



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Large Time Behavior of Solutions to the Viscous Conservation Law with Dispersion [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	福田, 一貴
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第13901号
Issue Date	2020-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/78456
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Ikki_FUKUDA_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 福田 一貴

学 位 論 文 題 名

Large Time Behavior of Solutions to the Viscous Conservation Law with Dispersion
(分散効果を伴う粘性保存則方程式の解の長時間挙動)

本学位論文では, 分散効果を伴う粘性保存則方程式の解の長時間挙動に関する解析を行う. 具体的には, 以下の形の偏微分方程式の初期値問題を考える:

$$u_t + (f(u))_x + ku_{xxx} = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{P})$$

ここで, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は十分なめらかな関数とし, $k \in \mathbb{R}, \mu > 0$ とする. また, 添え字の x と t はそれぞれ x と t に関する偏微分を表す. (P) において $k = 0$ とした方程式は, 粘性保存則方程式と呼ばれており, 主に気体力学や流体力学等の分野で現れる, 物理量の空間一次元的時間発展を記述した非線形波の方程式の一つである. 左辺の $(f(u))_x$ は非線形移流効果を記述し, 右辺の μu_{xx} は流体の粘性等による散逸効果を表現した粘性項である. 一方で上記の方程式 (P) は, 粘性保存則方程式において, 分散項 ku_{xxx} の効果も考慮したものである. またこの方程式は, 浅水波のモデルとして知られる KdV 方程式に粘性項を付加したもの的一般化とも解釈できるため, 一般化 KdV-Burgers 方程式とも呼ばれている. このため, 流体の方程式としてだけでなく, 移流, 分散, 散逸の三つの効果を考慮した, より一般の非線形波動の数値モデルともみなすことができる. 従って, この方程式に対する数学理論の構築は, 様々な非線形現象を理解するために非常に意義があることである. 本研究の目的は, 十分小さい初期値に対する初期値問題 (P) の解の長時間漸近挙動を解析することである. 具体的には, 解の時間無限大における形状 (漸近形) と, 得られた漸近形への $t \rightarrow \infty$ での収束の速さ (漸近レート) の最適性を考察し, 時間無限大における解の構造を明らかにすることが最大の目的である. 特に, 与えられた初期値の形状や, 分散効果や非線形効果が解の挙動にどのような影響を与えるのかを詳細に解析する.

本学位論文は, 主に申請者による論文 [1] 及び [2] の結果に基づき, 全 4 章で構成されている. はじめに, 第 1 章では全体の序文として, 粘性保存則方程式に関する先行研究や, 本研究で対象とする問題及び結果を概説した. 第 2 章と第 3 章では, それぞれ論文 [1] 及び [2] で得られた, 解の長時間挙動に関する結果を紹介した. 最後に第 4 章では付録として, 得られた漸近形の導出のアイデアを解説した. 以下, [1] と [2] で得られた結果について詳しく解説する.

[1] では, $f(u) = (b/2)u^2 + (c/3)u^3$ ($b \neq 0, c \in \mathbb{R}$) の場合における, 空間遠方で十分速く減衰する, 小さい初期値に対する初期値問題 (P) の解の長時間挙動に関する研究を取り扱った. 初期値問題 (P) の解の漸近形は, 初期値 $u_0(x)$ の空間遠方での形状によって異なることが知られている. 初期値が遠方両端で減衰する場合, 非線形散逸波と呼ばれる, Burgers 方程式の自己相似解が漸近形となる. 先行研究では, 松村-西原 (2004) において, $k = 0$ の場合に, その漸近の速さについて $t^{-1} \log t$ という漸近レートが得られていた. その後, 加藤 (2007) により, 解の第 2 漸近形が具体的に構成され, 松村-西原によって与えられた漸近レートが最良であることが示された. 一方, 分散効果を伴った場合についても, Kaikina-Ruiz-Paredes (2005) により, $k = 1, f(u) = u^2/2$ の場合に, 既に加藤と類似の考察がなされており, 非線形散逸波への漸近に関する結果や, 解の第 2 漸近形が得られていた. これらの先行研究を踏まえて, [1] では上記の結果の一般化に取り組んだ. 具体的には,

分散項と高次の非線形項を併せ持った, $k \in \mathbb{R}, f(u) = (b/2)u^2 + (c/3)u^3$ ($b \neq 0, c \in \mathbb{R}$) の場合に関して, 解の時間減衰評価と部分積分法を組み合わせることで, これまでの先行研究で用いられてきた証明手法を適切に修正し, 解の第 2 漸近形を構成することで, 非線形散逸波への最適な漸近レート $t^{-1} \log t$ を導出した. その結果によって, 関連する過去の結果を統一的に書き表すことに成功した. また, 得られた解の第 2 漸近形の構造から, 分散効果と高次の非線形項の作用の仕方が解の挙動に影響を与え, それが非線形散逸波への漸近レートにも反映されることがわかり, 結果として分散項や高次の非線形項の影響が無視できないということも明らかにした. 具体的には, これまでの加藤や Kaikina-Ruiz-Paredes らの研究では高次の非線形項がある場合や, 分散項がある場合には, それぞれ非線形散逸波への漸近レートとして $t^{-1} \log t$ が最適であったが, これらの項を両方とも含んでいる場合, 高次の非線形項の係数と分散項の係数の関係によっては, 非線形散逸波への漸近レートが t^{-1} と改善されることを示した.

[2] では, 初期値の空間遠方での減衰率が非線形散逸波への漸近レートに及ぼす影響を考察した. 具体的には $u_0(x)$ が $x \rightarrow \pm\infty$ のときに $\alpha > 1$ のオーダーで減衰すると仮定し, その減衰率 α に対応した解の長時間挙動を導いた. なお, [1] での研究結果は $\alpha > 2$ の場合に対応している. このため, [2] では初期値がより緩やかに遠方で減衰する, $1 < \alpha \leq 2$ の場合の研究を行った. この場合は [1] の状況に比べて初期値の効果が強く, 非線形散逸波への漸近レートは, 初期値の遠方での減衰率に応じて, $1 < \alpha < 2$ の場合に $t^{-\alpha/2}$, $\alpha = 2$ の場合に $t^{-1} \log t$ となることを示した. また, 解と非線形散逸波の差に関する摂動の満たす方程式の線形化方程式を詳細に解析することで, この場合に対応する新たな解の第 2 漸近形を導出し, 上記の漸近レートの最適性を示すことにも成功した. より詳細には, [1] の場合とは異なり, 解の第 2 漸近形が初期値の遠方での減衰率 α に応じて変化することを明らかにした. さらに, $\alpha = 2$ の場合には, 線形効果と非線形効果が釣り合い, 複雑な漸近挙動が得られることも観察された.

以上の [1] 及び [2] の研究結果により, 初期値問題 (P) の解の長時間漸近挙動について, 初期値の形状に応じて, 非線形散逸波への漸近レートがどのように変化するかを明らかにし, 与えられた漸近レートが最良となるために, 非線形項や分散項の係数及び初期値が満たすべき条件等に関して, 統一的な理解を与えることに成功した.

参考文献

- [1] I. Fukuda, Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation, Osaka J. Math. Vol.56, No.4 (2019), 883-906.
- [2] I. Fukuda, Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation with slowly decaying data, J. Math. Anal. Appl, Vol.480, No.2 (2019), 123446.