduction of Eddy Current Loss in Rectangular Coils Using Magnetic Shield Analysis with Homogenization Method," *IEEE Transactions on Magnetics*, DOI : 10.1109/TMAG. 2019. 2907686.

[3.16] A. Berthault, D. Rousselle, G. Zerah, “Magnetic properties of Permalloy microparticles”, *J. Magn Magn. Mater*., vol.112, pp.477-480, 1992.

[3.17] 伊藤泰久,「非適合要素および均質化を用いた電磁界解析に関する研究」, 2016 年度北海道大学博士論文.

[3.18] Y. Itoh, H. Igarashi. M. Suzuki, Y. Iwasaki, K. Kawano, "Effect of Magnetic Contact on Macroscopic Permeability of Soft Magnetic Composite", *IEEE Trans. Magn*., vol.52. no.3, 9400804, 2016.

[3.19] 藤田祥伍, 五十嵐一, 異方性と渦電流を考慮した圧粉磁芯の均質化モデル, 平成 31 年電気学会全国大会, 5-130, 札幌, 3 月, 2019.

[3.20] 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹,「数値電磁力学」, 森北出版, 2002.

[3.21] 高橋則雄,「三次元有限要素法」 電気学会, 2006.

[3.22] 高橋則雄,「磁界系有限要素法を用いた最適化」, 森北出版, 2001.

[3.23] 中山正敏,「物質の電磁気学」, 岩波書店, 1996.

[3.24] J. D. Jackson,「電磁気学(上)」, 吉岡書店, 2002.

[3.25] 砂川重信,「理論電磁気学」, 紀伊国屋書店, 1999.

[3.26] P. Moon, D. E. Spencer, "Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions", Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed., 1988.

[3.27] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

[3.28] J. C. Gutiérrez-Vega, "Theory and numerical analysis of the Mathieu functions v.2.1", Monterrey, Nuevo-León, México, 2008, May.

[3.29] N. W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK, 1954.

[3.30] C. Flammer, "Spheroidal Wave Functions", section 4.1, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.

[3.31] J. A. Stratton, “Electromagnetic Theory”, section 4.21, 1941.

[3.32] E. C. Stoner, “The demaginetizaing factors for ellipsoids”, Phil. Mag., series 7, pp.803-821, 1945.

[3.33] L. D. Landau, and E.M. Lifshitz, “Electrodynamics of Continuous Media”, 2nd ed., section 4, pp.26-27, Butterworth-Heinemann, 1984.

[3.34] 岩堀長慶,「数学選書 2, 数学の基礎的諸分野への現代的入門, ベクトル解析」, 裳華房, 1982 年 12 月.

[3.35] E. Kreyszig,「線形代数とベクトル解析」, 培風館, 2009.

[3.36] 高橋則雄,「磁気工学の有限要素法」, 朝倉書店, 2013.

第 4 章　複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素解析の妥当性

本章では，第 3 章で求めた複素透磁率の周波数特性を調べる．つぎに，マクロ複素透磁率を unit-cell approach で求めた方法と，Ollendorff の式に基づく方法により求め，一致する場合と，一致しない場合について議論する．さらに，均質化有限要素解析の妥当性を確認するために，均質化されたマルチターンコイルの回路方程式を用いて評価した実効インピーダンスが従来の準静電磁界解析(従来法)と一致するかを確認する．

4.1 節では, 複素透磁率, およびマクロ複素透磁率の周波数特性を表すグラフを示す．4.2 節では，第 3 章において，複素透磁率を定義するために用いた特殊関数の数値不安定性について議論し，電磁鋼板の複素透磁率や球 Bessel 関数等を用いた複素透磁率の優位性を示す．4.3, 4 節では unit-cell approach と比較したマクロ複素透磁率の周波数特性を調べ，周波数領域に拡張した Ollendorff の式から求めたマクロ複素透磁率と比較する．4.5, 6 節では，均質化されたマルチターンコイルの電力と，実効インピーダンスが軸対称 2 次元解析，3 次元解析においても，渦電流を考慮した直接的な有限要素解析と比較し，解析結果が十分に一致することを示す．4.7 節では，本章のまとめを行う．

4. 1　複素透磁率の周波数特性

本節では，第 3 章に示した磁性体の複素透磁率，および磁性体が集合した場合のマクロ複素透磁率の周波数特性を調べる．まずは，簡単のため，2 次元形状として電磁鋼板，通常の銅線，3 次元形状として真球の圧粉磁芯の場合の複素透磁率の周波数特性について述べる．また，絶縁皮膜の磁性被覆線の複素透磁率と，磁性被覆の透磁率への依存性についても述べる．

4. 1. 1　電磁鋼板の場合

本節では，Fig.4.1 の電磁鋼板の複素透磁率の周波数特性を調べる．解析緒元を Table 4.1 に示す．この条件での複素比透磁率

$$\dot{\mu}_r^{slab}(\omega) = \mu_r \frac{\tan\zeta}{\zeta} \tag{4.1a}$$

$$\zeta \coloneqq \frac{d}{\delta}(1-\mathrm{j}) \tag{4.1b}$$

の周波数特性を Fig.4.2 に示す((4.1a)は第 3 章では(3.24)に相当する)．ここで，グラフの横軸 a/δ は無次元量の規格化周波数を表しており，$a/\delta \geq 1$ では渦電流の効果が顕著となる．$\dot{\mu}_r^{slab}$ の実部は反磁界効果を含めた比透磁率，$\dot{\mu}_r^{slab}$ の虚部は渦電流損失にそれぞ

れ対応する．特に高周波では，近接効果による反磁界効果が顕著になり，$\dot{\mu}_r^{slab}$ の実部は 0 に近づくことが確認できる．さらに Fig.4.2 のグラフより，3.4 節で導いた磁束密度と磁界の比から定義した複素透磁率の周波数特性は分散性誘電体の Debye 緩和の特性に類似しているともわかる．

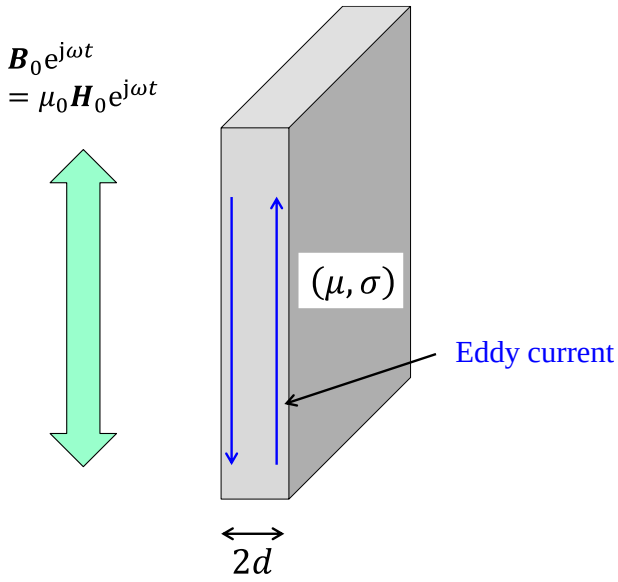


Fig.4.1 Infinity wide slab immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
Anti-parallel eddy currents are induced in the slab so as to generate the diamagnetic field.

Table 4.1 Specification of the magnetic-conductive slab shown in Fig.4.1

d [mm]	1.0	σ [S/m]	1.03×10^7
μ_{1r}	100.0	f [Hz]	$1.0 \sim 1.0 \times 10^6$

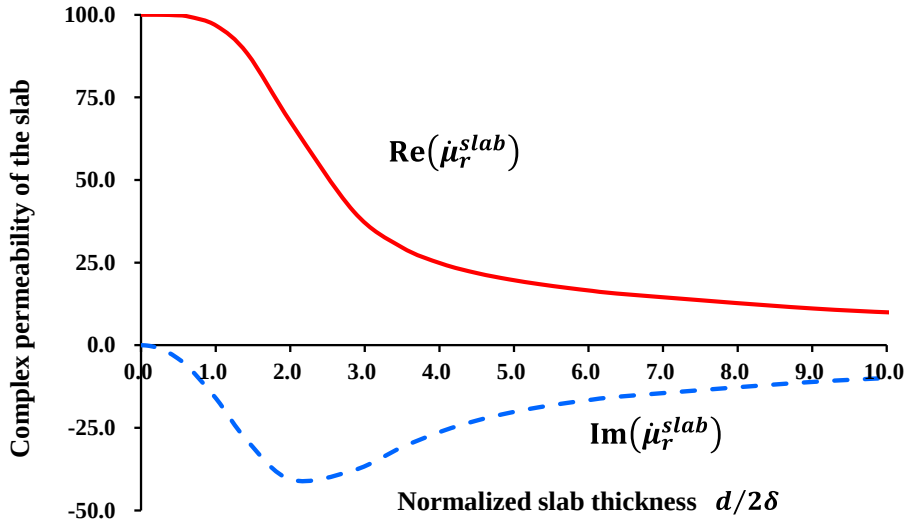


Fig. 4.2 Profile of the complex permeability of the slab.
Abscissa is the ratio of the slab thickness $d/2$ to the skin depth δ. It is found that when the normalized slab thickness $d/2\delta$ becomes higher than 1, the diamagnetic field is significant. This characteristic is similar to the Debye relaxation, which is observed when an electromagnetic wave transverses in a dispersive dielectric material.

4. 1. 2　導線の場合

本節では，Fig.4.3 に示す導線の複素透磁率の周波数特性を調べる．解析緒元を Table 4.2 に示す．この条件での複素比透磁率

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{4.2a}$$

$$\zeta := \frac{a}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{4.2b}$$

を Ollendorff の式中の比透磁率として用いた場合に得られるマクロ複素透磁率

$$\langle \dot{\mu}_r^{wire} \rangle = 1 + \frac{2\eta \left(\mu_r \dfrac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} - 1 \right)}{2 + (1 - \eta) \left(\mu_r \dfrac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} - 1 \right)} \tag{4.3}$$

の周波数特性を Fig.4.4 に示す((4.2)は第 3 章では(3.51)に相当する)．ここで，グラフの横軸 a/δ は無次元量の規格化半径を表しており，$a/\delta \geq 1$ では渦電流の効果が顕著となる．$\langle \dot{\mu}_r^{wire} \rangle$ の実部は反磁界効果を含めた比透磁率，$\langle \dot{\mu}_r^{wire} \rangle$ の虚部は渦電流損失にそれぞれ対応する．特に高周波では，近接効果による反磁界効果が顕著になり，$\langle \dot{\mu}_r^{wire} \rangle$ の実部は 0 に近づくことが確認できる．さらに，Fig.4.4 のグラフから，3.5 節で導いた反磁性を表す磁気双極子から定義した導線の複素透磁率の周波数特性も電磁鋼板の複素透磁率と同様に分散性誘電体の Debye 緩和の特性に類似した傾向を示すとわかる．

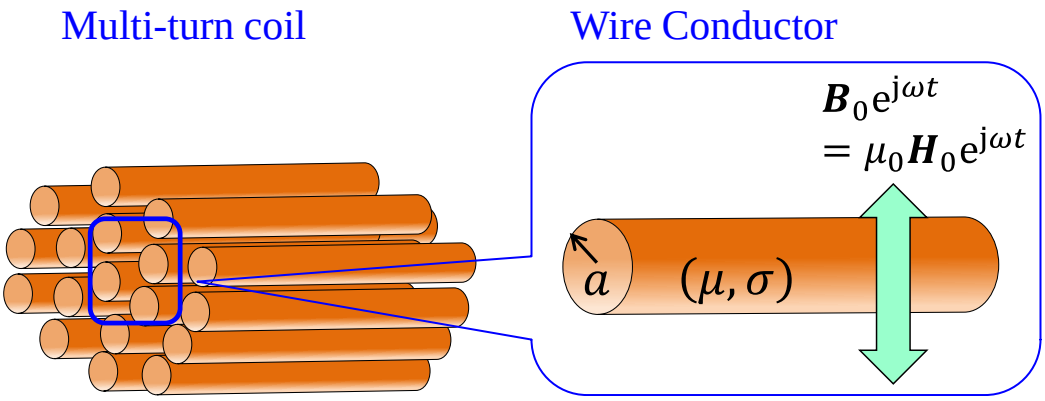
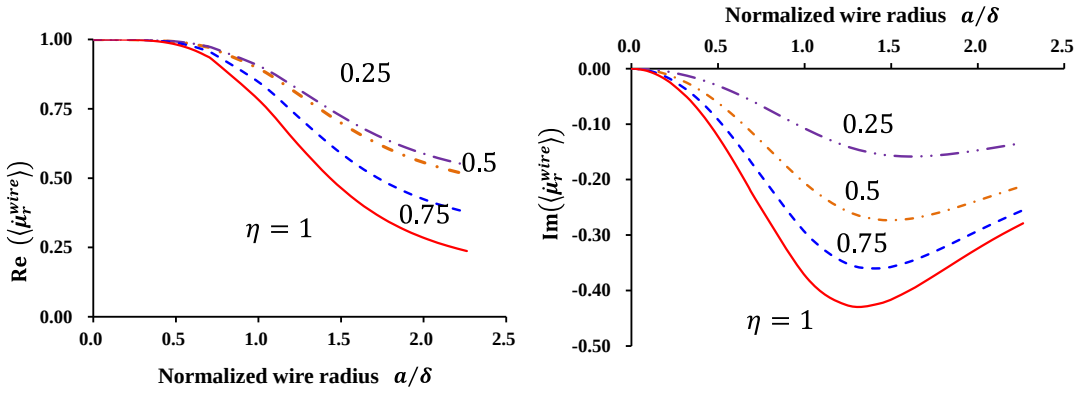


Fig.4.3 Straight round conducting wire immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

Table 4.2 Specification of the isolated wire conductor as shown in Fig.4.3

a [mm]	0.15	σ [S/m]	5.76×10^7
μ_{1r}	1.0	f [Hz]	$1.0 \sim 1.0 \times 10^6$



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.4 Frequency characteristics of the macroscopic complex permeability of the coils with different volume fractions.
Abscissa represents the ratio of the wire radius a/δ. Real part is the effective permeability possessing the diamagnetic property stem from the proximity effect whereas the imaginary part denotes the eddy current loss.

4. 1. 3　真球形圧粉磁芯の場合

本節では，Fig.4.5 に示す真球形が仮定できる圧粉磁芯の複素透磁率の周波数特性を調べる．解析緒元を Table 4.3 に示す．この条件での複素比透磁率

$$\dot{\mu}_r^{SMC} = 2\mu_r \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - 1} \tag{4.3a}$$

$$\zeta \coloneqq \frac{a}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{4.3b}$$

の周波数特性を Fig.4.6 に示す((4.3)は第 3 章では(3.288)に相当する)．ここで，グラフの横軸 a/δ は無次元量の規格化半径を表しており，$a/\delta \geq 1$ では渦電流の効果が顕著となる．$\dot{\mu}_r^{SMC}$ の実部は反磁界効果を含めた実効比透磁率，$\dot{\mu}_r^{SMC}$ の虚部は渦電流損失にそれぞれ対応する．特に高周波帯では，近接効果による反磁界効果が顕著になり，$\dot{\mu}_r^{SMC}$ の実部は 1 に近づくことが確認できる．この傾向は，誘電体の Debye 緩和の特性に類似した傾向を示す．

なお，(4.3)を Ollendorff の式に代入して得られるマクロ複素透磁率は，SMC コアの粒子形状が平均的に一様な球と仮定できる場合にのみ有効であり，プレス圧縮に伴う異方性は考慮できない．このような異方性の取り扱いについては，楕円体近似，および反磁界係数の変更で可能となることを 4.4.2 節で示す．

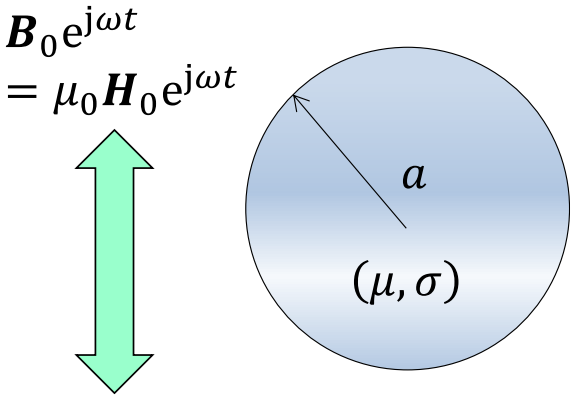


Fig.4.5 Soft magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.

Table 4.3 Specification of the isolated SMC as shown in Fig.4.5

a [μm]	20.0	μ_r	28.0	σ [S/m]	1.03×10^7

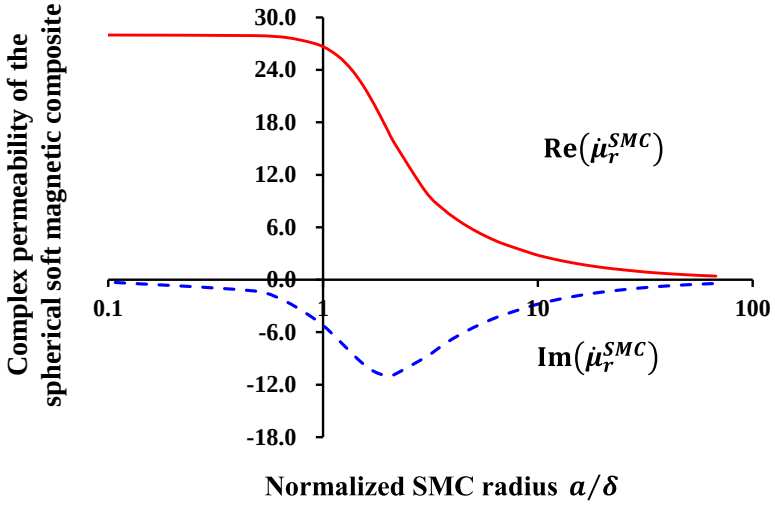


Fig.4.6 Profiles of the complex permeability of a spherical SMC.
Abscissa denotes the ratio of the sphere radius a/δ (log − plot). We find that when $a/\delta \geq 1$, the eddy current due to the proximity effect is significant. As seen in Fig.4.4, this property is also similar to the Debye relaxation of a dispersive dielectric material.

4. 1. 4　絶縁皮膜の磁性被覆線の場合

本節では, Fig.4.7 に示す絶縁皮膜の磁性被覆線のマクロ複素透磁率の周波数特性を調べる．解析緒元を Table 4.4 に示す．この条件での複素比透磁率

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1 + \Lambda_2(\omega)}{1 - \Lambda_2(\omega)} \tag{4.4a}$$

$$\zeta := \frac{a}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{4.4b}$$

を Ollendorff の式に代入して得られるマクロ複素透磁率

$$\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle = 1 + \frac{2\eta(\dot{\mu}_r^{MSW} - 1)}{2 + (1-\eta)(\dot{\mu}_r^{MSW} - 1)} \tag{4.5}$$

の周波数特性，及び磁性被覆の透磁率への依存性を Fig.4.8 に示す((4.4)は第 3 章では(3.81)に，(4.4b)は(3.75b)に相当する)．ここで，グラフの横軸 a/δ は無次元量の規格化半径を表しており，$a/\delta \geq 1$ では渦電流の効果が顕著となる．$\dot{\mu}_r^{wire}$ の実部は反磁界効果を含めた比透磁率，$\dot{\mu}_r^{wire}$ の虚部は渦電流損失にそれぞれ対応する．特に高周波では，近接効果による反磁界効果が顕著になり，$\dot{\mu}_r^{wire}$ の実部は 0 に近づくことが確認できる．この傾向は，分散性誘電体の Debye 緩和の特性に類似した傾向を示す．

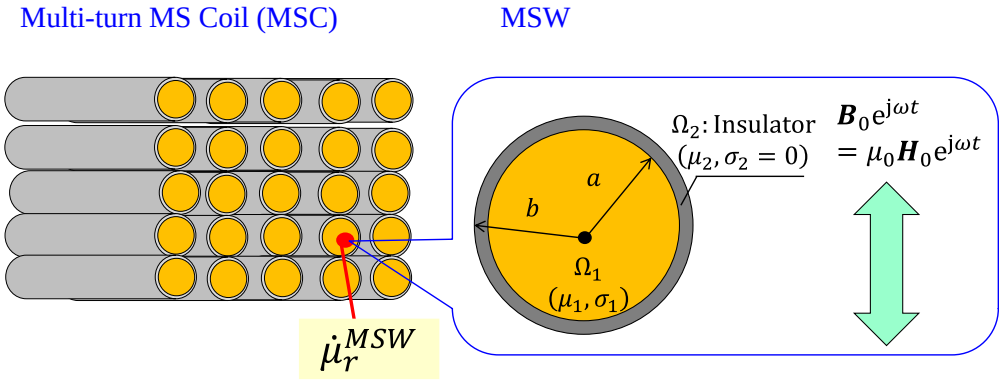
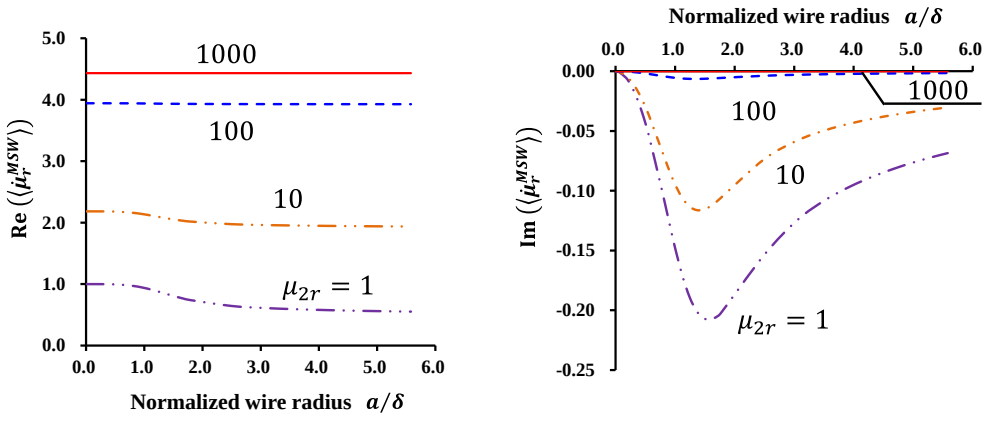


Fig.4.7 MSW immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this section, the layer is assumed to be an insulator. Hence, in this section, σ_2 is set to zero.

Table 4.4 Specification of the MSC with the insulator film as shown in Fig.4.7

a [mm]	0.37	μ_{1r}	1.0
b [mm]	0.50	σ [S/m]	5.76×10^7
η	0.64	f [Hz]	$1 \sim 10^6$



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.8 Frequency characteristics of the macroscopic complex permeability of the MSCs with different permeabilities of the shield.
Abscissa represents the normalized wire radius a/δ. Note here that the shield layer Ω_2 shown in Fig.4.7 is assumed to be an insulator. As the permeability of the shield becomes higher, the magnetically shielding effect is significant and the effective permeability becomes higher. Moreover, from the graph of the imaginary part, the eddy current loss due to the proximity effect is expected to be reduced by introducing MSCs.

4. 2　複素透磁率の数値不安定性

本節では，導電性の被覆を持つ磁性被覆線と，扁平圧粉磁芯の場合のテンソル型複素透磁率の周波数特性を示す．4.2.1 節で，第 3 章で導いた磁性被覆線の複素透磁率を直接的に求めた場合，電磁鋼板の複素透磁率を用いて定義した場合の 2 通りの周波数特性を示し，後者では数値不安定性が現れないことを示す．つぎに，4.2.2 節で多層磁性被覆線の周波数特性を示し，この場合でも電磁鋼板の複素透磁率を用いて定義すると，数値不安定性がないことを示す．最後に 4.2.3 節で，扁平圧粉磁芯の場合のテンソル型複素透磁率の周波数特性について，その数値不安定性のない関数形について述べる．

4. 2. 1　磁性被覆線の複素透磁率

本節では，Fig.4.7 に示すような磁性被覆線の複素透磁率の周波数特性を調べる．ただし，磁性被覆は導電性を有しているものとする．この場合，複素透磁率は第 3 章で導いたようにつぎの 2 通りで定義できる．

(a) 直接計算による複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1+\Phi_2(\omega)}{1-\Phi_2(\omega)} \tag{4.6a}$$

(b) 磁性被覆に電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の磁性被覆線の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1+\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab}\right)}{1-\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab}\right)} \tag{4.6b}$$

ここで，第 3 章では，(4.6a), $\Phi_2(\omega)$ は(3.103), (3.100b)に，(4.6b), $\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab}\right)$は(3.113a, b) にそれぞれ相当する．$\Phi_2(\omega)$ には Neumann 関数が含まれているが，$\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_r^{slab}\right)$ には現れない．

Table 4.5 の解析緒元で(4.6a, b)を計算したグラフを Fig.4.9 に示す．Fig.4.9 のグラフより，磁性被覆の解析緒元が十分に小さく，磁性被覆厚が十分に薄い場合は(4.6a, b)が一致していることがわかる．

つぎに，Table 4.6 の解析緒元で(4.6a, b)を計算したグラフをそれぞれ Fig.4.10(a, b)に示す．例えば Fig.4.6 のような複素透磁率の傾向と合わない．したがって，(4.6a)の複素透磁率は用いることができない．一方で，(4.6b)は 4.1 節で議論した複素透磁率の特性に一致している．

したがって，磁性被覆を用いた(4.6b)が実用的に用いることができる複素透磁率である．しかし，ここでは，磁性被覆が十分に薄いと仮定しているので，磁性被覆の厚さの設定には制限がある．例として，Table 4.5 の解析緒元で，$b-a$ を大きくした場合の緒元を Table 4.7 に示す．この条件で(4.6a, b)を計算したグラフを Fig.4.11 に示す．なお，この条件下では，(4.6a)の複素透磁率も用いることができる．Fig.4.11 から，磁性被覆が十分に薄くない場合には，(4.6b)は正しい結果を与えないとわかる．しかし，磁性被覆のスケールは第 1 章でも述べたように数 μm のスケールであることを考えると, Fig.4.10 の解析結果から，(4.6b)が実用的な磁性被覆線の複素透磁率であると考えることができる．また，(4.6a)の場合と比べて，電磁鋼板の解析緒元が十分に高い場合においても，Fig.4.10(a)のような数値不安定性は表れないとわかる．

Table 4.5 Specification of the isolated MSW composed of the wire conductor and magnetic-conductive layer with the low parameters as shown in Fig.4.7

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^4

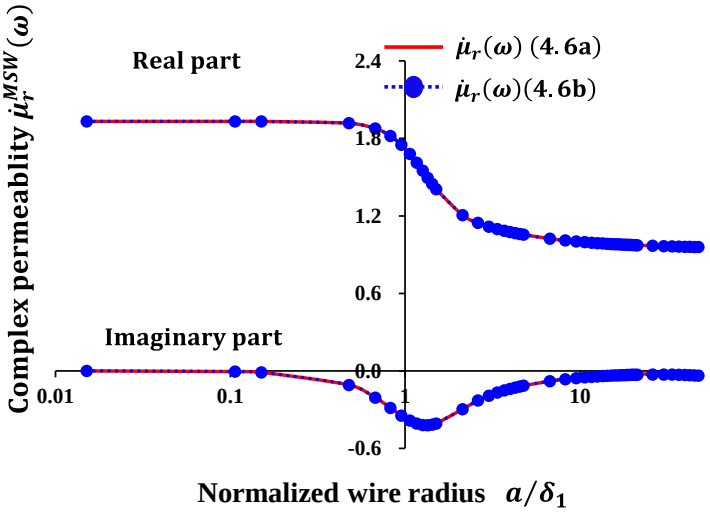
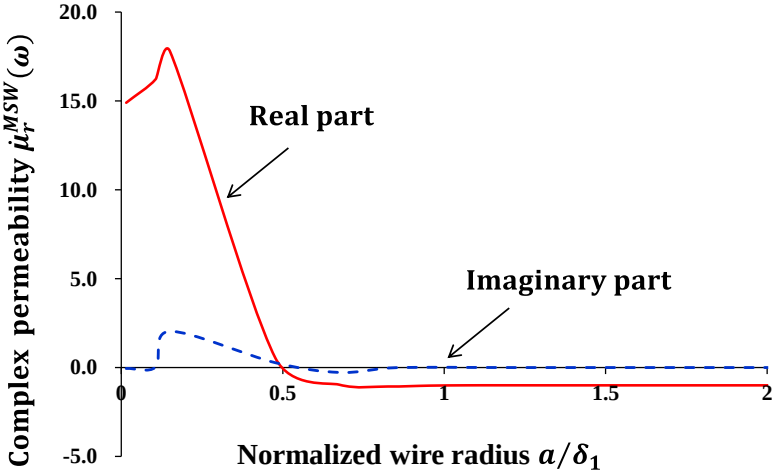


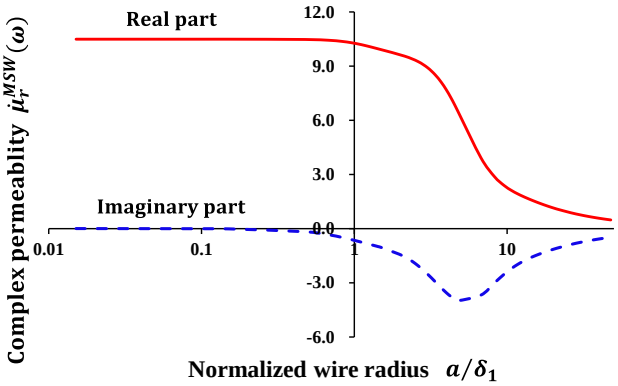
Fig.4.9 Frequency characteristics of the complex permeabilities of the MSW with the lower parameters. From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory.

Table 4.6 Specification of the MSW with the actual parameters as shown in Fig.4.7

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	100.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^7



(a) Frequency characteristics of the complex permeability of a MSW expressed by (4.6a).



(b) Frequency characteristics of the complex permeability of a MSW expressed by（4.6b).

Fig.4.10 Frequency characteristics of two types of the complex permeability of the MSW with the high parameters. From this figure, we find that the direct defined form of the complex permeability has different characteristic from that expected as e.g. Fig.4.6. On the other hand, the complex permeability of the MSW including that of the slab $\dot{\mu}_r^{slab}$ expressed by（4.1a）coincides with the same characteristic as shown in e.g. Fig.4.4.

Table 4.7 Specification of the MSW with a relatively thick shield layer

a [mm]	0.50	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	100.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^7

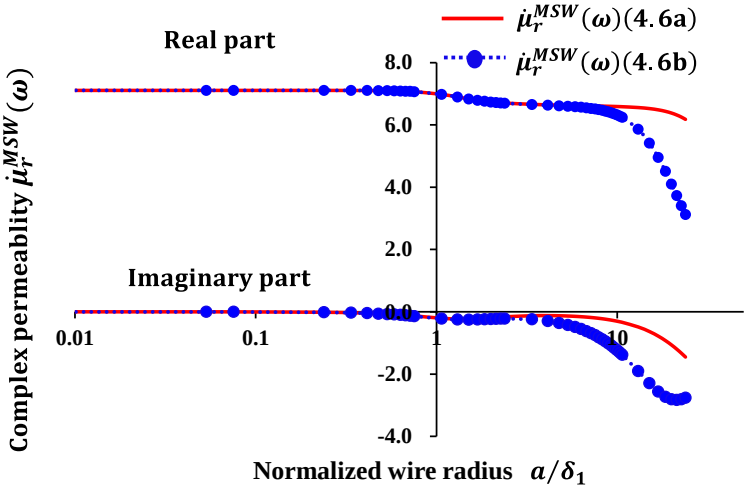


Fig.4.11 Frequency characteristics of the complex permeabilities of the MSW with the lower parameters in which the thickness of the slab is moderately large.
From this figure, it can be concluded that under the assumption that the thickness of the slab is fairly small,（4.6b）is executable.

つぎに，(4.6a)の磁性被覆線の複素透磁率に数値不安定性が現れる原因について考察する．Bessel 関数や Neumann 関数の引数が十分に大きい場合には，漸近展開

$$J_1(k_i a) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_i a}} \cos\left(k_i a - \frac{3}{4}\pi\right) \tag{4.7a}$$

$$N_1(k_i a) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_i a}} \sin\left(k_i a - \frac{3}{4}\pi\right) \tag{4.7b}$$

が成立する[4.1, 2]．(4.7)から，$J_1(k_i a), N_1(k_i a)$ は $\mathrm{e}^{a/\delta_i}, i = 1,2$ を含むとわかる．$J_0(k_i a), N_0(k_i a)$ についても同様である．また，Ω_1, Ω_2 の緒元がそれぞれ銅と純鉄の場合，表皮厚が約4倍以上異なる．また $a/\delta_1 = 10$ の場合，$\mathrm{e}^{a/\delta_1} \approx 2 \times 10^4$ であるのに対して，$\mathrm{e}^{a/\delta_2} \approx 2 \times 10^{17}$ なので，$\Phi_2(\omega)$ の評価に数値不安定性が生じることになる[4.3]．例えば，$\mu_{2r} = 5000, \sigma_2 = 1.03 \times 10^7\ \mathrm{S/m}, b = 46.0\ \mu\mathrm{m}$ とした場合，$J_0(k_2 b)$ のグラフは Fig.4.12 のようになるが，明らかに数値不安定性が発生していることがわかる．

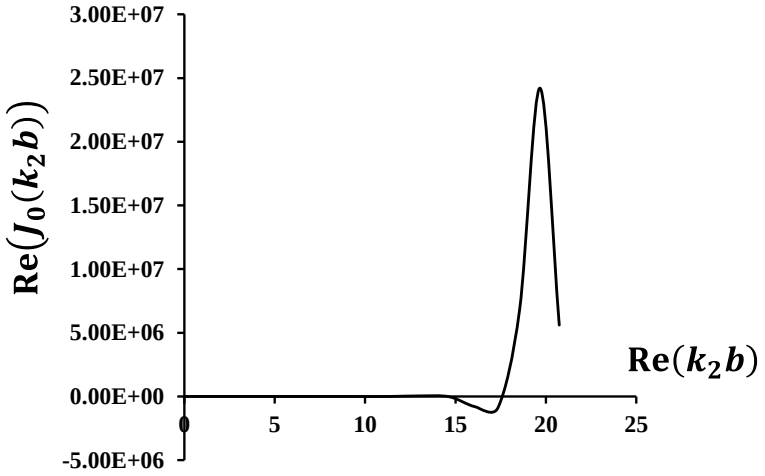


Fig.4.12 Profiles of $J_0(k_2 b)$ at high arguments $k_2 b$.
From this figure, we observe numerical instability of the complex permeability which is defined by directly using the Bessel and Neumann functions. It is because the absolute value of the argument is too high.

一方で，磁性被覆の透磁率に，電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合には，磁性被覆は絶縁皮膜として見なすことができる．この場合，

$$\dot{\mu}_r^{slab}(\omega) = \mu_2 \frac{\tan\zeta}{\zeta} \tag{4.1a}$$

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{4.2a}$$

が $\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right)$ に含まれることになるが，これらにおいては，分子分母の項において，e^{a/δ_2} 等に比例する項が含まれるものの，計算上は約分されてしまうので，巨大な数字の演算による数値不安定性は現れない．より詳細な議論については，超幾何級数 F を用いた表示から行うことができるが，これについては Appendix F にて示す．

以上より，つぎが結論される．磁性被覆線の解析の場合には，磁性被覆厚が十分に小さいという仮定の下，(4.6b)の表示のように，$\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}$ の形の複素透磁率を用いて数値解析すると，数値不安定性を回避できる．後に示すように，この電磁鋼板の複素透磁率を用いた磁性被覆線の複素透磁率は，MSC の均質化解析に有効である．

4. 2. 2　多層磁性被覆線の複素透磁率

本節では，Fig.4.13 に示す多層磁性被覆線の複素透磁率の周波数特性を調べる．ただし，磁性被覆は導電性を有しているものとする．この場合も，複素透磁率は第 3 章で導いたようにつぎの 2 通りで定義できる．

(a) 直接計算による複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega) = \frac{1+\Phi_3(\omega)}{1-\Phi_3(\omega)} \tag{4.8a}$$

(b) 磁性被覆に電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合の磁性被覆線の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega) = \frac{1+\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_{2r}^{slab},\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)}{1-\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_{2r}^{slab},\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)} \tag{4.8b}$$

ここで, 第 3 章では, (4.8a), $\Phi_3(\omega)$は(3.135), (3.129b)に, (4.8b), $\Psi_3\left(\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_{2r}^{slab},\dot{\mu}_{3r}^{slab}\right)$は (3.184a, b)にそれぞれ相当する．$\Phi_3$ には Neumann 関数が含まれているが，Ψ_3 には現れない．以下では，4.2.1 節の場合と同様の手順で，(4.8b)が有効であることを数値的に示す．この場合も 4.2.1 節の議論から，$\dot{\mu}_r^{wire},\dot{\mu}_{2r}^{slab},\dot{\mu}_{3r}^{slab}$ を引数にもつ Ψ_3 を用いているため，指数項は約分されて，数値的に安定すると期待される．

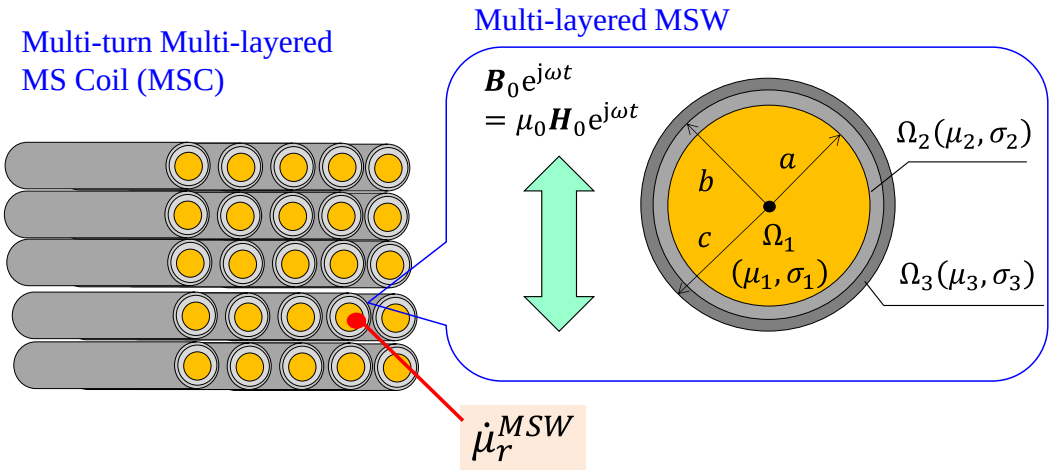


Fig.4.13 Bundle of multi-layered MSWs.
In this section, the layers are assumed to be magnetic-conductive materials. In order to consider the eddy current fields of magnetic-conductive thin layers, the complex permeability of the slab for the permeabilities of layers is effective for finite element analysis.

しかし，(4.8a, b)はいずれも複雑な関数であるため，まず磁性被覆の緒元が絶縁体と見なせる場合，(4.8)が通常の導線の複素透磁率

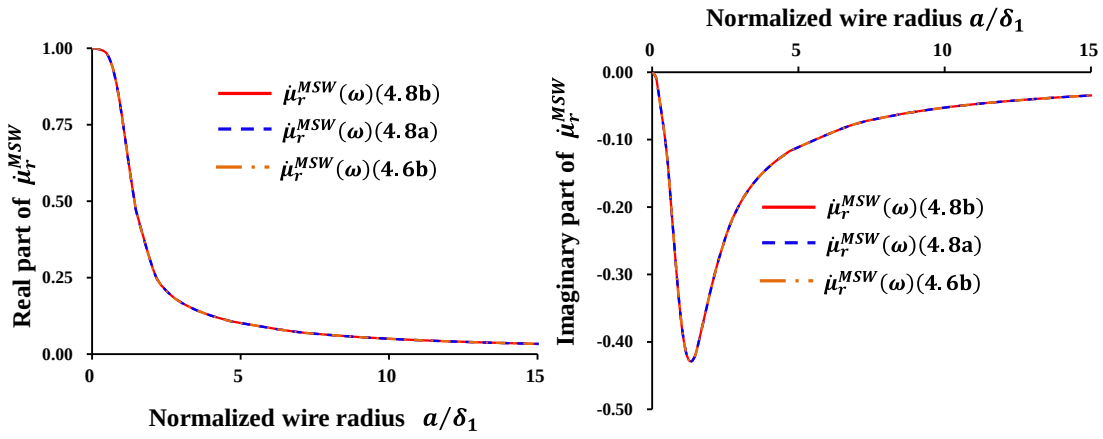
$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{4.2a}$$

に帰着することを示す．Fig.4.14 に，Table 4.8 の解析緒元で(4.8a, b), (4.2a)を計算したグラフを Fig.4.14 に示す．Fig.4.14 から，すべてのグラフが一致しているとわかる．したがって，(4.8a, b)は導線の複素透磁率を含んだ形であると言える．

つぎに，Table 4.9 の解析緒元，すなわち磁性被覆が単層である場合には，(4.8b)と(4.4a)は一致する必要がある．Fig.4.15 に，Table 4.9 の解析緒元で(4.8b), (4.4a)を Ollendorff の式に代入して得られる，充填率が $\eta = 0.65$ の MSW のマクロ複素透磁率を計算したグラフを Fig.4.15 に示す．Fig.4.15 から，2 つのグラフがいずれの透磁率においても一致しているとわかる．また，傾向は Fig.4.8 と同様である．なお，この解析緒元では，磁性被覆が十分に厚くても電磁鋼板の近似が成立することに注意する．

Table 4.8 Specification of the MSC as shown in Fig. 4.12 with the low parameters

a [mm]	1.0	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.05	μ_{2r}	1.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^{-10}
c [mm]	1.1	μ_{3r}	1.0	σ_3 [S/m]	1.0×10^{-10}

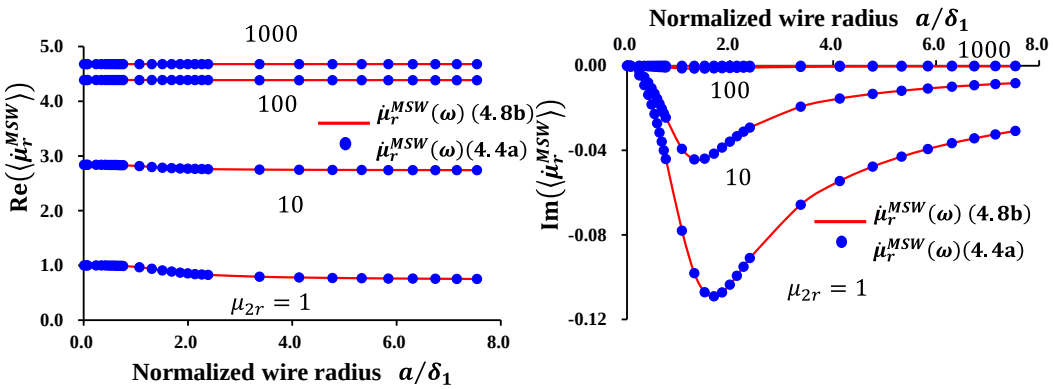


(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.14 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the magnetic-conductive shields are assumed to be normal insulators.
From this figure, these profiles are in good agreement.

Table 4.9 Specification of the MSC as shown in Fig.4.12

a [mm]	0.5	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.0	μ_{2r}	variable	σ_2 [S/m]	1.0×10^{-3}
c [mm]	1.5	μ_{2r}	1.0	σ_3 [S/m]	1.0×10^{-3}



(a) Real part　　(b) Imaginary part

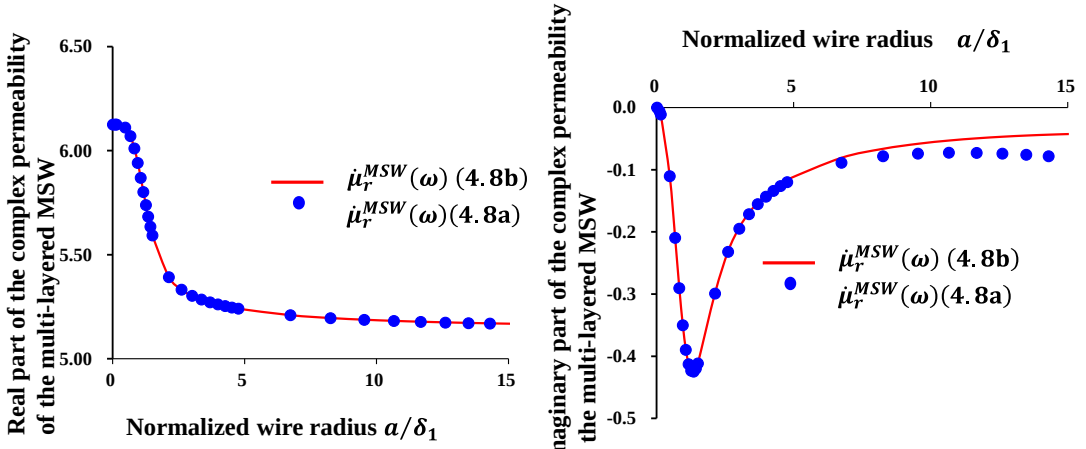
Fig.4.15 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the outer magnetic-conductive shield is assumed to be a normal insulator.
From this figure, these profiles are in good agreement.

さて，(4.8b)は通常の導線，単層の磁性被覆線の複素透磁率も表現できることが数値的に確認できたので，つぎに，Table 4.10 の解析緒元，すなわち磁性被覆が非常に薄く，多層構造を有しており，かつ解析緒元が十分に小さい場合には，(4.8b)と(4.8a)は一致する必要がある．Fig.4.16 に，これらの複素比透磁率を計算したグラフを Fig.4.16 に示す．Fig.4.16 から，低周波帯においては両者は一致するが，高周波帯では一致しなくなる．これは，(4.8a)において，数値不安定性が現れることに対応している．

つぎに，Table 4.11 に示すような緒元を有する実際の多層磁性被覆線を考える．ここでは，磁性被覆に Fe, Ni を仮定している．Fig.4.17 に(4.8b)と(4.8a)から得られる複素比透磁率の周波数特性を示す．Fig.4.17 から，多層構造を有する磁性被覆線の場合においても，電磁鋼板を用いた複素比透磁率を用いて，数値不安定性が回避できるとわかる．この理由は，4.2.1 節での議論と同様に，Bessel, Neumann 関数の指数関数に比例する成分が約分されることで，数値的安定性が得られることに起因する．ゆえに，(4.8b)が実際に有限要素解析に用いるべき多層磁性被覆線の複素透磁率であるとわかる．

Table 4.10 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig. 4.12 with the low parameters

a [mm]	1.0	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.05	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^5
c [mm]	1.1	μ_{2r}	100.0	σ_3 [S/m]	1.0×10^4

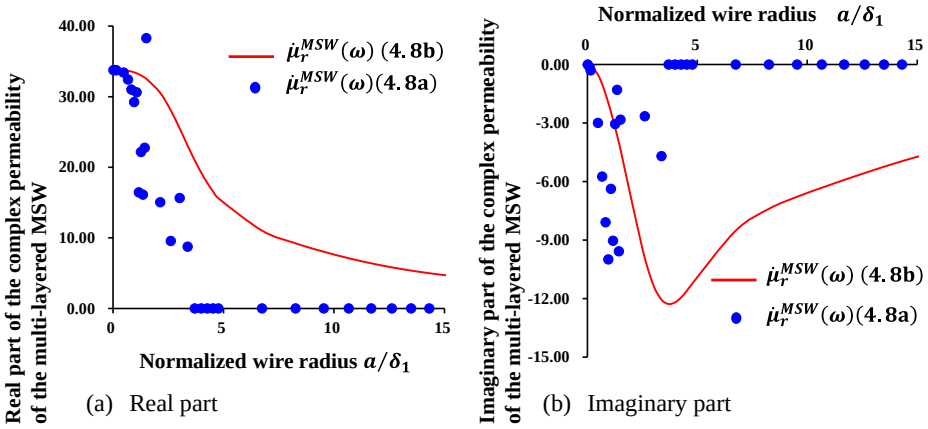


(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.16 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the shield layers have the low parameters. From this figure, in the low frequency domain, these profiles are in good agreement. On the other hand, when the operating frequency becomes higher, there are non-negligible discrepancies.

Table 4.11 Specification of multi-layered MSC shown in Fig.4.13 with the actual parameters

a [mm]	1.0	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.05	μ_{2r}	100.0	σ_2 [S/m]	1.03×10^7
c [mm]	1.1	μ_{2r}	600.0	σ_3 [S/m]	1.45×10^7



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.4.17 Comparison of the complex permeabilities under the condition that the shield layers have the actual parameters.
From this figure, it can be concluded that when we consider an actual multi-layered MSW used in industries, the complex permeability shown in (4.8b) should be employed.

4. 2. 3　磁性楕円体の複素透磁率

本節では，Fig.4.18 に示すように，圧粉磁芯の形状を楕円体とみなし，このテンソル型複素透磁率の周波数特性を調べる．この場合も，複素透磁率は第 3 章で導いたように磁界の印加方向毎に，つぎの 2 通りで定義されていた．

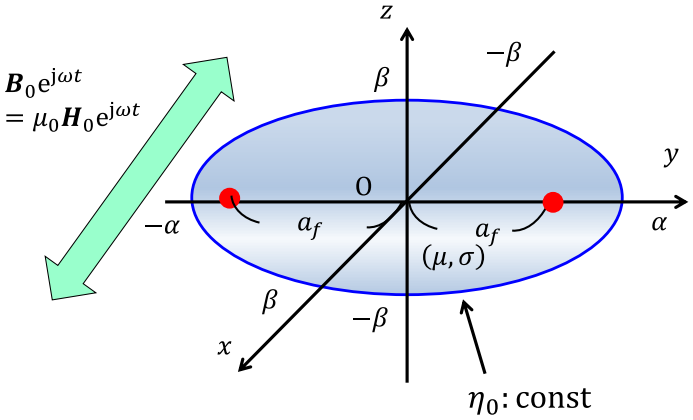


Fig.4.18 Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this figure, a_f, α, β denote the focus, long and short axes, respectively.

(a) 長軸方向

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\tanh^2 \eta_0} + 1\right) \mathcal{P}_1^0\left(ka_f, \cosh \eta_0\right)}{\frac{1}{\tanh^2 \eta_0} \mathcal{P}_1^0\left(ka_f, \cosh \eta_0\right) + \frac{1}{\tanh \eta_0} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathcal{P}_1^0\left(ka_f, \cosh \eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{4.9a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1)\left(1 - \frac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2 \eta_0 \,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\} \frac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2 \tanh^2 \eta_0 - 1)} \tag{4.9b}$$

(b) 短軸方向

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\wp_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0)}{\tanh^2\eta_0\,\wp_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta_0) + \tanh\eta_0 \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0(\mathrm{j}ka_f, \mathrm{j}\sinh\eta)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{4.9c}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2\eta_0)} \tag{4.9d}$$

ここで，$\zeta^{\alpha} \coloneqq ka_f\cosh\eta_0, \zeta^{\beta} \coloneqq -ka_f\sinh\eta_0$とおいた．(4.9a − d)は第 3 章において，それぞれ(3.343), (3.345), (3.326), (3.336)に対応する．

Table 4.12 に示すような解析緒元における(4.9c, d)のグラフを Fig.4.19 に示す. Fig.4.19 より，(4.9d)の方が，これまでに議論してきた複素透磁率の傾向と一致しており，数値的にも安定していることがわかる．したがって，採用すべき複素透磁率は(4.9b, d)である．この原因は，4.2.1 節で議論した Bessel 関数, Neumann 関数の漸近展開で示すことができる. いま, 第 3 章の(3.329)において議論したように, 径方向の回転波動関数 $\wp_1^0(c,\xi)$ を球 Bessel 関数展開し， $d_r^{01}(c), r \neq 1$ を 0 とした近似

$$\wp_1^0(c,\xi) \approx \frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{01}(c)} \sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_r(c\xi)$$

$$= \frac{1}{\sum_{r=1}^{1} d_r^{01}(c)} \sum_{r=1}^{1} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_1(c\xi) = \frac{1}{d_1^{01}(c)} d_1^{01}(c) j_1(c\xi) = j_1(c\xi) \tag{3.329}$$

において, $c = ka_f, \xi = \cosh\eta_0$ と $c = \mathrm{j}ka_f, \xi = \mathrm{j}\sinh\eta_0$ の組み合わせをそれぞれ代入し，$\zeta^{\alpha} \coloneqq ka_f\cosh\eta_0 \to \infty, \zeta^{\beta} \coloneqq -ka_f\sinh\eta_0 \to \infty$ の場合の球 Bessel 関数の漸近展開

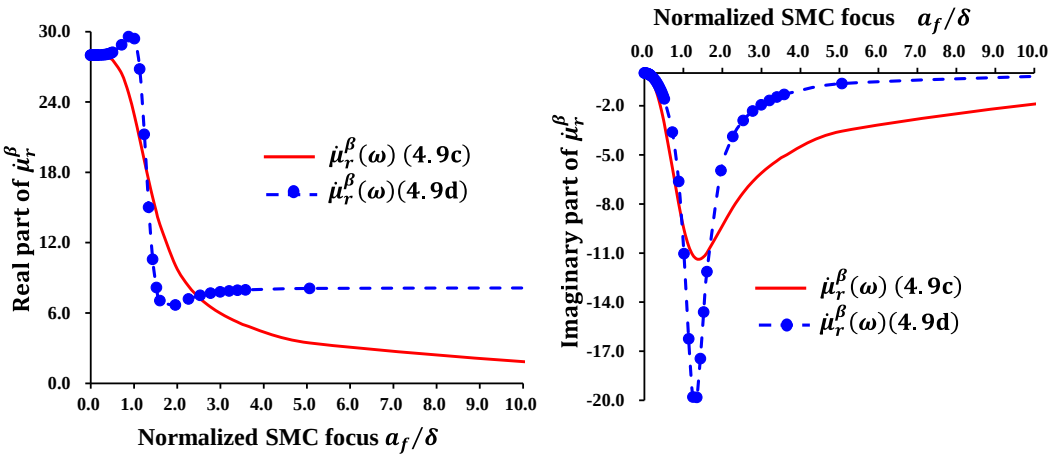
$$j_1(\zeta^{\alpha}) \sim \frac{1}{\zeta^{\alpha}}\cos(\zeta^{\alpha} - \pi) = \frac{1}{\zeta^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\zeta^{\alpha} - \pi)^{2n}}{(2n)!} \tag{4.10a}$$

$$j_1(\zeta^{\beta}) \sim \frac{1}{\zeta^{\beta}}\cos(\zeta^{\beta} - \pi) = \frac{1}{\zeta^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\zeta^{\beta} - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{4.10b}$$

により，(4.9a, c)は$\zeta^{\alpha}, \zeta^{\beta}$ の値によっては指数発散項が現れる場合があることがわかる [4.1, 4]．したがって，(4.9a, c)は数値不安定性があり，複素透磁率の表示には適さない．一方で，(4.9b, d)の場合，周波数に依存する部分は $\tan\zeta^{\alpha}/\zeta^{\alpha}, \tan\zeta^{\beta}/\zeta^{\beta}$ であるが，これらは本質的に電磁鋼板の複素透磁率(4.1a)と同じであり，この場合も分子分母の項において，$\exp(-a_f\sinh\eta_0/\delta), \exp(a_f\cosh\eta_0/\delta)$ に比例する項が含まれるものの，計算上約分されてしまうので，巨大な数字の演算による数値不安定性は現れない．したがって，(4.9b, d)は数値的に安定である．

Table 4.12 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig.4.17

α [μm]	β [μm]	σ [S/m]	μ_r
25.0	15.0	1.03×10^7	28.0



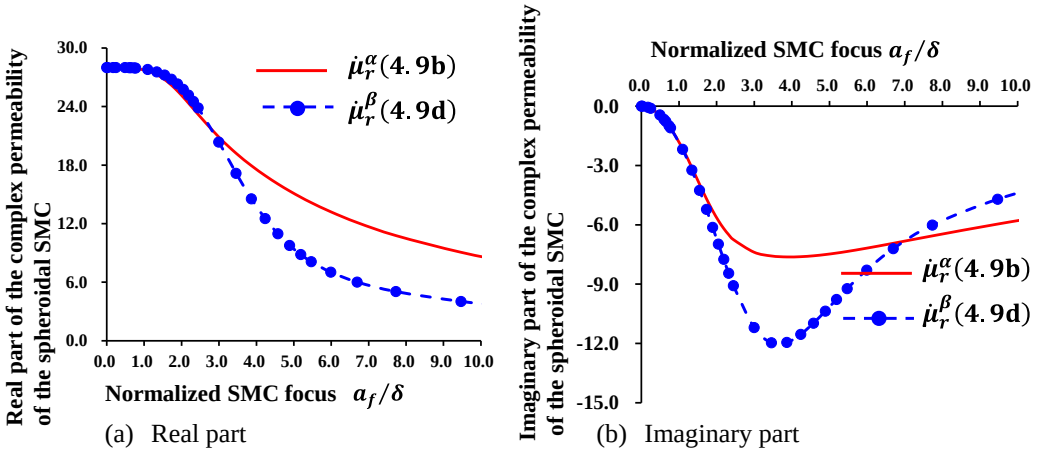
(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.19 Comparison of the complex permeabilities of the spheroidal SMC.
Abscissa denotes the normalized SMC focus a_f/δ. When $a_f/\delta \geq 1$, the loss due to the eddy current becomes significant. From this figure, we find that the complex permeability tensor (4.9b, d) is executable for numerical analysis of a SMC core by the homogenization-based FEA.

つぎに，解析緒元を Table 4.12 から Table 4.13 に変更，つまり短軸を短くし，より扁平率を上げて，磁界の印加方向に伴う複素透磁率の差異を調べる．(4.9b, d)から評価できる $\dot{\mu}_r^{\alpha}, \dot{\mu}_r^{\beta}$ の周波数特性を Fig.4.20 に示す．Fig.4.20 において，実部は反磁界を考慮した透磁率，虚部は渦電流損を表すことは前節までの複素透磁率と同じであるが，長軸(Fig.4.18 では y 軸)の方が磁束を受ける表面積が大きいため，反作用磁界の影響が大きいことが確認できる．

Table 4.13 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig. 4.18

α [μm]	β [μm]	σ [S/m]	μ_r
25.0	10.0	1.03×10^7	28.0



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.20 Comparison of the complex permeabilities of the spheroidal SMC.
Abscissa denotes the normalized SMC focus a_f/δ. When $a_f/\delta \geq 1$, the eddy current loss due to the applied magnetic induction becomes significant. From this figure, we find that the diamagnetic field of the long axis has larger effect than that of the short axis.

4. 3　Unit-cell Approach とのマクロ複素透磁率の比較 (2 次元)

本節では，第 3 章 3.1 節で示した，マクロ複素透磁率を unit-cell approach と Ollendorff の式に基づく方法の 2 種類で比較する．前者では，任意の形状に対して，数値的に評価することができるため，複雑な数式は不要であるが，物性や周波数，充填率の変更に伴い，解析を行う必要があり，また周期的に配列された磁性体に対してのマクロ複素透磁率の評価であり，磁性体同士の電磁気的接触効果は反映できない．その上，有限要素解析が行えることが前提であるので，表皮厚を考慮した有限要素分割が必要となる．一方で，Ollendorff の式に基づくマクロ複素透磁率は解析式により定義されるため，これらの制約は一般的にない．ここで，両者にはこうした差異がある一方で，両者で評価したマクロ複素透磁率が一致する場合と，一致しない場合の区別はどのような場合であるのか，という疑問が生じる．そこで，まず本節では，マルチターンコイルのマクロ複素透磁率をこれら 2 種類の方法で評価し，その差異を調べる．圧粉磁芯のマクロ複素透磁率については 3 次元問題として，次節で扱う．

第 3 章でも述べたように，unit-cell approach からマクロ複素透磁率を評価する場合，有限要素方程式を適切な境界条件を与えて解く．この場合，エネルギー保存則に基づき

$$\left\langle \dot{\mu}_r^{\xi} \right\rangle = \frac{\mathrm{j}\omega \int_{\Omega} \frac{|\boldsymbol{B}_0|^2}{\mu_0}\,\mathrm{d}\Omega}{-\int_{\Omega_c} \sigma |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}\Omega_c + \mathrm{j}\omega \int_{\Omega} \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\mu^{\xi}}\,\mathrm{d}\Omega} \tag{4.11}$$

と評価できる．ここで，Ω_c は導体領域，Ω は解析領域全体を示す．(4.11)は第 3 章では(3.2b)に相当する．有限要素解析の際には，第 2 章で示した準静電磁界の支配方程式(2.81)を解くことになる．一方で，周波数領域に拡張した Ollendorff の式を用いる場合は，磁性体が充填率 η_f で領域内に存在する場合，$\mathbf{e}_{\xi}$ 方向に磁界が印加された場合のマクロ複素透磁率

$$\left\langle \dot{\mu}_r^{\xi} \right\rangle = 1 + \frac{\eta_f \left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1 \right)}{1 + N_{\xi}\left(1 - v_f\right)\left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1 \right)}, \xi = x, y, z \tag{4.12}$$

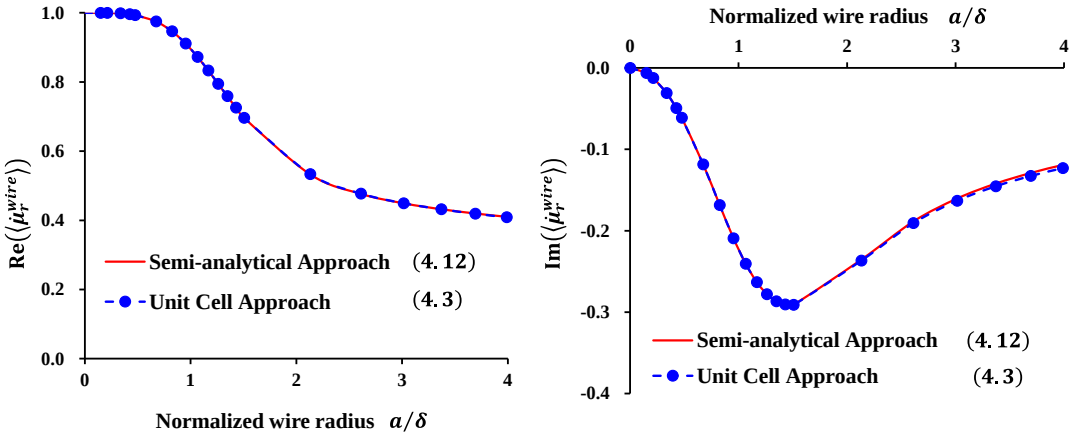
を得る．(4.12)は第 3 章においては(3.347)に相当する．また $\dot{\mu}_r^{\xi}$ については，第 3 章の Table 3.13 にまとめている．以下では，いくつかの磁性体についての周波数特性を比較したデータを示す．

4. 3. 1　銅巻線のマクロ複素透磁率

本節では，Fig.4.3 に示した銅巻線のマクロ複素透磁率を解析的表現と unit-cell approach の 2 通りで調べる．Table 4.14 に示す解析緒元で解析した結果を Fig.4.21 に示す．Fig.4.21 より，両者の方法は一致する結果を与えるとわかる．

Table 4.14 Specification of the multi-turn coil as shown in Fig. 4.3

η	σ [S/m]	μ_r	a [mm]	Cell size [mm^2]
0.55	5.76×10^7	1.0	0.10	0.12×0.12



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.21 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the multi-turn coil.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that the agreement between both these complex permeabilities is obtained.

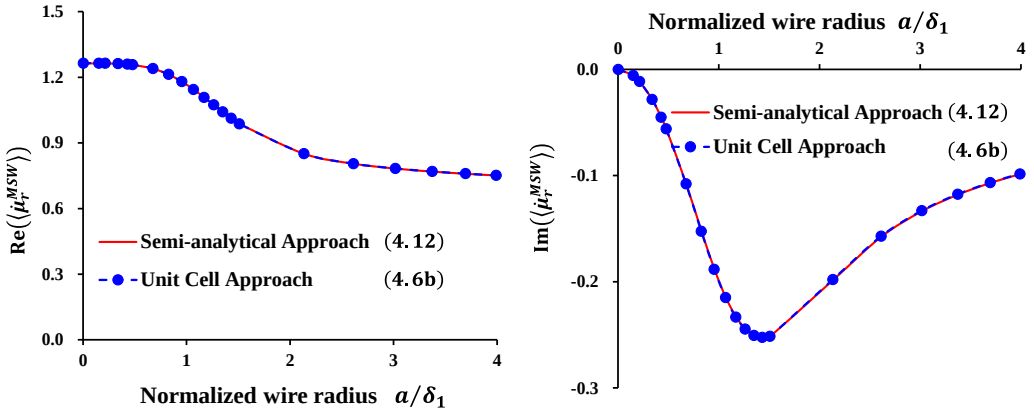
4. 3. 2　磁性被覆コイルのマクロ複素透磁率

本節では，Fig.4.7 に示すような磁性被覆コイルのマクロ複素透磁率の周波数特性を，解析的表現と unit-cell approach の 2 通りで評価する．ただし，磁性被覆は導電性を有しているものとする．また，Ollendorff の式に代入する複素透磁率は数値不安定性のない(4.6b)を用いる．まず，解析緒元が Table 4.15 のように十分に磁性被覆の緒元が小さい場合のマクロ複素透磁率の周波数特性を Fig.4.22 に示す．Fig.4.22 から，十分に一致した解析結果が得られているとわかる．なお，unit-cell approach において，周波数が 100 kHz の場合の磁束線分布を示した図を Fig.4.23 に示す．実部から，磁性被覆に磁束が集中しており，虚部において反作用磁界が現れていることがわかる．

つぎに，Table 4.16 のように，解析緒元が高い場合のデータを Fig.4.24 に示す．この場合，両者にはわずかな差異が見受けられる．unit-cell approach において，周波数が 100 kHz の場合の磁束線分布を示した図を Fig.4.25 に示す．Fig.4.23 と Fig.4.25 を比較すると，磁性被覆の磁気遮蔽効果により，磁束が磁性被覆層に集中していることがわかる．この原因として，表皮厚を考慮して十分に細かい有限要素で系を離散化しても，磁性被覆が十分に薄い場合には，有限要素法では，数値誤差が残ってしまう．したがって，unit-cell approach にはこのような有限要素分割上の問題点がある．一方で，Ollendorff の式に基づく解析式においてはこの制限はない．

Table 4.15 Specification of the multi-turn MSC as shown in Fig. 4.7 with the low parameters

η	σ_1 [S/m]	σ_2 [S/m]	μ_{1r}	μ_{2r}	a [mm]	b [mm]	Cell size [mm^2]
0.60	5.76×10^7	1.03×10^4	1.0	10.0	0.10	0.1050	0.24×0.24



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.22 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the multi-turn MSC with the low parameters. Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ_1. From this figure, it is found that there are no meaningful discrepancies between these numerical results.

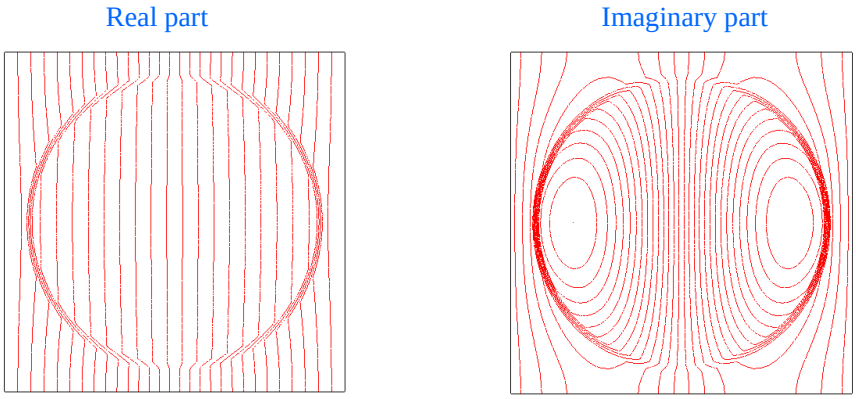
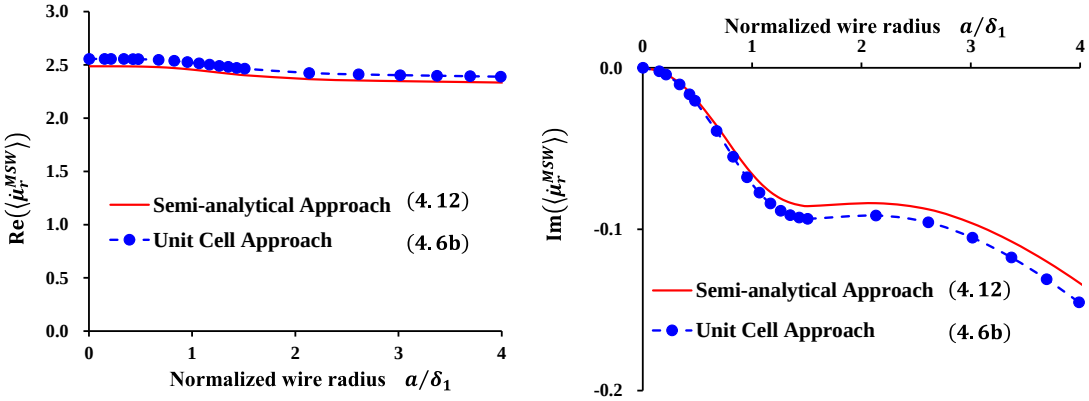


Fig.4.23 Magnetic flux lines of the unit-cell including the MSW with the low parameters.

Table 4.16 Specification of the multi-turn MSC as shown in Fig. 4.7 with the actual parameters

η	σ_1 [S/m]	σ_2 [S/m]	μ_{1r}	μ_{2r}	a [mm]	b [mm]	Cell size [mm^2]
0.60	5.76×10^7	1.03×10^7	1.0	100.0	0.10	0.1050	0.24×0.24



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.24 Comparison of the macroscopic complex permeabilities of the MSC with the actual parameters. Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that there are a little meaningful discrepancy between these numerical results.

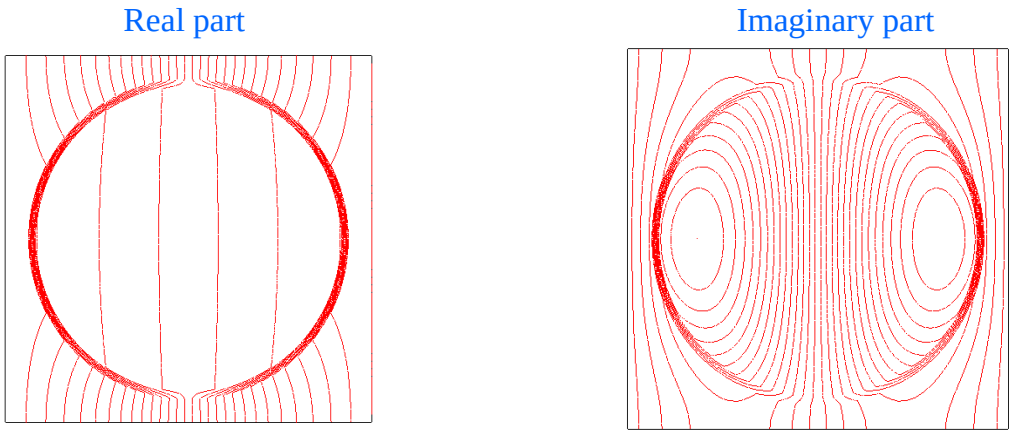


Fig.4.25 Magnetic flux lines of the unit-cell including the MSW with the actual parameters.
From this figure, we find that the magnetic fluxes concentrate to the magnetic shielding layer and tend to pass not through the wire conductor. Hence, the proximity effect loss can be reduced by the magnetic shielding effect.

上記の解析モデルでは，素線断面は全て円筒形と仮定した解析であった．円筒形の場合には，素線断面の複素透磁率が Bessel 関数を用いて解析的に求めることができ，磁性被覆の渦電流の効果は電磁鋼板の複素透磁率を用いて表せることができるとわかった．ここで，断面が正方形の場合はどうなるのだろうか，という疑問が生じる．本節では，断面形状を正方形断面に近似した磁性被覆線の解析を行う．解析モデルとして，Fig.4.26 に示すような正方形断面の磁性被覆線のマクロ複素透磁率の評価を unit-cell approach で行った場合，解析式で行った場合で比較する．unit-cell approach の際には，磁性被覆層の透磁率には電磁鋼板の複素透磁率を用いる．解析緒元を Table 4.1 とした場合に評価した結果を Fig.4.27 に示す．Fig.4.27 は正方形断面に近似した場合に，虚部において誤差が見受けられることがわかるが，全体的な傾向は一致していることがわかる．これは，電磁鋼板の複素透磁率を用いても，磁性被覆には Fig.4.25 に示すように局所的に磁束が集中するため，離散化を十分に細かく行っても解析精度の点で十分である保証がないことに起因する．したがって，十分に磁性被覆の透磁率が小さければ，両者はよく一致するのではないか，と考えられる．

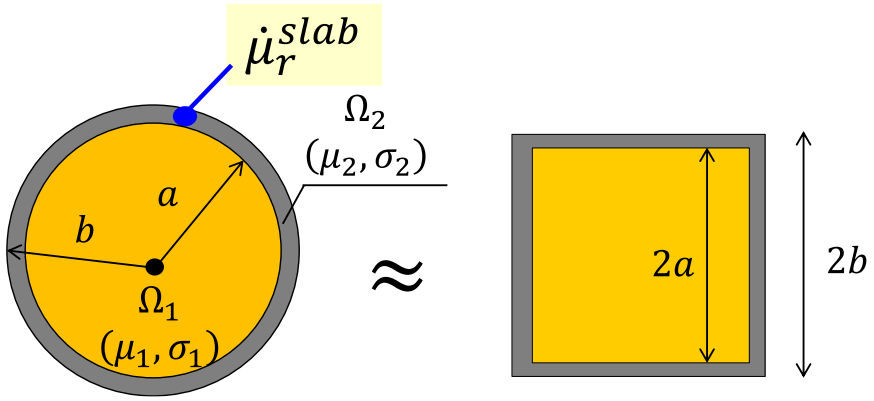
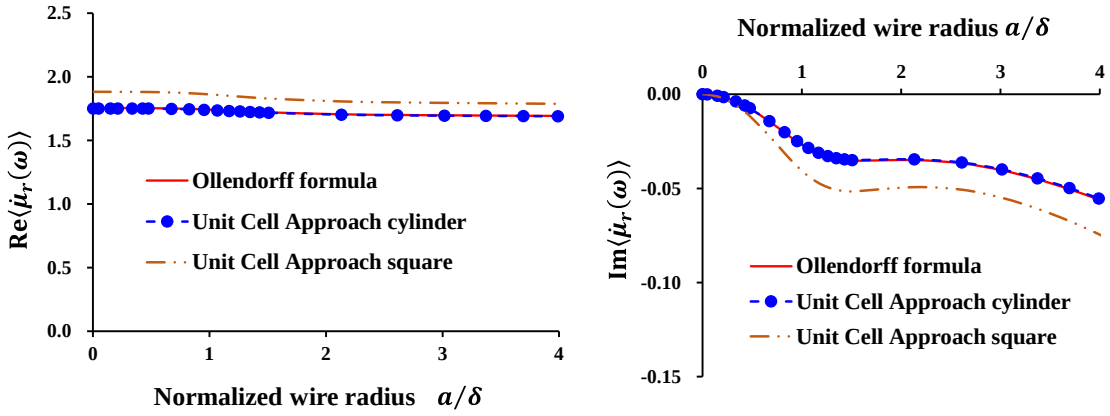


Fig.4.26 MSW with square cross-section.

Table 4.17 Specification of the MSW as shown in Fig. 4.26 with the actual parameters

η	σ_1 [S/m]	σ_2 [S/m]	μ_{1r}	μ_{2r}	a [mm]	b [mm]	Cell size [mm^2]
0.38	5.76×10^7	1.03×10^7	1.0	100.0	0.100	0.105	0.24×0.24



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.27 Macroscopic permeability of cylindrical and square shaped MSWs with the actual parameters.
From these figure, we find that there are little meaningful discrepancies between these results. However, both of the overall tendency have the good agreement.

そこで，Fig.4.26 の磁性被覆を絶縁皮膜にした場合のマクロ複素透磁率を評価する．このとき，Fig.4.28 に示すように通常の導線の解析となるので，この条件では，通常の銅線のマクロ複素透磁率に一致する解析結果が得られるはずである．解析緒元を Fig.4.18 のようにして，解析した結果を Fig.29 に示す．Fig.4.29 より，十分な解析精度で，正方形と円筒形断面の場合のマクロ複素透磁率が一致しているとわかる．すなわち，磁性被覆線の場合には僅かな誤差が生じるが，銅線の場合には十分な一致が得られていることがわかる．

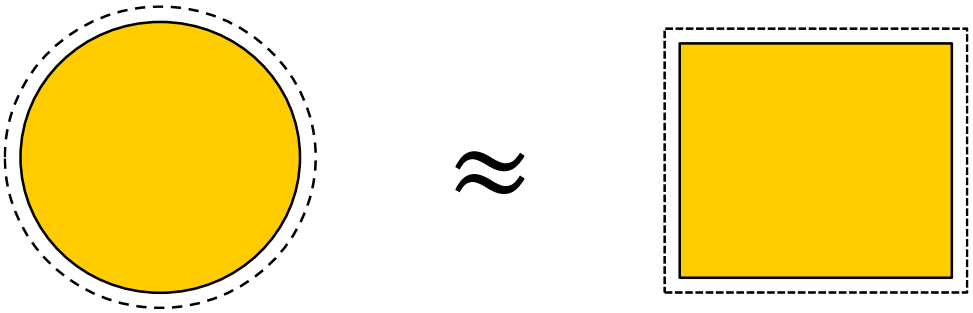
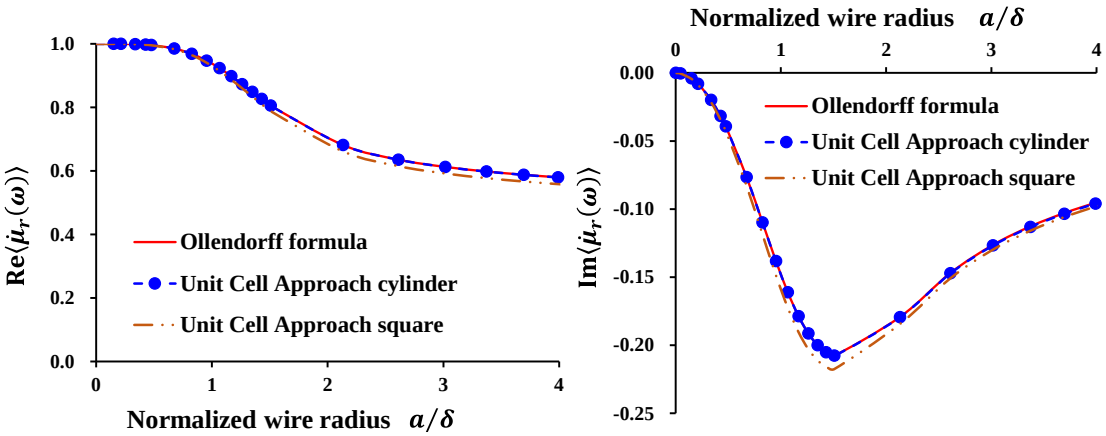


Fig. 4.28 MSW with square cross-section whose layer is assumed to be an insulator.

Table 4.18 Specification of the MSW as shown in Fig. 4.28 with the lower parameters

η	σ_1 [S/m]	σ_2 [S/m]	μ_{1r}	μ_{2r}	a [mm]	b [mm]	Cell size [mm^2]
0.38	5.76×10^7	1.03×10^{-5}	1.0	1.0	0.100	0.105	0.24×0.24



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.29 Macroscopic permeability of cylindrical and square shaped MSWs with the lower parameters.
In this model, it is found that the coincidence between them is satisfactory. Thus, the coil with square cross-section can be homogenized by using the macroscopic complex permeability (4.3).

4. 3. 3　楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率

本節では，Fig.4.30 に示すような楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率の周波数特性を調べる．楕円柱細線のテンソル型複素透磁率 $\left[\dot{\mu}_r^{elli}(\omega)\right]$ は，第 3 章で導出した

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) = \mu_r^x \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^x \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{Se}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta_1, q)} \tag{4.13a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) = \mu_r^y \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^y \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{Ce}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta_1, q)} \tag{4.13b}$$

である．(4.13a, b)は第 3 章ではそれぞれ(3.215a, b)に相当する．なお，ここでは長軸方向を $\mathbf{e}_x$，短軸方向を $\mathbf{e}_y$ とした．テンソル型マクロ複素透磁率は Ollendorff の式(4.12)に代入することで得られる．Table 4.19 に示す解析緒元でマクロ複素透磁率を評価した結果を Fig.4.31 に示す．Fig.4.31 より，両者の方法は一致する結果を与えるとわかる．また，短軸方向 $\mathbf{e}_y$ の方が反磁界係数 N_y が大きいため，実効透磁率は $\mathbf{e}_x$ 方向よりも小さくなる．これは短軸方向 $\mathbf{e}_y$ に磁界が印加された場合に磁束を受ける面積が大きく，渦電流による反作用磁界の効果が強く出ることを表す．

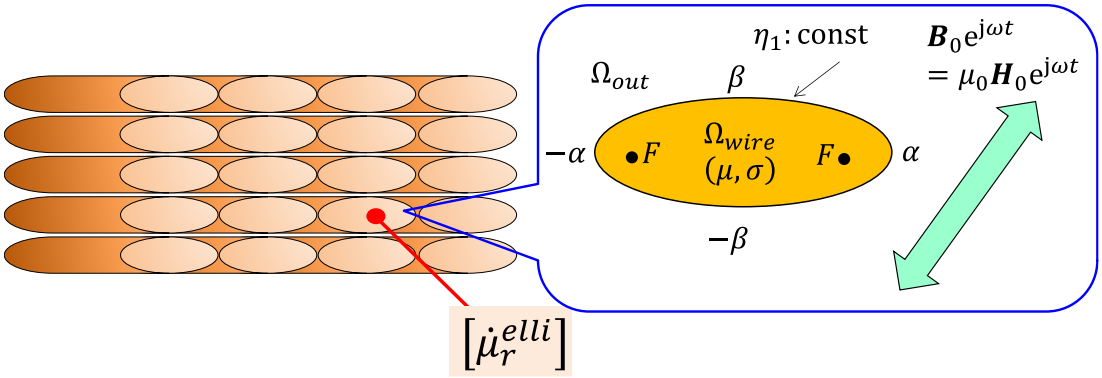
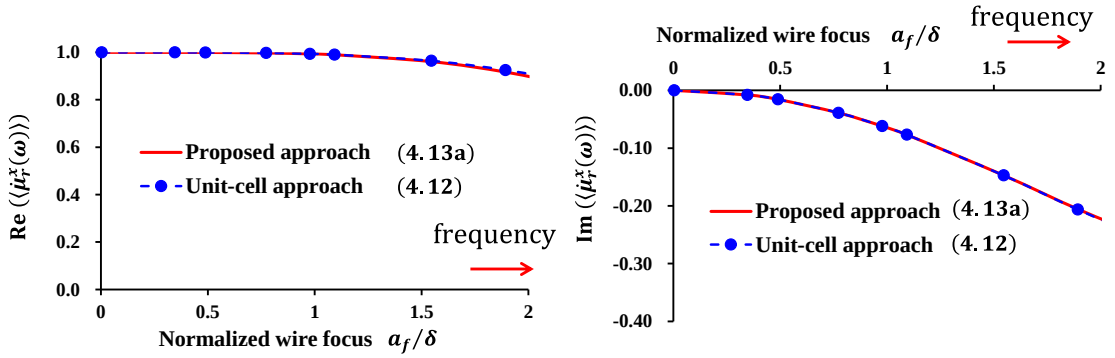


Fig.4.30 Bundle of wire conductors with elliptic cross-section immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
Each wire is homogenized by the tensor complex permeability. This model is an approximation model of rectangular coils which have been employed in electric machines mainly as armature windings of an IPMSM.

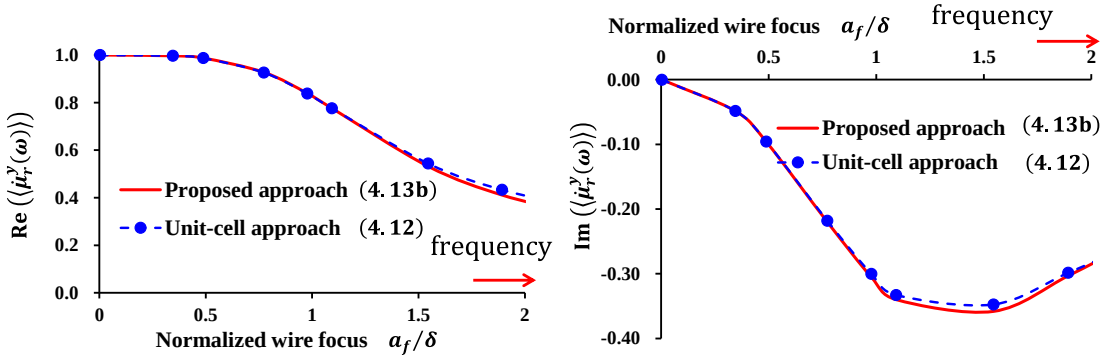
Table 4.19 Specification of the multi-turn coil with elliptic cross-section as shown in Fig.4.30

η_v	σ [S/m]	μ_r	α [mm]	β [mm]	N_x	N_y
0.70	5.76×10^7	1.0	0.25	0.10	0.34	0.66



(a) Real part　　(b) Imaginary part

(a) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^x \rangle$.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

(b) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^y \rangle$.

Fig.4.31 Frequency characteristic of $[\langle\dot{\mu}_r\rangle]$ evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell. Abscissa and ordinate are the wire focus a_f normalized by the skin depth δ and the complex permeabilities of the x, y–component, respectively. From these comparisons, we find that the coincidences between them are satisfactory. Moreover, the real part of the complex permeability of the short axis, that is, the effective permeability, which reflects the diamagnetic property of the short axis is smaller than that of the long axis at the same frequency because the diamagnetic field due to the proximity effect is dominant in the conductor region when a magnetic induction is applied along to the long axis.

4. 3. 4　磁性被覆楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率

本節では，Fig.4.32 に示すような磁性被覆楕円柱コイルのテンソル型マクロ複素透磁率の周波数特性を調べる．楕円柱細線のテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r^{MSW}(\omega)]$ は，第 3 章で導出した

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) = \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_x}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_x} \tag{4.14a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) = \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_y}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_y} \tag{4.14b}$$

である．(4.14a, b)は第 3 章ではそれぞれ(3.232a, b)に相当する．なお，ここでは長軸方向を $\mathbf{e}_x$，短軸方向を $\mathbf{e}_y$ とした．また，$\dot{u}_x, \dot{u}_y$ は(3.231a, b)に示されている．Table 4.20 に示す解析緒元で，unit-cell approach 及び(4.14)で評価したマクロ複素透磁率の周波数特性を Fig.4.33 に示す．なお，Table 4.20 の緒元は，4.3.2 節での結果を踏まえて，磁性被覆の緒元については十分に小さく設定している．Fig.4.34 より，両者にはわずかに差異が見られるものの，特徴は概ね一致しているとわかる．誤差の原因は 4.3.2 節に示したように，unit-cell approach における磁性被覆層の離散化の限界にあると考えられる．したがって，解析的に磁性楕円線の複素透磁率を定義した(4.14)は妥当であると考えられる．

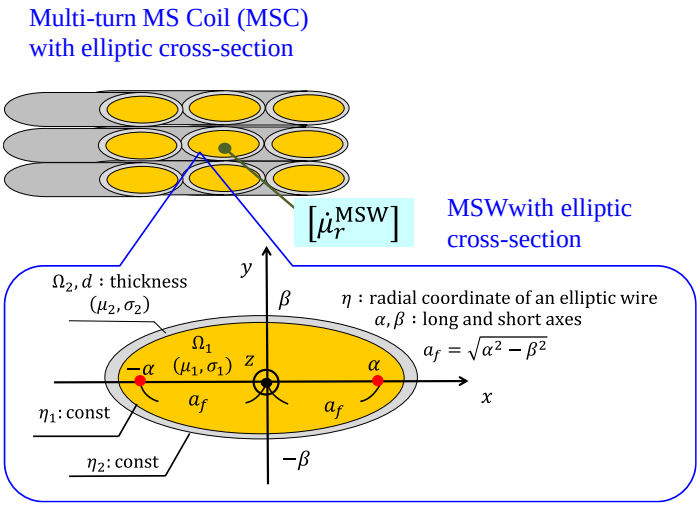
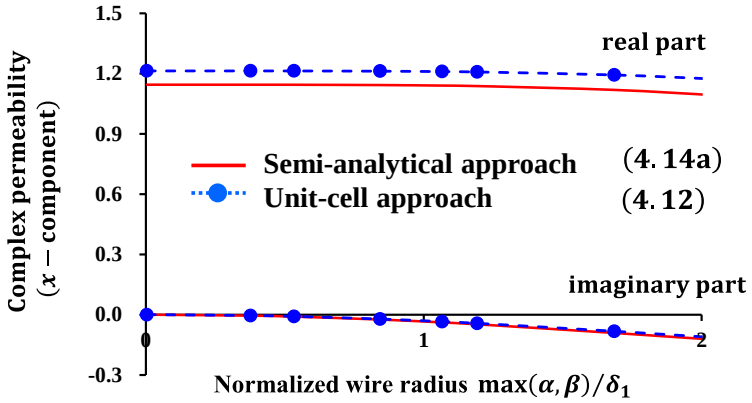


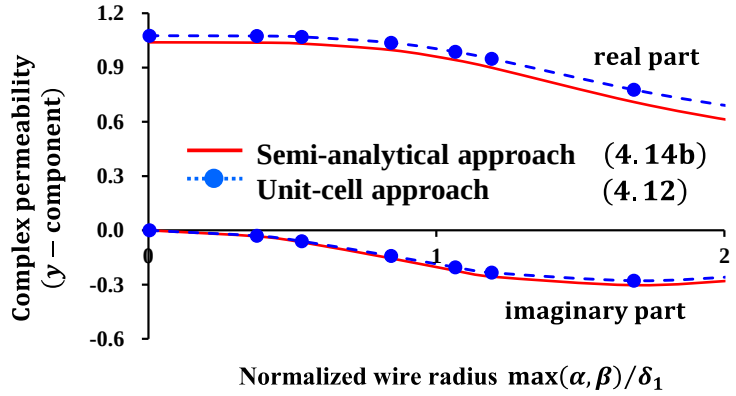
Fig.4.32 Bundle of wire conductors with elliptic cross-section immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.
Tensor complex permeability (4.14) including the complex permeability of a steel sheet as given by (4.1) is introduced for homogenization of this MSW.

Table 4.20 Specification of the multi-turn coil with elliptic cross-section as shown in Fig.4.32

α [mm]	0.25	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
β [mm]	0.10	μ_{2r}	10	σ_2 [S/m]	1.03×10^4



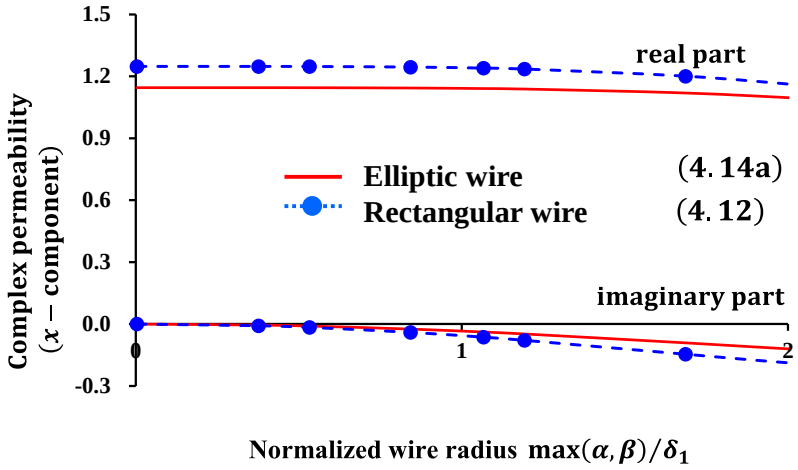
(a) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^x \rangle$.



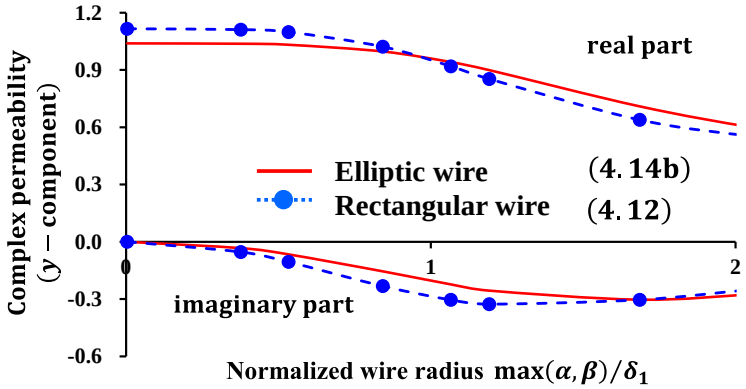
(b) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^y \rangle$.

Fig.4.33 Frequency characteristic of $[\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle]$ of the MSC with elliptic cross-section evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell.
Abscissa and ordinate are the wire focus a_f normalized by the skin depth δ and the complex permeability of the ξ–component, respectively. From these comparisons, we find that these are a little discrepancies between these two results. It stems from the finer discretization of shield layers when we employ the unit-cell method. Thus, $[\dot{\mu}_r^{MSW}]$ as shown in (4.14) can be used for finite element analysis based-on the homogenization method.

さて，この磁性楕円線は，第 1 章でも述べた磁性平角線の近接効果の近似的な表現として用いている．ここでの疑問は，磁性楕円線と磁性平角線では，マクロ複素透磁率がどの程度異なるのかということである．そこで，Table 4.19 の解析緒元で，磁性楕円線のマクロ複素透磁率を Ollendorff の式から求めた結果と，unit-cell approach により，磁性平角線のマクロ複素透磁率を求めた結果を比較する．この結果を Fig.4.34 に示す．Fig 4.34 より，概ねの傾向は一致していることがわかる．また，先にも述べた磁性被覆層の離散化の限界のため，数値結果にわずかに差異があると思われる．しかし，これらのことを踏まえると，磁性平角線の近接効果は，磁性楕柱円線の形状で十分に近似できると考えられる．



(a) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^x \rangle$.



(b) Frequency characteristics of $\langle \dot{\mu}_r^y \rangle$.

Fig.4.34 Frequency characteristics of $[\langle \dot{\mu}_r^{MSW} \rangle]$ of the MSC with elliptic cross-section evaluated by the proposed formula and that with rectangular cross-section computed by the unit-cell approach.
Abscissa and ordinate are the wire focus a_f normalized by the skin depth δ and the complex permeability of the ξ–component, respectively. We find that the overall tendencies are in good agreement except for the numerical error stem from discretization of the shield layer by too much finer elements.

4. 4　Unit-cell approach とのマクロ複素透磁率の比較　(3 次元)

前節では，2 次元問題を扱ったが，本節では 3 次元問題，特に圧粉磁芯のマクロ複素透磁率の評価を考える．大きな方針は 4.3 節と同様であるが，真球・楕円体を直接モデル化することは難しいので，それぞれ立方体・直方体に近似してマクロ複素比透磁率を評価する．本節では，数値解析結果に基づき，3 次元 unit-cell approach において生じる特有の問題について述べる．なお，unit-cell approach については，4.3 節同様(4.11)から評価したマクロ複素透磁率を求めるが，この場合，境界条件の設定は Fig.4.35 において，Table 4.21 の通りとする．Table 4.21 は，第 3 章の Table 3.3 に相当する．境界上の辺要素の設定における注意点は，第 3 章にて述べた通りである．

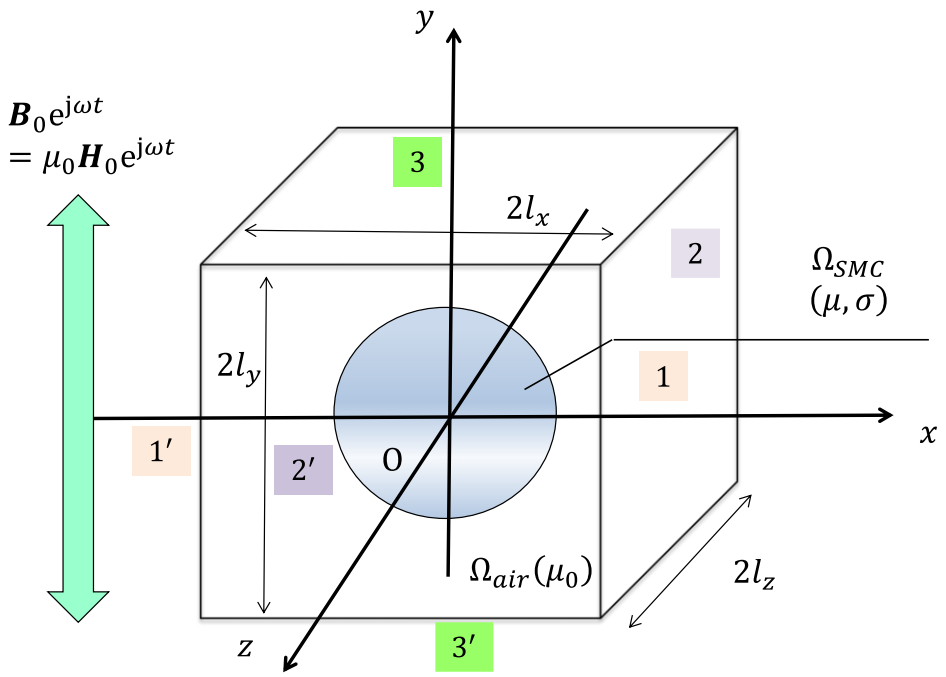


Fig.4.35 Magnetic particle in a unit-cell immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In order to apply a uniform external magnetic field to a unit-cell, boundary conditions have to be set as Table 4.21.

Table 4.21 Boundary conditions of a unit-cell for the unit-cell approach in 3D space

Face number	Conditions for the magnetic vector potential
1	$A_z = 0$ [Wb/m], $A_x = A_x^0$[Wb/m]
$1'$	$A_z = 0$ [Wb/m], $A_x = 0$ [Wb/m]
2	$A_z = -A_z^0$[Wb/m], $A_x = 0$ [Wb/m]
$2'$	$A_z = 0$ [Wb/m], $A_x = 0$ [Wb/m]
3	Neumann boundary condition
$3'$	Neumann boundary condition

4. 4. 1　真球圧粉磁芯のマクロ複素透磁率

本節では，Fig.4.5 に示した真球圧粉磁芯のマクロ複素透磁率の周波数特性を調べる．解析的なマクロ複素透磁率は(4.3a)を Ollendorff の式(4.12)に代入することで得られる．unit-cell approach においては，第 2 章 2.5.1.1 節で示した準定常問題(2.93)を解くことになるが，ここでは Fig.4.36 に示すように，有限要素の離散化の問題のため 1/8 領域での解析とし，離散化には 1 次四面体要素を用いた．Table 4.22 に示す解析緒元で，解析解と unit-cell approach で得られるマクロ複素透磁率を比較する．ここでは，$\mu_r = 1.0, 10.0$ と

し，磁性粒子が孤立した状況が再現できるように，充填率が十分小さくできるように単位セルの空気領域を十分に取っている．複素透磁率の周波数特性を Fig.4.37 に示す．この場合いずれの場合も良好な一致が見られる．しかしながら，Fig.4.36 のモデルは $1/8$ 領域であり，厳密なマクロ複素透磁率の評価においては，1 粒子そのものが単位セルに配置されたモデルで解析を行うことが望ましい．

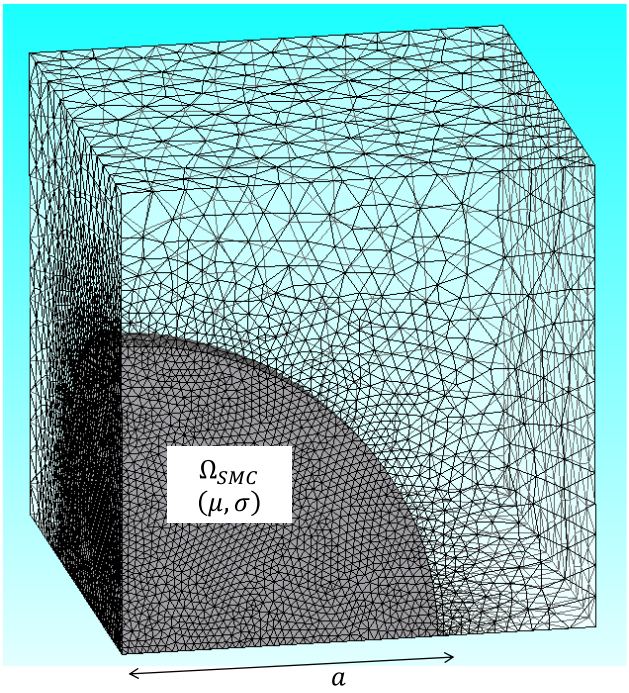
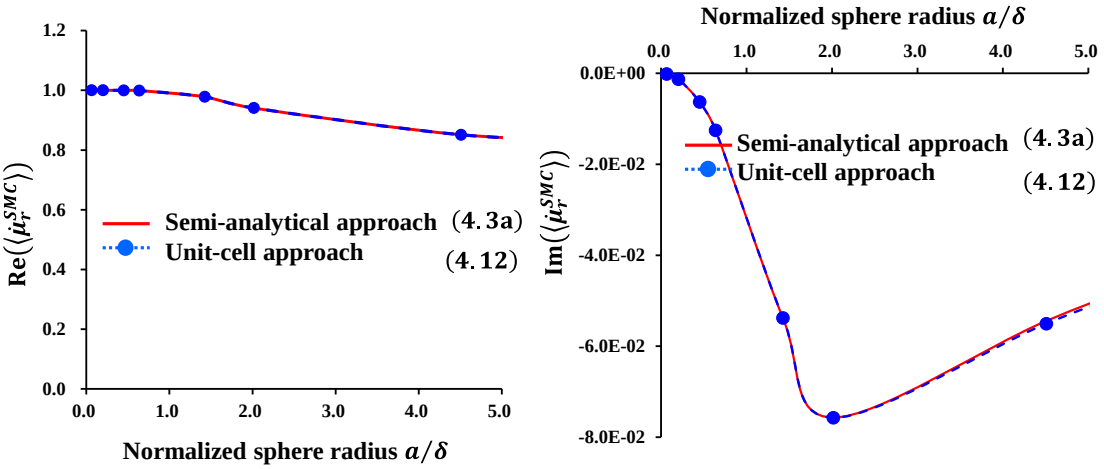


Fig.4.36 Unit-cell including a spherical SMC in $1/8$ region discretized by tetrahedral finite elements.

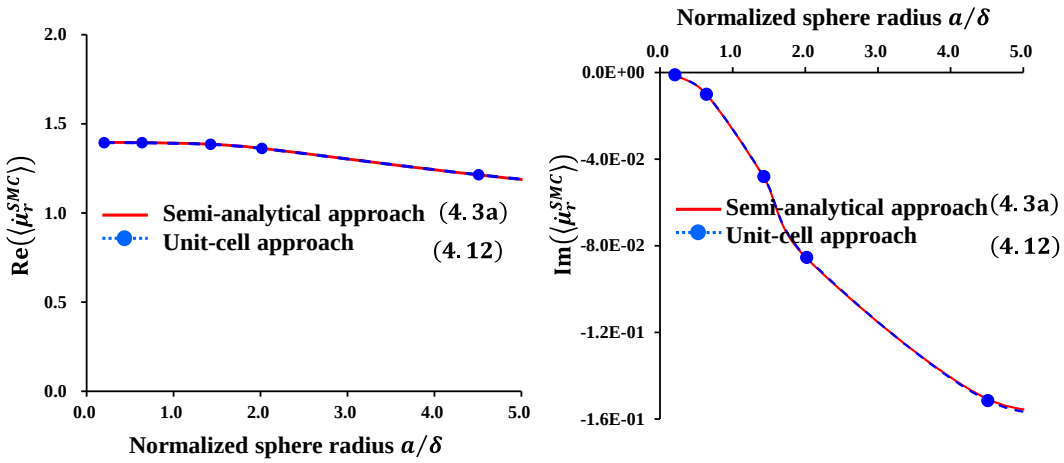
Table 4.22 Specification of the spherical SMC as shown in Fig.4.36

a [mm]	10.0	μ_r	1.0, 10.0	σ [S/m]	1.03×10^7	η	0.15



(a) Real part　(b) Imaginary part

(a) $\mu_{1r} = 1.0$



(a) Real part　　(b) Imaginary part

(b) $\mu_{1r} = 10.0$

Fig.4.37 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell.
Abscissa denotes the sphere radius a normalized by the skin depth δ. It is found that these results are in good agreement.

つぎに，Fig.4.38 に示すように，1 粒子が単位セル内にあるモデルのマクロ複素透磁率の評価を，unit-cell approach と Ollendorff の式に基づく方法で行う．なお，形状表現を容易にするため，Fig.4.38 のモデルでは，磁性球を 1 辺の長さが $2a$ の立方体に近似している．なお，Fig.4.38 の単位セルの離散化には 1 次六面体要素を用いた．

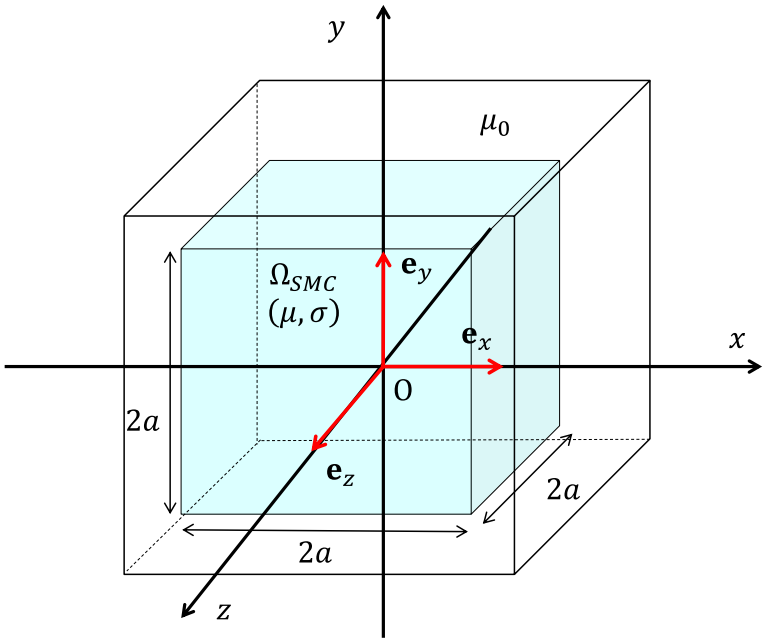


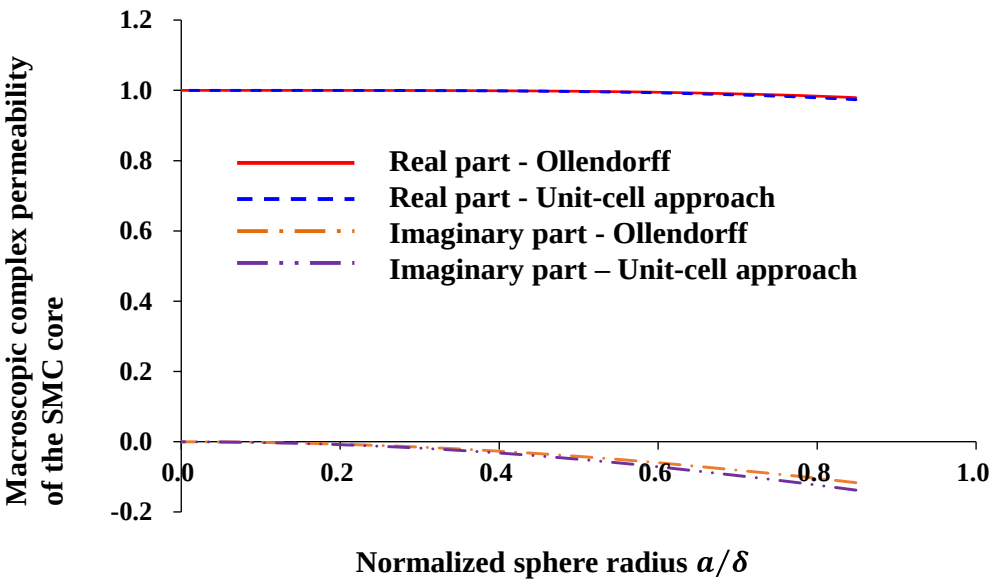
Fig.4.38 Unit-cell including a magnetic-conductive cubic particle.
This model is an approximation of a spherical soft magnetic composite. In performing FEM based on the unit-cell approach, we employ the hexahedral element for more precise evaluation of the macroscopic complex permeability.

解析条件を Table 4.23 のように設定した場合のマクロ複素透磁率の周波数特性を Fig.4.39 に示す．Fig.4.39 からつぎのことがわかる．$\mu_r = 1.0$ の場合，すなわち磁性粒子が導体球の場合には，両者は十分に一致していることがわかる．一方で，$\mu_r = 28.0$ の場合，すなわち磁性粒子が磁性体の場合には，両者に誤差が見受けられる．磁性球を立方体で近似していることも確かに数値誤差の一要因になっているが, Fig.4.39(b)のように低周波においては，この誤差は小さいはずである．したがって，形状の近似以外に関係する要因があると考えられる．現段階では，Ollendorff の式と unit-cell approach の状況の差異に起因する誤差の原因はまだ明らかとなっていない．

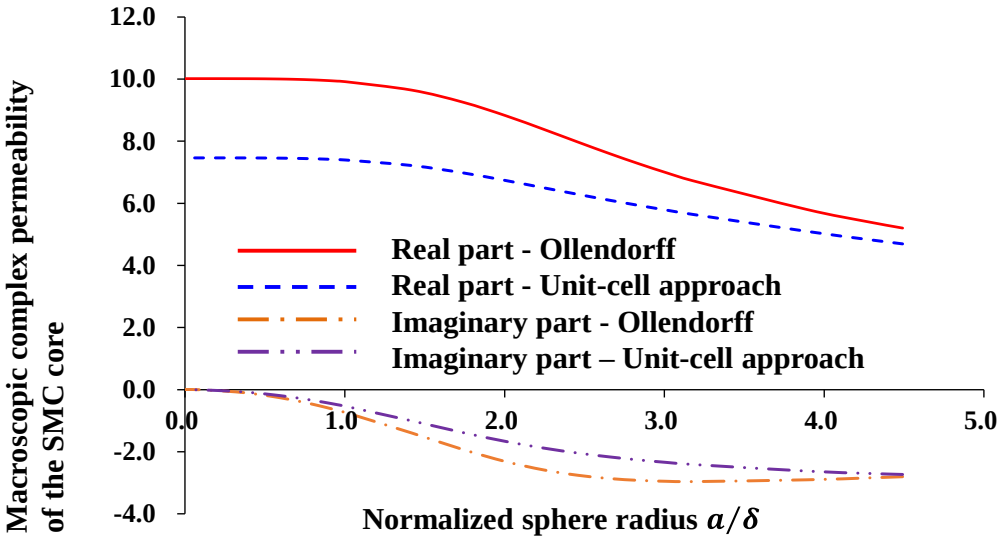
Fig.4.40 に $\mu_r = 28.0$ の場合の 80 MHz における磁束密度の分布を示す．磁束線の実部は，反作用磁界の効果により，磁性粒子内部に磁束線が侵入しにくくなっていることがわかる．したがって，磁束密度の強度は磁性粒子の内部では弱く，表面では強くなっていることがわかる．一方で，虚部の磁束密度の分布から，外部磁界を打ち消すような反双極子磁界が発生していることがわかる．Fig.4.40 の磁束密度分布から，物理的には妥当な有限要素解析結果が得られていることがわかる．

Table 4.23 Specification of the cubic SMC as shown in Fig.4.38

a [μm]	9.41	μ_r	1.0, 28.0	σ [S/m]	1.03×10^7	η	0.833

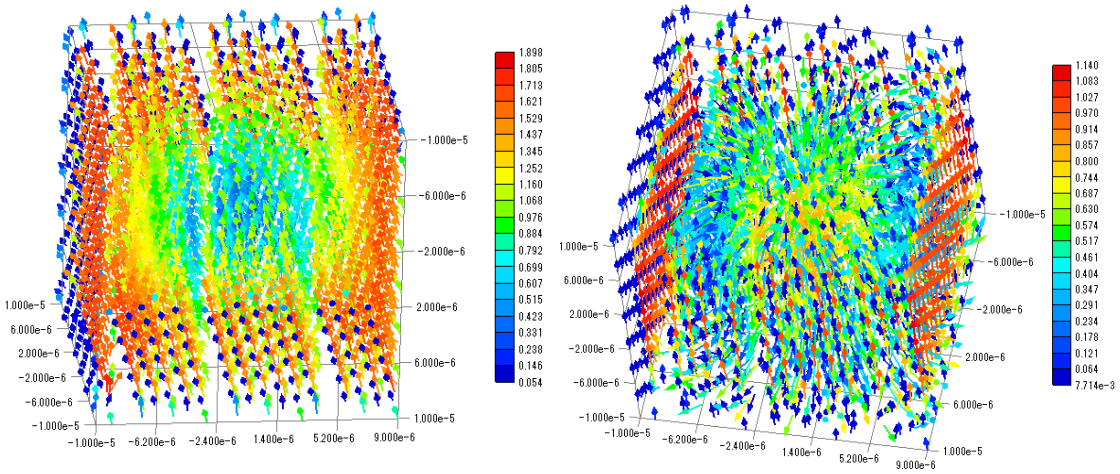


(a) $\mu_r = 1.0$



(b) $\mu_r = 28.0$

Fig.4.39 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC approximated to a cubic model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell.
Abscissa denotes the sphere radius a normalized by the skin depth δ. From this figure, we find that when $\mu_r = 1.0$, that is, this particle is a conductive sphere, the agreement of both values is observed, where as $\mu_r = 28.0$, there are non-negligible discrepancies between these results, and it remains unclear why when we treat magnetic-conductive particles, the error between them appears.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.40 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell.
From this figure, the diamagnetic field is observed. Moreover, when the operating frequency is sufficiently high, the magnetic fluxes tend to concentrate not on center but the surface of the SMC because of the dipole field induced by the eddy currents.

つぎに，Table 4.24 のように，充填率をより小さくした場合に，同様の解析を行った結果を Fig.4.41 に示す. Fig.4.41 から渦電流損失に対応する虚部の誤差は小さくなっていることがわかる. しかし一方で, 実効透磁率に対応する実部の誤差が改善されていない. したがって，充填率のみが単に誤差に関係しているとは判断できない.

Table 4.24 Specification of the cubic SMC as shown in Fig.4.38

a [μm]	7.65	μ_r	28.0	σ [S/m]	1.03×10^7	η	0.447

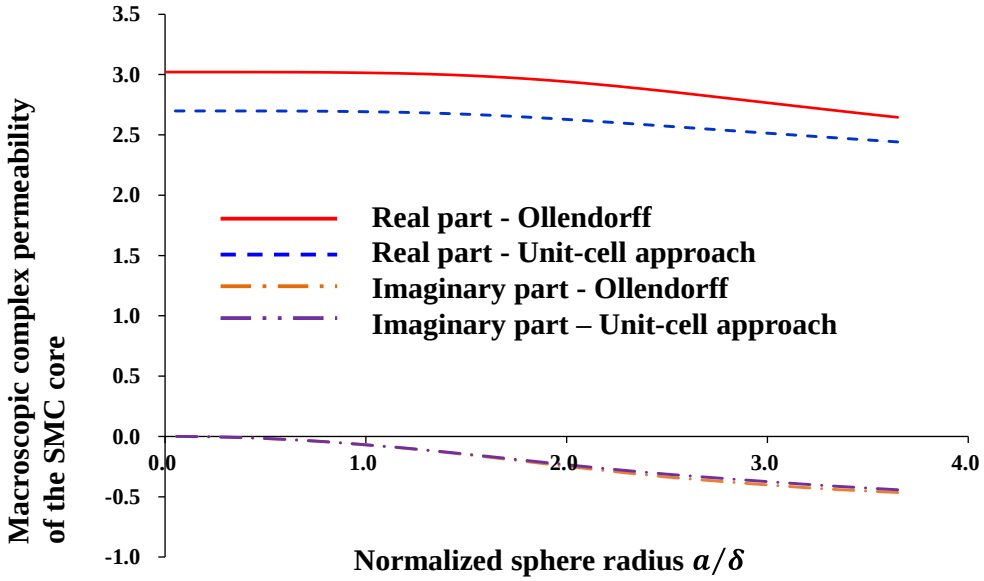


Fig.4.41 Frequency characteristics of the complex permeability of the SMC approximated cubic model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell when filling factor is sufficiently low.
From this figure, the error of the imaginary part becomes low whereas there is meaningful discrepancy in the real part.

