



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性
Author(s)	Forbes, Brian
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 101, 1
Issue Date	2005-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/736
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/785
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech101.pdf



21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularities

The 7th COE Lecture Series

**トーリックミラー対称性
Toric Mirror Symmetry**

– Bilingual version –

Research Fellow
Brian Forbes

August 3 - 5, 2005

Series #101. August, 2005

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #75 D. Matsushita (Ed.), Proceedings of the workshop “Hodge Theory and Algebraic Geometry”, 191 pages. 2003.
- #76 M. Hayashi and G. Ishikawa (Eds.), 2002 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 34 pages. 2003.
- #77 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura(Eds.), Proceedings of the 28th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2003.
- #78 S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada (Eds.), The 12th MSJ-IRI “Singularity Theory and Its Applications” ABSTRACTS, 291 pages. 2003.
- #79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 “Evolution Equations”, 31 pages. 2003.
- #80 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 12 回関数空間セミナー報告集, 122 pages. 2004.
- #81 Y. Giga, S. Izumiya and K. Deguchi (Eds.), Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003, 48 pages. 2004.
- #82 I. Shimada and Y. Tonegawa (Eds.), 2003 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 52 pages. 2004.
- #83 The 2nd HU and SNU Symposium on Mathematics Abstracts, 22 pages. 2004.
- #84 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 29th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 2004.
- #85 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations I, 147 pages. 2004.
- #86 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations II, 47 pages. 2004.
- #87 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), COE Symposium Nonlinear Dispersive Equations, 85 pages. 2004.
- #88 T. Namiki, M. Hatakeyama, S. Tadokoro and H. Aoi (Eds.), 北海道大学数学教室におけるメタデータ交換プロトコル OAI-PMH に準拠した e-print サーバ構築, 14 pages. 2004.
- #89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第 1 回数学総合若手研究集会 COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.
- #90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^∞ -calculus for the Stokes operator on L_q -spaces, 34 pages. 2005.
- #91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 13 回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.
- #92 N. Umeda, 第 4 回 COE 研究員連続講演会 反応-拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.
- #93 K. Arima, 第 2 回 COE 研究員連続講演会 極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.
- #94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis “OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK” 43 pages. 2005.
- #95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.
- #96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.
- #97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会 『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.
- #98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.
- #99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series “From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back” 42 pages. 2005.
- #100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo, 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularities

The 7th COE Lecture Series

**トーリックミラー対称性
Toric Mirror Symmetry**

—Bilingual version—

Research Fellow
Brian Forbes

August 3 - 5, 2005

トーリックミラー対称性

Brian Forbes, Masao Jinzenji

1 ミラー多様体

1.1 カラビ-ヤウ多様体の定義

まず最初に、カラビ-ヤウ多様体の一般的な定義をします：

定義 1 X をケーラー多様体として $c_1(X) = 0$ と置きましょう。このような X をカラビ-ヤウ多様体といいます。

面白い例を探すために、もっと特別な多様体に限定しましょう。そこで、これからトーリック多様体だけを使います。トーリック多様体の特性はトールス作用があることです。このような多様体を使うと、色々な計算が簡単になります。

1.2 ノン・コンパクトな例

まずは、局所カラビ-ヤウ多様体の例を説明します。局所カラビ-ヤウ多様体はこの話の中心なのですが、これらは全てノン・コンパクトな多様体です。

例 1.1 $X =$ 局所射影平面。つまり、射影平面上の標準束です。この多様体の定義方程式は：

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : -3|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 + |w_4|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+, \\ S^1 &: (w_1, \dots, w_4) \rightarrow (e^{-3i\theta} w_1, e^{i\theta} w_2, e^{i\theta} w_3, e^{i\theta} w_4), \quad \theta \in S^1. \end{aligned}$$