4. 4. 2　磁性楕円体のテンソル型マクロ複素透磁率

本節では，扁平圧粉磁芯のテンソル型マクロ複素透磁率を，Ollendorff の式と，unit-cell approach の 2 通りで評価する．解析緒元は Table 4.24 の通りとする．まず最初に，1 次四面体要素を用いて 1/8 領域の単位セルを Fig.4.42 のように設定し，解析解と unit-cell approach で得られる短軸方向のマクロ複素透磁率 $\langle \dot{\mu}_r^{\beta} \rangle$ を比較する．本モデルでは，磁性粒子が孤立した状況が再現できるように，充填率が十分小さくできるように単位セルの空気領域を十分に取っている．この条件でのテンソル型複素複素透磁率の周波数特性を Fig.4.43 に示す. Fig.4.43 の結果から，両者は一致しないとわかる．この原因については，真球の場合と比べて，境界と非対称の形状である磁性導体が接している事等に起因する数値誤差が考えられるが，この原因については現在明らかとなっておらず，再調査を要する．

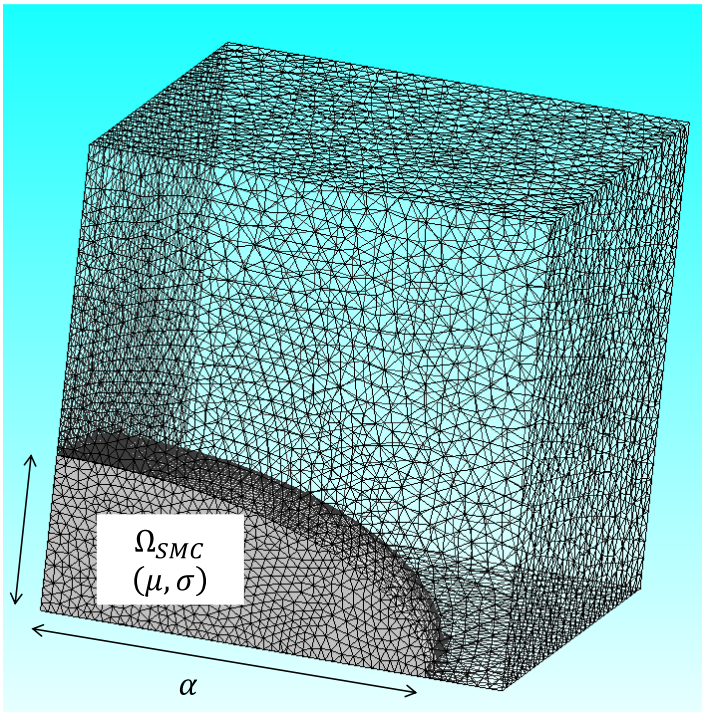
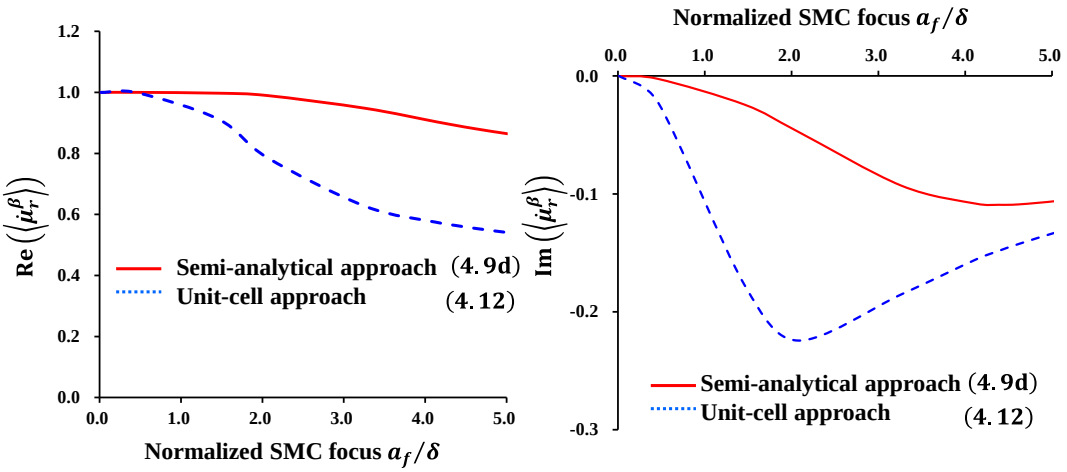


Fig.4.42 Unit-cell including a spheroidal SMC in $1/8$ region discretized by tetrahedral finite elements.

Table 4.24 Specification of the spheroidal SMC as shown in Fig.4.42

α [μm]	β [μm]	σ [S/m]	μ_r	η
25.0	15.0	1.03×10^7	1.0	0.18



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.43 Frequency characteristics of the complex permeability of a spheroidal SMC evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell.
Abscissa denotes the spheroid focus a_f normalized by the skin depth δ. We observe that there is a significant discrepancy in these results.

そこで，境界と磁性体が接する状況を避けるため，Fig.4.44 に示すように，直方体近似した磁性楕円体を含んだ単位セルを考える．この単位セルに，Table 4.21 と同様な境界条件を課すことで単位セルに外部一様磁界を印加し，3 次元準定常電磁界解析を行うことにより評価したマクロ複素透磁率と，解析解により得られたマクロ複素透磁率を比較する．なお，unit-cell approach においては，解析精度を十分に上げるため，1 次六面体要素を用いて離散化した．今回の解析では，磁性直方体の磁気特性は異方性であるので，外部磁界の向きを変更することにより，各成分のマクロ複素透磁率を評価することが必要である．周波数帯域は 1 Hz ~ 20 MHz とした．

解析条件を Table 4.25 のように設定し，外部磁界の向きを $\mathbf{e}_x$ 方向，$\mathbf{e}_y$ 方向とした場合のマクロ複素透磁率を Fig.4.45(a),(b)に，$\mathbf{e}_x$ 方向の磁束線分布を Fig.4.46 にそれぞれ示す．なお，Table 4.25 において，η は楕円体表面座標，η_v は体積充填率，N_ξ は $\mathbf{e}_\xi$ 方向の反磁界係数を示す．Fig.4.45 の解析結果から球形の場合と同様の誤差が見受けられるが，外部磁界の向きを $\mathbf{e}_y$ 方向に設定すると，直方体の方が，実際の楕円体の場合よりも磁束を受ける面積が大きくなるため，誤差が顕著になると思われる．しかしながら，実部の誤差，つまり渦電流を考慮した実効透磁率の誤差が 1.0 程度なので，直方体近似に伴う数値誤差を考慮すると，磁性楕円体のテンソル型透磁率は概ね妥当であると考えられる．

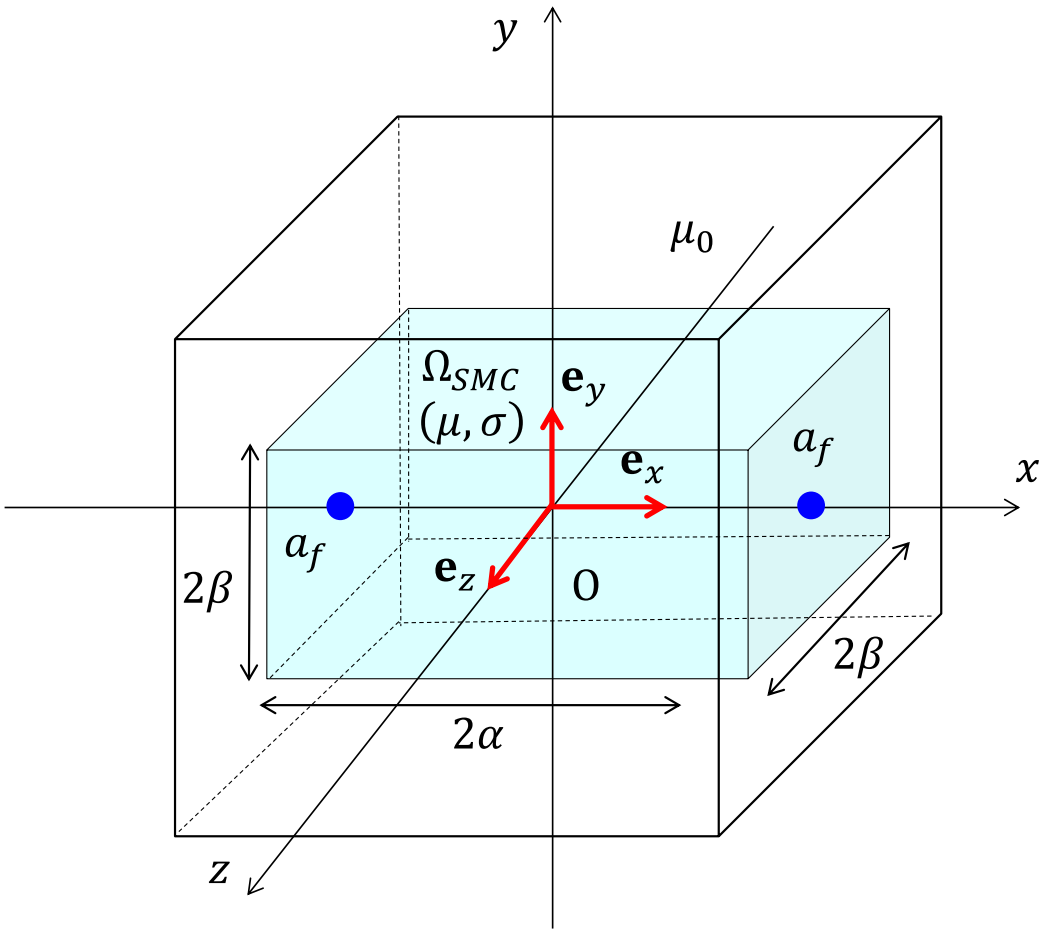
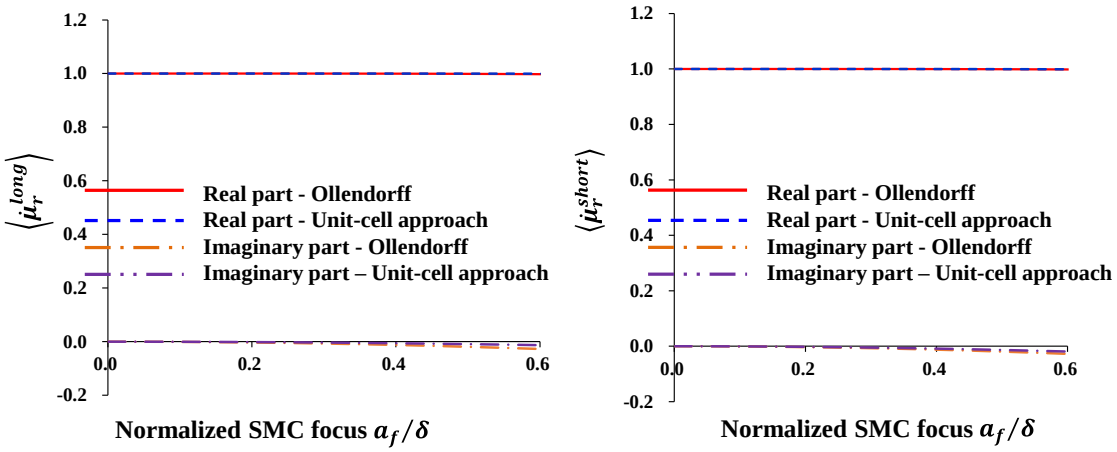


Fig.4.44 Unit-cell including a magnetic-conductive rectangular solid whose long and short axes are 2α and 2β, respectively.
This model is an approximation of a spheroidal soft magnetic composite. Note here that anisotropy stem from rectangular shape is considered by changing the direction of an applied magnetic field.

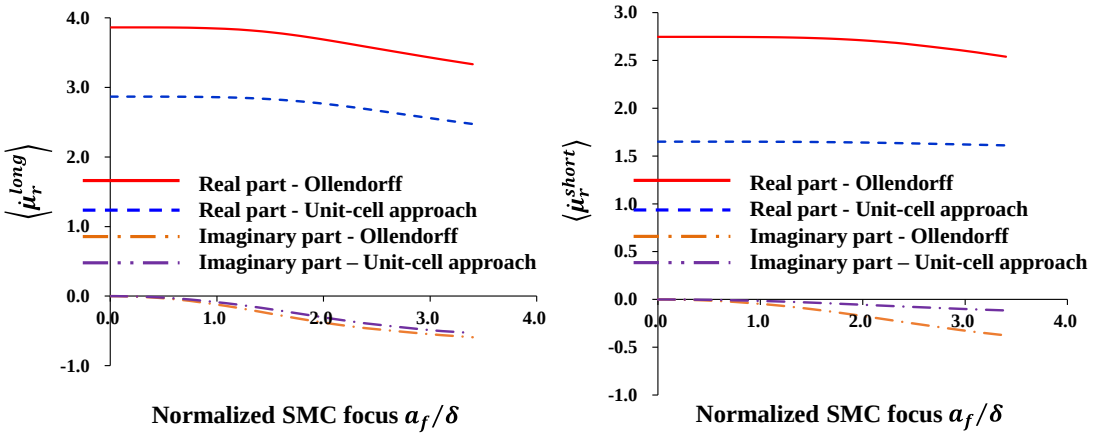
Table 4.25 Specification of the cuboid SMC as shown in Fig.4.44

a_f [μm]	α [μm]	β [μm]	μ_r	σ [S/m]	η	η_v	N_x	N_y	N_z
7.12	9.0	5.5	1.0, 28.0	1.03×10^7	0.711	0.446	0.214	0.393	0.393



(a) along to the x-axis　　(b) along to the y-axis

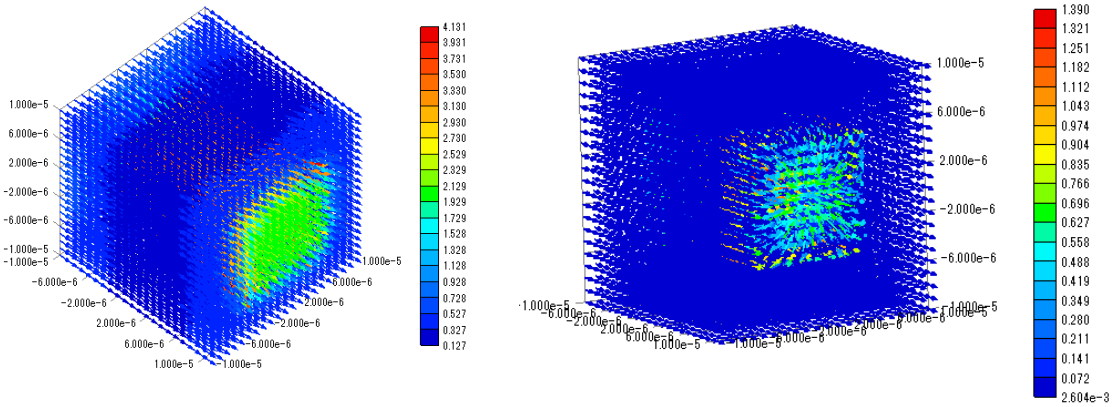
(a) $\mu_r = 1.0$



(a) along to the x-axis　　(b) along to the y-axis

(b) $\mu_r = 28.0$

Fig.4.45 Frequency characteristics of the complex permeability along to the x and y axes of the SMC approximated rectangular solid model evaluated by the proposed formula and FEM applied to a unit cell.
Abscissa denotes the spheroid focus a_f normalized by the skin depth δ.



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.4.46 Distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ of the unit-cell ($\mu_r = 28.0$).
From this figure, the diamagnetic field is observed. Moreover, when the operating frequency is sufficiently high, the magnetic fluxes tend to concentrate not on the center but the surface of the SMC because of the diamagnetic field induced by the eddy currents.

4. 4. 3 Unit-cell approach の 3 次元問題における問題点

4.3 節では，2 次元問題における Ollendorff の式により得られるマクロ等価透磁率と，Unit-Cell 法によって得られるマクロ等価透磁率はほぼ一致した結果を与えていることを示したが，本節での数値実験では，3 次元問題では差異が生じているとわかる．現段階では，つぎのように考察している．

① Ollendorff の式では，孤立した磁性体が一様に磁化される状況を模擬しているが，これでは再現できない効果があるのではないか．

② Unit-cell approach では，磁性粒子が周期的に配置されている状況のみを想定している．これに伴い，エネルギーの評価の妥当性は考える必要がある(Poynting ベクトルの表面積分項の修正が必要なのだろうか)．

③ 境界と導電性の磁性体が接していることで，電磁界の評価において局所的に誤差が発生しうるのか．

④ 導体の場合と磁性導体の場合では，形状の差異以外の要因，例えば磁束が磁性体表面に局所的に集中する効果における差異があるのか．

これらについては，今後の研究課題とする．

4. 5　均質化されたマルチターンコイルの解析(電流入力)

本節では，4.3 節で示したマクロ複素透磁率を用いて均質化されたマルチターンコイルの解析を行う．得られた電力や実効インピーダンス等を比較し，従来の微細な有限要素解析を必要とする準定常電磁界解析とより良い精度で解析を行うことを示す．また，本節では第 2 章で示した軸対称 2 次元，および 3 次元における有限要素方程式を解くこ

とになる．提案手法では，コイルの透磁率はマクロ複素透磁率であり，導電率はマクロ複素透磁率に含まれているので 0 とする．本質的には，軸対称 2 次元，3 次元の場合でも同様に適用できるが，3 次元解析の場合には，2.8 節で述べた単位電流の与え方に注意する．本節では，電流入力の問題を扱う．電圧源の考慮については，次節で扱う．また，特に断らない限り，本節では単位電流 1 mA を入力する場合を考える．

4. 5. 1　銅巻線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.47 に示すような軸対称性を有するマルチターンコイルを考える．解析緒元は Table 4.2 の通りとする．本手法を用いて，Fig.4.47 に示す 25 回巻コイルの実効インピーダンスを評価する．なお，$\eta = 0.55$ と設定した．軸対称を仮定し，$\langle\dot{\mu}\rangle$を用いた静磁界有限要素法(提案法)を用いる．比較として，均質化を用いない準静電磁場有限要素法(従来法)による解析も行う．なお従来法の場合は，表皮・近接効果を考慮した要素分割が必要となる．このことを考慮して，コイル領域の要素分割は Fig.4.47 に示すようにした. 結果として 25 回巻コイル領域の全要素数は 62,022 となった．一方で，提案法の場合には 25 回巻コイル領域を均質化したため，要素分割は Fig.4.47 (b)のようになり，25 回巻コイル領域の全要素数は 634 となった．以上の条件下でコイルの実効インピーダンスの周波数特性を解析した結果を Fig.4.48 に示す．Fig.4.48 の結果から，提案手法の解析結果は従来法とよく一致していることがわかる．

つぎに，$f = 1$ MHz の場合のコイル周辺の磁束線を比較する．解析結果を Fig.4.49 に示す．Fig.4.49 より，2 つの手法により求めたコイル外の磁束線分布は概ね一致していると言える．

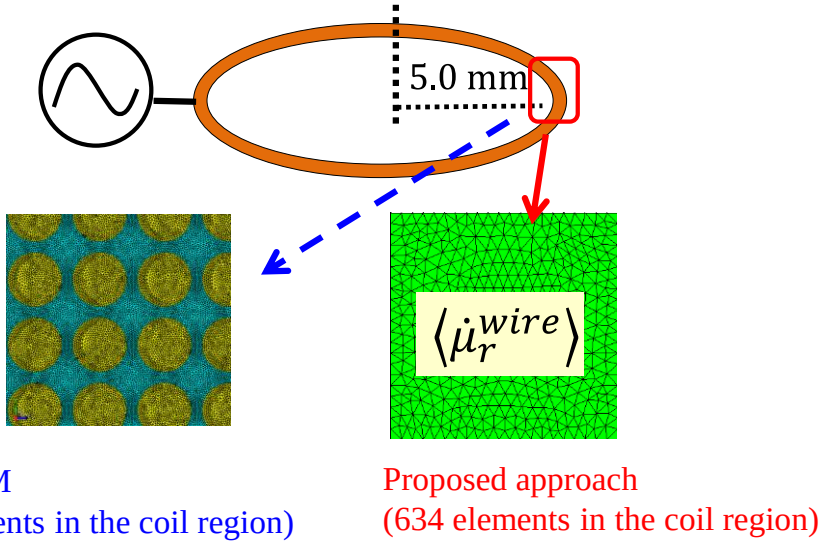
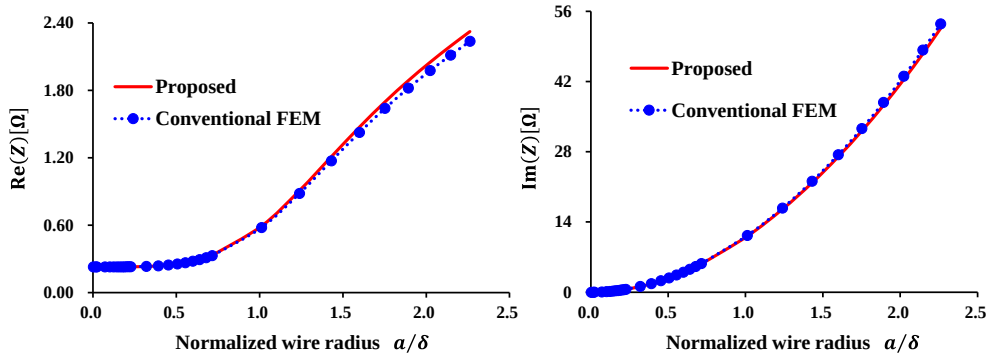
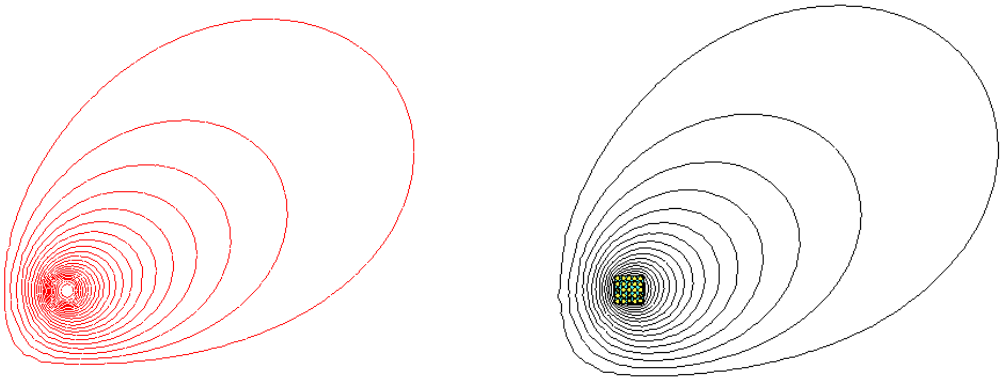


Fig.4.47 Finite elements of the 25-turn coil.
Standard FEM considering the eddy currents in each wire conductor requires subdividing the coil region into so small elements that they are smaller than the skin depth and air-gap among the wire conductors. On the other hand, when we perform the homogenization-based FEM with the macroscopic complex permeability, the coil region can be discretized with coarser elements because the coil can be treated as a bulk-coil.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.48 Impedance of the coil shown in Fig.4.47.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that both impedances calculated by two results are satisfactory.



(a) Proposed approach　　(b) Conventional FEM

Fig.4.49 Comparison of magnetic fluxes.

4. 5. 2 絶縁皮膜を有する磁性被覆線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.50 に示すような磁性被覆コイルの実効インピーダンスを求める．ただし，本節では初期検討として，磁性被覆は絶縁体とする．解析緒元は Table 4.26 の通りとした．比較として，均質化を用いない準静電磁場有限要素法(従来法)による解析も行う．なお従来法の場合は，表皮・近接効果を考慮した要素分割が必要となる．このことを考慮して，MSC 領域の要素分割は Fig.4.50(Conventional FEM)のようにした．結果として MSC 領域の全要素数は 83, 572 となった．一方で，提案法の場合には MSC 領域を均質化したため, 要素分割は Fig.4.50(Homogenized FEM)のようになり，MSC 領域の全要素数は 728 となった．この要素分割で磁性被覆の比透磁率 μ_{2r} を 1,10,100,1000 と変化させた場合のインピーダンスの周波数特性を Fig.4.51 に示す．Fig.4.51 から，提案手法の結果は従来法の結果とよく一致していることがわかる．本手法を用いることで，コイル中の要素数を約 1/100 倍としても従来法と概ね同じ解析結果が得ることができた．通常の有限要素法と本手法の結果に見られる差異の原因としては，①本手法では均一磁界を仮定しているが，実際には不均一性が存在しているため，②通常の有限要素法において十分に要素を細かくしたが，磁性被覆層が薄いことによる数値誤差が残ったため，等が考えられる．

つぎに，$f = 1$ MHz, $\mu_{2r} = 100.0$ の場合で MSC 周辺の磁束線を比較する．解析結果を Fig.4.52 に示す．二つの手法により求めた磁束分布は概ね一致しているとわかる．

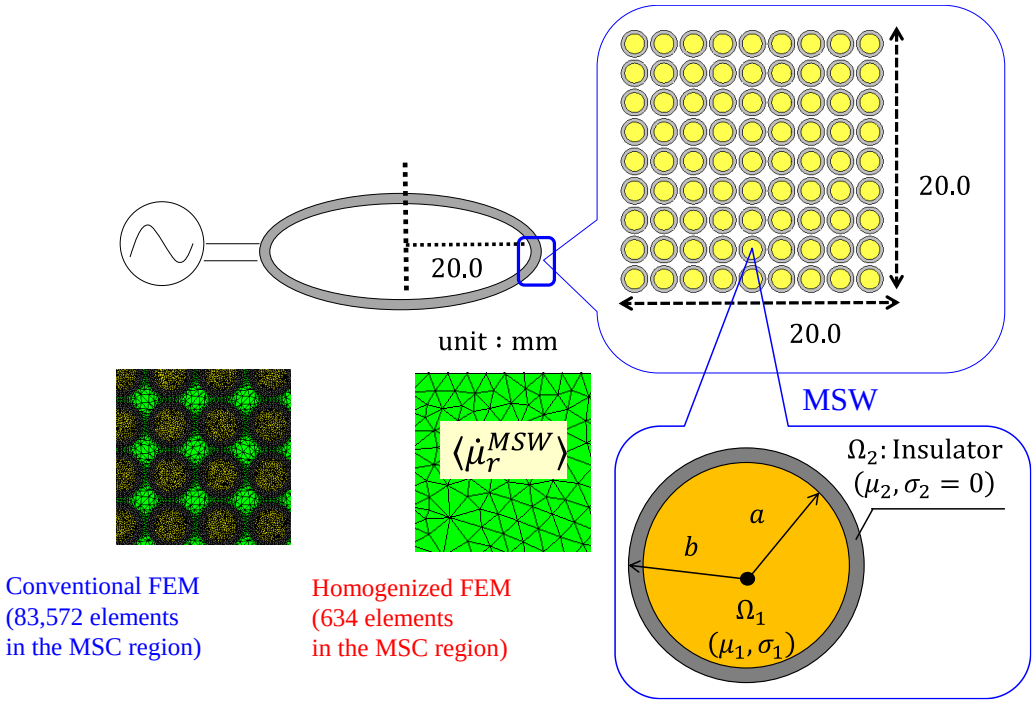
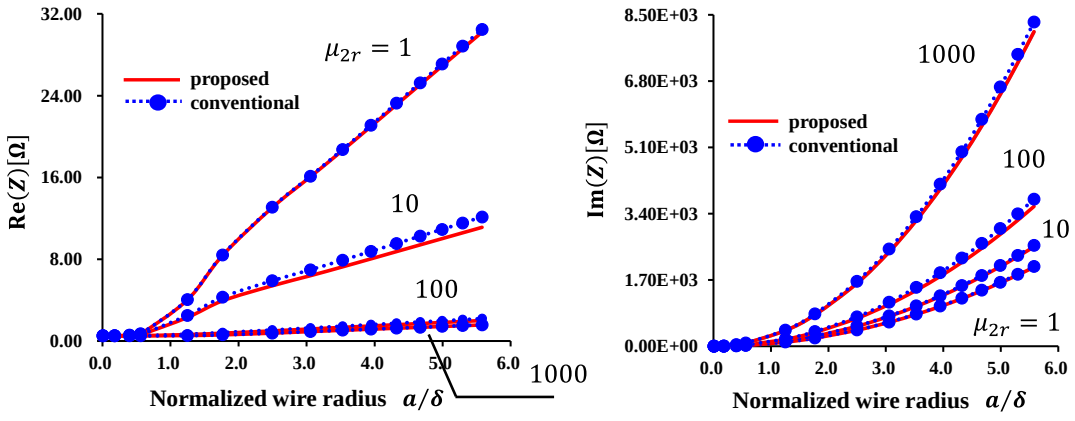


Fig.4.50 Finite elements of the 81-turn MSC.

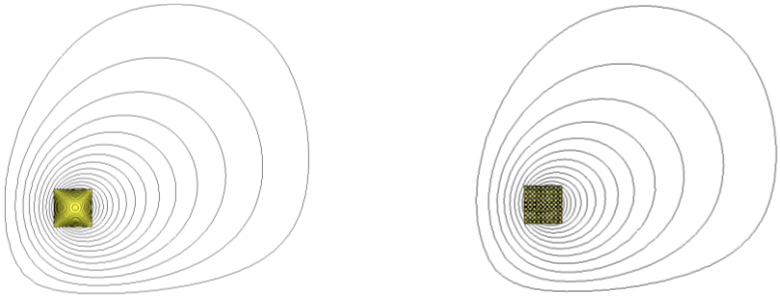
Table 4.26 Specification of the MSC with the insulator film as shown in Fig.4.50

a [mm]	0.37	μ_{1r}	1.0
b [mm]	0.50	σ [S/m]	5.76×10^7
η	0.64	f [Hz]	$1 \sim 10^6$



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.51 Impedance of the MSC shown in Fig.4.50.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that both impedances calculated by the proposed approach and the conventional FEM are in good agreement.



(a) Proposed approach　(b) Conventional FEM

Fig.4.52 Comparison of magnetic fluxes.

4. 5. 3　導電性の磁性被覆を有する磁性被覆線の場合

本節では，磁性被覆が導電性の問題を取り扱う．いま，Fig.4.53 に示すような 9 回巻きの磁性被覆コイルを考える．なお，このモデルでは，磁性被覆層を十分に離散化するため，巻数は小さくしている．まず，Table 4.27 のように，従来の有限要素法が適用できるように十分に磁性被覆の緒元が小さい場合を考える．この条件での実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.54 に示す．Fig.4.54 より，磁性被覆に導電性があっても，提案手法は十分に成り立つことがわかる．なお，誤差は最大で，実部で 2.2 %，虚部で 4.0 %であった．

つぎに，実際に使用される磁性被覆の緒元を想定した解析，つまり，Table 4.28 に示すような解析緒元を有した MSW を考える．この条件での MSW の実効インピーダンスと，磁性被覆が従来の絶縁皮膜，つまり単純な銅巻線の場合との実効インピーダンスを比較した結果を Fig.4.55 に示す．Fig.4.55 より，近接効果に伴う交流抵抗が抑制され，自己インダクタンスが増加していることがわかる．この結果から，高周波帯で駆動する電気機器の設計において，銅損抑制の観点から，磁性被覆線は有効であることがわかる．

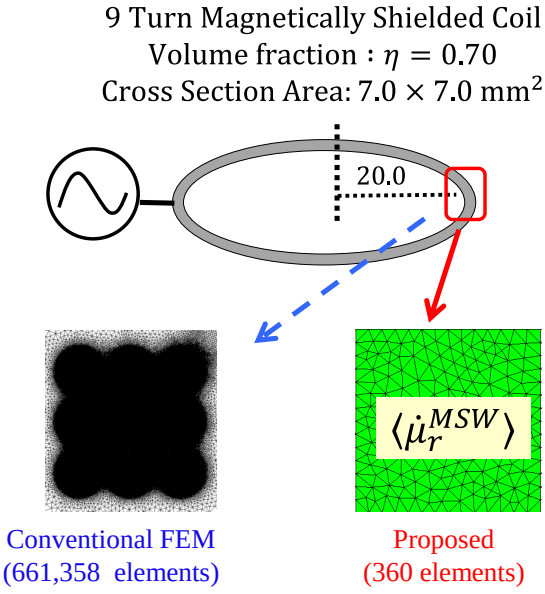
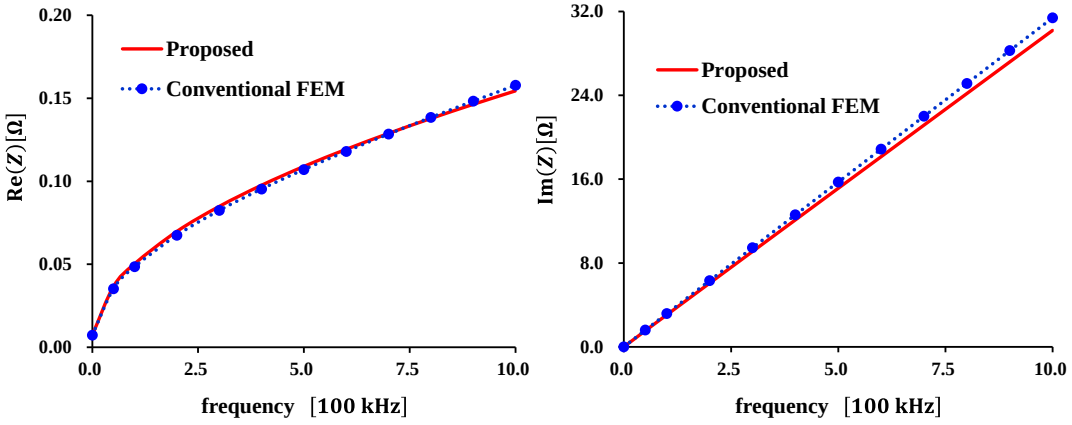


Fig.4.53 Finite elements of the 9-turn MSC.

Table 4.27 Specification of the MSC as shown in Fig.4.53 with the low parameters

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^4

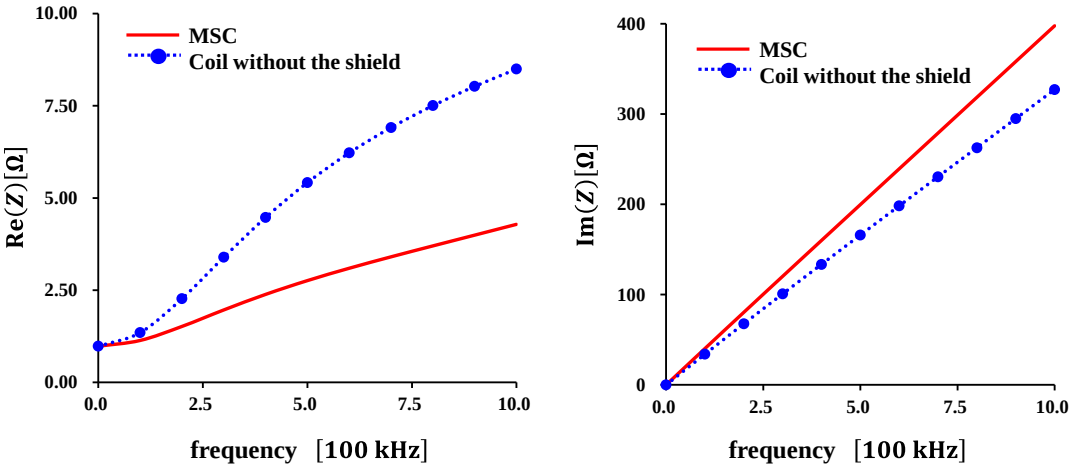


(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.54 Impedance of the coil shown in Fig.4.53 with the low parameters.
From this figure, it is found that both impedances calculated by two results are satisfactory.

Table 4.28 Specification of the MSC as shown in Fig.4.54 with the actual parameters

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	1.0,100.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^7



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.55 Impedances of the MSC and copper coil shown in Fig.4.53.
From this figure, it is found that the reduction of the AC resistance and improvement of the self-inductance can be achieved by introducing the MSC.

4. 5. 4　多層磁性被覆線の場合

本節では，多層磁性被覆コイルを取り扱う．いま，Fig.4.56 に示すような 9 回巻きの多層磁性被覆コイルを考える．まず，Table 4.29 のように，従来の有限要素法が適用できるように十分に磁性被覆の緒元が小さい場合を考える．この条件でのコイルの実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.57 に示す．Fig.4.57 より，交流抵抗については，誤差が見受けられる．この原因は，磁性被覆層には磁束が集中するため，Fig.4.58 に示すように，磁性被覆層の有限要素を直接的に十分に細かくしても，解析精度を高くすることができるとはいえない．しかし，この点を考慮すると，磁性被覆に導電性が存在しても，提案手法は十分に成り立つと言える．また，100 kHz 時点での磁束線の分布を Fig.4.59 に示す．Fig.4.59 から，磁束線分布は，多層磁性被覆コイルの場合でも一致する．

つぎに，実際に使用される磁性被覆の緒元を想定した解析，つまり，Table 4.30 に示すような解析緒元を有した MSW を考える．この条件での MSW の実効インピーダンスと，磁性被覆が従来の絶縁皮膜，つまり単純な銅巻線の場合との実効インピーダンスを比較した結果を Fig.4.60 に示す．Fig.4.60 より，近接効果に伴う交流抵抗が大幅に抑制され，自己インダクタンスが増加していることがわかる．実際には，磁性被覆の緒元や，厚みの設定には，最適化を要する．このことについては，第 5 章で述べる．

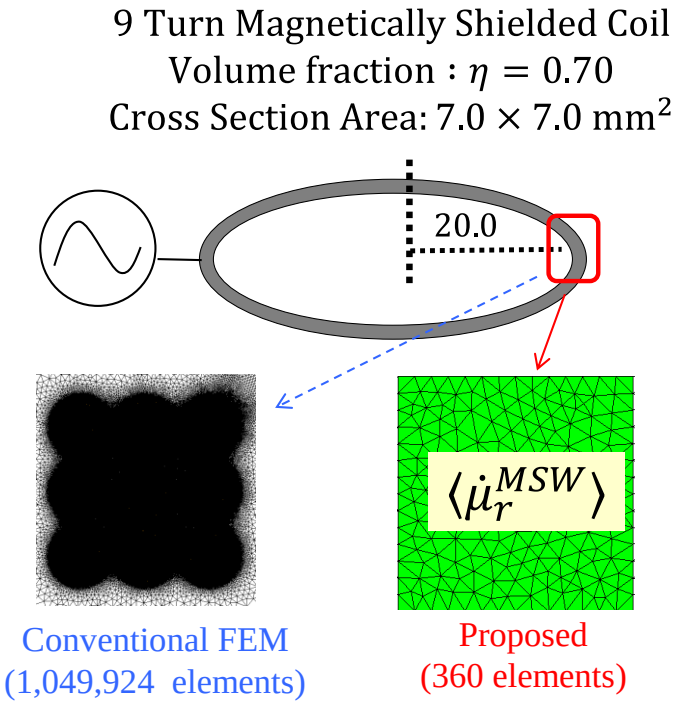
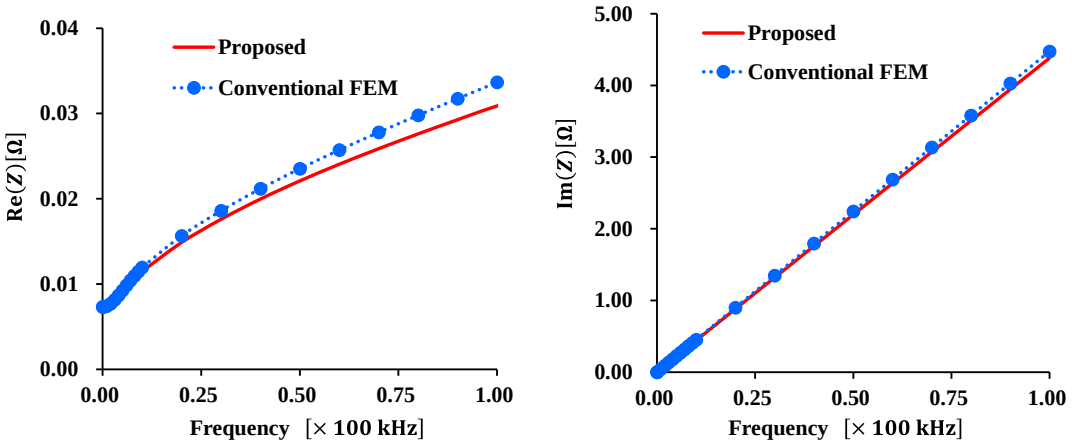


Fig.4.56 Finite elements of the 9-turn multi-layered MSC.

Table 4.29 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig.4.56 with the low parameters

a [mm]	1.0	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.05	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^5
c [mm]	1.1	μ_{2r}	100.0	σ_3 [S/m]	1.0×10^4



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.57 Impedance of the coil shown in Fig.4.56 with the low parameters.
From this figure, it is found that both impedances calculated by the two methods are in good agreement.

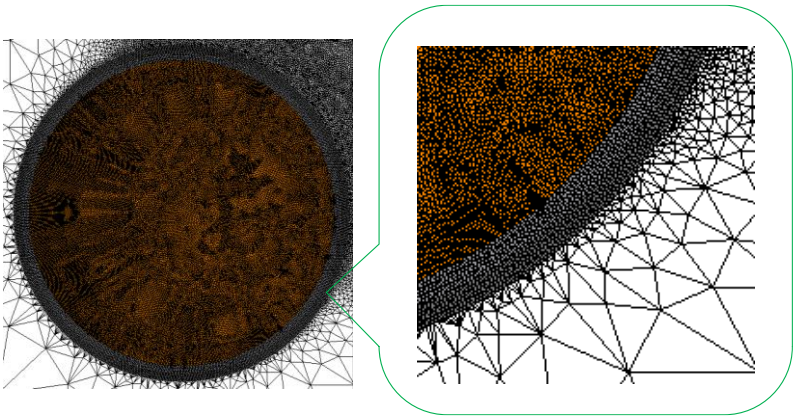
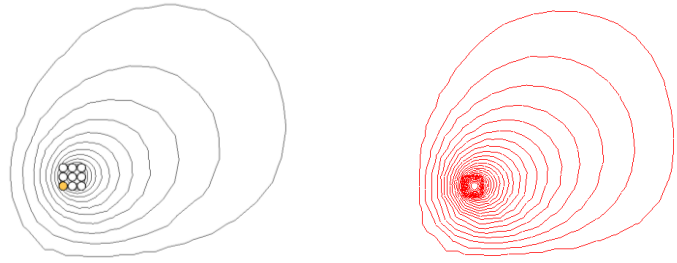


Fig.4.58 FE meshes of an isolated multi-layered MSW.
These much finer elements in shielding layers give rise to errors in numerical computation.

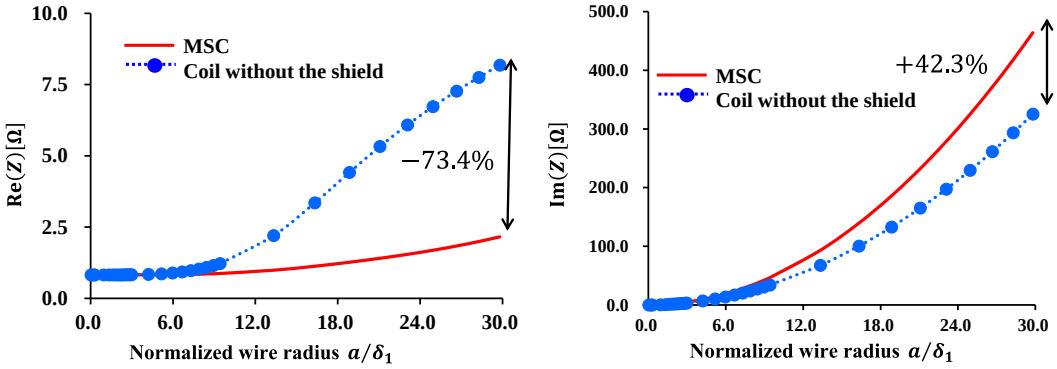


(a) Conventional FEM　　(b) Proposed approach

Fig.4.59 Magnetic fluxes around the multi-layered MSC.

Table 4.30 Specification of the multi-layered MSC as shown in Fig.4.56 with the actual parameters

$b-a$ [μm]	1.15	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
$c-b$ [μm]	1.16	μ_{2r}	600.0	σ_2 [S/m]	1.45×10^7
c [mm]	0.150	μ_{3r}	1000.0	σ_3 [S/m]	1.03×10^7



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.4.60 Impedance of the two types of coils shown in Fig.4.56.
From this figure, it is found that reduction of the AC resistance and improvement of the self-inductance can be achieved by introducing MSCs.

4. 5. 5　電流入力の場合の 3 次元解析の妥当性

前節までは，軸対称 2 次元問題で議論したが，本節では 3 次元空間における均質化されたマルチターンコイルを取り扱う．例えば，Fig.4.61 に示す軸対称のモデルを 1 回転させて得られる Fig.4.61 のモデルにおいて，実効インピーダンスの周波数特性を軸対称系の場合と比較する．Fig.4.61 において，黄色の領域は均質化されたコイルを，青色の領域は絶縁体の磁性体コアを表す．いま，3 次元有限要素法において，均質化されたコイル領域の有限要素数と解析精度を明らかにするため，Fig.4.62(a)においては有限要素サイズをやや粗めにした 10,490 とし，Fig.4.62(b)においては，さらに有限要素サイズを小さくして 78,220 と設定した．なお，軸対称 2 次元解析では，均質化領域の有限要素数は 728 とした．いま，Table 4.31 の条件で解析したコイルの実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.63(a, b)にそれぞれ示す．Fig.4.63(a, b)の比較から，3 次元解析においては，均質化されたコイル領域においても十分に細かい有限要素が必要であるとわかる．なお，磁性被覆線の場合でも提案手法で評価したコイルのインピーダンスの周波数特性と直接的な有限要素法で評価したコイルのインピーダンスの周波数特性が一致することが示せるが，これについては，次節の電圧源問題で示す．

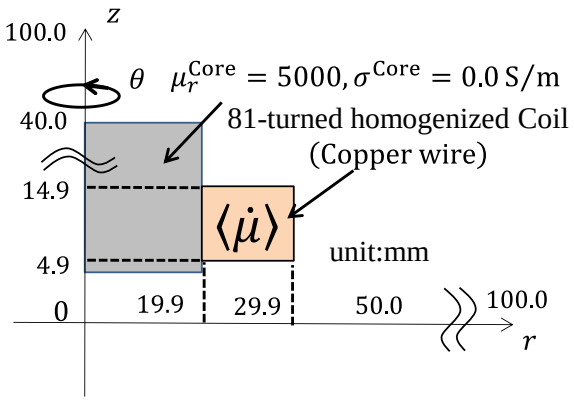
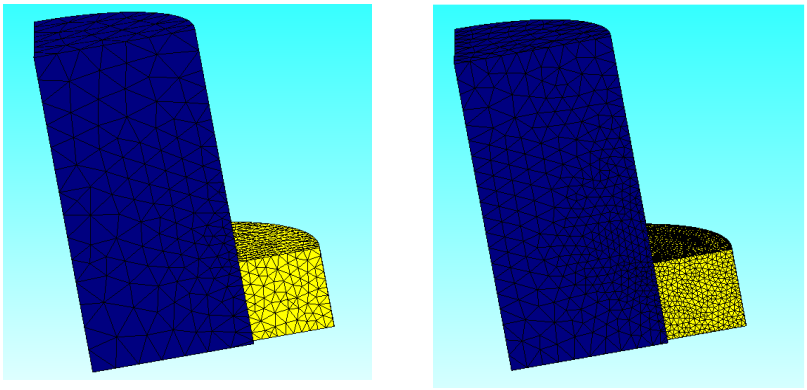


Fig.4.61 Cross-sectional view of a test model.

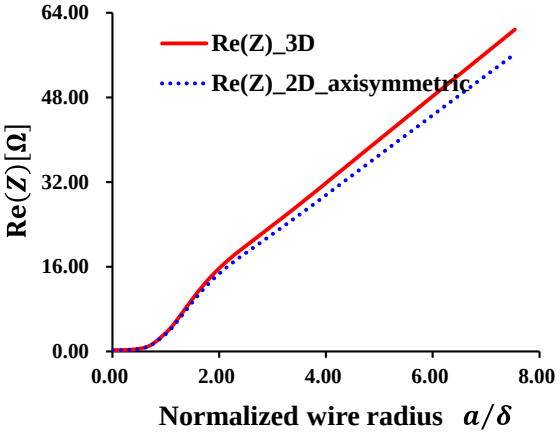


(a) Coarser elements　　(b) Finer elements

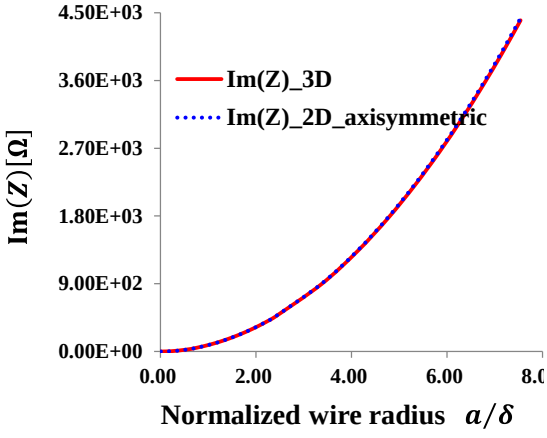
Fig.4.62 Bird's eye view of the test model.

Table 4.31 Specification of the test model in 3D space as shown in Fig.4.62

a [mm]	0.5	air-gap among wire conductors [mm]	0.1
μ_{1r}	1	σ [S/m]	5.76×10^7
μ_r^{Core}	1000	σ^{Core} [S/m]	0.0
η	0.64	Inner radius [mm]	20.0
number of triangle elements in homogenization area	728	number of tetra elements in homogenization area	(a) 10,490 (b) 78,220
I [A]	1.0	f [Hz]	$1.0 \sim 2.0 \times 10^5$

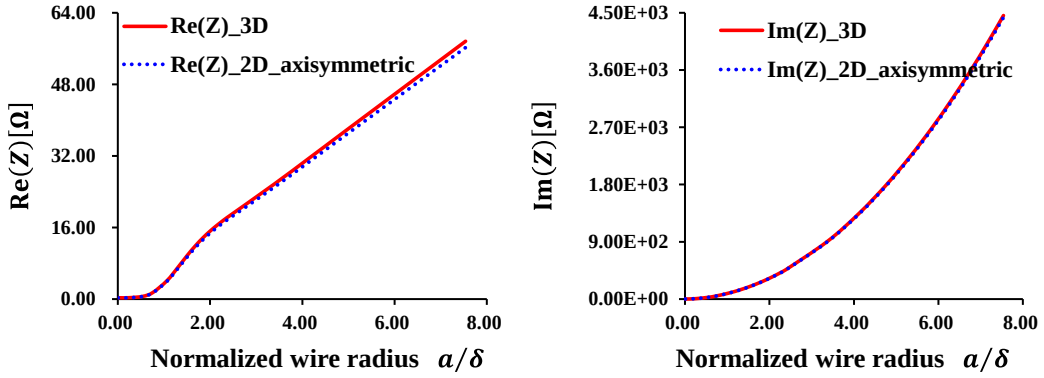


(a) Real part



(b) Imaginary part

(a) FE meshes: Fig.4.62(a).



(a) Real part　　(b) Imaginary part

(b) FE meshes : Fig.4.62(b).
Fig.4.63 Frequency characteristics of coil impedance of the multi-turn copper coil.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From these figure, it is found that in 3D problem, a little fine element in the homogenized coil region is required for more precise evaluation of the coil impedance.

4. 6 均質化されたマルチターンコイルの解析(電圧入力)

本節では，素線に電圧を入力する問題を取り扱う．本節では第 2 章で示した軸対称 2 次元，および 3 次元における有限要素方程式を解くことになるが，提案手法では，コイルの透磁率はマクロ複素透磁率であり，導電率はマクロ複素透磁率に含まれているので 0 とする．基本的には前節と同様であるが，第 2 章 2.10 節で述べた回路方程式との連成が必要となる点が異なる．また，回路方程式との連成に伴い，3 次元解析の際には，係数行列の対角スケーリングを行わなければいけない場合がある．以下では，軸対称 2 次元問題において，従来の有限要素解析と提案手法で，コイルの実効インピーダンスが一致することを示し，3 次元問題への拡張を行う．

軸対称 2 次元問題の場合には，回路方程式との連成において，ICCG 法を適用するためには，行列が対称行列であることが要請されるため，

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{c}^t & \mathrm{j}Z_e/(2\pi\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mathrm{j}V/(2\pi\omega) \end{bmatrix} \tag{4.15a}$$

$$c_i = \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}\Omega_{coil} \tag{4.15b}$$

とすることに注意する．ここで，Z_e は素線と回路の入力電流によるインピーダンスを表す．通常の銅巻線の場合には，表皮効果のインピーダンスに相当する．磁性被覆線の場合には，これに加えて，磁性被覆の磁気エネルギーを表す項が加わる．詳細は，第 3 章の定式化，例えば(3.186)等を参考とする．また，3 次元問題の場合には，解析対称とする領域が，例えば $1/2$ 領域の場合では，その分だけ係数行列の修正が必要になることに注意する．なおこの場合，(4.15a)の係数に現れる $1/2\pi$ は不要である．さらに，(4.15b)の単位電流ベクトル $\boldsymbol{j}$ の与える際には，第 2 章 2.8 節で示したように，電流無発散条件を満たす必要がある．

4. 6. 1　銅巻線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.64 に示すような軸対称性を有する 81 回巻のマルチターンコイルを考える．解析緒元は Table 4.32 の通りとする．本手法を用いて，このコイルの実効インピーダンスを解析する．なお，素線充填率は $\eta = 0.70$ と設定した．比較として，均質化を用いない準静電磁場有限要素法(従来法)による解析も行う．空気領域まで含めた解析に必要な有限要素数は，従来法では 152,475 であったが，提案手法では，5,640 であった．実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.65 に示す．Fig.4.65 より，提案手法は電圧源入力の場合でも有効であるとわかる．

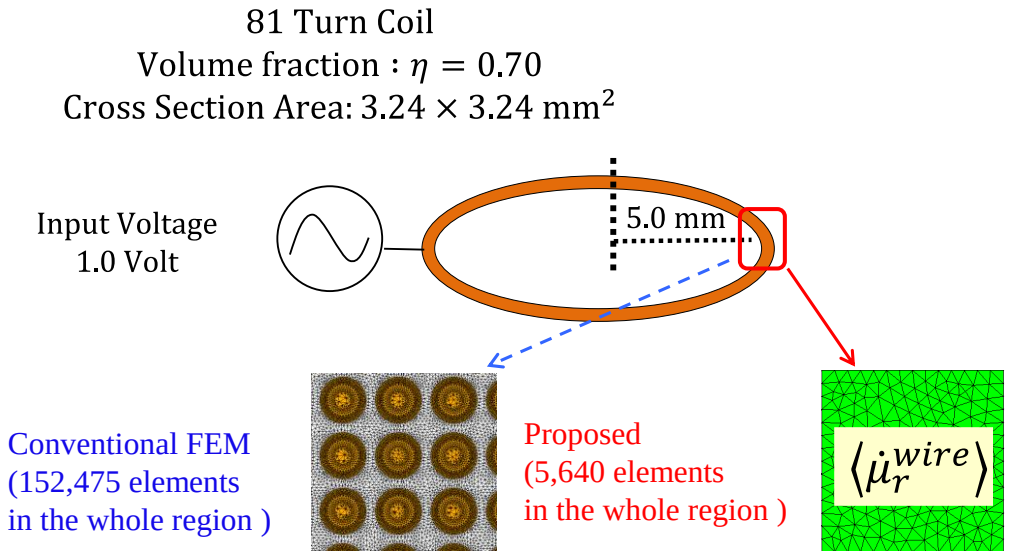
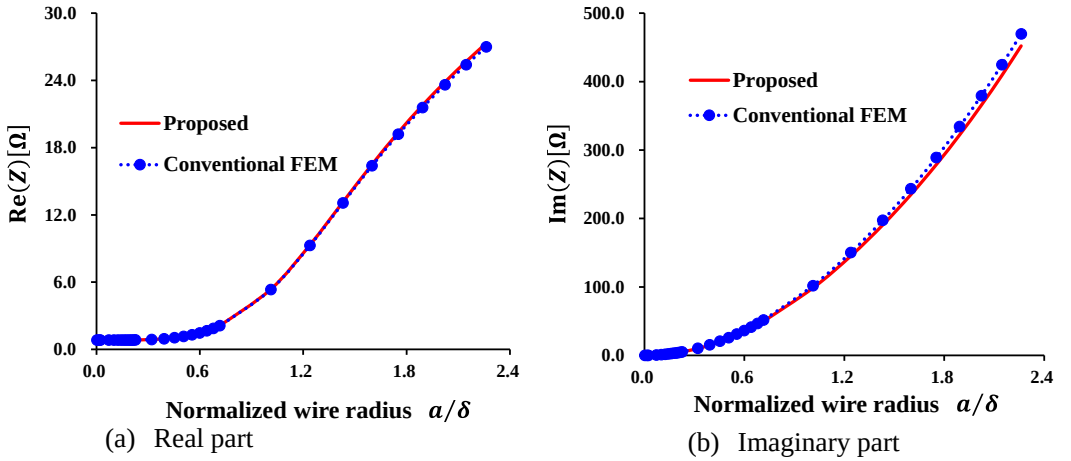


Fig.4.64 Finite elements of an 81-turn coil connected with a voltage source.

Table 4.32 Specification of the coil as shown in Fig.4.64

a [mm]	0.15	σ [S/m]	5.76×10^7
μ_r	1.0	f [Hz]	$1.0 \sim 1.0 \times 10^6$



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.4.65 Impedances of the coil shown in Fig.4.64 connected with the voltage source.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, we can confirm that there is no meaningful discrepancy between both impedances calculated by the homogenization-based FEM and the conventional FEM.

4. 6. 2　多層磁性被覆線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.66 に示すような軸対称性を有する 9 回巻の多層磁性被覆コイルを考える．解析緒元は Table 4.33 の通りとする．本手法を用いて，このコイルの実効インピーダンスを計算する．なお，素線充填率は $\eta = 0.70$ と設定した．比較として，均質化を用いない準静電磁場有限要素法(従来法)による解析も行う．実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.67 に示す．Fig.4.67 より，わずかな数値誤差があるように見えるが，これは，4.5 節でも示したように磁性被覆層の離散化の限界のため，提案手法は電圧源入力の場合でも有効であるとわかる．

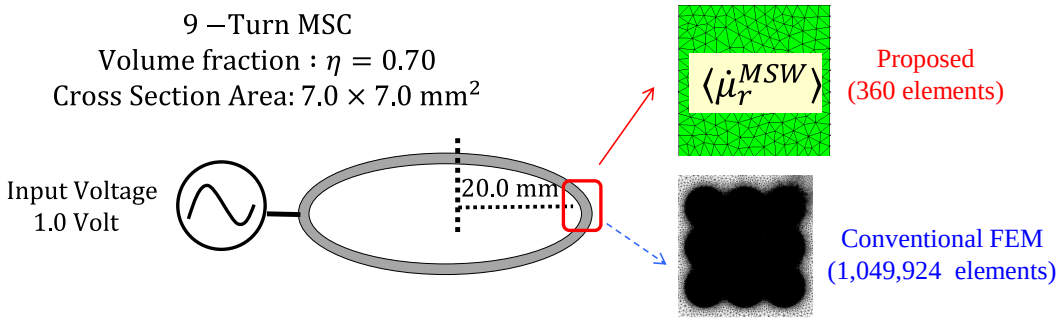
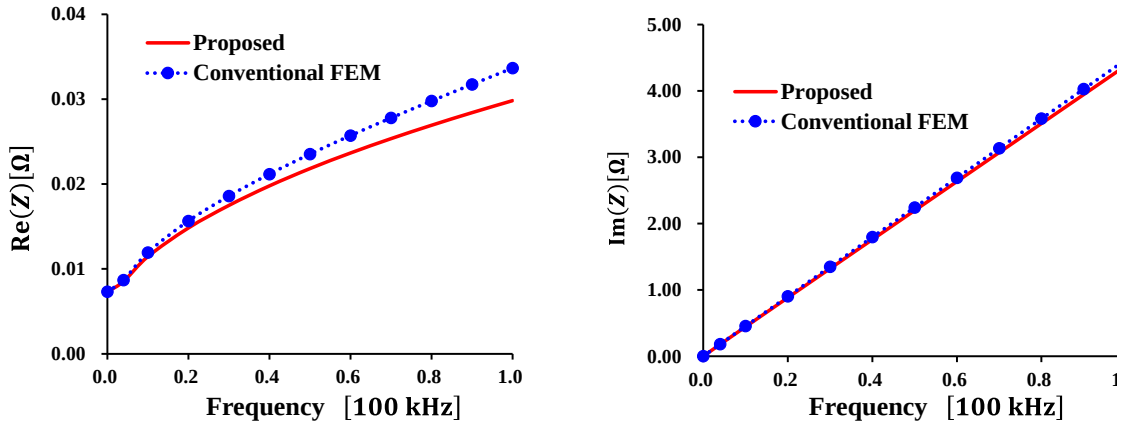


Fig.4.66 Finite elements of a 9-turn multi-layered MSC connected with a voltage source.

Table 4.33 Specification of multi-layered MSC shown in Fig. 4.66 with the low parameters

a [mm]	1.0	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.05	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^5
c [mm]	1.1	μ_{2r}	100.0	σ_3 [S/m]	1.0×10^4



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.67 Impedances of the MSC shown in Fig.4.66 connected with the voltage source.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that there is a little discrepancy between these two results. This stems from discretization of the magnetic-conductive shield by too thin finite elements.

4. 6. 3　平角線・楕円柱細線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.68 に示すような軸対称性を有する 16 回巻の平角線・楕円柱細線を考える．解析緒元は Table 4.34 の通りとする．本手法を用いて，このコイルの実効インピーダンスを求める．なお，素線充填率は $\eta = 0.70$ と設定した．なお，楕円と長方形の断面積が一致するように，短軸を調整した．比較として，均質化を用いない準静電磁場有限要素法(従来法)による解析も行う．提案手法の場合の回路方程式の注意点は第 3 章第 3.9.3 節で述べた通りである．実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.69 に示す．Fig.4.69 より，いずれの形状でも，従来法とよりよい周波数特性が得られており，また平角線の近接効果による反磁界の効果を楕円形状の場合のマクロ複素透磁率で表しても十分な精度で実効インピーダンスが評価できるとわかる．

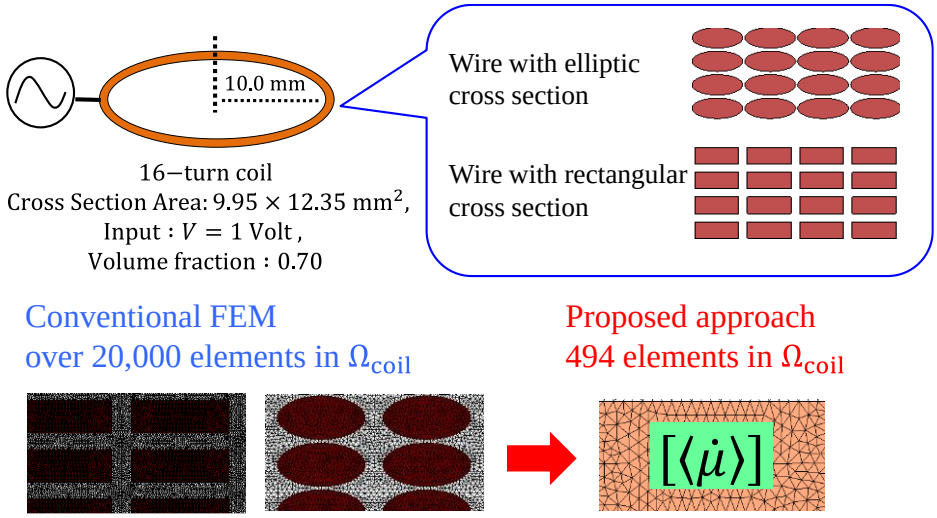
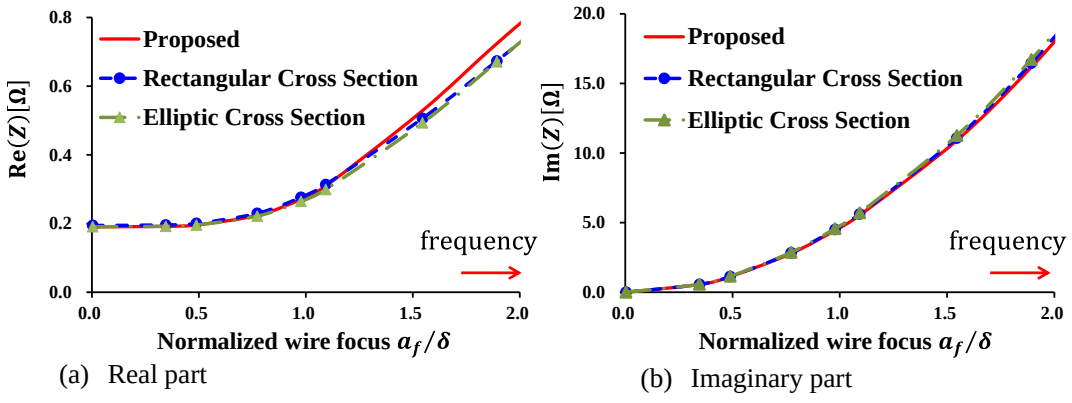


Fig.4.68 Finite elements of 16-turn elliptic and rectangular coils.

Table 4.34 Specification of the wire with elliptic cross section as shown in Fig. 4.68

η_v	σ [S/m]	μ_r	α [mm]	β^{ell} [mm]	β^{rec} [mm]	N_x	N_y
0.70	5.76×10^7	1.0	0.25	0.13	0.10	0.34	0.66



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.69 Impedances of the MSC shown in Fig.4.68 connected with the voltage source.
Abscissa is the ratio of the wire focus a_f to the skin depth δ. From this figure, it can be concluded that the proximity effect of a rectangular wire can be expressed by the tensor complex permeability defined under the assumption that the shape of a wire is approximated to elliptic cross-section.

4. 6. 4　磁性平角線・磁性楕円柱細線の場合

前節では，有限要素空間における平角線は楕円柱細線として近似できることを示した．このことを踏まえて，本節では，解析モデルとして，Fig.4.70 に示す 9 回巻きの磁性平角線を考える．ここでは直接的な有限要素法が適用できるように，解析緒元が Table 4.35 のように十分に小さい場合を想定する．この場合，従来の有限要素法も適用できる．本手法と従来の有限要素法を用いて，このコイルの実効インピーダンスを計算する．なお，素線充填率は $\eta = 0.82$ と設定した．このように充填率の高くすることは，通常の円筒形細線では難しいが，平角線の場合には可能である．提案手法の場合の回路方程式の注意点は第 3 章第 3.10.4 節で述べた通りである．Table 4.35 の条件での磁性平角線コイルの実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.71 に示す．Fig.4.71 より，いずれの形状でも，従来法と十分に一致した周波数特性が得られており，磁性被覆層の材質を電磁鋼板の複素透磁率とした場合に求めたテンソル型マクロ複素透磁率で近接効果を表現しても，良好なデータが得られるとわかる．

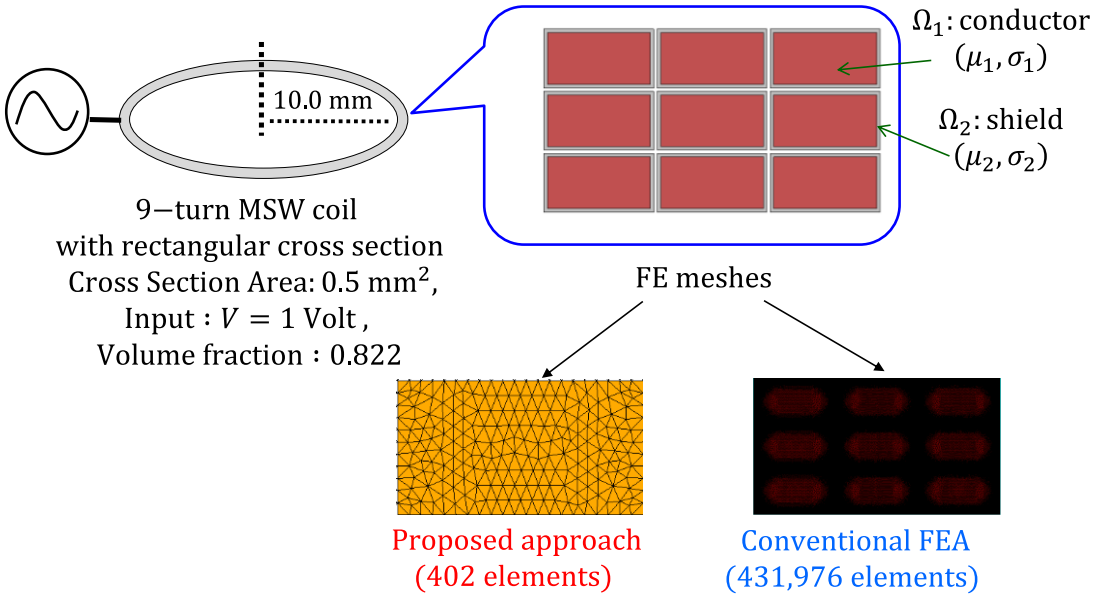
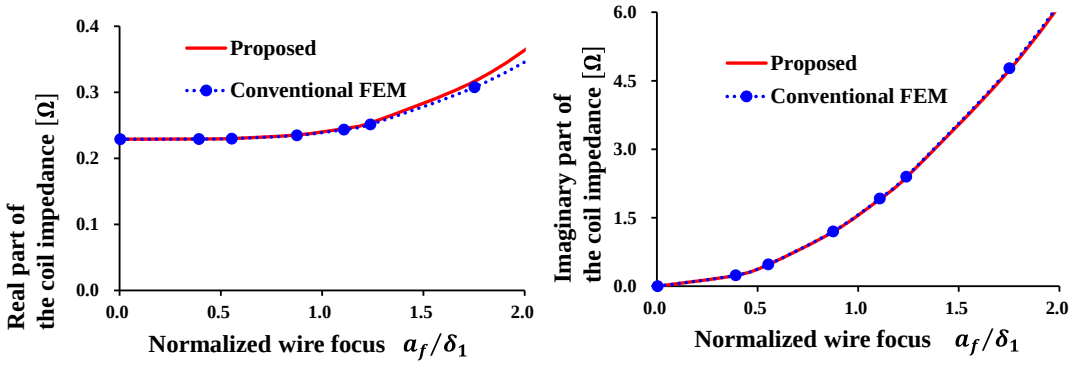


Fig.4.70 Finite elements of the 9-turn MSC with rectangular cross-section.

Table 4.35 Specification of the multi-turn coil with rectangular cross-section as shown in Fig.4.70

α [mm]	0.25	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
β [mm]	0.10	μ_{2r}	10	σ_2 [S/m]	1.03×10^4



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.71 Impedances of the MSC shown in Fig.4.70 connected with the voltage source.
Abscissa is the ratio of the wire focus a_f to the skin depth of the wire conductor δ_1. From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory. In this analysis, the FE equation and the circuit equation shown in (3.243) as derived in section 3.10.4 have to be coupled.

つぎに，磁性被覆への交流抵抗の依存性を調べる．解析モデルとして，Fig.4.72 に示すようなモータの 1 スロットに注目したモデルを考える．解析緒元は Table 4.36 の通りである．Table 4.36 において，添字 2 は Fig.4.72 の電磁鋼板の緒元に対応し，厚さは d である．提案手法を用いて，交流抵抗を評価すると，Fig.4.73 のようになる．Fig.4.73 から磁性被覆の磁気遮蔽効果により，十分に交流抵抗が抑制されていることがわかる．

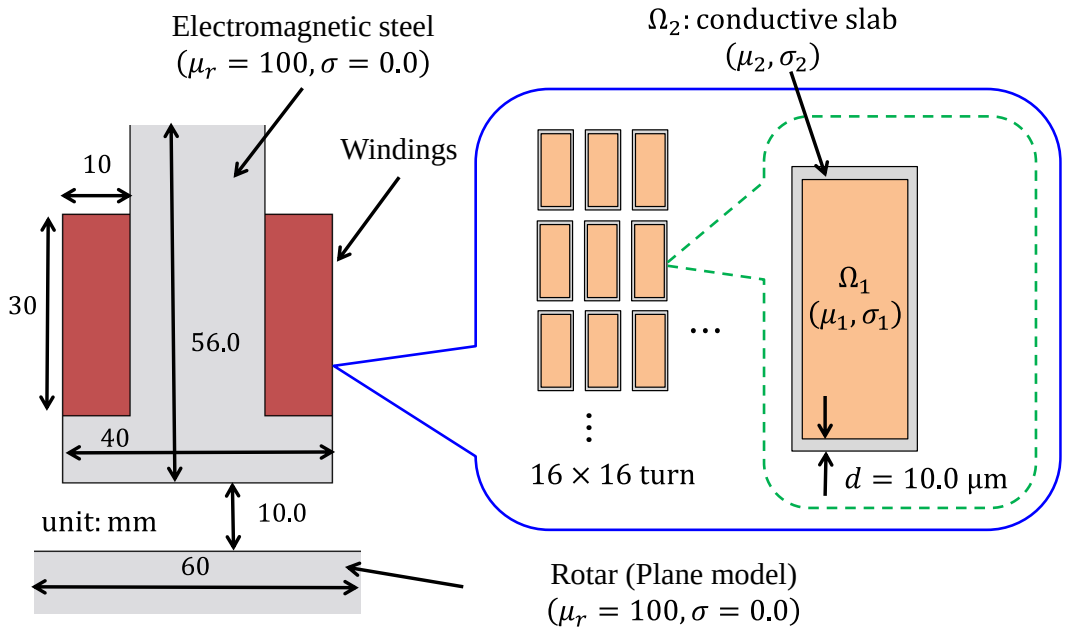


Fig.4.72 Cross-section of the pseudo motor armature winding wound surround one slot.
In this analysis, the shape of the motor is approximated as a plane model.

Table 4.36 Specification of the wire with elliptic cross section as shown in Fig.4.72

η_v	σ_1 [S/m]	μ_{1r}	σ [S/m]	μ_{2r} [mm]	α [mm]	β [mm]	d [μm]
0.70	5.76×10^7	1.0	1.03×10^7	100.0	0.9	0.13	10.0

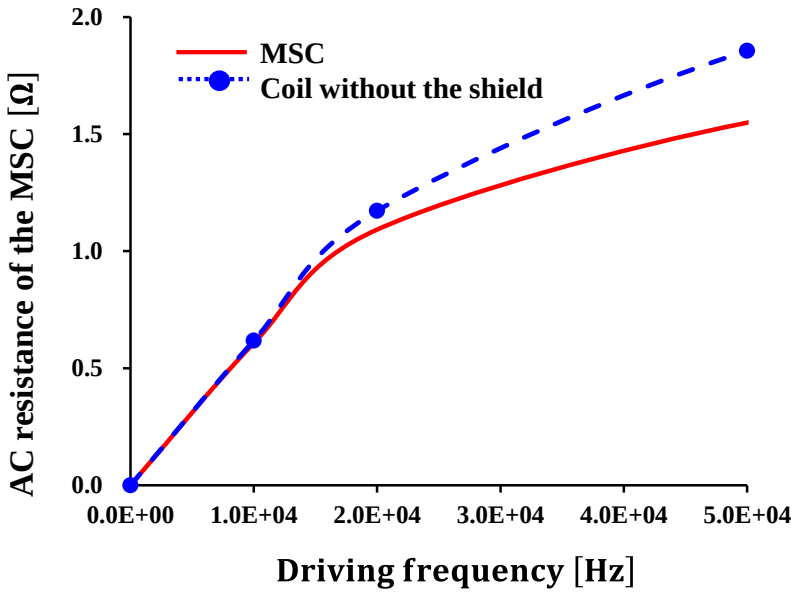


Fig. 4.73 Dependence of the AC resistance of the MSC with rectangular cross-section.
It can be concluded that the AC resistance due to the proximity effect can be significantly reduced by using a MSC.

4. 6. 5　3 次元空間中の磁性被覆線の場合

本節では，解析モデルとして，Fig.4.74 に示すような軸対称性を有する 9 回巻の多層磁性被覆コイルを半回転させて得られる 3 次元モデルの解析を行う．解析緒元は Table 4.37 の通りとする．本手法を用いて，このコイルの実効インピーダンスを解析する．なお，素線充填率は $\eta = 0.70$ と設定した．まず，提案手法を用いて得られる係数行列からなる方程式, ICCG 法の収束履歴を Fig.4.75 に示す. Fig.4.75 からわかるように, ICCG 法が収束しないとわかる．この原因は，電流源の場合とは異なり，素線の回路方程式との連成によるものと考えられる．(4.15b)の電流項は必要であるから，回路の実効インピーダンスに起因する成分により，数値不安定性が生じているものと考えられる．そこで，回路の実効インピーダンスに起因する項 $\mathrm{j}Z_e/\omega$ の数値を調べる．磁性被覆線の場合の Z_e は第 3 章では(3.115)の右辺第 2,3 項，つまり，

$$Z_e = \frac{R_0 \zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} I + \mathrm{j}\omega\mu_0 \dot{\mu}_r^{slab} l \frac{I}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.16}$$

に相当する．この実効インピーダンスに起因する項 $\mathrm{j}Z_e/\omega$ の値は，例えば 1 kHz では，$-5.32 \times 10^{-8} + \mathrm{j}1.16 \times 10^{-2}$ であり, 300 kHz では, $-5.28 \times 10^{-8} + \mathrm{j}4.05 \times 10^{-8}$ である．一方で，空気領域の項の評価について，例えばつぎのような数値が係数行列の成分に現れる．

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_i \cdot \nu_0\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{N}_j \, \mathrm{d}\Omega = 3.32 \times 10^8 \tag{4.17}$$

したがって，(4.15a)は条件数の悪い行列となってしまう[e.g. 4.6, 7]．この問題を回避するために，対角スケーリングという方法が知られている．次節では，この対角スケーリングについて述べる．

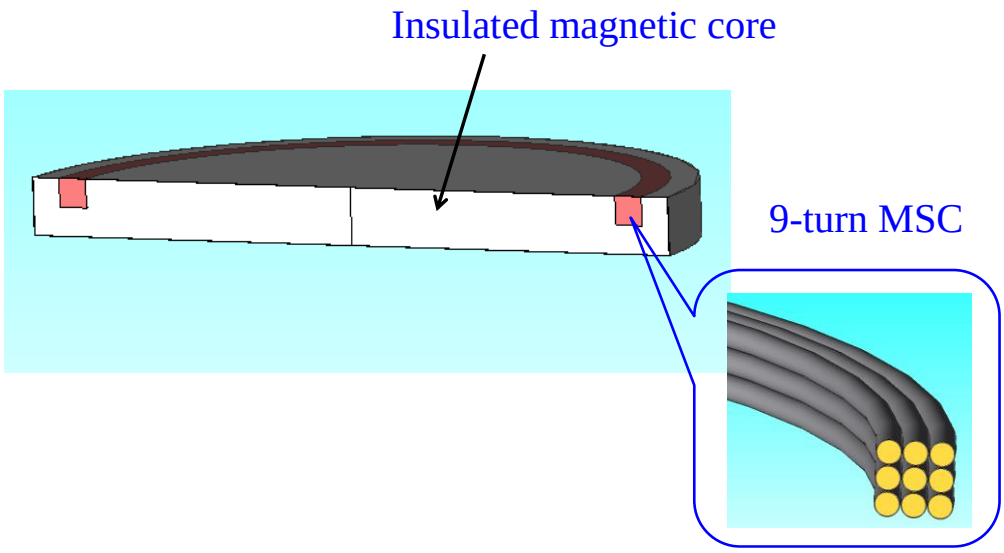


Fig.4.74 3D half model of the MSC connected with a voltage source.

Table 4.37 Specification of the MSC as shown in Fig.4.74 with the low parameters

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	10.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^4

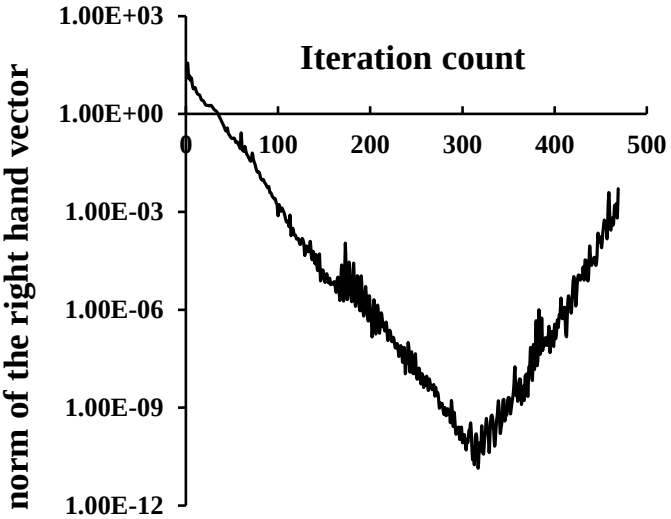


Fig.4.75 Convergence history of the ICCG method.
From this figure, we find that the residue cannot be converged. Hence, the direct ICCG method cannot be applied for the homogenization-based FEA for 3D model.

4. 6. 6 係数行列に対角スケーリングを導入した場合の収束性改善

前節で述べた，条件数の悪化を回避するための対角スケーリングについて述べる[4.5]. ここでは，簡単のため，方程式 $\mathrm{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．ただし， $\mathrm{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ である．ここで，この方程式をつぎのように変形する．ただし， D は対角行列である．

$$(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}^{-1})\mathrm{D}\boldsymbol{x}=\mathrm{D}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{4.18a}$$

$$\mathrm{D}\coloneqq\mathrm{diag}\left(\sqrt{|a_{11}|},\sqrt{|a_{22}|},\cdots,\sqrt{|a_{nn}|}\right) \tag{4.18b}$$

$$\mathrm{D}^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}},\frac{1}{\sqrt{|a_{22}|}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{|a_{nn}|}}\right) \tag{4.18c}$$

なお，一般には a_{ii} は複素数なので $|a_{ii}|=\sqrt{a_{ii}a_{ii}^{*}}$ である．このように修正した方程式をつぎのように定義する．

$$\tilde{\mathrm{A}}\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{b}} \tag{4.19a}$$

$$\tilde{a}_{ij}\coloneqq\frac{a_{ij}}{\sqrt{|a_{ii}||a_{jj}|}},\tilde{b}_{i}\coloneqq\frac{b_{i}}{\sqrt{|a_{ii}|}},y_{i}\coloneqq x_{i}\sqrt{|a_{ii}|} \tag{4.19b}$$

(4.19a)においては，対角成分が，正規化されるため，修正された係数行列 $\tilde{\mathrm{A}}$ の絶対値の大きな成分と小さな成分が混在していても条件数が悪化しない．(4.19a)を解き，求めた $\boldsymbol{y}$ を代入し，(4.19b)から $\boldsymbol{x}$ を計算すればよい．

このようにして(4.15a, b)を変更した場合の ICCG 法における残差の収束特性を Fig.4.76 に示す．Fig.4.76 から，収束性が改善しているとわかる．

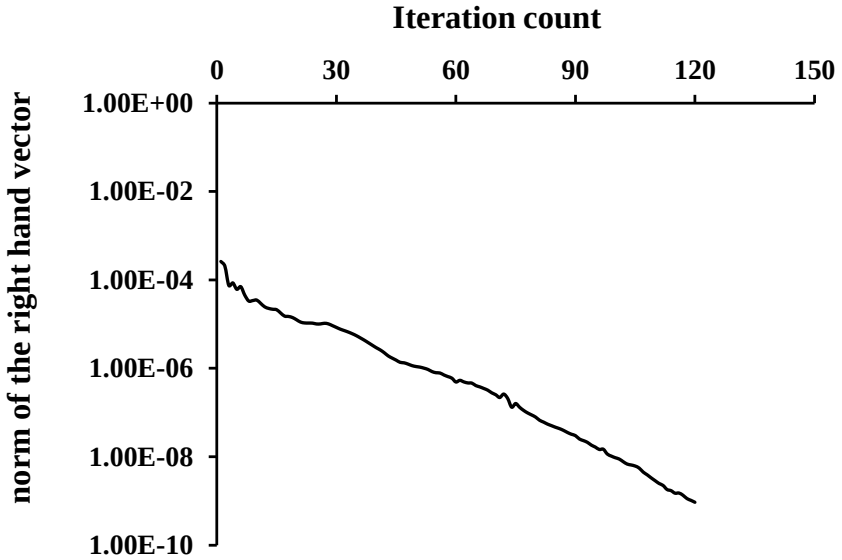
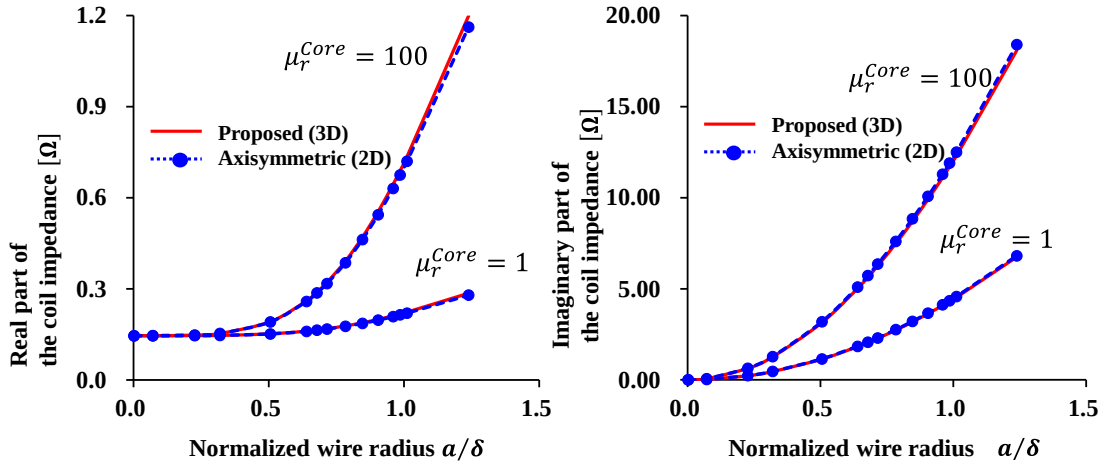


Fig.4.76 Convergence history of the ICCG method introduced the diagonal scalling.
From this figure, it is found that when we consider voltage input problem in 3D FE analysis, the diagonal scaling should be introduced because there are many cases that the absolute value of the circuit impedance is much smaller than that of a coefficient of FE matrix.

さて，改めて磁性被覆コイルの実効インピーダンスの周波数特性を，Fig.4.74 に示すような 3 次元モデルを解析して得られる結果と軸対称 2 次元解析の結果で比較した Fig.4.77 に示す．このとき，(4.15)を解く際には，係数行列に(4.18)のような対角スケーリングを施している．Fig.4.77 から，磁性体コアが存在していても，軸対称 2 次元問題で解析した結果とよく一致していることが確認できる．



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.4.77 Impedances of the coil shown in Fig.4.74 connected with the voltage source.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it can be confirmed that the homogenization-based FEM is valid not only for 2D analysis but also for 3D analysis.

4. 6. 7　Litz 線の 3 次元構造を考慮した細線の交流抵抗の評価

前節の解析では，3 次元空間にマルチターンコイルが存在する場合で解析したが，実際には素線を撚り合わせた Litz 線が用いられることがある．ここで生じる疑問は，素線を撚り合わせた場合と，平行線の場合で近接効果にどれだけの差異があるのか，ということである．これを確認するために，第 3 章 3.14 節で示した座標変換の方法，すなわち局所的な磁界を表すための修正を行う．現実の Litz 線では循環電流の効果が無視できない場合等が報告されているが，ここでは近接効果のみの影響を取り上げる．したがって，この解析では循環電流は反映できない上，撚り方が概ね一様であるとしているため，厳密な評価ではない．したがって，本節での評価は初期検討の範疇である．

解析モデルとして，Fig.4.78 に示すような磁性 Litz 線を考える．Fig.4.78 のモデルは，25 本の磁性被覆線を撚り合わせたモデルとなっている．解析緒元を Table 4.38 に示す．なお，磁性被覆の緒元は純鉄を想定する．素線の撚りピッチ L_p [mm] を $l/24, l/8, 4l$ と変更した場合のコイルの実効インピーダンスの周波数特性を Fig.4.79 に示す．また，比較として，マルチターンコイルの場合の実効インピーダンスの周波数特性も Fig.4.79 にプロットする．Fig.4.79 より実効インピーダンスの虚部，すなわち蓄積磁気エネルギーについては大きな変化は見られなかったが，L_p が高くなるにつれて実部である交流抵抗が低くなることがわかる．これは，撚り合わせたことにより，導体と垂直に鎖交する磁束が抑制されたことで近接効果に起因する渦電流損が小さくなったからである．

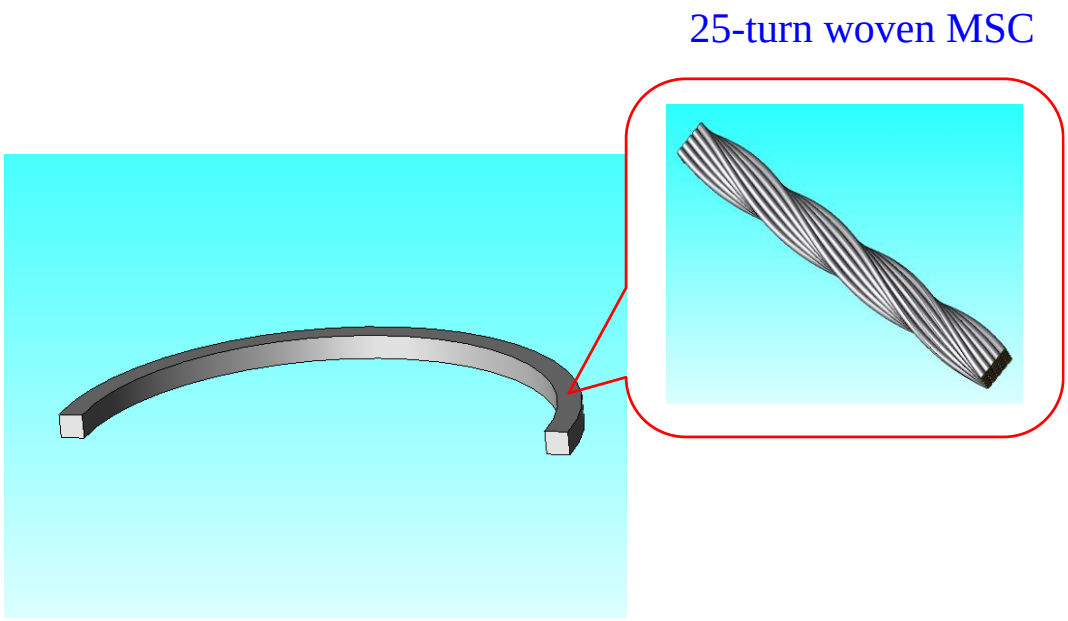
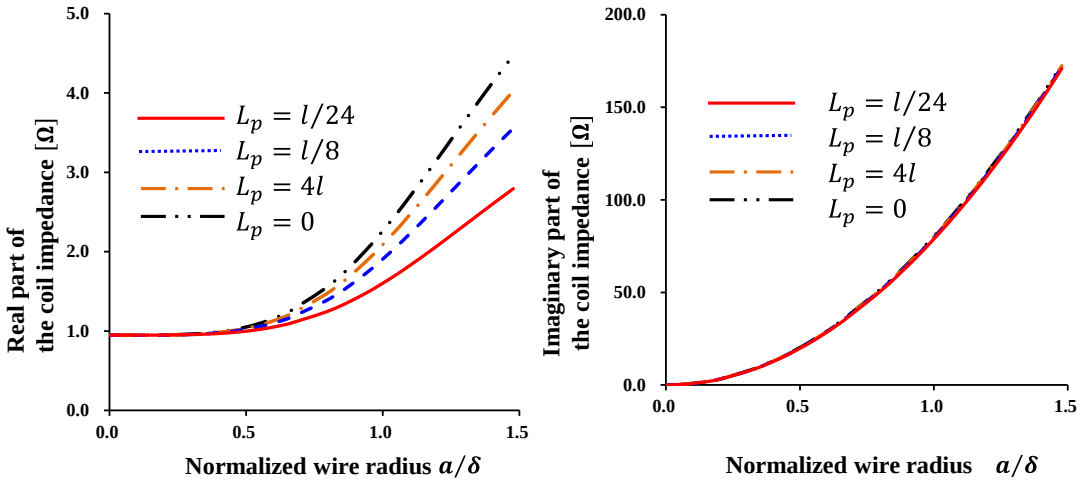


Fig.4.78 9 woven MSW connected with a voltage source (pseudo MS Litz coil).
In this analysis, to consider the spatial change of the local magnetic field of transverse directions to wire cross-section, the coordinate transformation matrix is introduced as shown in section 3.14.

Table 4.38 Specification of the woven MSC as shown in Fig.4.78 with the actual parameters

a [mm]	0.098	μ_{1r}	1.0	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.099	μ_{2r}	100.0	σ_2 [S/m]	1.0×10^7



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.4.79 Dependence of the impedances of Litz MSWs shown in Fig.4.78 on the operating frequency.
Abscissa represents the normalized wire radius a/δ. From these results, when the coil pitch becomes higher, that is, the torsion and curvature of wire is significant, the AC resistance of the coil can be reduced.

4. 7　第 4 章の総括

本章では，第 3 章で述べたマクロ複素透磁率の周波数応答を調べ，形状毎に Debye 緩和に類似した特性が得られていることを示した．また，unit-cell approach と Ollendorff の式に基づく評価について，数値解析データと共に示した．さらに均質化有限要素解析の妥当性を，コイルの実効インピーダンス，磁束線の分布の比較から明らかにした．コイルの均質化においては，電流源入力・電圧源入力のいずれにおいても十分に一致しており，軸対称 2 次元解析と 3 次元解析において適用可能であることがわかった．

本解析結果から得られる知見を以下にまとめる．

(1)　2 次元解析，つまり細線の場合のマクロ複素透磁率は，unit-cell approach で準定常の有限要素方程式を解いて求めた場合と, Ollendorff の式に解析的に得られる複素透磁率を代入して求めた場合は，よりよく一致する．ただし，3 次元解析の場合には，一致しない場合があり得る．Ollendorff の式で想定されている場と unit-cell approach で想定されている状況の差異は, 後者では周期セル中に存在する磁性体を想定していることにあるが, その詳細については現在明らかとなっていない．

しかし, 1 次六面体要素を用いた, 磁性粒子が単位セルに入っているモデルを unit-cell approach で解析した際には，球・楕円体をそれぞれ立方体・直方体で形状を近似しているため，数値誤差が不可避であることを考慮すると，概ねの解析結果は妥当であると考えられる．

(2) 磁性被覆線の複素透磁率を解析的に定義する場合，電磁鋼板の複素透磁率を用いて, 絶縁皮膜として扱った場合の定式化が有効である. 一方で, 直接的に定義した場合では, 数学的には正しくても，数値不安定性のある複素透磁率となってしまう．

(3) 均質化されたマルチターンコイルの電力，実効インピーダンスは，電流入力の場合でも電圧入力の場合でも精度良く求めることができる．本法を用いた場合には，コイル領域はバルクコイルとして扱うことができるため，微細な有限要素分割は不要である．また，磁性被覆線を用いた場合，交流抵抗が抑制されることを示した．しかし 3 次元解析における電圧入力の問題では，対角スケーリングが必要となる場合がある．

(4) 平角線の近接効果損失を楕円形状に近似して得られるテンソル型複素透磁率から求めた近接効果損失から精度良く求められる．平角線を扱う場合，表皮効果項において，直流抵抗の計算において断面積の調整を行う．

(5) 磁性被覆コイルの均質化有限要素解析で得られる実効インピーダンスと，直接的な有限要素法による解析により得られた実効インピーダンスのわずかな誤差が見受けられるが，これは直接的な有限要素法における磁性被覆層の離散化の限界に起因する．

以上の解析結果から，周波数領域に拡張した Ollendorff の式を用いた均質化手法は妥当であるとわかる．本法を応用して，第 5, 6 章では，本章の結果を踏まえた実際の電磁機器の設計に関する議論を行う．

第 4 章 参考文献

[4.1] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[4.2] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

[4.3] S. Fujita, H. Igarashi, "Finite-Element Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenization Method," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 54, no. 3, Art. no. 7401104, 2018.

[4.4] C. Flammer, "Spheroidal Wave Functions", section 4.1, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.

[4.5] 川上一郎，「理工系の数学入門コース 8 数値計算」，岩波書店，1996 年 4 月.

[4.6] 杉浦洋，「数値計算の基礎と応用」，サイエンス社，　1997.

[4.7] Y. Saad, “Iterative Methods for Sparse Linear Systems”, 2nd. ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

第 5 章　磁性被覆コイルの構造最適化

第 1 章に述べたように, 磁性被覆線を用いると近接効果に起因する渦電流損失を低減できることが期待できる[5.1-3]．また磁性被覆は透磁率が高く，コイル全体の外部磁束の変化に対する応答の感度が上がるために，非接触給電システムや渦電流形変位センサへ適用することが検討されている[5.4, 5]．しかし，このような電磁機器の外部磁束に対する感度を十分に高くするため，これらの電磁機器の最適設計の際に有限要素法を適用すると，第 1 章で述べたような有限要素サイズのマルチスケール性に起因する微細な有限要素の離散化の問題が避けられない．また，実験ベースで設計するには多大な時間と費用がかかることについても第 1 章で述べた通りである．

本問題の解決には第 3 章で議論した均質化有限要素解析が有効であることはすでに第 1 章で述べた．また，提案手法の妥当性は第 4 章で述べた．本法を応用して，5.1 節では，初期検討として，絶縁皮膜の磁性被覆線の構造最適化に関して検討する．まず磁性被覆の比透磁率と実効インピーダンスの特性に関して調べる．つぎに磁性被覆の比透磁率に対する導線半径と交流抵抗の関係の依存性に関して調べる．5.2 節では導電性の磁性被覆を用いた磁性被覆線を用いて，材質と交流抵抗の変化について調べる．5.3 節では，多層磁性被覆線の構造最適化を REX^{star} GA により行う．5.4 節では，本章の数値解析結果から得られた磁性被覆コイルの最適設計における知見について述べる．

なお，本章における記号は第 4 章に従うものとする．

5. 1　絶縁皮膜を有する磁性被覆線の構造最適化に関する検討

本節では，磁性被覆コイル(Magnetically Shielded Coils : MSC)の構造最適化に関する検討を行う．この磁性被覆線の磁気シールド層は絶縁体を仮定しているため，磁性被覆の磁気遮蔽効果による近接効果に起因する複素電力の定性的な関係を調べることができる．交流抵抗について，5.1.1.節では，磁性被覆の比透磁率への依存性，5.1.2 節では磁性被覆の厚さへの依存性をそれぞれ調べる．

5. 1. 1　交流抵抗の磁性被覆の比透磁率への依存性

Fig.5.1 に示した 81 回巻きの MSC の実効インピーダンスの磁性被覆の比透磁率μ_{2r}への依存性を考える．解析モデルは，第 4 章の Fig.4.50 と同じである．解析緒元を Table 5.1 に示す．入力電流の駆動周波数 f を 1 MHz に固定し，μ_{2r}を 1~1000 の範囲で変化させて，MSC の実効インピーダンスを求めた．なお，$\mu_{2r} = 1$ の場合は，磁性被覆は通常の絶縁被覆に等しく, MSC の実効インピーダンスは磁性被覆がない通常の銅巻線の実効インピーダンスに等しい. 解析結果を Fig.5.2 に示す. Fig. 5.2 の結果より, μ_{2r} が高いほど，損失を表す実効インピーダンスの実部が減少し，虚数が増大する．また，本モデルの場合は，$\mu_{2r} = 100$ 程度で交流抵抗が最小になる．このことは，磁気遮蔽により，近接効果

に起因する損失が低減できることを意味する．よって，磁性被覆で被覆した MSC は，通常の導線のモデルと比べて，交流抵抗が大幅に低減でき，逆にコイルの自己インダクタンスを大きくできるとわかる．

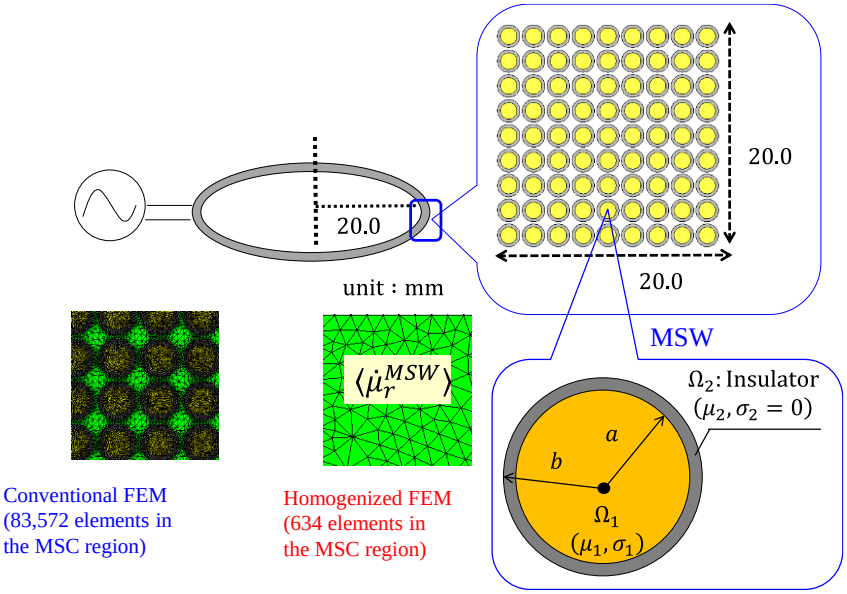


Fig.5.1 Finite elements of a 81-turn MSC.

Table 5.1 Specification of the MSC as shown in Fig.5.1

a [mm]	0.37	μ_{1r}	1.0
b [mm]	0.50	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
η	0.64	μ_{2r}	1.0~1000

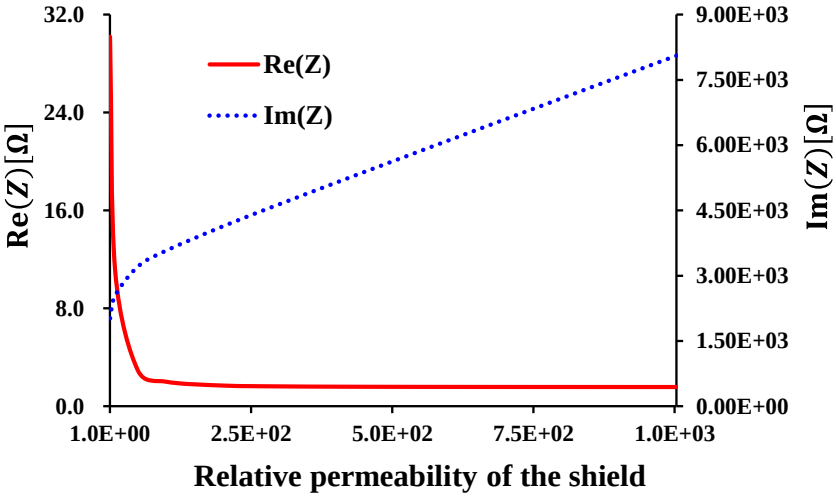
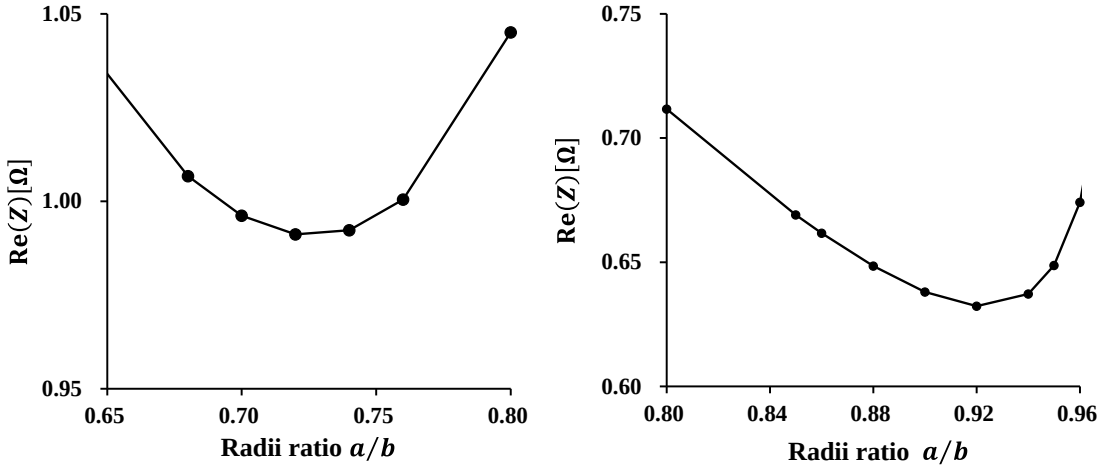


Fig.5.2 Dependence of the impedance of the MSC on the relative permeability of the shield μ_{2r}.
Note here that the shield layer is assumed to be an insulator. From this figure, the AC resistance can be reduced and the inductance is improved higher as μ_{2r} becomes higher.

5. 1. 2　交流抵抗の磁性被覆の厚さへの依存性

磁性被覆線単線の半径 b を固定して導線半径 a を大きくすると，MSC 全体での直流抵抗は減少するが，被覆が薄くなり交流抵抗が増加する．そこで，まず透磁率への依存性を調べるため，導電率を十分に小さくした場合の，導線半径 a と損失の関係を求める．このために入力電流の駆動周波数 f を 200 kHz に固定し素線半径 a を 0.05 mm~0.50 mm で変化させて，Fig.5.1 の MSC のインピーダンスの実部の変化を調べた．磁性被覆の比透磁率 μ_{2r} を 100, 1000 として，解析した結果を Fig.5.3 に示す．Fig.5.3 の結果より，μ_{2r} ごとに交流抵抗を最小にする素線半径 a が異なることがわかる．μ_{2r} が小さい場合，損失を最小にするには，磁性被覆を厚くする必要がある．逆に，μ_{2r} が大きい場合には，磁性被覆厚を薄くできる．いまの場合，$\mu_{2r} = 100$ では $a/b = 0.72$ 付近，$\mu_{2r} = 1000$ では $a/b = 0.92$ 付近で MSC の交流抵抗が最小となる．



(a) $\mu_{2r} = 100.0$　　(b) $\mu_{2r} = 1000.0$

Fig.5.3 Dependence of the AC resistance of the MSC on the radii ratio a/b.
Note here that the shield layer is assumed to be an insulator. From this figure, as the permeability of the layer becomes higher, its thickness should be set smaller for reduction of the AC resistance of the MSC.

5. 2　磁性被覆が導電性の場合の最適化

本節では，磁性被覆が導電性の場合のコイルの交流抵抗の磁性被覆厚，導電性への依存性を調べる．解析モデルとして，Fig.5.4 に示すような 25 回巻きの磁性被覆コイルを考える．解析緒元は Table 5.2 の通りとし，磁性被覆の導電率の変化と合わせて，交流抵抗の半径の比 a/b への依存性を調べた結果を Fig.5.5 に示す．$\sigma_2 \approx 0$ の場合は，磁性被覆が絶縁体の場合に相当する．Fig.5.5 から交流抵抗が最小となるのは $\sigma_2 = 0, 10^6, 10^7$ S/m のそれぞれで，$a/b \approx 0.864,\ 0.981, 0.991$ であった．この結果は，磁性被覆の導電性が高い場合，磁性被覆の渦電流による反作用磁界の効果により，磁気遮蔽効果が強く出ることを表している．

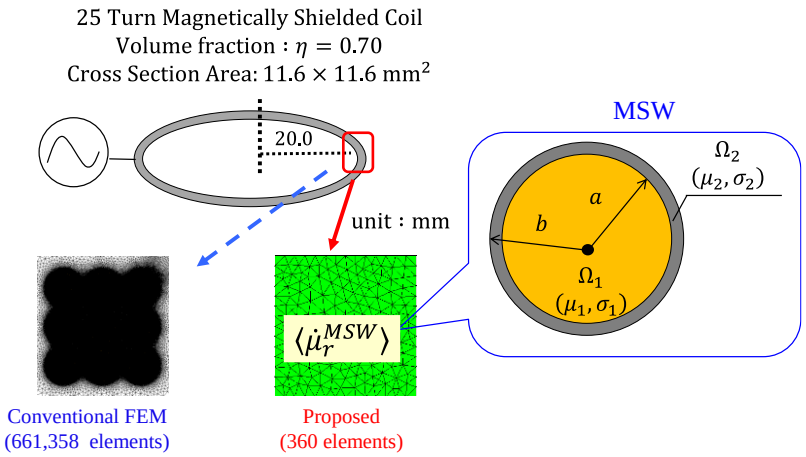


Fig.5.4 Finite elements of a 25-turn MSC.

Table 5.2 Specification of the MSC as shown in Fig. 5.4

a [mm]	1.00	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	1.10	μ_{2r}	100	η	0.70

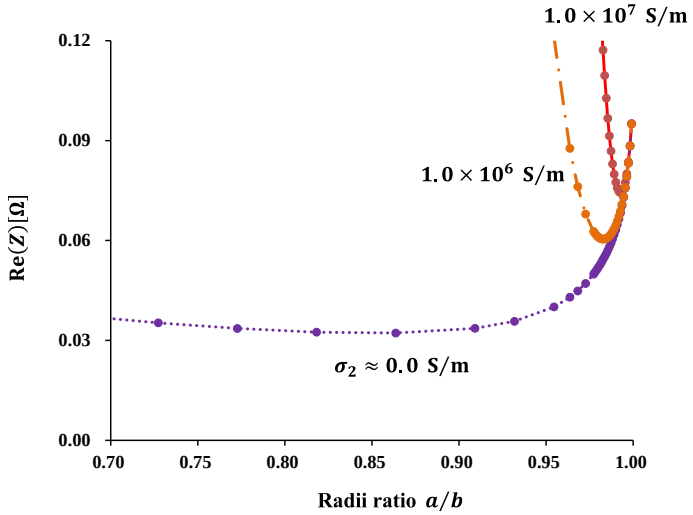


Fig. 5.5 Dependence of the AC resistance of the MSC on the radii ratio a/b and the conductivity of the shield. From these graphs, we find that the minimum AC resistance increase with its conductivity.

5. 3　GA を用いた多層磁性被覆線の構造最適化

本節では，多層磁性被覆コイルの構造最適化を行う．多層磁性被覆線の場合，磁性被覆層の物性から，磁性被覆厚，銅線半径等，パラメータが多数ある．前節までの結果から考えると，磁性薄膜線の外径 c を固定して導線半径 a を大きくすると，直流抵抗は減少するが，磁性薄膜がさらに薄くなり，交流抵抗が増加する．また，磁性薄膜の比透磁率 μ_{2r}, μ_{3r} が高くなると，導線と鎖交する磁束が減少するが，表皮厚が極めて薄くなり，

交流抵抗が増大する．同様に，磁性薄膜の導電率 σ_2, σ_3 が高くなると，導電性が高くなるが，表皮効果が顕著となる．このような結果の違いから，適切なパラメータ設定をする必要がある．しかし多層磁性被覆線の場合，5.1, 2 節で議論した単層の場合とは異なり，一つのパラメータを固定しても，最適化構造を決定することは困難である．

そこで，本研究では遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm : GA)を用いて，磁性被覆線の構造最適化を行うことを検討する[5.6-10]．本節では，まず 5.3.1 節で GA について述べ，つぎに，5.3.2 節で磁性被覆線の最適化結果について示す．

5. 3. 1　遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm : GA)

遺伝的アルゴリズム(GA)とは，生物が環境の変化に適応しながら進化し，形態を変えていく過程を模擬し，適応度の高い固体を進化・淘汰することで，組み合わせ最適化をシミュレーションにより行う手法である．GA では個体単体ではなく，個体集合の中で適応度を高めていくアルゴリズムとなっているため，組み合わせ最適化に有効である．しかしながら, 形式的に GA を適用すればよいというものではなく, 問題に合わせた GA の工夫が必要となる．本論文では後述する REX [star] 型アルゴリズムによる GA を用いた磁性被覆線の構造最適化を行う．まずは，以下に一般的な GA のアルゴリズムを述べる[5.6, 7].

(1) 初期個体集団の生成

決定変数と制約条件を選定し, 問題の解空間を定める．初期段階では，N_p 個の個体からなる集団を生成し，それぞれの個体に n 個の生物の遺伝子$X_i\ (i = 1, \cdots, n)$を模した 0, 1 の 2 進数値などを割り当て，対応する記号列を定義する．

(2) 評価値の定量化

目的関数を設定し，各個体の適応度が満たすべき終了条件を確認する．

(3) 探索空間の設定

探索の対象となる空間を設定しておく．

(4) 遺伝子形と表現形の定義

遺伝子形は 0, 1 の 2 進数値などからなるので, パラメータとの対応をあらかじめ決定しておく必要がある．

(5) 選択・交叉・淘汰・突然変異

初期集団より，N_{sel} 個のペアを選択し，ある確率 P_c で，ペアに交叉処理を行い，子を生成する．これは，両親から次世代に残すべき特徴を受け継ぐような子個体を生成するという生物の進化過程そのものである．子個体の生成には,「一点交叉」,「ルーレット選択」等いくつかの方法がある[5.7, 8]．この操作をいくつか繰り返す，つまり繰り返し回数を「世代」と表現し，世代が決められた世代以上となったら終了し，生き残った個体を最適解として採用する．

上記に示したアルゴリズムのフローチャートを Fig.5.6 に示す.

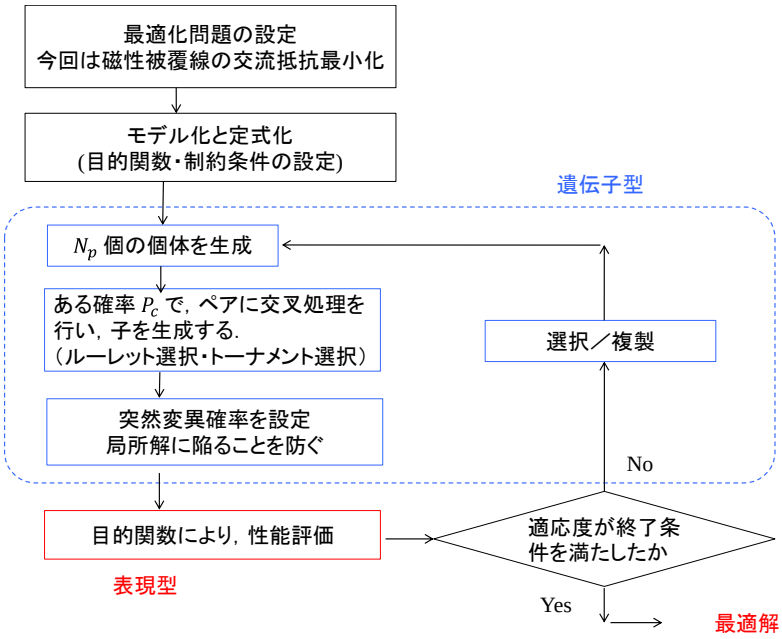


Fig.5.6 Flow chart of genetic algorithm (GA).

5. 3. 2　REX star GA

5.3.1 節で示した遺伝的アルゴリズムは，bit で示された離散的な情報により行われている．しかし，問題によっては連続的な探索空間における最適化問題を扱う場合があり，この場合は，離散値を用いた直接的な遺伝的アルゴリズム(GA)は適さない．そこで，実数値遺伝的アルゴリズム(実数値 GA)が用いられる．実数値 GA には，BLX-(blend cross over)や REX star などが知られている．本研究では後者の REX star を用いる[5.4].

REX star とは，大域的最適解周辺の領域に親個体群が存在しない場合でも大域解を探索するために，大域的降下を行わせる方法である．これにより，子個体を群として大域解周辺に向かうように向かわせることができる．この様子を Fig.5.7 に示す．Fig.5.7 では設計変数パラメータの個数は 5 としている．

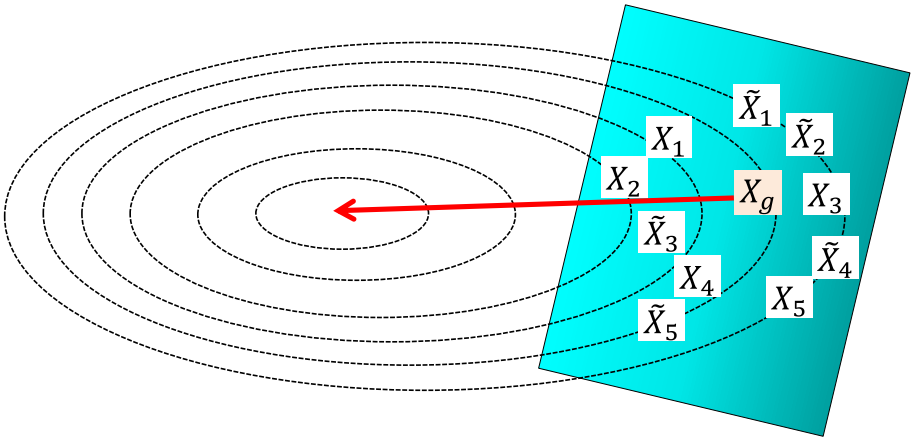


Fig. 5.7 Illustration of X_g and globally descent direction in REX^{star} algorithm.