\mathbb{P}^2 の射影座標は $[w_2, w_3, w_4]$ で、 $Z = \{w_2 = w_3 = w_4 = 0\}$ です。この多様体の大事な情報はただこのベクターから決まります：

$$l = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

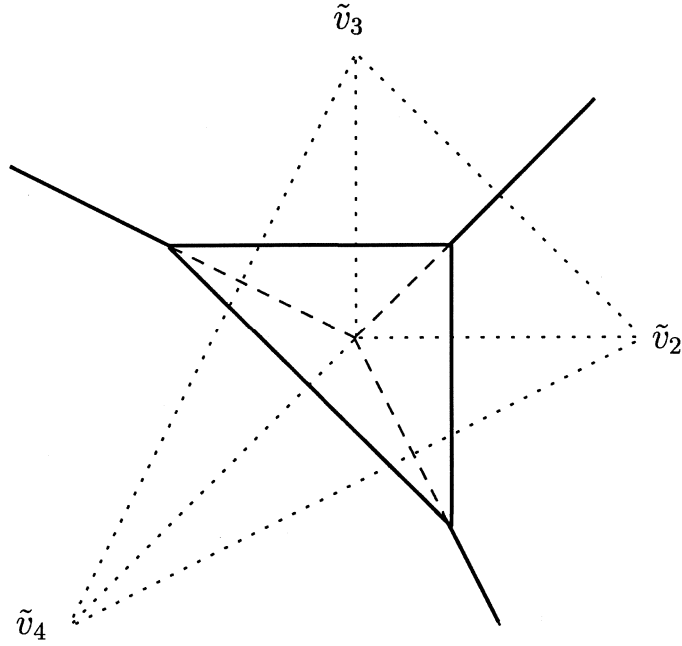


図 1: これは $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ のトーリックグラフです。パラメータ r を変えると太線の三角形の大きさを変えることができます。

後で、この多様体の絵を書きます。まず、局所射影平面の双対頂点を考えてください：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

この双対頂点でさっきのベクターを計算できます： $\sum_i l^i v_i = 0$ より $l = (-3, 1, 1, 1)$ です。

後、局所 \mathbb{P}^2 のグラフを書けます。 $\hat{v}_i = (v_i, 1)$ とします。 v_i を平面に書いて、三角形分割して、双対グラフを書いて、それから局所射影平面のグラフが現れます： r を変えると、三角形のサイズを変えることができます。

1.3 コンパクトな場合

つついては、コンパクトな例です。この例も、トーリック幾何の計算法を使えます。

例 1.2 この頂点を見てください：

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Δ を頂点のポリトープとして、 t_i を複素数、 m_i を整数として、 t^m を以下で定義します。

$$t^m = t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_3^{m_3} t_4^{m_4}. \quad (1.4)$$

これより、方程式 $f(a, t) = \sum_i a_i t^{m_i} = 0$ から F の定義方程式 $F(a, w_0, \dots, w_4) =$

$$w_0 \dots w_4 f(a, t_1 = w_1/w_0, t_2 = w_2/w_0, t_3 = w_3/w_0, t_4 = w_4/w_0), \quad (1.5)$$

を得ます。これより $F = 0$ は一般の五次多項式になります。この多様体はミラー対称性の一番有名な例で、この多様体内の正則有理曲線の数を、ミラー対称性を用いて計算できます。これはコンパクトな三次元カラビ-ヤウ多様体です。

1.4 ミラー多様体

次に、前の例のカラビ-ヤウ多様体のミラー多様体を求める方法を説明します。後でミラー多様体の特徴についてもっと詳しい話をします。今の場合はトーリック幾何を使っているので、簡単にミラー多様体を求めることができます。

例 1.3 局所射影平面のベクターだけですぐにミラー多様体は書けます：

$$Y_1 = \{F_1 = uv + a_0 y_1 + \dots + a_3 y_4 = 0, y_1^{-3} y_2 y_3 y_4 = 1\} / \mathbb{C}^*. \quad (1.6)$$

上式に $(u, v, y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^4$ です。この計算法は Hori-Vafa によるものです。関数 F_1 を少し書き直すと、 $Y_1 = \{uv + \sum_{i=1}^4 y_3^{m_i^1} y_4^{m_i^2} = 0\}$ 、さっきの双対頂点が現れます： $m_i = \tilde{v}_i, i = 1 \dots 4$