つぎに，REX star のアルゴリズムを示す．以下では，n は設計変数パラメータの個数，つまり問題の次元数を表す．

(1) 個体集団から $n+1$ 個の親個体 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ を選んでおき，それぞれの親の重心となる個体 X_g を作成する．

(2) 親 $X_i (i = 1,2, \cdots, n+1)$ の鏡像個体 $\tilde{X}_i$ を生成し，親個体と鏡像個体の $2(n+1)$ 個の評価値を計算する．これらの中で，評価値が上位 $n+1$ 個の個体の重心となる個体 X_b を求める．

(3) 子個体 X_c の作成は次式に従い行う．

$$\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{X}_g + \begin{bmatrix} \xi_1^t & & \\ & \xi_2^t & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n^t \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}_b - \boldsymbol{X}_g) + \sum_{i=1}^{n+1} \xi^i (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_g) \tag{5.1a}$$

$$\xi^i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2) \tag{5.1b}$$

$$\xi^i \sim \mathcal{N}\left(-\sqrt{\frac{3}{n+1}}, \sqrt{\frac{3}{n+1}} \right); i = 1, \cdots, n+1 \tag{5.1c}$$

ここで，ξ^i は正規乱数 $\mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ に従うパラメータで，降下に伴うステップサイズ，すなわち移動量を表す．世代更新の際には，minimal generation gap (MGG)，just generation gap (JGG)等が用いられる[5.8].

5. 3. 3　最適化問題：多層磁性被覆線の交流抵抗最小化

最適化例として，Fig.5.8 のような 25 回巻の磁性被覆コイルを考える．この磁性被覆コイルに対して，最適化問題をつぎのように設定する．

$$\mathrm{Re}(Z(\boldsymbol{x})) \to \min. \tag{5.2a}$$

$$\text{Sub. to} \quad 1\ \mu\text{m} \le b - a \le 9\ \mu\text{m}, 1\ \mu\text{m} \le c - b \le 9\ \mu\text{m}, c = 0.15\ \text{mm}, a < b < c$$

$$100 \le \mu_{2r}, \mu_{3r} \le 1000 \quad , \quad 1.0 \times 10^7 \le \sigma_2, \sigma_3 \le 1.5 \times 10^7 \tag{5.2b}$$

なお，磁性被覆コイルの実効インピーダンスは，均質化有限要素法を用いて求めることができる．エネルギーは，第 3 章 3.8.3 節に示した(3.186)から評価でき，インピーダンスは $Z = 2P/|\dot{I}|^2$ から求められる．また，最適化変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各要素は $a, b, \mu_{ir}, \sigma_i, i = 2,3$ であり，周波数は 100 kHz である．GA を用いた最適化過程において世代毎の交流抵抗の変化を Fig.5.9 に示す．Fig.5.9 から，100 世代以内に GA が収束しているとわかり，その際の交流抵抗は 0.93 Ω から，0.87 Ω に減少しているとわかる．最適化の結果，各パラメータの収束値を Table 5.3 に示す．Table 5.3 の結果から，各層で透磁率が最大となり，導電率が最小となった．また，これらの値は Ω_2, Ω_3 で一致している．すなわち，単層構造の場合が最も交流抵抗が小さくなるとわかる．

つぎに，最適化された磁性被覆コイルと通常の銅巻線の場合とで交流抵抗を比較した結果を Fig.5.10 に，100 kHz での交流抵抗を比較した結果を Table 5.4 にそれぞれ示す．Table 5.4 から，最適化された磁性被覆線を用いると交流抵抗が 73.4 % 程度に抑制されているとわかる．

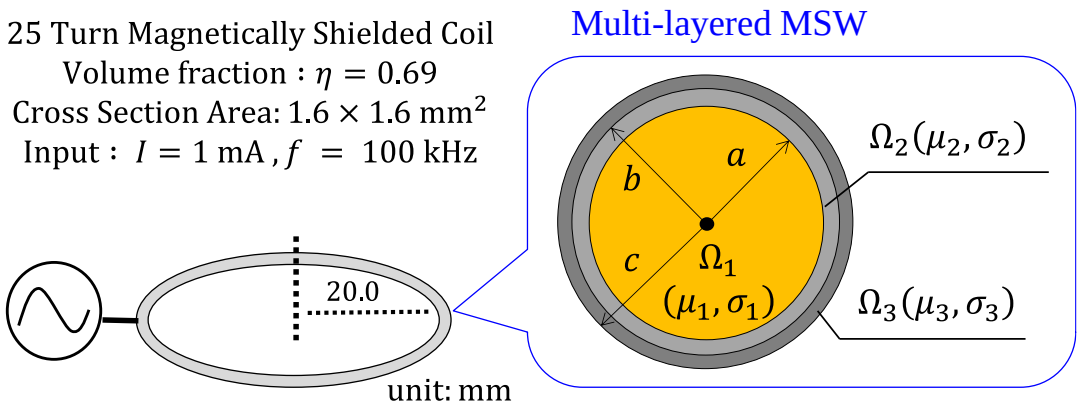


Fig.5.8 25-turn multi-layered MSC.

Table 5.3 Optimization results (100 kHz・1 mA input)

a [mm]	0.148	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.149	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7
c [mm]	0.150	μ_{3r}	1000	σ_3 [S/m]	1.00×10^7

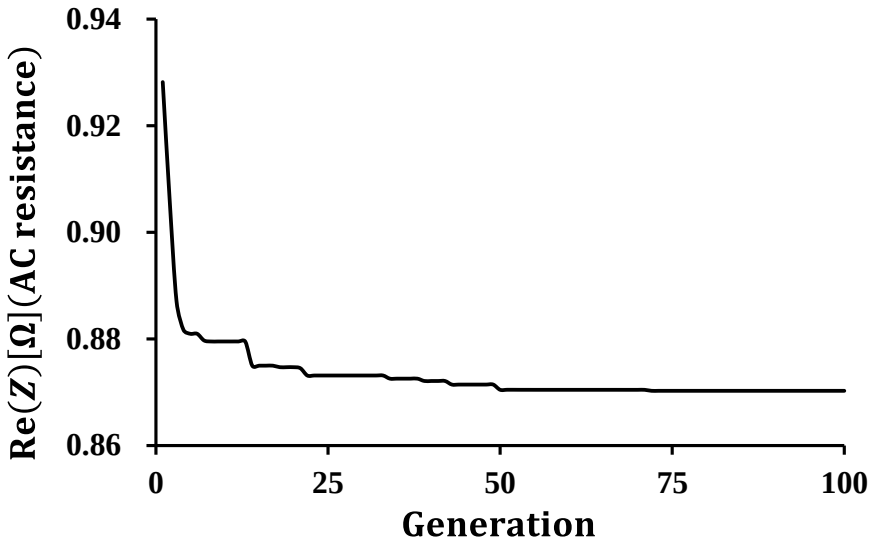


Fig.5.9 Convergence history of the AC-resistance of the multi-layered MSC shown in Fig.5.8 (current input).
It is found that the GA process converges within 100 generations, and the AC resistance is reduced from about 0.93 to 0.87 Ω.

Table 5.4 Comparison of the AC resistance [Ω] at 100 kHz (1 mA input)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.87

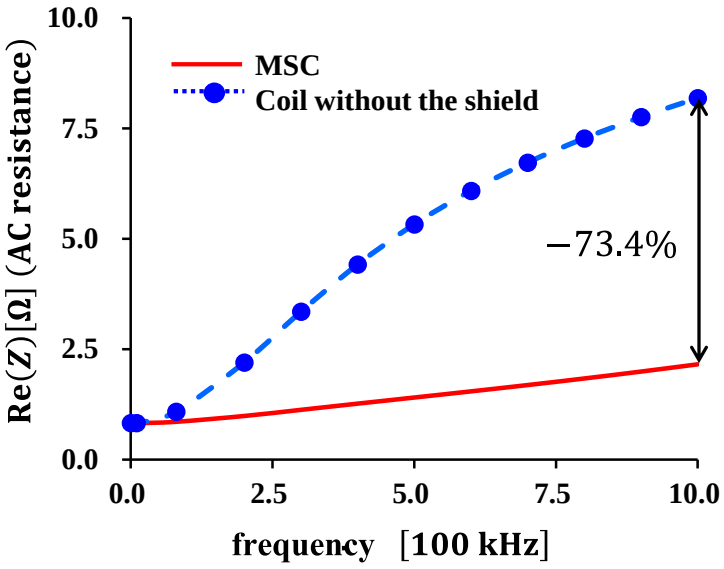


Fig.5.10 Frequency characteristics of the AC resistance of the coils without the shielding layer and the optimized coil (current input).
From this figure, it is concluded that the eddy current loss caused by the proximity effect can be significantly reduced using the optimized MSW.

つぎに，同じ Fig.5.8 の 25 巻の多層磁性被覆コイルを電圧源に接続した場合の最適化を行う．印加電圧は 1.0 Volt とし，それ以外の解析条件は電流源の場合に一致させ，最適化条件についても(5.2)と同じであるとする．電圧源入力の場合には，有限要素方程式と回路方程式

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_c} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^{*}\,\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} I + \mathrm{j}\omega l\left\{\dot{\mu}_2^{slab}\log\left(\frac{b}{a}\right) + \dot{\mu}_3^{slab}\log\left(\frac{c}{b}\right)\right\}\frac{I}{2\pi} \qquad (5.3)$$

を連立して得られる有限要素方程式を解くことになる．(5.3)は第 3 章の(3.187)である．GA を用いた最適化過程において世代毎の交流抵抗の変化を Fig.5.11 に示す．Fig.5.11 から，Fig.5.9，つまり電流源入力の場合と同様の傾向が得られる．最適化の結果得られた，各パラメータの収束値を Table 5.5 に示す．Table 5.5 の結果から，最適値も電流源の場合と同様の結果となった．

つぎに，最適化された磁性被覆コイルと通常の銅巻線の場合とで交流抵抗を比較した結果を Fig.5.12 に示す．Fig.5.12 の解析結果も電流源入力の場合と全く同様である．

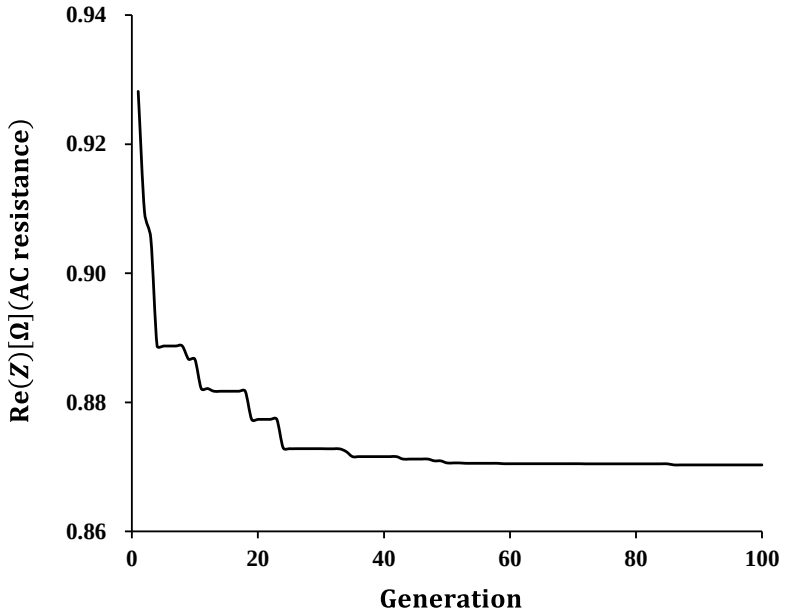


Fig.5.11 Convergence history of the AC-resistance of the multi-layered MSC shown in Fig.5.8 (voltage input).
It is found that the GA process converges within 100 generations, and the AC resistance is reduced from about 0.90 to 0.83 Ω.

Table 5.5 Optimization results (100 kHz・1 Volt input)

a [mm]	0.148	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.149	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7
c [mm]	0.150	μ_{3r}	1000	σ_3 [S/m]	1.00×10^7

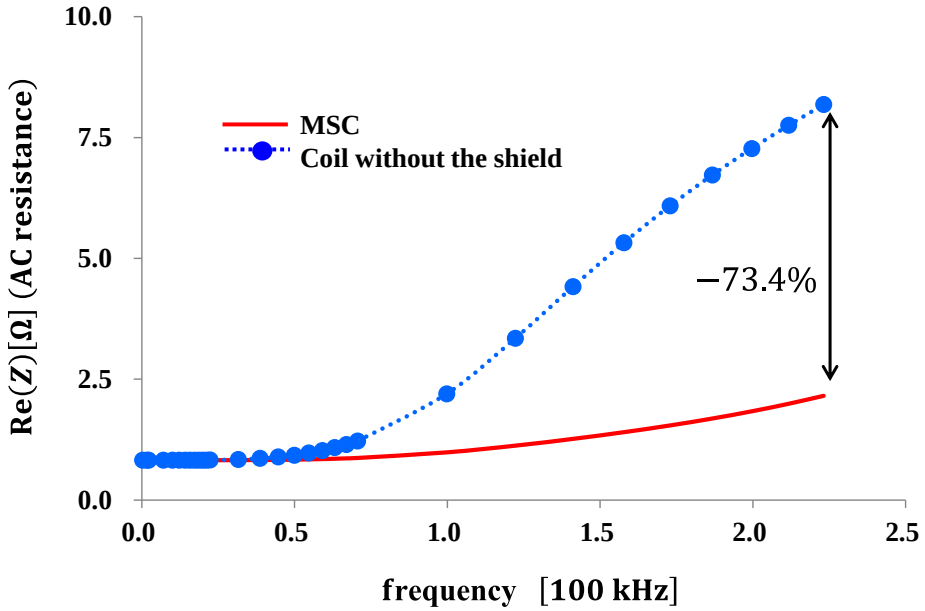


Fig.5.12 Frequency characteristics of the AC resistance of the coils without a shielding layer and the optimized coil. (voltage input)
From this figure, it is concluded that there are no meaningful differences between these two data computed by voltage and current inputs.

Table 5.6 Comparison of the AC resistance of the MSC as shown in Fig.5.8 at 100 kHz (1 Volt input)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.87

5. 3. 4　最適化問題：絶縁皮膜を考慮した解析

5.3.3 節の解析モデルであった多層磁性被覆線の絶縁皮膜の項は，充填率で考慮されていたが，実際に製造されている磁性被覆線の絶縁皮膜には十分に厚みのあるポリウレタン皮膜が用いられる場合がある．そこで，本節では，絶縁皮膜をも考慮した最適化設計を行う．解析モデルとして，Fig.5.13 に示すように，磁性被覆が単層の場合に，外部絶縁皮膜を考慮したパラメータ設定を行う．電圧源入力を仮定し，最適化問題はつぎのように設定した．

$$\mathrm{Re}(Z(\boldsymbol{x})) \rightarrow \min. \tag{5.3a}$$

$$\text{Sub. to} \quad 1\ \mu\text{m} \le b-a \le 10\ \mu\text{m}, 10\ \mu\text{m} \le c-b \le 20\ \mu\text{m}, c = 0.15\ \text{mm}, a < b < c$$

$$100 \le \mu_{2r} \le 1000 \quad , \quad 1.0\times10^{7} \le \sigma_2 \le 1.5\times10^{7}$$

$$\mu_{3r} = 1 \quad , \quad \sigma_3 = 1.0\times10^{-3} \tag{5.3b}$$

最適化された磁性被覆線のパラメータを Table 5.7 に，交流抵抗の値を Table 5.8 にそれぞれまとめる．これらの表から，交流抵抗を最小化するためには，磁性被覆層の透磁率を最大に，導電率を最小にしながらも，絶縁皮膜の厚さを十分に小さくするとよいとわかる．

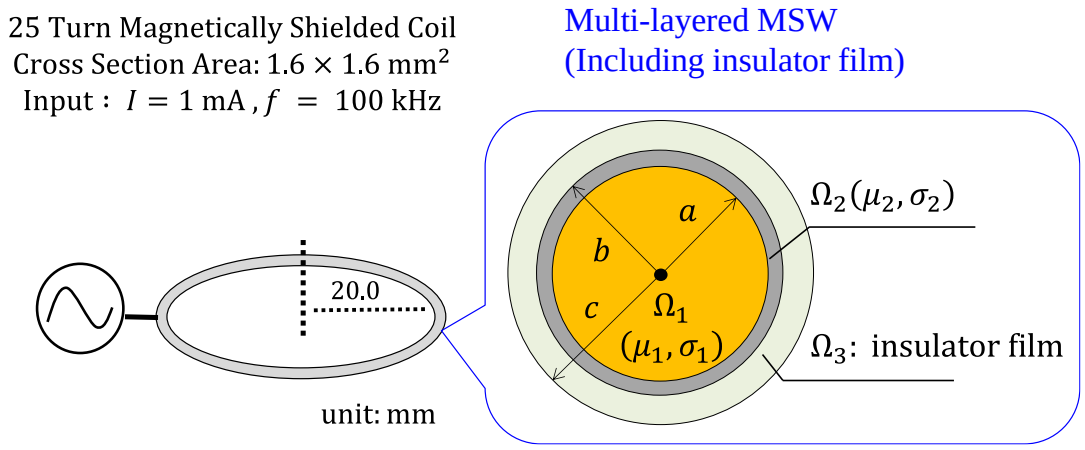


Fig.5.13 25-turn MSC including an insulator film.

Table 5.7 Optimization results (100 kHz・1 Volt input)

a [mm]	0.147	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.149	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7

Table 5.8 Comparison of the AC resistance of the MSC as shown in Fig.5.13 at 100 kHz (1 Volt input)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.98

つぎに，Fig.5.13 のモデルを多層線に置き換えて，同様の最適化を行う．電圧源入力を仮定し，最適化問題はつぎのように設定した．

$$\mathrm{Re}(Z(\boldsymbol{x})) \rightarrow \min. \tag{5.3a}$$

$$\text{Sub. to} \quad 1\ \mu\text{m} \leq b - a \leq 10\ \mu\text{m}, 1\ \mu\text{m} \leq c - b \leq 10\ \mu\text{m},$$

$$0.005\ \text{mm} \leq d - c \leq 0.01\ \text{mm}, \qquad d = 0.15\ \text{mm}, a < b < c < d$$

$$100 \leq \mu_{2r}, \mu_{3r} \leq 1000 \quad , \quad 1.0 \times 10^7 \leq \sigma_2, \sigma_3 \leq 1.5 \times 10^7$$

$$\mu_{4r} = 1 \quad , \quad \sigma_4 = 1.0 \times 10^{-3} \tag{5.3b}$$

最適化された磁性被覆線のパラメータを Table 5.9 に，交流抵抗の値を Table 5.10 にそれぞれまとめる．これらの表から，多層磁性被覆線の場合でも，単層線の場合と同様の傾向が見られる．これらの結果から，近接効果を十分に抑制しながら，銅線断面積を大きくする構造であれば，充填率を高くするように設計するとよいとわかる．

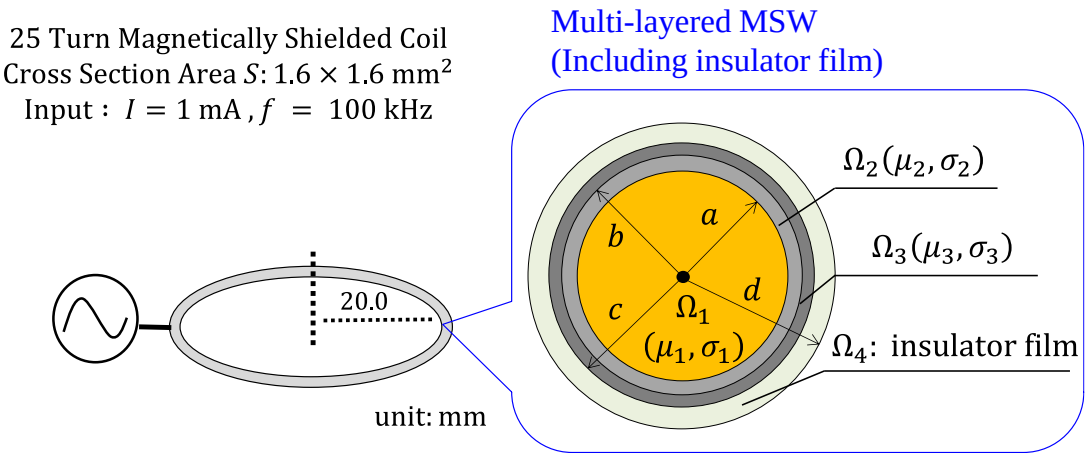


Fig.5.14 25-turn multi-layer-type MSC including an insulator film.

Table 5.9 Optimization results (100 kHz・1 Volt input)

a [mm]	0.142	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.143	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7
c [mm]	0.145	μ_{3r}	1000	σ_3 [S/m]	1.00×10^7

Table 5.10 Comparison of the AC resistance of the multi-layered MSC as shown in Fig.5.14 at 100 kHz (1 Volt input)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.92

5. 4　第 5 章の総括

本章では，均質化有限要素法を用いた磁性被覆コイルの解析により，磁性被覆コイルの構造最適化を行った．磁性被覆が単層の場合，磁性被覆の厚さを変更することで，交流抵抗を最小化できることを示した．また，磁性被覆層が多層構造を有している場合には，遺伝的アルゴリズム(GA)によって，与えられた条件下で，磁性被覆コイルの交流抵抗を十分に抑制できる構造が得られることがわかる．また，最適化結果から，今回の問題の場合，磁性被覆層が単層の場合が最適であるとわかった．この場合，通常の銅巻線の場合と比べて，近接効果に起因する損失を十分に抑制できる．さらに，絶縁被膜厚を考慮した解析では，耐熱等の問題を考えなければ十分に薄く設計することで，磁性被覆と絶縁層を十分に薄くし，銅線の半径を十分に大きくすることで，近接効果損失を抑制しながら，直流抵抗損を十分に小さくできる．本節で扱った磁性被覆コイルにはいずれの場合においても，交流抵抗が最小になる構造があり，GA 等を用いて決定されたパラメータによる構造によって，交流抵抗を最小化できる．したがって，最適化された磁性被覆線を用いることで，電気機器の省電力化が可能になると期待される．

第 5 章 参考文献

[5.1] T. Yamamoto, et. al., “Examination of LLC Resonant Converter Using Magneoplated Wire and Carbonyl-iron Powder/Epoxy Composite Bulk Magnetic Core”, *IEEJ, Trans,* MAG-16-50, LD-16-42, pp.63-68, 2016.

[5.2] T. Mizuno, et. al., “AC Resistance Analysis of Transformer Using Magnetoplated Wire”, *IEEJ, Trans,*FM, pp.611-620,2007.

[5.3] T. Mizuno, et. al., “Reduction in Eddy Current Loss in Conductor Using Magnetoplated Wire”, *IEEJ, Trans,*FM,pp.611-620,2007.

[5.4] 水野勉，米野史一，林利明，榎木茂美，品川宏樹，山田一，渡辺誠一，岸本哲，竹下邦夫　「渦電流形変位センサの Q 値解析手法」，日本磁気学会誌，　Vol 29，　pp.296-301，　2005.

[5.5] T. Mizuno, et. al., “Linearity Range of an Eddy Current Displacement Sensor in Relation to the Fe Film Thickness of Magnetoplated Wire”, *J.Magn. Soc. Jpn.* , 31, pp. 103-108, 2007.

[5.6] 北野宏明，他，「遺伝的アルゴリズム 3」，産業図書，1997, Sep.

[5.7] 小林重信,「実数値 GA のフロンティア」，人工知能学会誌，vol.23, no.1m pp.128-143, 2009.

[5.8] 佐藤孝洋,「電磁界解析を用いた電気機器の最適設計に関する研究」，北海道大学博士論文，2015.

第 6 章　SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率

本章では，第 3 章で述べた周波数領域に拡張した Ollendorff の式に基づく方法で，SMC(Soft Magnetic Composite)コアのマクロ複素透磁率を，磁性粒子内部，外部の磁気特性に注目して求める方法について調べる．単純に複素透磁率を Ollendorff の式中の比透磁率として用いた場合のマクロ複素透磁率は第 4, 5 章の数値解析結果で示されている．しかし，単に周波数領域に拡張した Ollendorff の式を用いた方法ではつぎの事項が考慮できないという問題が残されている：①磁性粒子同士が接触している，または近接した状態を考慮できないことに加えて，磁性粒子が電磁気的に結合し，インダクタンスが変化すること，また局所的に磁束が集中している箇所の磁気特性が反映できないこと，②粒子内部の非線形磁気特性が反映できないこと，③磁性粒子の不均一性が考慮されていないこと，④大域的に流れている渦電流が評価できないこと．文献[6.1]の報告では，磁性粒子がランダムに並んでいる状況を模擬した 2 次元画像から有限要素を生成し，静磁界解析した結果，磁気的接触が無い場合は Ollendorff の式から求めたマクロ複素透磁率と磁気エネルギーから求めたマクロ複素透磁率はほぼ同じ結果を与えていることがわかっている．そこでは，磁性粒子間で磁束の局所的な集中，つまり磁気的接触の効果が重要であると結論されている．

そこで，本研究では①に焦点を当てた修正を行う．①については，磁気的な接触効果を含めた，磁気回路を用いた磁気抵抗の配置からマクロ等価透磁率の算出法が提案されている[6.1]．磁気回路法では，磁気的接触を，磁気抵抗が並列接続されていることから評価する．しかし，どの磁性粒子が接触状態にあるのかはランダムである．この状況を，一様分布に従う乱数を割り当て，乱数が閾値 P_{th} が基準値を超えた場合は接触と判定し，接触判定を受けた磁性粒子対の間の磁気抵抗を強制的に 0 とする．これは，磁気的に短絡している状況と同じである．文献[6.1]では磁性粒子の磁気特性が等方性である場合の静磁気特性について議論されている．しかしながら製造過程の異なる圧縮力に起因する磁気異方性や渦電流を考慮した磁気特性に関しては議論されていない．

そこで，本章では，文献[6.1-2]の方法をベースに，磁性粒子の異方性と渦電流を考慮した SMC コアの均質化モデルを作成することを目標とする．まず 6.1 節で磁気回路法に基づくマクロ複素透磁率を求める方法について述べる[6.1-3]．つぎに，6.2 節ではマクロ複素透磁率の，充填率，周波数，敷居値への依存性を調べる．6.3 節では，異方性を考慮するため，第 3 章 3.12 節で述べたように，プレス圧縮された圧粉磁芯を楕円体磁性体としてモデル化した場合の磁気回路法に基づくテンソル型マクロ複素透磁率を求める方法に関して述べ，6.4 節では，この数値解析結果について述べる．最後に 6.5 節では，本章の数値解析結果から得られた知見をまとめる．

なお，本章で用いる記号を Table 6.1 にまとめる．

Table 6.1 Nomenclature of this chapter: magnetic circuit approach

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential	$\boldsymbol{B}_0$ [T]	applied uniform magnetic induction
Ω_{SMC}	SMC region	Ω_{air}	air region
σ [S/m]	conductivity of Ω_{SMC}	μ_r [H/m]	relative permeability of Ω_{SMC}
μ_0 [H/m]	permeability of vacuum	$\nu = 1/\mu$ [m/H]	magnetic reluctivity
f [Hz]	frequency	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	angular frequency
l_{SMC} [m]	length of a SMC	l_{gap} [m]	length of air-gap of a unit-cell
S_{SMC} [m^2]	surface of a SMC	S_{core} [m^2]	surface of a SMC core
ϕ [A]	magnetic scalar potential	P_{th}	threshold
$R = l/\mu S_{SMC}$ $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}\right]$	magnetic resistance	m	the number of unit-cell
j	imaginary unit	η	volume fraction
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated SMC particle	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	macroscopic complex permeability

6. 1　磁気回路法を用いたマクロ複素透磁率の推定

6. 1. 1　磁気スカラーポテンシャルを用いたマクロ透磁率

まず，最初に文献[6.1-2]で示されている磁気スカラーポテンシャルを用いた磁気回路法について示す．いま，圧粉磁芯を想定した磁性粒子群からなる系を考え，Fig.6.1 のように磁性粒子 1 つに注目し，その周囲の絶縁皮膜層，非磁性体領域(空気領域)からなる単位セルを考える．ここでは，簡単のため，単位セル中の磁性体の形状は立方体であると仮定する．いま，Fig.6.2 のように磁気抵抗が磁性粒子に 3 次元的に 6 個，非磁性体領域に 6 個，合計単位セルに 12 個の磁気抵抗があるモデルを考える．この単位セルを，m^3 個並べて，Fig.6.3 のように立方体形状に並べたものを近似的な SMC コアと見なす．このような磁性体に外部磁界が印加された場合，磁気に関する Gauss の法則

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{6.1}$$

から

$$\sum_i \Phi_i + \Phi_0 = 0 \tag{6.2}$$

を得る．(6.2)は孤立した磁性体に外部磁界が印加されても，磁束の吸い込みや湧き出しはないことを意味している．さて，隣接した i,j 番目の単位セルにおいて，i,j における起磁力 F_{ij} は，磁気スカラーポテンシャル(磁位) ϕ_i, ϕ_j を用いて，Ampère の周回積分の法則からつぎのように表すことができる．

$$F_{ij} = \int_{c_{ij}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \phi_i - \phi_j \tag{6.3}$$

ここで，磁界 $\boldsymbol{H}$ と ϕ の関係は

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi \tag{6.4}$$

である．(6.4)のように $\boldsymbol{H}$ を ϕ の勾配から求めるためには，厳密には cut という数学的な量が必要になるが，ここでは，一価関数の場合を考え，多価関数の場合は考えない．つまり，磁界が単連結であると考える．さて，(6.3)は通常の磁気回路法で知られているように，Kirchhoff の第 1 法則から

$$F_{ij} = \int_{c_{ij}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\left(\frac{l_{SMC}}{\mu_{SMC}S} + \frac{l_{air}}{\mu_{air}S}\right)\Phi_{ij} \equiv 2R_{ij}\Phi_{ij} \tag{6.5}$$

$$R_{ij} = \frac{l_{SMC}}{\mu_{SMC}S_{SMC}} + \frac{l_{air}}{\mu_0 S_{SMC}} \tag{6.6}$$

と求められる[6.1-3]．また，(6.2)から

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\phi_i - \phi_j}{R_{ij}} + \Phi_0 = 0 \tag{6.7}$$

を満足する．(6.7)をすべての単位セルに適用することによって，

$$\mathrm{K}\{\phi_n\} = -\{\phi_0\} \tag{6.8a}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{R_{ij}} \tag{6.8b}$$

なる連立方程式を得る．

さて，(6.3)と(6.5)が一致するように，SMC コア全体のマクロ比透磁率 $\langle\mu_r\rangle$ を定義する．SMC コア全体で考えるため，いまの場合，局所的な磁気抵抗の番号 $j = 1\sim6$ を全体番号に付け替えることによって，

$$\sum_{j=0}^{m^3} \phi_i - \phi_j = \sum_{j=0}^{m^3} 2R_{ij}\Phi_{ij} = 2\frac{l_{SMC}}{\langle\mu_r\rangle\mu_0 S_{SMC}} S_{SMC}B_0 = 2\frac{l_{SMC}B_0}{\langle\mu_r\rangle\mu_0} \tag{6.9a}$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \langle\mu_r\rangle\mu_0\boldsymbol{H} = -\langle\mu_r\rangle\mu_0\nabla\phi = -\langle\mu_r\rangle\mu_0(\phi_{m^3+1} - \phi_0) \tag{6.9b}$$

$$l_{SMC} = 2\big(l_{SMC} + l_{gap}\big)m \tag{6.9c}$$

を得る．$\Phi_0 = B_0 S_{SMC}$ なので，(6.9)から

$$\langle \mu_r \rangle = \frac{l_{SMC} B_0}{\mu_0(\phi_0 - \phi_{m^3+1})} = \frac{2(l_{SMC} + l_{gap})mB_0}{\mu_0(\phi_0 - \phi_{m^3+1})} \tag{6.10}$$

となる．なお，磁性粒子の磁性は等方性を仮定しているので，1 方向成分を考えている．SMC コアの下端と上端の磁気スカラーポテンシャル ϕ_0, ϕ_{m+1} は(6.8)から求められる．

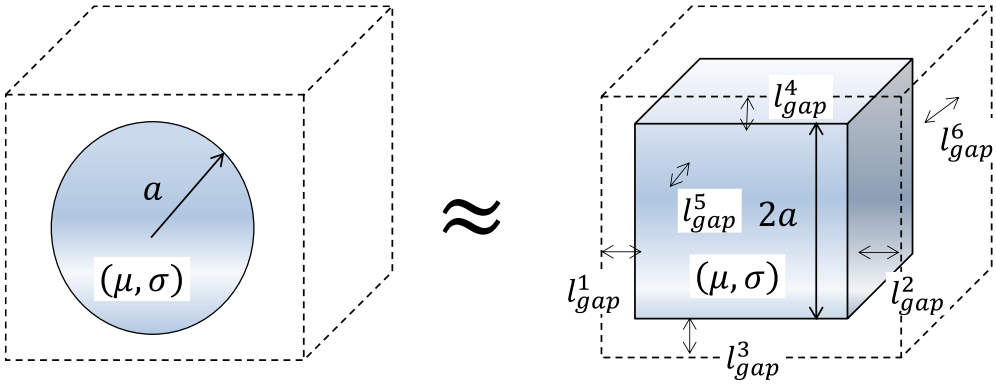


Fig. 6.1 SMC in a unit-cell.
In this model, the shape of the SMC particle is approximated to cube.

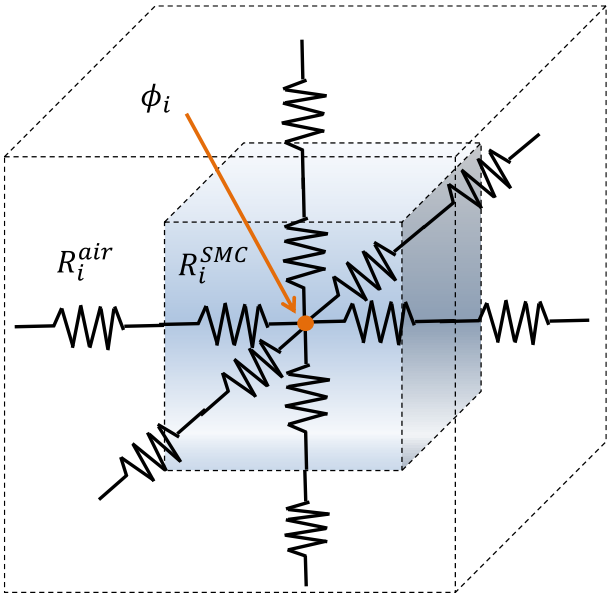


Fig. 6.2 Magnetic resistance and the lengths of a unit-cell.
Each magnetic particle in a unit-cell has a magnetic scalar potential and the six magnetic resistances.

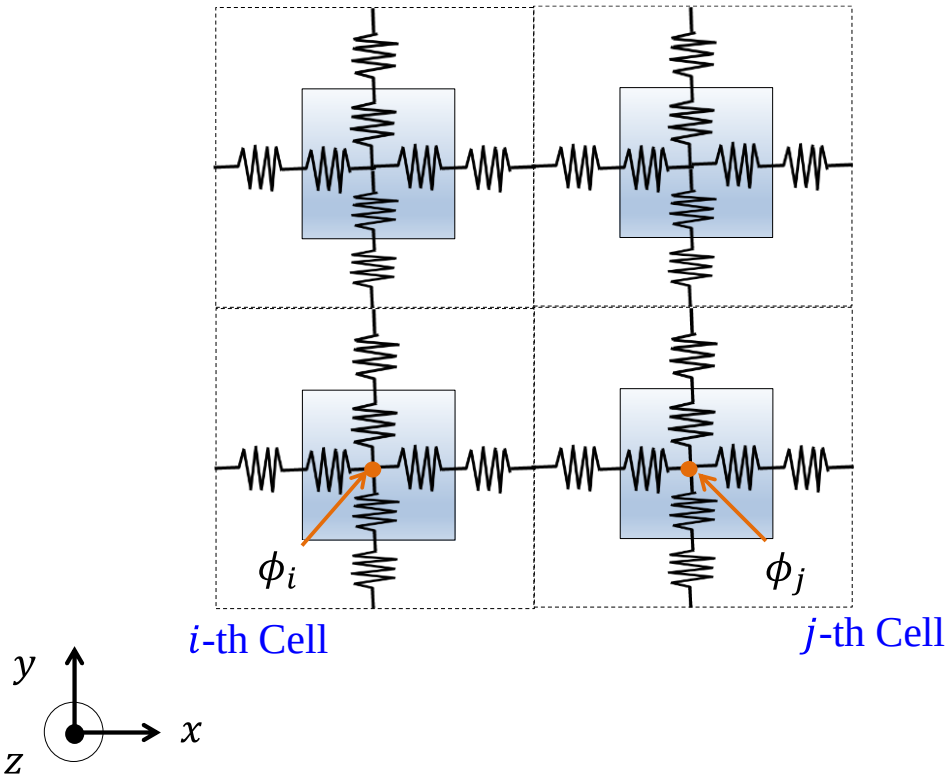


Fig. 6.3 Magnetic resistances and magnetic scalar potentials of a SMC core (xy-plane).
In this model, the SMC core is assumed to be composed of m^3 unit-cells where each magnetic particle has magnetic contacts expressed by the magnetic resistances.

6. 1. 2　乱数を用いた単位セル間の磁気結合の確率モデル

6.1.1 節の定式化では，磁気抵抗を介して，すべての磁性粒子が磁気的に結合している様子を模擬した．しかし，実際には，すべての磁性粒子が一様に磁気的に結合しているわけではない．そこで，文献[6.1-2]の方法，つまり磁性粒子間を並列接続された n 個の磁気抵抗の接続個数 k $(1 \le k \le n)$ をランダムに変更することで，不均一な磁気結合や局所的な磁気結合を模擬する方法を導入する．いま，Fig.6.2 における磁気結合部分を，Fig.6.4 のような並列接続に変更する．Fig.6.4 の場合，単位セル間の磁気抵抗値は，コンダクタンスの逆数をとることで

$$R_{ij}^{cell} = \frac{1}{\frac{1}{R_{ij}^{1}} + \frac{1}{R_{ij}^{2}} + \cdots + \frac{1}{R_{ij}^{n}}} \tag{6.11}$$

と求めることができる．

さて，磁気的接触の不均一性を反映させるため，一様分布に従う乱数を発生させ，その乱数が，敷居値 P_{th} よりも小さい場合，$R_{ij}^{k,air} = 0$ とし，敷居値 P_{th} 以上ならば，隣接する粒子との間の磁気抵抗が存在するとする．すなわち $R_{ij}^{k,air}$ の取り外しで，磁気的結合の強弱を各単位セルにランダムに設定できる状況が模擬できる．

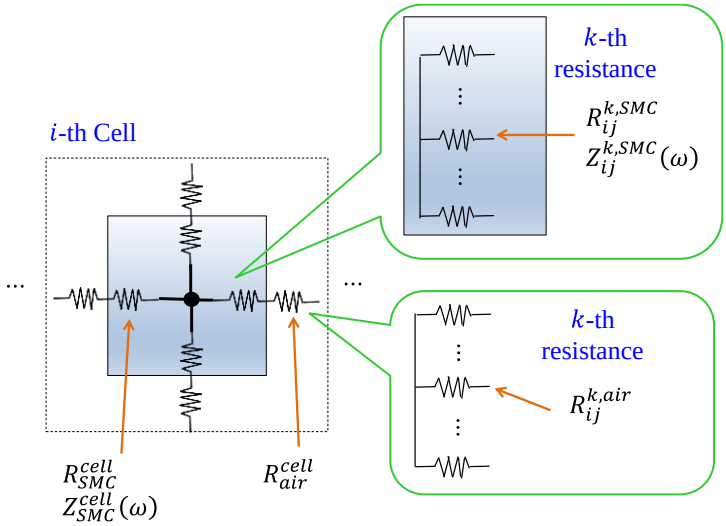


Fig. 6.4 Magnetic resistances between two unit-cells.
In this model, magnetic contact between two SMCs is represented by a stochastic model using random number for determining whether it connects each other or not.

6. 1. 3　複素透磁率を用いた渦電流の効果の反映

前節では静磁界中の場合の定式化を行ったが，高周波帯中では磁性粒子の渦電流の影響が無視できない．この場合，(6.11)の磁気抵抗の透磁率を，第 3 章 3.11.2 節で定義した球形の磁性体の複素透磁率(3.288)に置き換えて得られるインピーダンス

$$Z_{ij}^{k}(\omega) = \frac{l_{SMC}}{\mu_0 \dot{\mu}_r^{SMC} S_{SMC}} + \frac{l_{air}}{\mu_0 S_{SMC}} \tag{6.12}$$

$$\dot{\mu}_r^{SMC}(\omega) = 2\mu_r \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - 1} \tag{3.288}$$

を用いればよい．ここで，$\zeta \coloneqq a(1-\mathrm{j})/\delta$ である．なお静磁界の極限$(\omega \to 0)$では $\dot{\mu}_r^{SMC} \to \mu_r$ であるので $Z_{ij}^{k}(\omega) \to R_{ij}^{k}$ となる．(6.12)を導入することで，磁気的結合に加えて，磁性粒子内部の渦電流をも考慮したマクロ複素透磁率の評価が可能となる．

6. 2　マクロ複素透磁率の数値解析結果

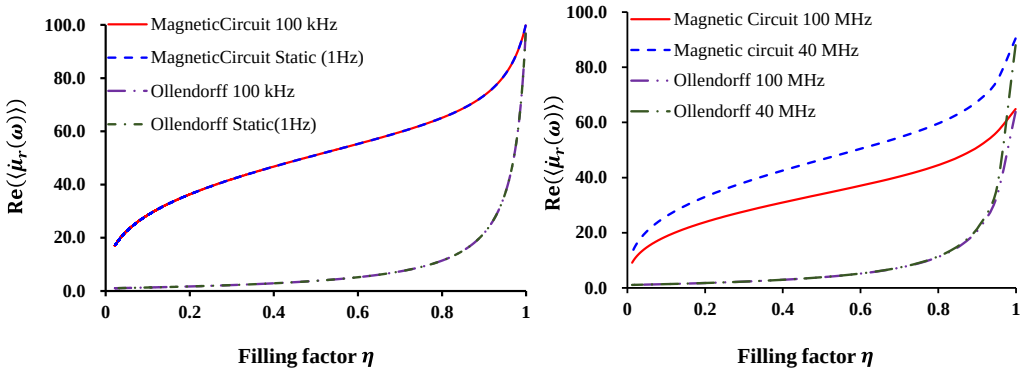
6. 2. 1　充填率への依存性

テストモデルとして，100^3 個の磁性粒子が xyz 空間上に均一に存在している場合の解析を行う．磁性粒子の形状は簡単のため，立方体と仮定する．解析緒元は Table 6.2 に示すように設定した．いまの場合，$a/\delta = 1$ となる場合，$f \approx 30$ MHz である．この状況で，空気ギャップを変化させながらマクロ複素透磁率の実部，すなわち SMC コアの等価透磁率の変化を調べる．まず，$f = 1$ Hz, 100 kHz の場合で解析を行った結果を

Fig.6.4(a)に，$f = 40\ \mathrm{MHz}, 100\ \mathrm{MHz}$ の場合のマクロ等価比透磁率 $\mathrm{Re}(\langle\dot{\mu}_r(\omega)\rangle)$ を比較した結果を Fig.6.4(b)にそれぞれ示す．これらのグラフから，つぎのことがわかる．① $\eta \approx 1$ の場合，Ollendorff の式の場合と磁気回路法の場合で値が一致している．これは，磁性粒子が均一かつ，周期的に分布している状況が再現されている．② $a/\delta \leq 1$，すなわち渦電流の効果が顕著ではない周波数帯域では，静磁界の状況とほとんど一致する．一方，$a/\delta \geq 1$ の場合，反磁界効果により，実効的な透磁率が減少しているとわかる．③磁気回路法で評価した場合の方が，磁気的な結合，接触部のインダクタンスの増分が反映されている．なお，磁気的接触を完全に無視した場合の解析では，Ollendorff の式の評価と一致した結果が得られることが①より判明している．

Table 6.2 Specification of assembled spherical SMC particles

a [μm]	3.0	μ_r	100	σ [S/m]	1.03×10^7
P_{th}	0.8	N	1/3		



(a) $f = 1\ \mathrm{kHz}, 100\ \mathrm{kHz}$
$a/\delta < 1$

(b) $f = 40\ \mathrm{MHz}, 100\ \mathrm{MHz}$
$a/\delta > 1$

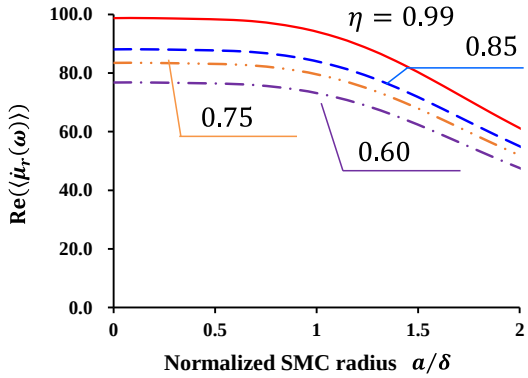
Fig.6.5 Effective permeabilities of SMC cores calculated by the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula.
Abscissa and ordinate denote the filling factor η and $\mathrm{Re}(\langle\dot{\mu}\rangle)$, respectively. From this figure, we find that when η approaches 1, the extended Ollendorff formula and the magnetic circuit approach give almost the same results. On the other hand, when the normalized sphere radius a/δ becomes larger than 1, there are meaningful discrepancies between these results.

6. 2. 2　周波数への依存性

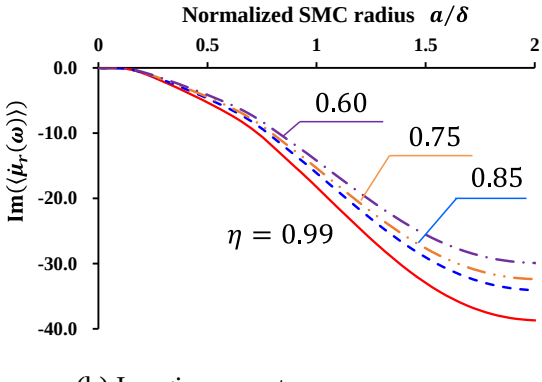
つぎに，6.2.1 節と同じモデルで，マクロ等価透磁率の周波数への依存性を調べる．解析条件を Table 6.3 のように変更する．いまの場合，$a/\delta = 1$ で $f \approx 30\ \mathrm{MHz}$ である．η を変更しながら，磁気回路法と Ollendorff の式を用いて，周波数依存性を調べた結果を Fig.6.6 に示す．Fig.6.6 の比較結果からつぎのことがわかる．①この場合の解析においても磁気回路法の方がマクロ等価透磁率の実部が大きい．また，当然ながら η が高い方が渦電流の大きさも顕著になる．これは 6.2.1 節の③と同じ理由である．② $a/\delta = 1$ の付近で変化が顕著になる．③ $a/\delta = 2$ では渦電流の効果が顕著に表れる．

Table 6.3 Specification of assembled spherical SMC particles

a [μm]	10.0	μ_r	100	σ [S/m]	1.03×10^7
P_{th}	0.95	N	1/3	η	0.99,0.85,0.75,0.60

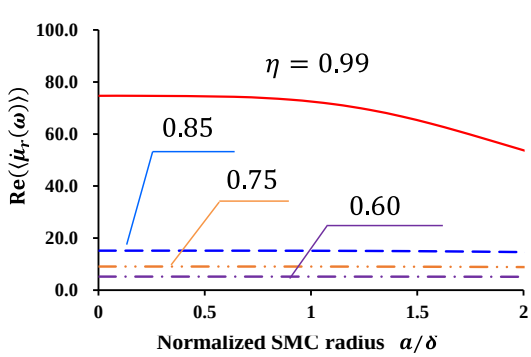


(a) Real part

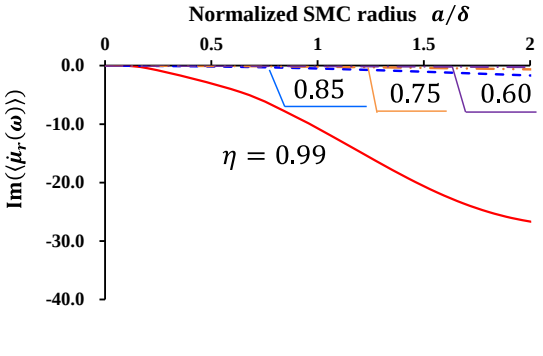


(b) Imaginary part

(a) Magnetic circuit introduced the stochastic approach.



(a) Real part



(b) Imaginary part

(b) Extended Ollendorff formula.

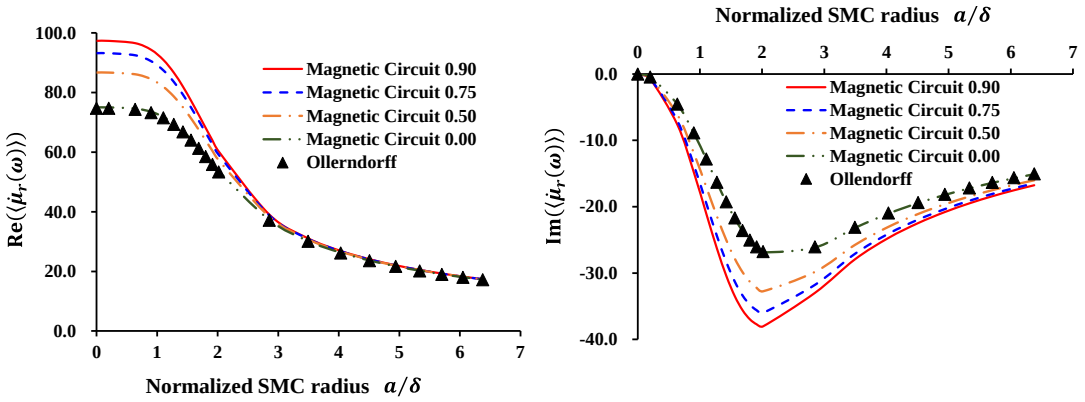
Fig.6.6 Macroscopic complex permeabilities calculated the magnetic circuit method and the extended Ollendorff formula.
Abscissa is the ratio of the sphere radius a to the skin depth δ, where $\mu_r = 100$, $\sigma = 1.03 \times 10^7$ S/m. In this graph, the red, blue, orange, purple curves are plotted for $\eta = 0.99,\ 0.85,\ 0.75,\ 0.60$.

6. 2. 3　接触確率への依存性

つぎに，マクロ等価透磁率の接触確率 P_{th} への依存性を調べる．解析条件を Table 6.4 のように変更した．P_{th} を変更しながら，磁気回路法を用いて，周波数依存性を調べた結果を Fig.6.7 に示す．Fig.6.7 から，定性的に P_{th} が高いほど実効的な透磁率，および渦電流損失が高くなっていることがわかる．また，$P_{th} = 0$ の場合では，周波数領域に拡張した Ollendorff の式に一致し，孤立した磁性体が集合した場合のマクロ複素透磁率に一致している．この解析結果から，磁性粒子内部の渦電流を考慮した解析において，磁気回路の磁気抵抗の大きさを磁性粒子毎に変更し，さらに複素透磁率を用いることで，反磁界を考慮した磁束の局所的な集中を表す方法は妥当であると思われる．

Table 6.4 Specification of assembled spherical SMC particles

Num.SMC	a [μm]	η	δ^{gap} [μm]	σ [S/m]	μ_r
100^3	10.0	0.99	0.0336	1.03×10^7	100.0



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.6.7 Macroscopic effective permeabilities is plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part). Abscissa is the ratio of the sphere radius a to the skin depth δ. In this graph, the red, blue, orange, purple curves are plotted for $P_{th} = 0.90,\ 0.75,\ 0.50,\ 0.00$. In the case of $P_{th} = 0.00$, there exists no magnetic contact among soft magnetic composites in the cluster. Thus, the macroscopic complex permeability of the SMC core calculated by the magnetic circuit approach coincides with that evaluated by the extended Ollendorff formula, in which each isolated magnetic particle has no magnetic contacts.

6. 3　磁性楕円体のテンソル型複素透磁率を用いた異方性の考慮

上記の定式化においては，磁性粒子の磁気特性は等方性を仮定していたが，実際には冒頭で述べたように，製造過程において，圧縮力がプレス方向毎に異なることに起因する磁気異方性をも考慮する必要がある. そこで, 本節では磁気異方性を考慮するために, 第 3 章で定義した磁性楕円体のテンソル型複素透磁率を用いることを検討する[6.4]．なお，この条件では，一様にプレスされている磁性粒子を考えることになる．Fig.6.1 と同様に，磁性楕円体を Fig.6.8 のように直方体に近似する．この場合，磁性粒子のテンソル型複素透磁率は，第 3 章 3.12.2 節で導いたつぎの(3.336), (3.345)で示される．

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\}\dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2\tanh^2\eta_0 - 1)} \tag{3.345}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2\eta_0)} \tag{3.336}$$

ここで，$\dot{\mu}_r^{\alpha}, \dot{\mu}_r^{\beta}$ はそれぞれ長軸，短軸方向に磁界を印加した場合の複素透磁率である．なお，定数の定義については，第 3 章 3.12.2 節や第 4 章 4.2.3 節を参考とする．異方性と渦電流を考慮した SMC コアのテンソル型マクロ透磁率はつぎのように記述できる．

$$[\langle\dot{\mu}_r\rangle] = \frac{l_{SMC}}{\mu_0(\phi_0 - \phi_{m^3+1})}[\boldsymbol{B}_0] = \frac{2(l_{SMC} + l_{gap})m}{\mu_0(\phi_0 - \phi_{m^3+1})}[\boldsymbol{B}_0] \tag{6.13}$$

次節では，(6.13)に基づき，テンソル型マクロ複素透磁率を用いた場合の，磁気的結合を考慮した SMC コアの解析を行う．

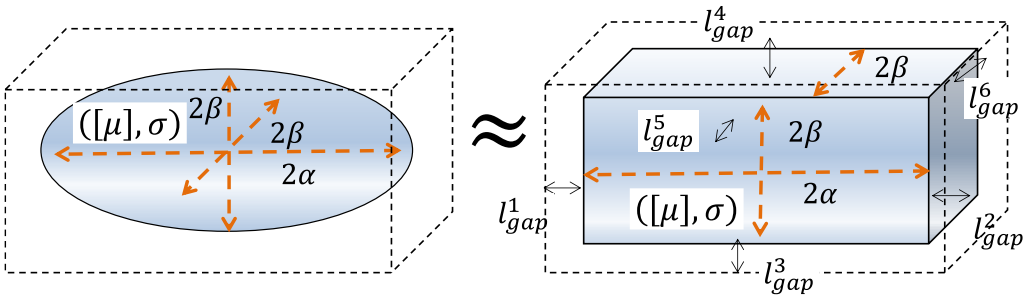


Fig.6.8 Spheroidal SMC in a unit-cell.
In this model, the shape of the SMC particle is approximated to cuboid.

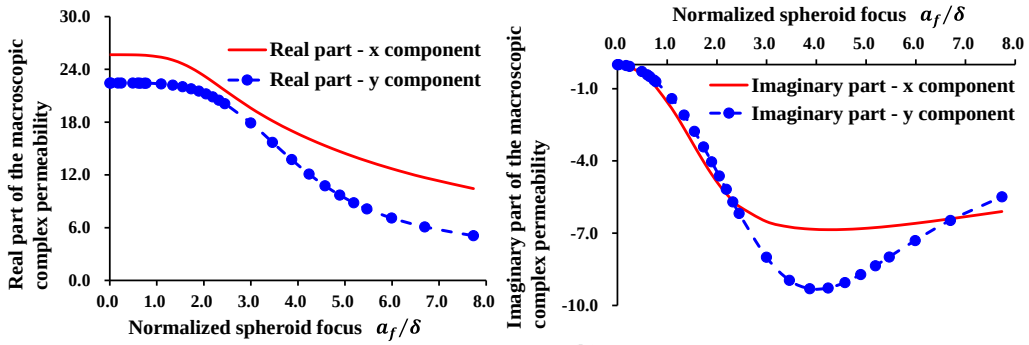
6. 4　テンソル型マクロ複素透磁率の数値解析結果

6. 4. 1　長軸と短軸の比較

まず，異方性に起因する複素透磁率の周波数特性の差異を調べる．解析緒元は Table 6.5 において，$v_f = 0.98$ とし，磁気回路法は使用しない．解析結果を比較したデータを Fig.6.9 に示す．Fig.6.9 から，長軸の方が磁束を受ける面積が大きいため，反作用磁界の影響が大きいことが確認できる．また，実部は反磁界を考慮した実効透磁率，虚部は渦電流損を表す．

Table 6.5 Specification of an isolated spheroidal SMC

α [μm]	β [μm]	σ [S/m]	μ_r	v_f
25.0	10.0	1.03×10^7	28.0	0.98



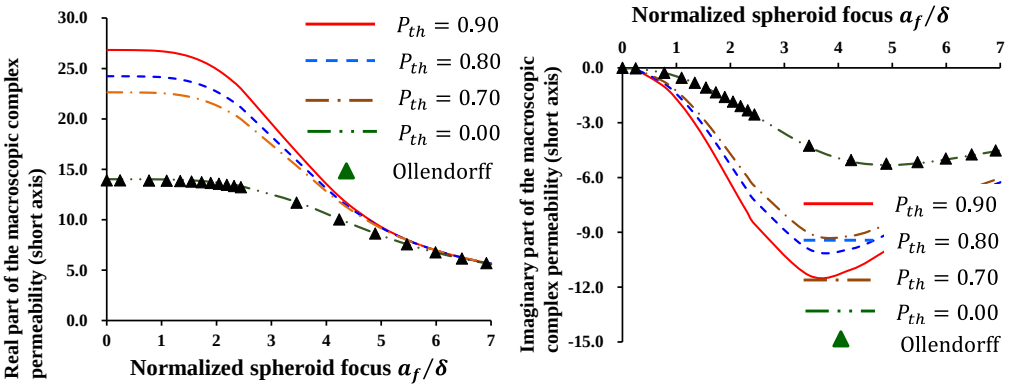
(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.6.9 Comparison of the macroscopic complex permeabilities $\langle\dot{\mu}_r^{\alpha}\rangle$ and $\langle\dot{\mu}_r^{\beta}\rangle$.
Abscissa is the ratio of the ellipse focus a_f to the skin depth δ. From this figure, we find that the property of the macroscopic complex permeability is proportional to the contact probability.

6. 4. 2　接触確率・周波数への依存性

磁気回路法により求めた複素透磁率の周波数特性を調べる．ここでは，解析緒元を Table 6.5 のように設定し，接触確率 P_{th} を 0.90,0.80,0.70,0.00 と変更して，短軸方向の複

素透磁率 $\dot{\mu}_r^{\beta}$ の周波数特性を調べた結果を Fig.6.10 に示す．本来は，プレス圧縮の方向もランダムであるが，ここでは上から一様な圧力でプレスされた場合を仮定する．Fig.6.10 より， $P_{th} = 0$ の場合では，孤立した磁性体が集合した場合に周波数領域に拡張した Ollendorff の式から評価されたマクロ複素透磁率に一致しているとわかる．また，磁気的な接触が十分に存在する場合，実効的な透磁率が高くなっているとわかる．

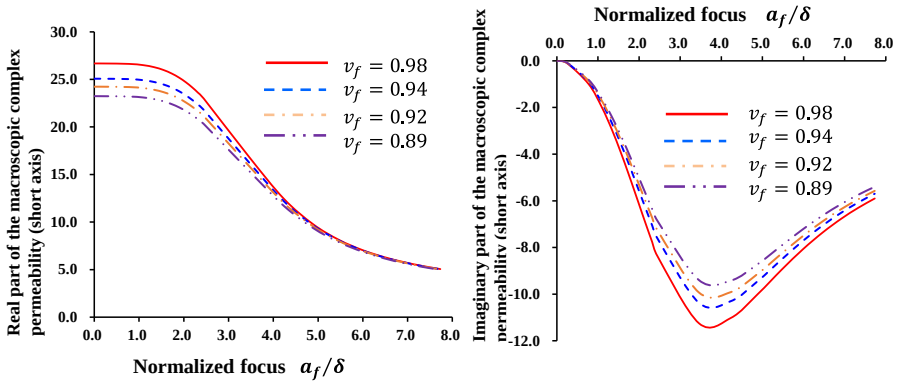


(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.6.10 Macroscopic effective permeabilities of spheroidal SMC cores approximated to cuboid shape are plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part).
Abscissa and ordinate denote the normalized spheroid focus a_f/δ. From this figure, we find that when P_{th} approaches 0, the magnetic circuit approach and the approach based on the extended Ollendorff formula provide almost the same results.

6. 4. 3　充填率への依存性

磁気回路法により求めた複素透磁率の周波数特性を調べる．ここでは，解析緒元を Table 6.5 のように設定した上で， $P_{th} = 0.80$ に固定し，磁性粒子の充填率 v_f を 0.98,0.94,0.92,0.89 と変更して，短軸方向の複素透磁率 $\dot{\mu}_r^{\beta}$ の周波数特性を調べた結果を Fig.6.11 に示す．Fig.6.11 より圧粉磁芯の形状が磁性楕円体の場合でも充填率が高くなると等価的にマクロ複素透磁率の実部が高くなることが確認できる．



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.6.11 Macroscopic permeability calculated by the magnetic circuit method.
Abscissa is the ratio of the ellipse focus a_f to the skin depth δ. In this graph, the red, blue, orange, purple curves are plotted for $v_f = 0.98, 0.94, 0.92, 0.89$. From this figure, we find that the property of the macroscopic complex permeability is proportional to the contact probability.

6.5 第 6 章の総括

本章では，圧粉磁芯の磁気結合，異方性を考慮した SMC のマクロ複素透磁率を評価する方法を述べ，その妥当性や特性について議論した．また，磁気回路を用いた均質化有限要素解析を用いて，磁性粒子間の磁気的結合を考慮したテンソル型マクロ複素透磁率を求めた．本章においては，周波数領域における議論を行ったが，以下の問題が未解決である．

① 磁気回路を用いた方法では，大域的に流れる渦電流の効果が反映できないこと．
② SMC コアのマクロ複素透磁率は周波数領域でのみ適用可能であるので, 磁気結合を考慮した時間領域解析は直接的には困難であること．
③ インダクタの解析においては巻線の渦電流の効果が無視できないが，本解析ではバルクコイルとして扱い, 導電性がないと仮定していること. 仮に複素透磁率を用いても，時間領域解析を行うことは難しいということ．

①については, 渦電流の効果を複素誘電率や実効抵抗で表す方法が検討されている[6.5]. また②，③については，時間領域解析に適用するための方法が既に提案されている．次章では，特に複素透磁率の時間領域への拡張を議論する．

第 6 章 参考文献

[6.1] 伊藤泰久,「非適合要素および均質化を用いた電磁界解析に関する研究」, 2016 年度北海道大学博士論文.

[6.2] Y.Ito, H. Igarashi, M. Suzuki, Y. Iwasaki, and K. Kawano, “Effect of Magnetic Contact on Macroscpic Permeablity of Soft Magnetic Composite”, *IEEE Trans., Magn*. vol.52, no. 3, 9400804, 2015.

[6.3] F. Mazaleyrat, V. Legér, R. Lebourgeois, and R. Barrué, "Permeability of Soft Magnetic Composites From Flakes of Nanocrystalline Ribbon", *IEEE Trans., Magn*. vol.38, no. 5, pp.3132-3134, 2002.

[6.4] O. Barrière, M. Lobue, and F. Mazaleyrat, "Semi-analytical and Analytical Formulas for the Classical Loss in Granular Materials With Rectangular and Elliptical Grain Shapes", *IEEE Trans., Magn*. vol.50, no. 10, pp.1-8, 2014.

[6.5] A. Furuya, et. al., “Magnetic Field Analysis for Dimensional Resonance in Mn-Zn Ferrite Toroidal Core and Comparison With Permeability Measurement”, *IEEE Trans., Magn*. vol.53, no. 11, 7301004, 2017.

第 7 章　均質化有限要素法の時間領域解析への拡張

前章までで，周波数領域の均質化有限要素解析に関して，その方法と妥当性を確認した．しかし，実際の電気機器の設計では過渡応答を確認しなければならない場合や，非線形特性を有する磁性体が存在する系等における損失の実効値の評価が要請される場合がある．そのためには，時間領域解析が必要となるが，前節までのマクロ複素透磁率を用いた解析は，いずれも周波数領域のみで有効であった．このうち，unit-cell approach や磁気回路法に基づく磁気結合を考慮した方法は，いずれも数値計算によりマクロ複素透磁率を求める方法である．したがって，直接時間領域解析に供することは難しい．一方で，複素透磁率を解析的に求め，周波数領域に拡張した Ollendorff の式に代入する方法では，複素関数が用いられているが，複素透磁率が $s \coloneqq \mathrm{j}\omega$ の関数で記述できれば，Padé 近似により有理関数の生成，並びに部分分数展開が実行でき，逆 Laplace 変換を用いて時間領域の関数に変換することが数学的に可能である．しかしながら，第 3 章で導いたそれぞれの形状に対する複素透磁率はいずれも周波数領域における複雑な関数で記述されるため，直接的に有理関数を求めることは難しい．

そこで本研究では，これらの複素透磁率を s 領域の連分数の形で再表記し，Padé 近似により有理関数の生成を行うことを検討する．後に述べるように，複素透磁率は，それぞれの微分方程式の基底関数からなり，これらを連分数展開で記述するための数学公式が知られている[7.1-2]．この連分数展開を用いて，周波数領域に拡張した Ollendorff の式から，Padé 近似により有理関数を得る．この有理関数に対して部分分数展開を実行し，得られた s 領域の関数を逆 Laplace 変換して時間領域のマクロ実効磁気抵抗を得る．なお，本節で用いた連分数展開の公式は Appendix F で導く．

しかし，時間領域の有限要素方程式において，このマクロ実効磁気抵抗を適用するためには，磁束密度との畳み込み積分の項が表れる．直接的な畳み込み積分では磁界の評価の過去値が全て記憶しておくことが必要となり，過渡解析に膨大な時間とメモリが必要となる．

そこで，本研究では，文献[7.3, 4]で紹介されている，FDTD(Finite Discrete Time Domain : FDTD)法を用いて，分散性誘電体を含む系を電磁波が透過する問題を時間領域で効率的に解析する際に用いられる RC(Recursive Convolution : RC)法を採用する[7.3-8]．RC 法においては，磁界の過去値の集積値，すなわち帰納的集積関数を用いて過去の積分値のみを記憶することで，磁界の評価は 1 ステップ前までの記憶のみで行うことができ，計算の高効率化が可能となる．

この方法は，電磁鋼板や円筒形細線，線形性が仮定できる圧粉磁芯に対して適用可能である．しかしながら，磁性被覆線や楕円柱細線に対しては使用が難しい．そこで，円筒形磁性被覆線に対しては, 電磁鋼板を用いた磁性被覆の表現を用いることで対応する．一方で，楕円柱細線の複素透磁率には Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用いることで対応する[7.9, 10]．このことについては後に述べる．

本節では，まず 7.1 節で，マクロ実効磁気抵抗を用いて均質化された磁性体を時間領

域で解析のための共通する理論の概要を述べる．つぎに 7.2 節以降では円筒形細線，円筒形磁性被覆線, 楕円細線(平角線), 楕円形磁性被覆線(磁性被覆平角線)の時間領域解析，についてそれぞれ述べる．最後に，7.6 節にて本章で得られた知見についてまとめる．なお，本定式化において，部分分数展開の数値計算については，例えば Mathematica®を用いて行うことができることを付記する．

7. 1　マクロ実効磁気抵抗と畳み込み積分の評価

本節では，各複素透磁率からマクロ実効磁気抵抗を得る方法に関して，共通する部分について述べる．つぎに得られたマクロ実効磁気抵抗を用いて，時間領域において有限要素解析を行う際に現れる畳み込み積分の評価に関して，冒頭で述べた RC 法の適用について述べる．まず，7.1.1 節では，複素透磁率の連分数表示から部分分数展開を行う方法，7.1.2 節では，均質化された磁性体が解析領域内に存在する場合の有限要素方程式を導く．つぎに，7.1.3 節では RC 法について述べる．最後に，7.1.4 節ではコイルの解析における回路方程式との連成を示す．本節で用いる記号を Table 7.1 に示す．なお，文献によっては，時間領域の電気・磁気に関する物理量は小文字で示すこともあるが，本章では Table 7.1 に示すように Padé 近似の係数との混同を避けるため，磁気に関する物理量については時間領域でも大文字で示していることを付記する．

Table 7.1 Nomenclature of this section: Macroscopic magnetic reluctivity for time-domain analysis

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential	$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component
$\dot{\mu}$ [H/m]	complex permeability of an isolated magnetic material	$\langle\dot{\mu}\rangle$ [H/m]	macroscopic complex permeability
μ_r	relative permeability of a magnetic material	μ_0 [H/m]	permeability of vacuum
σ [S/m]	conductivity of a magnetic material	Ω_h	homogenized region
I [A]	current	V [V]	voltage
$\boldsymbol{J}$ [A/m^2]	current density	$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{J}/I$ [1/m^2]	unit current vector
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
$s \coloneqq \mathrm{j}\omega$	Heaviside's symbol (Laplace domain)	a_i, b_i	coefficients of the Padé approximation
η	volume fraction	N	diamagnetic constant
ν_∞ [m/H]	magnetic reluctivity at infinite frequency	r_i, p_i	residue and pole of partial fraction expansion
$\langle\dot{\nu}(s)\rangle$ [m/H]	macroscopic complex magnetic reluctivity in Laplace domain	$\langle\nu(t)\rangle$ [m/H]	macroscopic effective magnetic reluctivity in time domain
q	the number of terms of partial fraction expansion	$\delta(t)$	impulse function

7. 1. 1　逆 Laplace 変換によるマクロ実効磁気抵抗

第 3 章で導出した $\mathbf{e}_\xi$ 方向に印加される交番磁界に対する複素透磁率がつぎのように連分数で記述できるとする．ただし，本節では簡単のため ξ を省略して表示する．

$$\dot{\mu}_r(s) = \cfrac{c_1}{c_2 + \cfrac{s}{c_3 + \cfrac{s}{c_4 + \cfrac{s}{c_5 + \cdots}}}} \tag{7.1}$$

(7.1)を周波数領域に拡張した Ollendorff の式に代入することにより

$$\langle \dot{\nu}(s) \rangle = \frac{1}{\mu_0 \left(1 + \dfrac{\eta(\dot{\mu}_r(s) - 1)}{1 + N(1-\eta)(\dot{\mu}_r(s) - 1)} \right)}$$

$$= \frac{a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} \cdots a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} \cdots b_1 s + b_0} \tag{7.2}$$

なる Laplace 領域の有理関数を, Padé 近似を介して求めることができる. (7.2)に対して, 部分分数展開を適用すると

$$\langle \dot{\nu}(s) \rangle = \nu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{r_j}{s + p_j} \tag{7.3}$$

を得る．さて，(7.3)は解析的に逆 Laplace 変換を行うことができ，マクロ実効磁気抵抗

$$\langle \nu(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}(s) \rangle] = \nu_\infty \delta(t) + \sum_{j=1}^{q'} r_j \exp(-p_j t) \tag{7.4}$$

を求めることができる.

7. 1. 2　均質化された磁性体を含む系の時間領域の有限要素方程式

準定常電磁界を時間領域で解析するために，周波数領域の Maxwell 電磁方程式

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + s\sigma\boldsymbol{A} = I\boldsymbol{j} \tag{7.5}$$

を逆 Laplace 変換する. ただし, 均質化された磁性体領域 Ω_h では $\langle \dot{\nu}(s) \rangle, \sigma = 0$ を与える. (7.5)に対して，第 2 章で述べた Galerkin 法を適用すると，Ω_h 内の 1 要素において，つぎのような有限要素方程式を得る.

$$\int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \langle \dot{\nu}(s) \rangle \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \nabla N_i \cdot [\nu] \nabla N_j\, \mathrm{d}S$$

$$+s\sum_{j=1}^{n}A_j\delta(t)\int_{\Omega/\Omega_h}\sigma N_iN_j\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}N_i\cdot I\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}S \tag{7.6}$$

(7.6)は Laplace 領域における有限要素方程式である．したがって，時間領域における有限要素方程式は，(7.6)を逆 Laplace 変換することにより

$$\int_{\Omega_h}\nabla N_i\cdot\mathcal{L}^{-1}[\langle\dot{\nu}(s)\rangle\boldsymbol{B}]\,\mathrm{d}S+\sum_{j=1}^{n}A_j\delta(t)\int_{\Omega/\Omega_h}\nabla N_i\cdot[\nu]\nabla N_j\,\mathrm{d}S$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{n}A_j\delta(t)\int_{\Omega/\Omega_h}\sigma N_iN_j\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}N_i\cdot\delta(t)I\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}S \tag{7.7}$$

と得られる．後は第 2 章 2.7 節で示したように，2 次元解析ならば 1 要素の局所節点番号，3 次元解析ならば 1 要素の局所辺番号を有限要素空間全体での番号に付け替え，重ね合わせれば解くべき連立 1 次方程式を得られるが，(7.7)にはマクロ実効磁気抵抗を用いて表された磁界，つまり $\mathcal{L}^{-1}[\langle\dot{\nu}(s)\rangle\boldsymbol{B}]$ を含む項については直接的な離散化を行うことができないため，この項については別に対応する必要がある．$\langle\dot{\nu}(s)\rangle\boldsymbol{B}$ は周波数領域の信号の積なので，$\mathcal{L}^{-1}[\langle\dot{\nu}(s)\rangle\boldsymbol{B}]$ は畳み込み積分を用いて

$$\mathcal{L}^{-1}[\langle\dot{\nu}(s)\rangle\boldsymbol{B}]=\nu_\infty\boldsymbol{B}(t)+\int_0^t\boldsymbol{B}(t-\tau)\sum_{j=1}^{q}r_j\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\nu_\infty\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}(t)\int_0^{\Delta t}\sum_{j=1}^{q}r_j\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\,\mathrm{d}\tau+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}\bigl((n-k)\Delta t\bigr)\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\sum_{j=1}^{q}r_j\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\nu_\infty\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}(t)\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{r_j}{p_j}\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\right]_0^{\Delta t}+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}\bigl((n-k)\Delta t\bigr)\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{r_j}{p_j}\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\right]_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}$$

$$=\nu_\infty\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}(t)\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{r_j}{p_j}\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\right]_0^{\Delta t}+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}\bigl((n-k)\Delta t\bigr)\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{r_j}{p_j}\exp\bigl(-p_j\tau\bigr)\right]_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}$$

$$=\nu_\infty\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}(t)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\bigl\{1-\exp\bigl(-p_j\Delta t\bigr)\bigr\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}\bigl((n-k)\Delta t\bigr)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\exp\bigl(-kp_j\Delta t\bigr)\bigl\{1-\exp\bigl(-p_j\Delta t\bigr)\bigr\} \tag{7.8}$$

と表すことができる．しかし直接的な畳み込み積分の評価に当たっては，磁界の過去値を全て保存する必要があるため，必要な記憶容量が増大するばかりか計算負荷が極端に重い．そこで，次節で述べるように，分散性媒質，例えば Debye 特性を有する誘電体等を含む系を伝搬する電磁波を FDTD 法で解析する際に用いられる RC 法を用いる[7.4].

7. 1. 3　均質化された磁性体を含む系の時間領域の有限要素方程式

(7.8)によって表現されるのは，$t = n\Delta t$ における磁界なので，これを $\boldsymbol{H}^n$ と表すと

$$\boldsymbol{H}^n = \nu_\infty \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{B}(t)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\{1-\exp(-p_j\Delta t)\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}\big((n-k)\Delta t\big)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\exp(-kp_j\Delta t)\{1-\exp(-p_j\Delta t)\}$$

$$=\nu_\infty \boldsymbol{B}^n + \boldsymbol{B}^n\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\{1-\exp(-p_j\Delta t)\}+\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}^{n-k}\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\exp(-kp_j\Delta t)\{1-\exp(-p_j\Delta t)\}$$

$$=(\nu_\infty+\chi^0)\boldsymbol{B}^n+\sum_{k=0}^{n-2}\boldsymbol{B}^{n-k-1}\chi^{k+1} \qquad (7.9a)$$

$$\chi^k \coloneqq \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\sum_{j=1}^{q} r_j\exp(-p_j\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\exp(-kp_j\Delta t)\{1-\exp(-p_j\Delta t)\} \qquad (7.9b)$$

$$\chi^0 = \sum_{j=1}^{q}\frac{r_j}{p_j}\{1-\exp(-p_j\Delta t)\} \qquad (7.9c)$$

と再度時間方向に離散化された表記で表すことができる．(7.9a)において，$n \to n-1$ と変更することによって，

$$\boldsymbol{H}^{n-1} = (\nu_\infty+\chi^0)\boldsymbol{B}^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-3}\boldsymbol{B}^{n-1-k}\chi^{k+1} = \nu_\infty\boldsymbol{B}^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\boldsymbol{B}^{n-1-k}\chi^k \qquad (7.10)$$

を得る．さて，(7.9a)と(7.10)の差をとると，

$$\boldsymbol{H}^n - \boldsymbol{H}^{n-1} = \left[(\nu_\infty + \chi^0)\boldsymbol{B}^n + \sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-k-1}\chi^{k+1}\right] - \left[\nu_\infty \boldsymbol{B}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-1-k}\chi^k\right]$$

$$= (\nu_\infty + \chi^0)\boldsymbol{B}^n - \nu_\infty \boldsymbol{B}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-1-k}\left(\chi^k - \chi^{k+1}\right) \tag{7.11a}$$

$\Delta\chi^k \coloneqq \chi^k - \chi^{k+1}$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j}{p_j}\exp\left(-kp_j\Delta t\right)\left\{1 - \exp\left(-p_j\Delta t\right)\right\} - \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j}{p_j}\exp\left(-(k+1)p_j\Delta t\right)\left\{1 - \exp\left(-p_j\Delta t\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j}{p_j}\exp\left(-kp_j\Delta t\right)\left\{1 - 2\exp\left(-p_j\Delta t\right) + \exp\left(-2p_j\Delta t\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j}{p_j}\exp\left(-kp_j\Delta t\right)\left\{1 - \exp\left(-p_j\Delta t\right)\right\}^2 \tag{7.11b}$$

したがって， $\boldsymbol{H}^n$ は $\boldsymbol{H}^{n-1}$ を用いて

$$\boldsymbol{H}^n = \boldsymbol{H}^{n-1} + (\nu_\infty + \chi^0)\boldsymbol{B}^n - \nu_\infty \boldsymbol{B}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-1-k}\Delta\chi^k \tag{7.12}$$

と表記できる．(7.12)の右辺第 4 項を直接的に評価するためには全過去値の記憶が必要となってしまう．そこで(7.11b)を用いて

$$\boldsymbol{\Phi}^{n-1} \coloneqq \sum_{k=0}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-1-k}\Delta\chi^k = \boldsymbol{B}^{n-1}\Delta\chi^0 + \sum_{k=1}^{n-2} \boldsymbol{B}^{n-1-k}\Delta\chi^k$$

$$= \boldsymbol{B}^{n-1}\Delta\chi^0 + \sum_{k=0}^{n-3} \boldsymbol{B}^{n-1-k-1}\Delta\chi^{k+1} = \boldsymbol{B}^{n-1}\Delta\chi^0 + \sum_{k=0}^{n-3} \boldsymbol{B}^{n-2-k}\Delta\chi^{k+1}$$

$$= \boldsymbol{B}^{n-1}\Delta\chi^0 + \exp\left(-p_j\Delta t\right)\sum_{k=0}^{n-3} \boldsymbol{B}^{n-2-k}\Delta\chi^k$$

$$= \boldsymbol{B}^{n-1}\Delta\chi^0 + \exp(-p_j\Delta t)\boldsymbol{\Phi}^{n-2} \tag{7.13}$$

と過去の集積値として, 全体を $n-1$ ステップの関数 $\boldsymbol{\Phi}^{n-1}$ として再表記すると(7.13)の最後では $\boldsymbol{\Phi}^{n-2}$ が現れるため, 帰納的に過去の集積値が保存される. このような $\boldsymbol{\Phi}^{n-1}$ は帰納的集積関数と呼ばれる[7.4]. したがって, (7.12)は結局

$$\boldsymbol{H}^n = \boldsymbol{H}^{n-1} + (\nu_\infty + \chi^0)\boldsymbol{B}^n - \nu_\infty\boldsymbol{B}^{n-1} - \boldsymbol{\Phi}^{n-1} \tag{7.14}$$

となる. (7.14)の右辺の評価に必要なのは, n ステップ目の磁束密度と, $n-1$ ステップ目の過去値である. n ステップ目の磁束密度の値は, 有限要素法により求める. このようにして畳み込み積分の計算時間が短縮できる. この概念図を Fig.7.1 に示す.

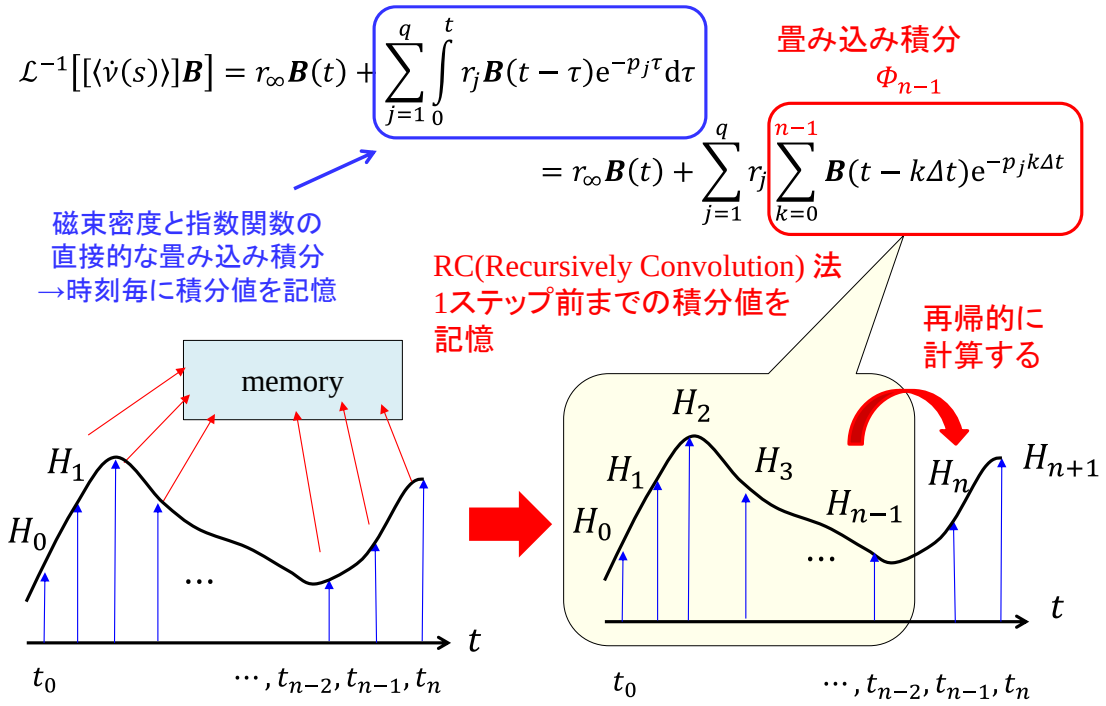


Fig.7.1 Illustration of the RC (Recursive convolution) scheme.
In this method, the convolution integral as shown in (7.8) is expressed with the accumulative function (7.14). By introducing this accumulative function, we does not need all time instances but the only magnetic field at the previous time for the calculation of the convolution integral. Hence, prohibitively heavy computation stem from memorizing electromagnetic fields at each time can be avoided.

(7.14)を用いることで, (7.7)において畳み込み積分を要する項は

$$\int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \mathcal{L}^{-1}[\langle\nu(s)\rangle\boldsymbol{B}]\, dS = \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \boldsymbol{H}^n \,\mathrm{d}S$$

$$= \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \left(\boldsymbol{H}^{n-1} + (\nu_\infty + \chi^0)\boldsymbol{B}^n - \nu_\infty\boldsymbol{B}^{n-1} - \boldsymbol{\Phi}^{n-1}\right)\mathrm{d}S$$

$$= (\nu_\infty + \chi^0) \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \boldsymbol{B}^n \mathrm{d}S + \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \boldsymbol{H}^{n-1} \mathrm{d}S$$

$$-\nu_\infty \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \boldsymbol{B}^{n-1} \mathrm{d}S - \int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \boldsymbol{\Phi}^{n-1} \mathrm{d}S \tag{7.15}$$

と評価できる．(7.15)右辺第 2, 3, 4 項は過去値なので，有限要素方程式において，右辺ベクトルとして加えればよい(ソースとなる)．(7.15)を(7.7)に代入して得られる有限要素方程式を解くことになるが，特に軸対称 2 次元解析の場合には

$$\boldsymbol{B}^n = \nabla \times \boldsymbol{A}^n = -\frac{\partial A_\theta^n}{\partial z} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta^n) \mathbf{e}_z \tag{7.16}$$

から，磁束密度を磁気ベクトルポテンシャルで表すことにより，均質化されたコイルの時間領域における有限要素行列の成分を求めることができる．しかしながら，励磁源であるコイル素線の入力電流に起因する表皮効果の項を考慮する必要があるので，つぎに示すような回路方程式と連立する手続きが必要になる．

7. 1. 4　均質化されたコイルの回路方程式との連成

均質化された磁性体がコイルであるとき，特に電圧入力問題の場合には，回路方程式と連立して解くことが要請される場合がある．例えば，回路方程式が

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \, \mathrm{d}\Omega_h + R_{ac} I \tag{7.17}$$

と示されているとする．ここで，$v(t)$ は入力電圧，R_{ac} は交流抵抗である．R_{ac} を求める方法にはいくつかあるが，後にそれぞれの巻線で示す連分数表示と Cauer 型等価回路の対応から求める方法が有効である．例えば，回路への入力電流に起因するインピーダンスを $Z_e(s)$ とすると，準定常電磁界では素線間のキャパシタンスの効果は十分弱いだろうから

$$Z_e(s) = R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1} + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2} + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_3} + \cdots}}}}}} \tag{7.18}$$

と表記できる．(7.18)は，第 3 章で示した，各素線の $Z_e(s)$ に対して，Euclid の互助法を適用することにより求めることが可能である．この表示は，Fig.7.2 に示すような Cauer 型等価回路に対応する．

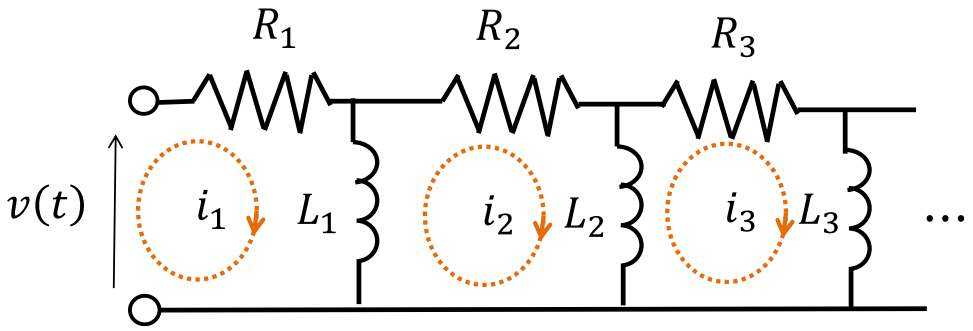


Fig.7.2 Cauer-type equivalent circuit.
This circuit can be used for time domain analysis considering the skin effect of a wire conductor. In this circuit, the DC resistance of the winding is taken into account in R_1 in the left side of L_1.

Fig.7.2 の Cauer 型等価回路の各ループごとに，Kirchhoff の電圧則(KVL)から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega + R_1 i_1 + L_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_1 - i_2) = v(t)$$

$$R_2 i_2 + L_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_3) = 0$$

$$\vdots$$

$$R_q i_q + L_{q-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_q - i_{q-1}\right) + L_q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_q = 0 \tag{7.19}$$

なる連立方程式を得る．(7.19)には時間微分項が含まれているが，これに対しては，第 2 章で述べた後進 Euler 法

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{f^n - f^{n-1}}{\Delta t} \tag{7.20}$$

を適用することで離散化できる．(7.20)から(7.19)の時間方向の離散化

$$\frac{\boldsymbol{\Phi}^n - \boldsymbol{\Phi}^{n-1}}{\Delta t} + R_1 i_1^n + L_1\frac{(i_1^n - i_2^n) - (i_1^{n-1} - i_2^{n-1})}{\Delta t} = v(t)$$

$$R_2 i_2^n + L_1\frac{(i_2^n - i_1^n) - (i_2^{n-1} - i_1^{n-1})}{\Delta t} + L_2\frac{(i_2^n - i_3^n) - (i_2^{n-1} - i_3^{n-1})}{\Delta t} = 0$$

$$\vdots$$

$$R_q i_q^n + L_{q-1}\frac{\left(i_q^n - i_{q-1}^n\right) - \left(i_q^{n-1} - i_{q-1}^{n-1}\right)}{\Delta t} + L_q\frac{i_q^n - i_q^{n-1}}{\Delta t} = 0 \tag{7.21}$$

を得る．ここで，(7.21)において，コイルの鎖交磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ を

$$\Phi = \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.22}$$

とおいた．(7.22)には，自己インダクタンスと，外部磁束の効果が含まれている．(7.21)を整理すると

$$-\Phi^n-(R_1\Delta t+L_1)i_1^n+L_1i_2^n=-v(t)\Delta t-\Phi^{n-1}-L_1i_1^{n-1}+L_1i_2^{n-1}$$

$$L_1i_1^n-(R_2\Delta t+L_1+L_2)i_2^n+L_2i_3^n=L_1i_1^{n-1}-(L_1+L_2)i_2^{n-1}+L_2i_3^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$L_{q-1}i_{q-1}^n-\left(R_q\Delta t+L_{q-1}+L_q\right)i_q^n=L_{q-1}i_{q-1}^{n-1}-\left(L_{q-1}+L_q\right)i_q^{n-1} \tag{7.23}$$

を得る．ここで，n ステップ目の値を左辺に，$n-1$ ステップ目の値を右辺にまとめた．

したがって，解くべき方程式は，(7.15), (7.23)を連立して

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\boldsymbol{c} & & & & 0 \\ -\boldsymbol{c}^t & -(R_1\Delta t+L_1) & L_1 & & & \\ & L_1 & -(R_2\Delta t+L_1+L_2) & L_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & L_{q-1} & -\left(R_q\Delta t+L_{q-1}+L_q\right) & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^n\\ i_1^n\\ i_2^n\\ \vdots\\ i_q^n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -i_1^{n-1}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p}^{n-1}\\ -v(t)\Delta t-\boldsymbol{c}^t\cdot\boldsymbol{a}_1^{n-1}-L_1i_1^{n-1}+L_1i_2^{n-1}\\ L_1i_1^{n-1}-(L_1+L_2)i_2^{n-1}+L_2i_3^{n-1}\\ \vdots\\ L_{q-1}i_{q-1}^{n-1}-\left(L_{q-1}+L_q\right)i_q^{n-1}\end{bmatrix} \tag{7.24a}$$

$$c_j=\int_{\Omega}\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.24b}$$

となる．(7.24a)において，$\boldsymbol{p}^{n-1}$ は(7.15)の右辺に対応する既知ベクトルである．(7.24a)において，未知数は磁気ベクトルポテンシャルと Cauer 型等価回路の各ループ電流である． $i_1^n(t)$ が実効的にコイルに流れる交流である．

以下では，各コイル毎に，複素透磁率の連分数展開(7.1)と回路方程式の入力電流に対するインピーダンスの Cauer 型等価回路表示(7.18)を求め，(7.24)を解く．求められた磁気ベクトルポテンシャルより，特に軸対称 2 次元解析の場合には(7.16)から磁束密度が計算できる．

7. 2　円筒形マルチターンコイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形

本節ではマルチターンコイルの電流波形の過渡応答を，7.1 章で示した方法で求めた場合と，直接的な準定常電磁界解析で求めた場合とで計算し，両者が十分な精度で一致することを示す．ここでマルチターンコイルは Fig.7.3 に示すような一様交番磁界中の導線を層状に巻いたものと考える．7.2.1 節では，複素透磁率の連分数表示から，マクロ実効磁気抵抗を得る方法を示す．7.2.2 節では，マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の妥当性を示す．7.2.3 節では表皮効果に起因するインピーダンスの連分数展開から，Cauer 型等価回路表現を行い，KVL から回路方程式を導く．7.2.4 節では，7.2.3 節の妥当性を確認する．最後に，7.2.5 節では，実際の時間領域解析から，コイル素線の電流波形が従来の有限要素法から計算した場合と提案手法で計算した場合で十分に一致することを示す．なお，以下では特に断らない限り，記号は第 3 章 3.5 節の Table 3.7 に従うものとする．

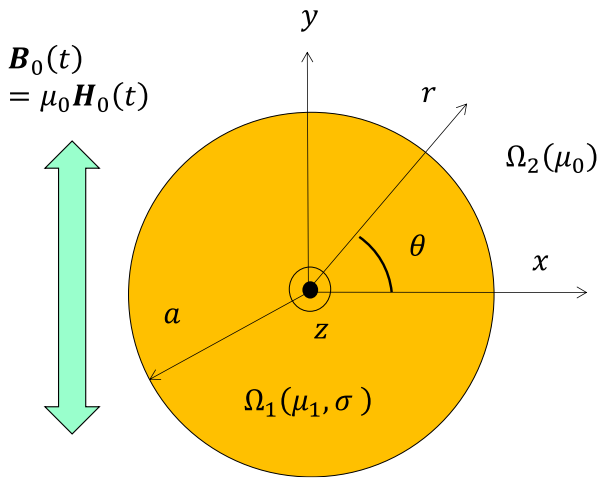


Fig.7.3 Cross-section of a straight round conducting wire immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$.

7. 2. 1　複素透磁率の連分数展開とマクロ実効磁気抵抗

Fig.7.3 に示すような導線の複素透磁率は第 3 章 3.5.2 節で導いたように

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{7.25}$$

である．ここで $\zeta \coloneqq a(1-\mathrm{j})/\delta = a\sqrt{-s\mu\sigma}$ である．(7.25)は(3.51)に対応する．(7.25)において，Bessel 関数の連分数展開の公式

$$\zeta \frac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{\zeta^2}{4 - \cfrac{\zeta^2}{6 \cdots}}} \tag{7.26}$$

を導入すると，$\zeta^2 = -s\mu\sigma a^2$ なので，

$$\dot{\mu}_r^{wire}(s) = \mu_r \frac{1}{2 + \dfrac{s\mu\sigma a^2}{4 + \dfrac{s\mu\sigma a^2}{6 + \dfrac{s\mu\sigma a^2}{8 + \dfrac{s\mu\sigma a^2}{10 + \cdots}}}} - 1}$$

$$= \frac{a_{q-1}s^{q-1} + a_{q-2}s^{q-2} \cdots a_1 s + a_0}{b_q s^q + b_{q-1}s^{q-1} \cdots b_1 s + b_0} \tag{7.27}$$

という有理関数表示を Padé 近似から得られる．(7.27)を(7.2)に代入し，部分分数分解を行うことで

$$\langle \dot{\nu}^{wire}(s) \rangle = \nu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{r_j}{s + p_j} \tag{7.28}$$

を得る．(7.28)を逆 Laplace 変換して得られる

$$\langle \nu^{wire}(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}\left[\langle \dot{\nu}^{wire}(s) \rangle\right] = \nu_\infty \delta(t) + \sum_{j=1}^{q'} r_j \exp(-p_j t) \tag{7.29}$$

が，有限要素解析の際に用いるべきマクロ実効磁気抵抗である．(7.29)を用いて，時間領域において，Fig.7.4 のようにマルチターンコイルを均質化できる．

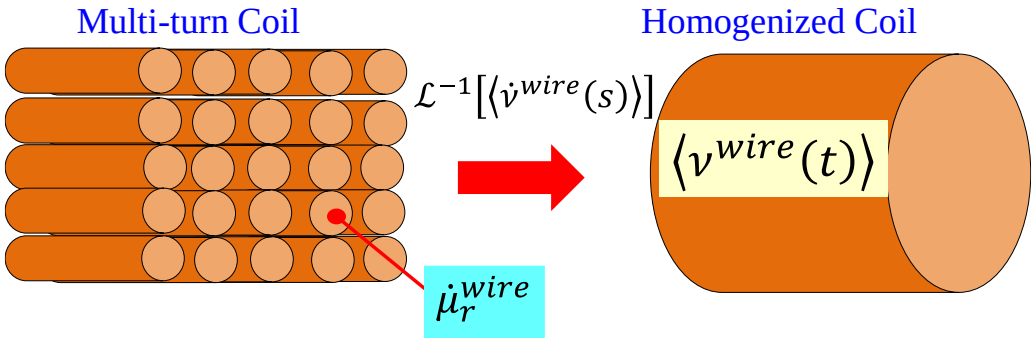


Fig.7.4 Homogenized multi-turn coil using the macroscopic effective magnetic reluctivity.
To perform time-domain analysis, we employ the macroscopic effective magnetic reluctance given by (7.29) for homogenization of a bundle of wire conductors.

7. 2. 2　マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度

(7.25)から(7.28)へ変更した際に，マクロ複素磁気抵抗の値が一致していなければならない．このことを確認するため，解析緒元を Table 7.2 の通りとし，$q' = 6$ の場合の銅線のマクロ複素磁気抵抗をプロットしたグラフを Fig.7.5 に示す. Fig.7.5 からよい精度で一致しているとわかる．したがって，(7.28)の表示は妥当であり，(7.29)により時間領域の関数へと変換できる．また，この場合 $r_\infty = 3.22 \times 10^6$ であり，$^\forall p_j > 0$ であることも確認できる．

Table 7.2 Specification of the multi-turn coil as shown in Fig. 7.4

a [mm]	0.15	σ [S/m]	5.76×10^7
μ_{1r}	1.0	η	0.60

j	1	2	3	4	5	6
r_j	-5.79×10^{12}	-1.05×10^{13}	-1.26×10^{13}	-1.70×10^{13}	-5.14×10^{13}	-5.04×10^{14}
p_j	5.92×10^6	2.19×10^7	4.95×10^7	9.18×10^7	2.14×10^8	1.76×10^9

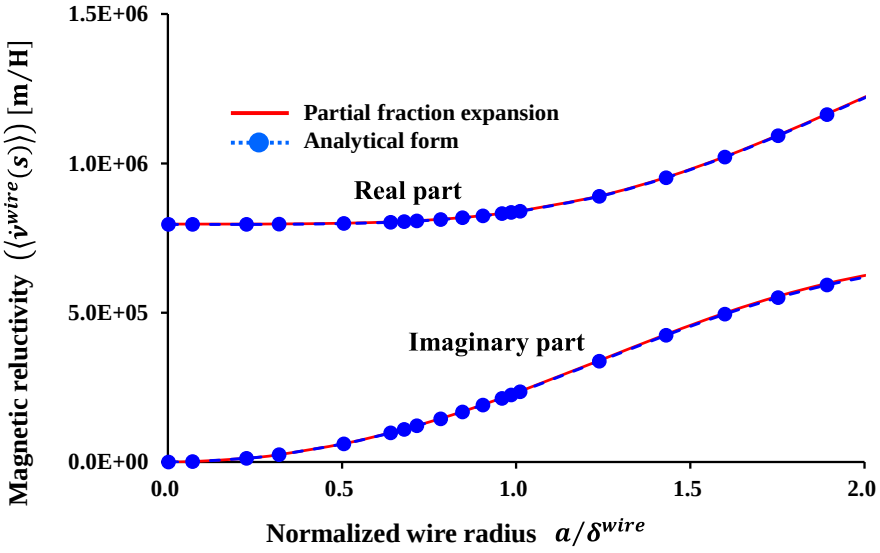


Fig.7.5 Macroscopic magnetic reluctivities calculated by（7.25）and（7.28）.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ^{wire}. From this figure, it is found that these results are in good agreement.

7. 2. 3　表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現

一方で，表皮効果に起因するインピーダンスは

$$Z_{skin}^{wire} = \frac{R_0 \zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} \tag{7.30}$$

である．ここで，R_0 は直流抵抗であり，いまの場合 $R_0 = l/(\sigma \pi a^2)$ である．(7.30)は(3.62b)に対応する．(7.30)に対して Bessel 関数の連分数展開の公式(7.26)を適用すると

$$Z_{skin}^{wire} = R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1} + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2} + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_3} + \cdots}}}}}} \tag{7.31}$$

を得る．ここで，

$$R_k = (2k-1)R_0 \tag{7.32a}$$

$$L_k = \mu \frac{R_0 \sigma a^2}{8k} \tag{7.32b}$$

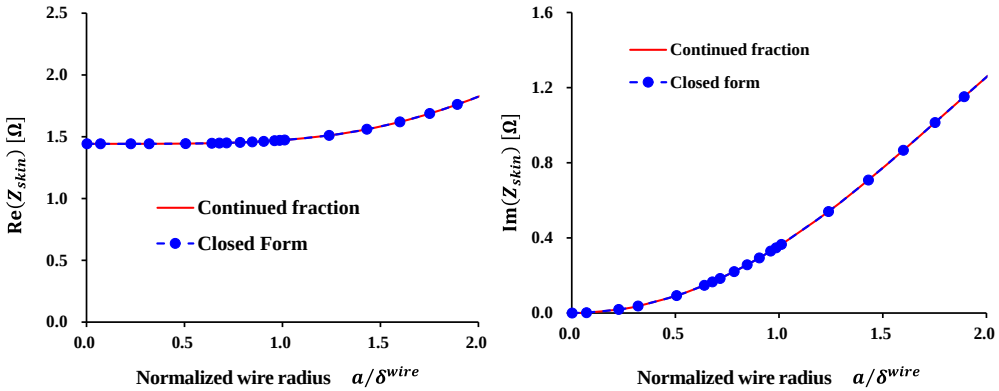
である．(7.32)は Fig.7.1 に示した Cauer 型等価回路の素子値を表す．(7.31)から時間領域の解析における，Fig.7.2 に示す Cauer 型等価回路における電圧方程式の時間微分項を離散化して

$$\begin{aligned} &R_1 i_1^n + L_1 \frac{(i_1^n - i_2^n) - (i_1^{n-1} - i_2^{n-1})}{\Delta t} = v(t) \\ &R_2 i_2^n + L_1 \frac{(i_2^n - i_1^n) - (i_2^{n-1} - i_1^{n-1})}{\Delta t} + L_2 \frac{(i_2^n - i_3^n) - (i_2^{n-1} - i_3^{n-1})}{\Delta t} = 0 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &R_q i_q^n + L_{q-1} \frac{\left(i_q^n - i_{q-1}^n\right) - \left(i_q^{n-1} - i_{q-1}^{n-1}\right)}{\Delta t} + L_q \frac{i_q^n - i_q^{n-1}}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \tag{7.33}$$

を得られる．よって(7.7)と(7.33)から，(7.24)の連立 1 次方程式を得ることができる．

7. 2. 4　表皮効果のインピーダンスの項の連分数表示の計算精度

(7.30)から(7.31)へ変更した際に，表皮効果に起因するインピーダンスの値が一致していなければならない．このことを確認するため，解析緒元を Table 7.2 の通りとし，$q' = 3, l = 5.87$ mm の場合の銅巻線の表皮効果に起因する実効インピーダンスをプロットしたグラフを Fig.7.6 に示す．Fig.7.6 からよい精度で一致しているとわかる．したがって，(7.31)の表示は妥当であり，(7.33)により時間領域の関数へと変換できるとわかる．



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.7.6 Frequency characteristics of the impedance due to the skin effect calculated by（7.30）and（7.31）. Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it is found that these results are in good agreement.

7. 2. 5　素線の電流波形の時間波形

本節の最後に，銅巻線のコイル波形の時間応答を調べる．解析モデルとして，Fig.7.7 のような軸対称のモデルを考える．コイルの解析緒元を Table 7.2 の通りとし，(7.15)と(7.23)を連立して，コイルの電流波形，すなわち Cauer 型等価回路初段(Fig.7.1)に流れる

$i_1(t)$ の時間波形を求める．比較として，直接全ての細線及び空隙を微細な有限要素で分割した従来の解析も行う．これらの解析結果を Fig.7.8 に示す．Fig.7.8 より，提案手法による解析は妥当であるとわかる．

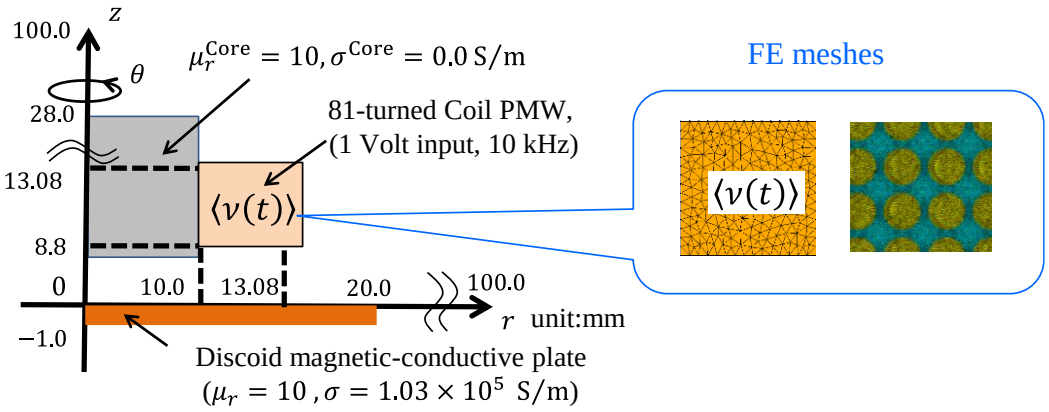


Fig.7.7 Multi-turn copper wire placed above a disk conductor.
Conventional FEM requires discretizing the coil region into coarse FE elements considering the eddy currents in wire conductors and air-gap among wire condutors whereas the coil region can be subdivied with coarse elements because the multi-turn coil is treated as the homogenizous material with the macroscopic effective magnetic reluctivity.

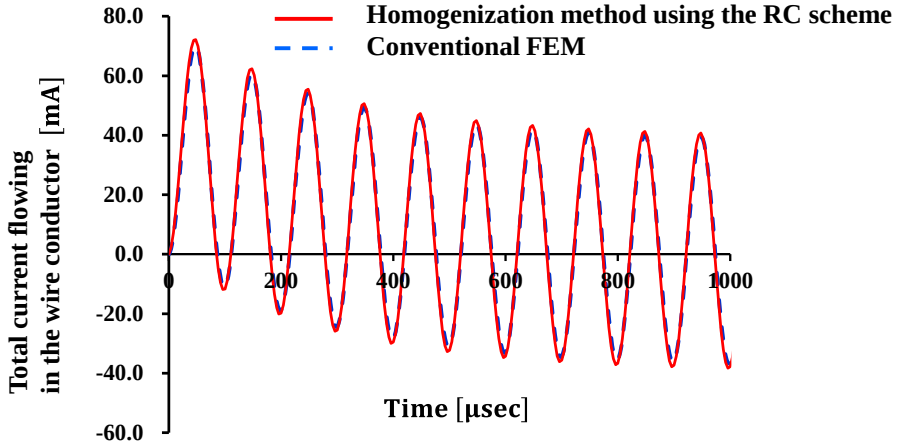


Fig.7.8 Dependence of the total current flowing in the wire conductor on time.
From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory.

7. 3　円筒形磁性被覆コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形

本節では，7.1 章で示した方法を用いて，円筒形磁性被覆線の電流波形が，直接的な有限要素解析で求めた場合とよい精度で一致することを示す．解析モデルとなるのは，Fig.7.9 に示すような一様交番磁界中の磁性被覆線である．7.3.1 節では，複素透磁率の連分数表示から，マクロ実効磁気抵抗を得る方法を示す．7.3.2 節では，マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の妥当性を示す．7.3.3 節では表皮効果に起因するインピーダンスの連分数展開から，Cauer 型等価回路表現を行い，KVL から回路方程式を導く．7.3.4 節では，7.3.3 節の妥当性を確認する．最後に，7.3.5 節では，実際の時間領域解析から，コイル素

線の電流波形が従来の有限要素法を用いた場合と提案手法で計算した場合でよく一致することを示す．なお，以下では，特に断らない限り，記号は第 3 章 3.6 節の Table 3.8 に従うものとする．また，磁性被覆は導電性を有しているとし，磁性被覆の渦電流を考慮した磁性は，第 3 章 3.4 節で導出した電磁鋼板の複素透磁率を用いることとする．この妥当性は第 4 章の数値計算の結果確認できている．

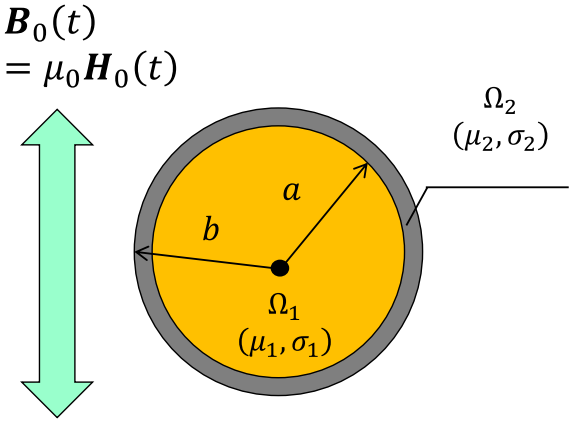


Fig.7.9 Cross-section of a magnetically shielded wire (MSW) immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$. Under the assumption that the thickness of the shielding layer is sufficiently smaller than the radius of the wire conductor, the complex permeability of the magnetic-conductive slab can be introduced without losing accuracy as discussed in section 4.2.1.

7. 3. 1　複素透磁率の連分数展開とマクロ実効磁気抵抗

Fig.7.9 に示すような円柱形磁性被覆線の複素透磁率は第 3 章 3.7.2 節で導いたように

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{1 + \Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right)}{1 - \Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right)} \tag{7.34a}$$

$$\Psi_2\left(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab}\right) \coloneqq \frac{\left(-c_1 - c_2\dot{\mu}_r^{slab}\right)\dot{\mu}_r^{wire} + \left(c_1\dot{\mu}_r^{slab} + c_2\right)\dot{\mu}_r^{slab}}{\left(c_1 - c_2\dot{\mu}_r^{slab}\right)\dot{\mu}_r^{wire} + \left(c_1\dot{\mu}_r^{slab} - c_2\right)\dot{\mu}_r^{slab}} \tag{7.34b}$$

$$c_1 \coloneqq a^2 - b^2 \tag{7.34c}$$

$$c_2 \coloneqq a^2 + b^2 \tag{7.34d}$$

と求めることができる．(7.34)は(3.113)に対応する．$\dot{\mu}_r^{wire}$ は(7.27)により連分数展開表示が求められている．一方で，$\dot{\mu}_r^{slab}$ は数学公式により

$$\dot{\mu}_r^{slab} = \mu_{2r}\frac{\tan\zeta}{\zeta} = \mu_{2r}\cfrac{1}{1 - \cfrac{\zeta^2}{3 - \cfrac{\zeta^2}{5\cdots}}}$$

$$= \frac{c_{q-1}s^{q-1} + c_{q-2}s^{q-2}\cdots c_1 s + c_0}{d_q s^q + d_{q-1}s^{q-1}\cdots d_1 s + d_0} \tag{7.35}$$

と連分数展開から有理関数表示が可能である．ここで，$\zeta \coloneqq (b-a)\sqrt{s\mu\sigma}/2$ である．さて，(7.27), (7.35)を(7.34a)に代入することで

$$\dot{\mu}_r^{MSW} = \frac{a_{q-1}s^{q-1} + a_{q-2}s^{q-2} \cdots a_1 s + a_0}{b_q s^q + b_{q-1}s^{q-1} \cdots b_1 s + b_0} \tag{7.36}$$

という有理関数表示を Padé 近似から得られる．(7.36)を(7.2)に代入し，部分分数分解を行うことで

$$\langle \dot{\nu}^{MSW}(s) \rangle = \nu_\infty + \sum_{j=1}^{q'} \frac{r_j}{s + p_j} \tag{7.37}$$

を得る．(7.37)を逆 Laplace 変換して得られる

$$\langle \nu^{MSW}(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}^{MSW}(s) \rangle] = \nu_\infty \delta(t) + \sum_{j=1}^{q'} r_j \exp(-p_j t) \tag{7.38}$$

が, 有限要素解析の際にコイル領域の物質定数となるマクロ実効磁気抵抗である．(7.38)を用いて，時間領域において，Fig.7.10 のようにマルチターンコイルを均質化できる．この場合でも，数値不安定性は表れない．

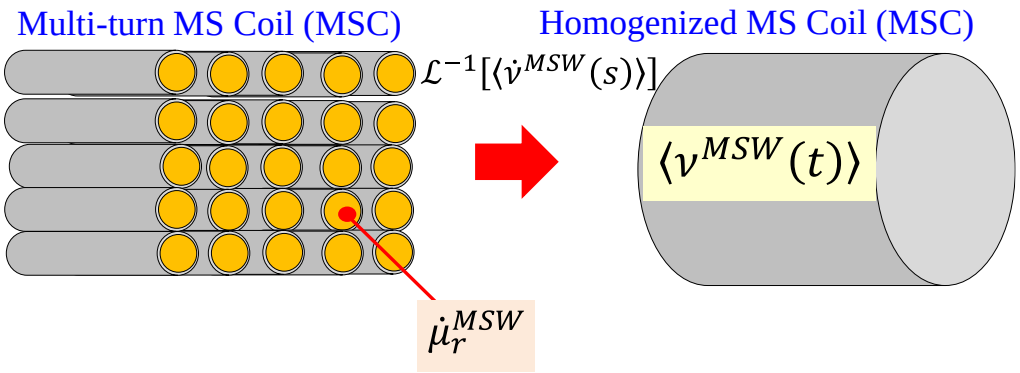


Fig.7.10 Homogenized multi-turn magnetically shielded coil (MSC) using the macroscopic effective magnetic reluctivity.

7. 3. 2　マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度

(7.34)から(7.37)へ変更した際に，マクロ複素磁気抵抗の値が一致していなければならない．このことを確認するため，解析緒元を Table 7.3 の通りとし，$q' = 6$ の場合の磁性被覆コイルのマクロ複素磁気抵抗の周波数特性を調べる．しかし，磁性被覆線の複素透磁率は複雑なので，さらなる比較として，連分数展開表示と第 3 章 3.1 節で述べた 2 次元平面での unit-cell approach で解析した場合に得られるマクロ複素磁気抵抗も計算する．これらの解析結果をまとめたグラフを Fig.7.11 に示す．Fig.7.11 から，いずれの場合でもよい精度で一致しているとわかる．したがって，(7.37)の表示は妥当であり，(7.38)により時間領域の関数へと変換できる．また，$r_\infty = 2.77 \times 10^6$ であり，$^\forall p_j > 0$ であることも確認できる．

Table 7.3 Specification of the MSC as shown in Fig. 7.10

a [mm]	0.15	b [mm]	0.16
μ_{1r}	1.0	μ_{2r}	10.0
σ_1 [S/m]	5.76×10^7	σ_2 [S/m]	1.03×10^4
η	0.82	l [mm]	94.5

j	1	2	3	4	5	6
r_j	-1.46×10^{10}	-1.94×10^{10}	-8.09×10^{16}	-9.30×10^{13}	-6.69×10^{17}	-6.43×10^{15}
p_j	4.35×10^4	2.05×10^5	1.26×10^{11}	1.58×10^{11}	5.83×10^{11}	1.35×10^{12}

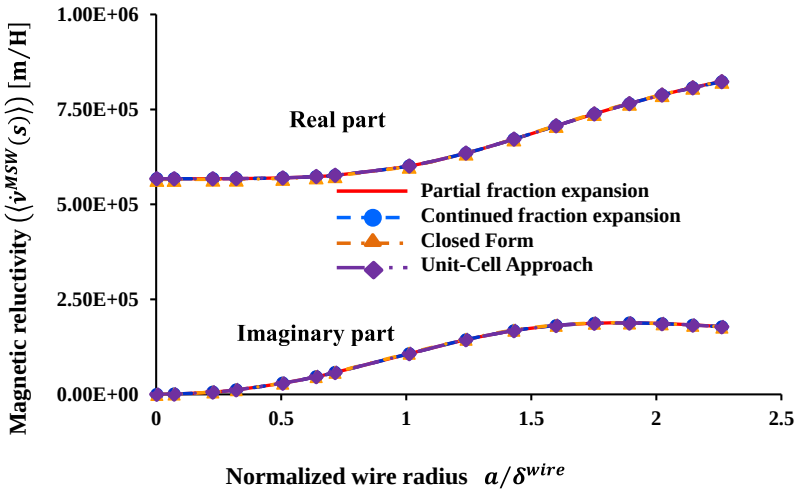


Fig.7.11 Macroscopic magnetic reluctivities of the MSC calculated by (7.34) and (7.37), continued fraction expansion and the unit-cell approach.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ^{wire}. From this figure, it is found that these results are in good agreement.

7. 3. 3　表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現

一方で，入力電流に起因するインピーダンスは，(3.115)の回路方程式から

$$Z_e^{MSW} = Z_{skin}^{wire} + \mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\mu}_r^{slab} l \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.39}$$

である．本節での R_0 は磁性被覆を除いた導線の直流抵抗であり，いまの場合 $R_0 = l/(\sigma\pi a^2)$ である．(7.39)の右辺第 1 項に対して Bessel 関数の連分数展開の公式(7.26)を適用し，さらに右辺第 2 項に対して(7.35)を適用すると

$$\begin{aligned} &Z_{skin}^{wire} + s\mu_2 \frac{\tan z}{z} l \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= 2 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{4 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{6 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{8 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{10 + \cdots}}}} + s\cfrac{1}{1 - \cfrac{\zeta^2}{3 - \cfrac{\zeta^2}{5\cdots}}} \times l\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{a_{q-1}s^{q-1} + a_{q-2}s^{q-2}\cdots a_1 s + a_0}{b_q s^q + b_{q-1}s^{q-1}\cdots b_1 s + b_0} + \frac{c_{p-1}s^{p-1} + c_{p-2}s^{p-2}\cdots c_1 s + c_0}{d_p s^p + d_{p-1}s^{p-1}\cdots d_1 s + d_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{a}_{\tilde{p}-1}s^{\tilde{p}-1} + \tilde{a}_{\tilde{p}-2}s^{\tilde{p}-2} \cdots \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}{\tilde{b}_{\tilde{q}}s^{\tilde{q}} + \tilde{b}_{\tilde{q}-1}s^{\tilde{q}-1} \cdots \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{7.40}$$

を得る．さて，(7.40)の形では，直接的に Cauer 型等価回路表示を得ることは困難である．そこで，Euclid の互助法を適用して，連分数表示を行うことを考える．いま $s \coloneqq p^{-1}$ とおき，係数を改めてと記すと，(7.40)は

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\dfrac{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\dfrac{b_0}{a_1^0}p + \dfrac{b_1^0 p^{q-1} + b_2^0 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}^0 p + b_q^0}{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \cfrac{1}{\dfrac{b_0}{a_1^0}p + \cfrac{1}{\dfrac{a_1^0}{b_1^0} + \cfrac{1}{\dfrac{b_1^0}{a_1^0}p + \cfrac{1}{\dfrac{a_2^1}{b_2^1} + \cdots}}}} \tag{7.41}$$

となる．ここで，各係数は

$$a_k^n = \begin{cases} a_k - b_k \dfrac{a_0}{b_0} (n = 0) \\ a_k^{n-1} - b_k^{n-1} \dfrac{a_n^{n-1}}{b_n^{n-1}} (n \geq 1) \end{cases} \tag{7.42a}$$

$$b_k^n = \begin{cases} b_k - a_{k+1}^0 \dfrac{b_0}{a_1^0} (n = 0) \\ b_k^{n-1} - a_{k+1}^n \dfrac{a_{n+1}^n}{b_n^{n-1}} (n \geq 1) \end{cases} \tag{7.42b}$$

と求められる．したがって，

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1} + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2} + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{sL_3 + \cdots}}}}} \tag{7.43}$$

という表示から，Cauer 型等価回路を得ることができる．Cauer 型等価回路における素子値は

$$R_k = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} (k = 1) \\ \dfrac{a_{k-1}^{k-2}}{b_{k-1}^{k-2}} (k \geq 2) \end{cases} \tag{7.44a}$$

$$L_k = \begin{cases} \dfrac{a_1^0}{b_0} (k = 1) \\ \dfrac{a_k^{k-1}}{b_{k-1}^{k-2}} (k \geq 2) \end{cases} \tag{7.44b}$$

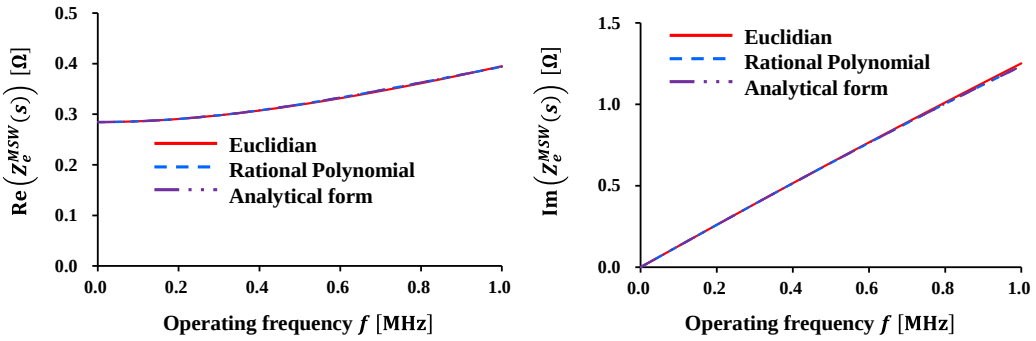
と求められる．したがって，Cauer 型等価回路における電圧方程式を時間方向に離散化して

$$\begin{aligned} &R_1 i_1^n + L_1 \frac{(i_1^n - i_2^n) - (i_1^{n-1} - i_2^{n-1})}{\Delta t} = v(t) \\ &R_2 i_2^n + L_1 \frac{(i_2^n - i_1^n) - (i_2^{n-1} - i_1^{n-1})}{\Delta t} + L_2 \frac{(i_2^n - i_3^n) - (i_2^{n-1} - i_3^{n-1})}{\Delta t} = 0 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &R_q i_q^n + L_{q-1} \frac{\left(i_q^n - i_{q-1}^n\right) - \left(i_q^{n-1} - i_{q-1}^{n-1}\right)}{\Delta t} + L_q \frac{i_q^n - i_q^{n-1}}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \tag{7.45}$$

を得る．よって(7.45)を用いて，(7.24)の連立 1 次方程式を得ることができる．

7. 3. 4　入力電流に対するインピーダンスの連分数表示の計算精度

(7.39)から(7.40)を経て，(7.43)へ変更した際に，インピーダンス $Z_e^{MSW}(s)$ が一致していなければならない．このことを確認するため，解析緒元を Table 7.3 の通りとし，$q' = 15, l = 1.16\ \mathrm{mm}, R_0 = 0.28\ \Omega$ の場合の磁性被覆コイルの入力電流に起因する実効インピーダンスをプロットしたグラフを Fig.7.12 に示す．Fig.7.12 からいずれの表示においても，よい精度で一致しているとわかる．したがって，(7.43)の表示は妥当であり，(7.44), (7.45)により時間領域の交流抵抗が求められる．また，この場合の回路素子値を Table 7.4 に示す．初段に関しては，直流抵抗とほぼ一致しているとわかる．



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig. 7.12 Frequency characteristics of the circuit impedance calculated by (7.39), (7.40) and (7.43). Abscissa denotes operating frequency f [MHz]. From this figure, it is found that these results are in good agreement.

Table 7.4 Elements of the Cauer-type equivalent circuit of the MSC

R_k [Ω]	0.285	11.0	13.5	28.0	71.6
L_k [μH]	0.21	0.91	0.54	0.45	0.47

7. 3. 5　磁性被覆線の電流波形の時間波形

本節の最後に，磁性被覆線の電流波形の時間応答を調べる．解析モデルとして，Fig.7.13 のような軸対称の 9 回巻きのモデルを考える．いま，Table 7.3 の解析条件で，従来の有限要素法と提案手法で，電流波形を求める．解析結果を Fig.7.14 に示す．Fig.7.14 から，磁性被覆コイルに対しても本法を用いることで，均質化有限要素法を時間領域で行うことができるとわかる．

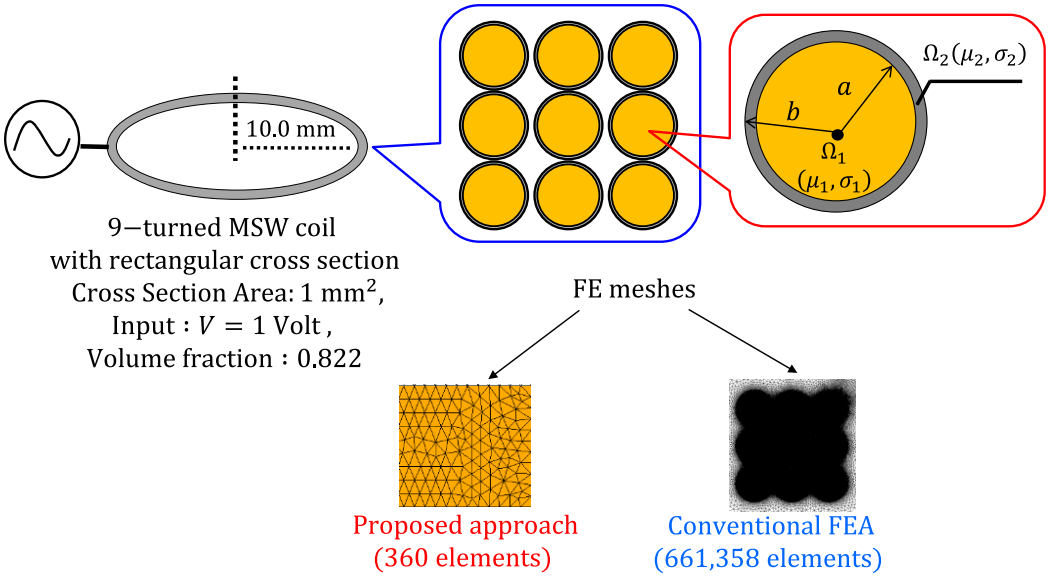


Fig.7.13 9-turn MSC and two types of finite element meshes.
FE meshes of the coil region for the proposed approach and the conventional FEM are depicted. Note here that the specification of this MSW is set so low that the standard FEM is executable.

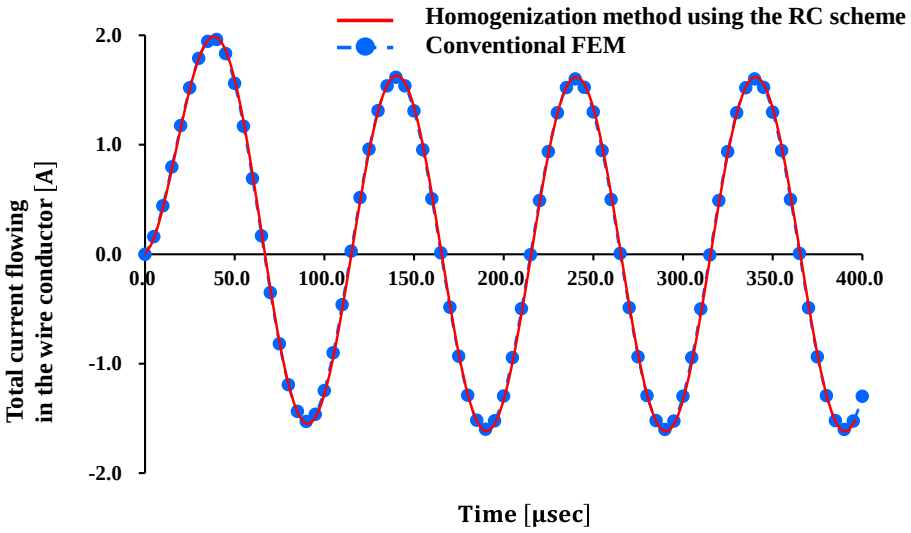


Fig.7.14 Dependence of the total current in the MSW on time.
From this figure, we find that the validity of this approach is also ensured for FE analysis of MSCs.

7.4　楕円柱・平角コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形

前節までは，素線の形状は円筒形であると仮定したが，本節では，Fig.7.15 のように素線が楕円柱細線，平角細線の場合を取り扱う．まず，楕円柱細線における数値解析結果の妥当性を示し，平角線については，第 3 章 3.9.3 節で述べた(3.223b)の直流抵抗を調整することで, 十分に一致する電流波形が得られることを示す. この妥当性は第 4 章 4.6.3 節の Fig.4.69 にて示している．なお，本節で使用する記号は，特に断らない限り，第 3 章 3.9 節の Table 3.10 に従うものとする．

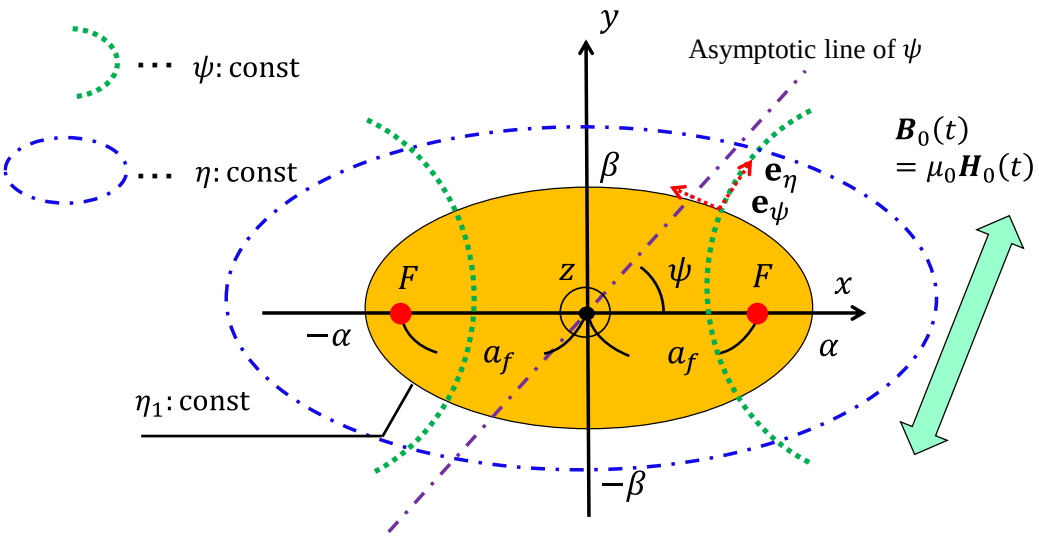


Fig.7.15 Cross-section of an elliptic wire immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$ in elliptical-cylindrical coordinate system (η, ψ, z).
When we treat a wire with rectangular cross-section, the DC resistance have to be adjusted. On the other hand, the tensor macroscopic magnetic reluctivity representing the proximity effect of an elliptic wire can be employed.

7. 4. 1　テンソル型複素透磁率の連分数展開とテンソル型マクロ実効磁気抵抗

Fig.7.15 に示すような楕円柱導線のテンソル型複素透磁率は第 3 章 3.9.2 節で導いたように

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) = \mu_r^x \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^x \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{Se}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta_1, q)} \tag{7.46a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) = \mu_r^y \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^y \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{Ce}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta_1, q)} \tag{7.46b}$$

である．(7.46)は(3.215)に対応する．なお，ここでは長軸方向を $\mathbf{e}_x$，短軸方向を $\mathbf{e}_y$ とした．さて，前節までの方法を踏襲することを考えると，(7.46)の連分数展開からマクロ複素磁気抵抗を求めればよいと思われるが，Mathieu 関数は直接的に連分数表示を行うことができず，有理関数表示を行うことが難しい．そこで，数学公式により，Mathieu 関数が Bessel 関数を基底関数として Fourier 級数展開が可能であるという事実を用いる[7.9, 10]．(7.46)の Bessel 関数展開により，テンソル型複素透磁率はつぎの様に近似が可能である．

$$\dot{\mu}_r^x(\omega) \approx \mu_r^x \frac{1}{\zeta^x \dfrac{J_0(\zeta^x)}{J_1(\zeta^x)} - 1} \tag{7.47a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(\omega) \approx \mu_r^y \frac{1}{\zeta^y \dfrac{J_0(\zeta^y)}{J_1(\zeta^y)} - 1} \tag{7.47b}$$

ここで，$\zeta^x \coloneqq -a_f \sinh\eta_1 (1-\mathrm{j})/\delta, \zeta^y \coloneqq a_f \cosh\eta_1 (1-\mathrm{j})/\delta$ とおいた．(7.46)から(7.47)を得る方法については，Appendix D にて詳述する．なお，本来は Bessel 関数は形状が円柱形の場合の関数であるが，引数に双曲線関数が用いられているため，円筒形の関数に双曲線成分を代入すると，双曲線と同じ焦点を有する楕円の成分が表現できると考えられる．

さて，(7.47)に対して，Bessel 関数の連分数公式(7.26)を適用し，さらに Padé 近似から，テンソル型複素透磁率の有理関数表示

$$\dot{\mu}_r^x(s) \approx \frac{a_{n-1}^x s^{n-1} + a_{n-2}^x s^{n-2} \cdots a_1^x s + a_0^x}{b_n^x s^n + b_{n-1}^x s^{n-1} \cdots b_1^x s + b_0^x} \tag{7.48a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(s) \approx \frac{a_{n-1}^y s^{n-1} + a_{n-2}^y s^{n-2} \cdots a_1^y s + a_0^y}{b_n^y s^n + b_{n-1}^y s^{n-1} \cdots b_1^y s + b_0^y} \tag{7.48b}$$

を得る．(7.48)を(7.2)に代入することでテンソル型マクロ複素磁気抵抗

$$\langle \dot{\nu}^x(s) \rangle = \frac{\tilde{a}_{n-1}^x s^{n-1} + \tilde{a}_{n-2}^x s^{n-2} \cdots \tilde{a}_1^x s + \tilde{a}_0^x}{\tilde{b}_n^x s^n + \tilde{b}_{n-1}^x s^{n-1} \cdots \tilde{b}_1^x s + \tilde{b}_0^x} \tag{7.49a}$$

$$\langle \dot{\nu}^y(s) \rangle = \frac{\tilde{a}_{n-1}^y s^{n-1} + \tilde{a}_{n-2}^y s^{n-2} \cdots \tilde{a}_1^y s + \tilde{a}_0^y}{\tilde{b}_n^y s^n + \tilde{b}_{n-1}^y s^{n-1} \cdots \tilde{b}_1^y s + \tilde{b}_0^y} \tag{7.49b}$$

を求めることができる．(7.49)を部分分数展開することで

$$\langle \dot{\nu}^x(s) \rangle = \nu_\infty^x + \sum_{j=1}^{h} \frac{r_j^x}{s + p_j^x} \tag{7.50a}$$

$$\langle \dot{\nu}^y(s) \rangle = \nu_\infty^y + \sum_{j=1}^{h} \frac{r_j^y}{s + p_j^y} \tag{7.50b}$$

を得る．(7.50)を逆 Laplace 変換することで，つぎのように時間領域におけるマクロ実効磁気抵抗 $[\langle \nu(t) \rangle]$ を求めることができる．

$$\langle \nu^x(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}^x(s) \rangle] = \nu_\infty^x \delta(t) + \sum_{j=1}^{h} r_j^x \exp\left(-p_j^x t\right) \tag{7.51a}$$

$$\langle \nu^y(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}^y(s) \rangle] = \nu_\infty^y \delta(t) + \sum_{j=1}^{h} r_j^y \exp\left(-p_j^y t\right) \tag{7.51b}$$

7. 4. 2　テンソル型マクロ実効磁気抵抗を用いた有限要素方程式

(7.51)を用いることにより，時間領域において，楕円柱コイルは $[\langle \nu(t) \rangle]$ を有する均質化された媒質として扱い，有限要素解析が可能である．以降では，7.1.2 節と同様に，準定常電磁界における周波数領域の Maxwell 電磁方程式

$$\mathrm{rot}\,([\nu]\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) + s\sigma\boldsymbol{A} = I\boldsymbol{j} \tag{7.5}$$

を逆 Laplace 変換を用いて解くことになる．しかし，均質化された楕円柱コイルはテンソル型複素磁気抵抗を有しているので，(7.5)に対して，Galerkin 法を適用すると

$$\int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot [\langle \dot{\nu}(s) \rangle] \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \nabla N_i \cdot [\nu] \nabla N_j\, \mathrm{d}S$$

$$+ s \sum_{j=1}^{n} A_j \delta(t) \int_{\Omega/\Omega_h} \sigma N_i N_j\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} N_i \cdot I\boldsymbol{j}\, \mathrm{d}S \tag{7.52}$$

となることになる．(7.52)に対して逆 Laplace 変換を適用すると

$$\int_{\Omega_h} \nabla N_i \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[[\langle \dot{\nu}(s)\rangle]\boldsymbol{B}\right] \mathrm{d}S + \sum_{j=1}^{n} A_j \delta(t) \int_{\Omega/\Omega_h} \nabla N_i \cdot [\nu] \nabla N_j \, \mathrm{d}S$$

$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{n} A_j \int_{\Omega/\Omega_h} \sigma N_i N_j \, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} N_i \cdot J_z \delta(t) \mathrm{d}S \tag{7.53}$$

を得る．7.1.2 節で議論した(7.7)の左辺第 1 項の畳み込み積分の評価は，磁気抵抗がスカラーであるとして扱ったが，今回はテンソル型実効磁気抵抗となるので，$t = n\Delta t$ における磁界 $\boldsymbol{H}^n$ をつぎのように評価しなければならない．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[[\langle \dot{\nu}(s)\rangle] \cdot \boldsymbol{B}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \langle \dot{\nu}^x(s)\rangle & 0 \\ 0 & \langle \dot{\nu}^y(s)\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^x \\ \boldsymbol{B}^y \end{bmatrix}\right] = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}^x(s)\rangle \boldsymbol{B}^x + \langle \dot{\nu}^y(s)\rangle \boldsymbol{B}^y]$$

$$= \boldsymbol{H}^x(t) + \boldsymbol{H}^y(t) = \boldsymbol{H}_n^x + \boldsymbol{H}_n^y$$

$$= \left\{ \nu_\infty^x + \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^x}{p_j^x}\left(1 - \exp\left(-p_j^x \Delta t\right)\right) \right\} \boldsymbol{B}_n^x + \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\boldsymbol{B}}_k^x$$

$$+ \left\{ \nu_\infty^y + \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^y}{p_j^y}\left(1 - \exp\left(-p_j^y \Delta t\right)\right) \right\} \boldsymbol{B}_n^y + \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\boldsymbol{B}}_k^y \tag{7.54a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_k^x \coloneqq \boldsymbol{B}_{n-k}^x \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^x}{p_j^x} \exp\left(-k p_j^x \Delta t\right)\left(1 - \exp\left(-p_j^x \Delta t\right)\right) \tag{7.54b}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_k^y \coloneqq \boldsymbol{B}_{n-k}^y \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^y}{p_j^y} \exp\left(-k p_j^y \Delta t\right)\left(1 - \exp\left(-p_j^y \Delta t\right)\right) \tag{7.54c}$$

(7.54a)から n ステップ目の磁界を評価できるが，直接的な畳み込み積分であるため，7.1.3 節のように，RC 法を適用することが望ましい．異方性の磁気特性を持つ場合には，7.1.3 節と同様の定式化で，つぎのように $\boldsymbol{H}_n^u\ (u = x, y)$ を評価するとよい．

$$\boldsymbol{H}_n^u = \nu_\infty^u (\boldsymbol{B}_n^u - \boldsymbol{B}_{n-1}^u) + \boldsymbol{B}_n^u \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^u}{p_j^u}\left(1 - \exp\left(-p_j^u \Delta t\right)\right) - \boldsymbol{\Phi}_{n-1}^u + \boldsymbol{H}_{n-1}^u \tag{7.55a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{n-1}^u = \boldsymbol{B}_n^{u-1} \Delta\chi_0^u + \exp\left(-p_j^u \Delta t\right)\boldsymbol{\Phi}_{n-2}^u \ [\mathrm{A/m}] \tag{7.55b}$$

$$\Delta\chi_0^u = \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^u}{p_j^u}\left(1 - \exp\left(-p_j^u \Delta t\right)\right)^2 [\mathrm{m/H}] \tag{7.55c}$$

本問題では，(7.55b)が帰納的集積関数となる．(7.55a)を用いることで，前節までにおける等方性のマクロ実効磁気抵抗の扱いと同様に，1 ステップ前までの磁界の総和のみを保存するため，記憶容量が少なくて済み，計算の高速化も実現できる．

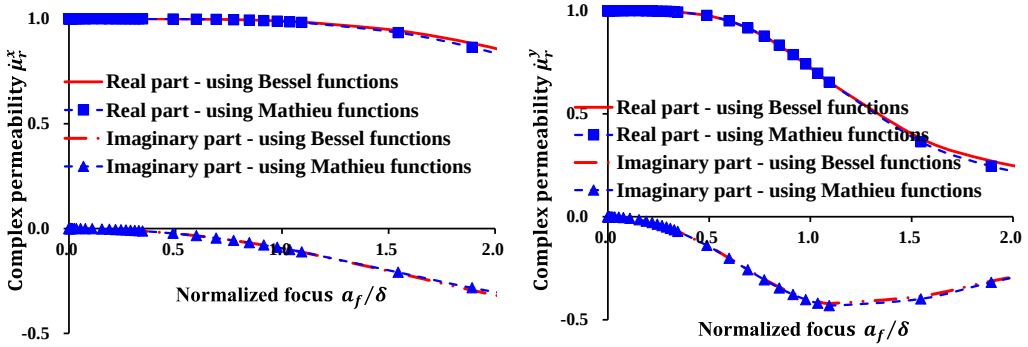
7. 4. 3　テンソル型マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度

上記の定式化においては，Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用い，級数展開の主要項のみを用いた複素透磁率(7.47)の連分数展開から，マクロ実効磁気抵抗(7.51)を得ている．したがって，このような近似が妥当であることを確認する必要がある．そこで，まずテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r]$ を(7.46), (7.47)により評価したときの結果を比較する．解析緒元が Table 7.5 のような楕円柱細線を考える．(7.46), (7.47)の周波数特性を Fig.7.16 に示す．Fig.7.16 から，(7.47)のような，Bessel 関数の引数に双曲線関数を用いた近似により，Mathieu 関数を用いた場合の複素透磁率と同様の特性を得られることがわかる．

Table 7.5 Specification of the test model as shown in Fig.7.15

σ [S/m]	μ_r^x, μ_r^y	α [mm]	β [mm]
5.76×10^7	1.0	0.25	0.10

j	∞	1	2	3
r_j^x	2.27×10^6	-9.83×10^{12}	-1.35×10^{13}	-4.27×10^{13}
p_j^x	–	1.12×10^7	4.54×10^7	1.41×10^8
r_j^y	3.92×10^6	-2.63×10^{12}	-6.40×10^{12}	-3.86×10^{13}
p_j^y	–	2.54×10^6	8.65×10^6	2.85×10^7

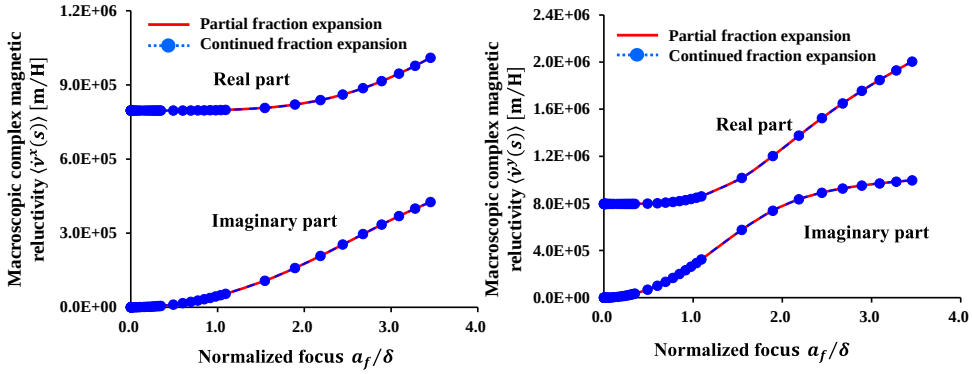


(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.7.16 Complex permeabilities of elliptic wire calculated by（7.46）and（7.47）in the tensor form. Abscissa denotes the normalized wire focus a_f/δ. From this figure, we find that the approximation of the tensor complex permeability including the Mathieu functions by using the Bessel functions is valid.

つぎに，同じ Table 7.5 の解析緒元で，マクロ複素磁気抵抗 $[\langle\dot{\nu}(s)\rangle]$ を連分数展開から有理関数表示を行った表示(7.49), および部分分数分解を $h = 3$ として表示(7.50)した場合それぞれで計算した値を比較する．比較結果を Fig.7.17 に示す．Fig.7.17 から，部分分数分解表示の妥当性が確認できる．従って，Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用い，級数展開の主要項のみを用いた複素透磁率の連分数展開が妥当であるとわかる．さらに，${}^\forall p_j^x,\ {}^\forall p_j^y > 0$ であるので，逆 Laplace 変換(7.54)に伴い，数値発散は生じない．

なお Fig.7.16, 7.17 において，$[\dot{\mu}_r], [\langle\dot{\nu}\rangle]$の相対誤差については，最大で0.251 ,$5.10 \times 10^{-4}$ であった．



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig. 7.17 Macroscopic magnetic reluctivities calculated by (7.49) and (7.50) in the tensor form. Abscissa denotes the normalized wire focus a_f/δ. From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory.

7. 4. 4　楕円柱細線と平角線の表皮効果に起因するインピーダンス

周波数領域における楕円柱細線の回路方程式は，第 3 章 3.9.3 節で導いたように

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^{*}\,\mathrm{d}v + Z_{skin}^{elli} I \tag{7.56a}$$

$$Z_{skin}^{elli} \coloneqq -2\cosh\eta_1 \sinh\eta_1 \, R_0^{elli} \frac{q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \tag{7.56b}$$

である．ここで，$R_0^{elli} \coloneqq l/(\sigma\pi\alpha\beta)$ は楕円柱細線の直流抵抗を表す．(7.56)は(3.223)に対応する．なお，平角線を考える際には，(7.56b)において R_0^{elli} を $R_0^{rect} \coloneqq l/(\sigma 4\alpha\beta)$ と変更すればよい．(7.56b)は周波数領域における実効インピーダンスであるが，Mathieu 関数を用いた表記では，直接時間領域解析に供することが難しい．そこで，7.4.2 節で示した Mathieu 関数の Bessel 関数展開を適用すると，(7.56b)は

$$Z_{skin}^{elli} \approx \frac{\zeta^y J_0(\zeta^y)}{2J_1(\zeta^y)} R_0^{elli} \tag{7.57}$$

と変形できる．ここで，7.4.2 節と同様にここで，$\zeta^y \coloneqq a_f \cosh\eta_1\,(1-\mathrm{j})/\delta$ とおいた．(7.56b)から(7.57)を得る方法については，Appendix D にて詳述する．(7.57)に対して，Bessel 関数の連分数公式(7.26)を適用すると

$$Z_{skin}^{elli} = R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1} + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2} + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_3} + \cdots}}}}}} \tag{7.58}$$

ここで，

$$R_k = (2k-1)R_0^{elli} \tag{7.59a}$$

$$L_k = \mu \frac{R_0 \sigma a_f^2 \cosh^2 \eta_1}{8k} \tag{7.59b}$$

である$(k = 1,2,3,\dots)$．(7.58)は 7.1.4 節で述べた Fig.7.1 の Cauer 型等価回路の入力インピーダンスに対応し，その素子値は(7.59)で与えられる．したがって，Cauer 型等価回路における電圧方程式を時間方向に離散化して

$$\begin{aligned}
&R_1 i_1^n + L_1 \frac{(i_1^n - i_2^n) - (i_1^{n-1} - i_2^{n-1})}{\Delta t} = v(t) \\
&R_2 i_2^n + L_1 \frac{(i_2^n - i_1^n) - (i_2^{n-1} - i_1^{n-1})}{\Delta t} + L_2 \frac{(i_2^n - i_3^n) - (i_2^{n-1} - i_3^{n-1})}{\Delta t} = 0 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&R_q i_q^n + L_{q-1} \frac{\left(i_q^n - i_{q-1}^n\right) - \left(i_q^{n-1} - i_{q-1}^{n-1}\right)}{\Delta t} + L_q \frac{i_q^n - i_q^{n-1}}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \tag{7.60}$$

を得る．よって(7.60)を用いて，(7.24)の連立 1 次方程式を得ることができる．

7.4.5　楕円柱コイル・平角線コイルの電力の時間波形

本節の最後に，楕円柱コイル・平角線コイルの電流波形の時間応答を調べる．解析モデルとして，Fig.7.18 のような軸対称の系を考える．コイル素線の解析緒元を Table 7.5 の通りとし，(7.7)と(7.56)を連立して，コイルの瞬時電力 $p(t)$，すなわち Cauer 型等価回路初段(Fig.7.2)に流れる $i_1(t)$ と入力電圧 $v(t)$ の積 $p(t) = v(t) i_1(t)$ を求める．Fig.7.18 のモデルでは，楕円断面コイル周囲に導電性の磁性体がある場合を想定しており，この磁性体が発生する反磁界の効果が十分に反映できるように，コイル巻数は 84 回とした．提案手法の妥当性を確認するために，均質化を導入しない従来の有限要素法から得られる電力と比較する．両者による解析の際に，有限要素により離散化されたコイル領域を比較した図を Fig.7.19 に示す．従来の準静電磁界解析においては渦電流を考慮した要素分割が必要であるため，コイル領域の要素数は 975,016 であった．一方で，提案手法においてはコイル領域が均質化されるため，78 とした．また，総要素数については，従来の手法においては 2,305,965 であったが，提案手法においては 172,641 であった．入力電圧は $v(t) = V_0 \sin(\omega t)$ とし，周波数は 1 kHz とした．

解析結果を Fig.7.20 に示す．両者はよく一致しているため，粗い要素分割を用いた提案手法でもコイル電力が精度よく求められているとわかる．また，比較として，同様のモデルで，平角線断面にした場合の解析を同じ Fig.7.20 に示す．このとき，長辺，短辺はそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ とし，コイル素線の直流抵抗は $R_0 = l/(4\alpha\beta\sigma)$ とした．Fig.7.20 より，平角線を楕円に近似して解析した場合でも十分な精度で電力が評価できているとわかる．

なお，コイル電力の相対誤差については，楕円断面コイルの場合，$t = 1.6$ msec において，0.086 %であった．このことからも，十分な精度でコイルの電力が求められているとわかる．さらに電力は，$t = 1.36$ msec において，平角線コイルの場合で 0.24 W，楕円線の場合で 0.22 W であった．したがって，平角線コイルにおける近接効果に起因する電力は，素線形状を楕円形状に近似して求めたテンソル型複素透磁率を用いて十分によい精度で評価可能であり，直流抵抗分を長方形形状の場合の面積を用いて，表皮効果に起因する実効インピーダンスから求めた時間領域の回路方程式と連立した有限要素方程式を解くことで，コイル素線内部の表皮効果と近接効果による渦電流を考慮したコイルの電力を精度良く得ることができるとわかる．

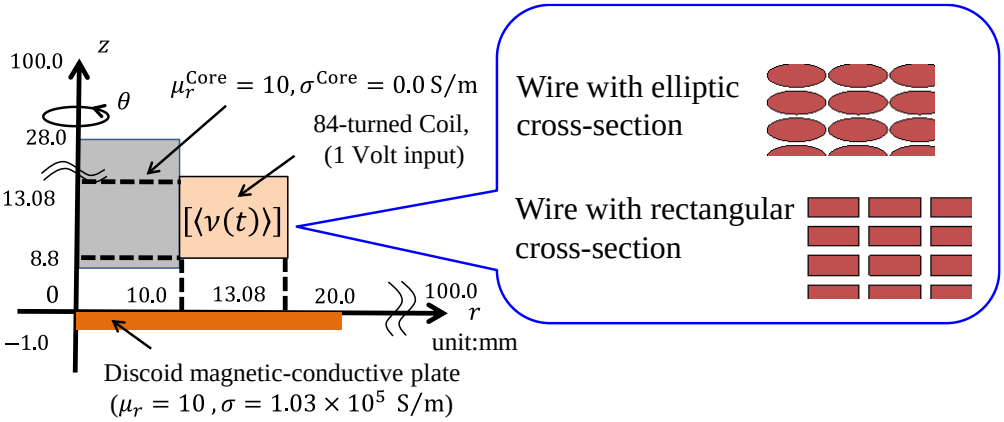
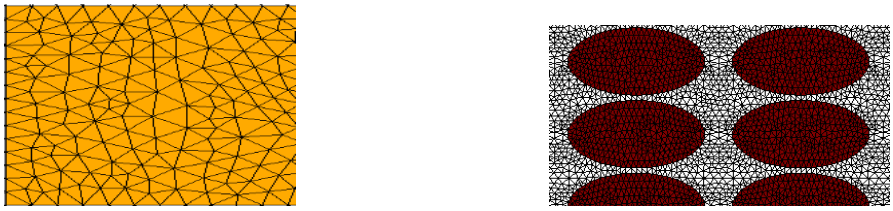


Fig.7.18 Multi-turn copper coil with elliptic cross-section placed above a conductive disk.
This system is assumed axisymmetric. In this analysis, the cross-section of the coil area is assumed to be elliptic and rectangular shapes.



(a) Homogenized coil region　　(b) Standard FEM

Fig.7.19 Finite elements in the coil region.
In this analyses, the number of elements in the coil region are 78 and 975,016 for the proposed and standard FE analyses. In the former approach, that is the proposed FEA based on the homogenization scheme, the coil region is discretized by coarse elements with the macroscopic magnetic reluctivity for a multi-turn coil with elliptic cross-section. On the other hand, in the latter method, that is the standard FEA considering the eddy currents, the coil region has to be subdivided into fine elements which are sufficiently smaller than the skin depth.

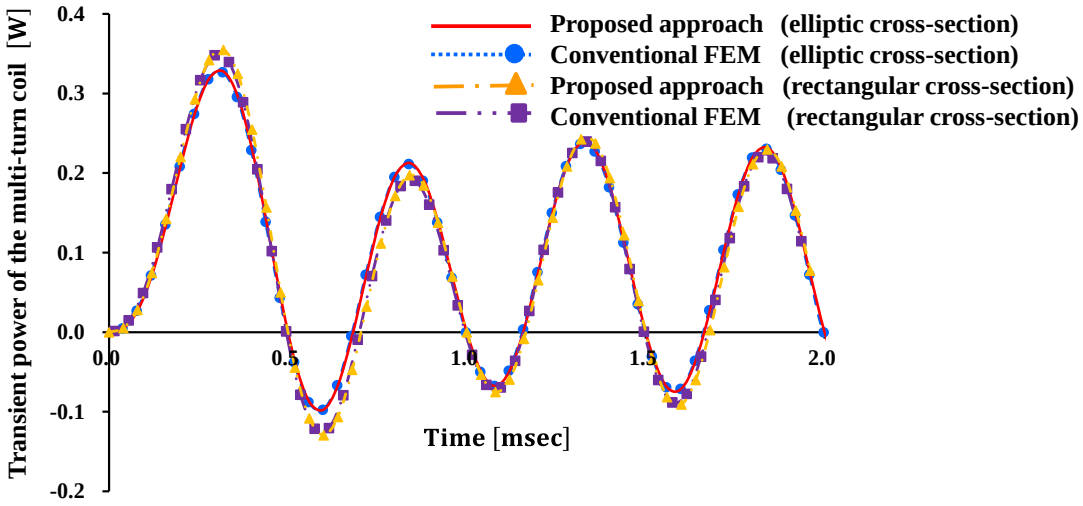


Fig.7.20 Transient power of the multi-turn coils as shown in Fig.7.18.
It is found that the coincidence between them is satisfactory. Moreover, the approximation of the rectangular coil with the elliptic coil is valid within the acceptable error.

7.5　磁性平角線コイルのマクロ実効磁気抵抗と電流波形

7.4 節の議論により，平角線を楕円形状に近似して解析することの妥当性を示した．本節では，このことを踏まえて，Fig.7.21 に示すように，磁性平角線の断面を楕円に近似した場合の，コイルの電流波形を時間領域均質化有限要素解析により求めることを考える．基本的な手順は前節と同じであるが，磁性被覆線の場合には磁性被覆層の材料諸元として電磁鋼板の複素透磁率を使用し，導電率を 0 とする．

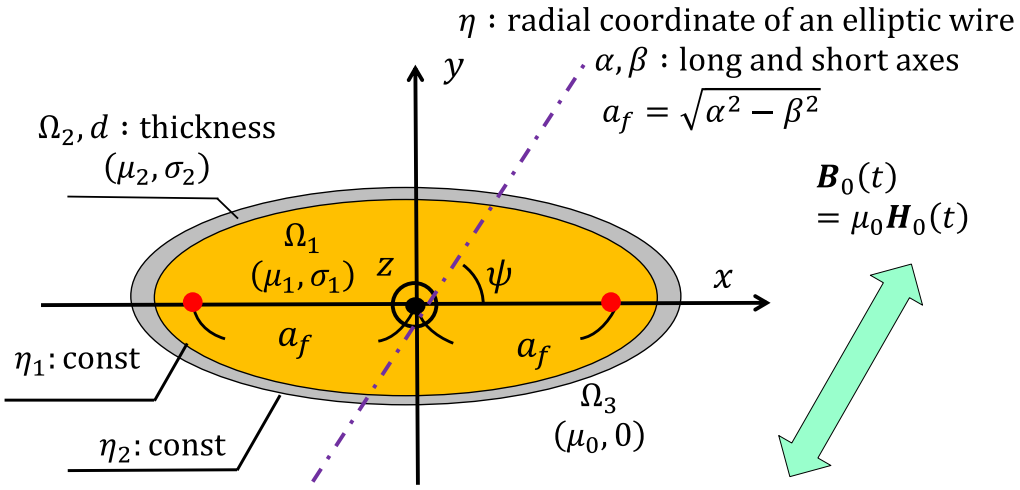


Fig. 7.21 Magnetically shielded wire (MSW) with elliptic cross section immersed in a uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0(t)$.
This model can be regarded as an approximation model of a MSW with rectangular cross-section.

7.5.1　磁性平角線コイルのテンソル型マクロ実効磁気抵抗

本節では長軸方向を $\mathbf{e}_x$，短軸方向を $\mathbf{e}_y$ とする．Fig.7.21 に示すような磁性被覆平角線のテンソル型複素透磁率は第 3 章 3.9.2 節で導いたように

$$\dot{\mu}_r^x = \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_x}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_x} \tag{7.61a}$$

$$\dot{\mu}_r^y = \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_y}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_y} \tag{7.61b}$$

$$\dot{u}_x = \frac{\lambda_1\dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_2}{\lambda_3\dfrac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_4} \tag{7.61c}$$

$$\dot{u}_y = \frac{\lambda_1 \dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_2}{\lambda_3 \dfrac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\nu_1 \mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} + \lambda_4} \tag{7.61d}$$

である．ここで $\lambda_1 = -h_1\nu_2 - h_2,\ \lambda_2 = h_2\nu_2 + h_1\ , \lambda_3 = h_1\nu_2 - h_2, \lambda_4 = -h_2\nu_2 + h_1, h_1 = \mathrm{e}^{2\eta_1} - \mathrm{e}^{2\eta_2}, h_2 = \mathrm{e}^{2\eta_1} + \mathrm{e}^{2\eta_2}$ とおいた．磁性被覆の複素透磁率は磁気抵抗の比 $\nu_1 = \dot{\mu}_2^{slab}/\mu_1\ , \nu_2 = \mu_0/\dot{\mu}_2^{slab}$ に反映されている．(7.61a, b), (7.61c, d) はそれぞれ (3.232), (3.231)に対応する．前節と同様の考え方，つまり Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用いる方法を採用する．いま，複素関数(7.61c, d)は(7.47)を用いると

$$\dot{u}_x = \frac{\lambda_1 \dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \dfrac{J_1(\zeta^x)}{\zeta^x J_1'(\zeta^x)} + \lambda_2 \dfrac{\dot{\mu}_2(\omega)}{\mu_1}}{\lambda_3 \dfrac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \dfrac{J_1(\zeta^x)}{\zeta^x J_1'(\zeta^x)} + \lambda_4 \dfrac{\dot{\mu}_2(\omega)}{\mu_1}} \tag{7.62a}$$

$$\dot{u}_y = \frac{\lambda_1 \dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \dfrac{J_1(\zeta^y)}{\zeta^y J_1'(\zeta^y)} + \lambda_2 \dfrac{\dot{\mu}_2(\omega)}{\mu_1}}{\lambda_3 \dfrac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \dfrac{J_1(\zeta^y)}{\zeta^y J_1'(\zeta^y)} + \lambda_4 \dfrac{\dot{\mu}_2(\omega)}{\mu_1}} \tag{7.62b}$$

と改めることができる．(7.62)に対して，Bessel 関数の連分数展開公式(7.26)，及び電磁鋼板の複素透磁率の連分数展開表示(7.35)を適用し，さらに有理関数表示を行うと

$$\dot{\mu}_r^x(s) \approx \frac{a_{n-1}^x s^{n-1} + a_{n-2}^x s^{n-2} \cdots a_1^x s + a_0^x}{b_n^x s^n + b_{n-1}^x s^{n-1} \cdots b_1^x s + b_0^x} \tag{7.63a}$$

$$\dot{\mu}_r^y(s) \approx \frac{a_{n-1}^y s^{n-1} + a_{n-2}^y s^{n-2} \cdots a_1^y s + a_0^y}{b_n^y s^n + b_{n-1}^y s^{n-1} \cdots b_1^y s + b_0^y} \tag{7.63b}$$

を得る．(7.63)を(7.2)に代入し，部分分数展開することで

$$\langle \dot{\nu}^x(s) \rangle = \nu_\infty^x + \sum_{j=1}^{h} \frac{r_j^x}{s + p_j^x} \tag{7.64a}$$

$$\langle \dot{\nu}^y(s) \rangle = \nu_\infty^y + \sum_{j=1}^{h} \frac{r_j^y}{s + p_j^y} \tag{7.64b}$$

を得る．(7.64)を逆 Laplace 変換することで，つぎのように磁性平角線の時間領域におけるマクロ複素磁気抵抗 $[\langle \nu(t) \rangle]$ を求めることができる．

$$\langle \nu^x(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{\nu}^x(s) \rangle] = \nu_\infty^x \delta(t) + \sum_{j=1}^{h} r_j^x \exp\left(-p_j^x t\right) \tag{7.65a}$$

$$\langle v^y(t)\rangle = \mathcal{L}^{-1}[\langle \dot{v}^y(s)\rangle] = v_\infty^y \delta(t) + \sum_{j=1}^{h} r_j^y \exp\left(-p_j^y t\right) \tag{7.65b}$$

7. 5. 2　テンソル型マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の計算精度

上記の定式化により得られるテンソル型マクロ複素磁気抵抗が妥当であることを確認する必要がある．そこで，まずテンソル型複素透磁率 $[\dot{\mu}_r]$ を部分分数展開(7.63)と解析解(7.61)を比較する．解析モデルとして，Fig.7.22 に示すような 9 回巻の磁性被覆平角線コイルを考え，その解析緒元は Table 7.6 とする．なお，$h = 6, r_\infty^x = 8.71 \times 10^6, r_\infty^y = 1.75 \times 10^7$ とした．部分分数展開されたマクロ複素磁気抵抗(7.64)と(7.61)を Ollendorff の式に代入して得られる周波数特性を比較した結果を Fig.7.23 に示す．Fig.7.23 から，部分分数分解表示の妥当性が確認できる．従って，Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用い，級数展開の主要項のみを用いた複素透磁率の連分数展開が妥当であるとわかる．

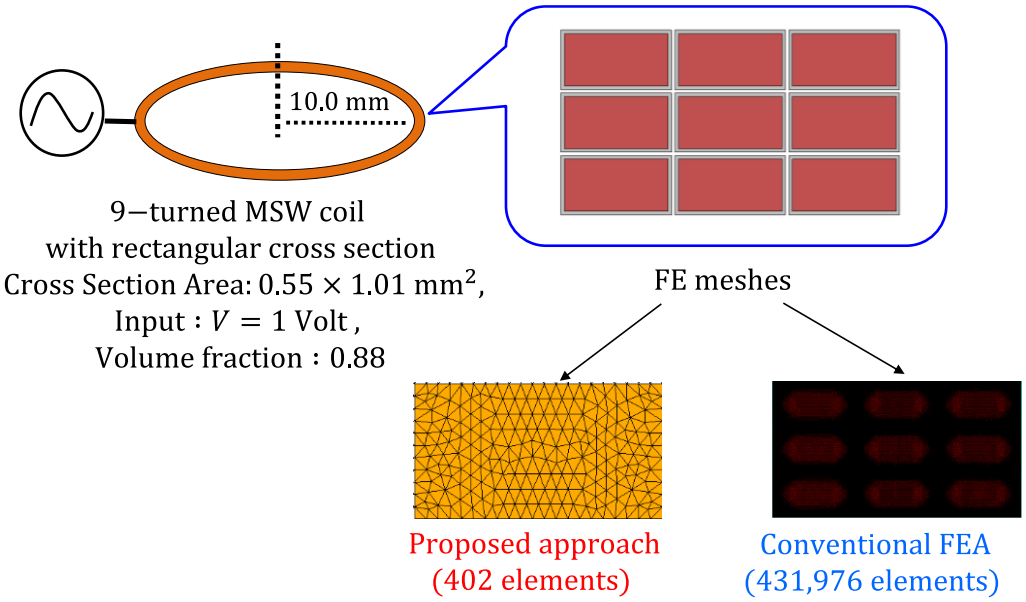
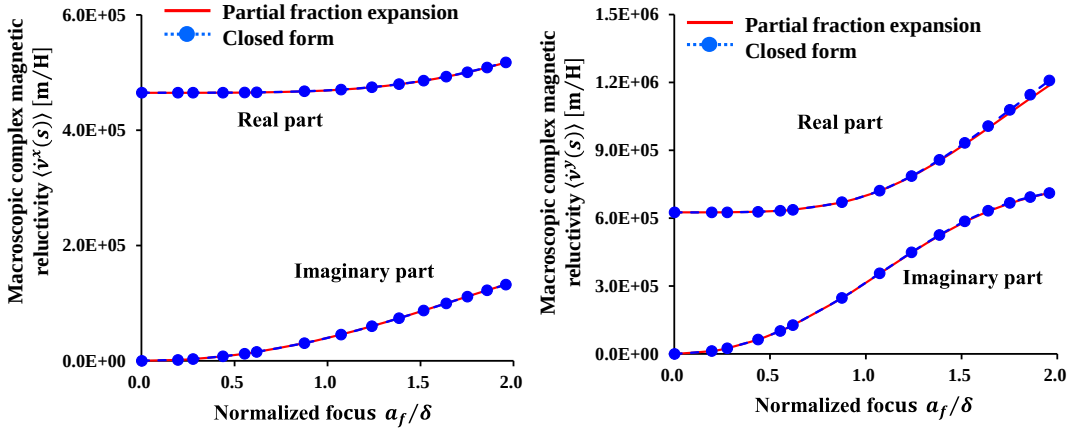


Fig.7.22 9-turn MSW with rectangular cross-section.

Table 7.6 Specification of the MSC as shown in Fig.7.22

α [mm]	0.15	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7	d [μm]	10
β [mm]	0.075	μ_{2r}	10	σ_2 [S/m]	1.03×10^4	η	0.88

j	1	2	3	4	5	6
r_j^x	-5.12×10^{12}	-2.29×10^{13}	-1.35×10^{18}	-1.01×10^{12}	-9.25×10^{19}	-9.21×10^{11}
p_j^x	1.49×10^7	1.27×10^8	1.58×10^{12}	1.58×10^{12}	1.35×10^{13}	1.36×10^{13}
r_j^y	-5.94×10^{12}	-8.05×10^{13}	-4.14×10^{18}	-3.41×10^8	-9.93×10^{19}	-3.12×10^8
p_j^y	5.90×10^6	4.87×10^7	1.47×10^{12}	1.58×10^{12}	8.69×10^{12}	1.36×10^{13}



(a)　Real part　　(b)　Imaginary part

Fig.7.23 Macroscopic magnetic reluctivities of the MSW with rectangular cross-section calculated by the partial fraction expansion form and the close form defined in the tensor form.
Abscissa denotes the normalized wire focus a_f/δ. From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory.

7. 5. 3　表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路表現

一方で，入力電流に起因するインピーダンスは，(3.243)で導いた通り

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^{*}\,\mathrm{d}v + Z_{skin}^{elli} I + \mathrm{j}\omega\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l\pi a_f \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\frac{I}{2\pi} \tag{7.66a}$$

$$Z_{skin}^{elli} \coloneqq -2\cosh\eta_1 \sinh\eta_1\, R_0^{elli} \frac{q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \approx \frac{\zeta^y J_0(\zeta^y)}{2J_1(\zeta^y)} R_0^{elli} \tag{7.66b}$$

である．(7.66a)は(3.243)に相当する．(7.66a)の右辺第 2, 3 項が入力電流による素線の実効インピーダンスの周波数特性を表す項であり，

$$Z_e^{elli} = \frac{\zeta^y J_0(\zeta^y)}{2J_1(\zeta^y)} R_0^{elli} + s\dot{\mu}_r^{slab}\mu_0 l\pi a_f \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\frac{1}{2\pi} \tag{7.67}$$

である．(7.67)は周波数領域の複雑な関数であり，このままでは時間領域解析に供することが難しい．そこで，(7.67)右辺第 1 項に対して，(7.58)と同様の連分数展開表示，及び第 2 項に対して(7.35)を適用し，Padé 近似を行うと

$$Z_e^{elli} = 2 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{4 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{6 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{8 + \cfrac{s\mu\sigma a^2}{10 + \cdots}}}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_1} + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_2} + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_3} + \cdots}}}}} \times sl\pi a_f \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\eta_2}}\right)\frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{a_{q-1}s^{q-1} + a_{q-2}s^{q-2} \cdots a_1 s + a_0}{b_q s^q + b_{q-1}s^{q-1} \cdots b_1 s + b_0} + \frac{c_{p-1}s^{p-1} + c_{p-2}s^{p-2} \cdots c_1 s + c_0}{d_p s^p + d_{p-1}s^{p-1} \cdots d_1 s + d_0}$$

$$= \frac{\tilde{a}_{\tilde{p}-1}s^{\tilde{p}-1} + \tilde{a}_{\tilde{p}-2}s^{\tilde{p}-2} \cdots \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}{\tilde{b}_{\tilde{q}} s^{\tilde{q}} + \tilde{b}_{\tilde{q}-1}s^{\tilde{q}-1} \cdots \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{7.68}$$

なる有理関数表示を得る．さて，7.3.2 節の円筒形磁性被覆線の回路方程式の連分数表示と同様に，(7.68)に対して，$s \coloneqq p^{-1}$とおき，Euclid の互助法を適用すると

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 p^q + a_1 p^{q-1} + \cdots + a_{q-2}p^2 + a_{q-1}p}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\dfrac{b_0 p^q + b_1 p^{q-1} + b_2 p^{q-2} \cdots + b_{q-1}p + b_q}{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\dfrac{b_0}{a_1^0}p + \dfrac{b_1^0 p^{q-1} + b_2^0 p^{q-2} + \cdots + b_{q-1}^0 p + b_q^0}{a_1^0 p^{q-1} + a_2^0 p^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^0 p^2 + a_{q-1}^0 p + a_q^0}}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} + \cfrac{1}{\dfrac{b_0}{a_1^0}p + \cfrac{1}{\dfrac{a_1^0}{b_1^0} + \cfrac{1}{\dfrac{b_1^0}{a_1^0}p + \cfrac{1}{\dfrac{a_2^1}{b_2^1} + \cdots}}}}} \tag{7.69}$$

となる．ここで,

$$R_k = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} (k = 1) \\ \dfrac{a_{k-1}^{k-2}}{b_{k-1}^{k-2}} (k \geq 2) \end{cases} \tag{7.70a}$$

$$L_k = \begin{cases} \dfrac{a_1^0}{b_0} (k = 1) \\ \dfrac{a_k^{k-1}}{b_{k-1}^{k-2}} (k \geq 2) \end{cases} \tag{7.70b}$$

とおくと．(7.69)から$p \coloneqq s^{-1}$と置き換えて，表皮効果に起因する実効インピーダンスの Cauer 型等価回路表示を得ることができ，さらに，Cauer 型等価回路における電圧方程式を時間方向に離散化して

$$R_1 i_1^n + L_1 \frac{(i_1^n - i_2^n) - (i_1^{n-1} - i_2^{n-1})}{\Delta t} = v(t)$$

$$R_2 i_2^n + L_1 \frac{(i_2^n - i_1^n) - (i_2^{n-1} - i_1^{n-1})}{\Delta t} + L_2 \frac{(i_2^n - i_3^n) - (i_2^{n-1} - i_3^{n-1})}{\Delta t} = 0 \qquad (7.71)$$

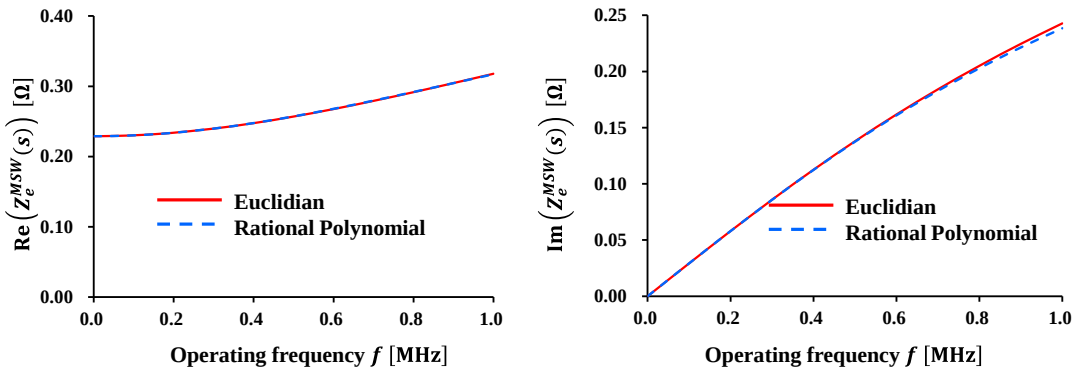
$$\vdots$$

$$R_q i_q^n + L_{q-1} \frac{(i_q^n - i_{q-1}^n) - (i_q^{n-1} - i_{q-1}^{n-1})}{\Delta t} + L_q \frac{i_q^n - i_q^{n-1}}{\Delta t} = 0$$

を得る．よって(7.71)を用いて，(7.24)の連立 1 次方程式を得ることができる．

7. 5. 4　Cauer 型等価回路表現の数値解析結果

(7.67)から(7.60)を経て，(7.69)へ変更した際に，磁性平角コイルの入力電流に起因するインピーダンス $Z_e^{MSW}(s)$ が一致していなければならない．このことを確認するため，Fig.7.22 のような 9 回巻の磁性平角線コイルを考える．この場合，素線長さは $l = 1.86$ mm である．解析緒元を Table 7.7 の通りとし，磁性被覆線のマクロ複素磁気抵抗を(7.60), (7.69)の 2 通りでプロットしたグラフを Fig.7.24 に示す．Fig.7.24 から両者はよい精度で一致しているとわかる．したがって，(7.69)の表示は妥当であり，(7.71)により時間領域におけるコイルの回路方程式が求められる．また，この場合の回路素子値を Table 7.7 に示す．初段に関しては，直流抵抗とほぼ一致しているとわかる．これは Cauer 型等価回路の初段が直流成分，2 段目以降の抵抗が渦電流に起因する交流抵抗に対応することを表している．



(a)　Real part　　(b)　Imaginary part

Fig.7.24 Frequency characteristics of the circuit impedance calculated by (7.67) and (7.69).
Abscissa denotes operating frequency f [MHz]. From this figure, it is found that these results are in good agreement.

Table 7.7 Elements of the Cauer-type equivalent circuit of the MSC

R_k [Ω]	0.229	0.687	0.346	0.503	0.903
L_k [μH]	0.0466	0.0233	0.00965	0.00567	0.00385

7. 5. 5　素線の電流波形の時間波形

本節の最後に，平角線コイルの電流波形の時間応答を調べる．解析モデルは，先程までと同じ Fig.7.22 のような軸対称のモデルである．従来の準静電磁界解析においては，コイル素線を表皮厚以下に要素分割が必要であるため，コイル領域の要素数は 402 であった．一方で，提案手法においてはコイル領域が均質化されるため，431,976 とした．また，総要素数については，従来の手法においては 2,305,965 であったが，提案手法においては 172,641 であった．入力電圧は $v(t) = V_0 \sin(\omega t)$, $V_0 = 1$ Volt とし，周波数は 10 kHz とした. この解析条件での, 素線の電流波形の解析結果を Fig.7.25 に示す. Fig.7.25 より，提案手法により，十分な精度で電流波形を求められることができるといえる．

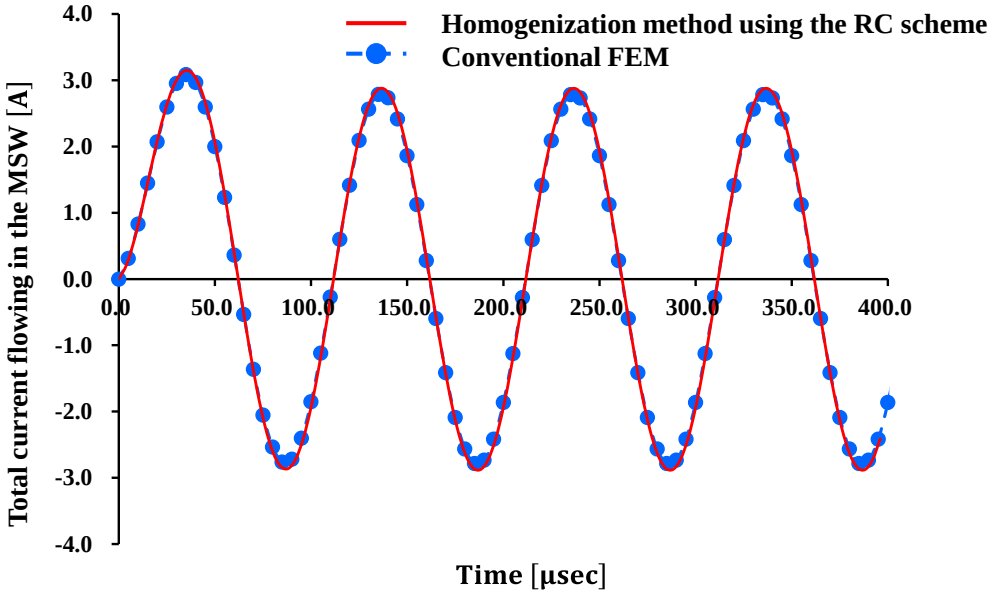


Fig.7.25 Transient current flowing the MSW with rectangular cross-section shown in Fig.7.22.
It is found that the coincidence between them is satisfactory. Moreover, the approximation of the rectangular coil with the elliptic coil is valid within the acceptable error.

7. 6　第 7 章の総括

本章では，時間領域均質化有限要素法を行う際に必要となる理論，定式化について述べた．解析モデルとして，通常の銅線，磁性被覆線，楕円細線，平角線，磁性被覆平角線，を取り上げた．いずれのモデルにおいても，連分数展開された複素透磁率，部分分数分解されたマクロ複素磁気抵抗が元の解析解とよりよい精度で一致することを述べた上で，逆 Laplace 変換により，マクロ実効磁気抵抗を得る方法を述べた．また，直接的な畳み込み積分を回避するため，RC 法を用いた高速解法についても述べた．提案手法を用いて，回路方程式と連成された有限要素解析により，多重巻線コイルの電流，電力の瞬時値が十分な精度で得られることを数値解析の結果明らかにした．

上記のような解析により, 直接的な有限要素法では離散化が困難であった, 多重巻線, 磁性被覆巻線を含む系の準定常電磁界解析を行うことが可能になる．本節までの解析結果により，提案手法の妥当性・有効性を示せたが，ここでつぎのような疑問が生じる．

① 本節では入力電圧の波形はすべて正弦波であると仮定しているが，実際には PWM (Pulse Width Modulation : PWM)等のような波形がコイル端子に入力されることもある．このような場合でも提案手法は適用できるのであろうか.

② 磁性被覆線の損失は，提案手法を用いて評価できるのか.

③ 磁性被覆線の磁性被覆の透磁率を上げると，磁性被覆コイルを用いた電磁機器中の界磁巻線の銅損をどの程度抑制できるのか.

このような疑問に答えるため, 次節では磁性被覆線を用いた種々の電気機器の銅損の評価結果を示す．また，磁性被覆線の有効性を明らかにするため，界磁巻線の銅損の実効値の磁性被覆の透磁率への依存性を調べる.

第 7 章 参考文献

[7.1] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[7.2] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

[7.3] R. Luebbers, et al., "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials", *IEEE Trans.* Electromagnetic Compatibility, vol.32, no. 3, pp.222-227, 1990.

[7.4] 宇野亨，「FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析」，コロナ社，1998 年.

[7.5] Y. Sato, H. Igarashi, "Effective Time-Domain Finite Element Analysis of Multi-Turn Coil Windings Based on Homogenization", to be submitted, I *IEEE Trans. Magn*.

[7.6] 佐藤佑樹，「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」，2019 年度北海道大学博士論文.

[7.7] S. Fujita, H. Igarashi, " Time-Domain Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenized Finite Element Method ", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol.56, no.2, 7506504, 2020.

[7.8] 藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法を用いた多重巻き楕円断面コイルの時間領域解析」，電気学会論文誌 B，vol.140, no.5, pp.1-7, 2020.

[7.9] Dr. Julio C. Gutiérrez-Vega, "Theory and numerical analysis of the Mathieu functions v.2.1", Monterrey, Nuevo-León, México, 2008, May.

[7.10] N. W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK, 1954.

第 8 章 磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減

第 7 章においては，時間領域均質化有限要素法について，マクロ複素磁気抵抗の部分分数展開の一致と，マクロ実効磁気抵抗を用いて時間領域の均質化有限要素法が行えることを示した．前章では，磁性体コアの材質は線形であると仮定したが，実際には非線形特性を考慮した解析・設計を行う必要がある．そこで，本章の 8.1 節では，磁性体コアの非線形性をも考慮した数値解析を提案手法と従来法で行い，両者が十分に一致することを示す．また正弦波状の電圧だけではなく， PWM が入力されることもあるので，本章の 8.2 節では，PWM を入力する際の定式化について述べ，PWM を入力した際に，非線形性を有する磁性体コアが系に存在していても提案手法が十分に成立することを示す．つぎに 8.3, 4 節では，インダクタ，IPM モータ等に磁性被覆線を用いた場合に，損失がどの程度抑制されるのかを提案手法により示す．最後に 8.5 節において，本節において得られた知見をまとめる．

8. 1 磁性体コアに非線形性が存在する場合の解析

第 1 章でも述べたように, 磁性体には磁気飽和に伴う非線形特性が存在するのが一般的である．非線形性を考慮した有限要素解析の方法は第 2 章にて述べた通りである．本節では, 数値解析例として, Fig.8.1 に示すようなモデルで, 磁性被覆線の電力の瞬時値, 及び磁束密度のひずみ波形をプロットする．解析緒元は，Table 8.1 の通りとする．非線形特性を有する場合の解析は，第 2 章で述べたように，Newton-Raphson 法を用いて行うことができる．電源周波数を $f = 10$ kHz, 電圧の振幅を $V = 30$ Volt とし，電力の瞬時値を計算した結果を Fig.8.2 に示す．Fig.8.2 から，十分に一致していることがわかる．

つぎに，磁気飽和の効果が出ていることを確認する．サンプルする磁束密度を $\boldsymbol{b}(x, y, t) = \boldsymbol{b}(2.5 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}, t)$とする. それぞれの成分毎に波形をプロットした結果を Fig.8.3 に示す．Fig.8.3 より，磁束密度の波形が概ね一致していることがわかる．また，磁気飽和のため，波形がひずんでいることがわかる．いま，この波形を概ね周期 T の周期信号に近いと見なし，奇数次の角周波数に対する Fourier 級数展開

$$|\boldsymbol{b}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{b_x^2(t) + b_y^2(t)} \sin\big((2n-1)\omega t\big)\, \mathrm{d}t \right\} \times \sin\big((2n-1)\omega t\big) \right] \quad (8.1)$$

を行い，奇数次のスペクトルを分析した結果を Fig.8.4 に示す．このことから，磁性体コア中の磁気飽和により磁束密度の波形に高調波成分が現れているとわかる．

Table 8.1 Specification of the test model as shown in Fig. 8.1

a [mm]	0.15	b [mm]	0.16
μ_{1r}	1.0	μ_{2r}	1.0
σ_1 [S/m]	5.76×10^7	σ_2 [S/m]	1.03×10^4
μ_r^{Plate}	10	σ^{Plate} [S/m]	1.03×10^4
η	0.82	l [mm]	94.5

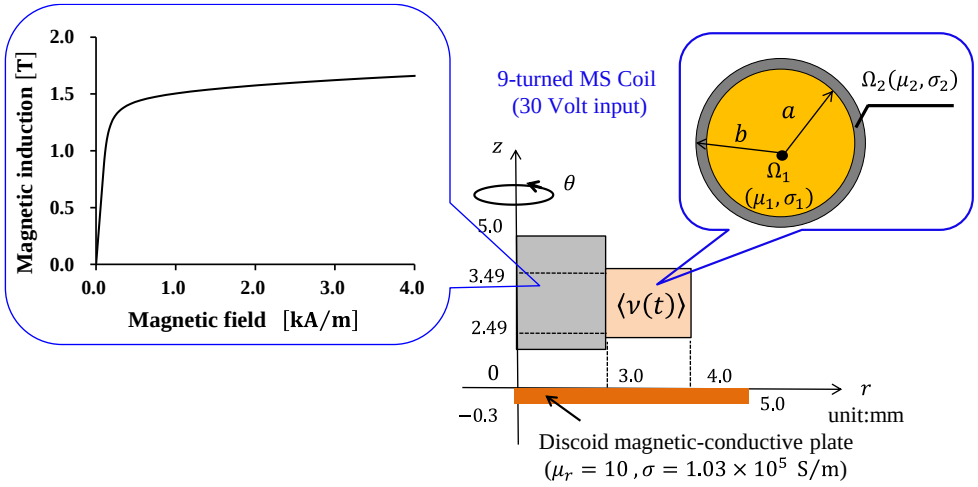


Fig.8.1 Multi-turn MS coil placed above a discoid conductor.
In this model, the magnetic core is assumed a non-linear magnetic material. Note here that the author chose these parameters so that the skin depth is rather large for execution of the conventional FE analysis. In the proposed method, the coil region is discretized by coarse elements whose reluctivity is the macroscopic effective reluctivity $\langle \nu(t) \rangle$.

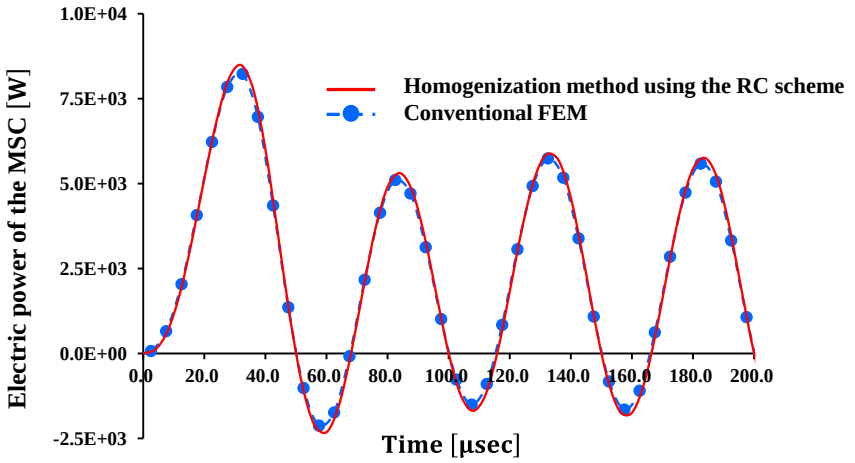
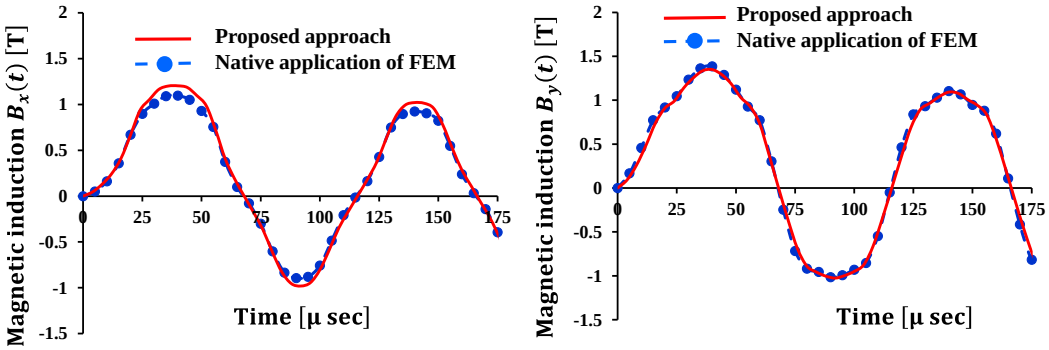


Fig.8.2 Instantaneous electric power of the MSC shown in Fig.8.1 with respect to time.
It is found that the coincidence between them is satisfactory.



(a) x-component　　(b) y-component

Fig.8.3 Time response of the magnetic inductions in the magnetic core.
Due to the presence of the magnetic core which has the magnetic-nonlinearity, the waveform of the magnetic inductions are distorted. However, even in spite of this waveform distortion, both calculated magnetic inductions are in good agreement.

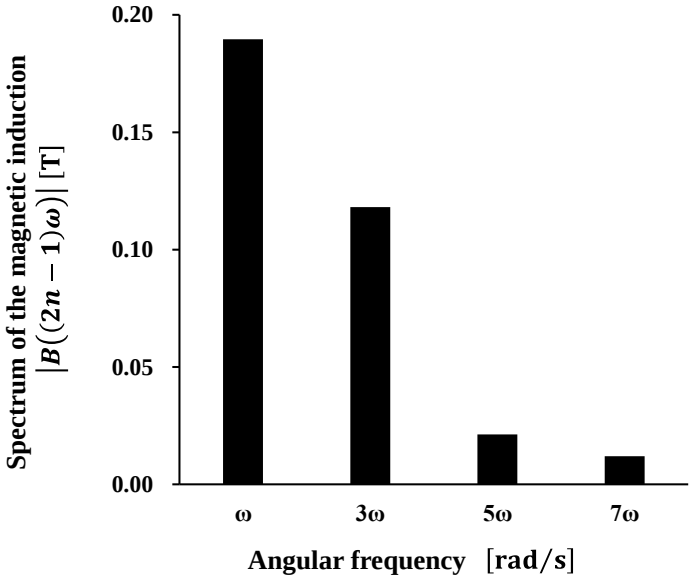


Fig.8.4 Spectrum of the magnetic induction shown in Fig.8.1.

8. 2　PWM 入力の問題

第 1 章でも述べたように，例えば電気自動車の非接触給電装置等においては，三相交流電源が使用されている．電源から供給された交流が直流に変換され，再度交流に変換されている．その際には，機器の小型化のため，内部では高速スイッチング電源が使用されていることを述べた.

直流を交流に変換する装置として，インバータ回路が知られている．インバータは，半導体スイッチを用いて，交流電圧を生成する．出力の 1 周期の内部で，デューティファクタを調整することで，出力電圧のパルス幅は正弦波状に変調されて，出力電流波形は擬似的な正弦波となる[8.1].

このような PWM を計算機シミュレーションにより模擬するためには，数学的に信号を加工する必要がある．本節では，8.2.1 節にて，PWM 波形を生成するための信号処理を行うための数学的手法に関して述べる．つぎに，8.2.2 節にて，ひずみ波形が従来法と提案手法で十分に一致することから，提案手法の妥当性を示す.

8. 2. 1　PWM 信号の生成

まず，基本となる三角波を生成する．周期が 2π の三角波の公式は次式で与えられる[8.2, 3].

$$f(t) = 1 - \frac{4}{T_0}t \left(0 \le t \le \frac{T_t}{2}\right) \tag{8.2}$$

ここで，$f(t)$は偶関数であり，周期 T_t の連続時間周期信号$(-\infty < t < \infty)$である．すなわち$f(t) = f(t + T_t)$ を満たす．ここで，(8.2)の Fourier 級数展開を考える．基本角周波数を $\Omega_t = 2\pi/T_t$，基本周波数は $F_t = 1/T_t$ とすると

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T_t} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T_t}\right) \tag{8.3a}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_0/2} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{T_0/2}\left(1 - \frac{4}{T_t}t\right)\mathrm{d}t = \frac{T_t}{2} - \frac{2}{T_t}\frac{T_t^2}{4} = 0 \tag{8.3b}$$

$$a_n = \frac{1}{2\times\frac{T_t}{2}}\int_0^{T_0/2} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\frac{T_t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{T_t}\int_0^{T_0/2}\left(1 - \frac{4}{T_t}t\right)\cos\frac{2n\pi t}{T_t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T_t}\left[\frac{T_t}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T_t}\right]_0^{T_0/2} - \frac{8}{T_t^2}\int_0^{T_0/2} t\cos\frac{2n\pi t}{T_t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{8}{T_t^2}\left(\left[t\frac{T_t}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T_t}\right]_0^{T_0/2} - \int_0^{T_0/2}\frac{T_0}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T_t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= -\frac{8}{n\pi T_t}\left[\frac{T_t}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi t}{T_t}\right]_0^{T_0/2}$$

$$= 4\left(\frac{1}{\pi n}\right)^2(1 - \cos n\pi) = 4\left(\frac{1}{\pi n}\right)^2(1 - (-1)^n) \tag{8.3c}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0 \tag{8.3d}$$

を得る．ここで，(8.3d)は$f(t)$が偶関数であることを利用している．したがって，

$$f(t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{T_t} \tag{8.4}$$

である．(8.4)に対して，信号のタイムシフト

$$\tilde{f}(t)=f\left(t-\frac{T_t}{4}\right) \tag{8.5}$$

を行うと原点が 0 から始まる三角波を得る．

さて，PWM を生成するためには比較対象となる正弦波が必要である．例えば基本周期が T_s の正弦波

$$g(t)=\sin\frac{2\pi}{T_s}t \tag{8.6}$$

を設定し，PWM をつぎの規則で生成する．有限要素法においては，第 7 章(7.24a)の右辺ベクトルにおいて，$v(t)$ を PMW(t) に置き換えればよい．

$$\mathrm{PMW}(t)=\begin{cases}V_0\left(g(t)\geq f\left(t-\frac{T_t}{4}\right)\right)\\ -V_0\left(g(t)<f\left(t-\frac{T_t}{4}\right)\right)\end{cases} \tag{8.7}$$

(8.7)は正弦波が三角波よりも大きい場合に正の振幅 V_0，そうではない場合には負の振幅$-V_0$ をとる [8.1, 4]．例えば，三角波の周期を $T_t=1/f_t$, $f_t=20$ kHz，正弦波の周期を $T_s=1/f_s$, $f_s=1$ kHz とすると，PWM の例として，例えば Fig.8.5 のような波形が得られる．この例では，表皮厚を考慮して十分にスイッチング周波数を低くしているが，実際の高周波スイッチング動作を行う半導体により PWM を生成する場合を想定した場合の解析においても同様の手順で(8.7)に従う電圧を印加すればよい．

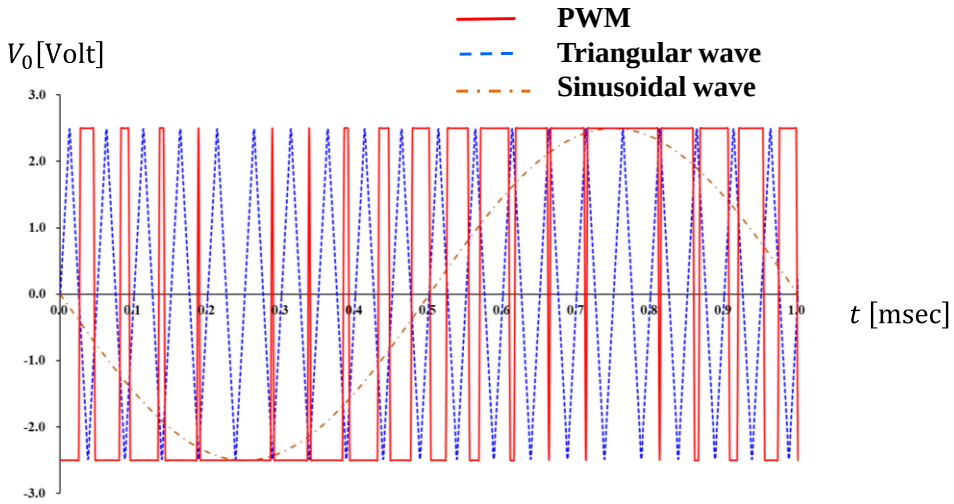


Fig.8.5 Example of a pulse width modulation (PWM).
When the instantaneous value of a sinusoidal voltage is larger than that of a carrier wave, that is, a triangular wave, the amplitude of the PWM is set to $+V_0$.

8. 2. 2　磁性被覆コイルに PWM を入力した際の電流波形

PWM 入力で，従来法と時間領域均質化有限要素法で電流波形が十分に一致することを確認する．解析モデルとして，Fig.8.1 のモデルを考える．このモデルにおいて，Fig.8.6 に示す PWM を入力した場合の，電流波形を Fig.8.6 に示す．Fig.8.6 から，PWM 入力の場合においても，十分に一致した波形が得られているとわかる．また，磁性体コアの非線形特性と合わせて，PWM のスイッチングに伴い，ひずみ波形が現れているとわかる．

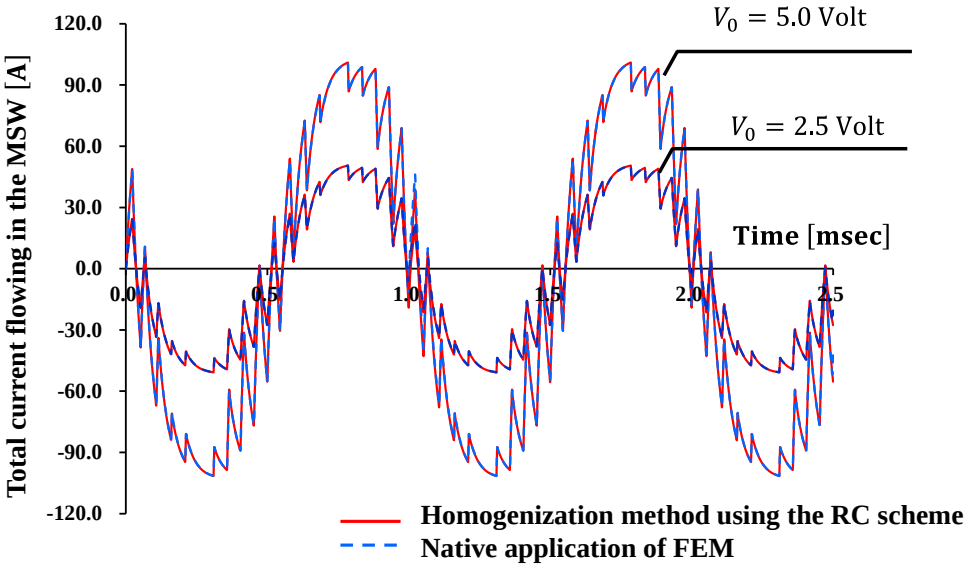


Fig.8.6 Current waveformes obtained by the proposed method and the native application of FEM.
We again see the good agreement between the two results obtained by these two approaches.

8. 3 円筒形磁性被覆線の有効性

本節では，磁性被覆線の有効性について議論する．磁性被覆線の形状は円筒形を仮定し，界磁巻線の損失の実効値の磁性被覆の透磁率への依存性を調べる．均質化されたコイル領域 Ω_h においては導電率は 0 であるが，近接効果に起因する渦電流損 W_{prox} は領域内の磁束の時間変化と考えると，次式で評価できる．

$$W_{prox} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_h} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega \tag{8.8}$$

一方で，表皮効果による W_{skin} に関しては，第 7 章の Fig.7.2 で示した Cauer 型等価回路の初段の抵抗と，初段に流れているループ電流から評価すればよい．すなわち

$$W_{skin} = R_1 i_1^2(t) \tag{8.9}$$

となる．したがって，均質化されたコイル領域の銅損 W_c は

$$W_c = W_{prox} + W_{skin} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_h} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega + R_1 i_1^2(t) \tag{8.10}$$

で計算できる．1 周期分の実効値は

$$W_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T W_c(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.11}$$

から評価できる．本節では，まず 8.3.1 節で損失評価の妥当性を示す．つぎに，8.3.2 節で磁性被覆コイルの銅損 W_c の μ_{2r}^{shield} への依存性を調べる．なお，本章では磁性被覆のそのものの透磁率を電磁鋼板の複素透磁率と明確に区別するため μ_{2r}^{shield} と記す. 8.3.3 節ではインダクタ，8.3.4 節では IPM モータの界磁巻線として磁性被覆線を用いることによって，近接効果に起因する銅損を抑制できることを数値解析の結果によって示す．

8. 3. 1　損失評価の妥当性の確認

まず，(8.10)により銅損が十分な精度で評価できることを確認する．解析モデルとして，Fig.8.1 に示す磁性被覆コイルの損失の瞬時値を，時間領域有限要素法と従来の準定常電磁界解析で評価した結果を比較する．入力波形を Fig.8.6 と同じ PWM として，瞬時値を計算した結果を Fig.8.7 に示す．Fig.8.7 から，両者には大きな差異が見られず，十分に一致している波形が得られることがわかる．

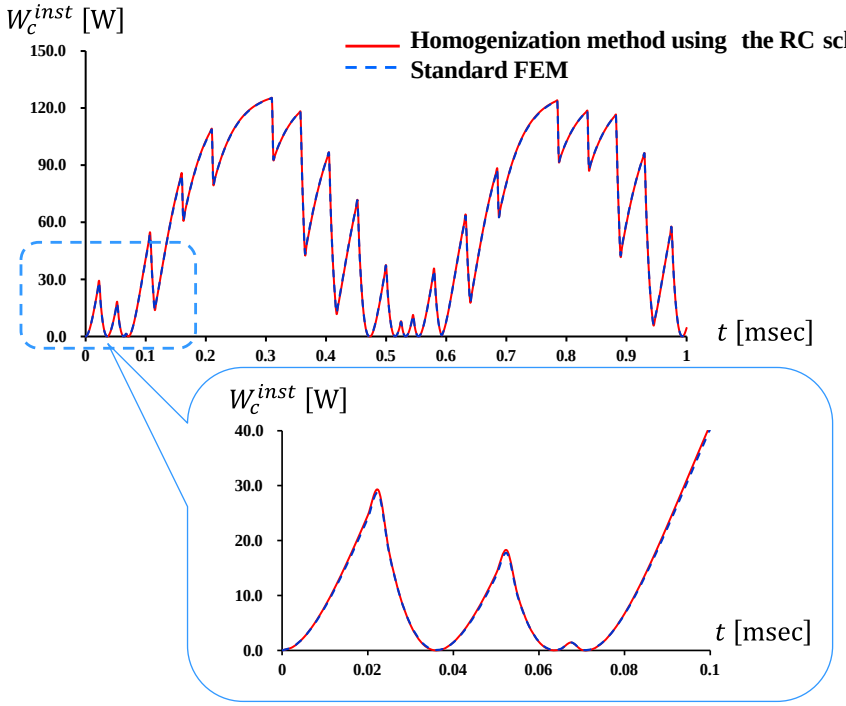


Fig.8.7 Instantaneous copper loss of the MSC.
From this figure, it is found that the instantaneous power of the MSC obtained by the proposed appraoch is in good agreement with that computed by the standard FEM. Thus, we can evaluate the eddy current loss in a homogenized area Ω_h due to the proximity effect by calculating derivative of the magnetic flux in Ω_h with respect to time t.

8. 3. 2　磁性被覆コイル単体の損失の実効値

上記の解析から，PWM 入力においても，十分な精度で波形が一致していることが確認できた．しかし，Fig.8.7 のデータは，従来の直接的な有限要素法が適用できるように，

磁性被覆の緒元を低くし，巻数も十分に小さくした場合の解析データであった．提案手法においては，このような制限はない．つぎに，Fig.8.8 に示すような 100 回巻の磁性被覆コイルを考え，このコイルに Fig.8.8 に示すような PWM を入力した場合の，磁性被覆コイルの損失の実効値の μ_{2r}^{shield} への依存性を調べる．実効値は(8.11)で評価する．解析結果を Fig.8.9 に示す．Fig.8.9 から，$\mu_{2r}^{shield} \geq 50$ では損失が一定値に収束しているように思われる．この解析結果から，磁性被覆の効果により，近接効果に起因する渦電流損失が十分に抑制でき，磁性被覆の透磁率をある一定値まで上げると十分に抑制が可能であるとわかる．

Table 8.2 Specification of the MSC as shown in Fig. 8.2

a [mm]	0.15	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.16	μ_{2r}^{shield}	Variable	σ_2 [S/m]	1.03×10^7

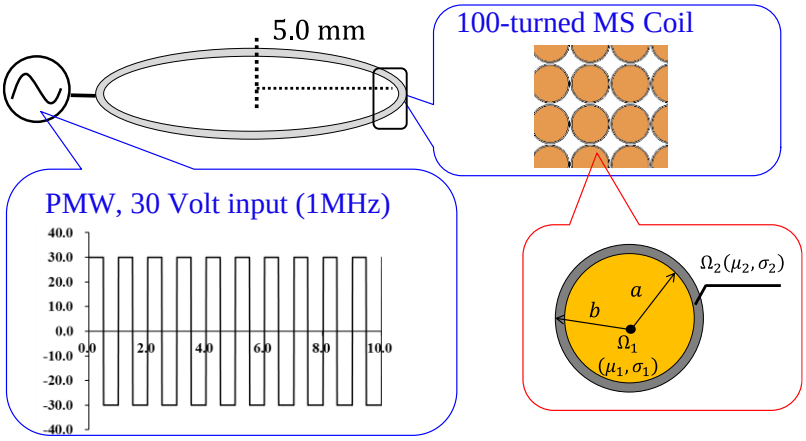


Fig.8.8 100-turned MSC to the terminals of which a PWM voltage is applied.
It is remarkable that actual parameters can be assumed because the MSC region is a homogenizous material using the macroscoipic effective magnetic reluctivity.

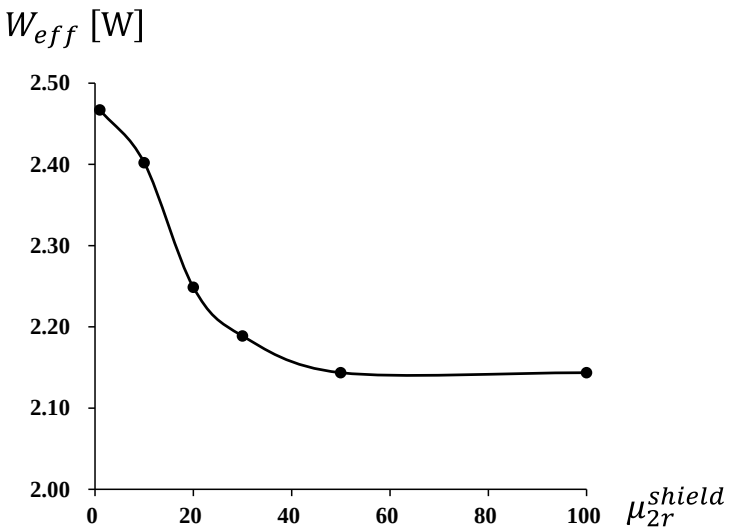


Fig.8.9 Dependence of the copper loss in the MSC on the permeability of the shield.
From this figure, we can conclude that the eddy current loss due to the proximity effect can be reduced due to the magnetic-condutive shield. Moreover, when μ_{2r}^{shield} becomes sufficiently high, the effective value of the proximiy effect loss W_{eff} of the MSC approaches to a cetain value.

8. 3. 3 インダクタの損失の実効値

つぎに，Fig.8.10 に示すようなインダクタの損失の実効値の評価を行う．ここでは，形状は軸対称性が仮定できるとする．磁性被覆線の緒元は Table 8.2 の通りとする．ここでは，磁性体コアは Fig.8.10 のように，非線形特性を有しているものとする．インダクタの損失の実効値の，磁性被覆の透磁率への依存性を調べたグラフを Fig.8.11 に示す．Fig.8.11 において，$\mu_{2r}^{shield} = 1$ の場合は，磁性被覆は通常の絶縁皮膜であるため，巻線は銅巻線と見なせる．Fig.8.11 から，磁性被覆の透磁率が高いほど銅損が低減できることがわかる．よって磁性被覆コイルを実際の電気機器に使用することは，近接効果による渦電流損を抑制できる観点から，有効であると判断できる．特に $\mu_{2r}^{shield} = 100$ の場合は，$\mu_{2r}^{shield} = 1$ の場合と比べて，銅損が約 30 %低減できるとわかる．

また， $t = 1$ msec における磁束線の分布を Fig.8.12 に示す．Fig.8.12 から，界磁巻線が周囲に発生する磁界も妥当であるとわかる．

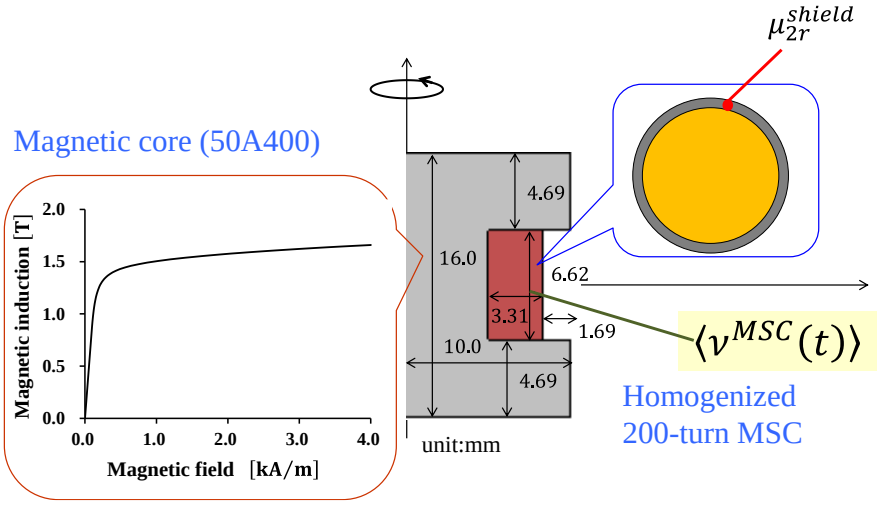


Fig.8.10 Cross-section of an inductor equipped with a cylindrical MSC.
In this model, the magnetic core has the non-linear property due to magnetic saturation.

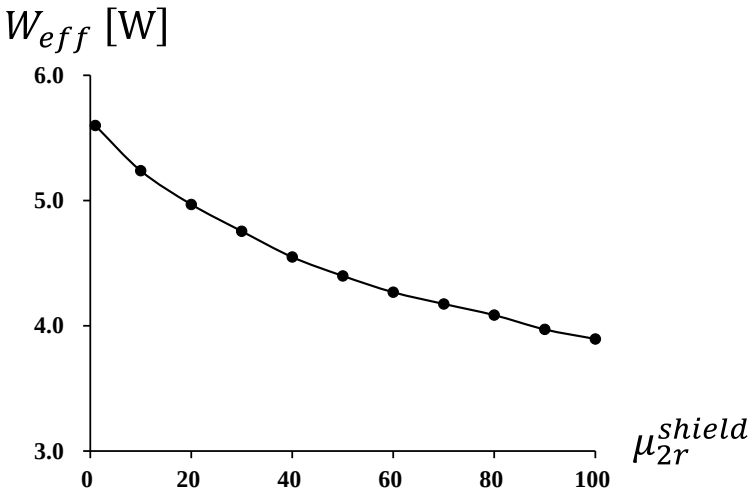


Fig.8.11 Dependence of the copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of the magnetic shield μ_{2r}^{shield}.
From this figure, it can be concluded that MSCs are effective for reduction of the copper loss in inductors due to the proximity effect.

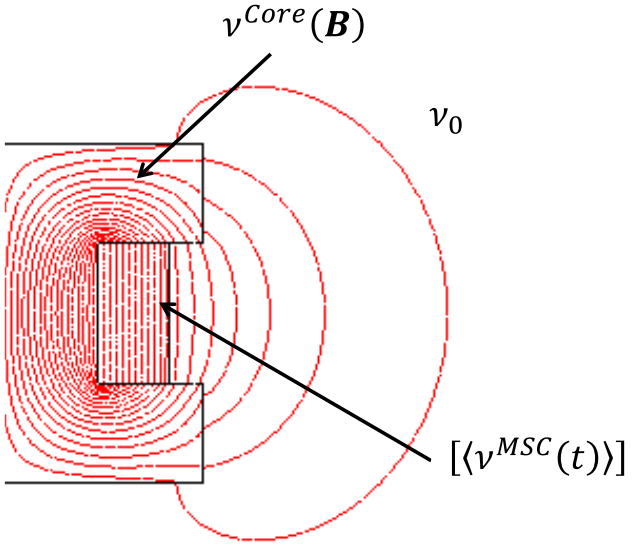


Fig.8.12 Magnetic flux lines at 1msec ($\mu_{2r}^{shield} = 100$).

8. 3. 4　IPM モータの損失の実効値

つぎに，Fig.8.13 に示すような IPM (Interior Permanent Magnet : IPM)モータの銅損の実効値の評価を行う．界磁巻線領域は Fig.8.13 に示されているように，72 回巻の磁性被覆コイルを用いている．実際の有限要素解析においては，1 次四角形要素を用いて，1/4 領域が回転しているモデルを扱う．1 次四角形要素を用いた有限要素行列については，第 2 章 2.7.3.2 節に述べた通りとする．また，回転子の回転に伴う非適合境界の設定や周期境界条件の設定については，第 2 章 2.6.3, 2.6.4 節に記載している．さらに，永久磁石が存在する系の支配方程式については，第 2 章 2.2.1 節の(2.5)，磁石領域の有限要素行列の要素については 2.7.3.4 節の(2.148)に示した通りである．

解析緒元を Table 8.3 のように設定し，電磁鋼板の磁気特性は Fig.8.10 に示すような 50A400 に従うものとする．また，Y 結線された三相交流電源の入力電流は $i_0(t) = 4\sin\omega t$ であるとする．この三相交流により，回転磁界が発生し，回転子が回転する．本問題においては，コイルの鎖交磁束は，素線が生じる磁界と永久磁石が発生する磁界の 2 種からなる．本来は，回転子や固定子中の電磁鋼板の電磁誘導に伴う反作用磁界も含まれるが，これらの効果は本問題では無視する．したがって，コイル領域が均質化されている状況では，静磁界解析を行うことになる．本論文では IPM モータを 1 次四角形要素を用いて離散化しているので，解くべき有限要素方程式は第 2 章 2.7.3.4 節で示した(2.161)であり，永久磁石が発生する磁界は(2.159)で示されている．また，回転子が回転しているので，第 2 章 2.6 節で述べたように，非適合境界条件・周期境界条件を適宜課すことが必要である．

解析諸元を Table 8.3 のように設定し，$\mu_{2r}^{shield} = 50$ の場合の $t = 20.1$ μsec における磁束密度分布と界磁巻線の近接効果に伴う損失を評価したグラフ，すなわち(8.8)の実効値を評価した結果を Fig.8.14 に示す．Fig.8.14 から本モデルについては，$\mu_{2r}^{shield} = 50$ で約 3.5 %程度近接効果に伴う損失が抑制できているとわかる．本モデルにおいては，Fig.8.13 のような電気学会 D モデルを参考モデルとしたが，より現実的には，本法を用いて固定子と回転子の最適化を行うことが望まれる．

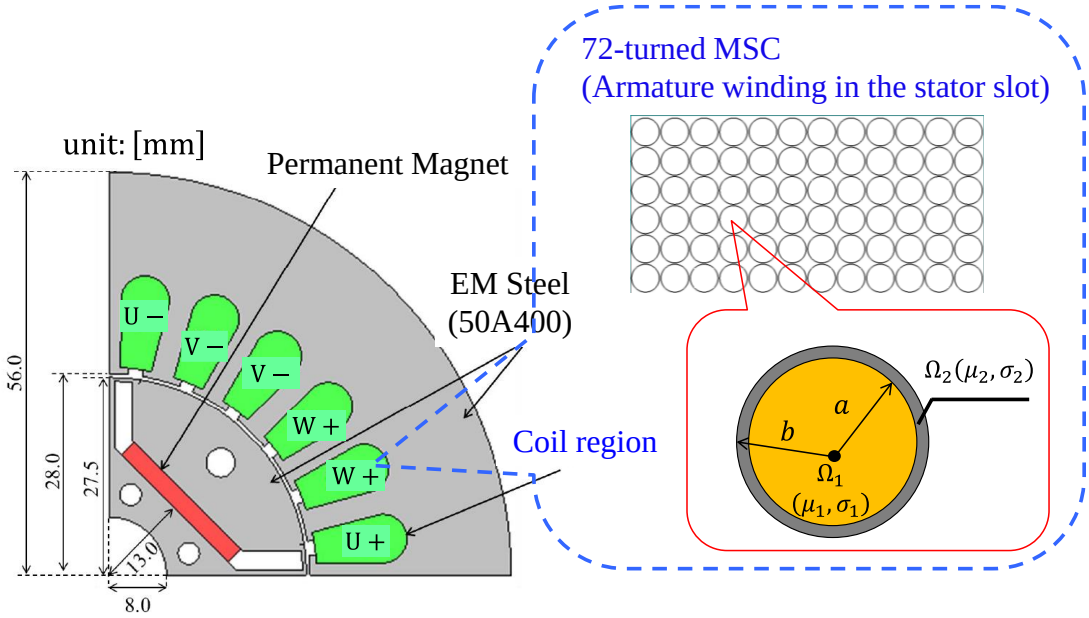


Fig.8.13 Cross-section of the IPM motor which is equipped with the MSC in stator slots.
Again, the MSC region can be treated as the homogenious material using the macroscopic effective magenetic reluctivity.

Table 8.3 Specification of the MSC using for armature windings of the IPM motor as shown in Fig. 8.13

a [mm]	0.50	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.52	μ_{2r}^{shield}	Variable	σ_2 [S/m]	1.03×10^7

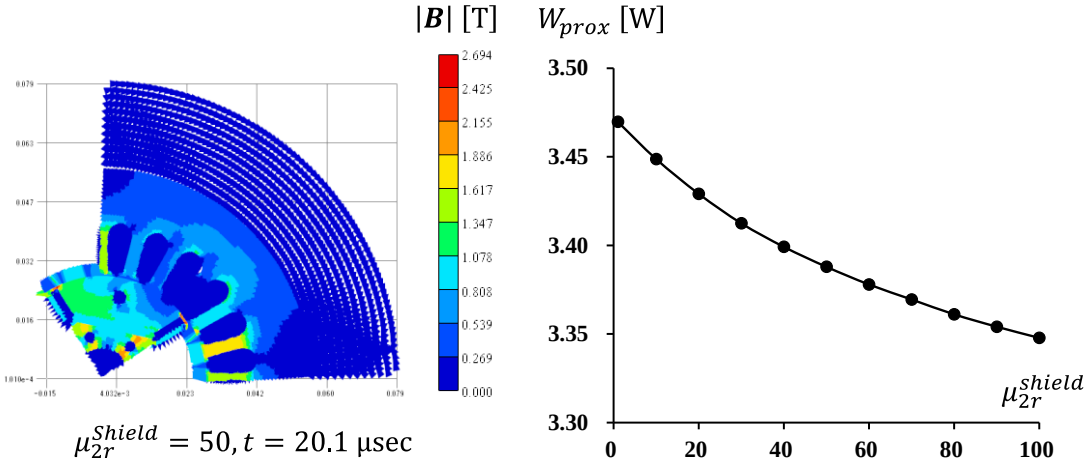


Fig.8.14 Numerical results: distribution of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ $\left(\mu_{2r}^{shield} = 50, t = 20.1\ \mu\text{sec}\right)$ and dependence of the copper loss due to the proximity effect W_{prox} on the permeability of the shielding layer μ_{2r}^{Shield} of the MSC.
It is found that the copper loss due to the proximity effect can be reduced by introducing MSCs; for example, when $\mu_{2r}^{shield} = 50$, about 3.5 % of this copper loss is reduced. Note here that there exists a certain limitation of reduction and optimal structure of a MSC. This reduction would be made larger by optimizing material constants and structures of MSCs and magnetic cores of electric devices.

8. 4 磁性被覆平角線の有効性

前節では，素線の形状は円筒形を仮定したが，本節では平角線の形状の磁性被覆線の有効性について議論する．銅損の評価については 8.3 節で示した通りであるが，今回は磁気特性が異方性である点が前節と異なる．また，本節においては，第 7 章のモデルとは異なり，長軸方向が $\mathbf{e}_y$，短軸方向が $\mathbf{e}_x$ であることに注意する．

8. 4. 1　PWM を入力した際の電流・銅損評価の妥当性の確認

まず，(8.10)により磁性平角線の銅損が十分な精度で評価できることを確認する．解析モデルとして，Fig.8.15 に示す磁性被覆コイルの損失の瞬時値を，時間領域有限要素法と従来の準定常電磁界解析で評価した結果を比較する．入力波形は，Fig.8.5 と同じ PWM を入力した場合の，素線に流れる電流とコイルの損失の瞬時値を評価した結果を Fig.8.16 と Fig.8.17 にそれぞれ示す．なお，本解析において，磁性平角線のテンソル型マクロ実効磁気抵抗は磁性楕円線で近似して評価し，直流抵抗については平角線形状の場合で計算している．すなわち，$R_0^{elli} = l/(\pi\alpha\beta)$ ではなく $R_0^{rect} = l/(4\alpha\beta)$ である．これらのデータから，両者には大きな差異が見られず，十分な精度で時間領域解析が行えているとわかる．

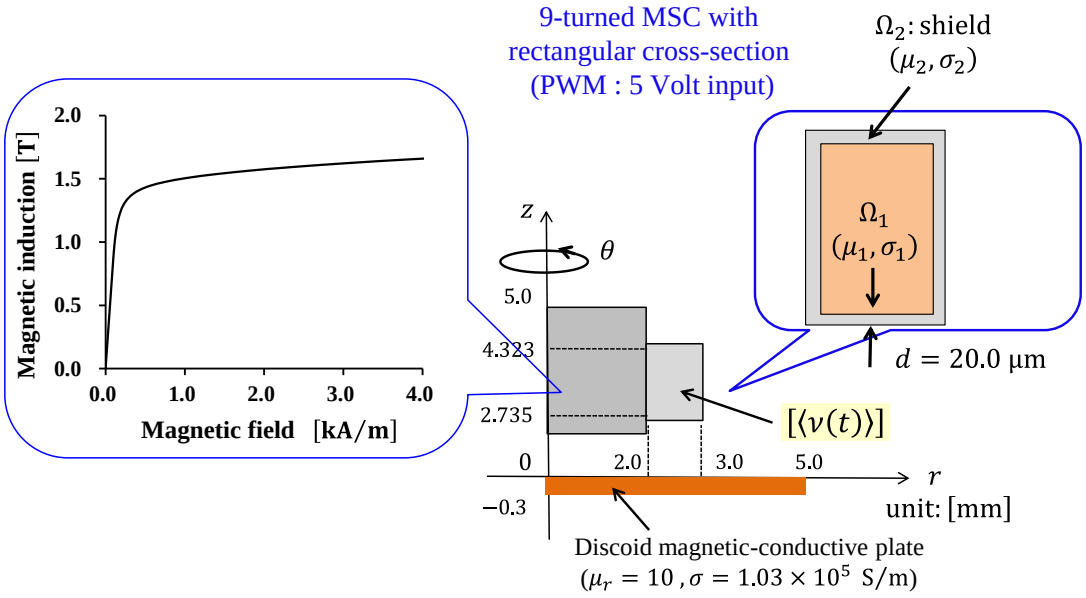


Fig.8.15 9-turn MSC with rectangular cross-section above a discoid conductor.
For confirming the validity of the proposed homogenization scheme using the tensor magnetic reluctivity defined for the MSW with elliptic cross-section, we evaluate the instance values of the current flowing in the wire conductor and the copper loss of the MSC by the proposed and the conventional FEM. Note here that when we evaluate the skin effect loss, the DC resistance not of elliptic cross-section but of rectangular cross-section is employed.

Table 8.4 Specification of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15

α [mm]	0.25	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7	d [μm]	20
β [mm]	0.10	μ_{2r}^{shield}	10	σ_2 [S/m]	1.03×10^4	f [kHz]	10

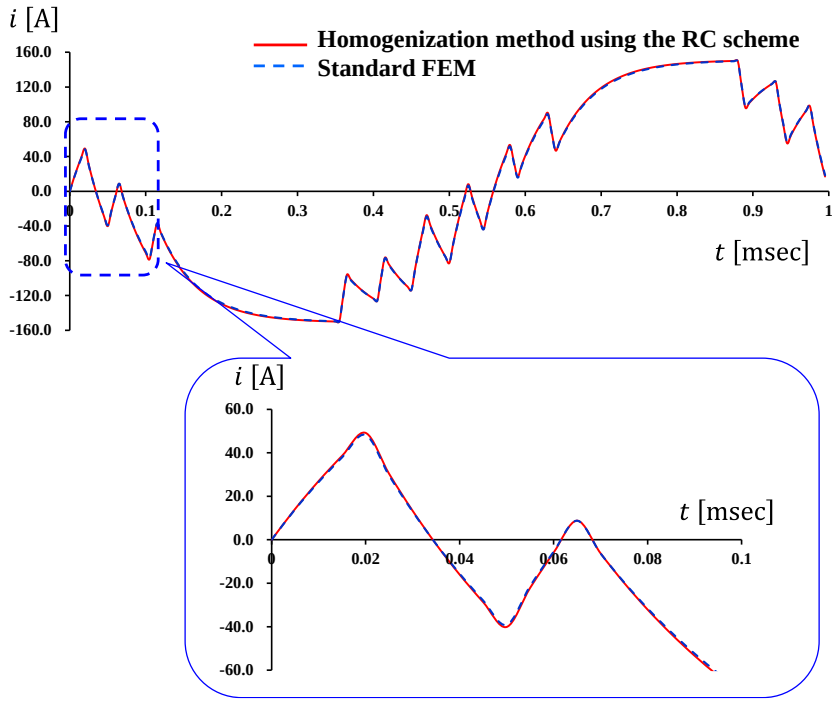


Fig.8.16 Instantaneous current flowing in the MSW with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15.
We find that the proposed approach provides almost the same result calculated by the standard FEM.

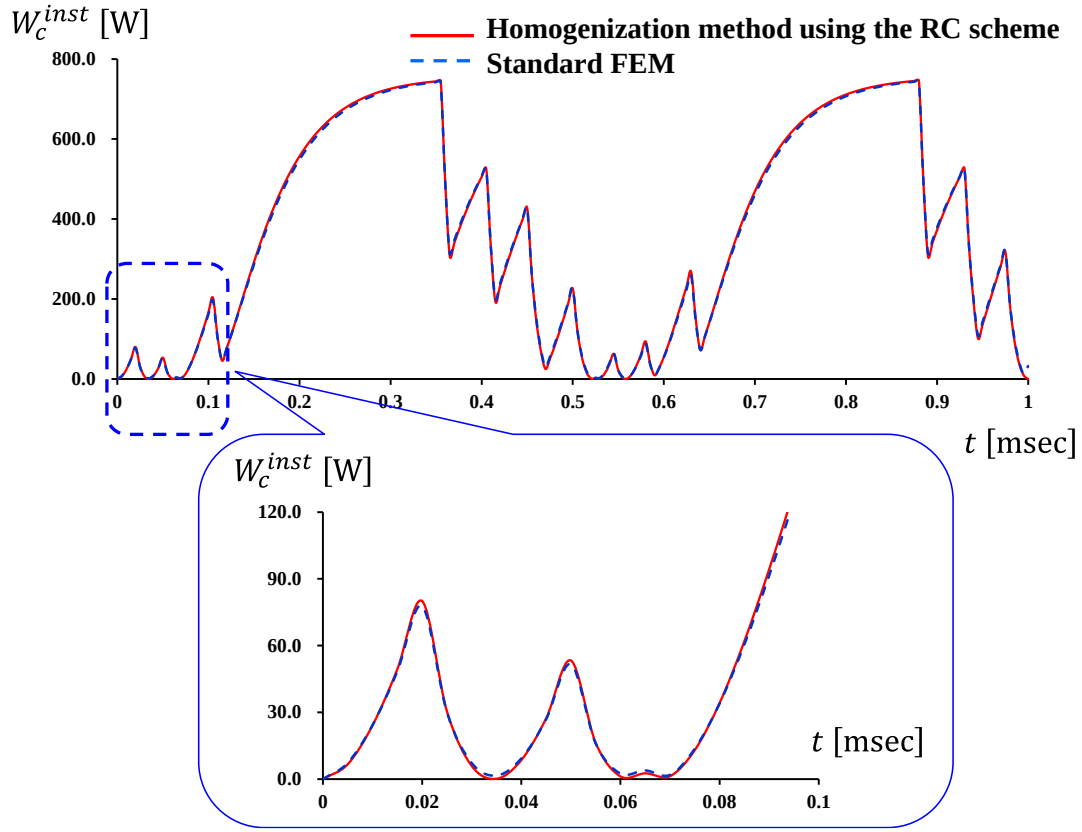


Fig.8.17 Instantaneous copper losses of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15.
We again see that the copper loss obtained by the proposed method agrees well with that computed by the standard FEM.

8. 4. 2　磁性平角線を用いたインダクタの損失評価

つぎに，Fig.8.18 に示すようなインダクタの損失の実効値の評価を行う．ここでは，形状は軸対称性が仮定できるとする．ただし，Fig.8.10 とは異なり，平角線を用いることとし，磁性被覆線の緒元は Table 8.5 の通りとする．ここでは，磁性体コアは Fig.8.18 のように，非線形特性を有しているものとする．また，ここでは充填率が 0.96 にまで改善されている．この充填性の高さは，Fig.8.10 のように円筒形細線のモデルでは実現できなかったが，平角線を用いることにより可能となった．

この条件下で，インダクタの損失の実効値 W_{eff} の磁性被覆の透磁率 μ_{2r}^{shield} への依存性を評価した結果を Fig.8.19 に示す．Fig.8.19 において，$\mu_{2r}^{shield}=1$ の場合は，磁性被覆は通常の絶縁皮膜とほぼ同じであるため，巻線は銅線と見なせる．Fig.8.19 から，磁性被覆の透磁率が高いほど銅損が低減できることがわかる．よって磁性被覆コイルを実際の電気機器に使用することは有効であると判断できる．特に，$\mu_{2r}^{shield}=100$ の場合は，$\mu_{2r}^{shield}=1$ の場合と比べて，銅損が約 24 %低減できるとわかる．

しかしながら，円筒形細線の場合のグラフ Fig.8.14 と比較すると Fig.8.19 は滑らかではない．この現象については現状未解決である．考えられる要因としては，平角線の解析には Mathieu 関数の Bessel 関数展開を用いているが，Mathieu 関数は元々数値不安定性の強い関数であるため，円筒形細線の場合と比較して，特に表皮効果について，素線の大きさによっては，数値不安定性に伴う誤差が顕著となってしまうことが挙げられる．

一方で，$\mu_{2r}^{shield}=100$ の場合の，$t=1$ msec における磁束線の分布は Fig.8.20 に示すようになった．Fig.8.20 から，平角線形状の磁性被覆線において，時間領域均質化有限要素法を適用しても，界磁巻線が周囲に発生する磁界については妥当であるとわかる．

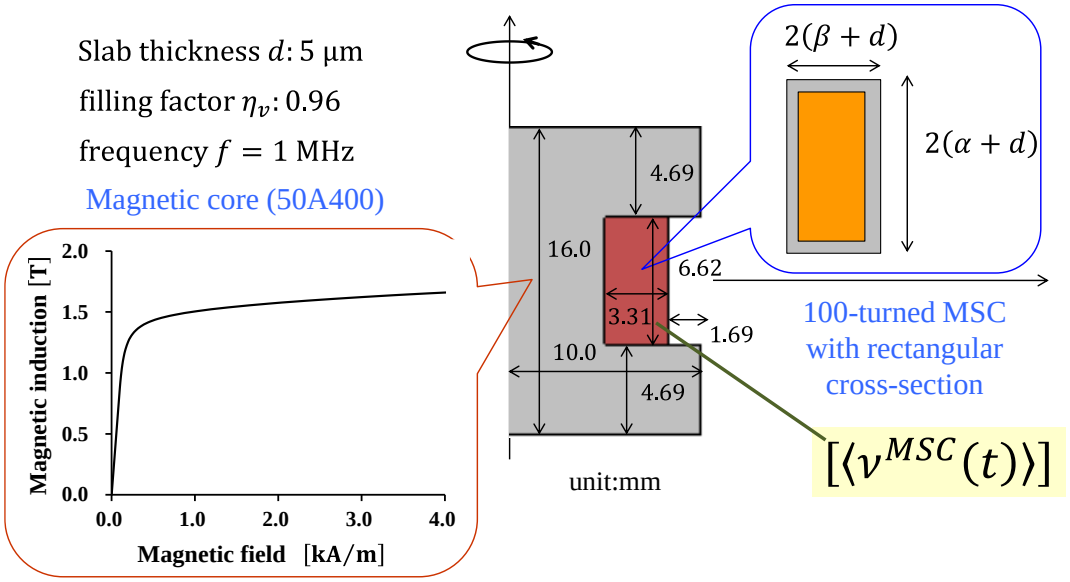


Fig.8.18 Cross-section of an inductor equipped with a rectangular MSC.
It is remarkable that the filling factor can be improved by introducing rectangular wire coils.