後、この超曲面の複素構造モジュライ空間を少し説明します。まず、超曲面の複素構造座標 a_i は冗長です。ここで座標変換 $y_i = a_i^{-1} u_i$ をしてやると、

$$\{uv + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, u_1^{-3} u_2 u_3 u_4 \frac{a_1^3}{a_2 a_3 a_4} = 1\} / \mathbb{C}^* \quad (1.7)$$

になります。これより本物の複素構造座標をみられます：

$$z = \frac{a_2 a_3 a_4}{a_1^3} \quad (1.8)$$

例 1.4 五次超曲面のミラー多様体です。この計算法は Batyrev によるものです。前のポリトープ Δ の頂点にたいして双対ポリトープ $\hat{\Delta}$ を考えます：

$$\hat{\Delta} = \{v \in \mathbb{R}^4 : m \cdot v \geq -1 \forall m \in \Delta\}. \quad (1.9)$$

今の例の場合、 $\hat{\Delta}$ の双対頂点は次のようになります：

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

前と同じ方法で、双対頂点からミラー多様体の方程式を作ることができます：

$$F_2 = a_0 w_0^5 + a_1 w_1^5 + a_2 w_2^5 + a_3 w_3^5 + a_4 w_4^5 + a_5 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 = 0 \quad (1.11)$$

この多様体を五次超曲面のミラー多様体と呼びます。なお、双対頂点の関係式を表すベクターがあります。計算すると、以下の結果になります：

$$l = (-5, 1, 1, 1, 1) \quad (1.12)$$

このベクターだけで全てのミラー対称性における計算を実行できます。

この超曲面の複素構造モジュライ空間は前の例と大体同じです。座標変換すると、 $w_i^5 = a_i^{-1}$ 、複素構造座標は $z^5 = a_1 \dots a_5 / a_0^5$ です。さらに、この方程式には uv 項がありませんから、ゼロでない定数で掛けられます： $F_2 \rightarrow cF_2$ 。この不変性のおかげで周期積分は少し変わります。

後、コンパクトな例とノンコンパクトな例の関係を少し考えましょう。双対頂点の関係式ベクターでミラー対称性計算をほとんどできますが、このベクターだけを見るとコンパクトとノン・コンパクトは同じに見えます。例えば五次超曲面のベクター $(-5, 1, 1, 1, 1)$ しか見ないと、五次超曲面と四次元射影空間上の標準束 $\mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathbb{P}^4$ は同じトーリック・ベクターを持っていますから困りますね。なのでトーリック・ベクターと周期積分の形式を合わせて使わなければ変な結果になります。しかしコンパクトとノンコンパクトな周期積分はあまり違いませんが、このポイントを周期積分について議論する章で考えます。

1.5 ミラー予想

予想 1 X をカラビ-ヤウ三次元多様体と置きまして、 Y を X のミラー多様体と置きましょう。この時、 Y の複素構造のモジュライ空間と X のケーラーモジュライ空間の間に同型対応があります。

この講演では、 B モデルを複素構造のモジュライ空間として、 A モデルをケーラーモジュライ空間と置きましょう。

トーリック多様体の複素構造モジュライ空間は簡単なので、ミラー対称性を用いると Y のトーリック・ベクターだけで前の例の X の正則有理曲線を数えることができます。コンパクトの場合は、 Y の複素構造のモジュライ空間は Y の周期積分から分かりますので、この周期積分を求めるのは重要です。まず、コンパクトな例を考えましょう。

2 五次超曲面のミラー多様体

2.1 コンパクトな周期積分

五次超曲面のミラー多様体の定義方程式は以下で与えられます：

$$Y_2 = \{F_2 = a_0 w_0^5 + a_1 w_1^5 + a_2 w_2^5 + a_3 w_3^5 + a_4 w_4^5 + a_5 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 = 0\} \quad (2.13)$$