Table 8.5 Specification of the MSC with rectangular cross-section using for the inductor as shown in Fig.8.18

α [mm]	0.321	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7	d [μm]	5
β [mm]	0.156	μ_{2r}^{shield}	variable	σ_2 [S/m]	1.03×10^7	f [MHz]	1

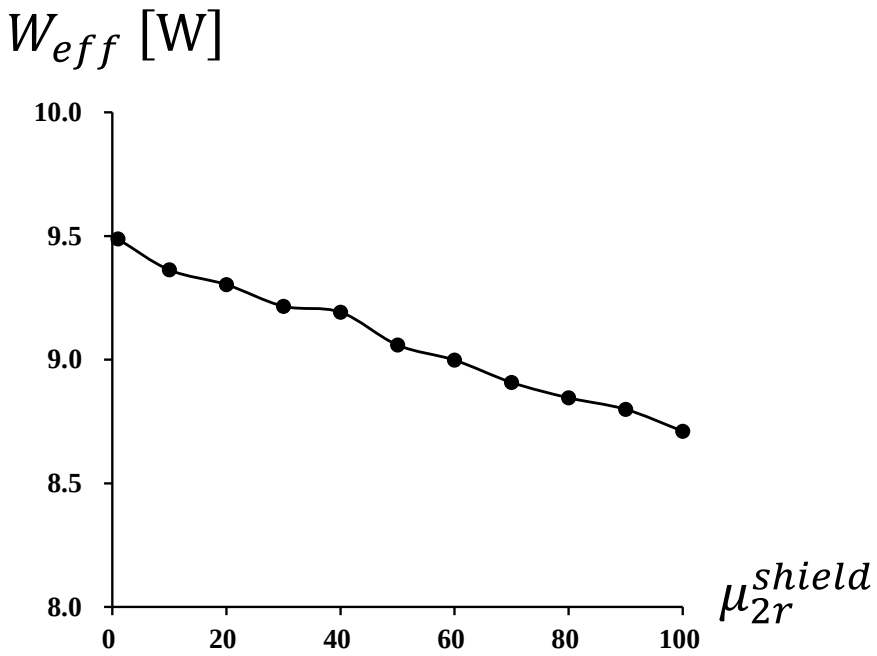


Fig.8.19 Dependence of effective value of copper loss on the permeability of the shield.
It is found that the effective value of the copper loss can be reduced by introduction of MSCs with improving the filling factor. Moreover, the loss monotonously decreases as the permeability of the shield becomes higher. This gragh does not seem to be smooth. One reason would lies in numerical unstability of the Mathieu functions. There are certain relationship between the eigenvalues, aruguments, and degrees of the Mathieu functions as shown in (3.195) in section 3.9.1. In a lieterature, e.g. [8.6], stability of the Mathieu functions is discussed.

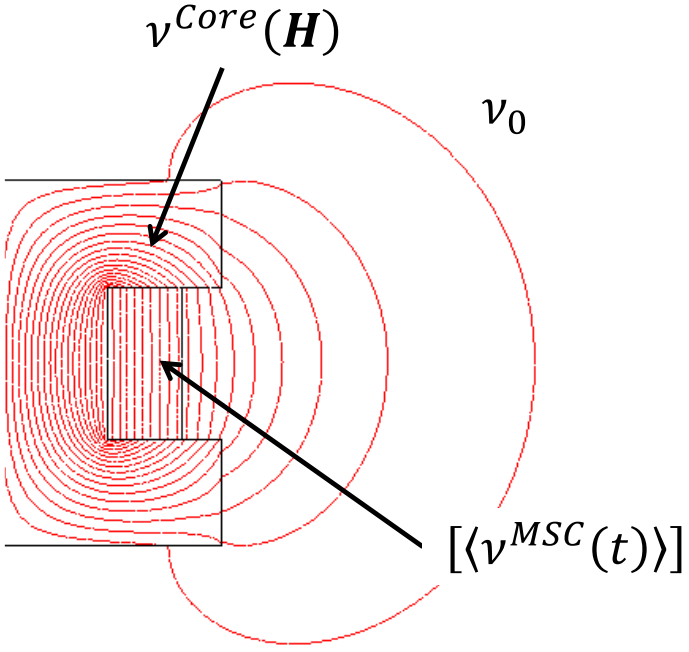


Fig.8.20 Magnetic flux lines at 1msec ($\mu_{2r}^{shield} = 100$).

8.5 第 8 章の総括

本章では，磁性被覆線の有効性を数値解析により明らかにするため，インダクタに PWM 波形を入力する問題や，IPM モータの損失の低減に関して考察した．8.1 節では，非線形性を有する磁性体コアが系に存在していても，マクロ実効磁気抵抗を用いた時間領域均質化有限要素法が妥当であることを示した．また，磁性体コア内部の磁気非線形特性に伴うひずんだ磁束密度をも十分な精度で求められるとわかった．つぎに，8.2 節の数値解析結果から，磁性被覆線の形状が円筒形，平角線形状いずれにおいても，PWM を入力した場合に，損失は正確に評価できているとわかった．さらに，8.3, 4 節においては，種々の電気機器に磁性被覆コイルを用いた場合，磁性被覆の透磁率を上げることにより，近接効果に伴う渦電流を抑制できるため，銅損の実効値を低減できることが示せた．ただし，平角線の解析については，Mathieu 関数の数値不安定性のため，巻数が多い場合には数値誤差が発生してしまう場合もある．Mathieu 関数の数値不安定性については，例えば文献[8.6, 7]等を参考とするが，1 つには第 3 章の(3.195)で示した Mathieu 関数の級数展開の次数にもよると考えられる．しかしながら，概ねの傾向は一致しているため，近似計算としては十分であると考えられる．

本章において，磁性被覆コイルを導入することによる電気機器の銅損の抑制を示すことができた．しかしながら，漏洩磁界を防止し，インダクタンスを改善するための電磁シールドを用いた場合の解析についてはまだ行われていない．本章までの解析においては，電磁シールドの離散化には十分に微細な有限要素が必要である．そこで，電磁シールドの取り扱いを容易にするために，第 9 章においては，電磁シールドの微細な離散化を防ぐためのインピーダンス境界条件について述べる．

第 8 章 参考文献

[8.1] 堀孝正,「パワーエレクトロニクス」，オーム社，2010.

[8.2] 阿部寛治,「図解による微分方程式」，培風館，1991.

[8.3] 小出昭一郎,「物理現象のフーリエ解析」，東京大学出版会，1981.

[8.4] 高橋則雄,「磁気工学の有限要素法」，朝倉書店，2013.

[8.5] 青山真大，他,「京コンピュータを用いた大規模電磁界解析―磁石形同期モータの導体渦電流損に関する検討―」，電気学会研究会資料，SA-18-23, RM-18-23, 2018.

[8.6] P. Moon, D. E. Spencer, "Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions", section 7.11, Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed., 1988.

[8.7] N. W. McLachlan, “Theory and Application of Mathieu Functions”, DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK, 1954.

第 9 章　インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング

本章では，渦電流を考慮した電磁シールドの内部の直接的な離散化を回避するため，第 1 章で示したインピーダンス境界条件(Impedance Boundary Conditions : IBCs)を導入する．板厚 d，透磁率 μ，導電率 σ の電磁シールドに交番磁界が鎖交するとき，表皮効果により電磁界は表皮厚 $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ 内に局在する．電磁シールドの曲率を無視できるとき，内部の電磁界を解析的に求めることができ，その表面上の電磁界の関係式であるインピーダンス境界条件を境界条件として導入する[9.1]．インピーダンス境界条件の概念図を Fig.9.1 に示す．Fig.9.1 において，index "1","2" は磁性体の表面 $\Gamma_{1,2}$ を表す．インピーダンス境界条件により，形状モデリング上，電磁シールドは厚さ 0 の面として扱うことができる．ただし，$\Gamma_{1,2}$ が同一視されるため，2 次元有限要素解析において，1 次要素を用いる場合，2 重節点を導入する必要がある．

まず，9.1 節においては，周波数領域におけるインピーダンス境界条件を，磁気ベクトルポテンシャルと境界上の磁束密度の法線成分に関する伝達関数の形で示す. つぎに，9.2 節においては，有限要素法に導入する際の定式化を与え，9.3 節では，数値解析結果が，従来の有限要素解析と良好に一致することを示す．9.4, 5 節では，時間領域解析を行う方法を，第 7 章の方法をベースとして議論する．9.4 節では，数値不安定性がある場合の事例，9.5 節ではこの数値不安定性を取り除き，時間領域での境界条件を得るための数学的工夫を示す．最後に，9.6 節で本章において得られた知見についてまとめる．

なお，本章で使用する記号を Table 9.1 にまとめた．

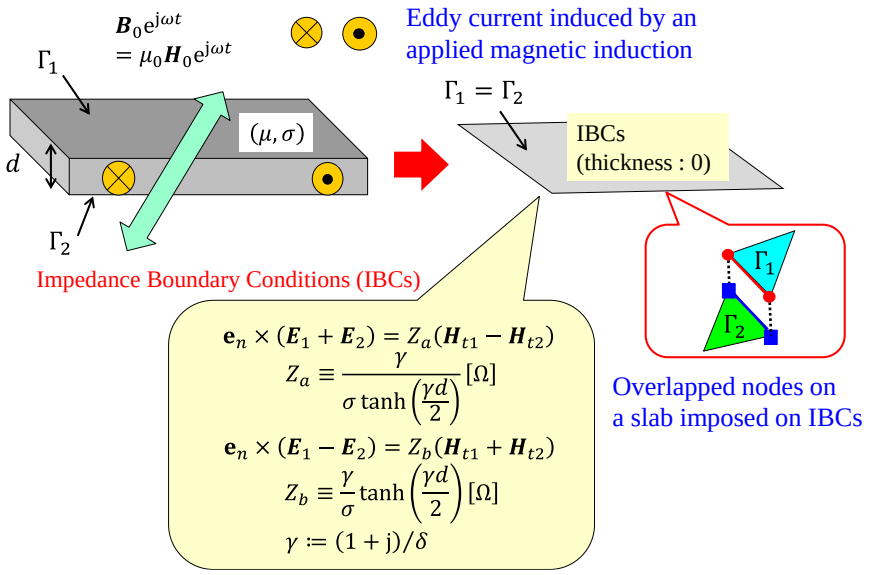


Fig.9.1 Illustration of impedance boundary conditions (IBCs).
By introducing IBCs, electromagnetic fields inside a slab can be treated as a sort of boundary without discretizing it into sufficiently fine elements. When we introduce IBCs on a magnetic-conductive thin slab, the thickness of the slab is set zero because the inner electromagnetic property considering the eddy current has already been reflected on IBCs.

Table 9.1 Nomenclature of this chapter: impedance boundary conditions for a magnetic-conductive thin slab as shown in Fig.9.1

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
Ω_{slab}	slab region	Ω_{air}	air region
Γ_1	upper surface of a slab	Γ_2	lower surface of a slab
d [m]	thickness of a slab	σ [S/m]	conductivity of a slab
μ [H/m]	permeability of a slab	μ_0 [H/m]	permeability of vacuum
$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field	$\boldsymbol{H}$ [A/m]	magnetic field
$\boldsymbol{A}$ [Wb/m]	magnetic vector potential	$\boldsymbol{B}$ [T]	magnetic induction
φ [V]	electric scalar potential	$\partial\boldsymbol{A}/\partial n$ [T]	magnetic induction perpendicular to the surface of a slab
f [Hz]	frequency	ω [rad/s]	angular frequency
$\mathbf{e}_\xi$	base of the ξ-component	j	imaginary unit
$\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ [m]	skin depth of a slab	$\gamma = (1+\mathrm{j})/\delta$ $= \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma}$ [1/m]	wave number of a slab
Z_a [Ω] $= \gamma/[\sigma\tanh(\gamma d/2)]$	boundary impedance	Z_b [Ω] $= (\gamma/\sigma)\tanh(\gamma d/2)$	boundary impedance
α [1/m] $= \omega\mu_0/(\mathrm{j}Z_a)$	coefficients of transfer matrix	β [m] $= \mathrm{j}Z_b/(\omega\mu_0)$	coefficients of transfer matrix

9. 1　周波数領域におけるインピーダンス境界条件の定式化

9. 1. 1　電磁シールドの境界インピーダンスと境界条件

解析モデルとして, Fig.9.2 に示すような無限に広い電磁シールドが交番磁界中に置かれている状況を考える. 本モデルでは, 電磁シールドの形状は無限平板を仮定しており, 曲率の効果は十分に無視できるものとする．また，磁性は線形性を仮定できるものとする．冒頭にも述べたように，表皮効果により電磁界は Fig.9.2 の黄色の領域で示されている表皮厚 $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$ 内に局在する．本節では，表皮厚に局在化した電磁界の関係式を求める．なお, 本問題の場合は $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mu_0\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ が入力であるとし，この伝達関数が局在化した電磁界を反映したインピーダンス境界条件で表されていることになる．例として，第 3 章 3.1 節で示したような磁性被覆線に外部から交番磁界が鎖交した場合の磁束線の実部を Fig.9.2 の右側に再掲載する．磁性被覆の透磁率は高く，また磁性被覆内に渦電流が流れているため，磁力線は磁性被覆表面で大きく曲がり，境界に対して垂直に近くなる．したがって，磁性体と外部の境界上と磁性被覆と導線の境界上では磁束密度の接線成分は大きく異なる.

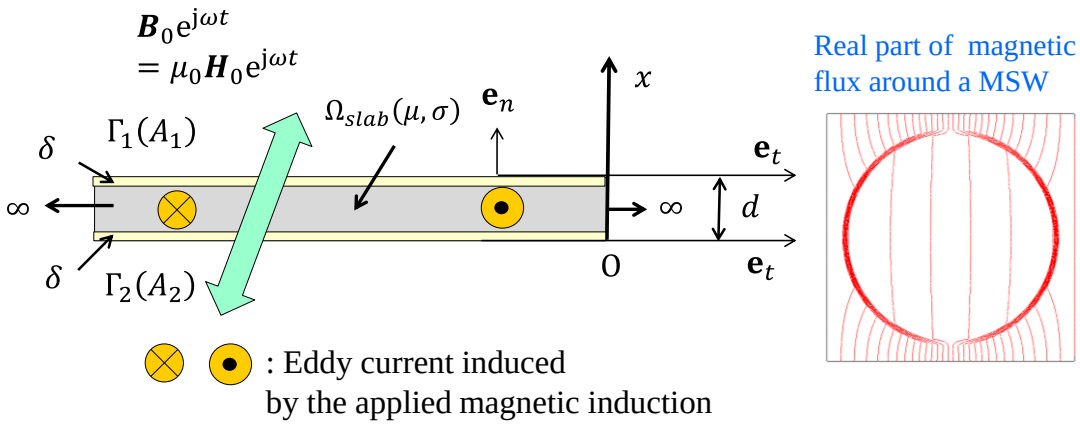


Fig.9.2 Cross section of a thin and infinity wide magnetic conductive slab with thickness d, permeability μ and conductivity σ, immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this model, the electromagnetic property of this thin slab is assumed to be linear. Moreover, at least locally, the effect of the curvature of this thin slab can be expected to be neglected. For example, magnetic fluxes around the MSW immersed in a time-harmonic magnetic induction are depicted on the right side. From this figure, we find that these flux tend to be almost perpendicular to the surface of the magnetic-conductive layer.

本問題における支配方程式は，周波数領域の準定常 Maxwell 電磁方程式

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.1a}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{9.1b}$$

である．(9.1)からつぎの Helmholtz 方程式が導ける．

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{H} + \gamma \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{9.2a}$$

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{E} + \gamma \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{9.2b}$$

ここで，$\gamma := \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1 + j)/\delta$ とした．いま，垂直方向の電磁界の変化は渦電流により，十分に大きいと仮定できるので，(9.2)から x の偏微分に関する項に関して，

$$\frac{d^2}{dx^2} \boldsymbol{H} - \gamma^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{9.3a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \boldsymbol{E} - \gamma^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{9.3b}$$

を得る．(9.3)は発散方程式なので，その一般解は

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a} e^{\gamma x} + \boldsymbol{b} e^{-\gamma x} \tag{9.4a}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{c} e^{\gamma x} + \boldsymbol{d} e^{-\gamma x} \tag{9.4b}$$

である．(9.4)において，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は未知ベクトルである．さて，(9.4)において，電界と磁界の接線方向成分が連続することが要請されるので，磁界に関して

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{9.5a}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{a}\,\mathrm{e}^{\gamma d} + \boldsymbol{b}\,\mathrm{e}^{-\gamma d} \tag{9.5b}$$

が成立し，さらに電界に関して

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \tag{9.6a}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{c}\,\mathrm{e}^{\gamma d} + \boldsymbol{d}\mathrm{e}^{-\gamma d} \tag{9.6b}$$

が成立する．(9.5), (9.6)を解くと

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-\gamma d} & 1\\ \mathrm{e}^{\gamma d} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix} \tag{9.7a}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d}\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-\gamma d} & 1\\ \mathrm{e}^{\gamma d} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{E}_2\end{bmatrix} \tag{9.7b}$$

を得る．したがって，電磁シールド内の電界，磁界はつぎのように表記できる．

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\left(-\mathrm{e}^{-\gamma d}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\right)\mathrm{e}^{\gamma x} + \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\left(\mathrm{e}^{\gamma d}\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\right)\mathrm{e}^{-\gamma x} \tag{9.8a}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\left(-\mathrm{e}^{-\gamma d}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2\right)\mathrm{e}^{\gamma x} + \frac{1}{2\sinh(\gamma d)}\left(\mathrm{e}^{\gamma d}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2\right)\mathrm{e}^{-\gamma x} \tag{9.8b}$$

つぎに，(9.8)を電磁シールドの厚さ方向，つまり $\boldsymbol{x}$ 方向に積分することによって，

$$\int_0^d \boldsymbol{H}_t \mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma}\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2) \tag{9.9a}$$

$$\int_0^d \boldsymbol{E}_t \mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma}\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) \tag{9.9b}$$

を得る．ここで，電界，磁界の接線成分 $\boldsymbol{E}_t, \boldsymbol{H}_t$ は電磁界を平行な成分に分解する，つまり $\boldsymbol{E}_t = \mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E} \times \mathbf{e}_n), \boldsymbol{H}_t = \mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{H} \times \mathbf{e}_n)$ として得られる．

さて一方で，Fig.9.2 の $\boldsymbol{x}$ 軸方向に(9.1)を積分すると

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \int_0^d \sigma \boldsymbol{E}_t \mathrm{d}x \tag{9.10a}$$

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = -\mathrm{j}\omega \int_0^d \mu \boldsymbol{H}_t \mathrm{d}x \tag{9.10b}$$

となる．(9.10)は電磁シールドが十分に薄いという近似の下，外部磁界に対して垂直に流れている渦電流によって，電界と磁界の法線成分が表面 $\Gamma_{1,2}$ において不連続な値となることに対応している．

いま，(9.9)と(9.10)において，積分項が一致するので，

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = Z_a(\boldsymbol{H}_{t1} - \boldsymbol{H}_{t2}) \tag{9.11a}$$

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = Z_b(\boldsymbol{H}_{t1} + \boldsymbol{H}_{t2}) \tag{9.11b}$$

を得る．ここで，$Z_a \equiv \gamma/[\sigma \tanh(\gamma d/2)]$, $Z_b \equiv (\gamma/\sigma)\tanh(\gamma d/2)$ と定義する．(9.11)は，電磁シールド表面の表皮厚内に局在化する電界と磁界の接線成分が Γ_1, Γ_2 で連続するための境界条件を表す．さらに次元解析の結果，$[Z_a] = [Z_b] = [\Omega]$ であることがわかる．これら Z_a, Z_b が境界インピーダンスであり，(9.11)が電磁シールドを 1 つの境界と見なした場合に電磁界が満足すべき条件，すなわちインピーダンス境界条件である．Z_a, Z_b は電磁シールドの渦電流による反磁界によって，外部磁界が侵入しにくくなることを表す物理定数であり周波数が高くなると反作用磁界の効果が強くなることを表している．

インピーダンス境界条件(9.11)は媒質に入射する平面波における電磁界の関係式からも理解できる．平面波が仮定できる電磁波が媒質に入射する場合の関係式は

$$\mathbf{e}_n \times \boldsymbol{E} = Z_0 \boldsymbol{H} \tag{9.12}$$

で与えられる．ここで，$Z_0 \equiv \sqrt{\mu/\epsilon}$ は媒質の波動インピーダンスであり，ϵ は媒質の誘電率である．Z_0 の次元は，(9.12)の次元解析により $[\Omega]$ であるとわかる．Z_0 は誘電率が高くなるほど，電磁波の伝達速度が遅くなることを表す物理定数である．

電磁波の問題における Z_0 は μ, ϵ に依存するが，今回の準定常電磁界における Z_a, Z_b は μ, σ に依存する．すなわち Z_0 に対応する準定常電磁界における電磁シールドの境界インピーダンスが Z_a, Z_b と考えられる．なお，高周波における薄い誘電体層に入射する電磁波の境界インピーダンスは，例えば文献[9.2, 3]において議論されている．

9. 1. 2　磁気ベクトルポテンシャルを用いた伝達関数

9. 1. 2. 1　一般的な座標系における伝達関数

9.1.1 節で導いた(9.11)が課すべき境界条件である．しかし電磁界の有限要素解析においては第 2 章で述べたように，磁気ベクトルポテンシャル，電気スカラーポテンシャルを未知数に選ぶことが一般的である．本節では，(9.11)を磁気ベクトルポテンシャルの形で改める．

周波数領域における電界は，電磁ポテンシャルを用いて

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\varphi \tag{9.13}$$

と表される．電磁シールドにおいて，自由電荷がない状況では

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.14}$$

である．磁気ベクトルポテンシャルに対して，Coulomb ゲージ

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{9.15}$$

を課すと，φ は電磁シールド内でつぎの Laplace 方程式を満足する．

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{9.16}$$

渦電流は外部磁界に対して平行に流れるため，$\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{e}_n=0,\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_n=0$ を満たすので

$$\mathbf{e}_n\cdot\nabla\varphi=0 \tag{9.17}$$

が成立する．(9.16)と(9.17)が両立するためには，φ は定数であることが要請される．したがって，$\varphi=0$ として，

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \tag{9.18}$$

となる．(9.18)と磁界を磁束密度に置き換えた

$$\boldsymbol{H}=\nu_0\boldsymbol{B} \tag{9.19}$$

をインピーダンス境界条件(9.11)に代入すると，

$$\alpha\mathbf{e}_n\times(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=\boldsymbol{B}_{t1}-\boldsymbol{B}_{t2} \tag{9.20a}$$

$$\mathbf{e}_n\times(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=\beta(\boldsymbol{B}_{t1}+\boldsymbol{B}_{t2}) \tag{9.20b}$$

を得る．ここで，$\alpha=\omega\mu_0/(\mathrm{j}Z_a),\beta=\mathrm{j}Z_b/(\omega\mu_0)$ とおいた．次元解析の結果，$[\alpha]=[1/\mathrm{m}],[\beta]=[\mathrm{m}]$ であるから，(9.20)の両辺の次元が一致しており，磁束密度，磁気ベクトルポテンシャルの単位と無矛盾であることが確認できる．ただし，$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_n=0$ を満たす必要があるので，(9.20)は

$$\boldsymbol{A}_1\cdot\mathbf{e}_n=\boldsymbol{A}_2\cdot\mathbf{e}_n=0 \tag{9.21}$$

を満足する条件下でのみ成立する．

ゆえに，(9.20), (9.21)が一般的な座標系における磁気ベクトルポテンシャルと境界上の磁束密度が満たすべき条件である．

9. 1. 2. 2　2 次元平面における伝達関数

本節では，2 次元平面の場合の伝達関数を考える．以下では，第 2 章に述べた 2 次元平面，軸対称 2 次元解析において，未知数を ψ,A_θ とした場合の有限要素方程式において導入すべき伝達関数を求める．

(1) 通常の xy 平面の場合の伝達関数

磁束密度と磁気ベクトルポテンシャルは第 2 章 2.3.2 節(2.17)で導いたように

$$\boldsymbol{A}=A\mathbf{e}_z \tag{9.22a}$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_x-\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_y=\nabla A(x,y)\times\mathbf{e}_z \tag{9.22b}$$

となる．ここで，簡単のため $A\coloneqq A_z$ とする．さて，磁束密度の接線成分は

$$\boldsymbol{B}_t=\mathbf{e}_n\times(\boldsymbol{B}\times\mathbf{e}_n)=\mathbf{e}_n\times\big((\nabla A(x,y)\times\mathbf{e}_z)\times\mathbf{e}_n\big) \tag{9.23}$$

であり，$(\nabla A(x,y)\times\mathbf{e}_z)\times\mathbf{e}_n$ に注目すると，2 次元平面では $\mathbf{e}_n\perp\mathbf{e}_z$ となるので，ベクトル公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ から

$$(\nabla A(x,y)\times\mathbf{e}_z)\times\mathbf{e}_n=-\mathbf{e}_n\times(\nabla A(x,y)\times\mathbf{e}_z)$$

$$=-(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_z)\nabla A(x,y)+\big(\mathbf{e}_n\cdot\nabla A(x,y)\big)\mathbf{e}_z$$

$$=\big(\mathbf{e}_n\cdot\nabla A(x,y)\big)\mathbf{e}_z=\frac{\partial A}{\partial n}\mathbf{e}_z \tag{9.24}$$

なので，(9.23), (9.24)を(9.20)に代入すると

$$\frac{\partial A_1}{\partial n}-\frac{\partial A_2}{\partial n}=\alpha(A_1+A_2) \tag{9.25a}$$

$$\beta\left(\frac{\partial A_1}{\partial n}+\frac{\partial A_2}{\partial n}\right)=(A_1-A_2) \tag{9.25b}$$

を得る．$\partial A_1/\partial n, \partial A_2/\partial n$ は電磁シールドの表面 Γ_1,Γ_2 に垂直に鎖交する磁束密度を表す．ここで，2 次元平面解析においては $\mathbf{e}_n$ は xy 平面内に存在し，$\mathbf{e}_x\perp\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y\perp\mathbf{e}_z$なので，

$$\boldsymbol{A}_1\cdot\mathbf{e}_n=A_1\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_n=0 \tag{9.26a}$$

$$\boldsymbol{A}_2\cdot\mathbf{e}_n=A_2\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_n=0 \tag{9.26a}$$

のため，(9.21)は自動的に満足され，強制的に課す必要はない．(9.25)を行列の形式で改めると

$$\begin{bmatrix}A_2\\ \dfrac{\partial A_2}{\partial n}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\alpha\beta}\begin{bmatrix}1+\alpha\beta & -2\beta\\ -2\alpha & 1+\alpha\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ \dfrac{\partial A_1}{\partial n}\end{bmatrix} \tag{9.27}$$

を得る．ここで，$\alpha\beta=[\tanh(\gamma d/2)]^2$ であり，次元は無次元である．

(2) 軸対称 2 次元 rz 平面の場合の伝達関数 (未知数が ψ の場合)

第 2 章 2.3.4.2 節で定義した流束関数 $\psi:=rA$, $A:=A_\theta$ と(2.31)の $\tilde{\nabla}$ を用いると，

$$\boldsymbol{A}=\frac{\psi}{r}\mathbf{e}_\theta \tag{9.28a}$$

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_z=\frac{1}{r}\tilde{\nabla}\psi\times\mathbf{e}_\theta \tag{9.28b}$$

であるから，

$$\boldsymbol{B}_t=\mathbf{e}_n\times(\boldsymbol{B}\times\mathbf{e}_n)=\mathbf{e}_n\times\left(\frac{1}{r}\big(\tilde{\nabla}\psi\times\mathbf{e}_\theta\big)\times\mathbf{e}_n\right) \tag{9.29}$$

となる．さて，この場合でも $\mathbf{e}_n\perp\mathbf{e}_\theta$ であるので，(1)の場合と同様に計算すると

$$\frac{1}{r}\big(\tilde{\nabla}\psi\times\mathbf{e}_\theta\big)\times\mathbf{e}_n=-\mathbf{e}_n\times\frac{1}{r}\big(\tilde{\nabla}\psi\times\mathbf{e}_\theta\big)$$

$$= -\frac{1}{r}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_\theta)\tilde{\nabla}\psi + \frac{1}{r}\left(\mathbf{e}_n \cdot \tilde{\nabla}\psi\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{r}\left(\mathbf{e}_n \cdot \tilde{\nabla}\psi\right)\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n}\mathbf{e}_\theta \tag{9.30}$$

となるから，(9.29), (9.30)を(9.20)に代入すると

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \alpha(\psi_1 + \psi_2) \tag{9.31a}$$

$$\beta\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\right) = (\psi_1 - \psi_2) \tag{9.31b}$$

を得る．(9.31)は数式の形の上では(9.25)と同じであるから，

$$\begin{bmatrix} \psi_2 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\alpha\beta}\begin{bmatrix} 1+\alpha\beta & -2\beta \\ -2\alpha & 1+\alpha\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{9.32}$$

が成立する．

(3) 軸対称 2 次元 rz 平面の場合の伝達関数 (未知数が A_θ の場合)

第 2 章 2.3.4.1 節で述べたように，$A \coloneqq A_\theta$ を直接未知数とした場合には

$$\boldsymbol{A} = A_\theta \mathbf{e}_\theta \tag{9.33a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left\{-\frac{\partial}{\partial z}(rA_\theta)\mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\mathbf{e}_z\right\} = \frac{1}{r}\nabla(rA_\theta) \times \mathbf{e}_\theta \tag{9.33b}$$

なので，

$$\boldsymbol{B}_t = \mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{B} \times \mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n \times \left((\nabla(rA_\theta) \times \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_n\right) \tag{9.34}$$

となる．さて，この場合でも $\mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_\theta$ であるので，

$$(\nabla(rA_\theta) \times \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_n = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_n \times (\nabla(rA_\theta) \times \mathbf{e}_\theta)$$

$$= -\frac{1}{r}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_\theta)\nabla(rA_\theta) + \frac{1}{r}\left(\mathbf{e}_n \cdot \nabla(rA_\theta)\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{r}\left(\mathbf{e}_n \cdot \nabla(rA_\theta)\right)\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial n}\mathbf{e}_\theta \tag{9.35}$$

となる．ここで，

$$\tilde{A}_1 = rA_\theta^1, \tilde{A}_2 = rA_\theta^2 \tag{9.36}$$

とおくと，

$$\frac{\partial\left(rA_\theta^1\right)}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial n},\frac{\partial\left(rA_\theta^2\right)}{\partial n}=\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial n} \tag{9.37}$$

となるから，A_θ を未知数とした場合では(9.20)は

$$\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial n}-\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial n}=\alpha\left(\tilde{A}_1+\tilde{A}_2\right) \tag{9.38a}$$

$$\beta\left(\frac{\partial\tilde{A}_1}{\partial n}+\frac{\partial\tilde{A}_2}{\partial n}\right)=\tilde{A}_1-\tilde{A}_2 \tag{9.38b}$$

となる．(9.38)は数式の形の上では(9.25)と同じであるから，

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}_2\\ \dfrac{\partial\tilde{A}_2}{\partial n}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\alpha\beta}\begin{bmatrix}1+\alpha\beta & -2\beta\\ -2\alpha & 1+\alpha\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{A}_1\\ \dfrac{\partial\tilde{A}_1}{\partial n}\end{bmatrix} \tag{9.39}$$

が成立する．

したがって，2 次元平面の場合は，いずれの場合においても(9.27), (9.32), (9.39)のように統一的に伝達関数を記述できる．

9. 2　有限要素行列とインピーダンス境界条件の連成

つぎに，9.1.2 節で導いた伝達関数を有限要素方程式を解く際の境界条件として導入する方法について述べる．今回はインピーダンス境界面の節点が Γ_1 に含まれる場合と，Γ_2 に含まれる場合とで割り当てられる磁気ベクトルポテンシャルが異なる．したがって，境界上の節点は 2 重節点となる(Fig.9.1 参照)．そこで，2 重節点を含めた全節点数を n，境界の全節点数を n_b とする．以下では最初に簡単のため，通常の xy 平面の場合の定式化を与える．解くべき有限要素方程式は，第 2 章 2.5.1.2 節で導いた(2.91)

$$\sum_{j=1}^{n}A_j\int_\Omega\nabla N_i\cdot\left[\nu_{yx}\right]\nabla N_j\,\mathrm{d}S-\nu_0\sum_{j=1}^{n_b}\left(b_i-b_j\right)\int_{\Gamma_j}N_i\,\mathrm{d}l=\int_\Omega N_i\,J_0\,\mathrm{d}S \tag{9.40}$$

である．通常の有限要素解析の際には，(9.40)左辺の第 2 項は第 2 章 2.6.1 節で述べた Dirichlet 境界条件(2.108a, b)で消去可能であるが，本問題では，インピーダンス境界面で 2 つの異なる磁気ベクトルポテンシャルが接続されるため，境界項は一般的に落とすことができない．ここで

$$b_j^1=\left.\frac{\partial A_j}{\partial n}\right|_{\Gamma_j}^1 \tag{9.41a}$$

$$b_j^2=\left.\frac{\partial A_j}{\partial n}\right|_{\Gamma_j}^2 \tag{9.41b}$$

とおいた．(9.40)は第 2 章の(2.81)において，電磁シールド以外に導体が存在しない場合

と本質的には同じである．(9.40)において，通常の有限要素法においては，磁束密度が不連続になることはないので，右辺第 2 項の境界項は第 2 章 2.6 節で述べたような境界条件を課すことで落とすことができる．しかし，今回はインピーダンス境界条件により，厚さ 0 の面として電磁シールドを扱うため，$\Gamma_{1,2}$ における磁気ベクトルポテンシャルの不一致から，磁束密度の不連続性が現れる．したがって，境界上の磁束密度も未知数として扱う必要がある．(9.40)を有限要素行列の形で示すと

$$\mathrm{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \mathrm{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \tag{9.42}$$

となる．ここで，$\mathrm{K} \in \mathbb{C}^{n\times(n+2n_b)}, \boldsymbol{a} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]^t \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2]^t \in \mathbb{C}^{2n_b}, \boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{C}^{n-n_b}, \boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{C}^{n_b}, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{C}^{n_b}, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{C}^{n_b}$ である．また，index "1","2" はそれぞれ全節点から境界上の物理量を除いたベクトル，境界上のみの物理量を表すベクトルを表すものとして付した．また，いまの場合，1 次三角形要素で離散化することを考えると，有限要素行列の各成分はつぎのように求められる．

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot [\nu] \nabla N_j \,\mathrm{d}S - \nu_0 \int_{\Gamma_j} N_i \,\mathrm{d}l \tag{9.43a}$$

$$c_i = \int_{\Omega} N_i J_0 \,\mathrm{d}S \tag{9.43b}$$

つぎに，インピーダンス境界上 $\Gamma_{1,2}$ における磁気ベクトルポテンシャルとその磁束密度の法線成分の関係を(9.40)に導入する．いま，$\Gamma_{1,2}$ において，(9.27)から

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_1\end{bmatrix} \tag{9.44a}$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{(n-n_b)\times(n-n_b)} & & \mathrm{O}_{n_b\times(n-n_b)} \\ & \tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{IBCs}}_{n_b\times n_b} & \\ & \mathrm{I}_{n_b\times n_b} & \\ \mathrm{O}_{(n-n_b)\times n_b} & & \tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{IBCs}}_{n_b\times n_b} \end{bmatrix} \tag{9.44b}$$

が成立する．(9.44)において，$\tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{IBCs}}_{n_b\times n_b}$ は(9.27)からなる部分係数行列，つまりインピーダンス境界上の 2 重節点の磁気ベクトルポテンシャルの写像を表し，I は単位行列，つまりそれ自身がそれ自身に移る恒等写像を表す．(9.44)を用いることで，(9.42)は

$$\mathrm{KT}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_1\end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \tag{9.45}$$

と変形できる．(9.45)を解くことで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$ が求められる．求めた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$ から，(9.44a)を通じて系全体の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が求められる．(9.45)左辺の係数行列には，インピーダンス境界条件が含まれており，一般的には非対称行列となる．この場合，BiCGStab 法を用いて解く

ことができる．対称行列に直して解く場合には

$$\mathrm{T}^t\mathrm{KT}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_1\end{bmatrix} = \mathrm{T}^t\boldsymbol{c} \tag{9.46}$$

とすればよい．

実際には，励磁源となるマルチターンコイルが有限要素空間内に含まれている場合がある．この場合，第 3 章で述べたように，マルチターンコイルをマクロ複素磁気抵抗 $\langle\dot{\nu}\rangle = 1/\langle\dot{\mu}\rangle$ を用いて均質化し，第 2 章 2.10 節で述べたように，電圧源を考慮した回路方程式

$$V = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}^*\mathrm{d}v + Z_e I \tag{9.47}$$

と(9.45)を連立して得られる

$$\begin{bmatrix}\mathrm{KT} & -\boldsymbol{c}\\ -\boldsymbol{c}^t & \mathrm{j}Z_e/\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_1\\ I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \mathrm{j}V/\omega\end{bmatrix} \tag{9.48a}$$

$$c_i = \mathrm{j}\omega \int_{\Omega_{coil}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\Omega_{coil} \tag{9.48b}$$

を解けばよい．なお，入力電流に起因するインピーダンス Z_e は例えば円柱形の巻線なら第 3 章 3.5.3 節で導いた(3.62b)，円柱形の磁性被覆線なら第 3 章 3.5.3 節で導いた(3.115)の右辺第 2，3 項の電流の係数となる．(9.48a)は例えば第 3 章で導いた(3.63)と本質的には同じだが，インピーダンス境界条件を適用しているので，(9.48a)における係数行列，および未知ベクトルが変化していることに注意する．なお，(9.48a)においても，係数行列は一般に非対称行列となるので，(9.46)を用いて

$$\begin{bmatrix}\mathrm{T}^t\mathrm{KT} & -\mathrm{T}^t\boldsymbol{c}\\ -\boldsymbol{c}^t\mathrm{T} & \mathrm{j}Z_e/\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_1\\ I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \mathrm{j}V/\omega\end{bmatrix} \tag{9.49}$$

として，ICCG 法を用いても解くことが可能である．

上記は，2 次元平面を仮定して定式化を行ったが，軸対称問題，特にマルチターンコイルを考える問題においても，未知数の定義が変わるだけで，本質的には(9.48a)と同じ方程式が得られる．

9. 3　周波数領域における数値解析結果

本節では，周波数領域における数値結果を示す．9.3.1 節では unit-cell approach において，磁性被覆線の表面に対してインピーダンス境界条件を適用した場合に磁束線が物理的に整合することを確認する．つぎに，9.3.2 節では，渦電流変位センサモデルで磁束線分布，およびセンサコイルの電圧が，従来の準定常電磁界解析と十分に一致することを示す．9.3.3 節では，実測値との比較を行う．最後に，9.3.4 節において，電磁シールドが

多層構造を有している場合のインピーダンス境界条件を導入し，この場合でも数値解析結果が従来の準定常電磁界解析と十分に一致していることを示す．

9. 3. 1　磁束線分布の確認

解析モデルとして，Fig.9.3 に示す単位セル中の磁性被覆線(MSW: Magnetically shielded wire)を考える．単位セルには外部磁界が印加されているとする．磁性被覆にインピーダンス境界条件を適用し，(9.45)を解くことで得られた磁束線分布を Fig.9.4 に示す．Fig.9.4 から，インピーダンス境界において，磁束線は不連続であり，透磁率が高い磁性被覆に磁束が集中している様子が確認できる．

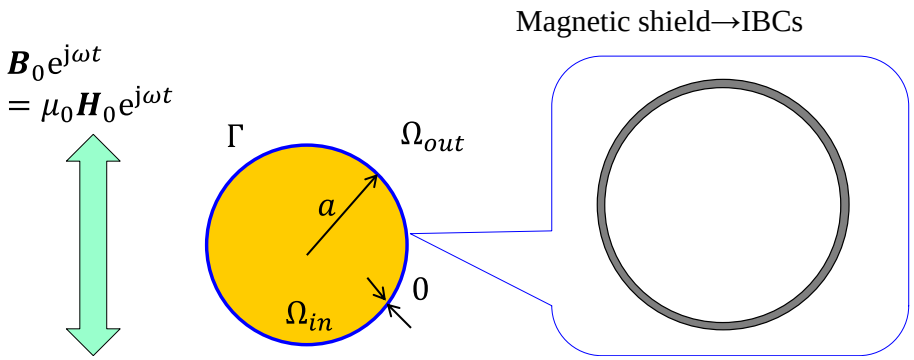


Fig.9.3 MSW imposed IBCs on the shield in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
When we impose IBCs on the magnetic shell, the thickness of the shell is set to zero.

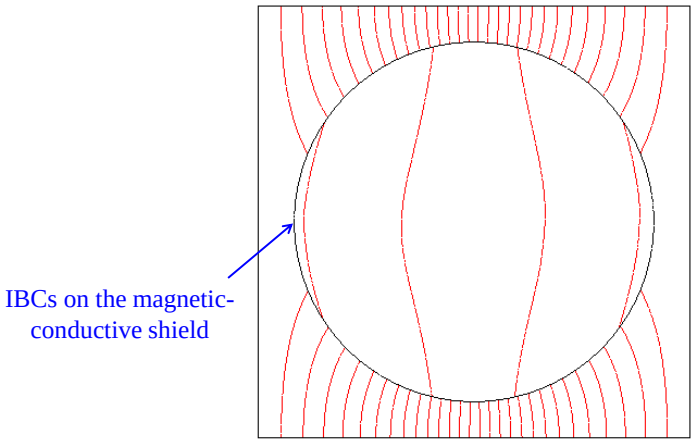


Fig.9.4 Magnetic flux line around a cylindrical MSW.
From this figure, we find that the magnetic fluxes tend to pass not through the wire conductor but through the magnetic shield. Moreover, the magnetic fluxes are disconnected on the surface of the magnetic-conductive shield. It is due to imposing IBCs on the magnetic-conductive shield.

9. 3. 2　渦電流変位センサモデルの解析

つぎに，渦電流変位センサモデルの解析を行う．渦電流変位センサ(EC センサ)は，金属ターゲットの反作用磁界の変化から傷を検出する．非接触・非破壊で傷・破損の検出が可能である点において，EC センサはレーザ式，超音波式センサよりも優位性がある．主な金属ターゲットには，鉄道レール，半導体ウエハ，等が挙げられる．

解析モデルとして，Fig.9.5 のような軸対称性が仮定できる問題を取り扱う．解析緒元を Fig.9.5 に示している．EC センサの下には半径 50 mm，厚さ d [mm] の金属ターゲットが配置されている．ここでは $d = 1.0$ mm, 5.0 mm の 2 つの場合を考える．(9.48)を用いた上で，提案手法と従来の準定常電磁界を有限要素法により直接解析する方法で，コイルの実効インピーダンスの周波数特性を解析した．なお，$d = 1.0$ mm の場合，両者の有限要素数の比は 38.46 であった。結果を Fig.9.6 に示す．Fig.9.6 から，仮定した 2 つの電磁シールドの厚さ d について，良好な値が得られていることがわかる．

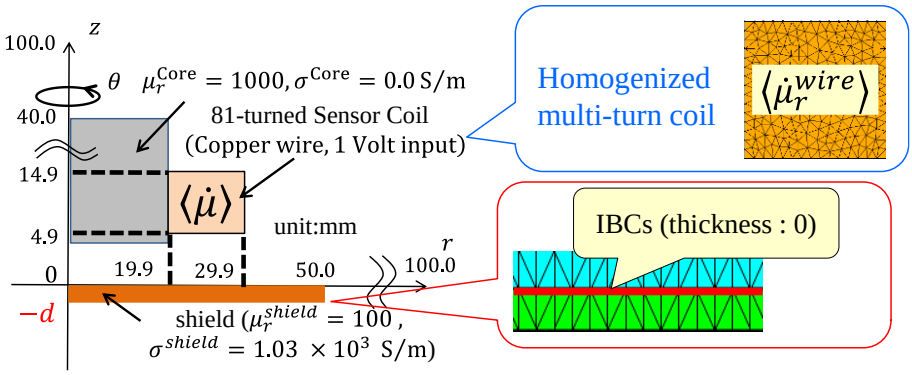
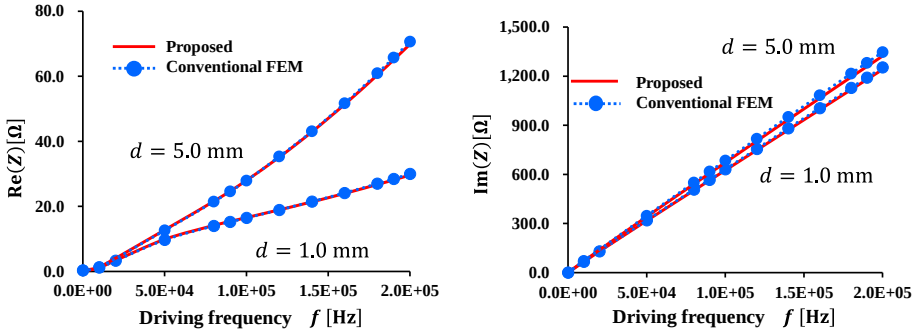


Fig.9.5 Eddy current displacement sensor model.
In this model, the homogenized multi-turn copper coil is placed above the magnetic-conductive shield. Here, when we apply the proposed method, we treat the magnetic-conductive shield as IBCs whose thickness is zero.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig. 9.6 Impedances of the sensor-coil shown in Fig.9.5 connected with a voltage source.
From this figure, it is found that the coil impedance obtained by using the homogenization method and IBCs coincides with that calculated by the conventional FEM.

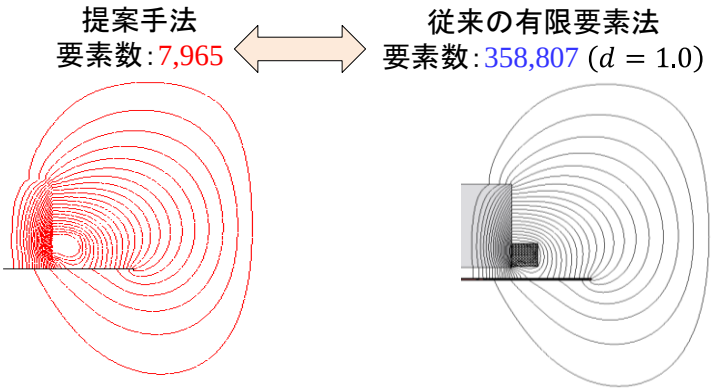


Fig. 9.7 Magnetic flux lines at 200 kHz.
From this figure, it is found that when we impose IBCs on the magnetic-conductive slab, the magnetic flux is discontinuous on the boundary.

9. 3. 3　実測との比較

つぎに，実測との比較を行う．Fig.9.8 に示すような厚さ 1 mm の銅板の上に 81 回巻きのコイルが配置されている系を考える．コイルの実効インピーダンスを実測と提案手法で求めた．実測の際には LCR メータ HIOKI IM3523 モデルを用い，コイル素線には PMW(半径 0.15 mm，絶縁皮膜 0.03 mm)を用いた．コイル端子のインピーダンスの測定結果を Fig.9.9 に示す．Fig.9.9 から，実測値と概ね一致した結果が得られているとわかる．

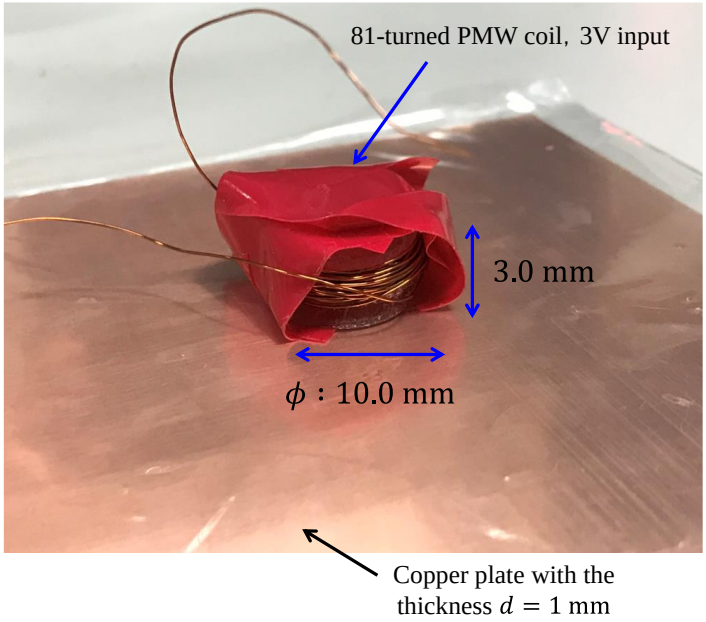
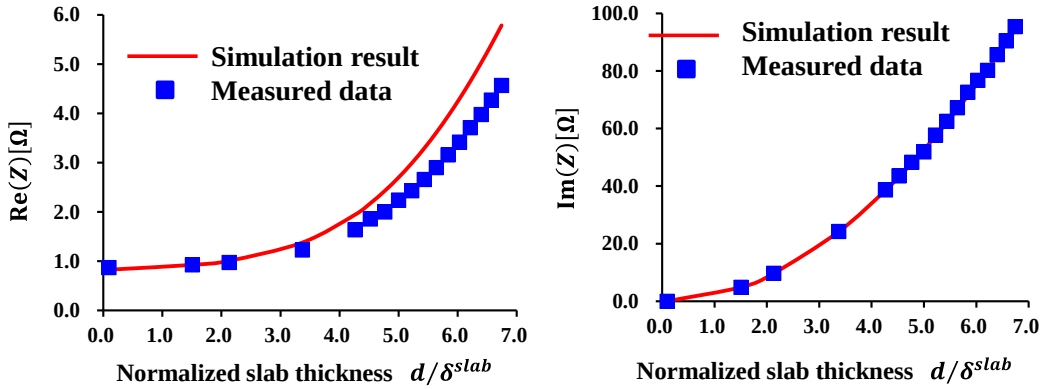


Fig.9.8 Experiment model for the homogenization scheme and impedance boundary conditions (IBCs).
In this experiment, the 81-turn PWM coil whose conductor radius and cover thickness are 0.15mm and 0.03 mm, respectively, is placed above the Cu plate. We measured the coil impedance by connecting the coil terminal to a LCR meter. Moreover, the bobbin for this coil is made of photocurable resin, PRH35-ST2, whose inner diameter is 10 mm.



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.9.9 Frequency characteristic of the coil impedance of the experiment model as shown in Fig.9.8.
Abscissa denotes the thickness of the slab d normalized by the skin depth δ^{slab}. From this graph, it can be concluded that the homogenization scheme and IBCs give the sufficiently accurate computational results. Thus, we can recognize a multi-turn coil and a magnetic-conductive thin slab as a homogenized material using the macroscopic complex permeability and the impedance boundary, respectively.

9. 3. 4　電磁シールドが多層構造を有している場合の伝達関数

前節までの解析においては，電磁シールドは単層であると仮定していた．しかし実際には, Fig.9.10 に示すように金属の表面をメッキした多層構造を有していることがある．この場合，(9.27)の修正が必要となる．各層間のインピーダンス境界条件は index の付け替えにより

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^1\beta^1}\begin{bmatrix} 1+\alpha^1\beta^1 & -2\beta^1 \\ -2\alpha^1 & 1+\alpha^1\beta^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{9.50a}$$

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^2\beta^2}\begin{bmatrix} 1+\alpha^2\beta^2 & -2\beta^2 \\ -2\alpha^2 & 1+\alpha^2\beta^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{9.50b}$$

である．ここで，電磁シールドが多層構造の場合にはどのような境界条件を課せばよいか，という疑問が生じる．そこで，インピーダンス境界条件(9.11)と電磁波の波動インピーダンスを用いた電磁界の関係(9.12)には類似性があったことから，電磁波の議論の場合から類推する．多層媒質を伝搬する電磁波の問題の場合には，1 層毎の波動インピーダンスを含んだ波動行列の乗算で入出力特性を表現可能であることが知られている[e.g. 9.4]．本章で導いた境界インピーダンスは，電磁シールドの表皮厚に局在化した電磁界から定義したインピーダンスであるが，9.3.3 節の実測結果から，実際に存在する交番磁界に対する磁気シールドそのものの特性インピーダンスとして考えられる．よって，本問題においても，(9.50a)と(9.50b)の乗算から

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^1\beta^1)} \times$$

$$\begin{bmatrix} (1+\alpha^1\beta^1)(1+\alpha^2\beta^2)+4\alpha^1\beta^2 & -2\beta^1(1+\alpha^2\beta^2)-2\beta^2(1+\alpha^1\beta^1) \\ -2\alpha^1(1+\alpha^2\beta^2)-2\alpha^2(1+\alpha^1\beta^1) & (1+\alpha^1\beta^1)(1+\alpha^2\beta^2)+4\alpha^2\beta^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{9.51}$$

という関係が成り立つと予想される．(9.51)は，波動行列の類推から導かれた伝達関数であるが，実際に成立するかどうかは，数値解析により確かめなければならない．

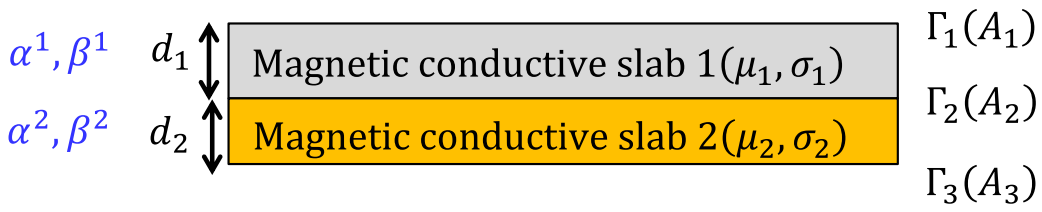


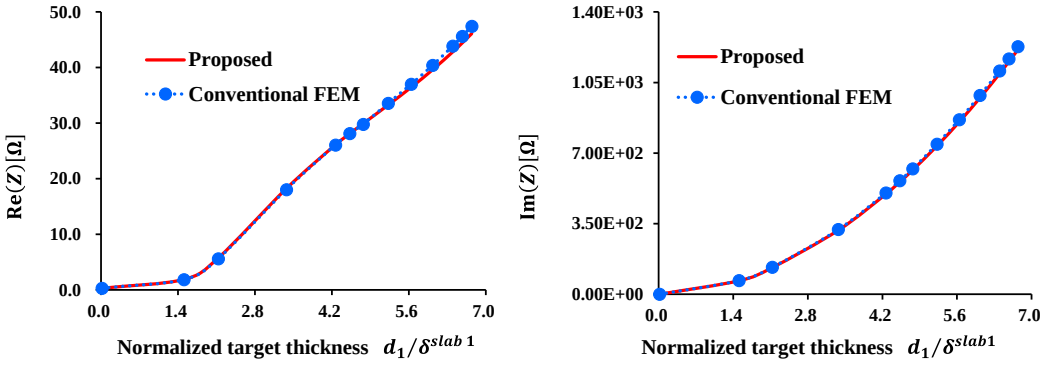
Fig. 9.10 Multi-layered magnetic-conductive slab.
When we impose IBCs on a multi-layered slab, IBCs (9.51) have to be employed for expressing the transform matrix.

9. 3. 5　電磁シールドが多層構造を有している場合の数値解析

解析モデルとして，Fig.9.5 に示すモデルで，電磁シールド層を Table 9.2 の緒元を有する多層構造の金属に置き換える．ただし，従来の有限要素法が適用できるように，解析緒元は十分に小さく設定している．なお，マルチターンコイルは均質化されているものとする．従来の直接的な有限要素法においては全要素数は 537,413 であったが，提案手法では要素数は 7,965 であった．コイルの実効インピーダンスの周波数特性，および 200 kHz における磁束線を Fig.9.11, 9.12 にそれぞれ示す. Fig.9.11, 9.12 の結果から, (9.51) を用いた多層構造を有する電磁シールドを境界条件に置き換えても解析結果が良好に一致しているとわかる．

Table 9.2 Specification of the multi-layered magnetic-conductive slab with the low parameters as shown in Fig.9.5

Slab num／Parameter	d [mm]	μ_r	σ [S/m]
Slab1	1	100	1030
Slab 2	1	50	1.03×10^5



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig. 9.11 Impedance of the sensor-coil shown in Fig.9.5.
From this figure, it is found that there is no discrepancy between two results.

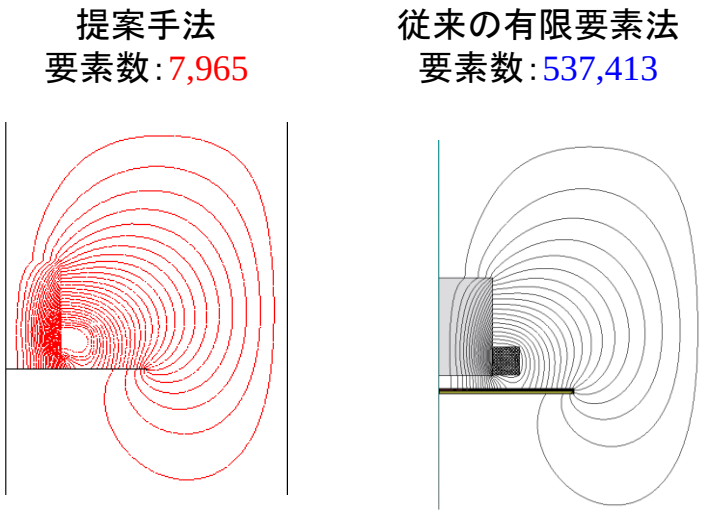


Fig. 9.12 Magnetic flux lines at 200 kHz.
From this figure, it is found that when we impose IBCs on the multi-layered magnetic-conductive slab, the magnetic flux is discontinuous on the boundary.

つぎに，Fig.9.13 に示すように，銅板に薄い鉄のメッキがされている電磁シールドを考える．解析緒元を Table 9.3 に示す．提案手法を用いてコイルの実効インピーダンスを示したグラフを Fig.9.14 に示す．Fig.9.14 から，所望のインピーダンス特性が得られているとわかる．本問題は，磁性体厚さ，表皮厚が μm スケールのため，通常の有限要素解析では離散化が困難であるが，インピーダンス境界条件を適用することで，このような微細な有限要素を生成する問題は回避できる．

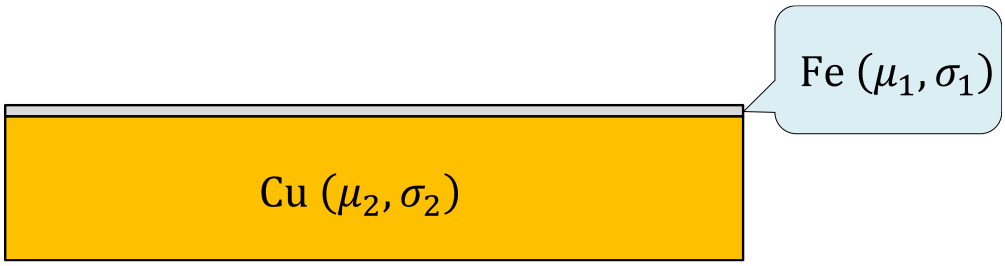
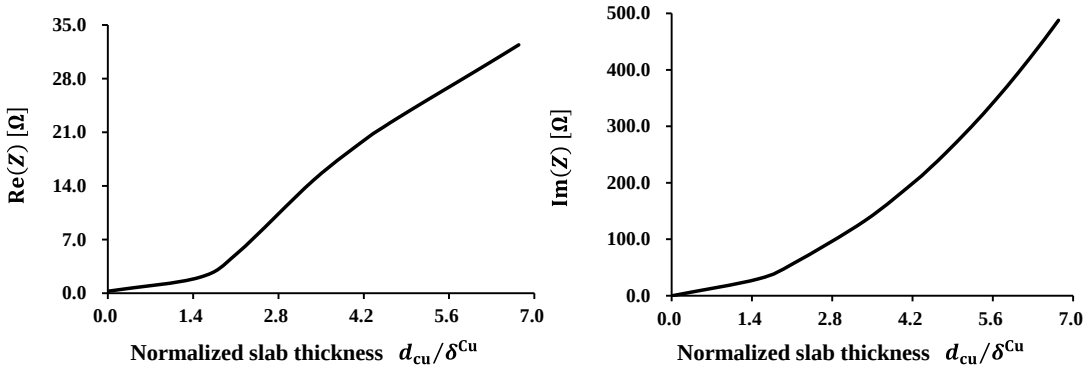


Fig. 9.13 Multi-layered magnetic-conductive slab made of Fe and Cu.
Note here that a native application of FEM considering the eddy current in these slabs requires much finer discretization of its inner inside. On the other hand, by imposing IBCs on these slabs, we do not suffer from this discretization.

Table 9.3 Specification of the multi-layered magnetic-conductive slab with the actual parameter as shown in Fig.9.5

Slab num／Parameter	d [μm]	μ_r	σ [S/m]
Slab 1 (Fe)	1	100	1.03×10^7
Slab 2 (Cu)	1000	1	5.76×10^7



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig. 9.14 Frequency characteristic of the coil impedance calculated by the proposed approach.

9.4　伝達関数の直接的な時間領域への変更

9.3 節の数値解析結果から，インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデル化は有効であることが示された．つぎに周波数領域のインピーダンス境界条件を時間領域解析で適用する方法を検討する．電磁シールドの磁性が線形性を仮定できる場合には，第 7 章で行った方法を踏襲して解析が行えると考えられる．しかし，直接的な伝達関数の変換には，数値不安定性を伴うことがある．本節では，直接的な逆 Laplace 変換に伴う数値的な取り扱いの難しさを示し，次節で有効な変換の方法を議論する．

9.4.1　伝達関数の Cauer 型等価回路表示と有理関数表示

9.2 節で導出した境界インピーダンスは双曲線に関する数学公式

$$\frac{\tanh\zeta}{\zeta}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\zeta^2}{3+\cfrac{\zeta^2}{5+\cdots}}}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\zeta^2}+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\zeta^2}+\cfrac{1}{\cfrac{5}{\zeta^2}+\cdots}}} \tag{9.52}$$

により，$\zeta\coloneqq\gamma d/2$とおくと，つぎのように連分数を用いて，書き換えることができる．

$$Z_a\equiv\frac{\gamma}{\sigma\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)}=\frac{2}{\sigma d}\times\frac{1}{\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta}}$$

$$=\frac{2}{\sigma d}\times\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{\zeta^2}{3+\cfrac{\zeta^2}{5+\cdots}}}} \tag{9.53a}$$

$$Z_b\equiv\frac{\gamma}{\sigma}\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)=s\frac{d\mu}{2}\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta}$$

$$=s\frac{d\mu}{2}\times\cfrac{1}{1+\cfrac{\zeta^2}{3+\cfrac{\zeta^2}{5+\cdots}}} \tag{9.53b}$$

インピーダンス境界条件を表す伝達関数に含まれる複素関数 α,β は，(9.53)により，つぎのように書き換えることができる．

$$\alpha\equiv-s\frac{\mu_0}{Z_a}=-s\sigma\frac{\mu_r\mu_0}{\mu_r}\times\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta}\times\frac{d}{2}=-\frac{\sigma d}{2\mu_r}\times\cfrac{1}{\cfrac{1}{\mu}+\cfrac{s\frac{\mu\sigma d^2}{4}}{3\mu+\mu\cfrac{s\frac{\mu\sigma d^2}{4}}{5+\cdots}}}$$

$$= -\frac{\sigma d}{2\mu_r} \times \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_1}} + \cfrac{1}{\cfrac{R_{c_1}}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_2}} + \cfrac{1}{\cfrac{R_{c_2}}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_3}} + \cdots}}}}} \tag{9.54a}$$

$$\beta \equiv -\frac{Z_b}{s\mu_0} = -\frac{d\mu}{2\mu_0} \times \frac{\tanh(\zeta)}{\zeta} = -\frac{d}{2\mu_0} \cfrac{1}{\cfrac{1}{\mu} + \cfrac{s\frac{\mu\sigma d^2}{4}}{3\mu + \mu\cfrac{s\frac{\mu\sigma d^2}{4}}{5 + \cdots}}}$$

$$= -\frac{d}{2\mu_0} \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_1}} + \cfrac{1}{\cfrac{R_{c_1}}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_2}} + \cfrac{1}{\cfrac{R_{c_2}}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{L_{c_3}} + \cdots}}}}} \tag{9.54b}$$

ここで，α, β は，第 7 章で示した受動素子に対する Cauer 型等価回路表示を行うことができ，その素子値は

$$R_{c_k} = \frac{4(4k-1)}{\sigma d^2} \tag{9.55a}$$

$$L_{c_k} = \frac{\mu_r \mu_0}{4k-3} \tag{9.55b}$$

で与えられる(Fig.9.15)．(9.54)から，α, βの有理関数表示を Padé 近似により行うことができる．

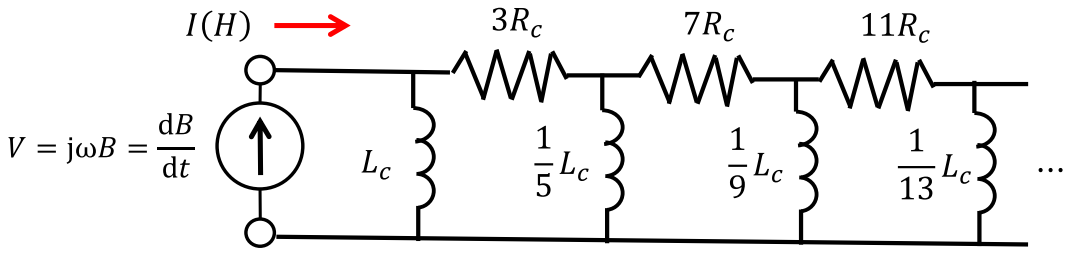


Fig.9.15 Cauer-type equivalent circuit for a passive element.
In the frequency domain, this circuit denotes the boundary impedance of a slab immersed in a time-harmonic magnetic field. This circuit can be used for time domain analysis of the eddy current field of a slab.

つぎに，(9.27)に表れる係数 $1 \pm \alpha\beta = 1 \pm \tanh^2\zeta$ の有理関数化を考える．しかし，この関数は直接的に連分数展開を行うことは難しい．そこで，双曲線関数の有理関数公式を用いることを検討する．

双曲線正接はつぎのように表すことができる[9.5].

$$\tanh^2\zeta = \frac{\dfrac{\tanh\zeta}{\zeta}}{\dfrac{\tanh 2\zeta}{2\zeta}} - 1 \tag{9.56}$$

において，無限乗積展開

$$\frac{\tanh\zeta}{\zeta} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{\zeta^2}{n^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \dfrac{\zeta^2}{[(2n-1)\pi/2]^2}\right]} \tag{9.57}$$

を用いた上で(9.56)に対し Padé 近似を適用し，さらに $\tilde{s} \coloneqq s^{-1}$ とおくと

$$\tanh^2\zeta = \frac{p_0 + p_1\tilde{s} + p_2\tilde{s}^2 + \cdots + p_n\tilde{s}^n}{q_0 + q_1\tilde{s} + q_2\tilde{s}^2 + \cdots + q_n\tilde{s}^n} - 1 \tag{9.58}$$

という表示を得る．したがって(9.27)に表れる係数 $1 \pm \alpha\beta = 1 \pm \tanh^2\zeta$ について

$$1 + \tanh^2\zeta = \frac{p_0 + p_1\tilde{s} + p_2\tilde{s}^2 + \cdots + p_n\tilde{s}^n}{q_0 + q_1\tilde{s} + q_2\tilde{s}^2 + \cdots + q_n\tilde{s}^n} \tag{9.59a}$$

$$1 - \tanh^2\zeta = \frac{(2q_0 - p_0) + (2q_1 - p_1)\tilde{s} + \cdots + (2q_n - p_n)\tilde{s}^n}{q_0 + q_1\tilde{s} + q_2\tilde{s}^2 + \cdots + q_n\tilde{s}^n} \tag{9.59b}$$

という有理関数表示を得る．しかし直接的な有理関数表示(9.59)では次数が高くなってしまうことが数学的に知られている．したがって，Euclid の互助法を行い，再度 Padé 近似行って得られる

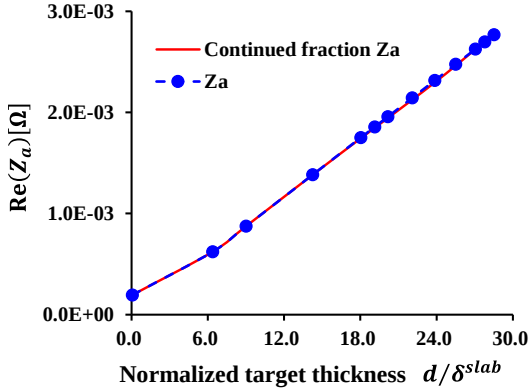
$$1 + \tanh^2\zeta = \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1^+} + \cfrac{1}{R_1^+ + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2^+} + \cfrac{1}{R_2^+ + \cdots}}}} = \frac{a_0^+ + a_1^+ s + \cdots + a_q^+ s^q}{b_0^+ + b_1^+ s + \cdots + b_q^+ s^q} \tag{9.60a}$$

$$1 - \tanh^2\zeta = \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_1^-} + \cfrac{1}{R_1^- + \cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2^-} + \cfrac{1}{R_2^- + \cdots}}}} = \frac{a_0^- + a_1^- s + \cdots + a_q^- s^q}{b_0^- + b_1^- s + \cdots + b_q^- s^q} \tag{9.60b}$$

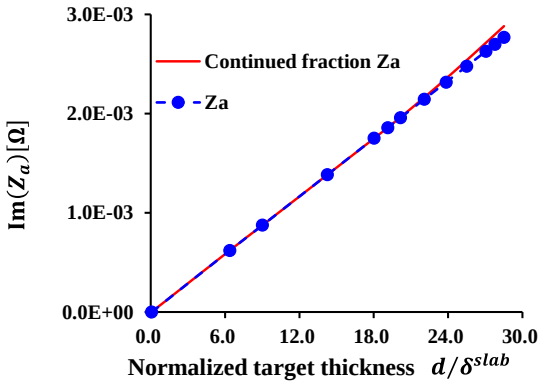
を用いることを考える．(9.60)の表示では，Cauer 型等価回路の表示を通じて，近似に必要な次数を低くできるという利点がある．

9. 4. 2　伝達関数の変形の数値解析結果

9.4.1 節で導出した Z_a, Z_b の有理関数表示の妥当性を確認する．電磁シールドの材質を鉄と仮定して，連分数の段数は 20 段とした．数値解析結果を Fig.9.16 に示す．Fig.9.16 から Z_a, Z_b の連分数表示は妥当であるとわかる．

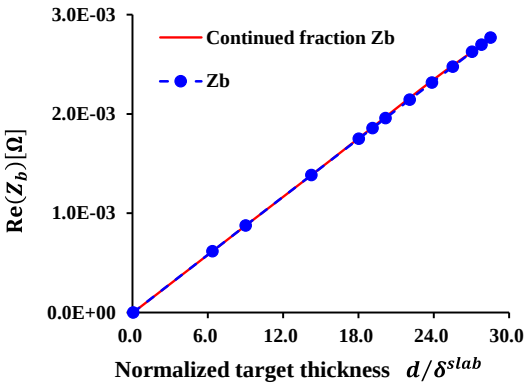


(a) Real part

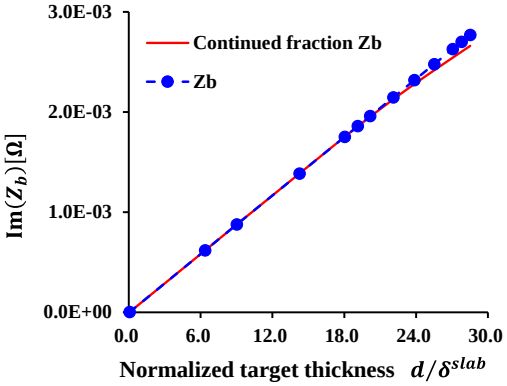


(b) Imaginary part

(a) Profiles of Z_a.



(a) Real part



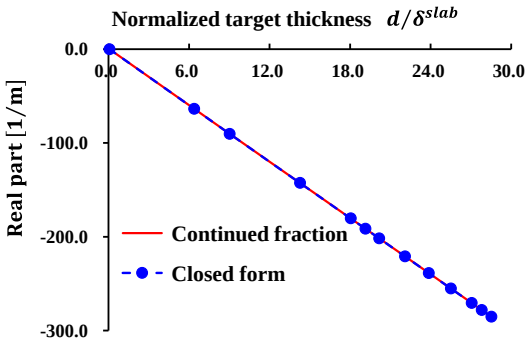
(b) Imaginary part

(b) Profiles of Z_b.

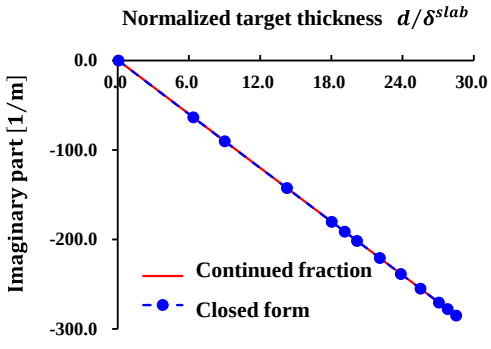
Fig.9.16 Frequency characteristics of the boundary impedances expressed by the continued fraction expansion and the closed form.
From this figure, we find that these are in good agreement.

つぎに，α, β の Cauer 型等価回路表示の妥当性を確認する．電磁シールドの材質を鉄と仮定して，回路の段数は 6 段とした．数値解析結果を Fig.9.17 に示す．Fig.9.17 から Z_a, Z_b の Cauer 型等価回路表示は妥当であるとわかる．

したがって，9.4.1 節の表示は妥当であり，次節で示すように，第 7 章の方法を踏襲して，極と留数から逆 Laplace 変換ができると期待できる．

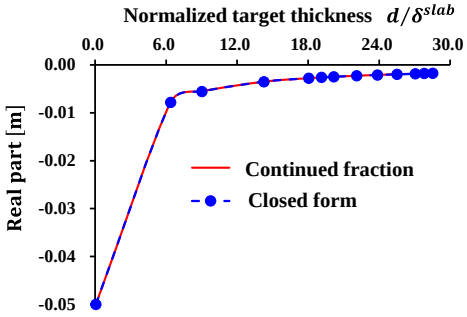


(a) Real part

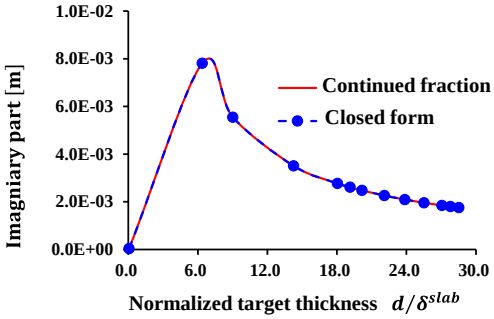


(b) Imaginary part

(a) Profiles of α.



(a) Real part

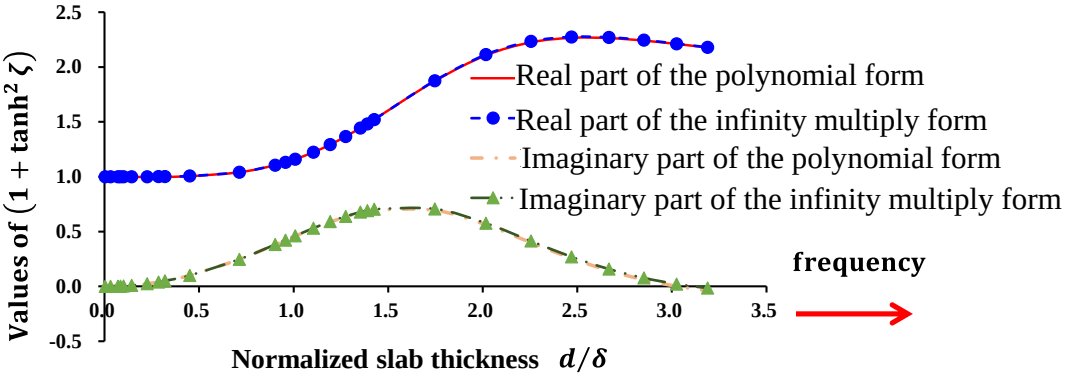


(b) Imaginary part

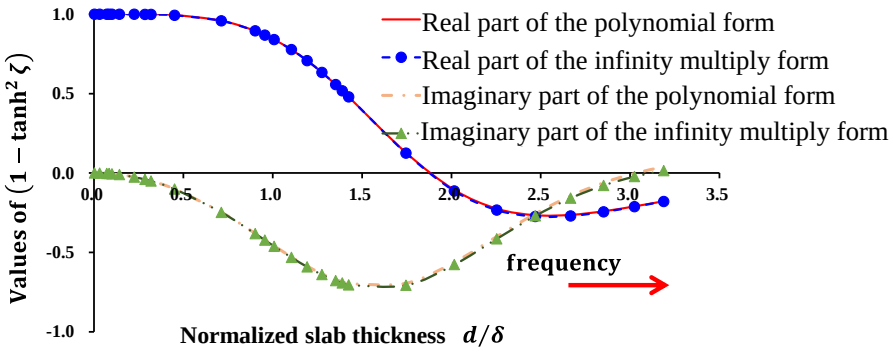
(b) Profiles of β.

Fig.9.17 Frequency characteristics of the coefficients expressed by the continued fraction expansion and the closed form.
From this figure, we again find that these are in good agreement.

つぎに，係数 $1 \pm \alpha\beta = 1 \pm \tanh^2 \zeta$ の無限乗積展開から得た有理関数と Euclid の互助法を行い，再度 Padé 近似行って得られる有利関数の周波数特性を比較する．電磁シールドの材質が鉄であると仮定した場合の数値解析結果を Fig.9.18 に示す．Fig.9.18 から両者はよく一致していることがわかる．この際，無限乗積展開から得た有理関数の次数は 40 次で，Euclid の互助法を行い，再度 Padé 近似行って得られる有利関数の次数は 6 次であった．



(a) Profiles of $1 + \alpha\beta$.



(b) Profiles of $1-\alpha\beta$.

Fig.9.18 Frequency characteristics of the coefficients expressed by（9.59）and（9.60）.
From this figure, we again find that these are in good agreement. However, this tendency is different from that of complex permeabilities as discussed in chapter 4. Unless the convergence at high frequency is strictly verified, this approach cannot be employed in time domain analysis. This is due to the fact that there exist negative poles of the entities of the native transfer functions expressed by（9.27）.

9. 4. 3　部分分数展開の極と留数

9.4.2 節により，伝達関数の各要素の有理関数表示は，元の関数と良く一致していることがわかった．つぎに，第 7 章の方法では有理関数を部分分数展開することにより，逆 Laplace 変換が可能であったことを踏まえて，これらの伝達関数の極と留数を求める．例えば，

$$\frac{1+\tanh^2\zeta}{1-\tanh^2\zeta}=r_\infty+\sum_{j=1}^{k}\frac{r_j}{s+p_j} \tag{9.61}$$

なる部分分数分解を考えると，この逆 Laplace 変換から

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1+\tanh^2\zeta}{1-\tanh^2\zeta}\right]=r_\infty\delta(t)+\sum_{j=1}^{k}r_j\exp(-p_jt) \tag{9.62}$$

という時間領域の関数が得られるはずである．しかし，(9.62)を用いて時間領域解析が行えるためには，第 7 章のコイルのマクロ複素磁気抵抗率 $\langle\dot{v}(\omega)\rangle$ の部分分数展開のように，$^{\forall}p_j>0$ であることが必要である．なぜなら $^{\exists}p_j<0$ となった場合，(9.62)は時間と共に発散する関数となってしまうためである．

例として，材質が $\mu=10\mu_0$ H/m, $\sigma=1.03\times10^4$ S/m, $d=$ 0.3 mm である電磁シールドを考える．この場合に(9.61)の部分分数展開を行うと，Table 9.4 のような極と留数を得るが，$p_1<0$ となっていることがわかる．なお，数値解析結果は省略するが，他の伝達関数の成分についても同様であった．

Table 9.4 Poles and residues of（9.61）

j	1	2	3	4	5
r_j	-1.09×10^{10}	2.73×10^5	4.24×10^6	4.43×10^7	1.51×10^9
p_j	-1.29×10^9	1.18×10^8	3.17×10^8	7.51×10^8	2.56×10^9

ゆえに，本節ではつぎの結論を得る．境界インピーダンスの周波数特性は，連分数展開，及び Padé 近似を用いた有理関数表示，いずれでも一致するが，極が負となってしまう．よって，第 7 章で行った時間領域の関数を得る方法を直接的に適用して，時間領域における関数を得る方法は，実際の有限要素解析には適用できないとわかる．

9.5　修正インピーダンス境界条件による時間領域の伝達関数

前節においては，伝達関数(9.27)を直接逆 Laplace 変換して時間領域における関数を求めることは困難であることを示した．そこで，本節では，元々のインピーダンス境界条件の定義(9.11)に立ち返る．インピーダンス境界条件は，(9.12)で示される電磁波の波動インピーダンスを用いた $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係と類似している．したがって，FDTD 法における電磁波解析における方法を参考にすることができると予想される．文献[9.2, 3]においては, 導体層に対して, 高周波における特性インピーダンスを FDTD 法と連成する際に，周波数領域で $s = \mathrm{j}\omega$ の代数計算による式変形で磁界の時間微分を求め，Yee アルゴリズムに導入することが可能であることが示されている．また，同文献においては，周波数表面分散インピーダンス法の定式化において，直接的に Fourier 変換できないインピーダンス特性を，$s = \mathrm{j}\omega$ の代数計算による式変形で可能にすることを検討している．

これらのことを踏まえると，(9.11)において，s の代数計算による方程式の係数調整から，部分分数展開の結果 $^{\forall}p_j > 0$ とすることができ，時間領域有限要素解析が可能になることが期待できる．本節では，この発想に基づき，修正インピーダンス法に関する検討を行い，実際の有限要素解析の結果良好な解が得られたことを示す．

9.5.1　インピーダンス境界条件の修正

周波数領域のインピーダンス境界条件(9.11)はつぎの様に改めることができる．

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = \frac{Z_a}{s} \times s(\boldsymbol{H}_{t1} - \boldsymbol{H}_{t2}) \tag{9.63a}$$

$$\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \frac{Z_b}{s} \times s(\boldsymbol{H}_{t1} + \boldsymbol{H}_{t2}) \tag{9.63b}$$

(9.63)を時間領域解析に適用するには，逆 Laplace 変換を用いることになるが，

$$\frac{Z_a}{s} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\sigma \tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{s\sigma}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s\mu\sigma d^2}{4}}\right)} \tag{9.64a}$$

$$\frac{Z_b}{s} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\sigma} \tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{s\sigma}} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\mu\sigma d^2}{4}}\right) \tag{9.64b}$$

の逆 Laplace 変換を解析的に求めることは難しい．そこで，9.4 節の(9.52)を用いた連分数展開から有理関数，並びに部分分数展開を行うこと方法を踏襲する．9.4 節においては，境界インピーダンス Z_a, Z_b に直接逆 Laplace 変換を適用すると，極が正と負の両方

をとるため，時間領域での有限要素解析に適用することができないことを述べた．しかし伝達関数の有理関数表示は元の閉形式の関数と良好に一致していたため，(9.64)に対しても検討することは有効であると思われる．

この方法から，(9.64)部分分数の結果を示すと

$$\frac{Z_a}{s}=\frac{\gamma}{s\sigma}\frac{2}{\gamma d}\frac{1}{\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta}}=\frac{2}{s\sigma d}\frac{l(s)}{h(s)}=r_\infty^a+\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{s+p_j^a} \tag{9.65a}$$

$$\frac{Z_b}{s}=\frac{2}{s\sigma d}\left(\frac{\gamma d}{2}\right)^2\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta}=\frac{d\mu}{2}\frac{h(s)}{l(s)}=r_\infty^b+\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^b}{s+p_j^b} \tag{9.65b}$$

となる．ここで $\tanh\zeta/\zeta$ の連分数展開表示を Padé 近似して得られる有理関数を $h(s)/l(s)$ と置いた．次節では，(9.65)の数値解析結果が，(9.64)と良好に一致することを示す．

9. 5. 2　修正されたインピーダンス境界条件の部分分数展開

解析緒元が Table 9.5 のようである電磁シールドの修正された境界インピーダンスの周波数特性を(9.64)と(9.65)とで比較する．この際，(9.65)における極と留数は Table 9.6 の通りであった．したがって，この場合は極は全て正の値であり，逆 Laplace 変換を行っても数値不安定性は発生しない．また，周波数特性の解析結果を Fig.9.19 に示す．Fig.9.19 からは，第 4 章で扱ったマルチターンコイルや圧粉磁芯の場合と同じように Debye 特性に類似した特性が見受けられ，周波数が無限に高い極限では一定値に収束しているとわかる．

より正確には，数学的に(9.65)が収束する関数であることを示す必要がある．この証明については，Appendix F で示す．

Table 9.5 Specification of the magnetic-conductive slab

d [mm]	0.3	σ [S/m]	1.03×10^7
μ_r	100.0	q	5,4

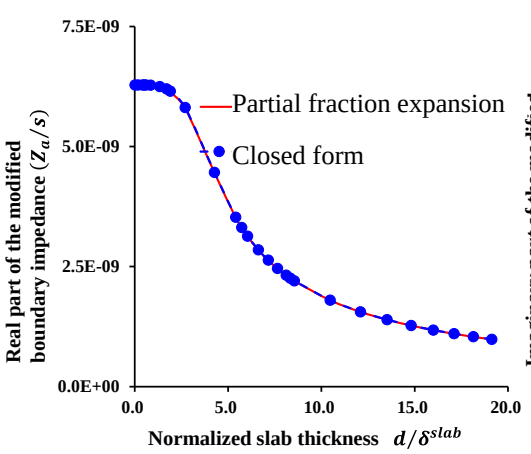
Table 9.6 Poles and residues of the modified impedances with the parameters as shown in Table 9.5

(a) Z_a/s

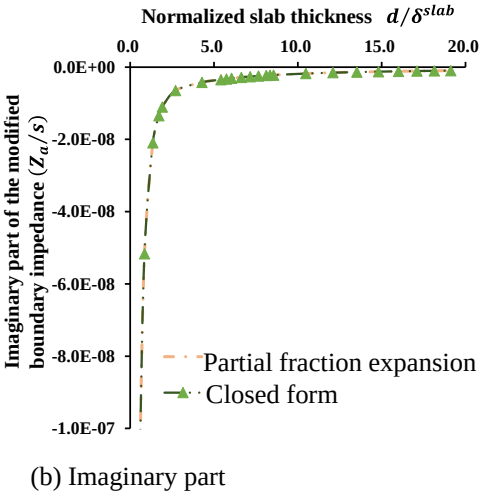
j	1	2	3	4	5
r_j	6.47×10^{-4}	1.30×10^{-3}	1.31×10^{-3}	2.47×10^{-3}	2.34×10^{-2}
p_j	0	3.39×10^{5}	1.36×10^{6}	3.63×10^{6}	2.87×10^{7}

(b) Z_b/s

j	1	2	3	4	
r_j	1.29×10^{-3}	1.29×10^{-3}	1.53×10^{-3}	5.69×10^{-3}	
p_j	8.47×10^{4}	7.63×10^{5}	2.18×10^{6}	7.54×10^{6}	

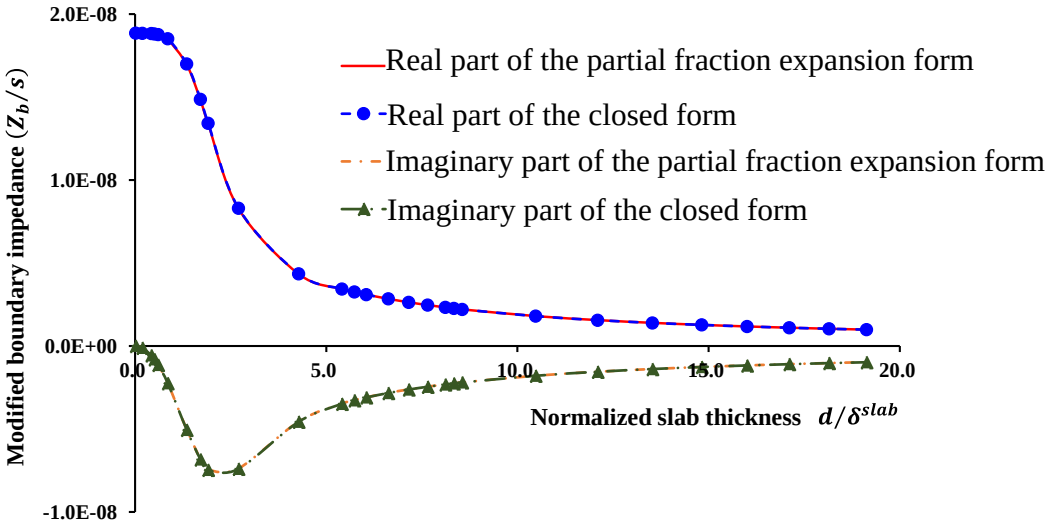


(a) Real part



(b) Imaginary part

(a) Profiles of Z_a/s.



(b) Profiles of Z_b/s.

Fig.9.19 Frequency characteristics of the modified boundary impedances expressed by the continued fraction expansion and the closed form.
From this figure, we find not simply that good agreements are observed, but also that the similar characteristics as the complex permeabilities derived in section 3 is obtained. Moreover, as operating frequency becomes higher, each value approaches to a certain value, and from Table 9.6, we also find that all the poles are positive.

9. 5. 3　時間領域インピーダンス境界条件

9.5.2 節において，修正された境界インピーダンス $Z_a/s, Z_b/s$ はいずれも収束する関数であり，これらの部分分数展開の極は全て正の値をとることを示した．したがって，(9.63)を逆 Laplace 変換し，$Z_a/s, Z_b/s$ と磁界の畳み込み積分を第 7 章で導入した RC 法を用いることによって，時間領域における電磁シールドの境界条件を求めることができると期待される[9.6, 7].

修正されたインピーダンス境界条件(9.63)を逆 Laplace 変換すると

$$\mathbf{e}_n \times \big(\boldsymbol{E}_1(t) + \boldsymbol{E}_2(t)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Z_a}{s} \times s(\boldsymbol{H}_{t1} - \boldsymbol{H}_{t2})\right] \tag{9.66a}$$

$$\mathbf{e}_n \times \big(\boldsymbol{E}_1(t) - \boldsymbol{E}_2(t)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Z_b}{s} \times s(\boldsymbol{H}_{t1} + \boldsymbol{H}_{t2})\right] \tag{9.66b}$$

となる．時間領域において，電磁シールド内部の電界は，9.1.2.1 節の議論から，静電界の項を除いた

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.67}$$

であり， 2 次元解析の場合には磁界は磁束密度を用いて

$$\boldsymbol{H} = \nu_0 \boldsymbol{B} \tag{9.68a}$$

$$\boldsymbol{A} = A\mathbf{e}_z \tag{9.68b}$$

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_y = \nabla A(x,y) \times \mathbf{e}_z \tag{9.68c}$$

となる．ここで，簡単のため $A \coloneqq A_z$ とする．(9.66)を逆 Laplace 変換するとつぎのような微分方程式を得る．

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial}{\partial t}\big(A_1(t) + A_2(t)\big) = \left(r_\infty^a + \sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{s + p_j^a}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n}\right) \tag{9.69a}$$

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial}{\partial t}\big(A_1(t) - A_2(t)\big) = \left(r_\infty^b + \sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^b}{s + p_j^b}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} + \frac{\partial A_2}{\partial n}\right) \tag{9.69b}$$

さて，(9.69)が時間領域において表れるインピーダンス境界条件であるが，時間微分が含まれているため，離散化が必要である．時間方向の離散化の方法は，第 2 章 2.5.2 節で述べた通りであるが，未知数が多くなると計算が煩雑になってしまうので，ここでは後進 Euler 法を用いた時間微分項の離散化を行う．

本節では，(9.69a)の離散化を行う．(9.69b)についても同様の手続きで対応することができる．後進 Euler 法を用いて，

$$-\frac{\partial}{\partial t}\big(A_1(t) + A_2(t)\big) = -\frac{(A_1^n + A_2^n) - (A_1^{n-1} + A_2^{n-1})}{\Delta t} = -\frac{\tilde{A}_1^n + \tilde{A}_2^n}{\Delta t} \tag{9.70a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n}\right) = \frac{(B_{n1}^n - B_{n2}^n) - (B_{n1}^{n-1} - B_{n2}^{n-1})}{\Delta t} = \frac{\big(\tilde{B}_{n1}^n - \tilde{B}_{n2}^n\big)}{\Delta t} \tag{9.70b}$$

を得る．ここで

$$\tilde{A}_1^n \coloneqq A_1^n - A_1^{n-1} \tag{9.71a}$$

$$\tilde{B}_{n1}^n \coloneqq B_{n1}^n - B_{n1}^{n-1} \tag{9.71b}$$

とおいた．また，文字右上の添え字 $n, n-1$ は時間ステップを表し，磁束密度の右下の添え字の n は境界上の磁束密度のうち法線成分を表すことを意味する．

このような設定で，(9.69)の畳み込み積分を評価する．しかし，直接的な畳み込み積分を行うと，第 7 章で述べたように全ての過去値の記憶が必要となるため，ここでも RC 法を適用できるように式変形を工夫する．まず，準備として，つぎのように磁束密度に関する関数を用意する．

$$\widetilde{\mathcal{B}}_a(t) \coloneqq \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n}\right) = \frac{\tilde{B}_{n1}^n - \tilde{B}_{n2}^n}{\Delta t} \tag{9.72}$$

(9.72)を用いると，(9.69a)は

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial}{\partial t}\big(A_1(t) + A_2(t)\big) = \left(r_\infty^a + \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\big(-p_j^a t\big)\right) \otimes \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n}\right)$$

$$= \left(r_\infty^a + \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\big(-p_j^a t\big)\right) \otimes \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) = r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) + \int_0^t \widetilde{\mathcal{B}}_a(t-\tau) \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\big(-p_j^a \tau\big)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) + \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) \int_0^{\Delta t} \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\big(-p_j^a \tau\big)\,\mathrm{d}\tau$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big) \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\big(-p_j^a \tau\big)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) + \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) \sum_{j=1}^{q} \left[-\frac{r_j^a}{p_j^a} \exp\big(-p_j^a \tau\big)\right]_0^{\Delta t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big) \sum_{j=1}^{q} \left[-\frac{r_j^a}{p_j^a} \exp\big(-p_j^a \tau\big)\right]_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}$$

$$= r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) + \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) \sum_{j=1}^{q} \left[-\frac{r_j^a}{p_j^a} \exp\big(-p_j^a \tau\big)\right]_0^{\Delta t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big) \sum_{j=1}^{q} \left[-\frac{r_j^a}{p_j^a} \exp\big(-p_j^a \tau\big)\right]_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}$$

$$= r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) + \widetilde{\mathcal{B}}_a(t) \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a}\big\{1 - \exp\big(-p_j^a \Delta t\big)\big\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\exp\big(-kp_j^a\Delta t\big)\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\}=\widetilde{\mathcal{H}}_a(t) \tag{9.73}$$

と変形することができる．ここで，(9.73)の最後の変形において得られた項をまとめて $\widetilde{\mathcal{H}}_a(t)$ とおいた．なお，部分分数の項に $p_j^a=0$ の項がある場合はステップ関数を用いた畳み込み積分

$$r_0^a u(t)\otimes\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)=\int_0^t\widetilde{\mathcal{B}}_a(t-\tau)r_0^a u(\tau)d\tau$$

$$=\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)\int_0^{\Delta t}r_0^a u(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big)\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}r_0^a u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)r_0^a\Delta t+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big)r_0^a\Delta t \tag{9.74}$$

の項を(9.73)の左辺に加えればよい．

さて，n ステップにおける時間 $t\coloneqq n\Delta t$ において，$\widetilde{\mathcal{H}}_a(t)$ はつぎのように書き換えられる．

$$\widetilde{\mathcal{H}}_a^n=r_\infty^a\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)+\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)r_0^a\Delta t+\widetilde{\mathcal{B}}_a(t)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big)r_0^a\Delta t+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a\big((n-k)\Delta t\big)\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\exp\big(-kp_j^a\Delta t\big)\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\}$$

$$=r_\infty^a\widetilde{\mathcal{B}}_a^n+\widetilde{\mathcal{B}}_a^n r_0^a\Delta t+\widetilde{\mathcal{B}}_a^n\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k}\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\exp\big(-kp_j^a\Delta t\big)\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\}+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k}r_0^a\Delta t$$

$$=(r_\infty^a+r_0^a\Delta t+\chi_a^0)\widetilde{\mathcal{B}}_a^n+\sum_{k=0}^{n-2}\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-1}\big(\chi_a^{k+1}+r_0^a\Delta t\big) \tag{9.75a}$$

$$\chi_a^k\coloneqq\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\sum_{j=1}^{q}r_j^a\exp\big(-p_j^a\tau\big)\,\mathrm{d}\tau=\sum_{j=1}^{q}\frac{r_j^a}{p_j^a}\exp\big(-kp_j^a\Delta t\big)\big\{1-\exp\big(-p_j^a\Delta t\big)\big\} \tag{9.75b}$$

$$\chi_a^0 = \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a}\{1 - \exp(-p_j^a \Delta t)\} \tag{9.75c}$$

また，1 ステップ前の畳み込み積分の値，つまり $\widetilde{\mathcal{H}}_a^{n-1}$ は

$$\widetilde{\mathcal{H}}_a^{n-1} = (r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-1}(\chi_a^k + r_0^a \Delta t) \tag{9.76}$$

であるから

$$\widetilde{\mathcal{H}}_a^{n} - \widetilde{\mathcal{H}}_a^{n-1} = (r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n} - r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1-k} \Delta\chi^k$$

$$= (\nu_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n} - r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} - \Phi_a^{n-1} \tag{9.77a}$$

$$\Phi_a^{n-1} \coloneqq \sum_{k=0}^{n-2} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-1} \Delta\chi_a^k = \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} \Delta\chi_a^0 + \sum_{k=1}^{n-2} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-1} \Delta\chi_a^k$$

$$= \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} \Delta\chi_a^0 + \sum_{k=0}^{n-3} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1-k-1} \Delta\chi_a^{k+1} = \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} \Delta\chi_a^0 + \sum_{k=0}^{n-3} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-2} \Delta\chi_a^{k+1}$$

$$= \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} \Delta\chi_a^0 + \exp(-p_j^a \Delta t) \sum_{k=0}^{n-3} \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-k-2} \Delta\chi_a^k = \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} \Delta\chi_a^0 + \exp(-p_j^a \Delta t)\Phi_a^{n-2} \tag{9.77b}$$

$$\Delta\chi_a^k \coloneqq \chi_a^k - \chi_a^{k+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a} \exp(-k p_j^a \Delta t)\{1 - \exp(-p_j^a \Delta t)\} - \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a} \exp(-(k+1) p_j^a \Delta t)\{1 - \exp(-p_j^a \Delta t)\}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a} \exp(-k p_j^a \Delta t)\{1 - 2\exp(-p_j^a \Delta t) + \exp(-2 p_j^a \Delta t)\}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^a}{p_j^a} \left(1 - \exp(-p_j^a \Delta t)\right)^2 \tag{9.77c}$$

となる．ここで，(9.77b)は第 7 章の(7.13)と同様の帰納的集積関数である．結局，

$$\widetilde{\mathcal{H}}_a^{n} = \widetilde{\mathcal{H}}_a^{n-1} + (\nu_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\widetilde{\mathcal{B}}_a^{n} - r_\infty^a \widetilde{\mathcal{B}}_a^{n-1} - \Phi_a^{n-1} \tag{9.78}$$

のように，n ステップにおける畳み込み積分を集積値の形でまとめることができる．

以上の手続きは，マルチターンコイルを時間領域で均質化する場合の定式化と同様の方針であったが，(9.78)においては磁気ベクトルポテンシャルと境界上の磁束密度の法線成分がそれぞれ (9.71), (9.72) のように置き換えられていたので，これらを元に戻す必要がある．したがって，畳み込み積分の置き換え

$$\tilde{\mathcal{H}}_a^n = -\frac{1}{\nu_0}\frac{\tilde{A}_1^n + \tilde{A}_2^n}{\Delta t} = \left(r_\infty^a + \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\left(-p_j^a t\right) \right) \otimes \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n} \right)$$

$$= \left(r_\infty^a + \sum_{j=1}^{q} r_j^a \exp\left(-p_j^a t\right) \right) \otimes \frac{\tilde{B}_{n1}^n - \tilde{B}_{n2}^n}{\Delta t} \tag{9.79}$$

から，

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{\tilde{A}_1^n + \tilde{A}_2^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\nu_0}\frac{\tilde{A}_1^{n-1} + \tilde{A}_2^{n-1}}{\Delta t} + (r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\frac{\tilde{B}_{n1}^n - \tilde{B}_{n2}^n}{\Delta t}$$

$$-r_\infty^a \frac{\tilde{B}_{n1}^{n-1} - \tilde{B}_{n2}^{n-1}}{\Delta t} - \Phi_a^{n-1}$$

$$= (r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\frac{\tilde{B}_{n1}^n - \tilde{B}_{n2}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\nu_0}\frac{\tilde{A}_1^{n-1} + \tilde{A}_2^{n-1}}{\Delta t} - r_\infty^a \frac{\tilde{B}_{n1}^{n-1} - \tilde{B}_{n2}^{n-1}}{\Delta t} - \Phi_a^{n-1} \tag{9.80}$$

となり，

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{(A_1^n + A_2^n) - (A_1^{n-1} + A_2^{n-1})}{\Delta t} = (r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)\frac{(B_{n1}^n - B_{n2}^n) - (B_{n1}^{n-1} - B_{n2}^{n-1})}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{\nu_0}\frac{(A_1^{n-1} + A_2^{n-1}) - (A_1^{n-2} + A_2^{n-2})}{\Delta t} - r_\infty^a \frac{(B_{n1}^{n-1} - B_{n2}^{n-1}) - (B_{n1}^{n-2} - B_{n2}^{n-2})}{\Delta t} - \Phi_a^{n-1} \tag{9.81}$$

を得る．ここで，帰納的集積関数(9.77b)を磁束密度を用いて改めると

$$\Phi_a^{n-1} \coloneqq \tilde{\mathcal{B}}^{n-1}\Delta\chi_a^0 + \exp\left(-p_j^a \Delta t\right)\Phi_a^{n-2}$$

$$= \frac{(B_{n1}^{n-1} - B_{n2}^{n-1}) - (B_{n1}^{n-2} - B_{n2}^{n-2})}{\Delta t}\Delta\chi_a^0 + \exp\left(-p_j^a \Delta t\right)\Phi_a^{n-2} \tag{9.82}$$

であるので，磁束密度の値の帰納的集積関数として扱うことができる．

(9.81)は時間差分の方程式として表されているが，インピーダンス境界条件に求められるのは，n ステップ目の関係式なので，n ステップ目の物理量に注目して整理すると

$$\mu_0(A_1^n + A_2^n) = -(r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)(B_{n1}^n - B_{n2}^n) + P_a^{n-1} \tag{9.83a}$$

$$P_a^{n-1} \coloneqq 2\mu_0(A_1^{n-1} + A_2^{n-1}) - \mu_0(A_1^{n-2} + A_2^{n-2})$$

$$+(2r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_a^0)(B_{n1}^{n-1} - B_{n2}^{n-1}) - r_\infty^a(B_{n1}^{n-2} - B_{n2}^{n-2}) + \Delta t\Phi_a^{n-1} \tag{9.83b}$$

となる．(9.83a)は n ステップ目の関係式，(9.83b)は $n-1$ ステップまでの過去値の集積値である．

さて，以上は(9.69a)の時間に関する離散化であったが，(9.69b)についても同様の手順で離散化可能である．考慮すべき境界条件は

$$\mu_0(A_1^n - A_2^n) = -\left(r_\infty^b + r_0^b \Delta t + \chi_b^0\right)(B_1^n + B_2^n) + P_b^{n-1} \tag{9.84a}$$

$$P_b^{n-1} \coloneqq 2\mu_0(A_1^{n-1} - A_2^{n-1}) - \mu_0(A_1^{n-2} - A_2^{n-2}) + \left(2r_\infty^b + \chi_b^0\right)(B_{n1}^{n-1} + B_2^{n-1}) - r_\infty^b(B_{n1}^{n-2} + B_{n2}^{n-2}) + \Delta t \Phi_b^{n-1} \tag{9.84b}$$

$$\Phi_b^{n-1} \coloneqq \widetilde{\mathcal{B}}^{n-1}\Delta\chi_b^0 + \exp\left(-p_j^b \Delta t\right)\Phi_b^{n-2} = \frac{(B_{n1}^{n-1} + B_{n2}^{n-1}) - (B_{n1}^{n-2} + B_{n2}^{n-2})}{\Delta t}\Delta\chi_b^0 + \exp\left(-p_j^b \Delta t\right)\Phi_b^{n-2} \tag{9.84c}$$

$$\Delta\chi_b^0 \coloneqq \sum_{j=1}^{q} \frac{r_j^b}{p_j^b}\left(1 - \exp\left(-p_j^b \Delta t\right)\right)^2 \tag{9.84d}$$

と求めることができる．

本節で求めた(9.83), (9.84)が，時間領域における薄い電磁シールドの渦電流を考慮した境界条件となる．(9.83), (9.84)を電磁シールドに課すことで，周波数領域の場合のように，電磁シールドを厚さ 0 の境界面として扱える．しかし，第 7 章で求めたマルチターンコイルの場合のマクロ実効磁気抵抗と比較すると，非常に複雑である．また，伝達関数を求める際には，過去の値を含めて有限要素方程式と連立する必要がある．

次節では，伝達関数の形で(9.83), (9.84)を再表記し，数値の大小関係から有効な近似に関して検討する．

9. 5. 4　時間領域における伝達関数

9.5.3 節において求めた(9.83), (9.84)をつぎのように改める．

$$-\frac{\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_0^a}(A_1^n + A_2^n) = B_1^n - B_2^n - \frac{P_a^{n-1}}{r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_0^a} \tag{9.85a}$$

$$A_1^n - A_2^n = -\frac{r_\infty^b + \chi_0^b}{\mu_0}(B_1^n + B_2^n) + \frac{P_b^{n-1}}{\mu_0} \tag{9.85b}$$

ここで，n ステップ目の係数を

$$\tilde{\alpha} \equiv -\frac{\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a \Delta t + \chi_0^a} \tag{9.86a}$$

$$\tilde{\beta} \equiv -\frac{r_\infty^b + \chi_0^b}{\mu_0} \tag{9.86b}$$

と定義すると，(9.85)は

$$\tilde{\alpha}A_2^n + B_2^n = -\tilde{\alpha}A_1^n + B_1^n - \frac{\tilde{\alpha}}{\mu_0}P_a^{n-1} \tag{9.87a}$$

$$-A_2^n - \tilde{\beta}B_2^n = -A_1^n + \tilde{\beta}B_1^n + \frac{P_b^{n-1}}{\mu_0} \tag{9.87b}$$

となる．(9.87)を行列形式で示すと

$$\begin{bmatrix} A_2^n \\ \dfrac{\partial A_2^n}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\begin{bmatrix} 1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -2\tilde{\beta} \\ -2\tilde{\alpha} & 1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^n \\ \dfrac{\partial A_1^n}{\partial n} \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\begin{bmatrix} -\tilde{\beta} & -1 \\ 1 & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{\tilde{\alpha}}{\mu_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_a^{n-1} \\ P_b^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.88}$$

という伝達関数の形が得られる．(9.88)の過去値以外については，9.2 節の周波数領域における伝達関数(9.27)と本質的に同じである．さて，(9.87)において，P_a^{n-1}, P_b^{n-1} を陽に表して，(9.88)を再記述すると，(9.83b), (9.84b)から

$$\begin{bmatrix} A_2^n \\ \dfrac{\partial A_2^n}{\partial n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\begin{bmatrix} 1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -2\tilde{\beta} \\ -2\tilde{\alpha} & 1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^n \\ \dfrac{\partial A_1^n}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\mu_0(1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -1 \\ -\tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} & \dfrac{2r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} \\ 2 & \dfrac{2r_\infty^b + \chi_b^0}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{n-1} \\ \dfrac{\partial A_1^{n-1}}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\mu_0(1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -1 \\ -\tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} & -\dfrac{2r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} \\ -2 & \dfrac{2r_\infty^b + \chi_b^0}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2^{n-1} \\ \dfrac{\partial A_2^{n-1}}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\mu_0(1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -1 \\ -\tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} & -\dfrac{r_\infty^a}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} \\ -1 & -\dfrac{r_\infty^b}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{n-2} \\ \dfrac{\partial A_1^{n-2}}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\mu_0(1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -1 \\ -\tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} & \dfrac{r_\infty^a}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} \\ 1 & -\dfrac{r_\infty^b}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2^{n-2} \\ \dfrac{\partial A_2^{n-2}}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\mu_0(1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -1 \\ -\tilde{\alpha} & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2\mu_0}{r_\infty^a + r_0^a\Delta t + \chi_a^0} & 0 \\ 0 & \dfrac{2r_\infty^b + \chi_b^0}{\mu_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_a^{n-1} \\ \Phi_b^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.89}$$

となる．ここで，(9.89)において，過去値の集積値の計算に必要なのは$n-1, n-2$ ステップ目の物理量である．マルチターンコイルの場合とは異なり，$n-2$ ステップ目の物理量が表れるのは，9.5 節冒頭で行った，境界インピーダンスを修正する際に，磁界に s を乗じていたが，これは時間領域では微分演算に相当するので，畳み込み積分の際に時間微分項の離散化に$n-1, n-2$ ステップ目の値が要求されていたことに起因する．

つぎに，(9.89)を有限要素方程式に導入することを考える．周波数領域の際に現れた(9.44a)に対応する写像はつぎのように書ける．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{a}_2^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \\ \boldsymbol{b}_2^n \end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \end{bmatrix} + \mathrm{P}_1\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{n-1} \\ \boldsymbol{a}_2^{n-1} \\ \boldsymbol{b}_1^{n-1} \\ \boldsymbol{b}_2^{n-1} \end{bmatrix} + \mathrm{P}_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{n-2} \\ \boldsymbol{a}_2^{n-2} \\ \boldsymbol{b}_1^{n-2} \\ \boldsymbol{b}_2^{n-2} \end{bmatrix} + \mathrm{C}_1\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_a^{n-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_b^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.90a}$$

$$\mathrm{T} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{(n-n_b)\times(n-n_b)} & & \mathrm{O}_{n_b\times(n-n_b)} \\ & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^n & \\ & \mathrm{I}_{n_b\times n_b} & \\ \mathrm{O}_{(n-n_b)\times n_b} & & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)\times N} \tag{9.90b}$$

$$\mathrm{P}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{(n-n_b)\times(n-n_b)} & & \mathrm{O}_{n_b\times(n-n_b)} \\ & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-1} & \\ & \mathrm{I}_{n_b\times n_b} & \\ \mathrm{O}_{(n-n_b)\times n_b} & & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)\times(N+2n_b)} \tag{9.90c}$$

$$\mathrm{P}_2 \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{(n-n_b)\times(n-n_b)} & & \mathrm{O}_{n_b\times(n-n_b)} \\ & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-2} & \\ & \mathrm{I}_{n_b\times n_b} & \\ \mathrm{O}_{(n-n_b)\times n_b} & & \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)\times(N+2n_b)} \tag{9.90d}$$

$$\mathrm{C}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{(n-n_b)\times(n-n_b)} & & \mathrm{O}_{n_b\times(n-n_b)} \\ & \tilde{\mathrm{P}}_{n_b\times n_b}^{n-1} & \\ & \mathrm{I}_{n_b\times n_b} & \\ \mathrm{O}_{(n-n_b)\times n_b} & & \tilde{\mathrm{Q}}_{n_b\times n_b}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)\times(N+2n_b)} \tag{9.90e}$$

ここで，$\tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^n, \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-1}, \tilde{\mathrm{Z}}_{n_b\times n_b}^{n-2}$ は(9.89)から求められる各ステップの時間領域インピーダンス境界条件から求められる時間領域の関数である．また，$\tilde{\mathrm{P}}_{n_b\times n_b}^{n-2}, \tilde{\mathrm{Q}}_{n_b\times n_b}^{n-1}$ は帰納的集積関数に乗ぜられる係数行列である．また，過去値からなるベクトルを$\boldsymbol{p}_1 = [\boldsymbol{a}_1^{n-1} \quad \boldsymbol{a}_2^{n-1} \quad \boldsymbol{b}_1^{n-1} \quad \boldsymbol{b}_2^{n-1}]^t \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)}, \boldsymbol{p}_2 = [\boldsymbol{a}_1^{n-2} \quad \boldsymbol{a}_2^{n-2} \quad \boldsymbol{b}_1^{n-2} \quad \boldsymbol{b}_2^{n-2}]^t \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)}$, $\boldsymbol{\phi}_1 = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\Phi}_a^{n-1} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\Phi}_b^{n-1}]^t \in \mathbb{R}^{(N+2n_b)}$と定義すると，有限要素方程式(9.40)は

$$\mathrm{K}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{a}_2^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \\ \boldsymbol{b}_2^n \end{bmatrix} = \mathrm{KT}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} - \mathrm{KP}_1\boldsymbol{p}_1 - \mathrm{KP}_2\boldsymbol{p}_2 - \mathrm{KC}_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{9.91}$$

となる．ここで，$\mathrm{KP}_1\boldsymbol{p}_1, \mathrm{KP}_2\boldsymbol{p}_2, \mathrm{KC}_1\boldsymbol{\phi}_1$ は過去値なので，ソース源として右辺ベクトルに追加していることに注意する．(9.91)は(9.45)と同様に，一般的には非対称行列となる．この場合でも，BiCGStab 法を用いて解くことができるが，対称行列に直して解く場合には，(9.91)の両辺に左から T^t を乗じて得られた

$$\mathrm{T}^t\mathrm{KT}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^n\\ \boldsymbol{b}_1^n\end{bmatrix} = \mathrm{T}^t\boldsymbol{c} - \mathrm{T}^t\mathrm{KP}_1\boldsymbol{p}_1 - \mathrm{T}^t\mathrm{KP}_2\boldsymbol{p}_2 - \mathrm{T}^t\mathrm{KC}_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{9.92}$$

を ICCG 法で解けばよい．

また，均質化されたマルチターンコイルが解析領域に含まれる場合，コイルの回路方程式と有限要素方程式を連立して解くことが必要になる．この際には第 7 章で述べたように，Cauer 型等価回路における電圧方程式と(9.91)を連立して得られる連立方程式

$$\begin{bmatrix}\mathrm{KT} & -\boldsymbol{c} & & & & 0\\ -\boldsymbol{c}^t & -R_1\Delta t - L_1 & L_1 & & & \\ & L_1 & -R_2\Delta t - L_1 - L_2 & L_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & L_{q-1} & -R_q\Delta t - L_q - L_{q-1} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^n\\ \boldsymbol{b}_1^n\\ i_1^n\\ i_2^n\\ \vdots\\ i_q^n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i_1^{n-1}\boldsymbol{c} \\ -v_0^n\Delta t - (R_1\Delta t + L_1)i_1^{n-1} + L_1 i_2^{n-1} - \boldsymbol{c}^t\cdot\boldsymbol{a}_1^{n-1} \\ L_1 i_1^{n-1} - (R_2\Delta t + L_1 + L_2)i_2^{n-1} + L_2 i_3^{n-1} \\ \vdots \\ L_{q-1}i_{q-1}^{n-1} - \left(R_q\Delta t + L_{q-1} + L_q\right)i_q^{n-1} \end{bmatrix} - \mathrm{KP}_1\boldsymbol{p}_1 - \mathrm{KP}_2\boldsymbol{p}_2 - \mathrm{KC}_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{9.93}$$

を解けばよい．

(9.93)を解くことで，$\boldsymbol{a}_1^n, \boldsymbol{b}_1^n$ および Cauer 型等価回路の各ループ電流が求められる．求めた $\boldsymbol{a}_1^n, \boldsymbol{b}_1^n$ を(9.91)に代入することで，$\boldsymbol{a}_2^n, \boldsymbol{b}_2^n$ が計算できる．

9. 5. 5　周波数が十分高い場合の伝達関数の近似

9.5.4 節で求めた伝達関数(9.89)が，電磁シールドに課すべき時間領域インピーダンス境界条件である．しかし，(9.89)や(9.93)の取り扱いは大変複雑である．

そこで，文献[7.3]において議論されている FDTD 法における，電磁シールドに課すインピーダンス境界条件の適用に関して，周波数帯域や電磁シールドの材質によって，インピーダンス境界条件の定数項のみで近似しても十分に精度のよい解析ができることが議論されている．この方法に基づき，(9.89)の近似を検討する．したがって，(9.89)はつぎのように近似することができる．

$$\begin{bmatrix}A_2^n\\ \dfrac{\partial A_2^n}{\partial n}\end{bmatrix} \approx \frac{1}{1-\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\begin{bmatrix}1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta} & -2\tilde{\beta}\\ -2\tilde{\alpha} & 1+\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^n\\ \dfrac{\partial A_1^n}{\partial n}\end{bmatrix} \tag{9.94}$$

実用上は，(9.94)を用いて，境界上の写像を

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{a}_2^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \\ \boldsymbol{b}_2^n \end{bmatrix} \approx \mathrm{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^n \\ \boldsymbol{b}_1^n \end{bmatrix} \tag{9.95}$$

とすればよい.

9. 5. 6　時間領域インピーダンス境界条件の妥当性

9.5.5 節の方法を用いて，Fig.9.20 に示すモデルにおいて，9 回巻きの磁性被覆線に流れる電流の過渡応答を求める．Fig.9.20 は第 8 章で示した Fig.8.1 でも示したモデルと同様であるが，本法では，電磁シールドは時間領域のインピーダンス境界条件に置換されている．したがって，電磁シールドは形状モデリング上厚み 0 として扱われることに注意する．また，磁性被覆コイルは第 7 章の方法により均質化されており，入力電圧として第 8 章で述べた PWM を用いる．解析緒元を Table 9.7 に，提案手法と従来法による有限要素解析における解析領域を 1 次三角形要素で離散化した図を Fig.9.21 に示す．従来の有限要素法では，渦電流を考慮するため全要素数は 1,940,693 であったが，提案手法では 22,241 であった．入力電圧を $\mathrm{V} = 2.5, 5.0$ Volt とした場合の磁性被覆線に流れる電流の過渡応答を Fig.9.22 に示す．Fig.9.22 から，両者により得られた電流波形は十分に一致しており，提案手法の妥当性，有効性が確認できる．ただし，電磁シールドの解析諸元によっては極と留数の値が大きくなると係数行列の数値不安定性が生じてしまう可能性があるので，展開次数や表皮厚，電磁シールドの厚さ等のスケールには注意を要する．

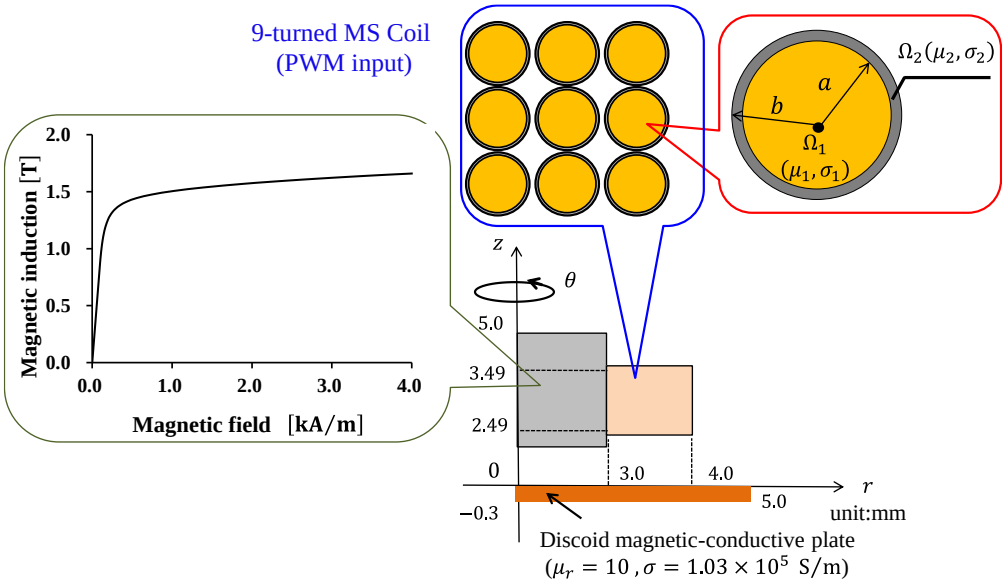
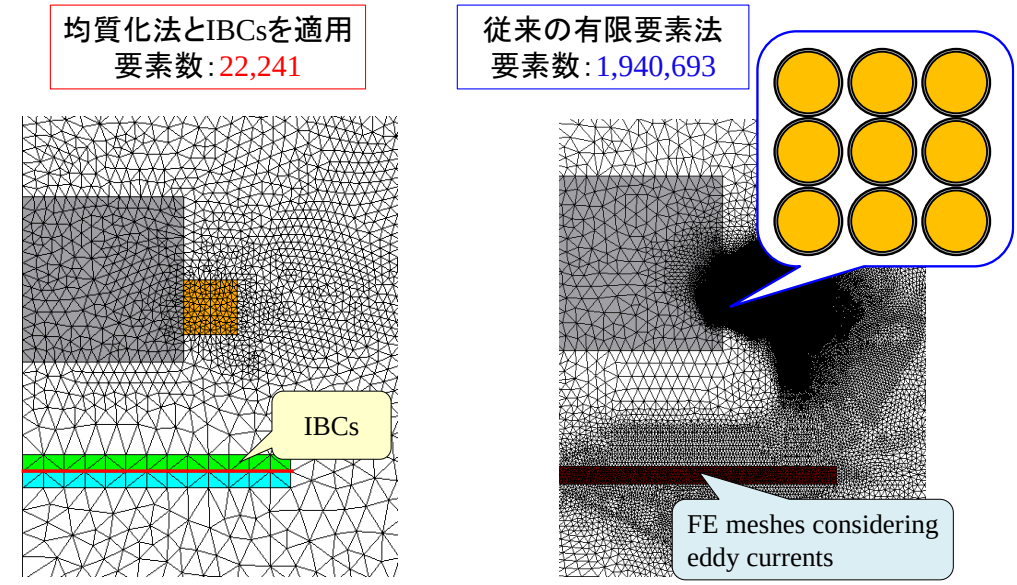


Fig.9.20 Multi-turn MS coil placed above a discoid conductor plate.
When using proposed approach, the MSC is homogenized with the macroscopic effective magnetic reluctivity as derived in chapter 7. Moreover, the magnetic shield, which is denoted by the discoid conductor plate, is replaced with impedance boundary conditions (IBCs) evaluated by (9.94).

Table 9.7 Specification of the MSC as shown in Fig. 9.20

a [mm]	0.15	b [mm]	0.16
μ_{1r}	1.0	μ_{2r}	10.0

σ_1 [S/m]	5.76×10^7	σ_2 [S/m]	1.03×10^4
μ_r^{Plate}	10	σ^{Plate} [S/m]	1.03×10^5
η	0.82	l [mm]	94.5



(a) Proposed approach　　(b) Standard FEM

Fig.9.21 FE discretizations required in applying the proposed approach and the standard FEM.
When we apply the homogenization method using the macroscopic effective magnetic reluctivity and impose IBCs on the electromagnetic shield, the number of finite elements is 22,241. On the other hand, the standard FEM requires over 2,000,000 elements because spatial discretization of the MSC and shield regions considering the eddy currents is needed.

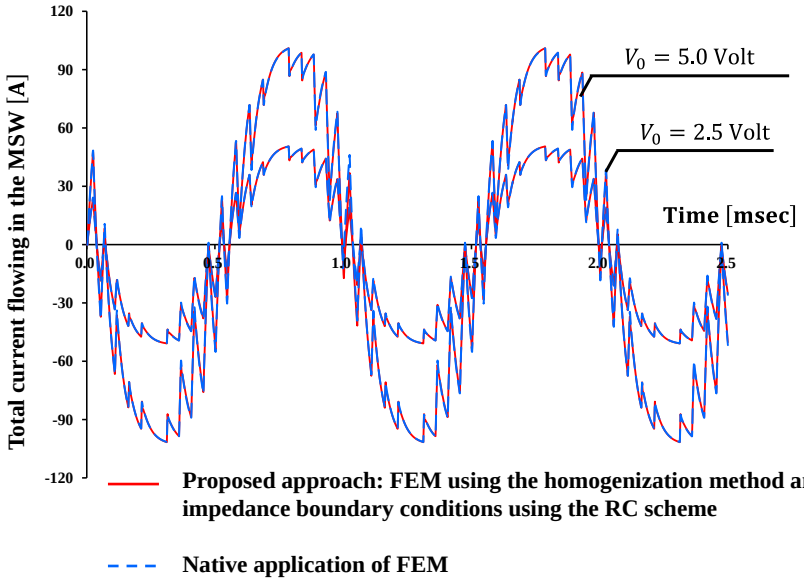


Fig.9.22 Time-response of the current flowing in the MSW calculated by the proposed approach and the standard FEM.
From this figure, it is found that the coincidence between them is satisfactory. Finally, we reach the conclusion that the proposed approach based on the homogenization method and IBCs is effective for numerical computation of quasi-static electromagnetic fields considering the eddy currents.

9. 6 第 9 章の総括

本章では, 電磁シールドを含む系の渦電流場解析に有効なインピーダンス境界条件と均質化有限要素法の妥当性，および有効性について述べた．従来の有限要素解析を用いても 2 次元場ならば解析が可能である場合もあるが，3 次元解析では本法に準ずる方法を用いなければ，解析が難しいと思われる．また，提案手法は，周波数領域，時間領域いずれにおいても適用が可能である．しかしながら，電磁シールドの磁気特性が非線形性を有する場合には本法を修正する必要がある．このことについては今後の研究課題として残された事項である．

さて，本章，並びに第 7 章の議論では，周波数領域の関数を時間領域の関数に変更する際には，複素関数の有理関数表示，並びに部分分数展開の逆 Laplace 変換を用いた．その際には, 連分数展開表示から, Padé 近似により有理関数表示を求める方法を用いた．マルチターンコイル，電磁鋼板，電磁シールドそれぞれのモデル化において，それぞれの渦電流特性を表す関数に対して，それぞれに対応する連分数展開公式が存在し，連分数を有限の段数で打ち切り，Padé 近似を用いることにより有理関数表示を求めたが，数学的にはこれらは統一的に記述することができる．Appendix F では超合流幾何関数を用いた記述法を用いた統一的な記述方法に関して述べる．

第 9 章 参考文献

[9.1] H. Igarashi, A. Kost and T. Honma, “Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its applications to integral equations”, European Phys.J., AP 7, (1998), 103-110.

[9.2] 宇野亨，「FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析」，コロナ社，1998 年.

[9.3] M. Feliziani, F. Maradei, G. Tribellini, “Field Analysis of Penetrable Conductive Shields by the Finite-Difference Time-Domain Method with Impedance Network Boundary Conditions (INBC’s)”, *IEEE Trans.* Electromagnetic Compatibility, vol.41. no.4, pp.307-319, 1999.

[9.4] 鹿児島憲一，「光・電磁波工学」，コロナ社，2003 年.

[9.5] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[9.6] R. Luebbers, et al., "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials", *IEEE Trans*. Electromagnetic Compatibility, vol.32, no. 3, pp.222-227, 1990.

[9.7] 佐藤佑樹，「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」，2019 年度北海道大学博士論文.

第 10 章 結論と今後の研究課題

本研究では，近年の電気機器の高周波化に伴い，マルチターンコイルの細線化，磁性被覆線，SMC コアが損失の低減に有効であることが研究背景であることを述べた．損失の低減には機器の構造を適切に設定することが必要になるが，実験ベースでは試作コストや製造時間が膨大であるため，有限要素解析による損失の評価，および最適化が有効となることについて述べた．しかしながら，直接的な有限要素解析においては，細線，圧粉磁芯，ならびに機器全体の有限要素サイズのマルチスケール性が発生してしまい，直接的な有限要素解析が適用困難になってしまうことについて述べた．

そこで，このような微細な有限要素解析を回避するための，準定常電磁界におけるコイル，SMC コアのモデリングに有効な均質化有限要素法，並びに電磁シールドのモデリングに有効なインピーダンス境界条件を用いて，コイル素線，圧粉磁芯，電磁シールドを含む系の渦電流を考慮した解析が効率的にできることを示した．

均質化有限要素法において，コイル・SMC コアはマクロ複素透磁率を有する均質化媒質として扱うことができるため，それぞれバルクコイル・1 つの磁性体コアとしてモデリング可能である．ゆえに，膨大な有限要素による磁性体単体の離散化を回避できる．

一方，電磁シールドは，その内部の電磁気特性を反映したインピーダンス境界条件を用いて，厚さ 0 の境界条件に置換することができる．したがって，有限要素解析領域内に，電磁シールドが存在する系の解析においては，この境界条件を用いることで，電磁シールド内部の渦電流を考慮した有限要素による離散化を行う必要はなくなる．

本法を用いて，コイル・SMC コアの損失評価を精度を落とさず迅速に行うことができる．また，漏洩磁界を防ぐための電磁シールドが有限要素空間内に存在していても解析を行うことが可能である．さらに，均質化有限要素法は，近接効果による渦電流損失を抑制するために，銅線を薄い磁性体で被覆した磁性被覆線に対しても有効であることを示した．

以下では，各章のまとめを示す．また，最後に残された研究課題と，今後の研究予定に関して述べる．なお，以下の図番号は，各章の対応する図番号と共に付している．

第 1 章　序論　研究背景と目的

第 1 章では，本研究の背景・目的・構成を述べた．本研究の社会的背景には，環境負荷低減のために，電磁機器の損失低減が求められる．このような電磁機器における損失は，界磁巻線内部の渦電流に起因する銅損と磁性体コア中の鉄損からなる．近年の電気電子部品の小型化を目的とした駆動周波数の高周波化に伴い，これらの損失を低減することはこれからの電気機器の設計には欠かせない要因となる．

界磁巻線中の渦電流の損失は，入力電流による渦電流からなる表皮効果と，外部磁界が素線にもたらす電磁誘導からなる近接効果から発生する．特に，高周波帯においては，近接効果損が顕著となる．そこで，近年銅線を薄い磁性体で被覆した磁性被覆線を高周波帯の電磁機器の界磁巻線として採用することが検討されている．磁性被覆線を用いる

と，外部磁界は磁性体層に集中するため，銅線と鎖交する磁束を低減することができ，結果として近接効果損を抑制できる．また，渦電流損失の低減と平行して，充填率を改善するために，界磁巻線の平角線化も検討されている．

一方で，磁性体コア中に生じる鉄損は，渦電流損と磁気ヒステリシス損・磁気飽和からなる．これらの損失を抑制するために，圧粉磁芯を成型して作られる SMC コアを用いることが検討されている．SMC コアは 3 次元形状を成型しやすく，設計・加工が容易であるため，生産に適している．

さらに，こうした高周波帯で駆動する電磁機器の設計においては，外部の電子機器への外部漏洩磁界の抑制も設計上無視できない項目となる．したがって，周囲に適切な電磁シールドを設けることが望ましい．設計対象となる電磁機器毎に，透磁率，電磁シールド厚，形状等を適切に設定することが要求される．

上記に述べたような磁性被覆線，SMC コア，電磁シールドを含めた電磁機器の最適化構造を検討することは，これからの環境負荷低減のための電磁機器の製造にあたり重要な課題である．しかしながら，損失低減のための電磁機器の構造最適化を実験ベースで行うことは難しい．そこで，電磁界解析を用いた迅速な構造最適化を行うことが必要になる．すなわち計算電磁気学と最適化理論を組み合わせた CAD(Computer Aided Design)によって新たな電磁機器の構造を見つけ出すことが望ましい．

電磁機器の最適化のためには，空間分割型の解法である有限要素法が広く採用されている．有限要素法を用いる際には，解析領域全体を有限要素により離散化する行う必要がある．しかしながら，磁性被覆線，SMC コア，電磁シールド中の渦電流を考慮した微細な有限要素分割を直接行うと，マルチスケールを有する有限要素が膨大に必要となり，電磁界有限要素解析の一つの障害となってしまう．結果として，最適化アルゴリズムとの協調が困難になっているのが現状である．

このようなマルチスケール性に起因する微細な有限要素が発生する問題を防ぐため，本研究では，コイル・SMC コアに対してはマクロ複素透磁率を用いた均質化有限要素法を用いて，1 つの均質化媒質として扱うことを検討した．本法においては，細線，磁性粒子 1 つ 1 つをモデル化する必要はない．従来の均質化においては，マルチターンコイルや磁性球体からなるコアの均質化が検討されていたが，磁性被覆線，平角線，並びに異方性と渦電流，磁性粒子の磁気的結合を考慮した均質化法は検討されていなかった．また電磁シールドの扱いに関して，電磁シールドが十分に厚い場合にはその内部構造を特性インピーダンスに置換する表面インピーダンス法が導入されていたが，薄い場合にはその取り扱いについては未解決のままであった．

そこで，本研究においては，新たに磁性被覆線，平角線，並びに異方性と渦電流，磁性粒子の磁気的結合を考慮した均質化有限要素法を導入する．一方で，薄い電磁シールドに対しては，その厚さを 0 として扱うインピーダンス境界条件を導入した．数値解析の結果，微細な有限要素による離散化を行わず，良好な精度で準定常電磁界解析を行えることを示した．本研究の成果は，インダクタ，IPM モータ等の電気部品，非接触給電装置等の電気機器の新しい最適設計に寄与する．

第 2 章　電磁界数値解析のための有限要素法

第 2 章では，本研究における電磁界有限要素解析において，基本となる定式化に関して述べた．要素は三角形要素(節点に磁気ベクトルポテンシャルを配置，0 次 Whitney 要素)，四面体要素(辺に磁気ベクトルポテンシャルを配置，節点に電気スカラーポテンシャルを配置，1 次 Whitney 要素)．また，それぞれの場合における有限要素方程式の求解

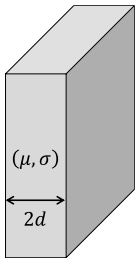
に関して述べた．ただし，有限要素の形状によっては必要に応じて座標変換を行う必要があることを示した上で，その座標変換に伴う手続きを示した．さらに，時間領域解析における時間微分項の離散化に関する方法と，その場合の有限要素方程式を導いた．

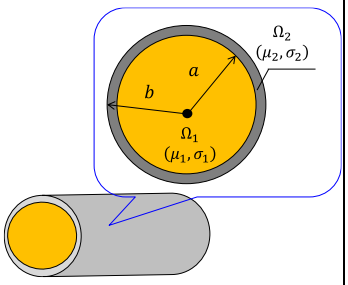
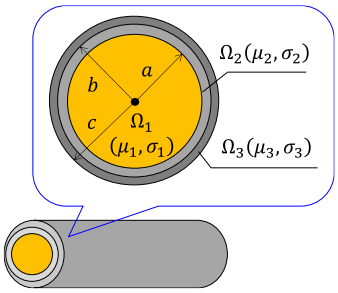
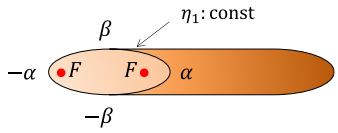
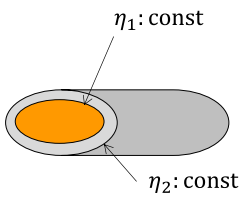
さらに，モータ等の可動体を考える場合の非適合境界条件や，非線形媒質が解析領域内に含まれる場合に使用される Newton-Raphson 法，電源電圧を考慮した回路方程式と有限要素法の連立した場合の方程式についても示した．

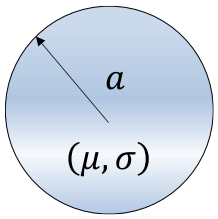
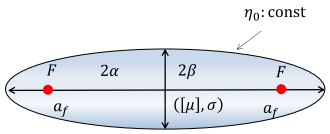
第 3 章　周波数領域における均質化有限要素法

第 3 章では，本研究の主題となる均質化有限要素解析に必要なマクロ複素透磁率を求める方法について述べた．マクロ複素透磁率を求める方法として，unit-cell approach を用いた数値解法，Helmholtz 方程式から解析的に定義した複素透磁率を Ollendorff の式に代入して得る 2 つの方法を示した．特に後者の方法が本論文においては主題となる．本論文においては，電磁鋼板，円筒導線，円筒磁性被覆線，楕円柱導線，楕円磁性被覆線，球形圧粉磁芯，楕円体圧粉磁芯の複素透磁率を解析的に求めている．これらをまとめた表は Table 3.13 に示したが，振り返りとして以下に再掲載する．なお，楕円柱，楕円体の場合では，長軸方向を α，短軸方向を β と表記している．

Table 10.1 Complex permeability of each shape defined in the closed form (Table 3.13)

Shape of magnetic material	Argument ζ	Complex permeability $\dot{\mu}_r$	Demagnetizing factor
slab 	$\frac{kd}{2}=\frac{d}{\delta}(1-\mathrm{j})$	$\mu_2\frac{\tan\zeta}{\zeta}$ (3.24)	$N\approx 0$
cylinder 	$ka=\frac{a}{\delta}(1-\mathrm{j})$	$\mu_r\frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)}=\mu_r\frac{1}{\zeta\frac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)}-1}$ (3.51)	$N=\frac{1}{2}$

Magnetically shielded wire (MSW) 	$k_1 a = \frac{a}{\delta_1}(1-\mathrm{j})$ $\frac{k_2 d}{2} = \frac{d}{2\delta_2}(1-\mathrm{j})$	$\frac{1+\Psi_2(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}{1-\Psi_2(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}$ (3.113a – d)	$N = \frac{1}{2}$
Multi-layered MSW 	$k_1 a = \frac{a}{\delta_1}(1-\mathrm{j})$ $k_2 \frac{(b-a)}{2}$ $= \frac{(b-a)}{2\delta_2}(1-\mathrm{j})$ $k_3 \frac{(c-b)}{2}$ $= \frac{(c-b)}{2\delta_3}(1-\mathrm{j})$	$\frac{1+\Psi_3(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}{1-\Psi_3(\dot{\mu}_r^{wire}, \dot{\mu}_r^{slab})}$ (3.184a – e)	$N = \frac{1}{2}$
elliptic-cylinder 	$q = \frac{k^2 a_f^2}{4}$	along to the long axis α … (3.215a) $\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)}$ along to the short axis β … (3.215b) $\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)}$	$N_x = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ $N_y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
MSW with elliptic cross-section shield thickness: d 	$q = \frac{k^2 a_f^2}{4}$ $\frac{k_2 d}{2} = \frac{d}{2\delta_2}(1-\mathrm{j})$	along to the long axis α … (3.232a), (3.231a) $\dot{\mu}_r^{\alpha} = \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{1+\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_{\alpha}}{1-\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{u}_{\alpha}}$ along to the short axis β … (3.232b), (3.231b) $\dot{\mu}_r^{\beta} = \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{1+\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{\gamma}_{\beta}}{1-\frac{\mathrm{e}^{2\eta_2}}{\mathrm{e}^{2\eta_1}}\dot{\gamma}_{\beta}}$	$N_x =$ $\frac{\beta+d}{(\alpha+d)+(\beta+d)}$ $N_y =$ $\frac{\alpha+d}{(\alpha+d)+(\beta+d)}$

Spherical SMC 	$ka=\frac{a}{\delta}(1-\mathrm{j})$	$2\mu_r\frac{1-\frac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\frac{\tan\zeta}{\zeta}-1}$ (3.288)	$N=\frac{1}{3}$
Spheroidal SMC 	$\zeta^\alpha=$ $ka_f\cosh\eta_0$ $\zeta^\beta=$ $-ka_f\sinh\eta_0$	along to the long axis α … (3.336) $\mu_r^\alpha\frac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\frac{\tan\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2-(\zeta^\alpha)^2)-1\}\frac{\tan\zeta^\alpha}{\zeta^\alpha}-(2\tanh^2\eta_0-1)}$ along to the short axis β … (3.345) $\mu_r^\beta\frac{(\tanh^2\eta_0+1)\left(1-\frac{\tan\zeta^\beta}{\zeta^\beta}\right)}{\left((2-(\zeta^\beta)^2)-\tanh^2\eta_0\right)\frac{\tan\zeta^\beta}{\zeta^\beta}-(2-\tanh^2\eta_0)}$ ※Demagnetizing factor : (3.347)	

第 4 章　複素透磁率の周波数特性と均質化有限要素法の妥当性

第 4 章では，マクロ複素透磁率の比較を，unit-cell approach，並びに Ollendorff の式から求めた方法について行った．数値解析結果から，細線の 2 次元解析においては良好に一致しているとわかった．しかしながら，圧粉磁芯の 3 次元解析の場合には，導体の場合には誤差が生じており，今後の研究課題となっている．また，均質化されたマルチターンコイルの交流抵抗を有限要素解析により求めると，従来の準定常電磁界有限要素解析と十分に一致した結果が得られた．またマルチターンコイルに電流源，電圧源のいずれを接続しても均質化有限解析が行えることがわかった．

数値解析例として，Fig.10.1，10.2 に 3 次元電圧源入力を行った数値解析例を再掲載する．この解析結果より，均質化有限要素法の妥当性が確認できる．

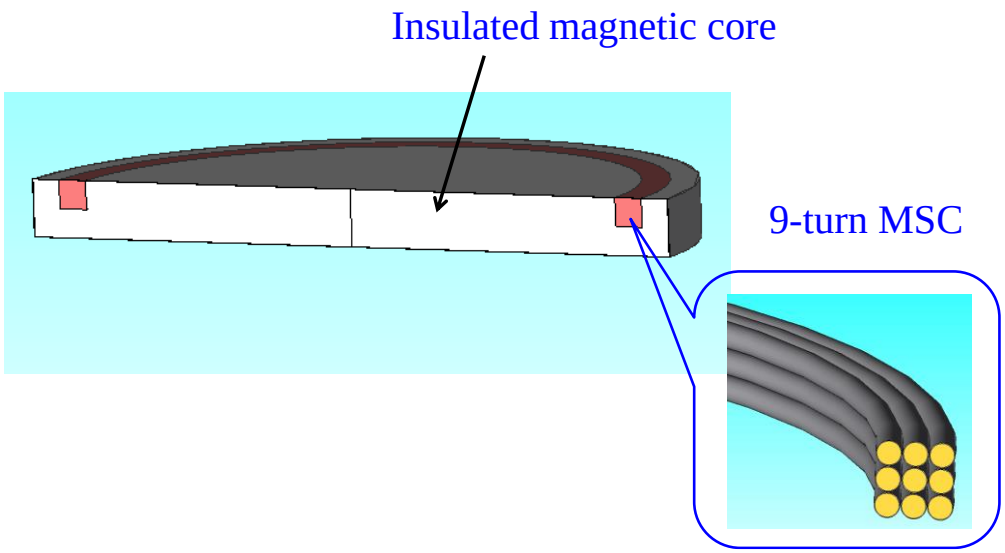
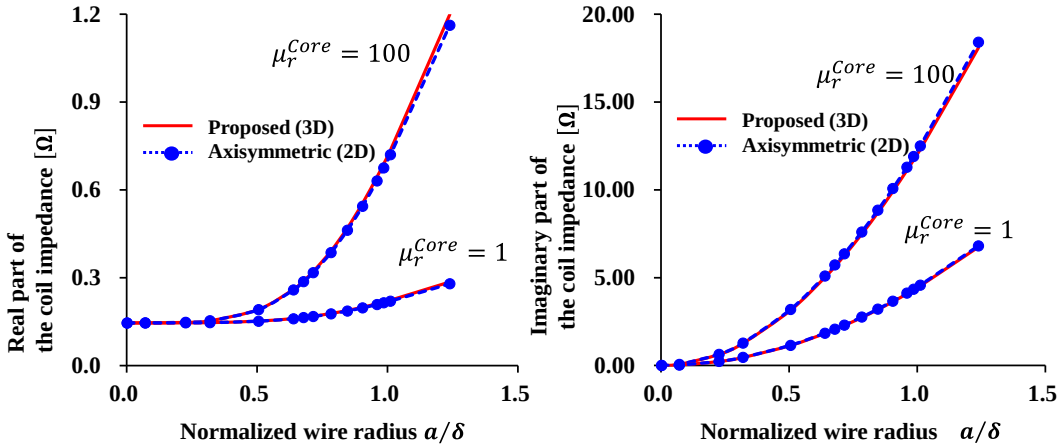


Fig.10.1 3D half model of a MSC connected with a voltage source (Fig. 4.74).



(a) Real part　(b) Imaginary part

Fig.10.2 Impedance of the coil shown in Fig.4.74 connected with the voltage source (Fig.4.77).
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, it can be confirmed that the homogenization-based FEM is valid not only for 2D analysis but for 3D analysis.

第 5 章　磁性被覆コイルの構造最適化

第 5 章では，第 4 章で議論した磁性被覆線を均質化して，構造最適化に関する検討を行った．数値解析の結果，磁性被覆の透磁率が高いほど，直流抵抗に起因する損失を抑制するために，磁性被覆を十分に薄くすることが望まれることがわかった．また，磁性被覆層が多層である場合には，GA による最適化計算の結果，多層構造を有する磁性被覆線は，層の構造がほぼ同じ，すなわち単層が望ましいという結論を得た．

例として Fig.10.3 に示す磁性被覆コイルを絶縁層の厚さを含めて最適化した結果を Table 10.2, 10.3 にまとめた．これらより，磁性被覆層の効果により交流抵抗が十分に抑制されているとわかる．

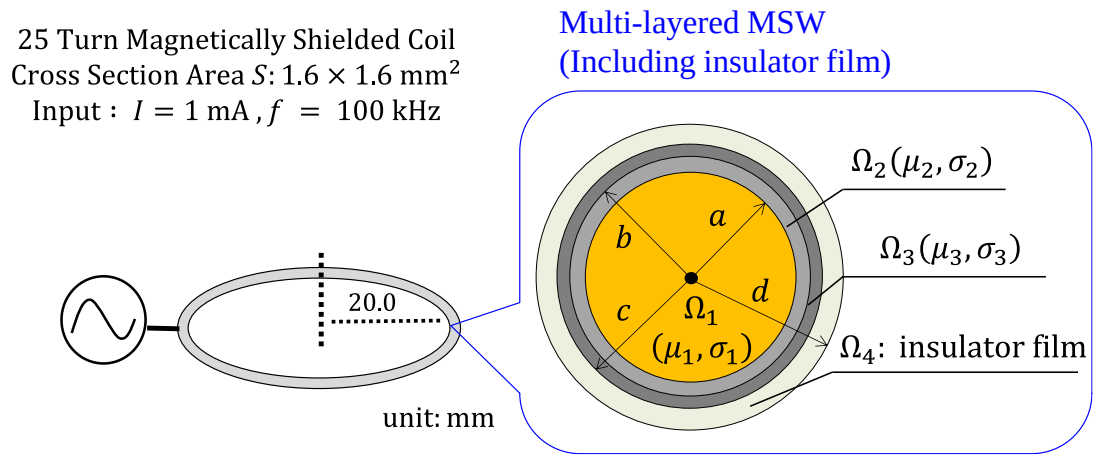


Fig.10.3 25-turn multi-layer-type MSC including an insulator film (Fig.5.14).

Table 10.2 Optimization results (100 kHz・1 Volt input) (Table 5.9)

a [mm]	0.142	μ_{1r}	1	σ_1 [S/m]	5.76×10^7
b [mm]	0.143	μ_{2r}	1000	σ_2 [S/m]	1.00×10^7
c [mm]	0.145	μ_{3r}	1000	σ_3 [S/m]	1.00×10^7

Table 10.3 Comparison of the AC resistance of the multi-layered MSC as shown in Fig.5.14 at 100 kHz (Table 5.10)

No shield	Optimized multi-layered MSC
1.22	0.92

第 6 章　SMC コアの磁性粒子間の磁気的接触を考慮したマクロ複素透磁率

第 6 章では，磁気的接触や磁性粒子サイズの不均一性をも考慮した圧粉磁芯の均質化有限要素解析に関して検討した．解析手法として，磁気回路を用いた磁気的接触の方法，接触判定に乱数を用いて確率的に求めた磁気特性，プレス圧縮した磁性粉体を楕円体で模擬する事等を導入した．

数値解析例として，異方性を有する圧粉磁芯を Fig.10.4 に示すような楕円体近似で考え，磁気的接触確率 P_{th} への依存性を評価した結果を Fig.10.5 に示す．Fig.10.5 より，$P_{th} = 0$ の場合では，孤立した磁性体が集合した場合のマクロ複素透磁率に一致し，さらに P_{th} が高い場合，すなわち磁気的接触が十分に強い場合，実効的な透磁率，及び渦電流損が高くなるとわかる．

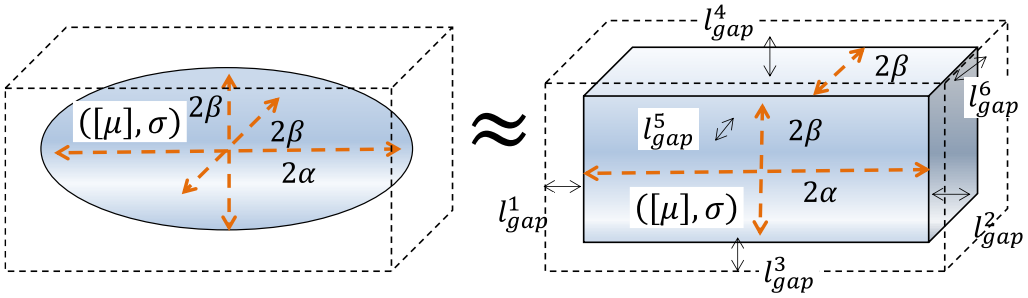
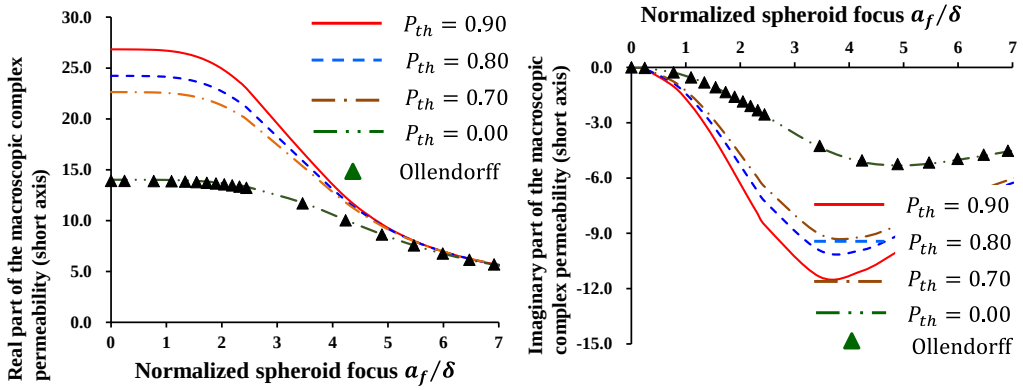


Fig.10.4 Spheroidal SMC in a unit-cell. (Fig.6.8).
In this model, the shape of SMC is approximated to a cuboid.



(a) Real part　　(b) Imaginary part

Fig.10.5 Macroscopic effective permeabilities of spheroidal SMC cores approximated to cuboid shape are plotted in these figures (left : real part, right : imaginary part) (Fig.6.10).
Abscissa and ordinate denote the normalized spheroid focus a_f/δ. From this figure, we find that when P_{th} approaches 0, the magnetic circuit approach and the approach based on the extended Ollendorff formula provide almost the same results.

第 7 章　均質化有限要素法の時間領域解析への拡張

本章から，周波数領域で定義されていたマクロ複素透磁率から，時間領域解析を行うためのマクロ実効磁気抵抗を求め，有限要素解析に導入する手法を述べた．提案手法では，各種磁性体の形状毎の複素透磁率を連分数表示で求めて，マクロ複素磁気抵抗を部分分数展開の形で改める．この表示に対して逆 Laplace 変換を行うことで，時間領域の関数であるマクロ実効磁気抵抗を求める．さらに，有限要素解析における定式化において，畳み込み積分を効率的に評価するための RC 法を導入した．

数値解析結果は，均質化された媒質外に非線形磁気特性を有する磁性体が存在していても，従来の有限要素解析と良好に一致していることがわかった．したがって，本法のように解析的に求めたマクロ実効磁気抵抗を用いた均質化解析は有効であるとわかった．なお，本法で用いたマクロ実効磁気抵抗を求めるための連分数表示の手続きは，Appendix F において述べる超合流幾何関数を用いて統一的に記述することができる．

時間領域における電流波形を提案手法と直接的な有限要素法により評価したデータを Fig.10.6, 10.7 に示す．この解析結果から，提案手法の解析精度は十分であるとわかる．

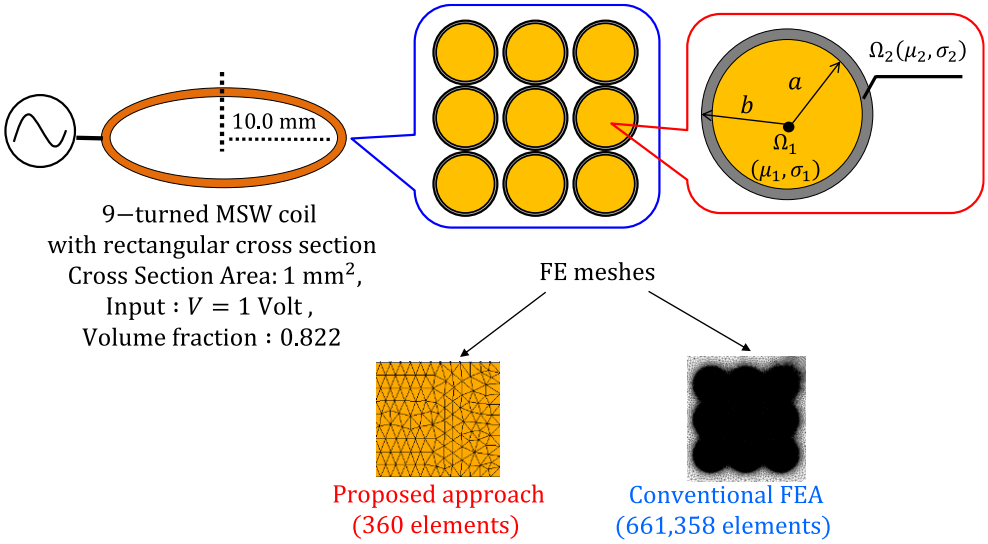


Fig.10.6 9-turn MSC and two types of finite element meshes (Fig.7.13).
FE meshes of the coil region for the proposed approach and the conventional method are depicted. Note here that the specification of this MSW is set so low that the standard FEM is executable.

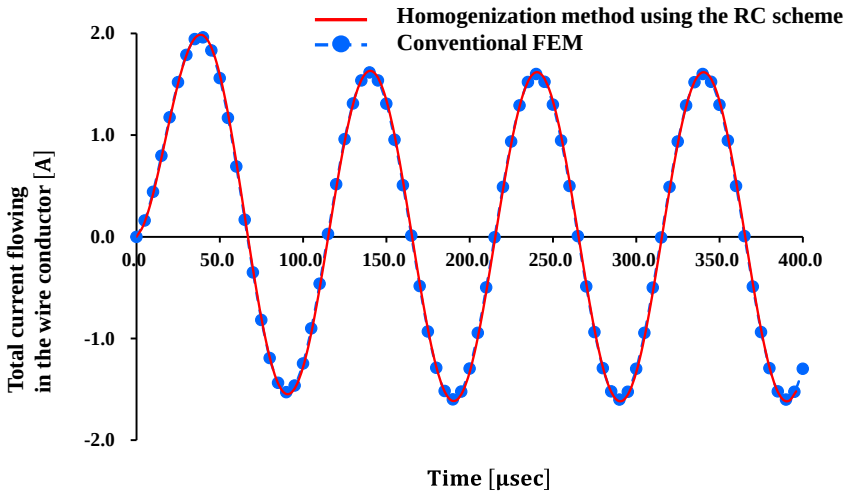


Fig.10.7 Dependence of total current in the MSW on time (Fig.7.14).
From this figure, we find that the validity of this approach is also ensured for FE analysis of MSCs.

第 8 章　磁性被覆線による界磁巻線の銅損低減

本章では，第 7 章で行った時間領域均質化有限要素法を用いて，第 1 章でも述べたように，界磁巻線の銅損低減に関する検討を行った．まず，PWM を入力した場合においても，提案手法は適用可能であることを示した上で，PWM(Pulse Width Modulation)入力に伴う磁性被覆コイル，インダクタの銅損の実効値の磁性被覆の透磁率への依存性を調べた．その結果，磁性被覆の透磁率が高くなるにつれて，近接効果に伴う渦電流損が抑制され，銅損が抑制されることが分かった．また，IPM モータの解析をも行い，モータの界磁巻線の銅損の抑制にも有効であることを明らかにした．さらに，磁性平角線を用いることで，例えばインダクタの素線充填率を高くした上で，銅損の抑制が行えることを示した．

本節の要約として，Fig.10.8 に示すような磁性平角コイルに Fig.10.9 に示すような PWM を入力した場合における磁性平角コイルの瞬時電力を示したグラフを Fig.10. 10 に示す．Fig.10.10 のデータから，提案手法は正弦波入力だけではなく，PWM 入力の場合にも有効であるとわかる．これは，本節でも示したように，円筒形磁性被覆線においても同様である．このことを確認した上で，Fig.10.11 に示すような円筒形磁性被覆を用いたインダクタの銅損の実効値の磁性被覆の比透磁率への依存性を評価した結果を Fig.10.12 に示す．Fig.10.12 から，本論文の目的の 1 つであった磁性被覆(磁性メッキ)線を用いることで，近接効果に起因する損失を抑制できるとわかる．さらに，最適化アルゴリズムと均質化有限要素法を組み合わせて，インダクタ等の電磁部品の新しい最適形状が発見できると期待できる．

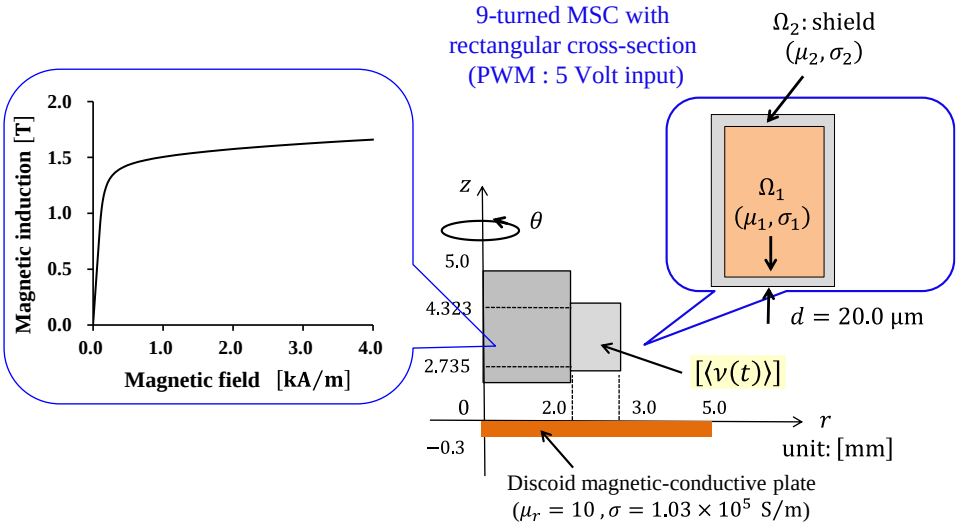


Fig.10.8 9-turn MSC with rectangular cross-section above a discoid conductor (Fig.8.15).
For confirming the validity of the proposed homogenization scheme using tensor the magnetic reluctivity defined for a the MSW with elliptic cross-section, we evaluate the instance values of the current flowing in the wire conductor and loss of the coil by the proposed and the conventional FEM. Note here that when we evaluate the skin effect loss, the DC resistance not of elliptic cross-section but of rectangular cross-section is employed.

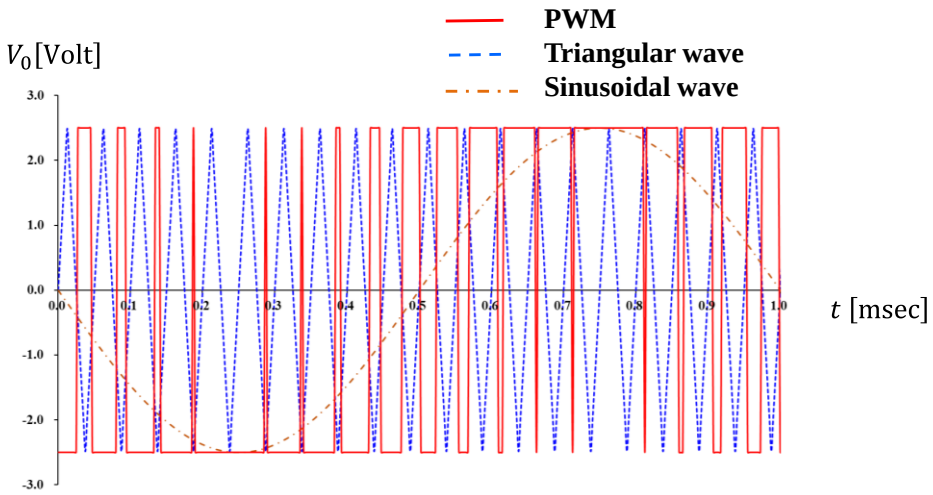


Fig.10.9 Example of pulse width modulation (PWM) (Fig.8.5).
PWM voltage is applied to the termials of the coil.

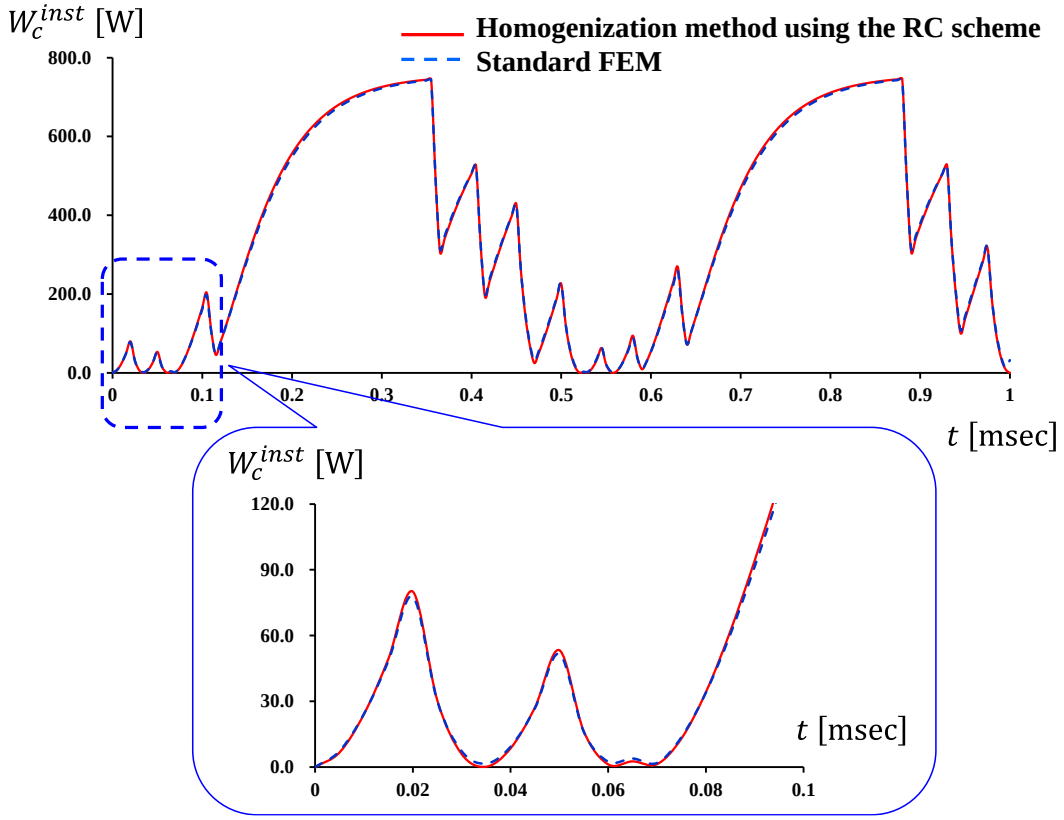


Fig.10.10 Instantaneous the copper losses of the MSC with rectangular cross-section as shown in Fig.8.15 (Fig.8.17). We again see that the copper loss obtained by the proposed method agrees well with that computed by the standard FEM.

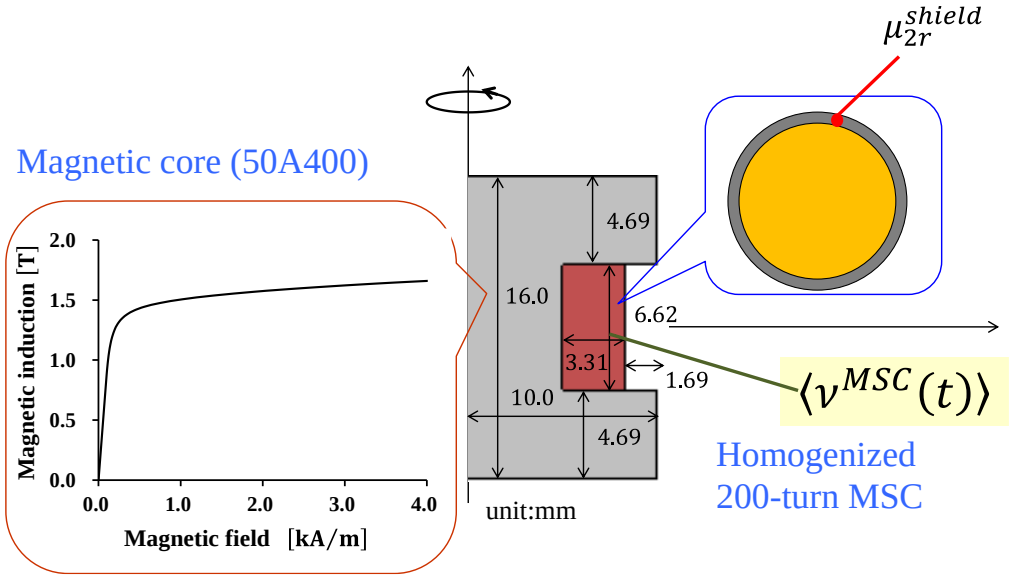


Fig.10.11 Cross-section of an inductor using a cylindrical MSC (Fig.8.10).
In this model, the magnetic core has the non-linear property due to magnetic saturation.

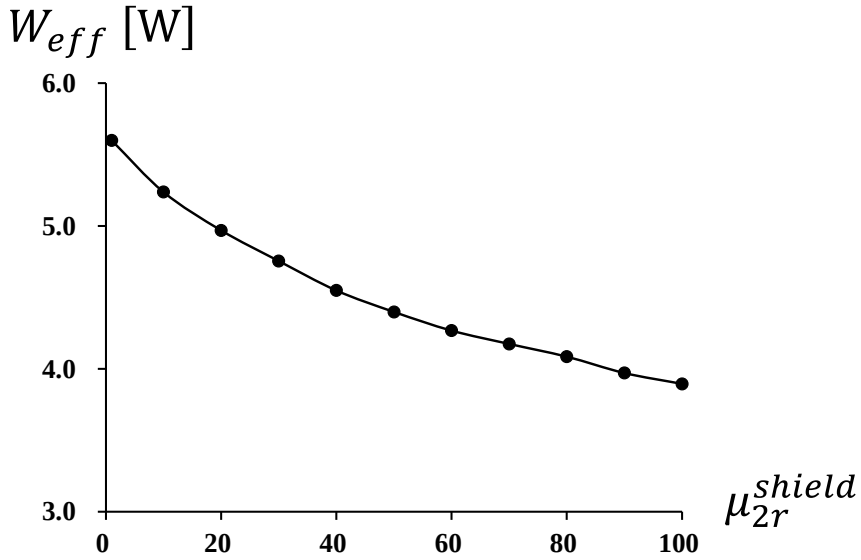


Fig.10.12 Dependence of the copper loss W_{eff} of the MSC in the inductor on the permeability of the magnetic shield μ_{2r}^{shield} (Fig.8.11).
From this figure, it can be concluded that MSCs are effective for reduction of the copper loss in inductors.

第 9 章 インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドのモデリング

本章では, インピーダンス境界条件を用いた電磁シールドを境界条件に置換する方法に関して議論した．まず，周波数領域において，電磁シールドの表皮厚に局在化した電磁界の関係式を求めた．つぎに，磁気ベクトルポテンシャルと磁束密度の法線成分の伝達関数を閉形式で求めた．また，インピーダンス境界条件を 2 次元解析に適用するために，2 重節点を用いた有限要素方程式に導入するための写像変換についても述べた．

さらに，本法を時間領域の解析に対して適用するために，境界条件の逆 Laplace 変換を行うための定式化を与えた．提案手法においては，境界インピーダンスを連分数表示し，Padé 近似により有理関数を作成し，この部分分数展開を行い，第 7 章と同様の時間領域解析へ移行するための手続きから時間領域の伝達関数を求めた．この伝達関数を用いることによって，時間領域においても提案手法が適用できるようになる．

本章で導入したインピーダンス境界条件と第 3 章で示した均質化有限要素法を組み合わせ，十分な解析精度で電磁界解析が行えていることをいくつかの数値解析例で示した．例えば Fig.10.13 のような銅板の上にコイルを配置した場合に正弦波を入力すると，Fig.10.14 に示すように実測と提案手法によるコイルの実効インピーダンスが十分に一致していることからも，提案手法は十分に有効である．したがって，集合した微細な磁性体は均質化媒質として，薄い導電性磁性体はインピーダンス境界条件として取り扱うことができると言える．

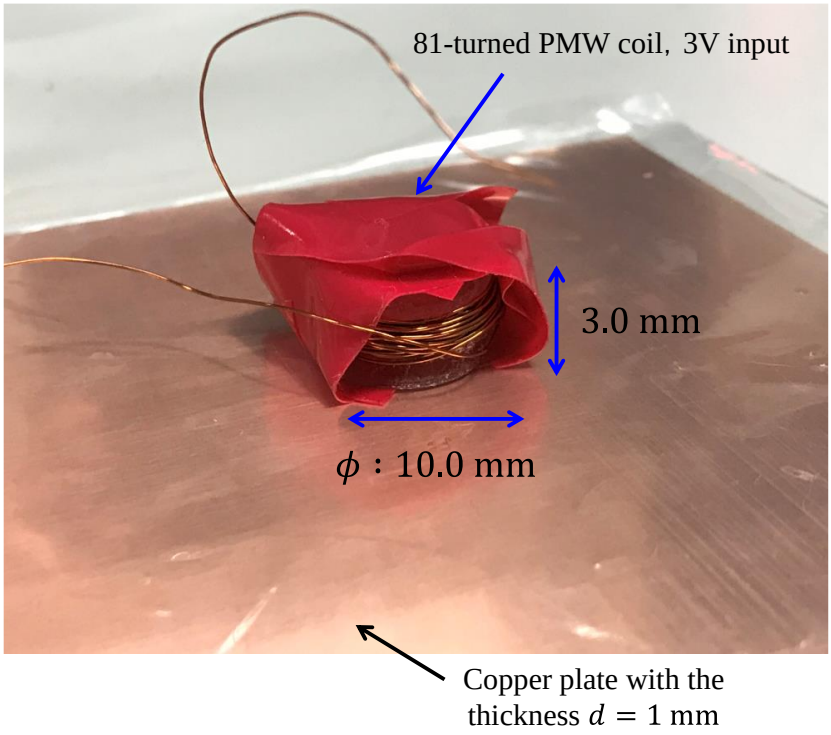
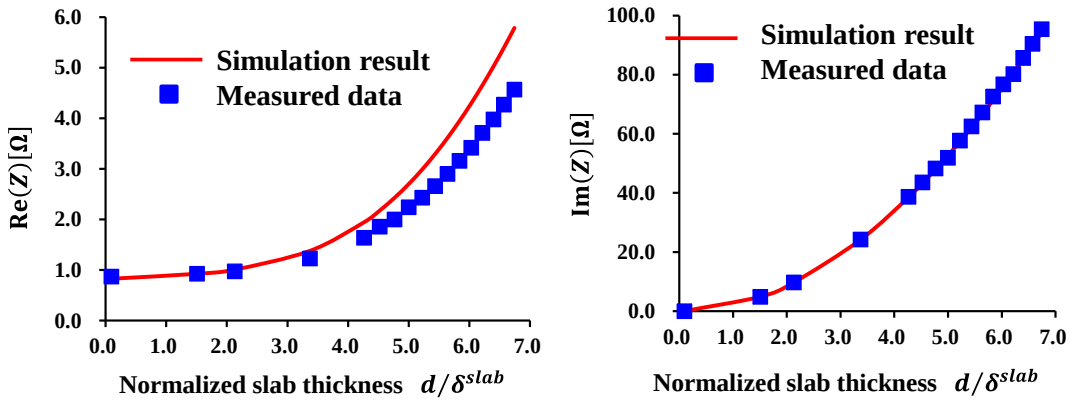


Fig.10.13 Experiment model for homogenization scheme and impedance boundary conditions (IBCs) (Fig.9.8).
In this experiment, the 81-turn PWM coil whose conductor radius and cover thickness are 0.15mm and 0.03 mm, respectively, is placed above the Cu plate. We measured the coil impedance by connecting the coil terminal to a LCR meter. Moreover, the bobbin for this coil is made of photocurable resin, PRH35-ST2, whose inner diameter is 10 mm.



(a) Real part (b) Imaginary part

Fig.10.14 Frequency characteristic of the coil impedance of experiment model shown in Fig.9.8 (Fig.9.9).
Abscissa denotes the thickness of the slab d normalized by the skin depth δ^{slab}. From this graph, it can be concluded that the homogenization scheme and IBCs give the sufficiently accurate computational results. Thus, we can recognize a multi-turn coil and a magnetic-conductive thin slab as a homogenized material using the macroscopic complex permeability and the impedance boundary, respectively.

本研究の今後の課題

本論文においては，準定常電磁界解析における渦電流を考慮した微細な有限要素解析を回避するための均質化有限要素法，並びにインピーダンス境界条件について導入した．提案手法を用いることで，静磁界と同様な有限要素解析が可能となるため，通常の性能の計算機を用いても微細な系や電磁シールドを含む系の準定常電磁界解析が行える．また，本法は励磁コイルに電流源，電圧源を接続しても，周波数領域，時間領域いずれの解析にも有効であることを示した．さらに，3 次元空間内のコイルに対しては，マクロ複素透磁率を座標変換を行ったテンソル型磁気抵抗に変更し，対角スケーリングを用いることで条件数の悪化を防ぐことで，均質化有限要素法は適用可能であることも示した．

しかしながら，本研究においては，下記の点が未解決の要素として残っている．以下では本研究の今後の展望について述べる．

- 数 10 ~ 100 MHz で駆動するようなインダクタにおいて，素線間，磁性粒子間の静電容量を考慮した解析
- SMC コアの設計に関して，大域的に流れる渦電流の効果を含めた均質化法
- 第 4 章で示した 3 次元解析における unit-cell approach から計算したマクロ複素透磁率と周波数領域に拡張した Ollendorff の式から評価したマクロ複素透磁率の差異に関する考察
- 磁性被覆線における磁性体層の磁気飽和を考慮した畳み込み積分の効率的な評価法
- 磁性被覆コイルと SMC コアを用いた非接触給電装置をモデル化するための T 型等価回路を用いた解析
- ON/OFF 法，遺伝的アルゴリズム，応答曲面法等による IPM モータ，非接触給電装置等の実際の電気機器の最適設計
- 電磁シールド内部の非線形磁気特性を考慮したインピーダンス境界条件
- 3 次元空間内の電磁シールドに対するインピーダンス境界条件の導入
- 平角線を用いた IPM モータの銅損抑制と最適化構造の発案

謝辞・編集後記

まず初めに，本論文を手に取り，拝読していただいた読者の皆様方に感謝申し上げます．読者の皆様方が取り組まれていらっしゃる研究課題は様々であると存じますが，直接的な場面に限らず，本書で取り上げた発想も含め，部分的にでも本論文が読者の皆様の研究・学業の一助となれば，著者としてはこの上ない喜びです．本論文においては計算理論が中心となったために，数式による展開が多くなってしまいました．予想以上の分量となってしまったことに伴い，詳細についてはすべてを記載すると全体の見通しが悪くなることを懸念し，その一部についてはこの後の Appendix にて詳細な議論を付しました．そちらについても適宜ご参考いただければ幸いです．また，著者の思わぬところで誤植があることや，説明が不明瞭になってしまっている部分があることを懸念しています．そのような箇所についてはご容赦いただきたく存じております．重ねて，長文にも関わらず，最後まで本論文に目を通してくださったことについて深謝いたします．

本研究については未解決事項がまだ多数残されています．個人的には，まだまだやれることがあったと常々感じています．例えば本論文で示した電磁界解析手法と最適化理論を合わせた電気機器のトポロジー最適化までは至りませんでした．電気機器のトポロジー最適化については第 1 章でも述べたようにこれからの電気機器の省エネルギー化に向けて，今後の課題として残された重要な研究課題と言えます．これに関して博士論文で大きく取り上げることができなかったことが心残りであります．しかしながら，本博士論文においては微小ではございますが，数学，物理学，解析学，計算電磁気学における新しい知見を示すことができたものと思います．

さて，話は移りますが，本研究の遂行にあたり，学内外の多くの方々にお世話になったことについても感謝の念がつきません．周囲の方々のサポートなくして本研究の遂行はあり得ませんでした．この場をお借りし，感謝の言葉を述べさせていただきます．まずは学内でお世話になった方々に対する御礼を申し上げます．

本論文をまとめるにあたり，常に温かいご指導を賜り，その全般にわたって終始熱心にご指導いただきました，五十嵐一教授には，大変お世話になりました．特に，本研究課題のような重要な課題を任せていただいたことには感謝の念がつきません．また，就職活動や生活一般に至るまで，サポートをしていただきました．特に，乱筆の原稿を数多く修正していただきました．また，Compumag2019 では，Oral セッションの一番最初で発表するという大役を仰せつかりましたが，先生の指導の下，無事に乗り切ることができたと感じています．

同研究室の野口聡准教授には．海外主張の際，特にお世話になりました．不慣れな外国の雰囲気でしたが，無事に乗り切ることができました．また，論文執筆に当たり，アイデアを多分に出していただき，特に第 1 章や第 10 章の構成修正には大きな反映がありました．

また研究活動に伴う膨大な事務処理を肩代わりしていただいた事務補佐員の齊藤尚代，村上永恵氏，技術職員としてご尽力いただきました今井適氏に厚く御礼申し上げます．学外での学会発表が遂行できたのも，このような事務補佐があったからであると感じます．

また，研究室内において，研究室の先輩であり修了生であります佐藤佑樹さん，伊藤泰久さんには，学部学生時代より研究のご指導を承りました．本研究が遂行できたのも先輩方のご指導があってのことだと感じています．特に伊藤泰久さんのご指導により第6章が，佐藤佑樹さんのご指導により第7章の執筆ができたものと感じています．

研究室外において，本学情報科学研究科システム情報科学専攻の先生方には学部課程，修士課程，博士課程と長きにわたり学業や就職活動等において大変お世話になりました．この場をお借りして厚くお礼申し上げます．

つぎに，学外で交流があった方々への謝辞を述べさせていただきます．

まず，修士課程在学中に，渦電流形変位センサの研究にあたり，数々のご助言を提供して頂きました当時のシステム展開情報学講座の渡辺正浩客員教授に厚く御礼申し上げます．研究室のみでは得られない重要な知見を得られたと感じています．インターンシップにも参加させていただき，貴重な社会経験ができました．

さらに，学会期間中に熱く議論をしていただいた，各大学の先生方，関係者の皆様にこの場をお借りして，深謝いたします．数多くの貴重なご意見を頂き，本研究が遂行できたものと考えています．

特に秋田工業専門学校の伊藤桂一先生には終始にわたって面倒を見ていただきました．研究のアドバイスのみならず，初めて訪れる外国の都市で案内してくださったことに加え，就職活動にいたっても幾度なく相談に乗っていただいたことには心より感謝いたします．数多くの他大学の先生方の中でも，一番関わりが深かった先生であったと常々感じています．

博士論文執筆にあたり，全体を通じて，多忙な毎日でした．しかし学術振興会特別研究員として，研究活動，学会発表を遂行することができたのは，大きな財産であったと感じています．忙しい研究活動の中で，自分の能力が十分に高められたものと感じます．研究遂行能力に始まり，文章技法，仕事の方法，コミュニケーション能力等多種多様な能力が身に付いたと思います．また研究者・技術者としての基礎も十分に身に付いたものと実感しています．国際学会の場でOral発表が行えたことも，大きな一歩であったと考えています．

最後となりましたが，北海道大学情報科学研究科の教務課の皆様には学内の仕事の度に生じる膨大な書類等についての作業を行って頂いたことに加えて，学内業務についてはことある毎に協力していただきました．特に本原稿の度重なる修正にも関わらず，逐一修正に応じ，丁寧に対応して下さった事について改めて厚く御礼申し上げます．

==========

これからは，新しい環境に移ることになります．自身の自己研鑽をより一層行い，過去の業績以上のことができるように，もう一度新たな「スタートライン」に立ったつもりで，社会貢献に資する人材になるよう努力を継続する所存です．

2020年1月

藤田　祥伍

研究業績

査読付き学術論文

1. S. Fujita, H. Igarashi, "Finite-Element Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenization Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 54, no. 3, Art. no. 7401104, 2018.

2. S. Fujita, H. Igarashi, "Finite element analysis of multi‐turn magnetoplated coils using homogenization method", Wiley Online Library, DOI.org/10.1002/eej.23156, 2018.

(Translated from Volume 137 Number 3, pages 223–229, DOI: 10.1541/ieejpes.137.223 of *IEEJ* Transactions on Power and Energy (Denki Gakkai Ronbunshi B))

3. Y. Otomo, Y. Sato, S. Fujita, H. Igarashi, "Synthesis of Equivalent Circuit of Wireless Power Transfer Device Using Homogenization-Based FEM", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 54, no. 3, 7401005, 2018.

4. S. Fujita, H. Igarashi, "Homogenization of multi-turn coil with elliptic cross-section using complex permeability", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 38, No. 3, pp. 999-1008, 2019.

5. S. Fujita, H. Igarashi, "Reduction of Eddy Current Loss in Rectangular Coils Using Magnetic Shield Analysis with Homogenization Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 55, no.6, DOI: 10.1109/TMAG. 2907686, 2019.

6. S. Fujita, H. Hiruma, and H. Igarashi, "Time-Domain Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenized Finite Element Method ", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 56, no. 2, DOI: 10.1109/TMAG. 2950497, 2019.

7. 藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法を用いた多重巻き楕円断面コイルの時間領域解析」，電気学会論文誌 B，vol.140, no.5, pp.1-7，2020.

学術雑誌レター

1. H. Igarashi, Y. Sato, S. Fujita, S. Hiruma, Y. Otomo, “Homogenization and Model Order Reduction for Fast FE analysis”, Int. COMPUMAG Society, Newsletter, vol.24, no.1, pp.3-14, 2017.

国際会議講演

1. H. Igarashi, Y. Ito, Y. Sato, S. Fujita, “Homogenized analysis of fine wires”, EMF 2016, PB-26, Lyon in France, Apr., 2016.

2. H. Igarashi, Y. Otomo, S. Fujita, Yuki Sato, “Finite Element Analysis of Multi-turn Coils for Contactless Power Transfer”, ICEF 2016, 2016, Sep., Xi’an.

3. S. Fujita, H. Igarashi, "Finite Element Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenization Method", Compumag2017, PD-A6-7, Daejeon, Korea, June, 2017.

4. Y. Otomo, Y. Sato, S. Fujita, and H. Igarashi, "Synthesis of Equivalent Circuit of Wireless Power Transfer Device Using Homogenization-based FEM," Compumag2017, PB-A6-7, Daejeon, Korea, June, 2017.

5. S. Fujita, H. Igarashi, "Homogenization-Based Finite Element Analysis of Reactors Considering Eddy Currents in SMC cores and Windings", ISEM2017, P-SOC-1:5, Chamonix-Mont-Blanc, France, September, 2017.

6. S. Fujita, H. Igarashi, "Optimization of Magnetically Shielded Wire Using Homogenization-Based Finite Element Method", JSST2017, OS2:Session21, Tokyo, Japan, October, 2017.

7. S. Fujita, H. Igarashi, "Homogenization of Multi-turn Coil with Elliptic Cross Section Using Complex Permeability", OIPE2018, Oral Session 5-4, Hall in Tirol, Austria, September, 2018.

8. S. Fujita, H. Igarashi, "Model Order Reduction of Conductive Thin Sheets for Time-Domain Analysis with IBCs", IGTE2018, O2-5, Graz, Austria, September, 2018.

9. S. Fujita, H. Igarashi, "Reduction of Eddy Current Loss in Rectangular Coils Using Magnetic Shield Analysis with Homogenization Method", CEFC2018, MBP5-10, Hangzhou, China, October, 2018.

10. S. Fujita, H. Igarashi, "Time-Domain Analysis of Magnetically Shielded Wire Coils Using Homogenized Finite Element Method", Compumag2019, OA1-3, Paris, France, July, 2019.

11. S. Fujita, H. Igarashi, "Time-Domain Finite Element Analysis of Rectangular Magnetically Shielded Wire Based on Homogenization Method", JSST2019, OS2:Session29, Miyazaki, Japan, 2019.

国内会議発表

1. 藤田祥伍，五十嵐一，西亀正志，三澤智也，渡辺正浩，「表皮・近接効果を考慮した巻線の均質化法解析」，第 28 回電磁力関連のダイナミクスシンポジウム，講演論文集，20B4-5，2016 年，5 月，横浜.

2. 藤田祥伍，五十嵐一，「磁性メッキ線の均質化有限要素解析」，電気学会静止器・回転機合同研究会，SA-16-058, RM-16-104, 2016 年，9 月，沖縄.

3. 比留間真悟，藤田祥伍，五十嵐一，「複素透磁率を用いた積分方程式：導体細線の解析」，電気学会静止器・回転機合同研究会，SA-16-060, RM-16-106, 2016 年，9 月，沖縄.

4. 藤田祥伍，五十嵐一，「渦電流形変位センサの均質化有限要素解析の基礎検討」，平成 28 年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会，OS-1, 2016 年，11 月，札幌.

5. 大友佳嗣，藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法を用いた非接触給電系の等価回路生成」，第 25 回 MAGDA コンファレンス，PS-34，2016 年，11 月，群馬.

6. 大友佳嗣，藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法を用いた非接触給電系の解析」，電気学会静止器・回転機合同研究会，SA-17-23, RM-17-23, 2017 年，1 月，東京.

7. 藤田祥伍，五十嵐一，「均質化有限要素法を用いた磁性メッキ線の電磁界解析及び磁束線の可視化」, 非線形問題の解法に関する研究会, 第 2 回非線形・可視化部門研究会, 2017，1 月，岐阜.

8. 藤田祥伍，五十嵐一，「複素実効透磁率を用いた渦電流センサの解析」，第 29 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム，6-0-06，岡山，5 月，2017.

9. 藤田祥伍，五十嵐一，「複素透磁率を用いた多層磁性被覆線の渦電流解析」，非線形問題の解法に関する研究会，13，岐阜，8 月，2017.

10. 藤田祥伍, 五十嵐一,「均質化有限要素法とインピーダンス境界条件を用いた渦電流変位センサの電磁界解析」，平成 30 年電気学会全国大会，5-119，福岡，3 月，2018.

11. 藤田祥伍, 五十嵐一,「異方性と渦電流を考慮した圧粉磁芯の均質化モデル, 平成 31 年電気学会全国大会」，5-130，札幌，3 月，2019.

12. 藤田祥伍, 五十嵐一,「磁性被覆線による銅損低減効果の均質化有限要素解析, 第 28 回 MAGDA コンファレンス」，OB-3-7，大分，10 月，2019.

競争的資金の獲得

1：日本学術振興会特別研究員 DC2,

研究課題：磁性被覆線を用いたワイヤレス電力伝送装置の解析と最適化設計
採択年：2018 年，工学，科研番号 18J10778
2018 年度 1,000,000 円，2019 年度 900,000 円

2：村田財団海外派遣研究助成採択,

研究課題：Homogenization-Based Finite Element Analysis of Reactors Considering Eddy Currents in SMC cores and Windings
採択年：2017 年度，海外派遣(ISEM2017),

学術に関する表彰

1. 電気学会静止器技術委員会，優秀奨励賞受賞，2017 年 2 月 28 日
2. 精密工学会北海道支部，学生奨励賞受賞，2017 年 3 月 23 日
3. JSST 2017，Student Presentation Award, 2017 年 10 月
4. JSST2018，Encouragement Award，2018 年 9 月
5. 電気学会全国大会優秀論文発表，2019 年 3 月 13 日
6. Student travel award，2019 年 7 月

Appendix A　Clausius-Mossotti の式・Maxwell-Garnett の式によるマクロ等価誘電率

本章では，第 3 章で導入した Ollendorff の式が，無極性分子からなる誘電体のマクロ誘電率を求めるための Clausius-Mossotti の式と，マイクロ波の解析において，系に誘電体が含まれる場合の Maxwell-Garnett の式と本質的に同値であることを示す[A.1-3].

本章で使用する記号を Table A.1 にまとめる.

Table A.1 Nomenclature of this section: Clausius-Mossotii and Maxwell-Garnett formulae

Symbol	Quantity	Symbol	Quantity
$\boldsymbol{E}$ [V/m]	electric field	$\boldsymbol{D}$ [C/m]	electric displacement
$\boldsymbol{P}$ [C/m^2]	electric polarization	$\boldsymbol{p}$ [C · m]	electric dipole moment
ϵ_0 [F/m]	permittivity of vacuum	ϵ [F/m]	permittivity of a dielectric particle
σ_c [C/m^2]	surface electric charge density of a condenser	σ_p [C/m^2]	surface electric charge density of a condenser
σ [C/m^2]	surface electric charge density of a dielectric particle	$\boldsymbol{P}_{in}$ [C/m^2]	polarization in a dielectric particle
$\boldsymbol{E}_{loc}$ [V/m]	Lorentz electric field	$\boldsymbol{E}_{in}$ [V/m]	electric field in a dielectric particle
$\boldsymbol{D}_{in}$ [V/m]	electric displacement in a dielectric particle	ϵ_{in} [F/m]	effective permittivity of a dielectric particle
ϵ_{ext} [F/m]	permittivity of an outer media	$\langle\epsilon_r\rangle$ [F/m]	macroscopic permittivity
f [Hz]	frequency	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	angular frequency
α [−]	polarizability of a dielectric particle	n [−]	density of nonpolar particles
N [−]	diaelectric constant	η [−]	volume fraction

A. 1　Clausius-Mossotti の式

A. 1. 1　Lorentz 電界

一般に誘電体を含む系の電界は，真電荷のつくる電場と，誘電体を構成している分極分子によってつくられた微視的な電界を巨視的な視点で平均して得られる電界の重ね合わせと考えられる．文献[A.1]では，Fig.A.1 に示すように，分極している分子間の空隙内の電荷 Q や分子の分極 $\boldsymbol{P}_m$ のそれ自体が周囲に作る電場と，外部電界の作用をも含めた平均的かつ微視的な電場を考え，これを Lorentz 電界 $\boldsymbol{E}_{loc}$ と定義している．$\boldsymbol{E}_{loc}$ は巨視的に見た外部電界 $\boldsymbol{E}$ と，誘電体に含まれる多数の分極分子がつくる微視的な電界 $[N]\boldsymbol{P}$ により誘電体表面に誘導される電界の重ね合わせであると考えることができる．分極分子の形状の効果は，$[N]$ に反映されている．

さて，本来はこのような電界は，外部電界とランダムに配列した分子の分極により生じる表面電荷による電界の総和である．本来であれば微視的なスケールでは電子との相互作用があるために, これらの効果を含めた有効電界は簡単には記述できない. しかし，ここでは外部電界に揃わない方向の電界は平均的には 0 になっていると仮定する．この仮定は，分子が立方晶系をなすときには概ね妥当な近似であるということが知られている．より詳細な有効電界については，例えば文献[A.2 section 4.8]等が参考になる．

一般の物質中においては，無数の電荷と無数の電流ループ(磁気双極子モーメント)が存在する. これらがソースとなり, 空間的に分布する微小な電界 $\boldsymbol{e}$ と磁界 $\boldsymbol{b}$ が存在する. これらは微視的には大きいが，巨視的には非常に小さいスケールの体積 ΔV 内に局在する．この誘電体の巨視的な電界は

$$\boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{e} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \boldsymbol{e}\, dv \tag{A1}$$

として扱うことができる．この場合，つぎの式が成立する．

$$\boldsymbol{E}_{loc} = \boldsymbol{E} + [N]\boldsymbol{P} \tag{A2}$$

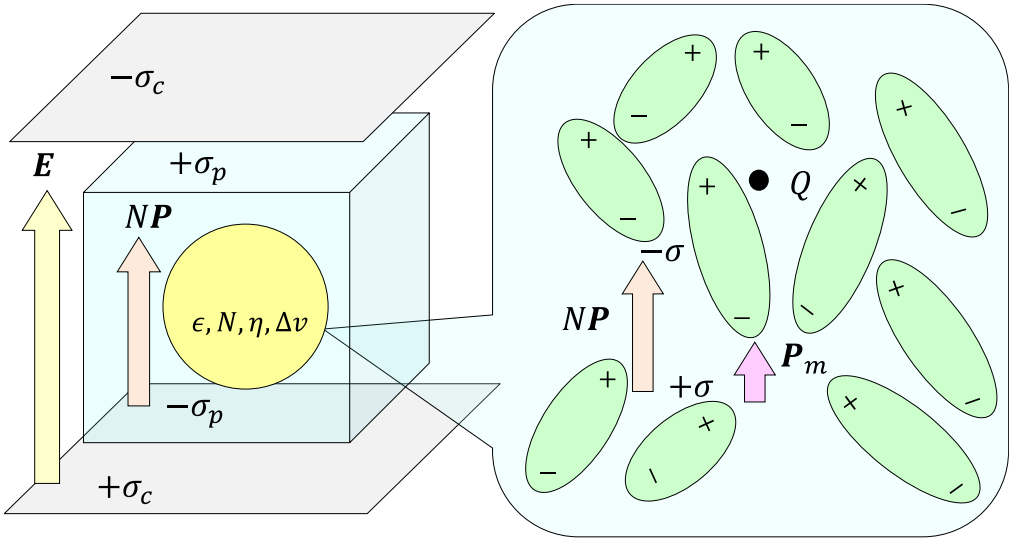
なお，等方性の誘電体を考える場合には，反電界係数はスカラーなので

$$\boldsymbol{E}_{loc} = \boldsymbol{E} + N\boldsymbol{P} \tag{A3}$$

である．特に，誘電体の形状が真球である場合には $N = 1/3$ である．

A. 1. 2　反電界係数を用いたマクロ誘電率

Clausius-Mossotti の式とは，一様電界中の無極性分子(等方性が仮定できる物質)を有する誘電体のマクロ誘電率を求めるための手法である．本項においては， Clausius-Mossotti の式の導出を行う[A.1-A.4]. さらに第 3 章で導出した Ollendorff の式と本質的に一致することを示す. より厳密には分子の性質に注目した量子力学的な考察を要するが, 本論文においては古典電磁気学の範疇で誘電体の性質を議論する．なお，Clausius-Mossotti の式は, 誘電体の相互作用が小さい場合にのみ成立することが, 知られている．



(a) Macroscopic field　　(b) Lorentz field and gap between particles

Fig.A.1 Electric composite composed of dielectric materials whose permittivity, dielectric constant and volume fraction are ϵ, N, η respectively.
This dielectric material is enclosed by a non-dielectric media. Total electric field is equivalent to the sum of the electric field induced by the surface electric charge and the outer macroscopic electric field.

いま，Fig.A.1 に示す体積がΔv の誘電体を考える．このとき，電気感受率は各原子が独立した場合で考えればよいので，分子数を考慮し，$\boldsymbol{E}_{loc}$ を用いて $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}_{loc} = n\alpha(\boldsymbol{E} + N\boldsymbol{P}) \tag{A4}$$

と表記できる．ここで，構成関係式 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})$ からマクロ誘電率を $\boldsymbol{D} = \langle\epsilon_r\rangle\epsilon_0\boldsymbol{E}$ で定義すると

$$\langle\epsilon_r\rangle = 1 + \frac{n\alpha}{1 - Nn\alpha} \tag{A5}$$

を得る．(A5)が一般の誘電体に対する Clausius-Mossotti の式である．さらに，誘電体粒子の電気感受率を用いると，分極は

$$\boldsymbol{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)}\epsilon_0\boldsymbol{E}_{loc} \tag{A6}$$

であるから，電気双極子モーメントの定義から

$$\boldsymbol{p} = \Delta v\frac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)}\epsilon_0\boldsymbol{E}_{loc} \tag{A7}$$

と表現できる．さらに，$n = \eta/\Delta v$ から，(A6,7)と合わせて誘電体のマクロな分極率は

$$n\alpha = \eta\frac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)} \tag{A8}$$

と示せる．(A8)は外部電界による原子の分極間の相互作用を反映した Lorentz 電界 $\boldsymbol{E}_{loc}$ から評価された電気感受率を表すので，巨視的な電気感受率はこの電気感受率が各原子に割り当てられていると見なして求めることができる[A.2]．したがって，(A5)は

$$\langle\epsilon_r\rangle = 1 + \frac{\eta\dfrac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)}}{1 - N\eta\dfrac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)}} = 1 + \frac{\eta(\epsilon_r - 1)}{1 + N(1 - \eta)(\epsilon_r - 1)} \tag{A9}$$

となる．(A9)が Clausius-Mossotti の式であるが，(A9)において，$\epsilon \to \mu$ と置き換えると(A9)は Ollendorff の式(3.12)と等価であることがわかる．

A. 2　Maxwell-Garnett の式

Maxwell-Garnett の式は，高周波問題で巨視的な誘電率を求めるための方法である．本項においては，方向によらない一様なマクロ誘電率が仮定できる場合の Maxwell-Garnett の式，テンソル型マクロ誘電率を求めるための Maxwell-Garnett の式を導出する．さらに前者は Ollendorff の式と本質的に等価であることを示す．

A. 2. 1　等方性誘電体に対するマクロ誘電率

Fig.A.2 に示すような一様な誘電体 $\epsilon_{ext}, \boldsymbol{D}_{ext}, \boldsymbol{E}_{ext}$ に囲まれている誘電体粒子群 $\epsilon_{in}, \boldsymbol{D}_{in}, \boldsymbol{E}_{in}$ を考える．この場合，誘電体が線形性・等方性を有すると仮定すると

$$\boldsymbol{D}_{in} = \epsilon_{ext}\boldsymbol{E}_{ext} + \boldsymbol{P}_{in} = \epsilon\boldsymbol{E}_{in} \tag{A10}$$

が成立する．また，分極ベクトルが誘電体の外部に作る電界 $\boldsymbol{E}_p$ は

$$\epsilon_{ext}\boldsymbol{E}_p = N\boldsymbol{P}_{in} \tag{A11}$$

で示されるから，内部電界については

$$\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{E}_{ext} - \boldsymbol{E}_p \tag{A12}$$

となる．さて，分極ベクトルの定義 $\boldsymbol{P}_{in} = (\epsilon - \epsilon_0)\boldsymbol{E}_{in}$ から

$$\left\{1 + \frac{1}{\epsilon_{ext}}N(\epsilon - \epsilon_{ext})\right\}\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A13}$$

を得る．いま，均質化された 1 つの誘電体粒子を考え，マクロ誘電率を $\langle\boldsymbol{D}_{in}\rangle = \langle\epsilon\rangle\langle\boldsymbol{E}_{in}\rangle$ で定義すると$(\mathrm{A10}-13)$から

$$\langle\boldsymbol{D}_{in}\rangle = \langle\epsilon\rangle\left\langle\left[1 + \frac{1}{\epsilon_{ext}}N(\epsilon - \epsilon_{ext})\right]^{-1}\right\rangle\boldsymbol{E}_{ext} \tag{A14}$$

を得る．

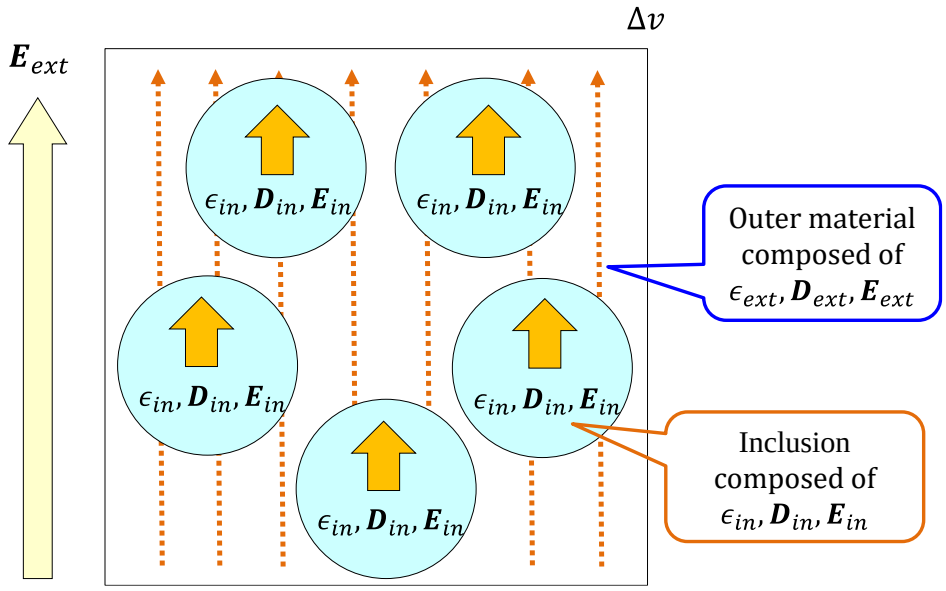


Fig.A.2 Distribution of the electric field in the mixture.
In this model, the molecule whose volume is Δv includes the outer material $(\epsilon_{ext}, \boldsymbol{D}_{ext}, \boldsymbol{E}_{ext})$ and the inclusion $(\epsilon_{in}, \boldsymbol{D}_{in}, \boldsymbol{E}_{in})$.

ここで，(A14)の両辺を直接マクロな緒元に置換すると，(A11) − (A13)から

$$\langle \boldsymbol{D}_{in} \rangle = \langle \epsilon \boldsymbol{E}_{in} \rangle \langle \epsilon \left[1 + \frac{1}{\epsilon_{ext}} N(\epsilon - \epsilon_{ext}) \right]^{-1} \rangle \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A15}$$

と表記できる．(A14)と(A15)を比較すると次式が得られる．

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\langle \frac{\epsilon_{ext}\epsilon}{\epsilon_{ext} + N(\epsilon - \epsilon_{ext})} \rangle}{\langle \frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_{ext} + N(\epsilon - \epsilon_{ext})} \rangle} \tag{A16}$$

(A16)は次のように変形できる．

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\eta \epsilon_{ext} + (1-\eta) \frac{\epsilon_{ext}\epsilon}{\epsilon_{ext} + N(\epsilon - \epsilon_{ext})}}{\eta + (1-\eta) \frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_{ext} + N(\epsilon - \epsilon_{ext})}} = \epsilon_{ext} + \frac{\eta \epsilon_{ext}(\epsilon - \epsilon_{ext})}{\epsilon_{ext} + N(1-\eta)(\epsilon - \epsilon_{ext})} \tag{A17}$$

(A17)が等方性誘電体に対するマクロ誘電率を求めるための Maxwell-Garnett の式である．誘電体の周囲が誘電率が ϵ_{ext} である誘電体ではなく，真空であるとすると，

$$\langle \epsilon_r \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \epsilon_0 + \frac{\eta \epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0 + N(1-\eta)(\epsilon - \epsilon_0)} \right\} = 1 + \frac{\eta(\epsilon_r - 1)}{1 + N(1-\eta)(\epsilon_r - 1)} \tag{A18}$$

となる．(A18)は，明らかに(3.12)で示される線形性・等方性が仮定できる磁性粒子群に対する Ollendorff の式と本質的に等価である．なお，(A18)において円柱と平行に電界が印加される場合を考えると，$N \approx 0$としてもよいだろうから，

$$\epsilon_r = \epsilon_r^{ext} + (1-\eta)\epsilon_r \tag{A19}$$

を得る．(A19)は Wiener の予測式と呼ばれる．

A. 2. 2　異方性誘電体に対するマクロ誘電率

誘電体が線形性・異方性であると仮定すると，分極ベクトル $\boldsymbol{P}_{in}$ はテンソル分極$[\boldsymbol{P}_{in}]$で表記される．この場合，(A13)は次のように修正される．

$$[\mathrm{I} + \epsilon_{ext}^{-1} N(\epsilon - \epsilon_{ext})]\boldsymbol{E}_{in} = \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A20}$$

テンソル型マクロ誘電率を A.2.1 節と同様に $\langle \boldsymbol{D}_{in} \rangle = [\langle \epsilon \rangle]\langle \boldsymbol{E}_{in} \rangle$ で定義し(A20)から

$$\langle \boldsymbol{D}_{in} \rangle = [\langle \epsilon \rangle]\langle [\mathrm{I} + \epsilon_{ext}^{-1} N(\epsilon - \epsilon_{ext})]^{-1} \rangle \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A21}$$

一方で，(A21)を直接マクロな緒元に置換すると

$$\langle \boldsymbol{D}_{in} \rangle = \langle \epsilon [\mathrm{I} + \epsilon_{ext}^{-1} N(\varepsilon - \epsilon_{ext})]^{-1} \rangle \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A22}$$

となる．(A21), (A22)を比較すると，

$$[\langle \epsilon \rangle] = \langle [\mathrm{I} + \epsilon_{ext}^{-1} N(\epsilon - \epsilon_{ext})]^{-1} \rangle \langle \epsilon [\mathrm{I} + \epsilon_{ext}^{-1} N(\epsilon - \epsilon_{ext})]^{-1} \rangle \tag{A23}$$

を得る．(A23)が異方性を考慮した Maxwell-Garnett の式である．

A. 2. 3　周波数特性を考慮したマクロ誘電率

誘電率が電磁波の周波数に依存する場合には，複素誘電率 $\dot{\epsilon}_r$ を導入し，実効的な誘電率と損失に対応する成分を分離して表記する必要がある．この場合には，Clausius-Mossotti の式や Maxwell-Garnett の式中の比誘電率を

$$\dot{\epsilon}_r = \epsilon_r + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sigma \tag{A24}$$

に置き換えればよい[A.5].

Appendix A 参考文献

[A.1] 砂川重信，「理論電磁気学」，紀伊国屋書店，2015.
[A.2] 中山正敏，「物質の電磁気学」，岩波書店，1996.
[A.3] 和木浩,「均質化法を用いた磁界解析に関する研究」, 1996 年北海道大学修士論文.
[A.4] H. Igarashi, “Semi-Analytical Approach for Finite Element Analysis of Multi-turn Coil Considering Skin and Proximity Effects”, *IEEE Trans*., *Magn*. vol.53, no. 1, DOI: 10.1109/TMAG. 2016 2601066, 2017.
[A.5] V. Préault, R. Corcolle, L. Daniel, and L. Pichon, “Effective Permittivity of Shielding Composite Materials for Microwave Frequencies”, *IEEE Trans*., *Electromagnetic Compatibility*. vol.55, no.6, pp.1178-1186.

Appendix B　表皮・近接効果に関する補足

第 3 章では，均質化されたマルチターンコイルの電力において，表皮効果と近接効果が相互非干渉であると述べた．本章では，細線の表皮効果・近接効果の直交性が一般的に成立することを述べる．また，本論文で述べた方法以外の表皮効果や近接効果に起因する交流抵抗や複素電力の評価法についても述べる．さらに電源の電圧を考慮した回路方程式や，Bessel 関数・Neumann 関数についても補足する．

B. 1　表皮効果・近接効果の直交性

第 3 章で導出した，均質化された素線に対する回路方程式においては，表皮・近接効果が直交性を有するため，相互干渉項は現れないことを述べた．これは，表皮効果に起因する複素電力は θ に依存しない電磁界から計算され，近接効果に起因する複素電力は $\cos\theta$ に依存する電磁界を用いて計算されているためである．提案手法に限らず，一般的な素線で，表皮・近接効果の複素電力は直交性を有していることが Jan. A. Ferrira の方法[B.1]により示されている．本節ではこのことに関して述べる．

まず，無限長円形断面導体の(x, y)平面断面に流れる準定常電流

$$\boldsymbol{J} = J\cos\omega t\,\mathbf{e}_z \tag{B1}$$

を考える．ここで，通電方向は $\mathbf{e}_z$ 方向とする．円形導体の断面積をA，導電率を σ とし，単位時間 $1/T$ あたり生じる導体の単位長さの Joule 損の実効値 P_u は

$$P_u = \frac{1}{T\sigma}\int_A\int_0^T |J|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}A \tag{B2}$$

である．さて，導体中の準定常電流は，第 1 章でも述べたように強制印加電流と渦電流からなる．渦電流は強制印加電流が発生する成分 J_s と，外部導体の近接効果による逆行する電流 J_p からなるから，

$$J = J_s + J_p \tag{B3}$$

と表記できる．ここで，素線において，J_s は中心軸からの距離が一定の位置では一定で，J_p は偶関数となるから，(B2,3)より

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{1}{2\sigma}\int_A (J_s + J_s^*)(J_p + J_p^*)\mathrm{d}A \\ &= \frac{1}{2\sigma}\int_A (J_s J_p^* + J_p J_p^*)\mathrm{d}A \\ &= P_{us} + P_{up} \end{aligned} \tag{B4}$$

を得る．ここで，P_{us}, P_{up} はそれぞれ単位長あたりの表皮・近接効果に起因する複素電力を表す．(B4)から，表皮・近接効果が直交性を有していることがわかる．

B. 2　従来の交流抵抗・近接効果損の評価例

通常の円筒銅線の表皮効果の交流抵抗は

$$Z_{skin} = \frac{R_0 \zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)} \tag{B5}$$

である．ここで，$\zeta \coloneqq a(1-\mathrm{j})/\delta$ とし，a は細線半径，δ は表皮厚である．また，細線の形状が円筒形であることは Bessel 関数 $J_\nu(\zeta)$ を用いて表されている．(B5)は第 3 章 3.5.3 節の(3.62b)である．円筒銅線の表皮効果の交流抵抗は(B5)の表示とは別に，文献[B.1, 2]等においてはつぎのような表示が知られている．

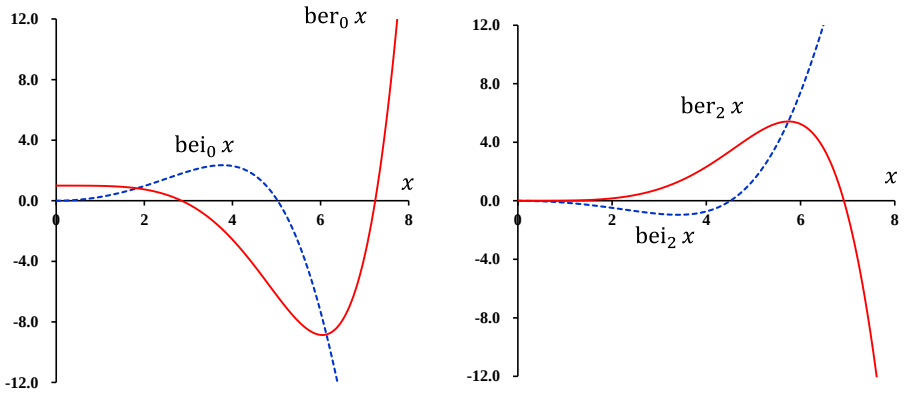
$$Z_{skin} = R_{dc}\frac{\gamma}{2}\frac{\mathrm{ber}\,\gamma\,\mathrm{bei}'\,\gamma - \mathrm{bei}\,\gamma\,\mathrm{ber}'\,\gamma}{(\mathrm{ber}'\,\gamma)^2 + (\mathrm{bei}'\,\gamma)^2} \tag{B6}$$

ここで，$\gamma \coloneqq a\sqrt{2}/2\delta$ とおいた．(B6)の $\mathrm{ber}_n\,\gamma\,, \mathrm{bei}_n\,\gamma$ は第 n 次 Kelvin 関数であり，

$$\mathrm{ber}_n\,x = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}\cos\frac{n+2p}{4}\pi \tag{B7a}$$

$$\mathrm{bei}_n\,x = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p+1}}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}\sin\frac{n+2p}{4}\pi \tag{B7b}$$

で与えられる関数である[e.g. B.3, 4]．なお $n=1$ の場合には，(B6) のように次数 $n=1$ を省略することがある．(B7)のグラフは Fig.B.1 に示すようなグラフとなる．(B5,6)を用いて，$a = 0.05$ mm の場合の細線の交流抵抗を計算した結果を Fig.B.2 に示す．Fig.B.2 より，両者はよく一致しており，Poyinting ベクトルの表面積分から求められた(B5)の表示の妥当性がわかる．



(a) $\mathrm{ber}_0\,x\,, \mathrm{bei}_0\,x$　　(b) $\mathrm{ber}_2\,x\,, \mathrm{bei}_2\,x$

Fig.B.1 Profiles of the Kelvin functions : $\mathrm{ber}_0\,x, \mathrm{bei}_0\,x, \mathrm{ber}_2\,x\,, \mathrm{bei}_2\,x$.

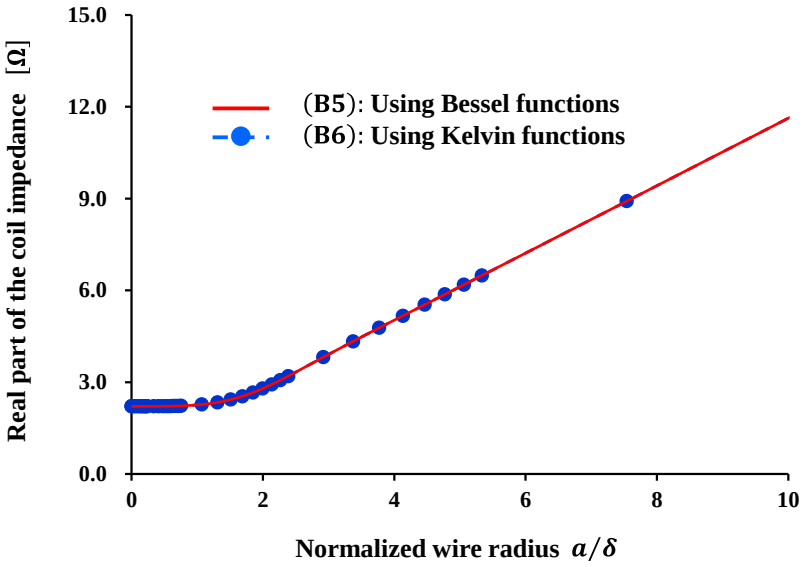


Fig.B.2 Dependence of the AC resistance of the wire conductor on driving frequency.
Abscissa denotes the normalized wire radius a/δ. From this figure, these data are in good agreement.

一方で，近接効果による単位長あたりの複素電力の公式として，例えば Ferreira らによるつぎの s 公式が知られている[B.1].

$$P_{prox} = R_{dc}\frac{\pi^2 r_0^2 H_0^2 \gamma^2}{l}\frac{\mathrm{ber}_2\,\gamma\,\mathrm{bei}_0'\,\gamma - \mathrm{ber}_0'\,\gamma\,\mathrm{bei}_2\,\gamma}{\mathrm{ber}_0^2\,\gamma + \mathrm{bei}_0^2\,\gamma}\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}\right] \tag{B8}$$

参考として，(B8)から求めた近接効果に起因する電力と，第 3 章 3.1 節で述べた unit-cell approach によって得られるマクロ等価透磁率を用いて計算した近接効果の複素電力の評価例を Fig.B.3 に示す．Fig.B.3 から，2 次元解析による unit-cell approach により得られるマクロ複素透磁率の妥当性がわかる．

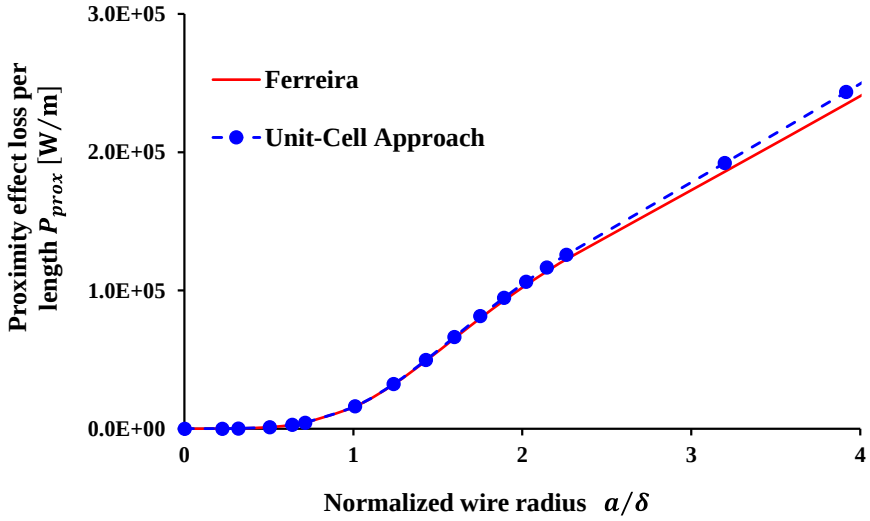


Fig.B.3 Proximity effect loss of the wire conductor per length.
From this figure, we see again that these data are in good agreement.

B. 3　電源電圧を考慮した定常電流の表現

第 3 章において，一様磁界中に置かれた細線の電磁界の支配方程式は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{B9a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{B9b}$$

であった．この定式化では，(B9a)右辺の電界は外部電源から供給される電流に対応する電界と渦電流の効果に起因する電界の総和である．ここで，(B9a)の右辺の電界を外部印加電流と渦電流に分離して記述した際にはどのような変化が起こるのか，すなわち，(B9a)を

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma\boldsymbol{E} \tag{B9a}'$$

とした場合でも，細線のエネルギー保存則が

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2}\mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2$$

$$+\,\mathrm{j}2\pi\omega a^2 l B_0^2\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{J_1(\zeta)\left(\zeta J_0(\zeta)-J_1(\zeta)\right)^*}{|\zeta J_0(\zeta)+J_1(\zeta)(-1+\mu_1/\mu_0)|^2} \tag{B10}$$

と記述できるのか，という疑問が生じる．(B10)は本論文では第 3 章 3.5.3 節の(3.59)に対応する．本節では，外部電界の効果を分離した場合に，定式化がどのように変わるのかを考察する．議論の結果，最終的な結果が一致することを示す．

B. 3. 1　閉回路の定常電流を表す電界

いま，Fig.B.4 に示すようなマルチターンコイルのように，電源に接続された閉回路を考える．このとき，定常電流は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0 \tag{B11a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{B11b}$$

を満足する必要がある．(B10a)は導体外には電流が流れない電流無発散条件，(B10b)は $\boldsymbol{E}$ が保存界であることを表す．さて，導体内部の Ohm の法則は

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{B12}$$

である．いま，コイルの線に沿って一周する経路を c とし， c で(B12)を線積分すると，Stokes の定理から

$$\oint_c \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c \sigma\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sigma\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{B13}$$

を得る．しかし，(B13)左辺の積分については，経路に沿って電流を積分しているので，

0 にはならないので，一見矛盾しているように見える．しかし，外部起電力 $\boldsymbol{E}_0$ の効果を含めると，(B11b)はつぎのように修正される[B.5].

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}_0 + \sigma\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}_t \tag{B14}$$

(B14)右辺第 1 項は電源の電界を表す．このとき(B13)の線積分は

$$\oint_c \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c (\sigma\boldsymbol{E}_0 + \sigma\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sigma\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \sigma\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sigma\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{B15}$$

となる．ここで，(B15)の計算結果は，電源内部の電界については保存界ではなく，電源で電荷に対して作用する仕事があることを示している．すなわち

$$\sigma\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_c \sigma\boldsymbol{E}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V \tag{B16}$$

である[B.6]．ここで，V は電源電圧である．したがって，(B16)のように電源電圧を考慮した電界の効果を含めて(B14)の電界を示す必要がある．

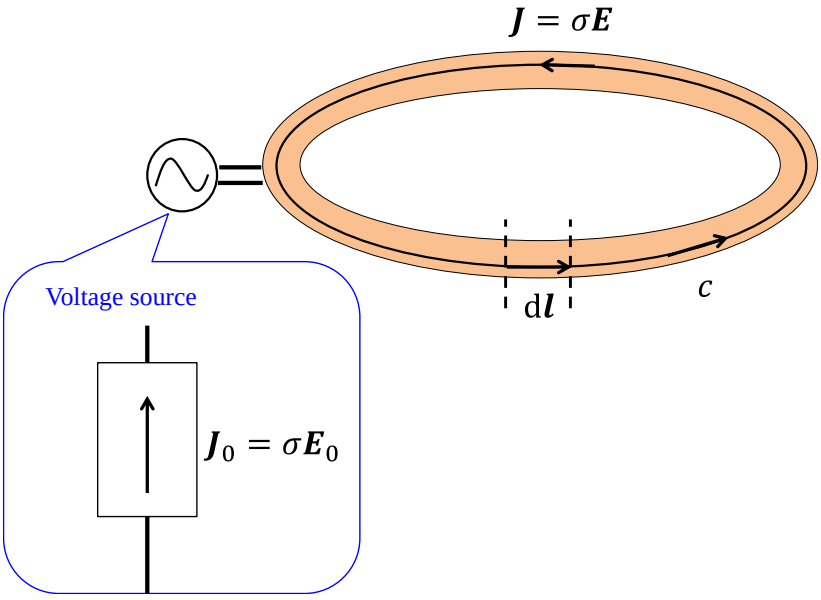


Fig.B.4 Wire conductor connected with a voltage source.

B. 3. 2　電源の電界を分離して表記した回路方程式

B.3.1 節の議論を踏まえて，(B9a)′の表記を採用した場合に，素線の回路方程式がどのようになるかを考察する．ここでは簡単のため，Fig.3.8 で示した一様磁界中の円柱細線の場合で議論する．基本的には，第 3 章 3.5 節の議論を踏襲することになるが，(B9a)を(B9a)′に修正したことにより，一部定式化の修正が必要である．まず Helmholtz 方程式は

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k^2 E_z = \mathrm{j}\omega\mu J_0 \tag{B17}$$

となる．(B17)は(3.26a)に対応する．この場合，(B17)の解は特解である $E_z = -J_0/\sigma$ を(3.28)に加えた形

$$E_z(r,\theta) = -\frac{J_0}{\sigma} + p_0 J_0(kr) + p_1 J_1(kr)\cos\theta \tag{B18}$$

が一般解となる．(B18)を用いると，第 3 章 3.5 節で導いたエネルギー保存則(3.56)はつぎのように修正される．

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_0 + \sigma|\boldsymbol{E}|^2 + \mathrm{j}\omega\mu_1|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{B19}$$

本問題においても，電力源から供給される複素電力は導線内外の磁気エネルギーの増分と導体内の Joule 損失に等しいので，

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \sigma|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v \tag{B20}$$

が成立する．(B20)は(3.57)である．(B20)に(B21)を代入し，整理すると

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_0^*\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{B21}$$

を得る．(B21)は(3.58)に対応する．(B21)の右辺第 2 項の計算に必要なのは電源の電界なので，(B14)の右辺から渦電流を除いた電界 $-\boldsymbol{J}_0/\sigma$ と $\boldsymbol{J}_0^*$ の内積

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_0^*\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \frac{\boldsymbol{J}_0}{\sigma}\cdot\boldsymbol{J}_0^*\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \frac{|\boldsymbol{J}_0|^2}{\sigma}\,\mathrm{d}v = \pi a^2 l\frac{|\boldsymbol{J}_0|^2}{2\sigma} \tag{B22}$$

である．一方で，(B21)の右辺第 3 項は

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{21}} (\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$-\pi a^2 l\frac{|\boldsymbol{J}_0|^2}{\sigma} + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2 + \mathrm{j}2\pi\omega a^2 l B_0^2\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{J_1(\zeta)\big(\zeta J_0(\zeta)-J_1(\zeta)\big)^*}{|\zeta J_0(\zeta)+J_1(\zeta)(-1+\mu_1/\mu_0)|^2} \tag{B23}$$

となる．したがって，(B22)と(B23)の右辺第 1 項は打ち消すので，最終的な一様交番磁界中の素線のエネルギー保存則は

$$\frac{VI^*}{2} = \frac{\mathrm{j}\omega}{2}\int_{\Omega_2} \mu_0|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}v + \frac{R_0\zeta J_0(\zeta)}{4J_1(\zeta)}|I|^2$$

$$+\mathrm{j}2\pi\omega a^2 l B_0^2\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{J_1(\zeta)\big(\zeta J_0(\zeta)-J_1(\zeta)\big)^*}{|\zeta J_0(\zeta)+J_1(\zeta)(-1+\mu_1/\mu_0)|^2} \tag{B24}$$

となる[B.7]．したがって，(B9a)′のように，電流項を強制電流と渦電流に分離する，すなわち電源電圧が供給する電界と渦電流がもたらす電界を分離してエネルギー保存則を導いても，(B9a)のように電界を合わせて表記しても最終的なエネルギー保存則は一致する．ゆえに，本論文で示したように，電源電圧の効果を含めて準静近似 Maxwell 方程式を立式して，電源に接続された導線のエネルギー保存則が議論できるとわかる．この場合，起電力の効果は(B9a)の右辺の電界に含まれていることに注意する．

B. 4　Bessel 関数と Neumann 関数の別の表現

本節では v は実数，n は整数，p は正の実数，z は複素数とする．円柱形導体の渦電流の議論においては，Bessel 関数と Neumann 関数が現れることについては本論文で述べた通りである．これらの定義式は

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n\,!\;\Gamma(v+n+1)} \tag{B25a}$$

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z)\left(\gamma + \log\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\;(n+k)\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left[\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m} + \sum_{m=0}^{n+k} \frac{1}{m}\right]$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)\,!}{r\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \quad [n = 0,1,2,\cdots, z \neq -p] \tag{B25b}$$

である[e.g. B.3]．(B25b)において，$\gamma = 0.57721\cdots$ は Euler 定数と呼ばれる定数である．第 4 章で示したように，マクロ複素透磁率の数値計算において，$|z|$ が大きい場合には(B25)を直接計算すると数値不安定性がある．そこで(B25)の別の表示を考える．(B25a, b)にはそれぞれつぎの積分表示がある．

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{B26a}$$

$$N_v(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta - v\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-z\sinh t}(\mathrm{e}^{vt} + \mathrm{e}^{-vt}\cos vt)\mathrm{d}t \;\; [\mathrm{Re}(z) > 0] \tag{B26b}$$

はそれぞれ Bessel，Schläfli の積分表示と呼ばれる[e.g. B.3]．(B26)には(B25)とは異なり無限級数の項が含まれていない．また，Stirling の公式

$$n\,! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{B26}$$

を用いると，階乗計算を代数計算で計算することもできる．引数が実数の場合の $J_1(x), N_1(x)$ グラフは Fig.B.5 のようになり，いずれも一致しているとわかる．また引数が複素数の場合の例として，第 4 章の Fig.4.12 で設定した諸元と同じ諸元で，引数 $z = k_2 b$ を Bessel 関数と Neumann 関数に代入して，その実部を計算すると Fig.B.5 のようなグラフとなった．Fig.B.5 より，Bessel 関数の別の表現を用いても，第 4 章で示した数値不安定性を除去はできないものの，これらは同じ計算結果を与えているとわかる．

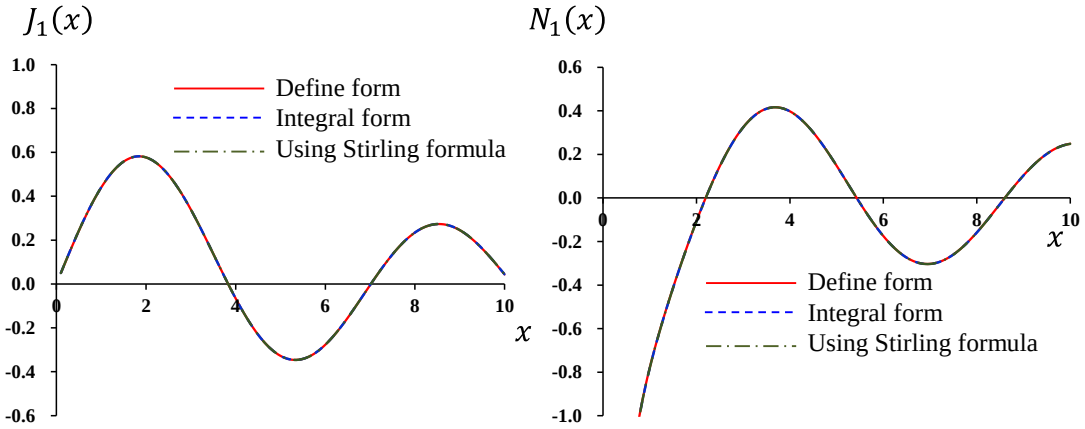


Fig.B.5 Profiles of $J_1(x)$ and $N_1(x)$.
Abscissa is real number x. From this figures, we find that these graphs given by（B24 − 26）are in good agreement.

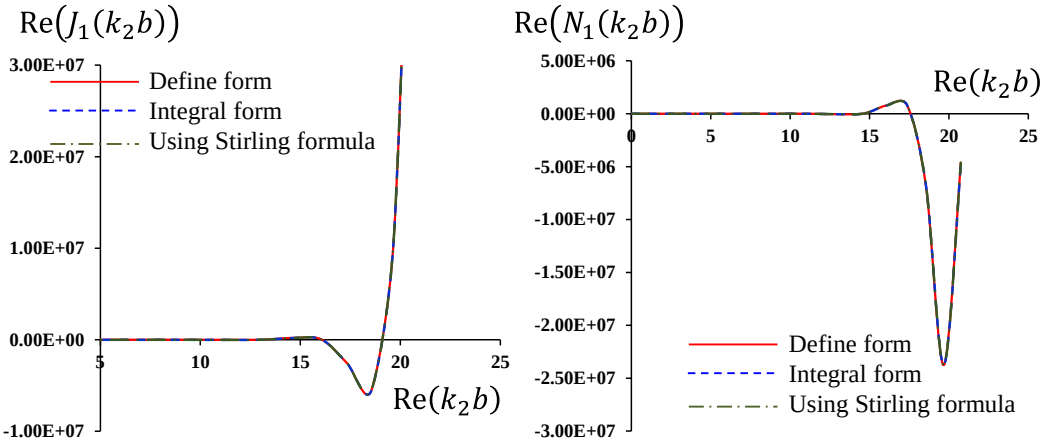


Fig.B.6 Profiles of $\mathrm{Re}(J_1(k_2b))$ and $\mathrm{Re}(N_1(k_2b))$.
Abscissa is the real part of the complex number k_2b. From this figure, we find that although numerical unstability cannot be eliminated only by introducing the alternative expressions for the Bessel and Neumann functions, these expressions gives almost the same results.

Appendix B 参考文献

[B.1] J. A. Ferreira, “Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components”, *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 9, no.1, 1994, pp. 127-131.

[B.2] J. A. Stoll, “The Analysis of eddy currents”, chapter 2, Oxford: Clarendon Press, 1974.

[B.3] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[B.4] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

[B.5] 砂川重信，「理論電磁気学」，第 5.5 節，紀伊国屋書店，1999.

[B.6] 小柴正則，「基礎からの電磁気学」，第 10.5 節，培風館，2011.

[B.7] 五十嵐一，佐藤佑樹，伊藤泰久，「渦電流を考慮したマクロ磁気特性―細線の解析」，電気学会静止器回転機合同研究会，SA-15-032, RM-15-024，沖縄，2014.

Appendix C　静磁界中の磁化ベクトルと反磁界係数の導出

第 3 章において，複素透磁率を周波数に依存する磁化ベクトルの透磁率から定義した．この際には静磁界の磁化ベクトルとの対応が必要になるが，第 3 章では静磁界中の磁化ベクトルと反磁界係数については導いていなかった．そこで，本節ではこれらを解析的に導く．まず，C.1 節では，静磁界中における磁化ベクトルについて，円柱の場合，球の場合，楕円体の場合で求める．なお，本章で取り扱う磁性体は常磁性体または反磁性体とする．つぎに C.2 節では，反磁界係数を用いた磁束密度と外部磁界の関係を求める．C.3 節では，磁性体の形状が楕円体の場合の反磁界係数を解析的に求め，最後に C.4 節で反磁界係数とテンソル型マクロ複素透磁率の数値解析結果について述べる．

C. 1 外部一様磁界中の磁性体の磁化ベクトル

C. 1. 1　円筒形磁性体の場合

Fig.C.1 に示すように，一様磁界中の磁性円柱を考える．この場合，磁気ベクトルポテンシャルによって表された磁気双極子による反磁界は，第 3 章 3.6.2 節で示したように

$$A_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r}\sin\theta \tag{C1}$$

で与えられる．(C1)は(3.44)に対応するが，Fig.C.1 では，磁界の印加方向を変更していることに注意する. このとき円柱外の磁束密度については $\mathbf{e}_z$ 方向の磁界の変化が十分に無視できる仮定の下で

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\mathbf{e}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r}\mathbf{e}_\theta \tag{C2}$$

と求められる．(C1)を(C2)に代入すると

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r^2}\cos\theta\,\mathbf{e}_r + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r^2}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta \tag{C3}$$

を得る.