Ω_0 を四次元射影空間の標準的な体積形式と置きます。後 $\{\gamma_1(a), \dots, \gamma_n(a)\}$ は Y の 3次元ホモロジーの基底で $T(\gamma_i(a))$ はこれらのホモロジーサイクルを囲むチューブです。これらを用いて周期積分は以下のようにかけます：

$$\Pi_i(a) = \int_{T(\gamma_i(a))} \frac{\Omega_0}{F_2(a, w_0, \dots, w_4)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

特に、 a は Y の複素構造のモジュライ空間の局所座標です。次に、周期積分の計算法を考えましょう。

2.2 GKZ システム

Y の周期積分を直接求めるのは難しいので、直接に計算しないでとりあえず周期積分の満たす微分方程式を探します。つまり、前の周期積分を微分方程式の解として求めます。微分方程式を表す微分オペレーターを探すことは GKZ システムに任せることができます。この多様体のベクター：

$$l = (-5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad (2.15)$$

で、一気にオペレーターを書けます：

$$\partial_{a_0} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} \partial_{a_4} - \partial_{a_5}^5. \quad (2.16)$$

なんと、この微分オペレーターを前の周期積分に作用させると、ゼロになります：

$$\left(\partial_{a_0} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} \partial_{a_4} - \partial_{a_5}^5 \right) \frac{\Omega_0}{F_2(a, w_0, \dots, w_4)} = 0. \quad (2.17)$$

なので、その微分方程式の解は Y の周期積分と対応します。一方、 Y の複素構造モジュライ空間は一次元ですから、今の座標 a_i は多すぎます。運よく、GKZ システムはこの問題を解決することができます。具体的に言うと、座標 a_i から一次元の局所座標を取り出せます。結果として、同じトリークベクターを用いて複素構造のモジュライの座標は：

$$z = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}{a_5^5}, \quad (2.18)$$

で与えられます。この後、問題がまだひとつ残っています。 Y の定義方程式に c を掛けると、多様体は不変で、微分形式は変わらなければいけません。

ここで c はゼロでない複素数とします。なので GKZ オペレーターも変形します：

$$\mathcal{L}_2 a_5^{-1}. \quad (2.19)$$

そしてこのオペレーターを座標変換すると、次のようになります：

$$D'_2 = \theta^5 - z(5\theta + 1)(5\theta + 2)(5\theta + 3)(5\theta + 4)(5\theta + 5), \quad \theta = z \frac{d}{dz} \quad (2.20)$$

実はこのオペレーターに対応する微分方程式の解空間は大きすぎて、余分な解を含んでいるので、これはまだ探してるオペレーターではありません。そこで次のように分解します：

$$D'_2 = \theta(\theta^4 - 5z(5\theta + 1)(5\theta + 2)(5\theta + 3)(5\theta + 4)), \quad (2.21)$$

ここで、余分な θ を左から取り除くと求めるオペレーターが得られます。

$$D_2 = \theta^4 - 5z(5\theta + 1)(5\theta + 2)(5\theta + 3)(5\theta + 4). \quad (2.22)$$

このオペレーターをピカルル・フックスオペレーターと呼びます。解は Y の周期積分です。

2.3 GKZ システムの解

一番最後に、この微分方程式の解を計算しましょう。多様体 Y のトーリック・ベクターを用いると、解の母関数を書くことができます：

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 5n + 5\rho)}{\Gamma(1 + n + \rho)^5} (-z)^{n+\rho}. \quad (2.23)$$

そして方程式の解は

$$y_i := \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \omega_0(z, \rho)|_{\rho=0}, \quad k = 0 \dots 4, \quad (2.24)$$

で与えられます。後で、この解で五次超曲面の正則有理曲線の数を計算します。

3 局所射影平面のミラー多様体の周期積分

3.1 ノン・コンパクトな周期積分

コンパクトの場合ならば周期積分だけを使って複素構造モジュライ空間を知ることができますが、局所カラビ-ヤウ多様体においてはそのような厳密な周期積分の定義はありません。しかし、もし同じように自然な周期積分を形式的に考えると、同様の計算ができます。それで、今の場合の多様体の方程式

$$Y_1 = \{F_1(a, u, v, y_1, y_2) = uv + a_0 + a_1 y_3 + a_2 y_4 + a_3 y_3^{-1} y_4^{-1} = 0\}, \quad (3.25)$$