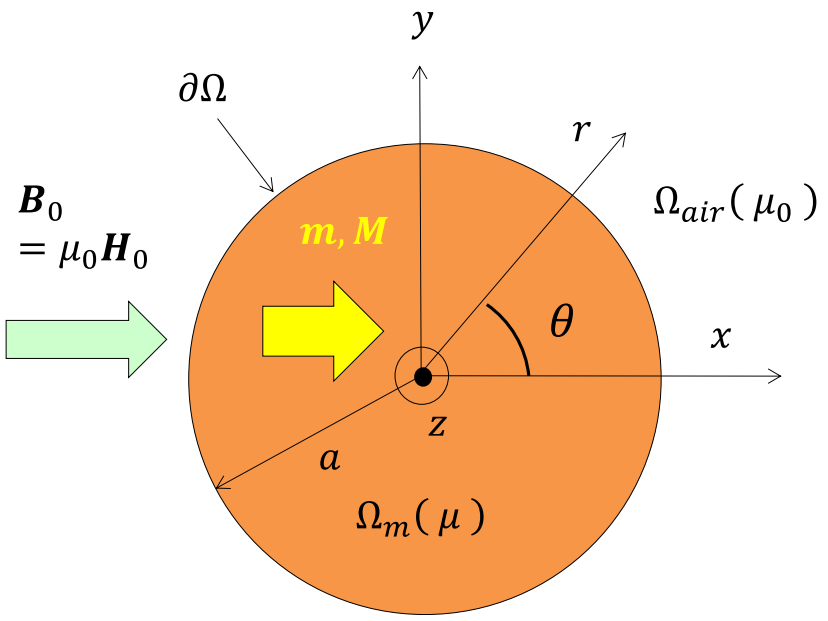


Fig.C.1 Magnetic cylinder immersed in a magnetostatic field $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0$.
Diamagnetic field is denoted by the magnetic dipole moment $\boldsymbol{m}$. In this model, the diamagnetic constant N is $1/2$.
When we determine the magnetic induction and the magnetic field, we solve the system of equations obtained from the continuity of the normal component of the magnetic induction and the tangential component of the magnetic field on the interface.

さて，円柱内の磁束密度を $\boldsymbol{B}_{in} = B_{in}\cos\theta\,\mathbf{e}_r - B_{in}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$ とすると，磁性体境界では，磁束密度の法線方向成分，磁界の接線方向成分が連続するので，いまの場合は外部磁界と双極子磁界の和について，磁性円柱の境界 $\partial\Omega$ において

$$B_0\cos\theta + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{a^2}\cos\theta = B_{in}\cos\theta \tag{C4a}$$

$$-\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta + \frac{1}{2\pi}\frac{m}{a^2}\sin\theta = -\frac{B_{in}}{\mu}\sin\theta \tag{C4b}$$

が成り立つ．(C4)から，径方向成分について，つぎの連立方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\mu_0}{2\pi a^2} \\ \dfrac{1}{\mu} & \dfrac{1}{2\pi a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{in} \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dfrac{B_0}{\mu_0} \end{bmatrix} \tag{C5}$$

(C5)を解くことで

$$\begin{bmatrix} B_{in} \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{\dfrac{1}{2\pi a^2} + \dfrac{1}{\mu_r 2\pi a^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\pi a^2} & \dfrac{\mu_0}{2\pi a^2} \\ -\dfrac{1}{\mu} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ \dfrac{B_0}{\mu_0} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2\pi a^2 \mu_r}{\mu_r + 1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\pi a^2} & \dfrac{\mu_0}{2\pi a^2} \\ -\dfrac{1}{\mu} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ \dfrac{B_0}{\mu_0} \end{bmatrix} \tag{C6}$$

と円柱内部の磁束密度と磁気双極子モーメントが求められる．したがって，外部磁界によって円柱形磁性体内部に生じる磁化ベクトルは，

$$M = \frac{m}{\pi a^2} = 2\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \tag{C7}$$

となる．これは第 3 章(3.48)で示した一様磁界中の円柱の磁化であり，Table 3.5 に示した一般の静磁界中の磁性体の磁化

$$M = \frac{(\mu_r - 1)B_0}{1 + N(\mu_r - 1)} \tag{C8}$$

と比較すると，反磁界係数が $N = 1/2$ とわかる．

C. 1. 2　球形磁性体の場合

Fig.C.2 に示すように，一様磁界中の磁性球を考える．C.1 と同様の定式化も可能であるが，ここでは，違った方法で磁化ベクトルを求める．磁束密度と磁化ベクトルは

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{C9}$$

の関係にある．(C9)の両辺の発散をとると

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} \tag{C10}$$

が導ける．ここで，磁界は磁気スカラーポテンシャル ϕ を用いると $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\,\phi$ なので，(C10)は

$$\nabla^2\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{M} \tag{C11}$$

と書き換えられる．さて Poisson 方程式(C11)の右辺は，有効磁化密度

$$\rho_M = \mathrm{div}\,\boldsymbol{M} \tag{C12}$$

と考えることができる．(C12)に対して，Gauss の発散定理を適用することで，磁性球表面に存在する面磁化密度

$$\sigma_M = \mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{M} \tag{C13}$$

を得る．(C12)と(C13)から，(C11)は $R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ とすると

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{R}\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\mathbf{e}_n' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{R}\mathrm{d}S' \tag{C14}$$

となる．さて，磁性球が一様に磁化されるという仮定の下では内部で磁化の発散は生じないので，(C14)の右辺第 1 項は 0 になり，$\sigma_M = \mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{M} = M_0 \cos\theta$ なので

$$\phi = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\cos\theta'}{R} \mathrm{d}S' \tag{C15}$$

を得る．(C15)に対して，$1/R = 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ の Taylor 展開を行い，主要項のみで近似すると，球内において

$$\phi_{in} = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \times \frac{1}{r} \frac{4\pi a^3}{3a^2} \cos\theta = \frac{1}{3} M_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \tag{C16}$$

が得られる．(C16)の導出は，本質的には第 3 章において(3.262)から(3.265)を経て(3.284)を導いたのと同様の手順である．(C16)から

$$\phi_{in} = \frac{1}{3} M_0 r \cos\theta = \frac{1}{3} M_0 z \tag{C17}$$

となるので，外部磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ の効果を含めた磁性球内部の磁界 $\boldsymbol{H}_{in}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_{in}$ はそれぞれ(C10)，(C9)から

$$\boldsymbol{H}_{in} = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \mathrm{grad}\, \phi_{in} = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{3}\boldsymbol{M} \tag{C18a}$$

$$\boldsymbol{B}_{in} = \boldsymbol{B}_0 + \mu_0(\boldsymbol{H}_{in} + \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} \tag{C18b}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{M} = M_x \mathbf{e}_x$ である．いま，構成関係式 $\boldsymbol{B}_{in} = \mu_0 \boldsymbol{H}_{in}$ より，(C18a)は(C18b)を用いて

$$\boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} = \mu\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{3}\boldsymbol{M}\right) \tag{C19}$$

となるから，

$$\boldsymbol{M} = 3\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \tag{C20}$$

を得る．(C20)は一様磁界中の磁性球に対する反磁界係数が $N = 1/3$ の磁化ベクトルであり，第 3 章の(3.287)に一致する．

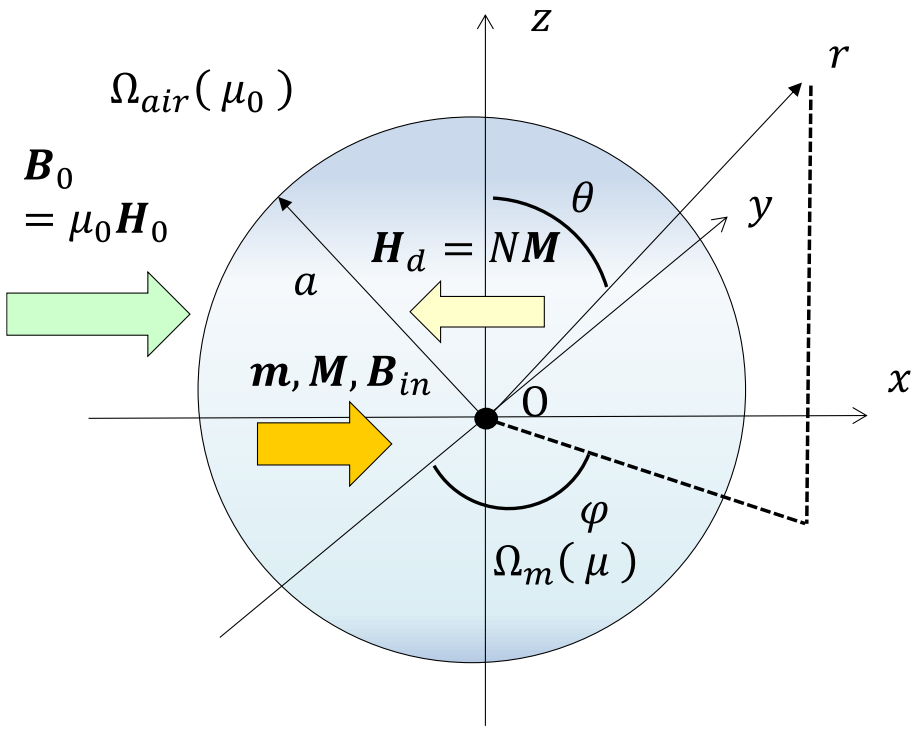


Fig.C.2 Magnetic sphere immersed in a magnetostatic field $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0$.
Note here that the magnetic induction is parallel to the magnetization whereas the magnetic field is anti-parallel to the magnetization due to the induced magnetic charge on the surface of the magnetized sphere.

C. 1. 3　磁性楕円体の場合

Fig.C.3 に示すように，一様磁界中の磁性楕円体を考える．ここでは，第 3 章に述べた Ollendorff の式の導出と同様にして，磁界と磁化ベクトルの関係を求める．外部磁界により，磁性体には $N\boldsymbol{M}$ の反磁性が発生する．ここで，N は粒子の形状により決定する反磁界係数である. 磁性粒子中の磁界 $\boldsymbol{H}_{in}$ は内部磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ の自己減磁作用を考慮すると

$$\boldsymbol{H}_{in} = \boldsymbol{H}_0 - N\boldsymbol{M} \tag{C21}$$

となる．ここで，N を用いると，内部磁界は磁気感受率 $\chi_m = \mu_r - 1$ を用いて

$$\boldsymbol{H}_{in} = \frac{N\boldsymbol{M}}{\chi_m} \tag{C22}$$

となる．(C21,22)から

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi_m}{1 + N\chi_m} \boldsymbol{H}_0 \tag{C23}$$

を得る．(C23)は，磁性粒子に注目した内部磁化と内部磁界の関係を表し，第 3 章でも用いた式である．さて，磁性体中の磁束密度は

$$\boldsymbol{B}_{in} = \mu_0 (\boldsymbol{H}_{in} + \boldsymbol{M}) \tag{C24}$$

であるので，(C24)に(C23)を代入して

$$\boldsymbol{B}_{in} = \mu_0\left(\frac{1}{\chi_m}+1\right)\frac{\chi_m}{1+N\chi_m}\boldsymbol{H}_0 = \mu_0\frac{1+\chi_m}{1+N\chi_m}\boldsymbol{H}_0 = \frac{\mu_0\mu_r}{1+N(\mu_r-1)}\boldsymbol{H}_0 \qquad \text{(C25)}$$

を得ることができる．

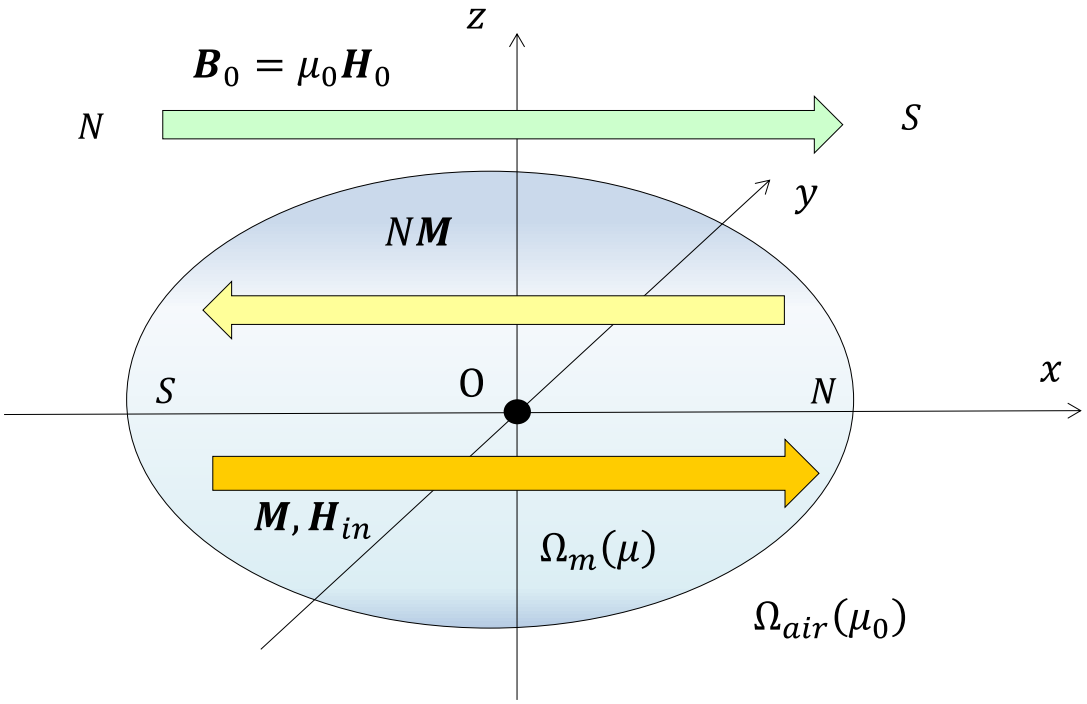


Fig.C.3 Magnetic spheroidal sphere immersed in a magnetostatic field $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0\boldsymbol{H}_0$.
In this model, the magnetization can be calculated with the diamagnetic constant N.

C. 2 外部磁界と内部磁束密度の関係による反磁界係数の決定

つぎに，Fig.C.3 の磁性体の反磁界係数を求める．まず，(C25)において，$\boldsymbol{B}_0 = \mu_0\boldsymbol{H}_0$ から

$$\boldsymbol{B}_{in} = \frac{\mu_r}{1+N(\mu_r-1)}\boldsymbol{B}_0 \qquad \text{(C26)}$$

である．いま磁界の印加方向が $\mathbf{e}_x$ であるとし，(C26)を $N = N_x$ について解くと

$$N_x = \frac{\mu_r B_0^x - B_{in}^x}{(\mu_r-1)B_{in}^x} \qquad \text{(C27)}$$

となる．有限要素法により B_0^x, B_{in}^x を求めることで，(C27)から反磁界係数が求められる[C.4]．しかし，この方法では，磁性体が導体の場合，つまり $\mu_r = 1$ では使用できない．

C. 3 磁性楕円体の反磁界係数を解析的に求める方法

本節では, 第 3 章で述べた磁性楕円体の解析式を導く. この導出はかなり複雑なので, 導入として最初に，一様電界中の球形導体がつくる電気スカラーポテンシャルを，導体が誘電体である場合の電気スカラーポテンシャルを C.3.1, 2 節でそれぞれ導く．これらはよく知られた結果であるがこの考え方を応用し, C.3.3 節で一般の楕円体の反磁界係数を求め，本論文で解析対象とした圧粉磁芯をプレス圧縮した形状を長球楕円体，扁球楕円体に近似して求めたマクロ複素透磁率を求める際に用いる反磁界係数を求める.

C. 3. 1　一様電界中の球形導体の電気スカラーポテンシャル

解析モデルとして，Fig.C.4 に示すような一様電界 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\mathbf{e}_x$ 中に置かれた導体球を考える．この状況では誘導電荷によって，導体球には電気双極子モーメントが局在化しているように考えることができる．この導体球の電気スカラーポテンシャルは様々な文献で報告されているが，本節では文献[C.5]を参考に導く.

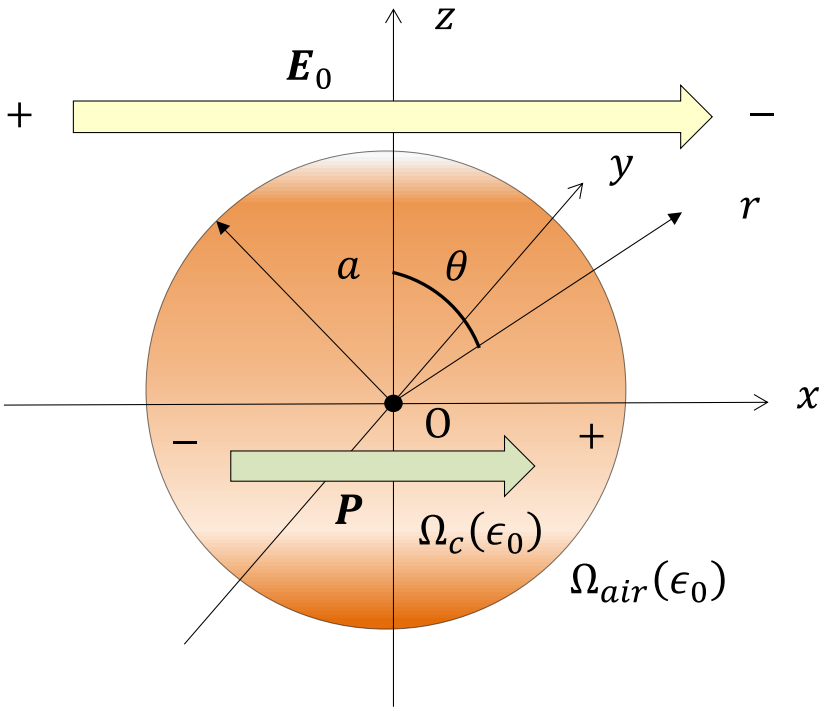


Fig.C.4 Conductive sphere immersed in an electrostatic field $\boldsymbol{E}_0$.
Induced electric charge appears in both sides of the sphere surface, following the fact that the tangential components of the applied electric field at the sphere surface is continuous and the condition $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ must be satisfied. As a result, the surface of the conductive sphere is an equipotential surface where the electric scalar potential is constant.

誘電体球の電気スカラーポテンシャル φ_e は，外部電界に起因する成分 φ_0 と誘導電荷に起因する成分 φ_{ch} からなる．まず， φ_0 は

$$\boldsymbol{E}_0 = -\mathrm{grad}\,\varphi_0 \tag{C28}$$

で規定される．(C28)の両辺を x 軸について積分し，球座標で改めると

$$\varphi_0 = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta) \tag{C29}$$

となる．ここで，$P_1(\cos\theta)$ は第 3 章の球形圧粉磁芯の複素透磁率を導く際に用いた Legendre 多項式である．(C29)は球形誘電体から十分に離れた位置での境界条件と考えることができる．また誘電体球の外部では電荷が存在しないので，支配方程式は Laplace 方程式となる．この場合の電気スカラーポテンシャルは誘導電荷に起因する成分 φ_{ch} であり，第 3 章 3.11 節で導いた(3.256)と同様に

$$\varphi_{ch} = \frac{1}{r}\left(c_l r^{l+1} + \frac{d_l}{r^l}\right) \tag{C30}$$

である．さて，$r \to \infty$ の極限では，(C30)は(C29)に一致することが要請されるので

$$c_l = \begin{cases} -E_0 \ (l = 1) \\ 0 \ (l \neq 1) \end{cases} \tag{C31}$$

となるから

$$\phi_e = \phi_0 + \phi_1 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} \tag{C32}$$

と表すことができる．

つぎに，誘電体球表面 $r = a$ での境界条件は，誘電体が導電位になることから $\phi_e = 0$ となる．したがって，

$$-E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{P_l(\cos\theta)}{a^{l+1}} = 0 \tag{C33}$$

が要請される．ここで，誘電体表面では電位が一定なので，いかなる θ に対しても(C33)が成り立つためには

$$d_l = \begin{cases} E_0 \, a^3 (l = 1) \\ 0 \ (l \neq 1) \end{cases} \tag{C34}$$

となる．したがって，

$$\phi_e = \phi_0 + \phi_{ch} = -E_0 r P_1(\cos\theta) + E_0 a^3 \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}$$

$$= -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 r\cos\theta \tag{C35}$$

となる．一方で，Fig.C.4 の誘電体球は十分離れた位置から見ると，一対の正電荷と負電荷からなる電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ と考えることができる．電気双極子モーメントがつくる電気スカラーポテンシャル ϕ_p はよく知られた

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{C36}$$

である[e.g. C.2, 5-8]. (C35), (C36) を比較すると

$$|\boldsymbol{p}| = 4\pi\epsilon E_0 a^3 \tag{C37}$$

となる．すなわち，誘導電荷の電気スカラーポテンシャルは，電気双極子モーメントをもって表現できる，ということがわかる[C.6].

さて，誘導電荷は球面に局在化するが，この表面電荷密度は電束密度に関する Gauss の法則

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \mathrm{div}\,\epsilon_0\boldsymbol{E} = \sigma \tag{C38}$$

に $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi_e$ を代入することから導かれる Poisson 方程式

$$\Delta\phi_e = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{C39}$$

を満たす．(C39)に(C35)を代入すると

$$\sigma = -\epsilon_0\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r} = -\epsilon_0\left.\frac{\partial\phi_e}{\partial r}\right|_{r=a}$$

$$= \epsilon_0\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\cos\theta\right|_{r=a}$$

$$= 3\epsilon_0 E_0 r\cos\theta \tag{C40}$$

となる．これは，球下面，つまり $x<0$ では負電荷を与え，球上面つまり $x>0$ では正電荷を与える式となる．導体球全体では電荷が相殺されるため，見かけ上の電荷は存在しない．実際に，全誘導電荷は

$$\int_{\partial S}\sigma\,\mathrm{d}S = 2\pi a^2 3\epsilon_0 E_0 r\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\;\mathrm{d}\theta = 0 \tag{C41}$$

となる．また，導体内部には電荷が存在しないので，導体は 1 つの等電位面となっている事実に反しない.

本節の考察は，後で議論する磁気スカラーポテンシャルの未定乗数を決定する際に，外部磁界からなる成分と磁性体表面での境界条件が必要になる場面において応用できる.

C. 3. 2　一様電界中の球形誘電体の電気スカラーポテンシャル

つぎに，解析モデルとして，Fig.C.4 の導体球が誘電体の場合を考える．この状況では Fig.C.5 に示すように，球内部の電気スカラーポテンシャルをも含めた考察が必要になる．誘電体球内部での静電ポテンシャルは有限であるので原点では発散しないようなポテン

シャルは，(C30)から

$$\varphi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta) \ , r \le a \tag{C42a}$$

$$\varphi_{out} = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} \ , r \ge a \tag{C42b}$$

を得る．(C42)の未定乗数 c_l を決定する際には，(C33)の境界条件を修正する必要がある．

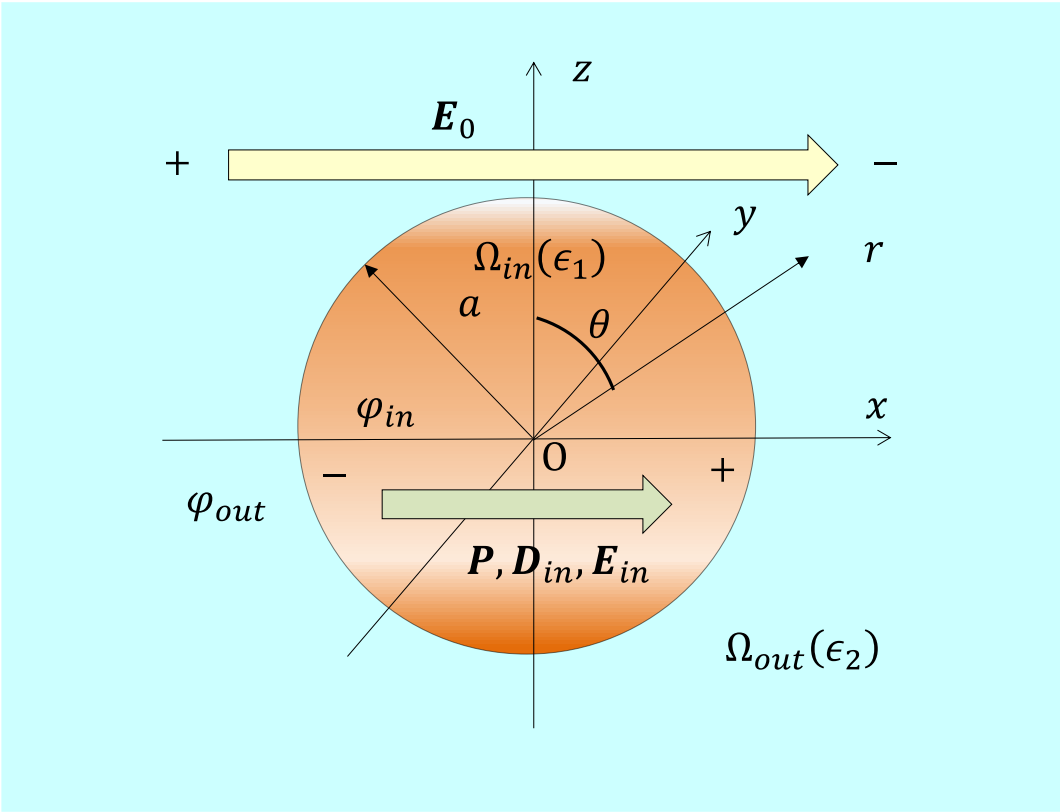


Fig.C.5 Dielectric sphere（Ω_{in}）embedded in an outer dielectric media（Ω_{out}）whose permittivity is ϵ_2. Electrostatic field $\boldsymbol{E}_0$ is applied to this mixture. In this model, the scalar potential in this dielectric sphere induced by the polarization have to be considered. It is determined from the fact that the electric scalar potential is continuous on the sphere surface.

一般に誘電体の表面では，電束密度の法線成分が連続で，電界の接線成分が連続するから，境界条件は

$$\epsilon_1 \left.\frac{\partial \phi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon_2 \left.\frac{\partial \phi_{out}}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{C43a}$$

$$\left.\frac{1}{a}\frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta}\right|_{r=a} = \left.\frac{1}{a}\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \theta}\right|_{r=a} \tag{C43b}$$

が要請される．これは，第 3 章 3.11 節で述べた圧粉磁芯の問題で課した境界条件(3.257)と類似している．(C43a)に(C42)を代入すると

$$\epsilon_1 \sum_{l=1}^{\infty} c_l l r^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0 \epsilon_2 P_1(\cos\theta) - \epsilon_2 \sum_{l=1}^{\infty} d_l (l+1) \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+2}} \quad \text{(C44a)}$$

を得る．いかなる θ に対しても(C44a)が成り立つためには，未定乗数が

$$d_0 = 0 \quad \text{(C45a)}$$

$$c_1 = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\left(E_0 + 2\frac{d_1}{a^3}\right) \quad \text{(C45b)}$$

$$c_l = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\left(\frac{l+1}{l}\frac{1}{a^{2l+1}}\right) E_0 \ , l \geq 2 \quad \text{(C45c)}$$

を満たす必要がある．一方で，(C43b)の条件より，電界が一定であることが必要となるが，球の表面では電気スカラーポテンシャルは連続なので，θ によらず，(C43)は結局 $\phi_{in} = \phi_{out}$ と一致することから，$r = a$ において

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l a^l P_l(\cos\theta) = -E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{P_l(\cos\theta)}{a^{l+1}} \quad \text{(C46)}$$

となる．(C46)を $P_1(\cos\theta)$ についてまとめると，

$$\left(-E_0 a + d_1 \frac{1}{a^2} - c_1 a\right) P_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{d_l}{a^{l+1}} - c_l a^l\right) P_l(\cos\theta) = 0 \quad \text{(C47)}$$

なので，(C47)を $P_1(\cos\theta)$ の恒等式と考えると

$$c_1 = -E_0 + d_1 \frac{1}{a^3} \quad \text{(C48a)}$$

$$c_l = \frac{d_l}{a^{2l+1}} \ , l \geq 2 \quad \text{(C48b)}$$

となる．

さて，(C45), (C48)から未定乗数を決定する．これらには c_0 が含まれていないが，誘電体球の内部では静電ポテンシャルが 0 であるとして $c_0 = 0$ とする．(C45a)と(C48a)を比較すると

$$c_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \quad \text{(C49b)}$$

$$d_1 = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \quad \text{(C49b)}$$

がわかる．つぎに，(C45b)と(C48b)を比較すると，下記の条件が得られる．

$$c_l = d_l = 0, l \geq 2 \tag{C50}$$

ゆえに，(C42)から一様電界中の誘電体球による電気スカラーポテンシャルは

$$\varphi_{in} = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos\theta = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 x \tag{C51a}$$

$$\varphi_{out} = -E_0 r P_1(\cos\theta) - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \frac{a^3}{r^3} r\cos\theta$$

$$= -\left(1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\frac{a^3}{r^3}\right) E_0 \cos\theta \tag{C51b}$$

と決定できる．(C51a)から誘電体球内部の電界と電束密度は

$$\boldsymbol{E}_{in} = -\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x}\mathbf{e}_x = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \mathbf{e}_x \tag{C52a}$$

$$\boldsymbol{D}_{in} = \epsilon_1 \boldsymbol{E}_{in} = \frac{3\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \mathbf{e}_x \tag{C52b}$$

となる．また，分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は電気感受率 $\chi_e = \epsilon_{1r} - 1$ を用いて

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E}_{in} = \frac{3(\epsilon_1 - \epsilon_0)\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \mathbf{e}_x \tag{C53}$$

と求められる．(C53)において，$\epsilon_2 = \epsilon_0$ の場合，つまり誘電体球を囲む領域 Ω_{out} が真空の場合では

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E}_{in} = \epsilon_0 \frac{3(\epsilon_{1r} - 1)}{\epsilon_{1r} + 2} E_0 \mathbf{e}_x \tag{C54}$$

となる．これは，Appendix A で分極率から導いた(A6)で示される分極

$$\boldsymbol{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)} \epsilon_0 \boldsymbol{E}_{loc} \tag{C55}$$

と比較すると，$N = 1/3$ とわかる．これは，球形誘電体の反電界係数である．また，これらは，構成関係式

$$\boldsymbol{D}_{in} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}_{in} + \boldsymbol{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e)\boldsymbol{E}_{in} \tag{C56}$$

を満足する．

前節で導いた一様電界中の導体球と，本節で導いた一様電界中の誘電体球がつくる電気スカラーポテンシャルと，分極の関係はよく知られた公式であるが，この導出過程からつぎのことが帰結する．

① 全電気スカラーポテンシャルは，外部電界と誘導電荷の電気スカラーポテンシャルの総和となる．未定乗数の決定には，球表面での電界と電束密度の連続性から，境界条件を課すことが必要となる．

② 無限遠方では，外部電界の電気スカラーポテンシャルを境界条件として課すことが必要になる．

③ 球の十分遠方では, 球を電気双極子モーメントと考えた場合と等価な電界が現れる．

次節では本題となる一様に磁化された磁性楕円体の反磁界係数を求めるが, 展開が複雑である．しかしながら，基本的な考え方はこれらの一様電界中の導体，誘電体の問題の考え方を適用すればよい．

C. 3. 3　一様に磁化された磁性楕円体の反磁界係数

磁性体の形状が Fig.C.3 のような楕円体である場合，反磁界係数は第 3 章で使用した

$$N_\alpha = N_x = \frac{1-e^2}{2e^3}\left(\log\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) = \frac{1}{k^2-1}\left\{\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\log\left(k+\sqrt{k^2-1}\right) - 1\right\} \quad \text{(C57a)}$$

$$N_\beta = N_y = N_z = \frac{1}{2}(1 - N_\alpha) \quad \text{(C57b)}$$

から長軸方向, 短軸方向毎に計算できる. ここで, $e \coloneqq \sqrt{1-\beta^2/\alpha^2}$, $k \coloneqq \alpha/\beta$ とおいた. (C57)は(3.347b, c)に対応する．(C57)の導出については Landau-Lifshitz，Stratton らが示している[C7, 8]が，より厳密な証明は E. C. Stoner の文献[C.9]にて示されている．本節ではこれらを参考に(C57)を導く．なお, [C.7]では電気スカラーポテンシャルから反電界係数を求めているが，誘電体の反電界のソースは C.3.1, 2 節で導いた誘導表面電荷密度であるから，本質的には反磁界の問題と同じである．

解析モデルとしては Fig.C.3 のような磁性楕円体を考えるが, 座標系は Fig.C.6 に示すような楕円体表面座標 ξ ，第 1 葉曲面 η ，第 2 葉曲面 ζ をとる．また，x 軸上の長軸を α ，y 軸方向の短軸を β ，z 軸方向の短軸を γ とおいた．この座標系の取り方は，例えば文献[C.10]に詳述されており，本質的には第 3 章 3.12 節の楕円体座標系と同様である．この座標系はつぎの方程式群により規定される．

$$\frac{x^2}{\alpha^2+u} + \frac{y^2}{\beta^2+u} + \frac{z^2}{\gamma^2+u} = 1\,, (\alpha > \beta > \gamma), u = \xi, \eta, \zeta \quad \text{(C58a)}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{(\xi+\alpha^2)(\eta+\alpha^2)(\zeta+\alpha^2)}{(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)}} \quad \text{(C58b)}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(\xi+\beta^2)(\eta+\beta^2)(\zeta+\beta^2)}{(\gamma^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}} \quad \text{(C58c)}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(\xi+\gamma^2)(\eta+\gamma^2)(\zeta+\gamma^2)}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}} \tag{C58d}$$

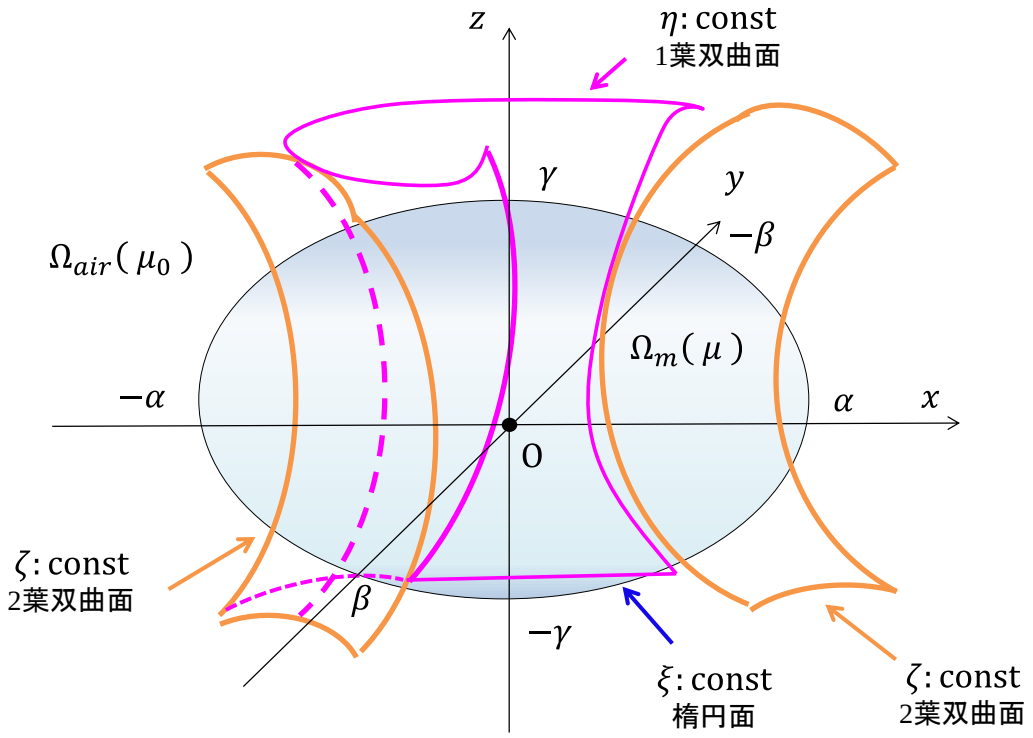


Fig.C.6 Ellipsoidal coordinates for a magnetic ellipsoid.
The coordinate system is one type of orthogonal curvilinear coordinate systems, where ξ,η,ζ denote the surface of the ellipsoid, the first hyperboloid, the second hyperboloid, respectively. The domains of them are determined by using the three axes α,β,γ as $\xi \geq -\gamma^2, -\gamma^2 \geq \eta \geq -\beta^2, -\beta^2 \geq \eta \geq -\alpha^2$ $(\alpha > \beta > \gamma)$.

またこの座標系における計量は

$$R_u = \sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}, u = \xi,\eta,\zeta \tag{C59}$$

とおくと，

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi} \tag{C60a}$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta} \tag{C60b}$$

$$h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta} \tag{C60c}$$

である．計量の詳細は Appendix E にて示す．

さて，外部磁界により，Fig.C.3 に示すように誘導磁荷密度が生じる．誘電体の問題では表面電荷密度である．これは，磁気スカラーポテンシャル ϕ_m を用いて

$$\boldsymbol{H}_0 = -\mathrm{grad}\,\phi_m \tag{C61}$$

と関係づけることができる．今回の ϕ_m は，外部磁界に起因する磁気スカラーポテンシャル ϕ_0 と Fig.C.3 に示されている N 極 S 極により生じる誘導磁荷に起因する成分 ϕ_{ch} からなる．ここで，真空中においては磁化は存在しないので，(C61)の両辺の発散をとると，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}_0 = 0$ から Laplace 方程式

$$\Delta\phi_m = 0 \tag{C62}$$

を得る．ここで Appendix E に示すように，Laplacian は計量を用いて

$$\Delta\phi_m = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right\} \tag{C63}$$

と表すことができる．(C60)から

$$h_1 h_2 h_3 = \frac{(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)(\xi-\eta)}{8R_\xi R_\eta R_\zeta} \tag{C64a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta}\frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta}}{\frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}}\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{(\eta-\zeta)R_\xi}{2R_\eta R_\zeta}\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi}\right)$$

$$= \frac{\eta-\zeta}{2R_\eta R_\zeta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi}\right) \tag{C64b}$$

などがわかるので，(C62)は

$$\frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}\times$$

$$\left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi}\right) + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\phi_m}{\partial\eta}\right) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\phi_m}{\partial\zeta}\right)\right] = 0 \tag{C65}$$

となる．なお，(C65)は(E17)に対応する．

(C65)を解く際には，第 3 章で用いた変数分離法を用いればよいが，ここでは簡単のため一方向の磁化に限定して解く．いま，$\mathbf{e}_x$ 方向に磁界が印加されている状況を考えると $\boldsymbol{H}_0 = H_0\mathbf{e}_x$ なので，(C61)を積分することで，誘導磁荷に起因する成分を除いた外部磁界に起因する磁気スカラーポテンシャル ϕ_0 は

$$\phi_0 = -H_0 x = -H_0 \sqrt{\frac{(\xi+\alpha^2)(\eta+\alpha^2)(\zeta+\alpha^2)}{(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)}} \tag{C66}$$

となる．ここで，(C58b)の内，正の値を用いた．後の計算のため，(C66)の表示を変数分離した形

$$\phi_0 = C_1 \Xi(\xi) H(\eta) Z(\zeta) \tag{C67a}$$

$$C_1 := -H_0 \sqrt{\frac{1}{(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)}} \tag{C67b}$$

に改めておく．

さて，Fig.C.3 に示されている N 極 S 極により生じる誘導磁荷に起因する成分 ϕ_{ch} については，磁性体が $\mathbf{e}_x$ 方向に無限に長い場合には，外部磁界に起因する ϕ_0 に依存しない別の $\Xi(\xi)$ の形がある．そこで，ϕ_0 とは別に，つぎのような関数形を考える．

$$\phi_{ch} = C_2 \Xi(\xi) \sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)} \tag{C68}$$

(C68)を Laplace 方程式に代入すると

$$(\eta-\zeta)\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)} R_\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi \frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial\xi}\right)$$

$$+(\zeta-\xi) R_\eta \Xi(\xi) \sqrt{(\zeta+\alpha^2)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\right)$$

$$+(\xi-\eta) R_\zeta \Xi(\xi) \sqrt{(\eta+\alpha^2)} \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}\right) = 0 \tag{C69}$$

となる．(C59)を用いると，(C69)の左辺第 2, 3 項は

$$(\zeta-\xi)\sqrt{(\eta+\alpha^2)(\eta+\beta^2)(\eta+\gamma^2)}\Xi(\xi)\sqrt{(\zeta+\alpha^2)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Xi(\xi)(\zeta-\xi)\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}(2\eta+\beta^2+\gamma^2) \tag{C70a}$$

$$(\xi-\eta)\sqrt{(\zeta+\alpha^2)(\zeta+\beta^2)(\zeta+\gamma^2)}\Xi(\xi)\sqrt{(\eta+\alpha^2)} \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Xi(\xi)(\xi-\eta)\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}(2\zeta+\beta^2+\gamma^2) \tag{C70b}$$

となるから，(C69)はつぎのように変形できる．

$$R_\xi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(R_\xi \frac{\mathrm{d}\Xi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right) - \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}+\frac{\xi}{2}\right)\Xi(\xi) = 0 \tag{C71}$$

この方程式の解の一つは(C68)からの類推で $\Xi(\xi) = \sqrt{\xi+\alpha^2}$ と求めることができる．ここで，2 階線形常微分方程式の 1 つの解が与えられているとき，もう一つの解は微分方程式の理論から，つぎのようにして求められる．一般的に，y_1 が

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0 \tag{C72}$$

の解であるとき，もう 1 つの解 y_2 は

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p(a)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}x \tag{C73}$$

で与えられることが数学的に知られている．このことは章末で改めて示す．

そこで，(C71)を変形して得られる

$$\frac{\mathrm{d}^2\Xi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\log\left(R_\xi(\xi)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\Xi(\xi)}{\mathrm{d}\xi} - \frac{1}{R_\xi}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}+\frac{\xi}{2}\right)\Xi(\xi) = 0 \tag{C74}$$

と(C72)を比較すると，(C46)の 1 つの解が $\Xi(\xi) = \sqrt{\xi+\alpha^2}$ なので

$$\Xi(\xi) = \sqrt{\xi+\alpha^2}\int \frac{1}{(\xi+\alpha^2)}\exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log\left(R_\xi(a)\right)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}\xi$$

$$= \sqrt{\xi+\alpha^2}\int \frac{1}{(\xi+\alpha^2)R_\xi}\mathrm{d}\xi \tag{C75}$$

とわかる．したがって，(C68)は

$$\phi_{ch} = C_2\sqrt{\xi+\alpha^2}\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}\int \frac{1}{(\xi+\alpha^2)R_\xi}\mathrm{d}\xi \tag{C76}$$

となる．ここで，楕円体表面では磁気スカラーポテンシャルは一定であるから，無限遠までの積分を考えて

$$\phi_{ch} = C_2\sqrt{\xi+\alpha^2}\sqrt{(\eta+\alpha^2)}\sqrt{(\zeta+\alpha^2)}\int_\xi^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s \tag{C77}$$

となる．ここで，被積分関数の記号を s と改めた．

ここで，外部磁界による誘導磁荷に起因する磁気スカラーポテンシャルが，ξ の関数であると仮定すると，いまの場合

$$\phi_{ch} = C_2\phi_0\sqrt{\xi+\alpha^2}\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s \tag{C78}$$

と置くことができる．もし，磁性楕円体が真球である場合，つまり $\xi \to 0$ の極限では，ϕ_{ch} は磁性球表面での磁気スカラーポテンシャルとなる．これは，η,ζ には依存しない条件である．この詳細な説明は Appendix D でも行う．磁性体表面では磁界の接線成分が連続となる必要があるため，ϕ_{ch} は ϕ_0 に一致するから，未定乗数を含め，(C78)は次のような関数に改めることができる．

$$\phi_{ch} = -\frac{\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s}{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s} \tag{C79}$$

(C79)において，$\xi \to 0$ の極限では $\phi_{ch} \to -1$ となり，$\xi \to \infty$ の極限では $\phi_{ch} \to 0$ となる．(C79)が誘導磁荷による磁気スカラーポテンシャルで，外部磁界が印加された場合の全磁気スカラーポテンシャル ϕ_m は結局

$$\phi_m = \phi_0 + \phi_{ch} = \phi_0\left\{1 - \frac{\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s}{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s}\right\} \tag{C80}$$

と求めることができる．(C80)において，$\xi \to 0$ の極限では $\phi_m \to 0$ となり，$\xi \to \infty$ の極限では $\phi_m \to \phi_0$ となる．

つぎに，無限遠方の取り扱いを考える．x 軸上で楕円体から十分に離れた位置 $\boldsymbol{r}$ では(C59)から

$$R_\xi = \sqrt{(\xi+\alpha^2)(\xi+\beta^2)(\xi+\gamma^2)} \to \xi^{\frac{3}{2}} \tag{C81}$$

となるので，$r = |\boldsymbol{r}|, r^2 \approx \xi$ と合わせて

$$\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s \approx \int_{r^2}^{\infty}\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}s = \frac{2}{3r^3} \tag{C82}$$

を得る．したがって，(C80)は

$$\phi_0 + \phi_{ch} = \phi_0\left\{1 - \frac{\frac{2}{3r^3}}{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s}\right\} \tag{C83}$$

となる．一方で，十分に磁性体から離れている場合には，C.3.1, 2 節の導体球・誘電体球の場合の議論と同様に，Fig.C.3 の N 極 S 極による誘導磁荷は，N 極 S 極が一対となった磁気双極子モーメントとして扱うことができる. このような磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ がつくる磁気スカラーポテンシャルは

$$\phi_{ch} = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \tag{C84}$$

で与えられる．いま，Fig.C.3 の N 極 S 極による磁気モーメントは x 軸上にあるので，(C84)の内積の計算は，磁性楕円体の体積が $V = (4\pi\alpha\beta\gamma)/3$ なので

$$\phi_{ch} = \frac{m_x r}{4\pi r^3}\cos\theta = \frac{m_x}{\frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3}}\cdot\frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3}\frac{x}{4\pi r^3} = \frac{m_x}{V}\cdot\frac{xV}{4\pi r^3} \tag{C85}$$

となる．ここで，C.1.3 節で述べたように，磁性体内部の反磁界は $\boldsymbol{H}_d = -N\boldsymbol{M}$ で与えられるので，$\mathbf{e}_x$ 方向に現れる誘導磁荷による自己減磁作用は

$$H_x = -N_x M_x \tag{C86}$$

と表すことができる．いま，磁化の定義から

$$M_x = \frac{m_x}{V} = \frac{m_x}{\frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3}} \tag{C87}$$

なので，$(\mathrm{C85}-87)$から

$$\phi_{ch} = M_x\cdot\frac{xV}{4\pi r^3} = -\frac{H_x x V}{4\pi N_x r^3} \tag{C88}$$

となる．ここで，(C83)の右辺第 2 項は(C88)と等しいので，つぎの関係が導かれる．

$$N_x = \frac{V}{4\pi\cdot\frac{2}{3}}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s \tag{C89a}$$

他の成分も同様にして

$$N_y = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\beta^2)R_s}\mathrm{d}s \tag{C89b}$$

$$N_z = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\gamma^2)R_s}\mathrm{d}s \tag{C89c}$$

となる．ここで，Fig.C.3 では長球楕円体を仮定しているが，扁球楕円体においては外部

印加磁界の方向以外は同じである．したがって，一般性を失わず，$\alpha > \beta > \gamma$ と仮定してよい．この際，外部磁界を受ける表面積の差異から $N_x < N_y < N_z$ となる．

つぎに，$(\mathrm{C89a-c})$を合計すると

$$N_x + N_y + N_z = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\left[\int_0^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)R_s}\mathrm{d}s + \int_0^\infty \frac{1}{(s+\beta^2)R_s}\mathrm{d}s + \int_0^\infty \frac{1}{(s+\gamma^2)R_s}\mathrm{d}s\right] \quad (\mathrm{C90})$$

となる．$(\mathrm{C90})$の右辺の積分は $u = R_s^2$ という置換により，積分範囲が $(\alpha\beta\gamma)^2$ から ∞ に変更され，

$$\mathrm{d}u = 2R_s\frac{\mathrm{d}R_s}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}s = 2u^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{d}s \quad (\mathrm{C91})$$

なので，

$$N_x + N_y + N_z = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_{(\alpha\beta\gamma)^2}^\infty \frac{1}{uu^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} \times \lim_{k\to\infty}(-2)\left[u^{-\frac{1}{2}}\right]_{(\alpha\beta\gamma)^2}^k = 1 \quad (\mathrm{C92})$$

となる．したがって，各方向の反磁界係数の総和は常に 1 であることがわかる．また，各反磁界係数は正の値をとるので，$0 < N_x < N_y < N_z < 1$ も帰結する．

仮に，磁性体の形状が球であるとき，$\alpha = \beta = \gamma$ なので，図形の対称性から

$$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3} \quad (\mathrm{C93})$$

が直ちにわかる．一方で，磁性体の形状が円柱であるとき，$\alpha \to \infty, \beta = \gamma$ と考えれば $(\mathrm{C90})$と$(\mathrm{C92})$から

$$N_x = 0, N_y = N_z = \frac{1}{2} \quad (\mathrm{C94})$$

がわかる．

つぎに，扁球楕円体形状の磁性体の反磁界係数を各成分毎に求める．一般の磁性楕円体の場合，解析的に$(\mathrm{C89})$を計算することは難しいので，数値積分が必要になる．ただし，扁球楕円体を仮定できる場合，つまり $\alpha > \beta = \gamma$ の場合には$(\mathrm{C89a})$は解析的に

$$N_x = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)\sqrt{(s+\alpha^2)(s+\beta^2)^2}}\mathrm{d}s = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(s+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}(s+\beta^2)}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1-e^2}{2e^3}\left(\log\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \quad (\mathrm{C95a})$$

と求められる．ここで，$e \coloneqq \sqrt{1-\beta^2/\alpha^2}$ は扁球楕円体の離心率である．一方で，N_y, N_z については，対称性から

$$N_y = N_z = \frac{1}{2}(1 - N_x) \tag{C95b}$$

と求められる．

さらに，$\gamma \to \infty$ の極限では，(C89)から

$$N_x = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tag{C96a}$$

$$N_y = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \tag{C96b}$$

$$N_z = 0 \tag{C96c}$$

となる．これは，楕円柱細線の反磁界係数である．

C. 4 反磁界係数とテンソル型複素透磁率の長軸と短軸への依存性

まず，楕円体の磁性楕円体のテンソル型複素透磁率は，第 3 章 3.12 節で導いた

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2 \eta_0 \,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\}\dfrac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2\tanh^2 \eta_0 - 1)} \tag{C97a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan \zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2 \eta_0\right)\dfrac{\tan \zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2 \eta_0)} \tag{C97b}$$

である．ここで，$\zeta^{\alpha} \coloneqq k a_f \cosh \eta_0 \,, \zeta^{\beta} \coloneqq -k a_f \sinh \eta_0$ とおいた．(C97a), (C97b)はそれぞれ(3.345), (3.336)に対応する．なお，ここでは磁性体楕円体表面座標を規定する定数は $\eta_0 = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), u \coloneqq \alpha / a_f$ としたが, これは Helmholtz 方程式の導出の際に, 文献[C.11]の座標系を参考としているためであり, Fig.C.6 の座標系とは異なる．磁性楕円体が集合した磁性体を均質化する際には，Ollendorff の式

$$\left\langle \dot{\mu}_r^{\xi} \right\rangle = 1 + \frac{\eta_f \left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1\right)}{1 + N_{\xi}\left(1 - v_f\right)\left(\dot{\mu}_r^{\xi} - 1\right)}, \xi = x, y, z \tag{C98}$$

を用いる．(C98)は(3.347a)に対応する．第 4 章では，(C98)の周波数特性を調べたが，本節では長軸と短軸の比 α/β への依存性を調べる．以下では，$f = 10\ \mathrm{MHz}, \eta_f = 0.90, \mu_r = 28.0, \sigma = 1.03 \times 10^7\ \mathrm{S/m}$ と設定する．

まず，反磁界係数(C95)，および楕円体表面座標 η_0 の α/β への依存性を調べた結果を Fig.C.7 に示す．なお，$\alpha/\beta > 0$ では α と β の役割を変更する．Fig.C.7 から，反磁界係数については，α/β が十分に大きいとき，N_x が $1/2$ に，N_y が 0 にそれぞれ収束する．これは，扁球楕円体内部の自己減磁作用が無限長円柱の場合とほぼ一致することを表す．また，$\alpha/\beta = 1$ の場合には真球の場合の反磁界係数 $1/3$ に一致することがわかる．なお，いずれのグラフも軸 $\alpha/\beta = 1$ に関して対称になるが，η_0 については定義から，$\alpha/\beta \to 1, a_f \to 0$ において $\eta_0 \to \infty$ となる．

つぎに，$\langle \dot{\mu}_r^x \rangle, \langle \dot{\mu}_r^y \rangle$ の α/β への依存性を調べた結果を Fig.C.8 に示す．Fig.C.8 から，実部に関して，長軸方向である x 成分については，α/β が大きくなるにつれて減衰し，長軸方向である y 成分については逆の傾向を示す．一方で，虚部については，いずれの成分も 0 に収束し，x 成分についてはピーク点を持ち，y 成分については単調増加する．これは α が大きくなるにつれ，磁束を受ける表面積が，x 成分では十分に大きくなり，y 成分では十分に小さくなることに対応する．なお，軸 $\alpha/\beta = 1$ について，(C97a, b)は微分が不連続であるので，左右非対称である．

また，真球の場合の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{sphere} = 2\mu_r^{sphere} \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - 1} \tag{C99}$$

を(C98)に代入して求めたマクロ複素透磁率の値は $\langle \dot{\mu}_r^{sphere} \rangle = 13.51 - \mathrm{j}1.54$ であり，(C97)はこの値に近づいているとわかる．したがって，(C97)は(C99)を含んだ形と言える．このことについては，Appendix D で改めて証明する．

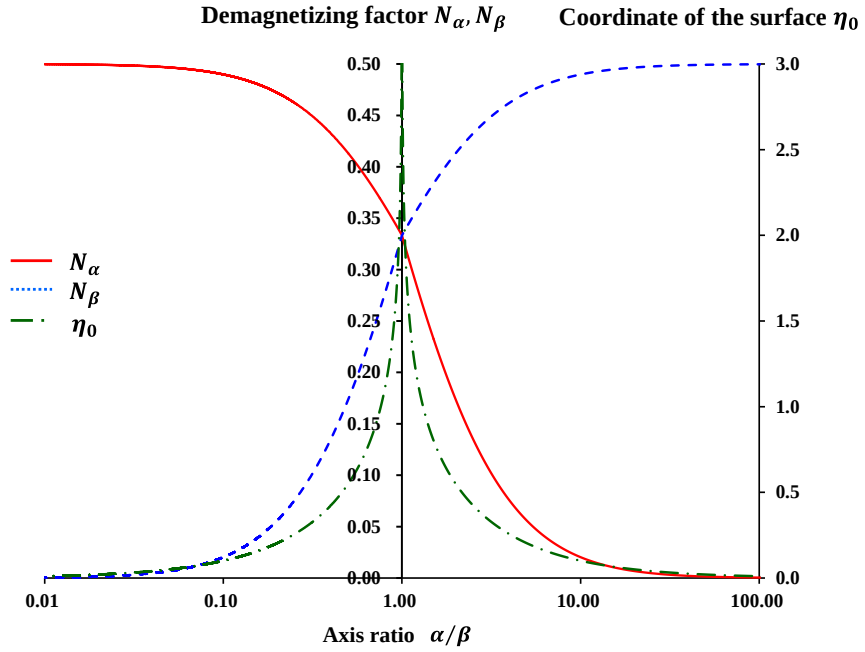


Fig.C.7 Dependence of the demagnetization factor and the surface coordinate η_0 on the axis ratio α/β. From this figure, we find that N_α and N_β have symmetric characteristic and approach to $1/2$ and 0 at $\alpha/\beta \approx 100, 0.01$, respectively. This is because in the former case, the shape of the prolate ellipsoid can be recognized as an infinity long cylinder while in the latter case, it becomes very similar to an infinity wide slab. Moreover, when $\alpha/\beta = 1$, both N_α and N_β approach to $1/3$, which is the demagnetization factor of a magnetic sphere.

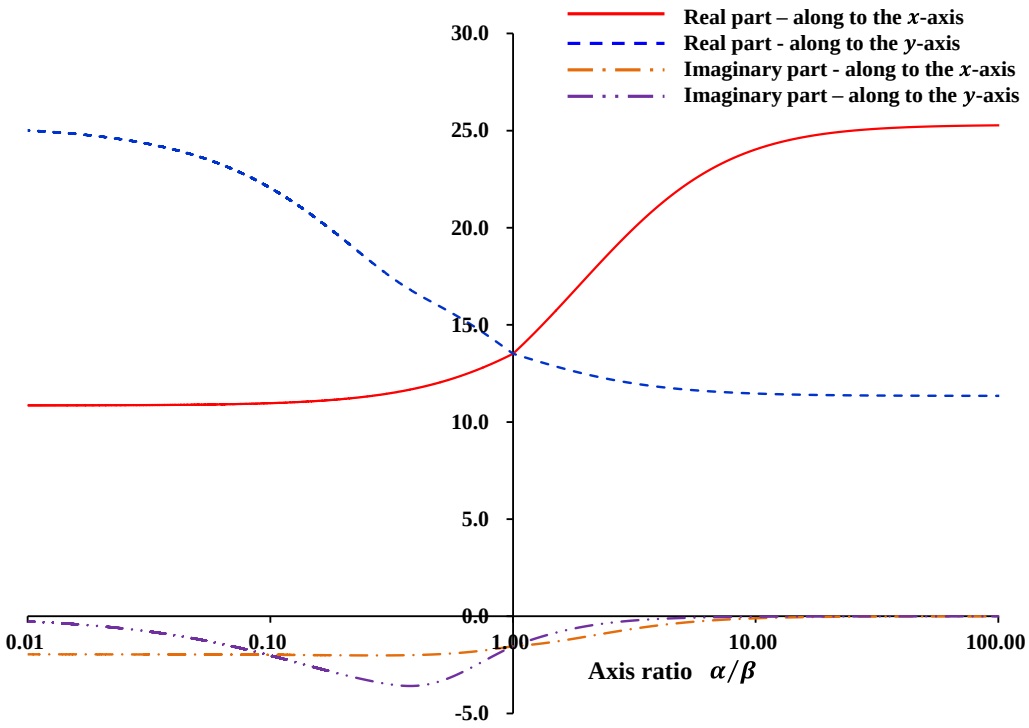


Fig.C.8 Dependence of the macroscopic complex permeability on the axis ratio α/β.
This result can be understood from the fact that the eddy currents induced by an applied magnetic induction are dominant in the magnetic-conductive prolate sphere when the magnetic field interlinks along to the long axis.

C. 5　補足：反磁界係数の別の形

C.3 節で導いた反磁界係数(C89)は，次のように変形することもできる．まず，つぎのような補助変数を定義する．

$$h^2 := \frac{\alpha^2 - \beta^2}{s + \alpha^2} \tag{C100a}$$

$$t := \frac{\beta}{\alpha} < 1 \tag{C100b}$$

$$k := \frac{\alpha}{\beta} > 1 \tag{C100c}$$

これより，

$$\mathrm{d}s := -2(\alpha^2 - \beta^2)h^{-3}\mathrm{d}h \tag{C101}$$

なので，積分範囲の変更から(C89)は $\beta = \gamma$ で

$$N_x = -\frac{\alpha\beta^2}{2}\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\left\{-(\alpha^2-\beta^2)+\frac{\alpha^2-\beta^2}{h^3}\right\}}(-2(\alpha^2-\beta^2)h^{-3}\mathrm{d}h)$$

$$= \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{h^2}{1-h^2}\mathrm{d}h \tag{C102a}$$

$$N_y = N_z = -\frac{\alpha\beta^2}{2}\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}\left\{-(\alpha^2-\beta^2)+\frac{\alpha^2-\beta^2}{h^3}\right\}^2}(-2(\alpha^2-\beta^2)h^{-3}\mathrm{d}h)$$

$$= \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{h^2}{(1-h^2)^2}\mathrm{d}h \tag{C102b}$$

ここで，部分分数分解

$$\frac{h^2}{1-h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1-h}\right)-1 \tag{C103a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\frac{h}{1-h^2} = \frac{1}{1-h^2}+\frac{2h^2}{(1-h^2)^2} \tag{C103b}$$

をそれぞれ(C102a),(C102b)に適用すると

$$N_x = \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{1-t^2}} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1-h}\right)-1\right\}\mathrm{d}h$$

$$= \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}}-\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$= \frac{t^2}{1-t^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)-1\right\}$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\left\{\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\log\left(k+\sqrt{k^2-1}\right)-1\right\} \tag{C104a}$$

$$N_y = N_z = \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} \frac{h}{1-h^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-h^2} \right) \mathrm{d}h$$

$$= \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} - \frac{1}{4} \log \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}} \right)$$

$$= \frac{t^2}{2(1-t^2)} \left\{ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2(k^2-1)} \left\{ k^2 - \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \log \left(k + \sqrt{k^2-1} \right) \right\} \qquad \text{(C104b)}$$

を得ることができる．また，$N_y = N_z = (1 - N_x)/2$ の関係にあることもわかる．

x 軸方向の反磁界係数 N_x を(C95a)と(C104a)で比較する．N_x の α/β への依存性を調べた結果を Fig.C.9 に示す．Fig.C.9 より，これらから計算した反磁界係数は同じであることがわかる．さらに，$\alpha/\beta = 1$，つまり磁性体の形状が真球形の場合では，$N_x = 1/3$ であることもわかる．

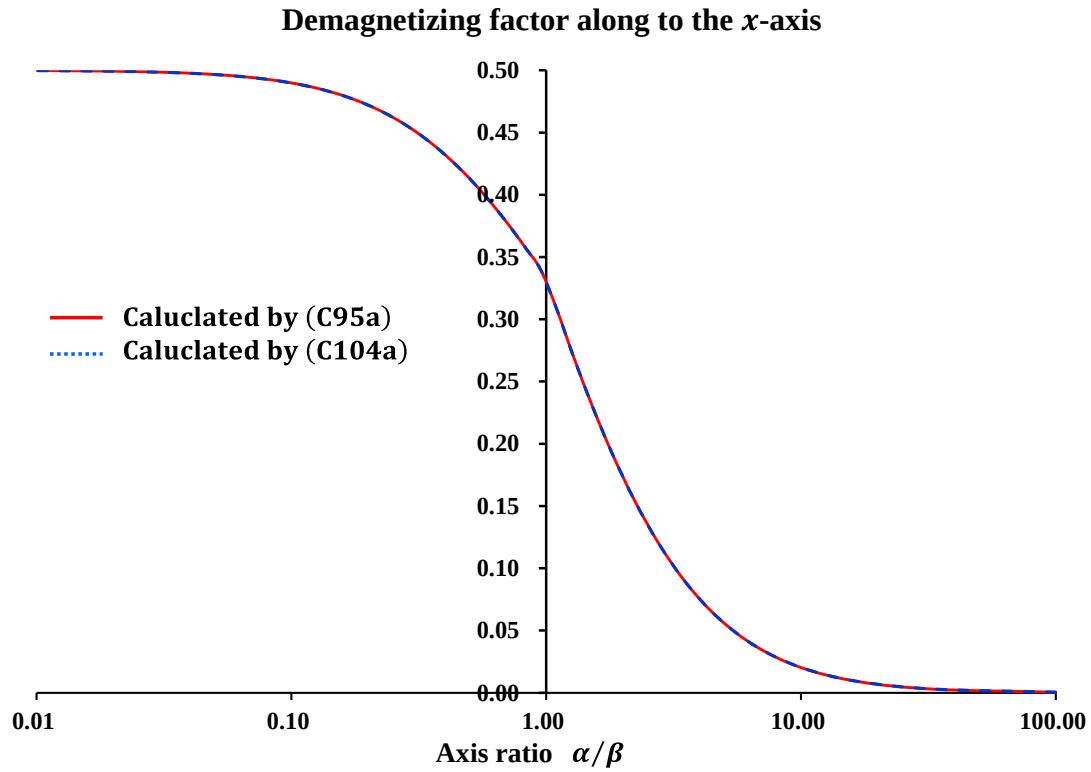


Fig.C.9 Dependence of the diamagnetic factor N_x along to the x–axis evaluated by two formulas（C95a）and（C104a）on the axis ratio α/β.
Form this figure, it is found that these are in good agreement and（C104a）is equivalent to（C95a）.

C. 6　補足：2 階線形微分方程式の解

C.3.3 節で述べた 2 階線形常微分方程式の解について，一般的に，y_1 が

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0 \tag{C72}$$

の解であるとき，もう 1 つの解 y_2 は

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(- \int p(a)\mathrm{d}a \right) \mathrm{d}x \tag{C73}$$

となることについては，全体の見通しをよくするために，C.3.3 節で証明を与えていなかった．ここでは，文献[C.13, 14]を参考に(C72)から(C73)を導く．まず，(C72)において，つぎの解を仮定する．

$$y_2(x) = y_1(x)u(x) \tag{C105}$$

このような方法を定数変化法と呼ぶ．(C105)を(C72)に代入すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} + p\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + qy_1 \right) u + y_1 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \left(2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + py_1 \right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{C106}$$

となる．(C106)において，$y_1(x)$ は(C72)を満足するので

$$y_1 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \left(2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + py_1 \right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{C107}$$

を得る．(C107)は

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{y_1}\left(2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + py_1 \right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{C108}$$

とも表記できる．

さて，一般に $y(x)$ に関する 2 階線形常微分方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) \tag{C109}$$

の形に書けるとき，補助変数

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{C110}$$

を導入し，(C109)に代入することで，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f(x, v) \tag{C111}$$

と 1 階線形常微分方程式に帰着できることが知られている[e.g. C.15]．(C111)を先に解き，積分定数を含めて得られた $p(x, C_1)$ を(C110)に代入し，両辺を積分すると

$$y = \int v(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2 \tag{C112}$$

となるので，元の微分方程式の一般解(C109)を得ることができる．このような方法を d'Alembert の階数低下法という．

ここで，この d'Alembert の階数低下法を用いて(C107)を解くことを考える．改めて補助変数

$$z(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{C113}$$

を導入すると，(C107)は

$$y_1 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + py_1\right)z = 0 \tag{C114}$$

に変形できる．ここで，(C114)の両辺に

$$t = y_1 \exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right) \tag{C115}$$

を乗じると，(C114)の左辺は

$$y_1^2 \exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(2y_1\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + py_1^2\right)\exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)z$$

$$= y_1^2 \exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y_1^2 \exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)\right]z$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y_1^2 \exp\left(\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)z\right] \tag{C116}$$

となるので，(C114)の両辺に(C115)を乗じた方程式を x で積分すると

$$z(x) = \frac{B}{y_1^2}\exp\left(-\int p(a)\,\mathrm{d}a\right) \tag{C117}$$

を得る．ここで，B は積分定数である．さらに(C113)に(C117)を代入し，両辺を積分すると

$$u(x) = B\int\left(\frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p(a)\,\mathrm{d}a\right)\right)\mathrm{d}x \tag{C118}$$

となるので，(C105)に立ち返ると

$$y_2(x) = By_1 \int \left(\frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(a)\, \mathrm{d}a \right) \right) \mathrm{d}x \tag{C119}$$

を得る．ここで，(C119)は(C72)を満足するとしているので，未定乗数 B については $B = 1$ とすると

$$y_2(x) = y_1 \int \left(\frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(a)\, \mathrm{d}a \right) \right) \mathrm{d}x \tag{C120}$$

を得る．(C120)が所望の(C73)である．

Appendix C 参考文献

[C.1] J. D. Jackson,「電磁気学(上)」，section 5.11，吉岡書店，2002.

[C.2] 中山正敏，「物質の電磁気学」，岩波書店，1996.

[C.3] H. Igarashi, “Semi-Analytical Approach for Finite Element Analysis of Multi-turn Coil Considering Skin and Proximity Effects”, *IEEE Trans*., *Magn*. vol.53, no. 1, DOI: 10.1109/TMAG. 2016 2601066, 2017.

[C.4] 佐藤佑樹，「モデル縮約法の電磁界解析への応用に関する研究」，2019 年度北海道大学博士論文.

[C.5] 砂川重信，「理論電磁気学」，第 4 章 8 節，紀伊国屋書店，1999.

[C.6] 前野昌弘，「よくわかる電磁気学」，東京図書出版社，2010.

[C.7] L. D. Landau, and E.M. Lifshitz, “Electrodynamics of Continuous Media”, 2nd ed., section 4, pp.26-27, Butterworth-Heinemann, 1984.

[C.8] J. A. Stratton, “Electromagnetic Theory”, section 4.21, 1941.

[C.9] E. C. Stoner, “The demaginetizaing factors for ellipsoids”, Phil. Mag., series 7, pp.803-821, 1945.

[C.10] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，「数学公式 I」，岩波書店，2007.

[C.11] P. Moon, D. E. Spencer, "Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions", Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed.,1988.

[C.12] 近角聡信，「物質の磁気的性質」，朝倉書店，1968.

[C.13] 矢嶋信男，「常微分方程式」，第 4 章 4.1 節，岩波書店，1989.

[C.14] 一松信，「特殊関数入門」，第 2 章 2.2 節，森北出版，1999.

[C.15] 阿部寛治，「図解による微分方程式」，第 2 章 2.8 節，培風館，1991.

Appendix D　Bessel 関数と Mathieu 関数の関係・球 Bessel 関数と回転波動関数の関係

第 7 章では，第 3 章で導入した楕円柱細線のテンソル型複素透磁率が，Bessel 関数を用いて記述できることを示した．また，第 4 章では，回転波動関数を球 Bessel 関数で展開した形を複素透磁率の式中の関数として用いるとよいことを示した．さらに，各座標系において導体表面座標が導体半径に近づく極限を取ると，テンソル型複素透磁率が，円筒の場合，球の場合という対称図形の場合に帰着することを述べた．しかし，第 4, 7 章ではこの厳密な証明を与えていなかった．本章ではこの詳細な証明を与える．

D. 1　Bessel 関数と Mathieu 関数の関係と複素透磁率

D. 1. 1　Mathieu 微分方程式の分離定数と固有値の関係

Mathieu 微分方程式は，第 3 章で導いた

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial \eta^2} - (\lambda - 2q\cosh 2\eta)H(\eta) = 0 \tag{D1a}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial \psi^2} + (\lambda - 2q\cos 2\psi)\Psi(\psi) = 0 \tag{D1b}$$

である．(D1)は，第 3 章の(3.192)に対応する．ここで，$\lambda \coloneqq \gamma^2 - 2q$ は固有値，γ は分離定数を表す．ここで，固有値と定数 q の関係は次式で規定される．

$$\lambda = n^2 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r q^r \tag{D2}$$

さて，$q \to 0$ の極限では，(D2)は $\lambda \to n^2$ となる．このとき，(D1)は直ちに

$$\frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial \psi^2} + n^2 \Psi(\psi) = 0 \tag{D3a}$$

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial \eta^2} - n^2 H(\eta) = 0 \tag{D3b}$$

となる．(D3a)は振動方程式なので，基底関数は $\cos n\psi, \sin n\psi$ とわかる．ここで，$q \to 0$ のとき，これらの基底関数に収束する 0 ではない基底関数を Mathieu 関数と定義する

[D.1]．本論文において，テンソル型複素透磁率を定義するために用いた Mathieu 関数は $\mathrm{ce}_n(z,q), \mathrm{se}_n(z,q)$であり，いまの場合は $z \coloneqq \mathrm{j}\eta$ である．

同様に，(D3b)においても基底関数が， $\cosh n\eta\,, \sinh n\eta$ であるとわかるので，$q \to 0$ のとき，これらの基底関数に収束する 0 ではない基底関数を変形 Mathieu 関数と定義する．このような Mathieu 関数をそれぞれ $\mathrm{Ce}_n(z,q), \mathrm{Se}_n(z,q)$ と定義する．複素双曲線関数と三角関数の変換から以下の関係が成り立つ．

$$\mathrm{Ce}_n(z,q) = \mathrm{ce}_n(\mathrm{j}z,q) \tag{D4a}$$

$$\mathrm{Se}_n(z,q) = -\mathrm{j}\mathrm{se}_n(\mathrm{j}z,q) \tag{D4b}$$

つぎに，定数 c_r を決定する．本節では一般的な議論を行うため，$\eta = z \in \mathbb{C}, H(\eta) = y$ とする．なお，ここでは，z が π または 2π を周期とする周期解を仮定する(Floquet の定理)．このとき，第 1 種の解として

$$y = \cos z + \sum_{r=1}^{\infty} q^r d_r(z) \tag{D5}$$

が知られている．(D5)から

$$\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} = -\cos z + \sum_{r=1}^{\infty} q^r d_r''(z) \tag{D6}$$

となるので，(D5), (D6)を(D3b)に代入すると

$$\lambda y = \cos z + q(d_1 + c_1 \cos z) + q^2(d_2 + c_1 d_1 + c_2 \cos z)$$

$$+q^3(d_3 + c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_3 \cos z) + \cdots \tag{D7}$$

なる級数展開式を得る．定数は恒等式になるように q^r の係数の比較から求められる[D.2]．ここでは結論を紹介するのみとするが，例えば

$$\mathrm{ce}_0(z,q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{q}{2}\cos 2z + q^2\left(\frac{\cos 4z}{32} - \frac{1}{16}\right) - q^3\left(\frac{\cos 6z}{1152} - \frac{11\cos 2z}{128}\right) + O(q^4)\right] \tag{D8a}$$

$$\mathrm{ce}_1(z,q) = \cos z - \frac{1}{8}q\cos 3z + \frac{1}{64}q^2\left(-\cos 3z + \frac{1}{3}\cos 5z\right)$$

$$-\frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{3}\cos 3z - \frac{4}{9}\cos 5z + \frac{1}{18}\cos 7z\right) + O(q^4) \tag{D8b}$$

$$\mathrm{se}_1(z,q) = \sin z - \frac{1}{8}q\sin 3z + \frac{1}{64}q^2\left(\sin 3z + \frac{1}{3}\sin 5z\right)$$

$$-\frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{3}\sin 3z + \frac{4}{9}\sin 5z + \frac{1}{18}\sin 7z\right) + O(q^4) \tag{D8c}$$

を得ることができる．詳細は例えば文献[D.3, section 7.11]を参考とする．

D. 1. 2　Mathieu 微分方程式から Bessel 微分方程式への帰着

さて，楕円が真円に一致する場合の極限，すなわち $\alpha \to \beta$ においては $a_f \to 0, q \to 0$ なので，(D2)から $\lambda = m^2$ となる．また，$a_f^2 \cosh^2\eta_1 = \alpha^2, a_f^2 \sinh^2\eta_1 = \beta^2$ なので，$\alpha = \beta = a$ とすると，$\cosh^2\eta_1 = \sinh^2\eta_1$ である．したがって，$2\mathrm{e}^{-\eta_1} = 0$ となり，$\eta_1 \to +\infty$ となる．この場合，$\mathrm{e}^{\eta_1} \gg \mathrm{e}^{-\eta_1}$ であるから，$\cosh\eta_1 \approx \mathrm{e}^{\eta_1}/2, \sinh\eta \approx \mathrm{e}^{\eta_1}/2$ である．また，一般の楕円表面座標 η に対し $a_f \cosh\eta \to a_f\mathrm{e}^{\eta}/2 = r, a_f \sinh\eta = a_f\mathrm{e}^{\eta}/2 \to r, q\mathrm{e}^{2\eta} = k^2r^2$ である($0 \times \infty$ の不定形であるが，ここでは有限値に収束する)．したがって，$a_f \cosh\eta, a_f \sinh\eta$ は円筒座標系の半径 r に近づく．この状況では Mathieu 微分方程式(D1)は

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial\eta^2} - (n^2 - q\mathrm{e}^{2\eta})H(\eta) = 0 \tag{D9a}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial\psi^2} + n^2\Psi(\psi) = 0 \tag{D9b}$$

となる．(D9b)は振動方程式なので，これを満足する基底関数は $\cos n\psi, \sin n\psi$ とわかる．一方で，(D9a)は，合成関数の連鎖微分

$$\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial\eta} = \frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\eta} = \frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r}\frac{a_f\mathrm{e}^{\eta}}{2} = r\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r} \tag{D10a}$$

$$\frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial\eta^2} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial\eta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial\eta} = r\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 H\big(\eta(r)\big)}{\partial r^2} \tag{D10b}$$

と引数の変換

$$q\mathrm{e}^{2\eta} = \left(k\frac{a_f\mathrm{e}^{\eta}}{2}\right)^2 = k^2r^2 \tag{D11}$$

を(D9a)に代入することで

$$\frac{\partial^2 H\big(\eta(r)\big)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H\big(\eta(r)\big)}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)H\big(\eta(r)\big) = 0 \tag{D12}$$

となる．(D12)は第 3 章で導いた Bessel 微分方程式と同形であるとわかる[D.2]．すなわち，Bessel 微分方程式は Mathieu 微分方程式の特別な場合であるとわかる．したがって，Mathieu 関数は Bessel 関数を用いて表現することができるのではないだろうかという予想ができる．またその際には第 7 章で用いた Bessel 関数の連分数の公式のように，Mathieu 関数を Bessel 関数を用いて表現することで，Mathieu 関数で表された楕円柱コイルのテンソル型複素透磁率を，Bessel 関数の連分数公式を適用し，有利関数表示が得られると期待できる．実際に，Mathieu 関数は Bessel 関数を基底関数として Fourier 級数展開できることが数学的に知られている．以下ではこの詳細について述べる．

D. 1. 3　Mathieu 関数の Bessel 関数展開

本節では，第 3 章 3.9 節で導いた楕円柱細線のテンソル型複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{\alpha}(\omega) = \mu_r^{\alpha}\frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^{\alpha}\frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{Se}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta_1, q)} \tag{D13a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta}(\omega) = \mu_r^{\beta}\frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} = \mu_r^{\beta}\frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{Ce}_1(\eta_1, q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta_1, q)} \tag{D13b}$$

を，Mathieu 関数を用いた表現から Bessel 関数を用いて表現した

$$\dot{\mu}_r^{\alpha}(\omega) \approx \mu_r^{\alpha}\frac{1}{\zeta^{\alpha}\dfrac{J_0(\zeta^{\alpha})}{J_1(\zeta^{\alpha})} - 1} \tag{D14a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta}(\omega) \approx \mu_r^{\beta}\frac{1}{\zeta^{\beta}\dfrac{J_0(\zeta^{\beta})}{J_1(\zeta^{\beta})} - 1} \tag{D14b}$$

の形へ移行する方法について述べる．(D13), (D14)はそれぞれ(7.46), (7.47)に対応する．奇数次の Mathieu 関数の Bessel 関数展開として次の公式が知られている[D.2-5].

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) = \frac{1}{B_1^{(2n+1)}\sqrt{q}} \times \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{se}_{2n+1}(z, q)\Big|_{z=0}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} I_{2r+1}\left(2\sqrt{q}\sin z\right) \tag{D15a}$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) = -\frac{1}{A_1^{(2n+1)}\sqrt{q}} \times \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q)\Big|_{z=\pi/2}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}\left(2\sqrt{q}\cos z\right) \tag{D15b}$$

ここで，$A_{2r+1}^{(2n+1)}, B_{2r+1}^{(2n+1)}$ は D.1.1 節で述べた Mathieu 関数の基底関数に対する Fourier 級数展開に伴う係数である[e.g. D.2]．$A_{2r+1}^{(2n+1)}, B_{2r+1}^{(2n+1)}$ を決定するには，複雑な漸化式が必要になるが，本論文では割愛する．(D15)において，合成関数の連鎖微分より

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) = \frac{1}{B_1^{(2n+1)}\sqrt{q}} \times \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{se}_{2n+1}(z, q)\Big|_{z=0}$$

$$\times 2\sqrt{q}\cos z \times \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \frac{\mathrm{d}I_{2r+1}\left(2\sqrt{q}\sin z\right)}{\mathrm{d}\left(2\sqrt{q}\sin z\right)} \tag{D16a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q) = -\frac{1}{A_1^{(2n+1)}\sqrt{q}} \times \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)\Big|_{z=\pi/2}$$

$$\times 2\sqrt{q}\sin z \times \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \frac{\mathrm{d}J_{2r+1}\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{\mathrm{d}\left(2\sqrt{q}\cos z\right)} \tag{D16b}$$

を得る．(D16)において， $\mathrm{se}_1(z,q), \mathrm{ce}_1(z,q)$ を得るため， $n=0$ とし，さらに磁気双極子の渦電流に対応する項のみを選ぶために $r=0$ とすると, Mathieu 関数の基底の次数に対応する $J_1(z)$ が得られるので,

$$\frac{\mathrm{se}_1(z,q)}{\mathrm{se}_1'(z,q)} = \frac{1}{2\sqrt{q}\cos z}\frac{I_1\left(2\sqrt{q}\sin z\right)}{\dfrac{\mathrm{d}I_{2r+1}\left(2\sqrt{q}\sin z\right)}{\mathrm{d}\left(2\sqrt{q}\sin z\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{q}\cos z}\frac{J_1\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)}{J_1'\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{q}\cos z}\frac{J_1\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)}{J_0\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right) - \dfrac{J_1\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)}{\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z}}$$

$$= \mathrm{j}\frac{\sin z}{\cos z}\frac{1}{\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)\dfrac{J_0\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)}{J_1\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin z\right)} - 1} \tag{D17a}$$

$$\frac{\mathrm{ce}_1(z,q)}{\mathrm{ce}_1'(z,q)} = -\frac{1}{2\sqrt{q}\sin z}\frac{J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{J_1'\left(2\sqrt{q}\cos z\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{q}\sin z}\frac{J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{J_0\left(2\sqrt{q}\cos z\right) - \dfrac{J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{2\sqrt{q}\cos z}}$$

$$= -\frac{\cos z}{\sin z}\frac{J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{\left(2\sqrt{q}\cos z\right)J_0\left(2\sqrt{q}\cos z\right) - J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}$$

$$= -\frac{\cos z}{\sin z}\frac{1}{\left(2\sqrt{q}\cos z\right)\dfrac{J_0\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{J_1\left(2\sqrt{q}\cos z\right)} - 1} \tag{D17b}$$

となる．(D17)において， $z = \mathrm{j}\eta$ とすると，合成関数の連鎖則から

$$\frac{\partial \mathrm{se}_1(z,q)}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathrm{se}_1(z,q)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} = \mathrm{j}\frac{\partial \mathrm{se}_1(z,q)}{\partial z} \tag{D18a}$$

$$\frac{\partial \mathrm{ce}_1(z,q)}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathrm{ce}_1(z,q)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} = \mathrm{j}\frac{\partial \mathrm{ce}_1(z,q)}{\partial z} \tag{D18b}$$

であるので，複素三角関数の公式

$$\cos \mathrm{j}z = \cosh z \tag{D19a}$$

$$\sin \mathrm{j}z = \mathrm{j}\sinh z \tag{D19b}$$

を用いて

$$\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta,q)} = \frac{\mathrm{Se}_1(\eta,q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta,q)} = \frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\sin \mathrm{j}\eta}{\cos \mathrm{j}\eta}\frac{1}{\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin \mathrm{j}\eta\right)\dfrac{J_0\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin \mathrm{j}\eta\right)}{J_1\left(\mathrm{j}2\sqrt{q}\sin \mathrm{j}\eta\right)} - 1}$$

$$= \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta}\frac{1}{\left(-2\sqrt{q}\sinh \eta\right)\dfrac{J_0\left(-2\sqrt{q}\sinh \eta\right)}{J_1\left(-2\sqrt{q}\sinh \eta\right)} - 1} \tag{D20a}$$

$$\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta,q)} = \frac{\mathrm{Ce}_1(\eta,q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta,q)} = -\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\cos \mathrm{j}\eta}{\sin \mathrm{j}\eta}\frac{1}{\left(2\sqrt{q}\cos \mathrm{j}\eta\right)\dfrac{J_0\left(2\sqrt{q}\cos \mathrm{j}\eta\right)}{J_1\left(2\sqrt{q}\cos \mathrm{j}\eta\right)} - 1}$$

$$= \frac{\cosh \eta}{\sinh \eta}\frac{1}{\left(2\sqrt{q}\cosh \eta\right)\dfrac{J_0\left(2\sqrt{q}\cosh \eta\right)}{J_1\left(2\sqrt{q}\cosh \eta\right)} - 1} \tag{D20b}$$

を得る．ゆえに，η に η_1 を代入した上で，(D20)の Bessel 関数の引数をそれぞれ $\zeta^\alpha \coloneqq -2\sqrt{q}\sinh \eta_1$, $\zeta^\beta \coloneqq 2\sqrt{q}\cosh \eta_1$ と定義し，(D20)を(D13)に代入することで

$$\dot{\mu}_r^\alpha(\omega) = \mu_r^\alpha \frac{\cosh \eta_1}{\sinh \eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} = \mu_r^\alpha \frac{\cosh \eta_1}{\sinh \eta_1}\frac{\mathrm{Se}_1(\eta_1,q)}{\mathrm{Se}_1'(\eta_1,q)}$$

$$\approx \mu_r^\alpha \frac{\cosh \eta_1}{\sinh \eta_1} \times \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1}\frac{1}{\zeta^\alpha \dfrac{J_0(\zeta^\alpha)}{J_1(\zeta^\alpha)} - 1} = \mu_r^\alpha \frac{1}{\zeta^\alpha \dfrac{J_0(\zeta^\alpha)}{J_1(\zeta^\alpha)} - 1} \tag{D21a}$$

$$\dot{\mu}_r^\beta(\omega) = \mu_r^\beta \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)} = \mu_r^\beta \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1}\frac{\mathrm{Ce}_1(\eta_1,q)}{\mathrm{Ce}_1'(\eta_1,q)}$$

$$\approx \mu_r^\beta \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1} \times \frac{\cosh \eta_1}{\sinh \eta_1}\frac{1}{\zeta^\beta \dfrac{J_0(\zeta^\beta)}{J_1(\zeta^\beta)} - 1} = \mu_r^\beta \frac{1}{\zeta^\beta \dfrac{J_0(\zeta^\beta)}{J_1(\zeta^\beta)} - 1} \tag{D21b}$$

となり，(D14)のような近似が得られる．なお，Mathieu 関数を Bessel 関数展開の主要項で近似しているため，数学的には等号ではないことを付記するが，このような Bessel 関

数展開による近似の妥当性は第 7 章 7.4.3 節の Fig.7.16, 17 に示されている．ここで，Bessel 関数の引数については，第 3 章 3.9 節で定義した Mathieu 関数の引数 $q \coloneqq \left(k^2 a_f^2\right)/4$, $\sqrt{k^2} = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = (1-\mathrm{j})/\delta$ から，

$$\zeta^{\alpha} = -2\sqrt{q}\sinh\eta_1 = -2 \times \frac{a_f(1-\mathrm{j})}{2\delta} \times \sinh\eta_1 = -\frac{a_f \sinh\eta_1\,(1-\mathrm{j})}{\delta} \tag{D22a}$$

$$\zeta^{\beta} = 2\sqrt{q}\cosh\eta_1 = 2 \times \frac{a_f(1-\mathrm{j})}{2\delta} \times \cosh\eta_1 = \frac{a_f \cosh\eta_1\,(1-\mathrm{j})}{\delta} \tag{D22b}$$

と求めることができる．双曲線関数を用いた(D22)が，解析対象となる磁性体の形状が円柱形であることを表す Bessel 関数に代入されていることによって，楕円柱形状の成分が表されている. これは, 双曲線と楕円が共通の焦点を有することにも関係するだろう. なお，楕円柱の形状が，半径 a の円柱に極めて近い場合の極限では，

$$\zeta^{\alpha} = \zeta^{\beta} \to \frac{a(1-\mathrm{j})}{\delta} \tag{D23}$$

に帰着する．したがって，(D23)は(D22b)に含まれており，楕円柱細線のテンソル型複素透磁率は，円柱細線の複素透磁率を含んでいるとわかる．このことについては次節で改めて証明する.

一方で，表皮効果に関して，第 7 章で導いた楕円柱細線の表皮効果に起因する実効インピーダンス

$$Z_{skin}^{elli} \coloneqq -2\cosh\eta_1 \sinh\eta_1\, R_0^{elli} \frac{q\,\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \tag{D24}$$

を，Mathieu 関数を用いた表現から Bessel 関数を用いて表現した

$$Z_{skin}^{elli} \approx \frac{\zeta^{\beta} J_0\left(\zeta^{\beta}\right)}{2J_1(\zeta^{\beta})} R_0^{elli} \tag{D25}$$

の形へ移行する方法について述べる．(D24), (D25)はそれぞれ(7.56b), (7.57)に対応する. 偶数次の Mathieu 関数の Bessel 関数展開として次の公式が知られている[D.2-5].

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,q) = \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}\left(2\sqrt{q}\cos z\right) \tag{D26}$$

ここで，$A_{2r}^{(2n)}$ は Mathieu 関数の Fourier 級数展開に伴う係数である[e.g. D.2]. (D26)において，合成関数の連鎖微分より

$$\frac{\partial \mathrm{ce}_{2n}(z,q)}{\partial z} = -\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} 2\sqrt{q}\sin z \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \frac{\mathrm{d}J_{2r}\left(2\sqrt{q}\cos z\right)}{\mathrm{d}\left(2\sqrt{q}\cos z\right)} \tag{D27}$$

を得る．さて，表皮効果に対応する次数は $n = 0$ であり，物理的には角度には依存しないため，(D27)に $n = 0$ を代入し，さらに $\cos\psi$ に依存しない項$(r = 0)$で打ち切ると，$z = \mathrm{j}\eta$ の場合には

$$\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q) \approx \mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) J_0\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right) \tag{D28a}$$

$$\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q) \approx -\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) 2\mathrm{j}\sqrt{q}\sinh\eta \cdot \mathrm{j}\left(-J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right)\right)$$

$$= -\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) 2\sqrt{q}\sinh\eta\, J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right) \tag{D28b}$$

なので,

$$\frac{q\mathrm{ce}_0(\mathrm{j}\eta, q)}{\mathrm{ce}_0'(\mathrm{j}\eta, q)} = \frac{-q\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{q}\right) J_0\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right)}{\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{q}\right) 2\sqrt{q}\sinh\eta\, J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right)} = \frac{-\sqrt{q}J_0\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right)}{2\sinh\eta\, J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta\right)} \tag{D29}$$

を得る．したがって，$\eta = \eta_1$ とした上で，(D25)に(D29)を代入すると

$$Z_{skin}^{elli} \approx 2\cosh\eta_1 \sinh\eta_1\, R_0^{elli} \times \frac{\sqrt{q}J_0\left(2\sqrt{q}\cosh\eta_1\right)}{2\sinh\eta_1 J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta_1\right)}$$

$$= 2\sqrt{q}\cosh\eta_1 \frac{J_0\left(2\sqrt{q}\cosh\eta_1\right)}{2J_1\left(2\sqrt{q}\cosh\eta_1\right)} R_0^{elli} = \frac{\zeta^\beta J_0\left(\zeta^\beta\right)}{2J_1(\zeta^\beta)} R_0^{elli} \tag{D30}$$

となる．ここで，$\zeta^\beta \coloneqq 2\sqrt{q}\cosh\eta_1$ である．したがって，Mathieu 関数を用いて表現された楕円柱細線の表皮効果の項は，Bessel 関数の引数に双曲線成分を代入した円柱形細線の表皮効果の項と一致する．

D. 1. 4　座標系の極限とテンソル型複素透磁率の極限

D.1.3 節では，楕円柱細線のテンソル型複素透磁率が，Bessel 関数を用いて表現できることを示し，その引数には双曲線成分が含まれていることがわかった．この表示は，円筒形の関数に双曲線成分を代入すると楕円形状を表す成分が表れることを表す．ここでの疑問は，Fig.D.1 のように，楕円形状が真円に漸近するとき，すなわち $a_f \to 0$ の極限では(D21)は磁性円柱の等方性複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\zeta) = \mu_r^{wire} \frac{1}{\zeta \dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)} - 1} \tag{D31}$$

に帰着するかということである．本節では(D21)において，$\alpha \to \beta, a_f \to 0$ の極限をとると(D24)が得られることを数学的に証明する．

楕円座標系は，第 3 章 3.9.1 節の Fig.3.17 に示したように

$$x = a_f \cosh\eta \cos\psi \tag{D32a}$$

$$y = a_f \sinh\eta \sin\psi \tag{D32b}$$

$$z = z \tag{D32c}$$

で規定される $(0 \le \eta \le \infty, 0 \le \psi \le 2\pi)$．また，座標の関係式は

$$\left(\frac{x}{a_f \cosh\eta}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_f \sinh\eta}\right)^2 = 1 \tag{D33a}$$

$$\left(\frac{x}{a_f \cos\psi}\right)^2 - \left(\frac{y}{a_f \sin\psi}\right)^2 = 1 \tag{D33b}$$

で与えられる．(D33)は第 3 章 3.9 節の(3.188)である．また，第 3 章 3.9 節の再掲載となるが，楕円柱表面座標は $\eta = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), u \coloneqq \alpha / a_f$ により計算することができる．なお，$e \coloneqq 1/u$ が離心率であり，$\eta = \eta_1$ のとき楕円柱表面座標は導体表面に一致する．

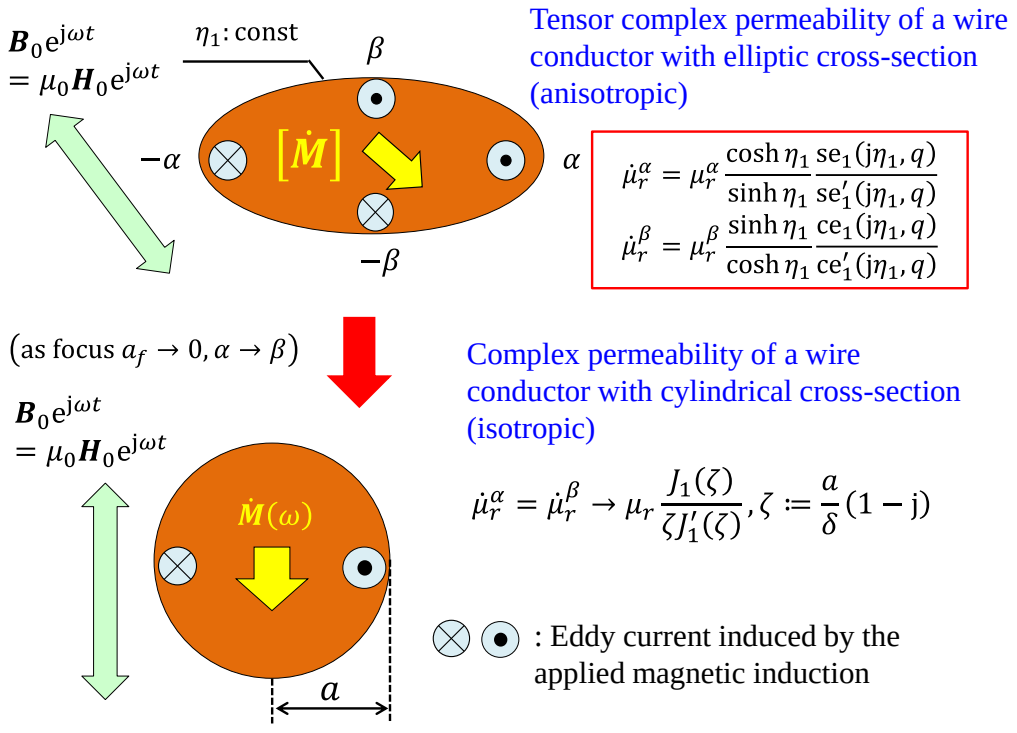


Fig.D.1 Illustration of elliptic and cylindrical wire conductors immersed in a time-harmonic uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this section, we will confirm that when we take the limit $\alpha \to \beta$, the tensor complex permeability approaches to the isotropic complex permeability for a cylindrical wire. In other words, the complex permeability of a wire with cylindrical cross-section can be regarded as a tensor one of a special case of a wire with elliptic cross-section.

さて，(D33a)において $(x,y,z)=(\alpha,0,0),\left(0,\beta,\ 0\right)$ とすると

$$a_f^2\cosh^2\eta_1=\alpha^2 \tag{D34a}$$

$$a_f^2\sinh^2\eta_1=\beta^2 \tag{D34b}$$

を得る．楕円が真円に一致するとき，$\alpha=\beta\to r$ なので，(D34a, b)の比をとって

$$\frac{\cosh^2\eta_1}{\sinh^2\eta_1}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}=1,\ \therefore\cosh\eta_1=\sinh\eta_1 \tag{D35}$$

が従う．ここで，$^\forall\eta\in\mathbb{R}$ に対して，$\cosh\eta>0$ であることを用いた．また，同時に $a_f\cosh\eta_1\to r, a_f\sinh\eta_1\to r$ となるので，

$$\zeta^\alpha\coloneqq ka_f\cosh\eta_1\to\zeta=ka \tag{D36a}$$

$$\zeta^\beta\coloneqq -ka_f\sinh\eta_1\to\zeta=ka \tag{D36b}$$

を得る．したがって，(D21)において，$a_f\to 0$ の極限をとると

$$\dot{\mu}_r^\alpha(\omega)=\mu_r^\alpha\frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1}\frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}\approx\mu_r^\alpha\frac{1}{\zeta^\alpha\dfrac{J_0(\zeta^\alpha)}{J_1(\zeta^\alpha)}-1}\to\mu_r^\alpha\frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)}-1} \tag{D37a}$$

$$\dot{\mu}_r^\beta(\omega)=\mu_r^\beta\frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1}\frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1,q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1,q)}\approx\mu_r^\beta\frac{1}{\zeta^\beta\dfrac{J_0(\zeta^\beta)}{J_1(\zeta^\beta)}-1}\to\mu_r^\beta\frac{1}{\zeta\dfrac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)}-1} \tag{D37b}$$

を得る．この場合，表皮効果に起因する実効インピーダンスも

$$Z_{skin}^{elli}\approx\frac{\zeta^\beta J_0\left(\zeta^\beta\right)}{2J_1(\zeta^\beta)}R_0^{elli}\to\frac{\zeta J_0(\zeta)}{2J_1(\zeta)}R_0^{cyli} \tag{D38}$$

となる．ここで，$R_0^{cyli}\coloneqq l/(\sigma\pi a^2)$である．(D38)の近似の妥当性は例えば第 7 章 7.5.2 節の Fig.7.24 に示されている．

したがって，円柱形の複素透磁率，表皮効果の実効インピーダンスは，楕円柱細線の特別な場合であることが示された．

D. 2　球 Bessel 関数と回転波動関数の関係と複素透磁率

D. 2. 1　楕円体圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率の球 Bessel 関数表示

第 3 章 3.12 節で示した扁平回転楕円体波動関数 $\mathcal{p}_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ は，Helmholtz 方程式を，$\lambda\coloneqq n(n+1)$ を分離定数として，変数分離 $A=H(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\psi)$ を行い得られる

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\eta^2}+\tanh\eta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}+\left(-\lambda+\frac{m^2}{\cosh^2\eta}\right)H=0 \tag{D39a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \tag{D39b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\psi^2}+m^2\Psi=0 \tag{D39c}$$

なる微分方程式群のうち，(D39a, b)の特解について，$-1\le z\le 1$ に関して正則であり，恒等的に 0 ではない解として定義される(ただし，$n\ge m$)．なお，扁平回転楕円体波動関数の表示には，$\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ [D.3]以外に，$\mathrm{pe}_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ [D.1]，$R_{mn}(\mathrm{j}ka,z)$ [D.4, 6]なる表示も知られているが，本論文では $\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ と記述する．$\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ は Legendre 陪多項式を用いることにより，$A_{n,l}^m$ を係数として

$$\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)\equiv\sum_{l\ge m}^{\infty}A_{n,l}^mP_l^m(z)\,(l-n\in 2\mathbb{N})=\sum_{r\ge-(n-m)/2}^{\infty}A_{n,n+2r}^mP_{n+2r}^m(z) \tag{D40}$$

で定義される．しかし，(D40)の表示は複雑なので，本論文で取り扱う準定常電磁界で想定される周波数帯域(~ 10 MHz 程度)では，第 3 章 3.12 節で用いた

$$\wp_p^q(\zeta,z)\approx z\times\left[1-\frac{z^2}{3!}\{\zeta^2+p(p+1)-q^2-2\}+\frac{z^4}{5!}h(\zeta)+O(z^6)\right] \tag{D41a}$$

$$h(\zeta)\coloneqq\zeta^4+2\zeta^2\{p(p+1)-q^2-4\}+p(p+1)\{p(p+1)-2q^2-14\}+q^4+20q^2+24 \tag{D41b}$$

を用いるほうが都合がよい．(D41)は(3.300)である．$\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ を用いると，扁平楕円体形状の圧粉磁芯の長軸 α，短軸 β に対する複素透磁率はそれぞれ

$$\dot{\mu}_r^{\alpha}=\mu_r^{\alpha}\frac{\left(\frac{1}{\tanh^2\eta_0}+1\right)\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)}{\frac{1}{\tanh^2\eta_0}\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)+\frac{1}{\tanh\eta_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{D42a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta}=\mu_r^{\beta}\frac{(\tanh^2\eta_0+1)\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta_0\right)}{\tanh^2\eta_0\,\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta_0\right)+\tanh\eta_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta\right)\right)\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{D42b}$$

と求められる．(D42a, b)はそれぞれ(3.338), (3.326)である．

つぎに，第 3 章で行った，$\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta\right)$ を第 3 章で行ったように球 Bessel 関数 $j_n(z)$を用いて展開する方法を再掲載する．この展開公式はつぎの数学公式

$$\wp_n^m(c,\xi)=\frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c)\dfrac{(2m+r)\,!}{r\,!}}\left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r+m-n} d_r^{mn}(c)\frac{(2m+r)\,!}{r\,!}j_{m+r}(c\xi)$$

(D43)

によって与えられる．(D43)は(3.328)である．(D43)に双極子磁界に対応する $n=1,m=0$ を代入し，さらに双極子磁界に無関係な項の係数 $d_r^{01}(c), r\neq 1$ を 0 として

$$\wp_1^0(c,\xi)\approx\frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{01}(c)}\sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_r(c\xi)$$

$$=\frac{1}{\sum_{r=1}^{1} d_r^{01}(c)}\sum_{r=1}^{1} j^{r-1} d_r^{01}(c) j_1(c\xi)=\frac{1}{d_1^{01}(c)} d_1^{01}(c) j_1(c\xi)=j_1(c\xi) \qquad (3.329)$$

という近似ができる．(D44)は，Mathieu 関数の Bessel 関数展開公式(D15)に対応し，第 3 章では 3.12.2 節の(3.329)である．ここで(D44)に $c=ka_f,\xi=\cosh\eta_0$ と $c=\mathrm{j}ka_f,\xi=\mathrm{j}\sinh\eta_0$ の組み合わせをそれぞれ代入すると

$$\wp_1^0\left(ka_f,\cosh\eta_0\right)=j_1\left(ka_f\cosh\eta_0\right) \qquad (D45a)$$

$$\wp_1^0\left(\mathrm{j}ka_f,\mathrm{j}\sinh\eta_0\right)=j_1\left(-ka_f\sinh\eta_0\right) \qquad (D45b)$$

を得る．(D45a, b)はそれぞれ(3.340), (3.330)である．つぎに，(3.341), (3.332)のように

$$\zeta^{\alpha}\coloneqq ka_f\cosh\eta_0 \qquad (D46a)$$

$$\zeta^{\beta}\coloneqq -ka_f\sinh\eta_0 \qquad (D46b)$$

とおき，球 Bessel 関数の公式(3.259)

$$j_1(\zeta)=\frac{\sin(\zeta)-\zeta\cos(\zeta)}{\zeta^2} \qquad (D47a)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(ri_1(kr)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\sin(kr)-(kr)\cos(kr)}{(kr)^2}\right)=-i_1(kr)+\sin(kr) \qquad (D47b)$$

を用いることで，(3.338), (3.326)で定義した，$\wp_n^m(\mathrm{j}ka,z)$ を用いた扁平楕円体圧粉磁芯のテンソル型複素透磁率を，球 Bessel 関数の引数に $\tilde{\zeta}^{\alpha}\coloneqq ka_f\cosh\eta\,,\tilde{\zeta}^{\beta}\coloneqq -ka_f\sinh\eta$ を代入した形

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1) j_1(\zeta^{\alpha})}{j_1(\zeta^{\alpha}) + \tanh \eta_0 \sinh \eta_0 \, k a_f \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}^{\alpha}} j_1(\tilde{\zeta}^{\alpha})\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{D48a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1) j_1(\zeta^{\beta})}{\tanh^2 \eta_0 \, j_1(\zeta^{\beta}) + \zeta^{\beta} \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}^{\beta}} j_1(\tilde{\zeta}^{\beta})\Big|_{\eta=\eta_0}} \tag{D48b}$$

をさらに，(3.343), (3.336)に示すような複素正接関数を用いたテンソル型複素透磁率の表示

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2 \eta_0 \, (2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\} \dfrac{\tan \zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2 \tanh^2 \eta_0 - 1)} \tag{D49a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2 \eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan \zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2 \eta_0\right) \dfrac{\tan \zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2 \eta_0)} \tag{D49b}$$

に改めることができる．第 4 章の数値解析結果で示したように，(D48)は Neumann 関数のように，数値不安定性の強い関数であるが，(D49)には数値不安定性がないのは，指数項が $\tan \zeta / \zeta$ でキャンセルアウトするためである．なお，Mathieu 関数についても数値不安定性があるが，(D13)の表示では同様の理由で不安定性が除去される．ただし，より厳密にはこの表示でも数値不安定性がある場合があるが，今回の準定常電磁界の問題では概ねこの問題は無視できる．

D. 2. 2　座標系の極限とテンソル型複素透磁率の極限

つぎの疑問は，D.1.4 節で示したことと同様に，Fig.D.2 のように，楕円体の形状が真球に漸近するとき，すなわち $a_f \to 0$ の極限では(D49)は磁性球の等方性の複素透磁率

$$\dot{\mu}_r^{sphere} = 2\mu_r^{sphere} \frac{1 - \dfrac{\tan \zeta}{\zeta}}{(1 - \zeta^2) \dfrac{\tan \zeta}{\zeta} - 1} \tag{D50}$$

に帰着するかということである．本節では(D49)において，$a_f \to 0$ の極限をとると(D50)が得られることを数学的に証明する．

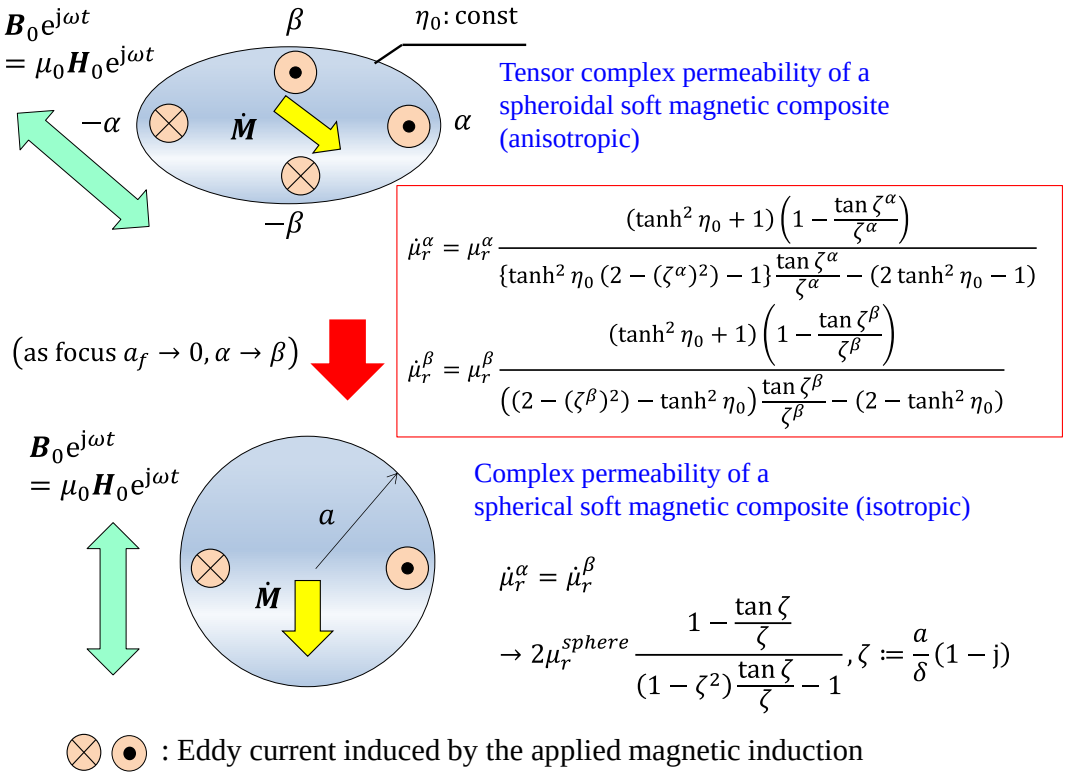


Fig.D.2 Illustration of oblate sphere and spherical SMCs immersed in a time-harmonic uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.
In this section, we will prove that the tensor complex permeability of a spheroidal SMC includes the isotropic one of a spherical SMC.

扁球楕円体座標系は，第 3 章 3.12 節で示したように

$$x = a_f \cosh\eta \sin\theta \cos\psi \tag{D51a}$$

$$y = a_f \cosh\eta \sin\theta \sin\psi \tag{D51b}$$

$$z = a_f \sinh\eta \cos\theta \tag{D51c}$$

で規定される$(0 \le \eta \le \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi)$．また，全体座標系と局所座標系の関係式は，各成分毎にそれぞれ

$$\frac{x^2}{a_f^2\cosh^2\eta} + \frac{y^2}{a_f^2\cosh^2\eta} + \frac{z^2}{a_f^2\sinh^2\eta} = 1 \tag{D52a}$$

$$\frac{x^2}{a_f^2\sin^2\theta} + \frac{y^2}{a_f^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a_f^2\cos^2\theta} = 1 \tag{D52b}$$

$$\tan\psi = \frac{y}{x} \tag{D52c}$$

で示される．(D51), (D52)は第 3 章 3.9 節の(3.292a − f)である．また，第 3 章 3.12 節の再掲載となるが，楕円体表面座標は，楕円柱の場合と同様に，$\eta = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), u \coloneqq \alpha / a_f$ により計算することができ，$\eta = \eta_0$ のとき楕円体表面座標は磁性楕円体表面に一致する．本座標系においても，D.1 節と同様に $e \coloneqq 1/u$ が離心率となる．

さて，(D52a)において $(x, y, z) = (\alpha, \beta, 0)$ とすると

$$a_f^2 \cosh^2 \eta_0 = \alpha^2 \tag{D53a}$$

$$a_f^2 \sinh^2 \eta_0 = \beta^2 \tag{D53b}$$

を得る．楕円体の形状が真球に近づく場合，$\alpha = \beta \to a$ なので，(D53a, b)の比をとって

$$\frac{\cosh^2 \eta_0}{\sinh^2 \eta_0} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 1, \ \therefore \cosh \eta_0 = \sinh \eta_0 \tag{D54}$$

が従う．ここで，$^\forall \eta \in \mathbb{R}$ に対して，$\cosh \eta > 0$ であることを用いた．また，同時に $a_f \cosh \eta_0 \to a, a_f \sinh \eta_0 \to a$ となるので，

$$\zeta^\alpha \coloneqq k a_f \cosh \eta_0 \to \zeta = ka \tag{D55a}$$

$$\zeta^\beta \coloneqq -k a_f \sinh \eta_0 \to \zeta = ka \tag{D55b}$$

を得る．ここで，双曲線関数の定義より

$$\cosh \eta = \frac{\mathrm{e}^{\eta} + \mathrm{e}^{-\eta}}{2} \tag{D56a}$$

$$\sinh \eta = \frac{\mathrm{e}^{\eta} - \mathrm{e}^{-\eta}}{2} \tag{D56b}$$

なので，(D54)から

$$\frac{\mathrm{e}^{\eta_0} + \mathrm{e}^{-\eta_0}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\eta_0} - \mathrm{e}^{-\eta_0}}{2} \tag{D57}$$

となる必要がある．(D57)を e^{η_0} について整理すると

$$\mathrm{e}^{-\eta_0} = 0 \tag{D58}$$

なので，$\eta_0 \to \infty$ となる．例えば Fig.C.7 の η_0 のグラフで $\alpha/\beta \to 1$ の場合が参考になる．この場合，双曲線関数の値は

$$\cosh \eta_0 = \frac{\mathrm{e}^{\eta_0} + \mathrm{e}^{-\eta_0}}{2} \approx \frac{\mathrm{e}^{\eta_0}}{2} \tag{D59a}$$

$$\sinh \eta_0 = \frac{\mathrm{e}^{\eta_0} - \mathrm{e}^{-\eta_0}}{2} \approx \frac{\mathrm{e}^{\eta_0}}{2} \tag{D59b}$$

$$\tanh \eta_0 = \frac{\sinh \eta_0}{\cosh \eta_0} \approx 1 \tag{D59c}$$

に漸近する．したがって(D49)は

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\}\dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2\tanh^2\eta_0 - 1)}$$

$$\rightarrow (1+1)\mu_r^{\alpha} \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - (2-1)} = 2\mu_r^{\alpha} \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - 1} \qquad \text{(D60a)}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2\eta_0)}$$

$$\rightarrow (1+1)\mu_r^{\beta} \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - (2-1)} = 2\mu_r^{\beta} \frac{1 - \dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta} - 1} \qquad \text{(D60b)}$$

となり，真球の場合の複素透磁率に帰着する．したがって，真球形の圧粉磁芯の複素透磁率は, 楕円体のテンソル型複素透磁率に含まれている形であることが示せた. さらに, 磁性扁球の十分遠方での磁気ベクトルポテンシャルの境界条件(3.294)は磁性体の形状が楕円体から真球に近づくとき，$a_f \cosh\eta_0 \rightarrow a, a_f \sinh\eta_0 \rightarrow a$ なので，真球の場合の境界条件(3.247)に帰着することもわかる.

Appendix D 参考文献

[D.1] 森口繁一，宇田川銈久，一松信,「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[D.2] N. W. McLachlan, "Theory and Application of Mathieu Functions", DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK, 1954.

[D.3] P. Moon, D. E. Spencer, "Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions", section 7.11, Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed.,1988.

[D.4] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

[D.5] J. C. Gutiérrez-Vega, "Theory and numerical analysis of the Mathieu functions v.2.1", Monterrey, Nuevo-León, México, 2008, May.

[D.6] C. Flammer, "Spheroidal Wave Functions", section 4.1, Stanford University Press, Stanford, California, 1957.

Appendix E　直交曲線座標系と空間微分演算子

本論文で取り扱った複素透磁率の導出の際には, デカルト座標系ではない座標系で議論を行っていた．例えば，円柱座標系，球座標系については，等方性の複素透磁率を導く際に用いたが，その一方で異方性の取り扱いに関しては，楕円柱座標系，楕円体座標を用いた．これらの座標系それぞれで，空間微分の計算を行う際には，基底そのものの変換に伴うそれぞれの基底の係数の変更が必要になる．

このような場合には，直交曲線座標系を導入することが有効である．直交曲線座標系は, 位置によって一定のベクトルとはならない基底ベクトル(例えば円柱座標系における基底 $\mathbf{e}_\theta$ 等)を有する空間における空間微分の扱いを，計量という概念を通じて統一的に記述することができる．したがって，考えている座標系毎に，空間微分演算を解析的に計算することができる．本章の目的は，直交曲線座標系において，基底ベクトルを計量から定義し，空間微分演算を任意の直交曲線座標系で計算することができる一般的な式を求めることである．

本章の構成はつぎの通りである．まず，E.1 節では，基本となる曲線座標系の定義, 及び直交曲線座標系とデカルト座標系の関係を述べる．つぎに，E.2 節においては，E.1 節で求めた関係から，任意の空間における計量を用いた微分演算子の表現を示す．E.3, 4 節では球座標系，楕円体座標系における微分演算子の表現を用いて，第 3 章 3.11.1 節, 3.12.1 節では保留にしていた境界条件(3.247), (3.294)の導出を行う．E.5 節では，本論文で取り扱った座標系の計量と回転等の計算についてまとめた表を示す.

なお, 本章では特に断らない限り, 説明上, 基底ベクトルを判別しやすくするために, x, y, z 軸方向の基底ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ と示す.