を用いて、形式的なノン・コンパクトな場合の周期積分を次のように置きます。

$$\Pi_{\Gamma}(a) = \int_{\Gamma(a)} \frac{du dv dy_3 dy_4 / (y_3 y_4)}{uv + a_0 + a_1 y_3 + a_2 y_4 + a_3 y_3^{-1} y_4^{-1}} \quad (3.26)$$

上式において $\Gamma \in H_4(\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 - Y_1, \mathbb{Z})$ です。この方程式の場合は定数倍の不変性の問題はありせんから、そのままの GKZ オペレーターを使います：

$$\mathcal{L}_1 = \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} - \partial_{a_0}^3 \quad (3.27)$$

さらに複素構造座標は：

$$z = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_0^3} \quad (3.28)$$

これよりピカル・フックスオペレーターは次のようになります：

$$\theta^3 - z(-3\theta)(-3\theta - 1)(-3\theta - 2). \quad (3.29)$$

前の例と同じ様に、解の母関数はトーリックベクターで書けます。

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+n+\rho)^3 \Gamma(1-3n-3\rho)} z^{n+\rho} \quad (3.30)$$

そして解空間は $\partial_{\rho}^k \omega_0|_{\rho=0}, k = 0, 1, 2$ で張られます。

4 正則有理曲線

最後に、正則有理曲線の数の計算法を説明します。

4.1 五次超曲面の正則有理曲線のミラー予想からの計算.

この例はミラー対称性の一番有名な例ですが、この講演は概観ですからそんなに詳しくは述べません。まず prepotential という母関数を以下で定義します：

$$\mathcal{F}(t) = \frac{5t^3}{6} + \sum_{d>0} N_d e^{dt} \quad (4.31)$$

この関数はグロモフ・ウィッテン不変量の母関数で、 N_d はグロモフ・ウィッテン不変量です。この不変量は五次超曲面の正則有理曲線の数にあたります。 t は複素数です。それから、五次超曲面のミラー多様体のピカル・フックス方程式の解を書き直すと：

$$\Pi(z) = (y_0, \dots, y_3) \quad (4.32)$$

$$= y_0 \left(1, t, \frac{d\mathcal{F}}{dt}, t \frac{d\mathcal{F}}{dt} - 2\mathcal{F} \right), \quad (4.33)$$

となるというのがミラー予想です。ただし、ここで用いる変数変換の関係式 $t(z) = y_1(z)/y_0(z)$ をミラー写像と呼びます。つまり、五次超曲面のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数がミラー多様体の周期積分を用いて計算できるので、五次超曲面の正則有理曲線の数を数えることができます！ この予想から、prepotential は次のように書けます。

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2y_0}(y_1y_2 - y_3). \quad (4.34)$$

まとめると、ミラー写像 $t(z) = y_1(z)/y_0(z)$ で五次超曲面のミラー多様体の複素構造の情報を五次超曲面の正則有理曲線の情報に変えることができます。これより、これが得られます：

$$\mathcal{F} = \frac{5}{6}t^3 + 2875e^t + \frac{4876875}{8}e^{2t} + \dots \quad (4.35)$$

4.2 局所射影平面の正則有理曲線のミラー予想からの計算

今の場合、このミラー多様体の周期積分を書き直すと以下のようになります。

$$\Pi(z) = (\partial_\rho^0 \omega_0|_{\rho=0}, \partial_\rho^1 \omega_0|_{\rho=0}, \partial_\rho^2 \omega_0|_{\rho=0}) = (1, t(z), W(z)) \quad (4.36)$$