E. 1　直交曲線座標系の定義

直交曲線座標系についてはベクトル解析学の文献に記載がある．本論文では主に文献[E.1-4]を参考にしてまとめた．記号の取り方についても，これらの文献に倣うものとする．本節では，Fig.E.1 に示す空間上の直交曲線座標系における点の座標変換

$$\begin{cases} x = f(u_1, u_2, u_3) \\ y = g(u_1, u_2, u_3) \\ z = h(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \tag{E1}$$

を考える．領域 D で定義された 3 つの $\mathrm{C}^k, \left(k \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ 級(k 回微分操作が可能)の 1 価関数(全単射である関数) $u_1 = u_1(x, y, z), u_2 = u_2(x, y, z), u_3 = u_3(x, y, z)$ を考える．いま, 内の 1 点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ で

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \neq 0 \tag{E2}$$

を満たすとする，すなわち Jacobian が恒等的に 0 ではなく，逆写像が存在している場合

を考える．このとき，

$$\begin{cases} u_1 = f^{-1}(u_1, u_2, u_3) \\ u_2 = g^{-1}(u_1, u_2, u_3) \\ u_3 = h^{-1}(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \tag{E3}$$

なる逆関数が局所的に存在する．空間中の点 P は関数により適切な定義域を設定することにより，全単射性が保存されるため，(u_1, u_2, u_3)によって，任意の点 P (値域)を表すことができる．

いま，Fig.E.1 に示すような曲線(u_1, u_2, u_3)を考える．この座標系における基底ベクトルは右手系を形成し，つぎの関係を満足すると仮定する．ここで，$l, m, n = 1\sim3$ である．

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} \tag{E4a}$$

$$\mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) = \epsilon_{lmn} = \begin{cases} 1\ (l, m, n: clockwise) \\ -1\ (l, m, n: anticlockwise) \\ 0\ (otherwise) \end{cases} \tag{E4b}$$

スカラー三重積(E4b)において，ϵ_{lmn} は Levi-Civita 記号であり，"clockwise"は偶置換，"anticlockwise" は奇置換を表す．このとき，P を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で

$$\boldsymbol{r}(u_1, u_2, u_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{E5}$$

と記すことにする．この場合，各方向の成分の偏微分はつぎのように求められる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} = \dfrac{\partial x}{\partial u_1}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u_1}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} = \dfrac{\partial x}{\partial u_2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u_2}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3} = \dfrac{\partial x}{\partial u_3}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u_3}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u_3}\boldsymbol{k} \end{cases} \tag{E6}$$

(E6)から，それぞれの曲線の単位接線ベクトル $\mathbf{e}_i$ は，Fig. E.1 において

$$h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right| \tag{E7a}$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}\boldsymbol{i} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}\boldsymbol{j} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}\boldsymbol{k},\ i = 1\sim3 \tag{E7b}$$

で与えられる．このような定義によって，$|\partial \boldsymbol{r}/\partial u_i|$ が 1 とは限らない直交曲線座標系における単位ベクトルを記述することができる．(E7a)の h_i は計量(metric coefficient)と呼ばれる．さて，$\mathbf{e}_i$ は右手系の直交単位ベクトルなので，$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$ であるから，$\mathbf{e}_i$ を行ベクトルとして並べたつぎの行列

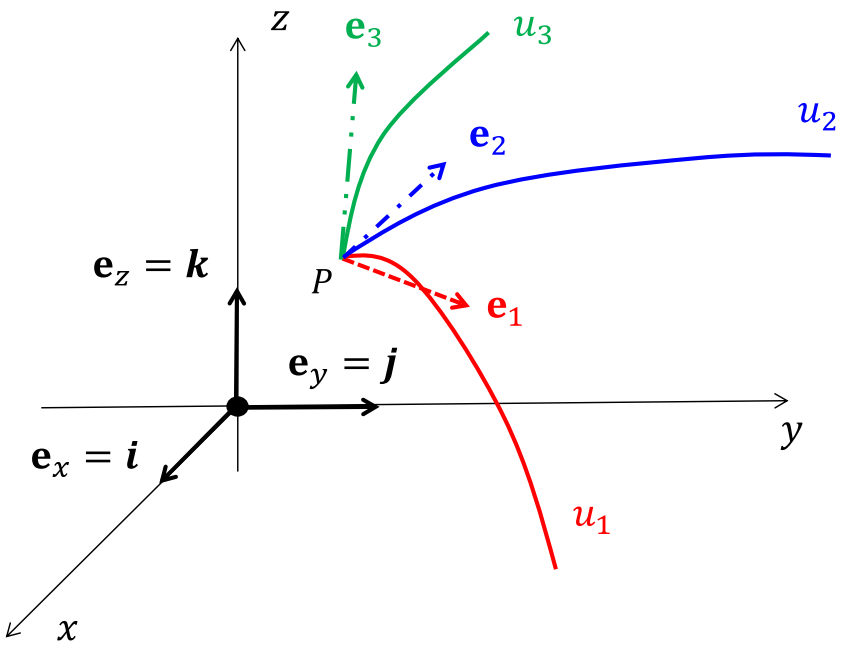


Fig.E.1 Orthogonal curvilinear coordinate system.
In the orthogonal curvilinear coordinates, the bases of the Cartesian and the orthogonal coordinates are expressed as $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}),(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ respectively. By introducing the metric coefficients h_i as derived later, we calculate the line, surface, and volume elements in an arbitrary orthogonal curvilinear coordinate system. Moreover, formulations for gradient, divergence, rotation in orthogonal curvilinear coordinates are possible by using the bases $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$.

$$\mathrm{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial u_1}\\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial z}{\partial u_2}\\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial z}{\partial u_3}\end{bmatrix} \tag{E8}$$

に関して，U は直交行列であるので，$\mathrm{U}^{\mathrm{T}}=\mathrm{U}^{-1}$ であることがわかる．

ここで，つぎの行列

$$\mathrm{T}=\begin{bmatrix}h_1\frac{\partial u_1}{\partial x} & h_2\frac{\partial u_2}{\partial x} & h_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\\ h_1\frac{\partial u_1}{\partial y} & h_2\frac{\partial u_2}{\partial y} & h_3\frac{\partial u_3}{\partial y}\\ h_1\frac{\partial u_1}{\partial z} & h_2\frac{\partial u_2}{\partial z} & h_3\frac{\partial u_3}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{E9}$$

を考えると，U の第 i 行と T の第 k 列の積に関して，

$$\frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}h_k\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}h_k\frac{\partial u_k}{\partial y}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}h_k\frac{\partial u_k}{\partial z}$$

$$=\frac{h_k}{h_i}\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)=\frac{h_k}{h_i}\delta_{ik}=\delta_{ik} \tag{E10}$$

となるので，$\mathrm{T}=\mathrm{U}^{-1}=\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$，つまり $\mathrm{U}=\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$ を得る．したがって，$(\mathrm{E8}-10)$から

$$\mathbf{e}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}=h_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u_i}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=h_i\nabla u_i,\quad i=1\sim3 \tag{E11}$$

がわかる．(E11)から，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の表現を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3\\&=A_1h_1\nabla u_1+A_2h_2\nabla u_2+A_3h_3\nabla u_3=\sum_{i=1}^{3}h_iA_i\nabla u_i\end{aligned} \tag{E12}$$

と求めることができる．また，A_x,A_y,A_z については(E7b), (E11)から

$$\begin{cases}A_x=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}A_i\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}A_i=\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial u_i}{\partial x}A_i\\A_y=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}A_i\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{j}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}A_i=\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial u_i}{\partial y}A_i\\A_z=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}A_i\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{k}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}A_i=\sum_{i=1}^{3}h_i\frac{\partial u_i}{\partial z}A_i\end{cases} \tag{E13}$$

である．

このようにして求められた基底上の直交曲線座標系における線素，面積ベクトル，体積素を求める．概念図を Fig.E.2 に示す．弧の長さ s_i は(E11)より

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s_i}\cdot\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}u_i}=h_i\mathbf{e}_i \tag{E14}$$

と求められる．ここで，$\partial\boldsymbol{r}/\partial s_i$ は曲線 u_i 上の単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ そのものであるから

$$\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}u_i}=h_i \tag{E15}$$

である．これから直交曲線座標系の 2 点 $(u_1,u_2,u_3),(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2+\mathrm{d}u_2,u_3+\mathrm{d}u_3)$ からなる有向ベクトル，すなわち Fig.E.2 の破線で示される線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3=h_1\mathrm{d}u_1\mathbf{e}_1+h_2\mathrm{d}u_2\mathbf{e}_2+h_3\mathrm{d}u_3\mathbf{e}_3 \tag{E16}$$

であり，この線素 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ が(E11)で与えられる正規直交基底であるから

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{s})^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(h_1u_1)^2+(h_2u_2)^2+(h_3u_3)^2 \tag{E17}$$

と求めることができる[E.5].

面素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$ と面素 $|\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i|$ については，Fig.E.2 の 2 点破線で示されている直交曲線座標系の 2 つの基底ベクトルで張られる 2 次元空間の Jacobian を計算することで各成分毎に

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \mathrm{d}s_2\mathbf{e}_2 \times \mathrm{d}s_3\mathbf{e}_3, \qquad |\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1| = \mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{E18a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \mathrm{d}s_3\mathbf{e}_3 \times \mathrm{d}s_1\mathbf{e}_1, \qquad |\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2| = \mathrm{d}s_3\mathrm{d}s_1 = h_3h_1\mathrm{d}u_3\mathrm{d}u_1 \tag{E18b}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3 = \mathrm{d}s_1\mathbf{e}_1 \times \mathrm{d}s_2\mathbf{e}_2, \qquad |\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3| = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 = h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \tag{E18c}$$

と求められる．

最後に，体積素 $\mathrm{d}v$ については，3 つのベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 = h_1\mathrm{d}u_1\mathbf{e}_1 \tag{E19a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 = h_2\mathrm{d}u_2\mathbf{e}_2 \tag{E19b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 = h_3\mathrm{d}u_3\mathbf{e}_3 \tag{E19c}$$

からなる平行六面体の体積を評価することになるが，これについてはスカラー3 重積を用いて，

$$\mathrm{d}v = h_1\mathrm{d}u_1\mathbf{e}_1 \cdot (h_2\mathrm{d}u_2\mathbf{e}_2 \times h_3\mathrm{d}u_3\mathbf{e}_3) = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{E20}$$

と計算できる．

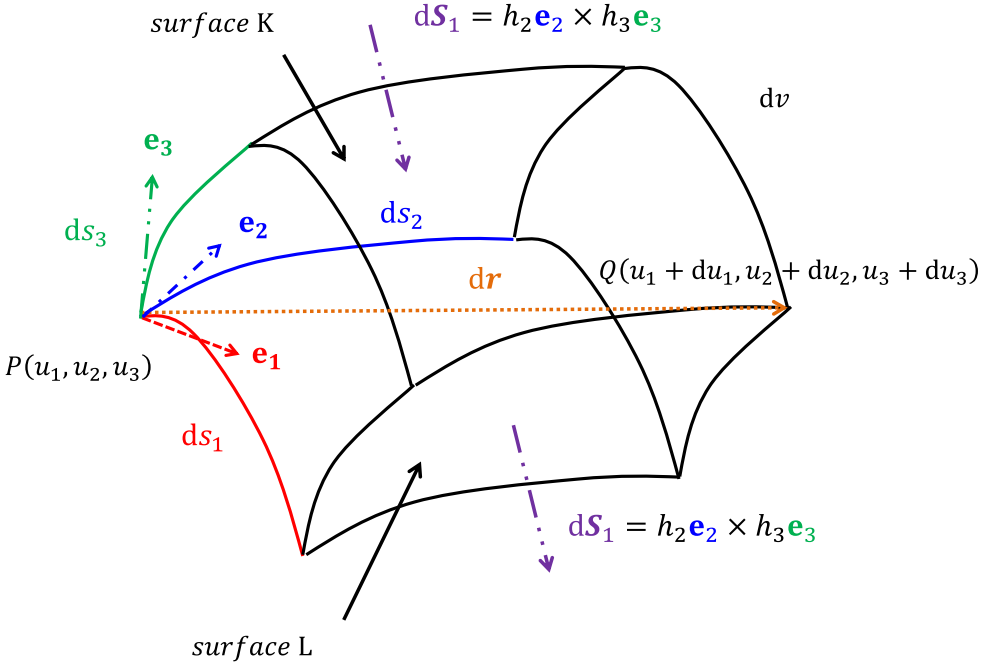


Fig.E.2 Line, surface, and volume elements in the orthogonal curvilinear coordinates.
Metric coefficients h_i $(i = 1,2,3)$ are evaluated by (E7a). On the other hand, by using these h_i, the bases $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ of t the orthogonal curvilinear coordinates are given by (E11). By introducing h_i and $\mathbf{e}_i$, we can express gradient for an scalar function and divergence and rotation for an vector function in the orthogonal curvilinear coordinates under the condition that these functions are differentiable.

E. 2　直交曲線座標系と極座標系での微分演算子

本節では，E.1 節で導いた，任意の曲線上での基底ベクトルの表現を用いて直交曲線座標系における勾配，発散，回転を求める．なお，文字の定義は特に断らない限り，E.1 節の定義に従うものとする．

(1) 直交曲線座標系におけるスカラー関数の勾配ベクトル場

任意のスカラー関数 $f(u_1,u_2,u_3)$ に対して，勾配 grad f は

$$\mathrm{grad}\, f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{E21}$$

と定義される．ここで，$u_1 = u_1(x,y,z), u_2 = u_2(x,y,z), u_3 = u_3(x,y,z)$なので，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial z} \end{cases} \tag{E22}$$

であるから，(E21)は合成関数の連鎖微分から

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\, f &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u_3}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\nabla u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}\nabla u_3 \end{aligned} \tag{E23}$$

と表すことができる．(E23)に(E11)を適用すると

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \tag{E24}$$

となる．

(2) 直交曲線座標系におけるベクトル関数の発散

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対する発散を求める．なお，直交曲線座標系における発散については，いくつかの証明方法があるが，ここでは，文献[E.4]の幾何的な証明を参考とする. いま, Fig.E.2 において, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 方向に抜け出る流束を考える. 微小体積 $\mathrm{d}v$ に対して，面積ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の方向に抜け出る流束についての，発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ の定義式は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\int_{\Delta S} A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{E25}$$

である[E.6]．いまの場合，面 K から $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 方向へ流入する流束 $F_{u_1}^{in}$ については

$$F_{u_1}^{in} = A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 \tag{E26}$$

である．一方で，面 L から $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 方向へ流出する流束 $F_{u_1}^{out}$ は

$$F_{u_1}^{out} = A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3)\mathrm{d}u_1 \tag{E27}$$

となる．したがって，面 K から入って面 L から抜ける流束は

$$F_{u_1} = F_{u_1}^{out} - F_{u_1}^{in} = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3)\mathrm{d}u_1 \tag{E28}$$

となる．ここで，(E15)から

$$F_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3)\mathrm{d}u_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{E29}$$

となる．他の成分に対しても同様に考えれば Fig.E.2 の微小六面体における全流束 F は

$$F = \left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{E30}$$

となる．Fig.E.2 の微小六面体の体積は(E20)で与えられているから，発散は(E24)から

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\} \tag{E31}$$

となる.

(3) 直交曲線座標系におけるベクトル関数の回転

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(u_1,u_2,u_3)$ に対する回転 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を求める．回転は(E12)から

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \equiv \nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times\sum_{i=1}^{3}h_iA_i\nabla u_i$$

$$= \nabla\times(h_1A_1\nabla u_1) + \nabla\times(h_2A_2\nabla u_2) + \nabla\times(h_3A_3\nabla u_3) \tag{E32}$$

ここで，ベクトル公式 $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla\varphi\times\boldsymbol{a} + \varphi\nabla\times\boldsymbol{a}$，および $\nabla\times\nabla\varphi = \boldsymbol{0}$ を用いると，

(E32)の右辺第 1 項は

$$\nabla \times (h_1 A_1 \nabla u_1) = \nabla(h_1 A_1) \times \nabla u_1 + h_1 A_1 \nabla \times \nabla u_1 = \nabla(h_1 A_1) \times \nabla u_1 \tag{E33}$$

なので，勾配の計算(E24)と計量を用いた基底ベクトルの表現(E11)から，

$$\nabla \times (h_1 A_1 \nabla u_1) = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_1 A_1) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) \mathbf{e}_3 \right) \times \nabla u_1$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_1 A_1) \nabla u_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \nabla u_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) \nabla u_3 \right) \times \nabla u_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \nabla u_2 \times \nabla u_1 + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) \nabla u_3 \times \nabla u_1 \tag{E34}$$

となる．さらに，基底ベクトル同士の外積の計算(E18a)から

$$\nabla \times (h_1 A_1 \nabla u_1) = -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) \mathbf{e}_2 \tag{E35a}$$

である．同様に，他の成分についても添え字の巡回から

$$\nabla \times (h_2 A_2 \nabla u_2) = -\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) \mathbf{e}_3 \tag{E35b}$$

$$\nabla \times (h_3 A_3 \nabla u_3) = -\frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) \mathbf{e}_1 \tag{E35c}$$

を得る．ゆえに，(E35)をまとめて行列式で示すと

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right) \mathbf{e}_1$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right) \mathbf{e}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} & \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} & \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{E36}$$

となる．

(4) 直交曲線座標系における Laplacian

つぎに，Laplacian $\Delta f \equiv \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f$ は(E24)を(E31)に代入して，次式のように表記できる．

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right\} \qquad \text{(E37)}$$

(5) 本節の総括：直交曲線座標系における空間微分演算子

本節で導いた微分演算子はつぎのようにまとめることができる.

・計量と正規直交基底ベクトル

$$h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right| \qquad \text{(E7a)}$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}\boldsymbol{i} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}\boldsymbol{j} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}\boldsymbol{k},\ i = 1\sim 3 \qquad \text{(E7b)}$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = h_i \nabla u_i, \quad i = 1\sim 3 \qquad \text{(E11)}$$

・勾配

$$\text{grad}\, f \equiv \nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \qquad \text{(E24)}$$

・発散

$$\text{div}\, \boldsymbol{A} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right\} \qquad \text{(E31)}$$

・回転

$$\text{rot}\, \boldsymbol{A} \equiv \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} & \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} & \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(E36)}$$

・スカラーLaplacian

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right\} \qquad \text{(E37)}$$

具体的な計算例として, E.3 節ではよく知られた球座標系の計量を求め, 回転を計算し, 第 3 章 3.11 節で求めた一様交番磁界中に置かれた圧粉磁芯から十分に離れた位置の磁気ベクトルポテンシャルが満足すべき境界条件を求める．つぎに，E.4 節では同様の手順で，扁球座標系中の楕円体圧粉磁芯に対して，同様に境界条件を求める．その後で，E.5 節にて，座標系と計量についてまとめる．計量を用いた空間微分の計算例として，E.6 節では第 3 章 3.9 節で行った楕円座標系における計算において省略していた導体外での電界の境界条件を導く．最後に，E.7 節でベクトル公式についてまとめる．

E. 3　極座標系での磁気ベクトルポテンシャル

例として，第 3 章 3.11 節で取り扱った，極座標系とデカルト座標系の関係は Fig.E.3 に示すように,

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{E38}$$

である.

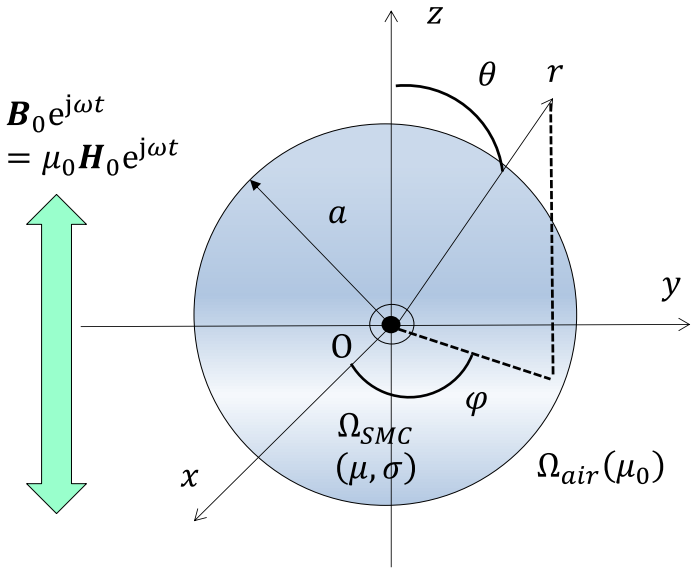


Fig.E.3 (Fig.3.24) Soft magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.

いま，$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \varphi$ であるので，(E38)から，極座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の偏微分に関して,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \left(\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}\right) = 1 \tag{E39a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r(\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}) \cdot r(\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}) = r^2 \tag{E39b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\,(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \sin\varphi\,\boldsymbol{j}) \cdot r\sin\theta\,(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \sin\varphi\,\boldsymbol{j}) = r^2\sin^2\theta \tag{E39c}$$

となる．したがって，極座標系の場合は

$$h_1 = 1 \tag{E40a}$$

$$h_2 = r \tag{E40b}$$

$$h_3 = r\sin\theta \tag{E40c}$$

である．

ここで，一様交番磁界中の渦電流が流れている圧粉磁芯を示した図を Fig.E.4 に示す．Fig.E.4 は Fig.3.25 を再掲したものである．Cartesian 座標系においては，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (0,\ 0,\ B_0), \boldsymbol{A} = B_0/2\,(-y, x, 0)$である．

極座標系の単位ベクトルに関しては，(E7)から

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right| = \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{E41a}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k} \tag{E41b}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \sin\varphi\,\boldsymbol{j} \tag{E41c}$$

と表示できる．

したがって，球座標系において，磁性球の渦電流の効果が十分に無視できる程度に離れている位置における磁気ベクトルポテンシャルの各成分は

$$A_r = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_r = \frac{B_0}{2}(-y\sin\theta\cos\varphi + x\sin\theta\cos\varphi)$$

$$= \frac{B_0}{2} r\sin\theta\,(-\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi) = 0 \tag{E42a}$$

$$A_\theta = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_\theta = \frac{B_0}{2}(-y\cos\theta\cos\varphi + x\cos\theta\cos\varphi)$$

$$= \frac{B_0}{2} r\cos\theta\,(-\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi) = 0 \tag{E42b}$$

$$A_\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \frac{B_0}{2}(-y\cos\varphi + x\cos\varphi)$$

$$= \frac{B_0}{2} r(\sin\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}B_0 r\sin\theta \tag{E42c}$$

であることがわかる．したがって，第 3 章 3.11.1 節で示した，渦電流が流れる圧粉磁芯から十分に離れた位置での磁気ベクトルポテンシャルの境界条件(3.247)を得る．

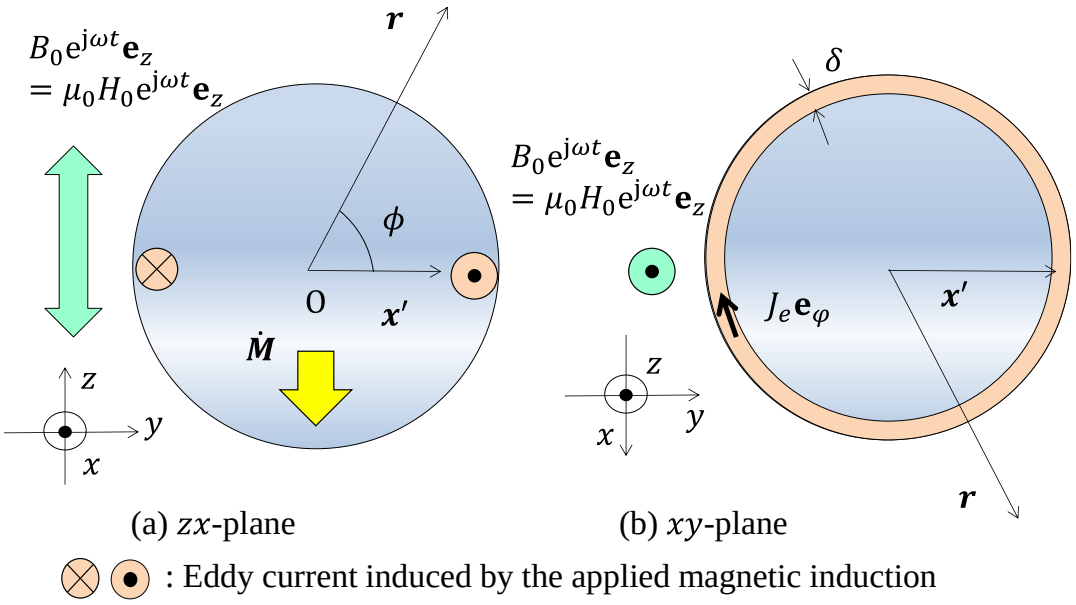


Fig.E.4 Diamagnetic field in a spherical SMC caused by the proximity effect (Fig.3.25).

一方で，極座標系における回転は，(E36)に h_i を代入することで，よく知られた

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\theta\right)\mathbf{e}_r$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\mathbf{e}_\varphi \qquad \text{(E43)}$$

で計算することができる[e.g. E.5,6]．さらに，今回の場合は $\boldsymbol{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ なので，(E43)から(3.248)を導くことができる．

(E43)から，球座標系での磁束密度を計算すると，磁気ベクトルポテンシャルは φ 成分のみを有するから，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\mathbf{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}B_0 r\sin^2\theta\right)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}B_0 r^2\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$= B_0\cos\theta\,\mathbf{e}_r - B_0\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta \qquad \text{(E44)}$$

なので，(E41)から，

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k} = (B_0\cos\theta\,\mathbf{e}_r - B_0\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta)\cdot\boldsymbol{k} = B_0\cos^2\theta + B_0\sin^2\theta = B_0 \qquad \text{(E45)}$$

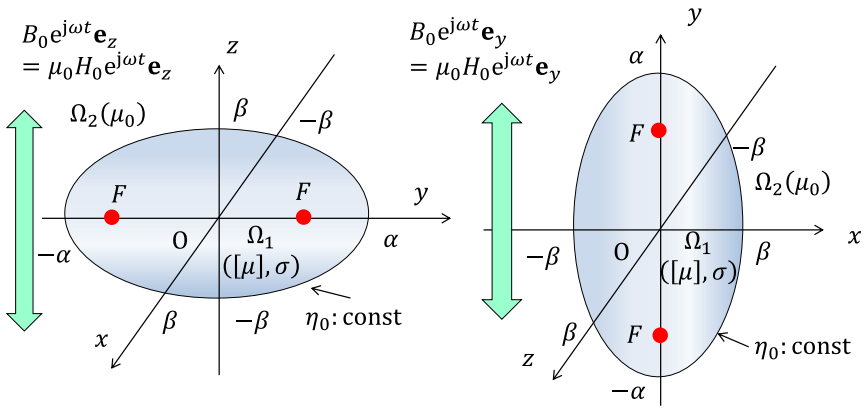
である．したがって，極座標表示した磁気ベクトルポテンシャル(E42)から外部一様磁界の振幅が求められることがわかる．

E. 4　楕円体座標系での磁気ベクトルポテンシャル

つぎに，第 3 章 3.12 節で取り扱った，扁平回転楕円体座標系とデカルト座標系の関係は Fig.E.5 に示すように

$$\begin{cases} x = a_f \cosh\eta \sin\theta \cos\psi \\ y = a_f \cosh\eta \sin\theta \sin\psi \\ z = a_f \sinh\eta \cos\theta \end{cases} \tag{E46}$$

である．以下では，Fig.E.5(a)の扁平回転楕円体座標系で議論するが，(b)の長球回転楕円体座標系でも同様である．



(a) Oblate spheroid　　(b) Prolate spheroid

Fig.E.5 (Fig. 3.27) Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.

いま，$u_1 = \eta, u_2 = \theta, u_3 = \psi$ であるので，(E47)から，扁平回転楕円体座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の偏微分に関して

$$\boldsymbol{r}(\eta,\theta,\varphi) = x(\eta,\theta,\varphi)\boldsymbol{i} + y(\eta,\theta,\varphi)\boldsymbol{j} + z(\eta,\theta,\varphi)\boldsymbol{k}$$

$$= a_f \cosh\eta \sin\theta \cos\psi\, \boldsymbol{i} + a_f \cosh\eta \sin\theta \sin\psi\, \boldsymbol{j} + a_f \sinh\eta \cos\theta\, \boldsymbol{k} \tag{E47}$$

なので，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} = \left(a_f \sinh\eta \sin\theta \cos\psi\, \boldsymbol{i} + a_f \sinh\eta \sin\theta \sin\psi\, \boldsymbol{j} + a_f \cosh\eta \cos\theta\, \boldsymbol{k}\right) \cdot$$

$$\left(a_f \sinh\eta \sin\theta \cos\psi\, \boldsymbol{i} + a_f \sinh\eta \sin\theta \sin\psi\, \boldsymbol{j} + a_f \cosh\eta \cos\theta\, \boldsymbol{k}\right)$$

$$= \left(a_f^2 \sinh^2\eta \sin^2\theta \cos^2\psi + a_f^2 \sinh^2\eta \sin^2\theta \sin^2\psi + a_f^2 \cosh^2\eta \cos^2\theta\right)$$

$$= a_f^2(\sinh^2\eta \sin^2\theta + \cosh^2\eta \cos^2\theta) \tag{E48a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=\left(a_f\cosh\eta\cos\theta\cos\psi\,\boldsymbol{i}+a_f\cosh\eta\cos\theta\sin\psi\,\boldsymbol{j}-a_f\sinh\eta\sin\theta\,\boldsymbol{k}\right)\cdot$$

$$\left(a_f\cosh\eta\cos\theta\cos\psi\,\boldsymbol{i}+a_f\cosh\eta\cos\theta\sin\psi\,\boldsymbol{j}-a_f\sinh\eta\sin\theta\,\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\left(a_f^2\cosh^2\eta\cos^2\theta\cos^2\psi+a_f^2\cosh^2\eta\cos^2\theta\sin^2\psi+a_f^2\sinh^2\eta\sin^2\theta\right)$$

$$=a_f^2(\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta)\qquad\text{(E48b)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}=\left(-a_f\cosh\eta\sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{i}+a_f\cosh\eta\sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{j}+0\,\boldsymbol{k}\right)\cdot$$

$$\left(-a_f\cosh\eta\sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{i}+a_f\cosh\eta\sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{j}+0\,\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\left(a_f^2\cosh^2\eta\sin^2\theta\sin^2\psi+a_f^2\cosh^2\eta\sin^2\theta\cos^2\psi\right)=a_f^2\cosh^2\eta\sin^2\theta\qquad\text{(E48c)}$$

となる．したがって，扁平回転楕円体座標系の場合の各成分の計量は

$$h_1=a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\qquad\text{(E49a)}$$

$$h_2=a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}\qquad\text{(E49b)}$$

$$h_3=a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}\qquad\text{(E49c)}$$

と求めることができる．なお，(E49)は，双曲線関数の公式 $\cosh^2\eta-\sinh^2\eta=1$ と，第3章 3.12 節で示した定義域 $0\le\eta\le\infty, 0\le\theta\le\pi$ から，

$$h_1=a_f\sqrt{(\cosh^2\eta-1)(1-\cos^2\theta)+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\;=a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}\qquad\text{(E50a)}$$

$$h_2=a_f\sqrt{(\cosh^2\eta-1)(1-\cos^2\theta)+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\;=a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}\qquad\text{(E50b)}$$

$$h_3=a_f\cosh\eta\sin\theta\qquad\text{(E50c)}$$

とすることができる．この結果は，文献[E.8]で報告されている計量と一致する．

ここで，一様交番磁界中の渦電流が流れている圧粉磁芯を示した図を Fig.E.6 に示す．Fig.E.6 は Fig.3.25 を再掲したものである．扁平回転楕円体座標系の各基底ベクトルは(E7)から

$$\mathbf{e}_\eta=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta}\right|=\frac{\partial x}{\partial \eta}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\boldsymbol{k}=\frac{1}{a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}}\times$$

$$\left(a_f\sinh\eta\sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{i}+a_f\sinh\eta\sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{j}+a_f\cosh\eta\cos\theta\,\boldsymbol{k}\right)\qquad\text{(E51a)}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \Big/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{k} = \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta + \sinh^2\eta\sin^2\theta}} \times$$

$$\left(a_f \cosh\eta\cos\theta\cos\psi\,\boldsymbol{i} + a_f\cosh\eta\cos\theta\sin\psi\,\boldsymbol{j} - a_f\sinh\eta\sin\theta\,\boldsymbol{k}\right) \quad \text{(E51b)}$$

$$\mathbf{e}_\psi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi} \Big/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \psi}\right| = \frac{\partial x}{\partial \psi}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}}\left(-a_f\cosh\eta\sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{i} + a_f\cosh\eta\sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k}\right) \quad \text{(E51c)}$$

と表示できる.

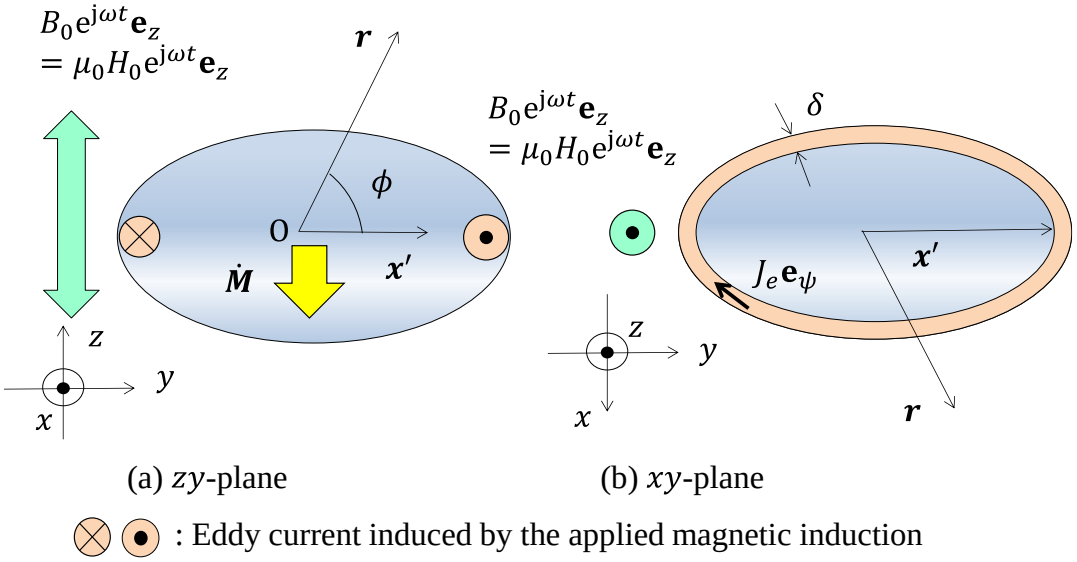


Fig.E.6 (Fig.3.28) Diamagnetic field in an oblate SMC caused by the proximity effect.

したがって，扁平回転楕円体座標系における磁気ベクトルポテンシャルの各成分は Cartesian 座標系においては，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (0,\ 0,\ B_0), \boldsymbol{A} = B_0/2\,(-y, x, 0)$であるので

$$A_\eta = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_\eta = -\frac{B_0}{2}\frac{1}{a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta + \cosh^2\eta\cos^2\theta}} \times$$

$$\left(-a_f^2\cosh\eta\sinh\eta\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + a_f^2\cosh\eta\sinh\eta\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\right) = 0 \quad \text{(E52a)}$$

$$A_\theta = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_\theta = \frac{B_0}{2}\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta + \sinh^2\eta\sin^2\theta}} \times$$

$$\left(-a_f^2\cosh^2\eta\cos\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi + a_f^2\cosh^2\eta\cos\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi\right) = 0 \quad \text{(E52b)}$$

$$A_\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \frac{B_0}{2}\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}}\times$$

$$a_f^2(\cosh^2\eta\sin^2\theta\sin^2\psi+\cosh^2\eta\sin^2\theta\cos^2\psi) = \frac{B_0}{2}a_f\cosh\eta\sin\theta \quad \text{(E52c)}$$

であることもわかるので，第 3 章 3.12.1 節で示した楕円体圧粉磁芯から十分に離れた位置での磁気ベクトルポテンシャルの境界条件(3.294)を得る．

また(E36)において，h_i が(E50)で与えられているので，磁束密度 $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{i} = \frac{1}{a_f^2\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}}\times$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}\,A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}\,A_\theta\right)\right) \quad \text{(E53a)}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}\,a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}}\times$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\,A_\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a_f\sqrt{\cosh^2\eta\sin^2\theta}\,A_\varphi\right)\right) \quad \text{(E53b)}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{1}{a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\,a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}}\times$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}\,A_\theta\right)$$

$$-\frac{1}{a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\,a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta+\sinh^2\eta\sin^2\theta}}\times$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta+\cosh^2\eta\cos^2\theta}\,A_\eta\right) \quad \text{(E53c)}$$

と Cartesian 座標系で示すことができる．なお，(E53)をまとめて行列形式で，

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{a_f(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)\cosh\eta\sin\theta}\times$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & \sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & \cosh\eta\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_\eta\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta} & A_\theta\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta} & A_\varphi\cosh\eta\sin\theta \end{vmatrix} \quad \text{(E54)}$$

と表記することもできる．今回の場合は $\boldsymbol{A}=A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ なので，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} =$$

$$\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi \sin\theta\right)\mathbf{e}_\eta$$

$$-\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}\,\cosh\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_\varphi \cosh\eta\right)\mathbf{e}_\theta \qquad \text{(E55)}$$

である．(E55)に(E51a, b), (E52a, b)を代入し，(E53c)を評価すると，

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k} =$$

$$\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{B_0}{2}a_f\cosh\eta\sin^2\theta\right)\frac{a_f\cosh\eta\cos\theta}{a_f\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta + \cosh^2\eta\cos^2\theta}}$$

$$+\frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}\,\cosh\eta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{B_0}{2}a_f\cosh^2\eta\sin\theta\right)\frac{a_f\sinh\eta\sin\theta}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta + \sinh^2\eta\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\cosh\eta\cos\theta \times \frac{\cosh\eta\cos\theta}{\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta + \cosh^2\eta\cos^2\theta}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\sin\theta\sinh\eta \times \frac{\sinh\eta\sin\theta}{\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta + \sinh^2\eta\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\frac{\cosh^2\eta\cos^2\theta}{\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta + \cosh^2\eta\cos^2\theta}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\frac{\sinh^2\eta\sin^2\theta}{\sqrt{\cosh^2\eta\cos^2\theta + \sinh^2\eta\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\sqrt{\sinh^2\eta\sin^2\theta + \cosh^2\eta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0\sqrt{(\cosh^2\eta - 1)\sin^2\theta + \cosh^2\eta\,(1 - \sin^2\theta)}$$

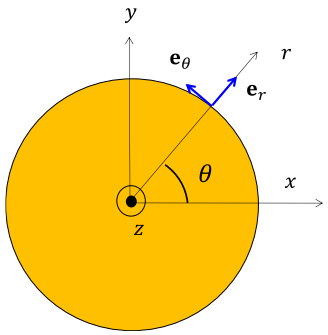
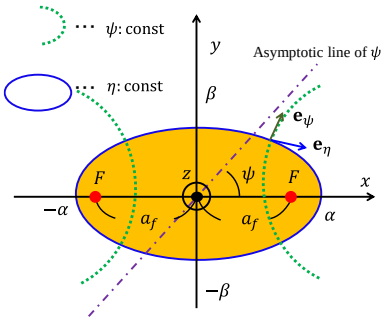
$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta}}B_0 \times \sqrt{\cosh^2\eta - \sin^2\theta} = B_0 \qquad \text{(E56)}$$

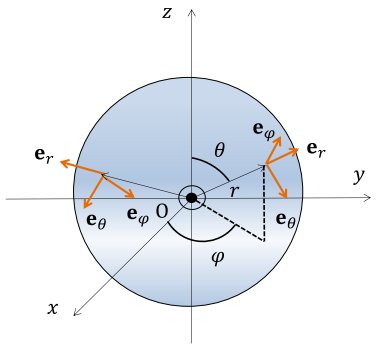
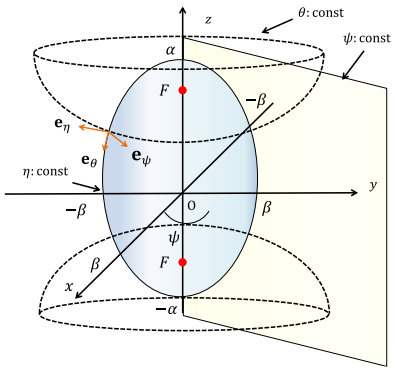
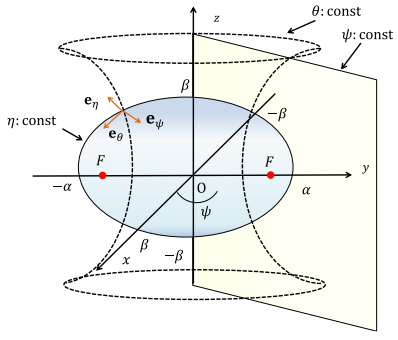
となるから，扁平回転楕円体座標系で表示した磁気ベクトルポテンシャル(E52)から外部一様磁界の振幅が求められることがわかる．

E. 5　各種座標系における計量の一覧表

E.3, 4 節においては，球座標系，扁球楕円体座標系で具体的な計算を行ったが，例えば文献[E.7, 8]等において，各座標系毎に計量の計算が求められている．本章ではこれらを参考に，Table E.1 にて本論文で取り上げた座標系毎に計量をまとめる．各座標系における空間微分演算は，E.2 節の最後にまとめた通りであり，Table E.1 の計量から計算することができる．また，積分に伴う Jacobian の計算等についても同様である．ただし，下記の図では便宜上一般的な座標系で示しているが，本論文中では，例えば円柱導体の議論の際には $r = a$ で導体の表面，楕円柱導体では $\eta = \eta_1$ で導体の表面に一致していたことに注意する．これは圧粉磁芯の問題でも同様である．

Table E.1 Relation of coordinate systems and metric coefficients [e.g. E.7]

Coordinate systems	Coordinate surfaces	Metric coefficients
Circular-cylinder coordinates (r, θ, z)  	$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = z$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$	$h_1 = 1$ $h_2 = r$ $h_3 = 1$
Elliptic-cylinder coordinates (η, ψ, z)  	$u_1 = \eta, u_2 = \psi, u_3 = z$ $\begin{cases} x = a_f\cosh\eta\cos\psi \\ y = a_f\sinh\eta\sin\psi \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a_f\cosh\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{a_f\sinh\eta}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{x}{a_f\cos\psi}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{a_f\sin\psi}\right)^2 = 1 \\ z = z \end{cases}$	$h_1 = a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}$ $h_2 = a_f\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi}$ $h_3 = 1$

Spherical coordinates (r,θ,φ)  	$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \varphi$ $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = r^2 \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$	$h_1 = 1$ $h_2 = r$ $h_3 = r\sin\theta$
Prolate spherical coordinates (η,θ,ψ)  	$u_1 = \eta, u_2 = \theta, u_3 = \psi$ $\begin{cases} x = a_f\sinh\eta\sin\theta\cos\psi \\ y = a_f\sinh\eta\sin\theta\sin\psi \\ z = a_f\cosh\eta\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_f^2\sinh^2\eta}+\dfrac{y^2}{a_f^2\sinh^2\eta}+\dfrac{z^2}{a_f^2\cosh^2\eta} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a_f^2\sin^2\theta}-\dfrac{y^2}{a_f^2\sin^2\theta}+\dfrac{z^2}{a_f^2\cos^2\theta} = 1 \\ \tan\psi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$	$h_1 = a_f\sqrt{\sinh^2\eta+\sin^2\theta}$ $h_2 = a_f\sqrt{\sinh^2\eta+\sin^2\theta}$ $h_3 = a_f\sinh\eta\sin\theta$
Oblate spherical coordinates (η,θ,ψ)  	$u_1 = \eta, u_2 = \theta, u_3 = \psi$ $\begin{cases} x = a_f\cosh\eta\sin\theta\cos\psi \\ y = a_f\cosh\eta\sin\theta\sin\psi \\ z = a_f\sinh\eta\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_f^2\cosh^2\eta}+\dfrac{y^2}{a_f^2\cosh^2\eta}+\dfrac{z^2}{a_f^2\sinh^2\eta} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a_f^2\sin^2\theta}+\dfrac{y^2}{a_f^2\sin^2\theta}-\dfrac{z^2}{a_f^2\cos^2\theta} = 1 \\ \tan\psi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$	$h_1 = a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}$ $h_2 = a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}$ $h_3 = a_f\cosh\eta\sin\theta$

E. 6　楕円柱座標系における計算例

例えば第 3 章 3.9 節において，楕円柱表面の $\mathbf{e}_\psi$ 方向の線積分を

$$\oint_c \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c \frac{-\mathrm{j}}{\omega\mu a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\, p_1^x \mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta,q)\mathrm{se}_1(\psi,q)\, a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \tag{E57}$$

と評価できるのは，楕円柱座標系における線素が $u_2=\psi, h_2=a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}$ を(E16)の右辺第 2 項に代入して得られるためである．(E57)は(3.205)の一部である．

つぎに，第 3 章 3.9.1 節で述べた一様磁界中の楕円柱細線の導体外での電界

$$\boldsymbol{E}_z = \left(\frac{q_1^x}{\mathrm{e}^\eta} - \mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^\eta\right)\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \left(\frac{q_1^y}{\mathrm{e}^\eta} + \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^\eta\right)\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{E58}$$

について，境界条件に関係する項である

$$\boldsymbol{E}_0 = -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^\eta \sin\psi\,\mathbf{e}_x + \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^\eta \cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{E59}$$

を導く．(E58)は(3.203)である．まず，(E59)の回転は，Table E.1 に示した楕円座標系における座標と計量 $u_i, h_i\ (i=1,2,3)$ を(E36)に代入することで，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_\eta}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}} & \dfrac{\mathbf{e}_\psi}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}} & \dfrac{\mathbf{e}_z}{a_f^2(\cosh^2\eta-\cos^2\psi)} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}E_\eta & a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}E_\psi & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\left(\mathbf{e}_\eta\frac{\partial E_z}{\partial\psi} - \mathbf{e}_\psi\frac{\partial E_z}{\partial\eta}\right) \tag{E60}$$

と求められる．(E60)の計算で $E_\eta=0, E_\psi=0$ であることと，楕円座標系では E_z はスカラー関数であることに注意する．さて楕円座標系における基底ベクトルは(E7)によって，Cartesian 座標系での基底ベクトルを用いた表現

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\frac{\partial x}{\partial\eta}\mathbf{e}_x + \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\frac{\partial y}{\partial\eta}\mathbf{e}_y$$

$$= \frac{\sinh\eta\cos\psi}{\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\mathbf{e}_x + \frac{\cosh\eta\sin\psi}{\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\mathbf{e}_y \tag{E61a}$$

$$\mathbf{e}_\psi = \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\frac{\partial x}{\partial\psi}\mathbf{e}_x + \frac{1}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\frac{\partial y}{\partial\psi}\mathbf{e}_y$$

$$= -\frac{\cosh\eta\sin\psi}{\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\mathbf{e}_x + \frac{\sinh\eta\cos\psi}{\sqrt{\cosh^2\eta-\cos^2\psi}}\mathbf{e}_y \tag{E61b}$$

にそれぞれ改めることができる．

これらの基底ベクトルから局所座標系である楕円座標系で表示されている電界(E59)について，Cartesian 座標系では

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial \eta}\right|_{(\eta,\psi,z)} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial \eta}\right|_{(x,y,z)} = -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}\sin\psi\,\mathbf{e}_x + \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}\cos\psi\,\mathbf{e}_y \tag{E62a}$$

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial \psi}\right|_{(\eta,\psi,z)} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial \psi}\right|_{(x,y,z)} = -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}\cos\psi\,\mathbf{e}_x - \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}\sin\psi\,\mathbf{e}_y \tag{E62b}$$

である．また，Fig.3.17 に示したように，磁界の印加方向が $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の場合，角度座標はそれぞれ $\psi = 0, \pi/2$ であり，$\eta \in \mathbb{R}$ に対し $\cosh\eta > 0$ なので，(E61)と(E62)は

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\sinh\eta}{\sqrt{\cosh^2\eta - 1}}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \tag{E63a}$$

$$\mathbf{e}_\psi = 0\,\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y \tag{E63b}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial \eta}\right|_{(x,y,z)} = 0\,\mathbf{e}_x + 0\,\mathbf{e}_y \tag{E64a}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial \psi}\right|_{(x,y,z)} = -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}\mathbf{e}_x - \mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}\mathbf{e}_y \tag{E64b}$$

となり，$x = a_f\cosh\eta\cos 0\,, y = a_f\sinh\eta\sin(\pi/2)$ であるから，第 3 章 3.14.1, 2 節を参考に，座標系が異なっていた電界と基底ベクトルを，改めて(E63)と(E64)の内積から再計算すると(E60)は

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0|_{(x,y,z)} &= \frac{-\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta - 1}}\frac{\sinh\eta}{\sqrt{\cosh^2\eta - 1}}\mathbf{e}_x - \frac{\mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}}{a_f\sqrt{\cosh^2\eta}}\mathbf{e}_y \\ &= \frac{-\mathrm{j}\omega B_0^x \mathrm{e}^{\eta}}{a_f\sinh\eta}\mathbf{e}_x - \frac{\mathrm{j}\omega B_0^y \mathrm{e}^{\eta}}{a_f\cosh\eta}\mathbf{e}_y \\ &= -\mathrm{j}\omega B_0^x \frac{\mathrm{e}^{\eta}}{y}\mathbf{e}_x - \mathrm{j}\omega B_0^y \frac{\mathrm{e}^{\eta}}{x}\mathbf{e}_y \end{aligned} \tag{E65}$$

となる．さて，(E65)において，楕円導体表面から $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 軸方向にそれぞれ十分に離れた位置では，$\mathrm{e}^{\eta} \approx y, \mathrm{e}^{\eta} \approx x$ なので，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_0|_{(x,y,z)} \to -\mathrm{j}\omega B_0^x \mathbf{e}_x - \mathrm{j}\omega B_0^y \mathbf{e}_y = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}_0 \tag{E66}$$

であるので，(E59)は楕円座標系において，Faraday の電磁誘導の法則を「近似的に」満足していると言える．これは，第 3 章 3.9.1 節で導体内外の電磁界を決定する際に，(3.197)の導出過程で，本来は放物線の漸近線を与える角度 ψ を引数に持つ Mathieu 関数をあたかも $\cos\psi, \sin\psi$ として扱っていることによるため，(E59)はあくまでも近似的な境界条件となっている．

E. 7　ベクトル公式

本節では, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ をベクトル関数, φ をスカラー関数, $\mathbf{e}_\xi$ を ξ 方向の単位ベクトル, $\boldsymbol{x}'$ を観測点，$\boldsymbol{x}$ をソースの位置とする．一般的に，つぎのベクトル公式が成り立つことが知られている[e.g. E.6].

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{E67}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{E68}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{E69}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{d} \tag{E70}$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{e}_\xi\times\left(\boldsymbol{a}\times\mathbf{e}_\xi\right) - \mathbf{e}_\xi\left(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{e}_\xi\right) \tag{E71}$$

これらは，座標系が同一である場合に成立するが，第 3 章 3.14 節で述べたように，座標系が混在する場合には，E.1 節に述べたような基底の変換を行う必要がある．

また，E.2 で議論したことから，つぎの空間微分 ∇ を用いたベクトル公式が一般的に成り立つことがわかる．なお，一般の曲線座標における勾配・発散・回転は(E24,31,36)による計量を用いた表現から求められる．

$$\nabla\times\nabla\varphi = \mathbf{0} \tag{E72}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0 \tag{E73}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{E74}$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla\varphi\times\boldsymbol{a} + \varphi\nabla\times\boldsymbol{a} \tag{E75}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{E76}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{E78}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{E79}$$

例えば(E72), (E73) については，Schwartz の公式

$$\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j} = \frac{\partial^2}{\partial u_j\partial u_i} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{E80}$$

が成り立つと仮定すると，それぞれつぎのように証明できる．

$$\nabla\times\nabla\varphi=\begin{vmatrix}\dfrac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1} & \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1\left(\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\right) & h_2\left(\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\right) & h_3\left(\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial f}{\partial u_3}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial f}{\partial u_3}-\frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)-\frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_3}-\frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)$$

$$+\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_2}-\frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)=\mathbf{0} \tag{E82}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3A_3-\frac{\partial}{\partial u_3}h_2A_2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3h_1\frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1A_1-\frac{\partial}{\partial u_1}h_3A_3\right)\right)$$

$$+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2A_2-\frac{\partial}{\partial u_2}h_1A_1\right)\right)=0 \tag{E83}$$

なお，ベクトル Laplacian $\Delta\boldsymbol{a}=\nabla^2\boldsymbol{a}$ についてはつぎのように定義される．

$$\nabla^2\boldsymbol{a}\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

$$=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\}\right)\mathbf{e}_1$$

$$+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\}\right)\mathbf{e}_2$$

$$+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\}\right)\mathbf{e}_3$$

$$-\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2A_2-\frac{\partial}{\partial u_2}h_1A_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1A_1-\frac{\partial}{\partial u_1}h_3A_3\right)\right)$$

$$-\frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3A_3-\frac{\partial}{\partial u_3}h_2A_2\right)-\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2A_2-\frac{\partial}{\partial u_2}h_1A_1\right)\right)$$

$$-\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1A_1-\frac{\partial}{\partial u_1}h_3A_3\right)-\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3A_3-\frac{\partial}{\partial u_3}h_2A_2\right)\right) \tag{E84}$$

このように定義されたベクトル Laplacian(E84)は，Cartesian 座標系においては，$(u_1,u_2,u_3)=(x,y,z),(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z),(h_1,h_2,h_3)=(1,1,1)$なので

$$\nabla^2\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathbf{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z$$

$$-\mathbf{e}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right)-\mathbf{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right)$$

$$-\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_y+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_z \tag{E85}$$

となる.

また，第 3 章 3.11.2 節で求めた磁気ベクトルポテンシャルの多重極展開の際に用いた公式において，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ とすると，

$$\nabla|\boldsymbol{r}|=-\nabla'|\boldsymbol{r}|=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{E86}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{E87}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{x}=3 \tag{E88}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \tag{E89}$$

等が成り立つ.

Appendix E 参考文献

[E.1] 岩堀長慶,「数学選書 2，数学の基礎的諸分野への現代的入門，ベクトル解析」，裳華房，1982 年 12 月.

[E.2] H.P.Hsu，高野一夫,「ベクトル解析」，森北出版，1980.

[E.3] 武藤義夫,「ベクトル解析」，裳華房，2002.

[E.4] 安達忠次,「ベクトル解析」，培風館，1950.

[E.5] E. Kreyszig,「線形代数とベクトル解析」，培風館，2009.

[E.6] 小柴正則,「基礎からの電磁気学」，培風館，2011.

[E.7] P. Moon, D. E. Spencer, "Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions", Springer Berlin Heidelberg, 2nd ed., 1988.

[E.8] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", DOVER Publications, INC., NEW YORK, 1965.

Appendix F　超幾何級数を用いた複素透磁率・境界インピーダンスの統一的表現

第 3 章で解析的に定義した複素透磁率は，磁性体の形状毎に Helmholtz 方程式を解くことにより導出できた．Helmholtz 方程式の解には，それぞれの磁性体の形状に合わせた基底関数が用いられており，複素透磁率にもこの基底関数が用いられる．また，第 9 章で導いたインピーダンス境界条件は，双曲線関数で表される境界インピーダンスを用いた電磁界の関係式で表すことができた．周波数領域で定義されたこれらの伝達関数は，第 7 章及び第 9 章で示した連分数展開表示から，Cauer 型等価回路を導き，部分分数展開表示に改め，最後に逆 Laplace 変換から時間領域の伝達関数に変更できた．

これら外部磁界に対する渦電流を表す伝達関数は，数式上ではすべて異なった関数で表現されている．しかし，これらはいずれも Helmholtz 方程式を満たす基底関数を用いて定義されているので，統一的な視点で議論することができるのではないかと予想される．本章では，これらの伝達関数が，超幾何級数を用いて数学的に統一的に記述できることを示す．さらに，超幾何級数の連分数公式から，Cauer 型等価回路の素子値を解析的に求める方法について述べる．

なお超幾何級数を議論するにあたり，数学的には同じ意味でも文献[F.1-8]毎によって様々な記号が用いられているが，本章では F.1, 2 節に示す記号に統一するものとする．

F. 1　Gauss の超幾何級数と超幾何微分方程式

F. 1. 1　Gauss の超幾何級数

Gauss の超幾何級数とは，次式で定義される無限級数である．

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} z^n \ , z \in \mathbb{C} \tag{F1}$$

ここで，$(\cdot,n)$は

$$(\alpha,n) \equiv \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) & (n \geq 1) \end{cases} \tag{F2}$$

で定義される．(F2)は，Pochhammer 記号と呼ばれている．まず，(F1)の収束性について調べる．$\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の場合は，(F1)は多項式となる．$\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ の場合，(F1)の級数の各係数を

$$a_n \coloneqq \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} \tag{F3}$$

と置く．ここで，(F3)を数列と考えると，隣接する項の比 a_n/a_{n+1} の絶対値の極限は

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}}{\dfrac{(\alpha,n+1)(\beta,n+1)}{(\gamma,n+1)(1,n+1)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\gamma+n)(1+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{\gamma}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\left(\frac{\alpha}{n}+1\right)\left(\frac{\beta}{n}+1\right)}\right| = 1 \tag{F4}$$

なので，根判定法を用いて判断するとつぎが従う．

(ⅰ) $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば，(F1)は多項式となる．
(ⅱ) $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば，(F1)は領域 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ において正則関数となる．単位円周上の特異点は，$z = 1$である．

F. 1. 2　Gauss の超幾何級数が満たすべき微分方程式

つぎに，(F1)が満たすべき微分方程式を求める．いま，(F3)から

$$a_{n+1} = \frac{(\alpha,n+1)(\beta,n+1)}{(\gamma,n+1)(1,n+1)} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} \times \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+1)(1+n)}a_n \tag{F5}$$

なので，つぎの漸化式を得る．

$$(\gamma+1)(1+n)a_{n+1} = (\alpha+n)(\beta+n)a_n \tag{F6}$$

いま，ベキ級数が項別微分であることを仮定すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = n\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1} \tag{F7}$$

なので，(F7)の両辺に z を掛け，さらに $\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を両辺に加えると

$$(\alpha+z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n z^n \tag{F8}$$

なる関係式を得る．一方で漸化式(F6)より

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma+1)(1+n)a_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\beta+n)a_n z^n \tag{F9}$$

を得る．ここで，右辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\beta+n)a_n z^n$$

$$= \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + (\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \ + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n z^n$$

$$= \left(\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\left(\beta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{F10}$$

という 2 階微分の形で記述できる．一方で左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma+1)(1+n) a_{n+1} z^n \ = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \{\gamma - 1 + (n+1)\}(n+1) a_{n+1} z^{n+1}$$

$$= \frac{1}{z}\left[(\gamma-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^{n+1} + (n+1) \sum_{n+1=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left(\gamma - 1 + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n+1=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1}$$

$$= \frac{1}{z}\left(\gamma - 1 + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{F11}$$

と変形できる．

ここで，変数 y を

$$y \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = F(\alpha, \beta, \gamma; z) \tag{F12}$$

と定義すると，上記の漸化式の変形から

$$\frac{1}{z}\left(\gamma - 1 + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} y = \left(\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\left(\beta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) y \tag{F13}$$

となる．(F13)を整理することで,

$$z(1-z)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)z\}y' - \alpha\beta y = 0 \tag{F14}$$

を得る．(F14)は Gauss の超幾何微分方程式と呼ばれる．(F14)の解が，まさに(F12)である．(F14)の両辺を $z(1-z)$ で割ると

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)} y' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)} y = 0 \tag{F15}$$

を得る．したがって，$F(\alpha, \beta, \gamma; z)$は $\mathbb{C}/\{0,1\}$ へ解析接続される．解析接続とは，ある関数の定義域を広げて，その関数の特異点をも含めた定義域を新たな定義域とすることを意味する．特に(F15)については $z = 0,1$ が孤立特異点であるために，収束円上の特異点は $z = 1$ のみである．なお，超幾何級数を解析接続してできる多価関数を，超幾何関数と定義する[F.1].

F. 1. 3　一般化された Gauss の超幾何級数

(F1)は，Pochhammer 記号を分子・分母にそれぞれ 2 個，1 個もつ．文献[F.1]によると，(F1)の分子・分母に Pochhammer 記号(F2)を任意の個数加えた超幾何級数がある．分子・分母に Pochhammer 表記の乗算演算がそれぞれ p, q 個ある超幾何級数を ${}_pF_q$ と表記し

$$ {}_pF_q\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;z\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1,n)\cdots(\alpha_p,n)}{(\beta_1,,n)\cdots(\beta_q,n)(1,n)} z^n \tag{F16} $$

と定義する．以下では，${}_pF_q$ とする場合もあれば，適宜省略し，単に F のように示す場合もある．

F. 2　Kummer の超幾何級数と超幾何微分方程式

F. 2. 1　Kummer の超幾何級数

Kummer の超幾何級数とは，次式で定義される無限級数である．

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,n)}{(\gamma,n)(1,n)} z^n \ , z \in \mathbb{C} \tag{F17} $$

ここで，

$$ a_n \coloneqq \frac{(\alpha,n)}{(\gamma,n)(1,n)} \tag{F18} $$

とおくと，収束半径は

$$ r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(\alpha,n)}{(\gamma,n)(1,n)}}{\dfrac{(\alpha,n+1)}{(\gamma,n+1)(1,n+1)}}\right| $$

$$ = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\gamma+n)(1+n)}{(\alpha+n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{\gamma}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\left(\frac{\alpha}{n}+1\right)}n\right| = \infty \tag{F19} $$

なので，${}_1F_1(\alpha,\gamma;z)$ の収束半径は ∞ である．ゆえに，(F17)は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．

さて，改めて

$$ b_n \coloneqq \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} \tag{F20} $$

とおき，

$$y \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = {}_1F_1(\alpha, \gamma; z) \tag{F21}$$

と定義して，(F12)から(F15)を導いた過程と同様の手順で，

$$z(1-z)y'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0 \tag{F22}$$

を得る．(F22)は Kummer の合流型超幾何微分方程式と呼ばれる．(F21)は(F22)の解である．

F. 2. 2　特異点の合流

本問題において，変数 z を

$$z \to \frac{z}{\beta} \tag{F23}$$

で置き換え，$\beta \to \infty$ という極限をとることを合流と定義する．合流により，Gauss の超幾何級数(F1)は，

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{z}{\beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} \left(\frac{z}{\beta}\right)^n \tag{F24}$$

となる．ここで，

$$\frac{(\beta, n)}{\beta^n} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{\beta}\right) \to 1 \tag{F25}$$

なので，極限と積分の順序を変更して

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{z}{\beta}\right) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)(1, n)} z^n = {}_1F_1(\alpha, \gamma; z) \tag{F26}$$

を得る．したがって，Gauss の超幾何級数において，(F23)の合流を行うと Kummer の超幾何級数を得る．

一方で，Gauss の超幾何微分方程式(F14)において，合流(F23)を行うと

$$\beta\left[z\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)y'' + \left(\gamma - z - \frac{\alpha + 1}{\beta}z\right)y' - \alpha y\right] = 0 \tag{F27}$$

を得るが，$\beta \neq 0$ であることから

$$z\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)y'' + \left(\gamma - z - \frac{\alpha + 1}{\beta}z\right)y' - \alpha y = 0 \tag{F28}$$

が従う．(F28)において，合流を行う，つまり $\beta \to \infty$ という極限をとると

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0 \tag{F29}$$

となるので，Gauss の超幾何微分方程式(F14)は合流(F23)により，Kummer の合流型超幾何微分方程式に帰着することがわかる．

このときの特異点について述べる．Gauss の超幾何微分方程式(F14)においては，$z=0,1,\infty$ が確定特異点であった．合流(F23)によって，$z=0,\beta,\infty$ が確定特異点となる．ここで，$\beta\to\infty$ という極限をとると，確定特異点 $z=\beta$ が，もう一つの確定特異点 $z=\infty$ に一致する．このように特異点が一致するという意味で，(F23)を合流と呼んでいる．

F. 3　Gauss の隣接関係と連分数公式

F. 3. 1　Gauss の隣接関係

F.1.1 節で定義した(F3)は

$$\frac{(\alpha,n)(\beta+1,n)}{(\gamma,n)(1,n)}-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\times\frac{(\alpha+1,n-1)(\beta+1,n-1)}{(\gamma+2,n-1)(1,n-1)}$$

$$=\frac{(\alpha,n)(\beta+1,n)}{(\gamma+1,n)(1,n)}\left\{(\beta+n)-\frac{n(\gamma-\beta)}{\gamma}\right\}$$

$$=\frac{(\alpha,n)(\beta+1,n)}{(\gamma+1,n)(1,n)}\times\frac{(\gamma+n)\beta}{\gamma}=a_n \tag{F30}$$

なので，(F30)の両辺に z^n を乗じて積分すると

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}z\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z) \tag{F31}$$

を得る．(F31)は Gauss の隣接関係と呼ばれている[F.2].

一方で,

$$\frac{(\alpha+1,n)(\beta,n)}{(\gamma+1,n)(1,n)}-\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}\times\frac{(\alpha+1,n-1)(\beta+1,n-1)}{(\gamma+2,n-1)(1,n-1)}$$

$$=\frac{(\alpha+1,n-1)(\beta,n)}{(\gamma+1,n)(1,n)}\left\{(\alpha+n)-\frac{n(\gamma-\alpha)}{\gamma}\right\}$$

$$=\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}=a_n \tag{F32}$$

でもあるので，もう一つの Gauss の隣接関係

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\alpha+1,\beta,\gamma+1;z)-\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z) \tag{F33}$$

を得る．さて，(F31)において，両辺を $F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)$ で割ると

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}=1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)} \tag{F34}$$

一方で，(F33)において，両辺を $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)$ で割り，$\beta\to\beta+1,\gamma\to\gamma+1$ とすると

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)}=1-\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3;z)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)} \tag{F35}$$

となる．さて，(F34)に(F35)の逆数を代入すると

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}=1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{1}{1-\frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}z\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3;z)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)}}$$

$$=1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{1}{1-\frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}z\frac{1}{\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)}{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3;z)}}} \tag{F36}$$

を得る．ここで，$(\alpha,\beta,\gamma)\to(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)$ と変更すると，係数の変化を除き，(F35)が再帰的に出現するので，この操作を有限回繰り返すことで(F36)は $v\in\mathbb{N}$ として

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}=1+\cfrac{a_1z}{1+\cfrac{a_2z}{1+\cfrac{a_3z}{1+\cdots+\cfrac{a_vz}{\cfrac{F(\alpha+v,\beta+v,\gamma+2v;z)}{F(\alpha+v,\beta+v+1,\gamma+2v+1;z)}}}}} \tag{F37a}$$

$$a_{2v}=-\frac{(\beta+v)(\gamma-\alpha+v)}{(\gamma+2v-1)(\gamma+2v)} \tag{F37b}$$

$$a_{2v+1}=-\frac{(\alpha+v)(\gamma-\beta+v)}{(\gamma+2v)(\gamma+2v+1)} \tag{F37c}$$

なる有限段数の連分数表示が可能となる．

つぎに，(F37a)を無限段の連分数に展開することを考える．この変更は，後の Cauer 型等価回路表示を(F37a)から得る方法につながる．さて，F.2.2 節で議論したように Gauss の超幾何微分方程式(F14)においては，$z=0,1,\infty$ が確定特異点であり，$z=0$ 近傍では正則である．そこで，(F37a)の左辺を $z=0$ の周りで Laurent 展開すると

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{F38}$$

なる無限級数展開表示を得ることができる．したがって，(F37a), (F38)から，有限項のベキ級数を無限項まで拡張した「形式的な」無限ベキ級数展開

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)}=1+a_1z-a_1a_2z^2+\cdots=1+\cfrac{a_1z}{1+\cfrac{a_2z}{1+\cfrac{a_3z}{1+\cdots}}} \tag{F39}$$

を得る．この場合，(F37a)において，u を十分に大きくとることを仮定している．(F39)

は，本論文で示した能動素子型の Cauer 型等価回路を一般化した表示であると考えることもできる．例えば第 7 章のコイル素線の表皮効果に起因するインピーダンスの Cauer 型等価回路が該当する．

ここで Gauss の超幾何級数からなる商(F37a)を(F39)のように連分数に変更した際に，収束する関数となるのかという疑問が生じる．そこで，無限ベキ級数表示された(F39)の収束性を証明するために，つぎの Pringsheim の判定法を用いる．

F. 3. 2　Pringsheim の判定法

$a_v, b_v \in \mathbb{C}, v \geq 1, b_v \neq 0$ として，連分数

$$\lambda = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} \tag{F40}$$

を考える．もし $^{\forall}v \geq 1$ に対して，$|b_v| \geq |a_v| + 1$ ならば，λ は収束し，その値は 1 以下となる．

以下では，この Pringsheim の判定法の証明を行う．いま，複素定数 A_v, B_v を漸化式

$$\begin{cases} A_v = b_v A_{v-1} + a_v A_{v-2} \\ B_v = b_v B_{v-1} + a_v B_{v-2} \end{cases} \tag{F41}$$

により定義する．ただし，$A_{-1} = 1, A_0 = 0, A_1 = a_1, B_{-1} = 1, B_0 = 1, B_1 = b_1$ である．v までで打ち切った際の λ_v は，

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1} \tag{F42a}$$

$$\lambda_2 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{A_1}{B_2} \tag{F42b}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_v = \frac{A_v}{B_v} \tag{F42v}$$

となる．さて，三角不等式から $|B_v|$ について

$$\begin{aligned} |B_v| &\geq |b_v||B_{v-1}| - |a_v||B_{v-1}| \\ &\geq |b_v||B_{v-1}| - (|b_v| - 1)|B_{v-2}| \end{aligned} \tag{F43}$$

なので，(F43)の両辺から $|B_{v-1}|$ を引くと，両辺に共通の因数 $(|b_v - 1|)$ が現れ

$$\begin{aligned} |B_v| - |B_{v-1}| &\geq (|b_v| - 1)(|B_{v-1}| - |B_{v-2}|) \\ &= (|b_v| - 1) \cdots (|b_1| - 1) \geq |a_1 a_2 \cdots a_n| \end{aligned} \tag{F44}$$

を得る．(F44)から

$$|B_1| \le |B_2| \le |B_3| \le \cdots \tag{F45}$$

である．これは，連分数の段数が大きくなると，λ_v の分母が大きくなることを表す．

ここで，漸化式(F41)から

$$\begin{cases} A_vB_{v-1} = b_vA_{v-1}B_{v-1} + a_vA_{v-2}B_{v-1} \\ B_vA_{v-1} = b_vB_{v-1}A_{v-1} + a_vB_{v-2}A_{v-1} \end{cases} \tag{F46}$$

となるので, (F46)の上式と下式の差をとり, 再帰的に表れる部分$(A_{v-2}B_{v-1} - B_{v-2}A_{v-1})$に注目すると

$$A_vB_{v-1} - B_vA_{v-1} = a_v(A_{v-2}B_{v-1} - B_{v-2}A_{v-1})$$

$$= a_va_{v-1}(-1)^2(A_{v-3}B_{v-2} - B_{v-3}A_{v-2})$$

$$\vdots$$

$$= (-1)^{v-1}\, a_1a_2 \cdots a_v \tag{F47}$$

が従うので，(F42v)は $A_0 = 0, B_0 = 1$ と中間の項 $\lambda_k (k = 0,1,\cdots, v-1)$ の和と差を加えることによって

$$\lambda_v = \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) + \cdots + \left(\frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}}\right)$$

$$= \frac{A_1B_0 - B_1A_0}{B_0B_1} + \frac{A_2B_1 - B_2A_1}{B_1B_2} + \cdots + \frac{A_vB_{v-1} - B_vA_{v-1}}{B_{v-1}B_v}$$

$$= \frac{A_1}{B_0B_1} - \frac{a_1a_2}{B_1B_2} + \cdots + (-1)^{v-1}\frac{a_1a_2 \cdots a_v}{B_{v-1}B_v} \tag{F48}$$

と変形することができる．一方で,

$$\left|\frac{a_1a_2 \cdots a_v}{B_{v-1}B_v}\right| \le \frac{|B_v| - |B_{v-1}|}{|B_{v-1}B_v|} = \frac{1}{|B_{v-1}|} - \frac{1}{|B_v|} \tag{F49}$$

なので，(F48)の両辺の絶対値をとると,

$$\left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \sum_{v=2}^{\infty}\left|\frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}}\right| \le \left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \sum_{v=2}^{\infty}\left(\frac{1}{|B_{v-1}|} - \frac{1}{|B_v|}\right) = \frac{1 + |a_1|}{|B_1|} \le 1 \tag{F50}$$

を得る．したがって,

$$\left|\frac{A_v}{B_v}\right| \le \left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right| + \left|\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right| + \cdots + \left|\frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}}\right|$$

$$= \left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \sum_{v=2}^{\infty}\left|\frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}}\right| \le 1 \tag{F51}$$

なので，(F42v), (F50)から

$$\lambda = \lim_{v\to\infty} \lambda_v = \lim_{v\to\infty} \left|\frac{A_v}{B_v}\right| \leq 1 \tag{F52}$$

を得る．したがって，超幾何級数の比から求めた無限連分数展開表示(F39)は収束関数であると結論される．ゆえに，本論文で用いた複素関数の連分数表示を用いた場合においても，その値が発散することはないと言える．ただし，例えば第 9 章で述べた境界インピーダンスのように，超幾何級数の比以外に周波数に依存する係数がある場合，この限りではない．このことについては F.6.2 節で改めて述べる．また，第 8 章で述べたように，Mathieu 関数を用いた複素透磁率については，周波数や寸法の値が十分に高い場合，固有値と係数の関係をも考慮する必要があるので，本節の方法だけでは収束性が判定できない場合があることを付記する．

F. 4　複素三角関数と複素双曲線関数の超幾何級数表示

F. 4. 1　複素三角関数の超幾何級数表示

複素三角関数はよく知られているように

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}\right) \tag{F53a}$$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}\right) \tag{F53b}$$

と記述することができる．一方で，指数関数の Maclaurin 展開

$$\mathrm{e}^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!} + \frac{z^4}{4\,!} + \frac{z^5}{5\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!} \tag{F54}$$

を(F53)に代入して

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^4}{4\,!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)\,!} \tag{F55a}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3\,!} + \frac{z^5}{5\,!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \tag{F55b}$$

となる．(F55)は，(F16)で示した超幾何級数 ${}_0F_1(\cdot)$ を用いて

$$\cos z = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \tag{F56a}$$

$$\sin z = z\ {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \tag{F56b}$$

と記述できる．したがって，複素正接関数について

$$\frac{\tan z}{z}=\frac{\sin z}{z\cos z}=\frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right)} \tag{F57}$$

が成立する．(F57)は(F39)の連分数展開公式を用いても展開することができるが，${}_0F_1$ については，文献[F.3]において，別の展開方法が示されている．本節ではこの展開公式を用いて，複素透磁率，境界インピーダンスの受動素子型の Cauer 型等価回路に相当する連分数表示を超合流幾何級数を用いて再度導く．

まず，${}_0F_1(v;z)$ は(F16)の定義から

$${}_0F_1(v;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!\,(v,n)} \tag{F58}$$

である．ここで,

$$\frac{1}{(v,n)}-\frac{1}{(v+1,n)}=\frac{(v+1)(v+2)\cdots(v+n-1)[\{(v+1)+n-1\}-v]}{(v,n)(v+1,n)}$$

$$=\frac{n}{v(v+1,n)}=\frac{n}{v(v+1)(v+2,n)} \tag{F59}$$

なので，(F58)の表示を改めて $\mathcal{F}_v(z)$ と定義すると,

$$\mathcal{F}_v(z)-\mathcal{F}_{v+1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!}\left(\frac{1}{(v,n)}-\frac{1}{(v+1,n)}\right)$$

$$=\frac{z}{v(v+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)\,!\,(v+2,n-1)}=\frac{z}{v(v+1)}\mathcal{F}_{v+2}(z) \tag{F60}$$

となるから，漸化式

$$\mathcal{F}_v(z)=\mathcal{F}_{v+1}(z)+\frac{z}{v(v+1)}\mathcal{F}_{v+2}(z) \tag{F61}$$

が従う．(F61)の両辺を $\mathcal{F}_{v+1}(z)$ で除すると

$$\frac{z}{v(v+1)}\frac{\mathcal{F}_{v+2}(z)}{\mathcal{F}_{v+1}(z)}=-1+\frac{1}{\frac{\mathcal{F}_{v+1}(z)}{\mathcal{F}_v(z)}} \tag{F62}$$

を得る．(F62)は本質的には(F39)と同値である．

さて，(F62)は連分数を再帰的に導ける構造を有しているので，つぎの漸化式

$$f_k(z)=\frac{z}{(v+k)(v+k+1)}\frac{\mathcal{F}_{v+k+2}(z)}{\mathcal{F}_{v+k+1}(z)} \tag{F63a}$$

$$a_{k+1}=\frac{1}{(v+k)(v+k+1)} \tag{F63b}$$

$(k=1,2,3,\cdots)$を導入すると,

$$f_k(z) = \frac{a_k z}{f_{k-1}(z)} - 1 \tag{F64}$$

と書き換えることができるから

$$\begin{aligned} v f_k(z) = \frac{v}{z} f_0(z) = \frac{1}{v+1}\frac{\mathcal{F}_{v+1}(z)}{\mathcal{F}_v(z)} &= \frac{1}{v+1}\frac{{}_0F_1(v+2;z)}{{}_0F_1(v+1;z)} \\ &= \cfrac{\cfrac{1}{v+1}}{1+\cfrac{\cfrac{z}{a_1}}{1+\cfrac{\cfrac{z}{a_2}}{1+\cdots}}} \end{aligned} \tag{F65}$$

を得る．(F65)において，$v = -1/2$,$z \to -z^2/4$ とすると，

$$\frac{1}{2}\frac{{}_0F_1\left(v+2;-\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(v+1;-\frac{z^2}{4}\right)} = \cfrac{\frac{1}{2}}{1-\cfrac{\frac{z^2}{4}\cfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+1+1\right)}}{1-\cfrac{\frac{z^2}{4}\cfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}+2\right)\left(-\frac{1}{2}+2+1\right)}}{1-\cdots}}} = \cfrac{\frac{1}{2}}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cdots}}} \tag{F66}$$

なので，(F57)から

$$\frac{\tan z}{z} = \cfrac{1}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cdots}}} \tag{F67}$$

となり，これはよく知られた連分数展開の公式に帰着する[F.4, 5]．また(F67)を用いた場合の電磁鋼板の複素透磁率 $\mu_r \tan z/z$ は，例えば $d = 1.0\ \mu\mathrm{m}, (\mu, \sigma) = (100\mu_0\ \mathrm{H/m}, 1.03 \times 10^7\ \mathrm{S/m})$ の磁性体で駆動周波数が 1 MHz においては $z^2 = (d^2(-\mathrm{j}\omega\mu\sigma)/4)$ を含んだ 2 段目以降について，$|a_{i-1}| = |z^2| = 2.03 \times 10^{-3}$, $b_{i-1} = 2i + 1$ なので Primsheim の判定法により，$\mu_r \tan z/z$ 全体で収束関数となる．これは，第 4 章 4.2 節で述べたように，磁性被覆線の磁性被覆に，電磁鋼板の複素透磁率を用いた場合に，分子分母の項において，e^{a/δ_2} の因子が約分され，数値発散が生じないことに矛盾しない結果を与える．実際，(F63)から

$$\lim_{z\to 0}\frac{f_k(z)}{z} = a_{k+1} \tag{F68}$$

なので，

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \tag{F69}$$

が従う．したがって，連分数(F67)は複素平面全体で収束すると判定できる．

F. 4. 2　複素双曲線関数の超幾何級数表示

複素双曲線関数はよく知られているように

$$\cosh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}) \tag{F70a}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}) \tag{F70b}$$

と記述することができる．4.1 節と同様に，指数関数の Maclaurin 展開(F54)を(F70)に代入して

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^4}{4\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} \tag{F71a}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3\,!} + \frac{z^5}{5\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \tag{F71b}$$

となる．(F71)は，(F16)で示した超幾何級数 ${}_0F_1(\cdot)$ を用いて

$$\cosh z = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \tag{F72a}$$

$$\sinh z = z\ {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \tag{F72b}$$

と記述できる．したがって，双曲線正接関数について

$$\frac{\tanh z}{z} = \frac{\sinh z}{z\cosh z} = \frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right)} \tag{F73}$$

が成立する．(F73)は(F39)の連分数展開公式を用いても展開することができる．しかし，ここでは，F.4.1 節の議論を踏襲して，連分数表示を導く．まず，複素双曲線関数の公式

$$\cos \mathrm{j}z = \cosh z \tag{F74a}$$

$$\sin \mathrm{j}z = \mathrm{j}\sinh z \tag{F74b}$$

から

$$\frac{\tanh z}{z} = \frac{\sinh z}{z\cosh z} = \frac{\sin \mathrm{j}z}{\mathrm{j}z\cos \mathrm{j}z} \tag{F75}$$

となるので，(F57)において，$z \to \mathrm{j}z$ と読み替えて，(F66)の結果を用いれば

$$\frac{\tanh z}{z} = \cfrac{1}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\cdots}}} \tag{F76}$$

を得る．また，(F76)は Primsheim の判定法により，収束関数となる．(F76)は，第 9 章で示した電磁シールドの境界インピーダンスに関係する．

F. 5　Bessel 関数の超幾何級数表示

F. 5. 1　超幾何級数を用いた Bessel 関数の表示

Helmholtz 方程式から導かれる Bessel 微分方程式は，第 3 章 3.4 節で導いたように

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left(k^2-\frac{v^2}{r^2}\right)R=0 \tag{F77}$$

である．(F77)は(3.27a)に対応するが，ここでは β を v と改めた．(F77)において $R=u(z), r=z/\sqrt{k^2}$ なる変数変換を行うと

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{v^2}{z^2}\right)u=0 \tag{F78}$$

を得る．(F78)においては $z=0$ が確定特異点，特性根は $\pm v$，$z=\infty$ が不確定特異点である．(F78)は Kummer の合流型超幾何微分方程式の特別な場合であるとわかる[F.6, 7].

さて，(F78)に対して，さらなる変数変換 $u(z)=z^v\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}v\big(z(t)\big), 2\mathrm{j}z=t$ を行うと，合成関数の連鎖微分から

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v vt^{v-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)+\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v t^v\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)+\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v t^v\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right\}\times 2t \tag{F79a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v v(v-1)t^{v-2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)+(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v vt^{v-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)$$

$$+(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v vt^{v-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^v vt^{v-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)$$

$$+(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^{v} vt^{v}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}v(t)+\ (2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^{v} t^{v}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$+(2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^{v} t^{v-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\ (2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^{v} t^{v}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$+\ (2\mathrm{j})^2\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\right)^{v} t^{v}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{F79b}$$

等のように微分項を変数変換できるので，(F78)は

$$t\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+(2v+1-t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{2v+1}{2}v(t)=0 \tag{F80}$$

と変形できる．(F80)は Kummer の合流型超幾何微分方程式(F22)において，係数の比較から，$\alpha=v+1/2,\gamma=2v+1$ とおいた場合に相当することがわかる．したがって，(F80)の基底関数は

$$v(t)=\ {}_1F_1\left(v+\frac{1}{2},2v+1;t\right)=\ {}_1F_1\left(v+\frac{1}{2},2v+1;2\mathrm{j}z\right) \tag{F81}$$

となる．ここで，$u(z)=z^{v}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}v\big(z(t)\big)$ であったので，

$$u(z)=cz^{v}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}\ {}_1F_1\left(v+\frac{1}{2},2v+1;2\mathrm{j}z\right) \tag{F82}$$

を得る．(F82)は Bessel 微分方程式(F77)の解である．

一方で，(F77)における級数解であり，よく知られた Bessel 関数の定義式

$$J_v(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(v+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{F83}$$

と(F82)を比較すると未定係数は

$$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{v}\frac{1}{\Gamma(v+1)} \tag{F84}$$

と求められるから Bessel 関数の超幾何級数展開表示

$$J_v(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{v}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{\Gamma(v+1)}\ {}_1F_1\left(v+\frac{1}{2},2v+1;2\mathrm{j}z\right) \tag{F85}$$

を得る．ここで，Kummer の超幾何級数の公式

$$\mathrm{e}^{-z}\ {}_1F_1(\alpha,2\alpha;2z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}=\ {}_0F_1\left(\alpha+\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right) \tag{F86}$$

を用いて，$\alpha \to v+1/2, z \to \mathrm{j}z$ とすると

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}\ {}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right) \tag{F87}$$

と書き換えることができる．(F86)の証明については複雑なので，F.5.3 節にまとめる．

F. 5. 2　Bessel 関数の連分数展開公式

さて，(F87)からつぎの式が従う．

$$\begin{aligned}\frac{J_{v+1}(z)}{J_v(z)} &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+1}\frac{1}{\Gamma(v+2)}\ {}_0F_1\left(v+2; -\frac{z^2}{4}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{v}\frac{1}{\Gamma(v+1)}\ {}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right)} \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+2)}\frac{{}_0F_1\left(v+2; -\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right)} \\ &= z\frac{1}{(v+1)} \times \frac{1}{2}\frac{{}_0F_1\left(v+2; -\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right)}\end{aligned} \tag{F88}$$

ここで，${}_0F_1$ の連分数展開公式(F65)を用いて

$$\frac{J_{v+1}(z)}{J_v(z)} = z\frac{1}{(2v+2) - \dfrac{z^2}{\{2v+2(k+1)\} - \dfrac{z^2}{\{2v+2(k+2)\} - \cdots}}} \tag{F89}$$

なので，

$$z\frac{J_v(z)}{J_{v+1}(z)} = (2v+2) - \frac{z^2}{\{2v+2(k+1)\} - \dfrac{z^2}{\{2v+2(k+2)\} - \cdots}} \tag{F90}$$

を得る．(F90)において，$v=0$ を代入すると

$$z\frac{J_0(z)}{J_1(z)} = 2 - \frac{z^2}{4 - \dfrac{z^2}{6 - \cdots}} \tag{F91}$$

となり，磁性円柱の複素透磁率に表れている関数の連分数展開表示を得る．また(F91)を用いた場合の導線の複素透磁率 $\mu_r J_1(z)/\left(zJ_1'(z)\right)$ は，例えば $a = 0.15\ \mathrm{mm}, (\mu, \sigma) = (1\mu_0\ \mathrm{H/m}, 5.76 \times 10^7\ \mathrm{S/m})$ の場合で駆動周波数が 1 MHz においては $|a_i| = |z^2| = |a^2(-\mathrm{j}\omega\mu\sigma)| = 10.23, b_i = 2(i+1)$ より，ある番号 N より大きい n に対して $|b_n| > |a_n| + 1$ なので $n > N$ 以降の段については Primsheim の判定法により収束するとわかるから，$\mu_r J_1(z)/\left(zJ_1'(z)\right)$ 全体で収束関数となる．

F. 5. 3　Kummer の超幾何級数の公式

F.5.1 節では,

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{\Gamma(v+1)}\ {}_1F_1\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; 2\mathrm{j}z\right) \tag{F85}$$

から

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}\ {}_0F_1\left(v+1; -\frac{z^2}{4}\right) \tag{F87}$$

を導く際に,

$$\mathrm{e}^{-z}\ {}_1F_1(\alpha, 2\alpha; 2z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}, n\right) n\,!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = {}_0F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \tag{F86}$$

を用いていたが, その証明はまだ行っていない. よって, 本節では(F86)を導く. 以下は, 文献[F.8]を参考に導くが, その際につぎの Pochhammer 記号に関する補助公式を導入する必要がある.

$$\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{n\,!}{2^{2m}\left(\beta+\frac{1}{2}, m\right) m\,!\ (n-2m)\,!} = \frac{2^n(\beta, n)}{(2\beta, 2n)} \tag{F92}$$

F. 5. 3. 1　補助公式の証明

数学公式(F92)はつぎのようにして導くことができる．まず，つぎの階乗の計算を Pochhammer 記号で表す.

$$\frac{1}{(n-2m)\,!} = \frac{1}{1\times 2\times\cdots\times(n-2m)} = \frac{(n-2m+1)(n-2m+2)\cdots(n-1)n}{n\,!}$$

$$= \frac{2^{2m}}{n\,!} \times \left(-\frac{n}{2}\right)\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+\frac{2}{2}\right\}\cdots\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+\frac{2m-2}{2}\right\}\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+\frac{2m-1}{2}\right\}$$

$$= \frac{2^{2m}}{n\,!} \times \left[\left(-\frac{n}{2}\right)\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+1\right\}\cdots\left\{\left(-\frac{n}{2}\right)+m-1\right\}\right] \times$$

$$\left[\left\{\left(-\frac{n-1}{2}\right)+1\right\}\cdots\left\{\left(-\frac{n-1}{2}\right)+m-1\right\}\right]$$

$$= 2^{2m}\frac{\left(-\frac{n}{2},m\right)\left(-\frac{n-1}{2},m\right)}{n\,!} \tag{F93}$$

すると，

$$\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n\,!}{2^{2m}\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)m\,!\,(n-2m)\,!} = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{\left(-\frac{n}{2},m\right)\left(-\frac{n-1}{2},m\right)}{\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)m\,!}1^m$$

$$= F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\beta+\frac{1}{2};1\right) \tag{F94}$$

となる．一方で，(F1)において，$z=1$ とすると，

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{F95}$$

が成り立つ．(F95)が成立することについては F.5.3.3 節で証明する．(F95)を用いると(F94)は

$$F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\beta+\frac{1}{2};1\right) = \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n}{2}\right)} \tag{F96}$$

となる．このとき，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)=\beta+n$ となるが，後の合流により，この値は正であることを仮定する．さて，Gamma 関数の公式，および Pochhammer 記号の定義(F2)から

$$\Gamma(\beta+n) = (\beta,n)\Gamma(\beta) \tag{F97}$$

であるので，(F96)の分母は

$$\Gamma\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n}{2}\right) = \left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)\left(\beta+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{2^n}(2\beta,2n)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta) \tag{F98}$$

となるので，(F96)は

$$F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\beta+\frac{1}{2};1\right) = \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta+n)}{\frac{1}{2^n}(2\beta,2n)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)} = \frac{2^n(\beta,n)}{(2\beta,2n)} \tag{F99}$$

となる．ゆえに，(F94)と(F99)から(F92)が成り立つとわかる．

F. 5. 3. 2　補助公式を用いた Bessel 関数の変形

まず，Taylor 級数展開から

$$(1-z)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha,k)}{k\,!}z^{k} \tag{F100}$$

なので

$$(1-z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\beta+\frac{1}{2};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{2},m\right)\left(\frac{\alpha+1}{2},m\right)}{\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)m\,!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2m}\frac{1}{(1-z)^{\alpha}}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha,2m)(\alpha+2m,k)z^{2m+k}}{\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)2^{2m}m\,!\,k\,!} \tag{F101}$$

を得る．ここで，$n\coloneqq 2m+k\in\mathbb{Z}$ とすると，$k=n-2m, m=[n/2-k/2]$ のため，

$$(1-z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\beta+\frac{1}{2};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(\alpha,2m)(\alpha+2m,n-2m)z^{n}}{2^{2m}\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)m\,!\,(n-2m)\,!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(\alpha,n)z^{n}}{2^{2m}\left(\beta+\frac{1}{2},m\right)m\,!\,(n-2m)\,!} \tag{F102}$$

となる．ここで，

$$\left(\frac{\alpha}{2},m\right)\left(\frac{\alpha+1}{2},m\right)=\frac{(\alpha,2m)}{2^{2m}} \tag{F103}$$

を用いた．(F102)に(F92)を代入すると

$$(1-z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\beta+\frac{1}{2};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(2z)^{n}}{(2\beta,n)n\,!}=F(\alpha,\beta,2\beta;2z) \tag{F104}$$

となる．さて，(F104)から，

$$F\left(\alpha,\beta,2\alpha;\frac{2z}{\beta}\right)=\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-\beta}F\left(\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2},\alpha+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{\beta}\right)^{2}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-2}\right) \tag{F105}$$

を得る．(F105)の左辺は F.2.2 で述べた合流(F23)，つまり $\beta\to\infty, z/\beta\to z$ により

$$F\left(\alpha,\beta,2\alpha;\frac{2z}{\beta}\right)=F(\alpha,2\alpha;2z) \tag{F106}$$

となる．一方で(F105)の右辺は

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-\beta}=\mathrm{e}^{z} \tag{F107a}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2},\alpha+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{\beta}\right)^{2}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-2}\right)$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta}{2},n\right)\times\left(\frac{\beta+1}{2},n\right)}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!}\left(\frac{z}{\beta}\right)^{2n}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-2n}$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\beta}{2}+n-1\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\times\left(\frac{\beta+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\beta+1}{2}+n-1\right)z^{2n}}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!\,\beta^{2n}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{2n}}$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{\beta}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\beta}+\frac{n-1}{\beta}\right)z^{2n}}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+0\right)\left(\frac{1}{2}+0\right)\times\left(\frac{1}{2}+0+0\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+0+0\right)z^{2n}}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!\,(1-0)^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{F107b}$$

となるので，結局

$$F(\alpha,2\alpha;2z)=\mathrm{e}^{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2},n\right)n\,!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}=\mathrm{e}^{z}\,{}_0F_1\left(\alpha+\frac{1}{2};\frac{z^{2}}{4}\right) \tag{F108}$$

を得る．ゆえに

$$\mathrm{e}^{-z}\ {}_1F_1(\alpha, 2\alpha; 2z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\alpha+\frac{1}{2}, n\right) n\,!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = {}_0F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \tag{F86}$$

が成立することが示せた.

F. 5. 3. 3　Gauss の超幾何級数の Gamma 関数表示の証明

F. 5. 3. 3. 1　Gauss の超幾何級数の積分表示

F.5.3.2 節においては,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{F95}$$

を用いた．本節では，(F95)を証明する．まず，Pochhammer 記号はつぎのように Gamma 関数の商で表すことができる．

$$(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \tag{F109}$$

ここで複素数を引数に持つ Gamma 関数の性質

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad (z \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{F110}$$

を用いた．(F109)を用いると，(F1)は

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}(\beta, n)}{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}(1, n)} z^n$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{(\beta, n)}{(1, n)} z^n \tag{F111}$$

となる．ここで，Beta 関数の性質と Gamma 関数の関係

$$\mathcal{B}(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}\mathrm{d}t \tag{F112a}$$

$$\mathcal{B}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)} \tag{F112b}$$

から，$z_1 \coloneqq \alpha+n, z_2 \coloneqq \gamma-\alpha$ とすると，$z_1+z_2 = \gamma+n$ なので,

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}(\alpha+n,\gamma-\alpha)\frac{(\beta,n)}{(1,n)}z^n$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{\alpha+n-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{d}t\frac{(\beta,n)}{(1,n)}z^n$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta,n)}{(1,n)}(zt)^n\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\mathrm{d}t \qquad \text{(F113)}$$

を得る．この変形には Taylor 級数展開の逆を用いた．(F113)は，Gauss 超幾何級数の積分表示と呼ばれている．ただし，$\mathrm{Re}(\alpha)>0,\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0,|z|<1$ である．また，F.1.3 節で述べたように，$z=1$ は確定特異点である．(F95)では $z=1$ が代入されているが，このようにしても収束関数となることを証明する必要がある．次節では(F113)の絶対収束性を証明する．

F. 5. 3. 3. 2　Gauss の超幾何級数の絶対収束性

F.1.1 節で定義した(F3)をつぎのように書き換える．

$$a_n\coloneqq\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}=\frac{(\alpha,n)}{(n-1)!\,n^{\alpha}}\frac{(\beta,n)}{(n-1)!\,n^{\beta}}\frac{(n-1)!\,n^{\gamma}}{(\gamma,n)}\frac{1}{n^{1+\gamma-\alpha-\beta}} \qquad \text{(F114)}$$

ここで Gauss の公式

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \qquad \text{(F115)}$$

を用いると，F.5.3.3.1 節の最後に述べた条件より，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$ では

$$\lim_{\beta\to\infty}n^{1+\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)}\left|\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}\right|=\lim_{\beta\to\infty}\left|n^{1+\gamma-\alpha-\beta}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}\right|$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left|\frac{(n-1)!\,n^{\gamma}}{(\gamma,n)}\right|\left|\frac{1}{\frac{(n-1)!\,n^{\alpha}}{(\alpha,n)}}\right|\left|\frac{1}{\frac{(n-1)!\,n^{\beta}}{(\beta,n)}}\right|$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right| \qquad \text{(F116)}$$

となる．したがって，$^{\forall}\delta > 0\,,\mathrm{s.t.}\,0 < \delta < \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)$ の条件で，$^{\exists}n_0 \in \mathbb{N}\,,\ ^{\forall}n \geq n_0$ に対して，

$$\left|\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}\right| < \left|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right|\frac{1}{n^{1+\delta}} \tag{F117}$$

が成立する．さて，

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}} \tag{F118}$$

は絶対収束する関数なので，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0,\ \gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば Gauss の超幾何級数は $z=1$ で絶対収束するとわかる．なお，$z=1$ は元々特異点であったが，ここでは解析接続されているので，$z=1$ を Gauss の超幾何級数に代入しても発散しない．

F. 5. 3. 3. 3　Gauss の超幾何級数の特異点における Gamma 関数表示

F.5.3.3.2 節で Gauss の超幾何級数は $z=1$ で絶対収束することを示せたので，改めて (F113)に $z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma;1) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\mathcal{B}(\alpha,\gamma-\alpha-\beta) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \end{aligned} \tag{F119}$$

となる．したがって，(F95)が証明された．

F. 6　渦電流場に対する伝達関数の超幾何級数表示と連分数展開

F. 6. 1　複素透磁率の超幾何級数表示

第 3 章で Helmholtz 方程式の解析解から定義された複素透磁率は，本節で導入した超幾何級数表示を用いて，磁性体毎につぎの様に改めることができる．なお，磁性体毎の引数 ζ の定義は第 3 章に従うとする．

- 電磁鋼板の場合

$$\dot{\mu}_r^{slab}(\omega) = \mu_r \frac{\tan\zeta}{\zeta} = \mu_r \frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};-\frac{\zeta^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\zeta^2}{4}\right)} \tag{F120}$$

- 磁性円柱の場合

$$\dot{\mu}_r^{wire}(\omega) = \mu_r \frac{J_1(\zeta)}{\zeta J_1'(\zeta)} = \mu_r \frac{1}{4\zeta \dfrac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2},1;2\mathrm{j}\zeta\right)}{{}_1F_1\left(\frac{3}{2},3;2\mathrm{j}\zeta\right)} - 1} = \mu_r \frac{1}{2\dfrac{{}_0F_1\left(1;-\frac{\zeta^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(2;-\frac{\zeta^2}{4}\right)} - 1} \tag{F121}$$

- 磁性球の場合

$$\dot{\mu}_r^{SMC} = 2\mu_r \frac{1-\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}}{(1-\zeta^2)\dfrac{\tan\zeta}{\zeta}-1} = 2\mu_r \frac{1-\ {}_0F_1\left(\frac{3}{2};-\frac{\zeta^2}{4}\right)}{(1-\zeta^2)\ {}_0F_1\left(\frac{3}{2};-\frac{\zeta^2}{4}\right)-1} \tag{F122}$$

超幾何級数を用いることで，磁性体の形状毎に異なる複素透磁率が，${}_pF_q(\cdot)$を用いて統一的に記述することができた．しかし，超幾何関数を用いた統一的な表記はできても，物理的な対応についてはまだ考察できていない．以下では，超幾何級数の引数と物理的意味の対応を調べるために，いくつかの考察を行う．

F. 6. 2　境界インピーダンスの超幾何級数表示

例えば，Fig.F.1 に示すような電磁鋼板を考える．電磁鋼板に平行に外部磁界が印加されている状況下では，伝達関数は複素透磁率(F120)で記述できる．一方で，電磁鋼板に垂直に外部磁界が印加される場合には，$\zeta \coloneqq \gamma d/2$ とおくと第 9 章で定義した境界インピーダンス

$$Z_a = \frac{\gamma}{\sigma\tanh\zeta} = \frac{2}{\sigma d} \times \frac{1}{\dfrac{\tanh(\zeta)}{\zeta}} = \frac{2}{\sigma d} \frac{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)} \tag{F123a}$$

$$Z_b = \frac{\gamma}{\sigma}\tanh\zeta = s\frac{d\mu}{2}\frac{\tanh(\zeta)}{\zeta} = s\frac{d\mu}{2}\frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)} \tag{F123b}$$

が伝達関数である．複素透磁率(F120)と境界インピーダンス(F123)を比較すると，係数以外では，超幾何級数の引数において符号の差が見られる．電磁鋼板の複素透磁率(F120)は電磁鋼板表面に対して平行に磁界を印加した場合において定義された一方で，境界インピーダンス(F123)は電磁鋼板表面に対して垂直に磁界を印加した場合において定義されたことから，超幾何級数の引数の符号の差異は Fig.F.1 に示すように，磁界の印加方向の違いに起因するとわかる．

さらに，第 9 章においては，9.4 節で述べたように，境界インピーダンスを含んだ複素定数 $\alpha \coloneqq -s\mu_0/Z_a, \beta \coloneqq -Z_b/s\mu_0$ を直接的に逆 Laplace 変換すると，極の値が負の値が含まれてしまい，発散してしまう．一方で，9.5 節で述べたように，修正境界インピーダンスを用いると，数値発散は生じない．この現象は，本節の F.3.2 節で述べた Pringsheim の判定法により説明できる．例えば，第 9 章で示した複素定数 α は

$$\alpha \equiv -s\frac{\mu_0}{Z_a} = -s\sigma\frac{\mu_r\mu_0}{\mu_r} \times \frac{\tanh(\zeta)}{\zeta} \times \frac{d}{2} \tag{F124}$$

であった．(F124)は(9.54a)に対応する．α を超幾何級数を用いて表現すると

$$\alpha = -s\sigma\frac{\mu_r\mu_0}{\mu_r}\frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\frac{\zeta^2}{4}\right)}\frac{d}{2} \tag{F125}$$

となる．$\omega \to \infty$ の極限では，超幾何級数の商の部分は収束するが，(F125)の分子には $s = \mathrm{j}\omega$ が含まれているので，$\alpha \to \infty$ となってしまう．これが，数値不安定性があることの原因となる．一方で，修正インピーダンスは

$$\frac{Z_a}{s} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\sigma\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right)} = \frac{2}{s\sigma d}\frac{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\frac{\zeta^2}{2}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};\frac{\zeta^2}{2}\right)} \tag{F126a}$$

$$\frac{Z_b}{s} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\sigma}\tanh\left(\frac{\gamma d}{2}\right) = \frac{d\mu}{2}\frac{{}_0F_1\left(\frac{3}{2};\frac{\zeta^2}{2}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\frac{\zeta^2}{2}\right)} \tag{F126b}$$

であった．(F126)は(9.64)に対応する．(F126)はいずれも $\omega \to \infty$ の極限では収束することが，Pringsheim の判定法と，分母に $s = \mathrm{j}\omega$ が含まれていることからわかる．したがって，第 9 章で与えた修正インピーダンスの部分分数展開には数値不安定性がない．

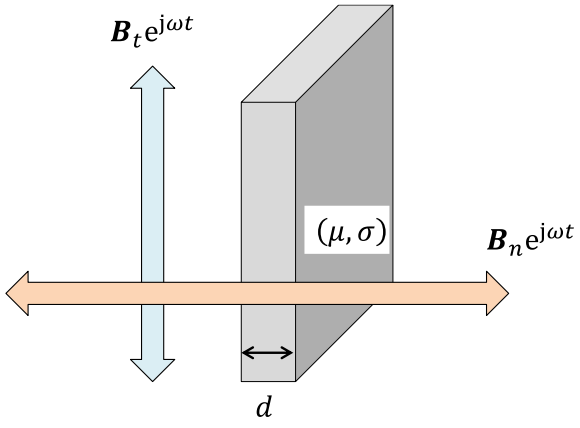


Fig.F.1 Thin and infinity wide magnetic conductive slab with thickness d, permeability μ and conductivity σ, immersed in a time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
Corresponding to the direction of an applied magnetic induction, signs of hypergeometric functions are changed. When it is positive, the applied magnetic induction $\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ is perpendicular to the slab whereas when it is negative, its direction is parallel to the surface of the slab.

F. 6. 3　異方性を考慮したテンソル型複素透磁率の超幾何級数表示

本節では異方性を表すテンソル型複素透磁率の超幾何級数表示を考える．以下では，長軸 α 方向, 短軸 β 方向の複素透磁率をそれぞれ $\dot{\mu}_r^{\alpha}, \dot{\mu}_r^{\beta}$ とする. まず 2 次元問題として，Fig.F.2 に示すような一様交番磁界中の磁性楕円柱を考える．磁性楕円柱のテンソル型複素透磁率は第 3 章 3.9 節において, Mathieu 関数を用いて定義した複素透磁率を Appendix D で示した Bessel 関数を用いて近似した形

$$\dot{\mu}_r^{\alpha}(\eta, q) = \mu_r^{\alpha} \frac{\cosh\eta_1}{\sinh\eta_1} \frac{\mathrm{se}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{se}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \approx \mu_r^{\alpha} \frac{1}{\zeta^{\alpha} \dfrac{J_0(\zeta^{\alpha})}{J_1(\zeta^{\alpha})} - 1} \tag{F127a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta}(\eta, q) = \mu_r^{\beta} \frac{\sinh\eta_1}{\cosh\eta_1} \frac{\mathrm{ce}_1(\mathrm{j}\eta_1, q)}{\mathrm{ce}_1'(\mathrm{j}\eta_1, q)} \approx \mu_r^{\beta} \frac{1}{\zeta^{\beta} \dfrac{J_0(\zeta^{\beta})}{J_1(\zeta^{\beta})} - 1} \tag{F127b}$$

に改めることができる．(F127)は(7.47)に対応する．ここで，引数の定義は

$$\zeta^{\alpha} \coloneqq -\frac{a_f \sinh\eta_1}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{F128a}$$

$$\zeta^{\beta} \coloneqq \frac{a_f \cosh\eta_1}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{F128b}$$

である．(F128)の超幾何級数表示は，(F121)と同様にして

$$\dot{\mu}_r^{\alpha}(\eta, q) = \mu_r^{\alpha} \frac{1}{4\zeta^{\alpha} \dfrac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 2\mathrm{j}\zeta^{\alpha}\right)}{{}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 3; 2\mathrm{j}\zeta^{\alpha}\right)} - 1} = \mu_r^{\alpha} \frac{1}{2\dfrac{{}_0F_1\left(1; -\frac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(2; -\frac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)} - 1} \tag{F129a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta}(\eta, q) = \mu_r^{\beta} \frac{1}{4\zeta^{\beta} \dfrac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 2\mathrm{j}\zeta^{\beta}\right)}{{}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 3; 2\mathrm{j}\zeta^{\beta}\right)} - 1} = \mu_r^{\beta} \frac{1}{2\dfrac{{}_0F_1\left(1; -\frac{(\zeta^{\beta})^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(2; -\frac{(\zeta^{\beta})^2}{4}\right)} - 1} \tag{F129b}$$

である．(F129)からも，引数の符号が変化しているが，同時に，$-\sinh\eta_1$ と $\cosh\eta_1$ の変更も確認できる．

つぎに，3 次元問題として Fig.F.3 に示すような磁性楕円体を考える．この場合のテンソル型複素透磁率は，第 3 章 3.12 節で定義した複素関数に(F120)を代入することで

$$\dot{\mu}_r^{\alpha} = \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\}\dfrac{\tan\zeta^{\alpha}}{\zeta^{\alpha}} - (2\tanh^2\eta_0 - 1)}$$

$$= \mu_r^{\alpha} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{{}_0F_1\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)}\right)}{\{\tanh^2\eta_0\,(2 - (\zeta^{\alpha})^2) - 1\}\dfrac{{}_0F_1\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{(\zeta^{\alpha})^2}{4}\right)} - (2\tanh^2\eta_0 - 1)} \tag{F130a}$$

$$\dot{\mu}_r^{\beta} = \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{\tan\zeta^{\beta}}{\zeta^{\beta}} - (2 - \tanh^2\eta_0)}$$

$$= \mu_r^{\beta} \frac{(\tanh^2\eta_0 + 1)\left(1 - \dfrac{{}_0F_1\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{\left(\zeta^{\beta}\right)^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{(\zeta^{\beta})^2}{4}\right)}\right)}{\left((2 - (\zeta^{\beta})^2) - \tanh^2\eta_0\right)\dfrac{{}_0F_1\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{(\zeta^{\beta})^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{(\zeta^{\beta})^2}{4}\right)} - (2 - \tanh^2\eta_0)} \tag{F130b}$$

であり，その引数は

$$\zeta^{\alpha} \coloneqq \frac{a_f \cosh\eta_0}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{F131a}$$

$$\zeta^{\beta} \coloneqq -\frac{a_f \sinh\eta_0}{\delta}(1 - \mathrm{j}) \tag{F131b}$$

であるので，この場合も，磁界の印加方向と $-\sinh\eta_0$ と $\cosh\eta_0$ の変更が対応する．

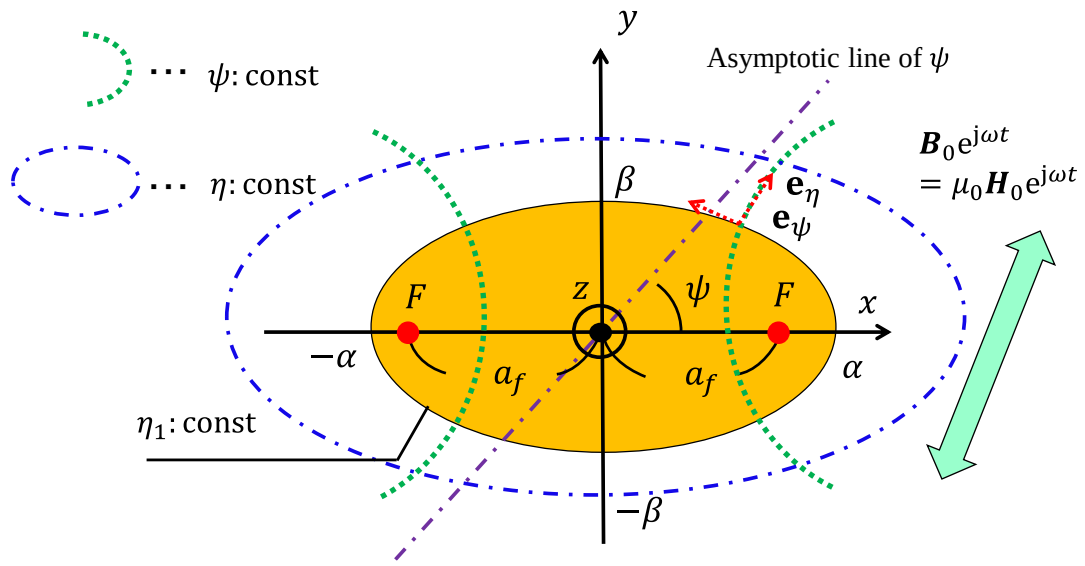
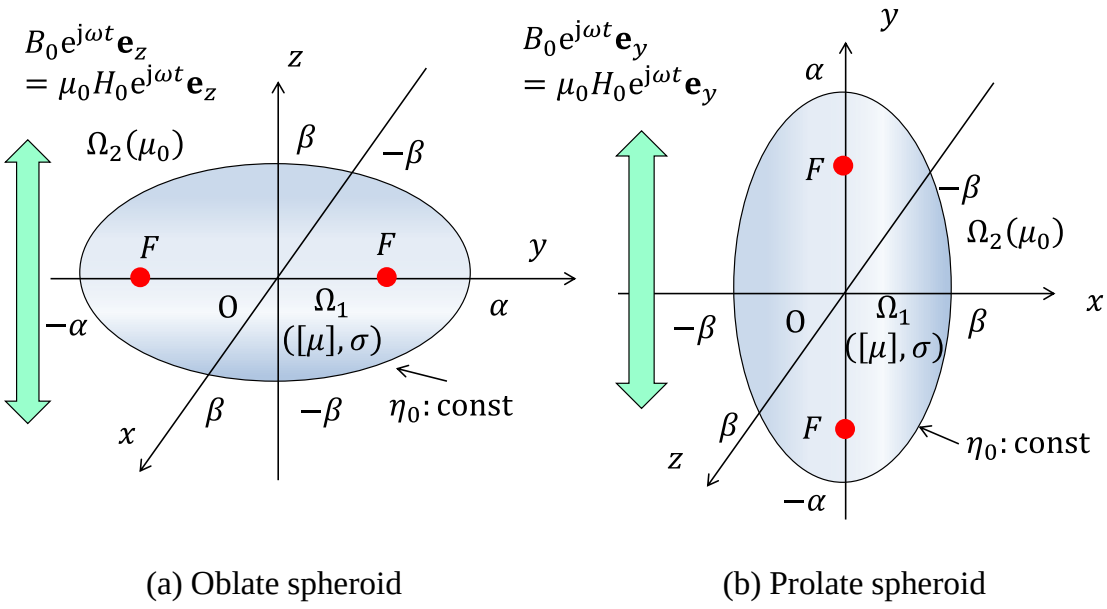


Fig.F.2 Cross-section of an elliptic wire immersed in a time-harmonic uniform magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$ in elliptical-cylindrical coordinate system (η, ψ, z).



(a) Oblate spheroid　　(b) Prolate spheroid

Fig.F.3 Spheroidal magnetic composite (SMC) immersed in a uniform, time-harmonic magnetic induction $\boldsymbol{B}_0 e^{j\omega t}$.

F. 7　連分数の縮約原理

ここまでに導出した複素透磁率と境界インピーダンスの連分数展開形は, いずれも収束関数であることは述べた．しかしながら，収束の一意性については示していない．本節では連分数の縮約原理から，複素透磁率と境界インピーダンスの連分数展開表示が一意収束することを述べる．以下では，再び文献[F.8]を参考とする．

ある(複素)関数の連分数展開を，つぎのような 1 次分数変換

$$T_k : z \longrightarrow \frac{a_k}{b_k + z} \tag{F132}$$

反復と考える．このような表示は，例えば (F39), (F66), (F89) に対応する．これらに代表されるような，ある連分数の族 $\boldsymbol{F}$ と，複素球面内の閉集合 D があり， D が原点 0 を含み，$\boldsymbol{F}$ の各連分数を分解した 1 次分数変換で，常に D が自分自身の中の領域の一部に写像されると仮定する．n が十分に大きいとき，連続写像

$$T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ \cdots \circ T_n(D) = D^{(n)} \tag{F133}$$

が有界で，その compact ディスクの直径 δ_n が($\boldsymbol{F}$ の要素について)一様に 0 に収束するとすると，$\boldsymbol{F}$ に属する連分数は一様に収束し，その極限値 w は D に含まれる．

この命題は次のようにして証明される. まず, $^{\forall}\varepsilon > 0$に対し, $^{\exists}\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $^{\forall}n \geq m \in \mathbb{N}$ であれば,

$$w_n = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ \cdots \circ T_n(0) \in D^{(n)} \tag{F134}$$

かつ

$$T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ \cdots \circ T_m(T_{m+1} \circ \cdots \circ T_n) \in D^{(m)} \tag{F135}$$

なので，直ちに

$$w_n, w_m \in D^{(m)} \tag{F136}$$

が従う．よって,

$$|w_m - w_n| \leq \delta_m < \varepsilon \tag{F137}$$

が成立する．(F137)は，Cauchy 列の定義そのものであり，この Cauchy 列は D 内の点 $w_\infty = w$ に収束するとわかる．

この命題から，本章で示した連分数展開は，十分に段数をとれば，一意に収束するため，数値解析結果において大きな誤差にはならないことが保証される．本論文では例えば第 7 章や第 9 章で，概ね 5 段程度であったが，これは磁性体のサイズや物質定数に依存して決まる．

F. 8　本章の総括：超幾何級数表示を用いた渦電流を表す伝達関数

以下では，本節を通じて得られた知見をまとめる.

(1) 本論文で議論した，外部磁界に対する磁性体の渦電流場を表す伝達関数，すなわち複素透磁率と境界インピーダンスは超幾何級数を用いて統一的に記述することができる.

(2) 超幾何級数は連分数表示を行うことができる．この連分数の値は必ず一意に収束することが数学的に証明できる. また, この方法を応用すると, 第 7 章で示した方法で Cauer 型等価回路の素子値を解析的に求めることができ，有理関数表示から，部分分数展開を求めることができる.

(3) 異方性を有する磁性体の場合，超幾何級数の引数の符号と双曲線関数の変更で，磁界の印加方向を 90° 回転した場合の複素透磁率を記述することが可能である．特に，磁性板の場合は磁束の印加方向が 90° 回転することに伴い，複素透磁率と境界インピーダンスが変更される.

Appendix F 参考文献

[F.1] 原岡喜重,「超幾何関数」，朝倉書店，2002.

[F.2] 青本和彦,「超幾何関数論」，シュプリンガー現代数学シリーズ，1994.

[F.3] 一松信,「特殊関数入門」，森北出版，1999.

[F.4] 森口繁一，宇田川銈久，一松信,「数学公式Ⅲ」，岩波書店，2007.

[F.5] Y. Sato, H. Igarashi, “Time-domain Analysis of Soft Magnetic Composite Using Equivalent Circuit via Homogenization”, IEEE Trans. Magn., vol. 53, no. 6, 7402204, 2017.

[F.6] 木村弘信,「超幾何関数入門」，サイエンス社，2007.

[F.7] 西本敏彦,「超幾何・合流型超幾何微分方程式」，共立出版，1998.

[F.8] 時弘哲治,「工学における特殊関数」，共立出版，2006.