ここで、この場合のミラー写像はピカール・フックスシステムの対数解であることに注意してください。この性質は、全ての局所ミラー対称性において共通の性質となります。この方程式と正則有理曲線の関係は以下のようになります：

$$\Pi(z) = \left(1, t(z), -3\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right), \quad (4.37)$$

ただし、 \mathcal{F} はグロモフ・ウィッテン不変量の母関数です：

$$\mathcal{F} = -\frac{t^3}{18} + 3e^t - \frac{45}{8}e^{2t} + \frac{244}{9}e^{3t} - \dots \quad (4.38)$$

上式の -3 は \mathbb{P}^1 と \mathbb{P}^2 の交点数です。

5 拡張されたピカール・フックスシステム

これから秦泉寺先生との最近の共同研究の話をしていきましょう。

5.1 問題の初め

局所ミラー対称性の計算法は完璧そうに見えますが、もっと詳しく調べると、普通の局所ミラー対称性から prepotential を求められない例も多くあります。

このような例の中で一番簡単なものは $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ という局所カラビ-ヤウ多様体です。 X の定義方程式は

$$\begin{aligned} X &= \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : |w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+ \\ S^1 &: (w_1, \dots, w_4) \rightarrow (e^{i\theta} w_1, e^{i\theta} w_2, e^{-i\theta} w_3, e^{-i\theta} w_4), \quad \theta \in S^1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

です。上式において $Z = \{w_1 = w_2 = 0\}$ です。 X には正則有理曲線はちょうど一つだけですから、この空間のミラー対称性による計算法は簡単にできるはずですが、なのでこの計算を始めましょう。 X のミラー多様体は：

$$Y = \{(u, v, y_3, y_4) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 : uv + 1 + y_3 + y_4 + zy_3y_4 = 0\} \quad (5.40)$$

z は Y の局所複素構造座標です。前の例と同じ様に、周期積分は次で与えられます：

$$\Pi_\Gamma(a) = \int_\Gamma \frac{dudvdy_3dy_4/(y_3y_4)}{uv + a_1 + a_2y_3 + a_3y_4 + a_4y_3y_4}. \quad (5.41)$$

$\Gamma \in H_4(\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 - Y, \mathbb{Z})$ です。これより以下の GKZ オペレーターを得ます：

$$\mathcal{L}\Pi_\Gamma(a) = (\partial_{a_1}\partial_{a_4} - \partial_{a_2}\partial_{a_3})\Pi_\Gamma(a) = 0 \quad (5.42)$$

X のトーリックベクターは $(1, -1, -1, 1)$ 、そして $z = a_1a_4/(a_2a_3)$ は複素構造座標です。 GKZ オペレーターを座標変換すると、ピカルル・フックスオペレーターになります：

$$\mathcal{D} = (1 - z)\theta^2, \quad \theta = z \frac{d}{dz}. \quad (5.43)$$

このオペレーターは問題ですね。 \mathcal{D} の解空間は二次元で、 $\{1, \log(z)\}$ は解の基底です。ところが、普通に正則有理曲線の数を知るために三個以上の解が必要です。さらに、欲しい解の形式はこれです：

$$W(z) = \frac{\log(z)^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}. \quad (5.44)$$

この関数をよく考えると今の問題を解決できます。 \mathcal{D} は W を当てると、 $\mathcal{D}W = 1$ になります。なので次の拡張したオペレーターを見てください：

$$\theta(1 - z)\theta^2, \quad (5.45)$$

このオペレーターの解空間は $\{1, \log(z), W(z)\}$ です。これは求めてた解空間を与え、prepotential の情報を含んでいます。

実は、まだこの後できることが残っています。もう少し拡張したオペレーターを考えましょう：

$$\theta^2(1 - z)\theta^2, \quad (5.46)$$

すると、局所カラビ・ヤウ多様体にもかかわらず、コンパクトカラビ・ヤウ多様体のミラー予想と同じ情報を持つ解空間が現れます：

$$\left(1, \log(z), z \frac{d}{dz} \mathcal{F}, \log(z) \left(z \frac{d}{dz} \mathcal{F} \right) - 2\mathcal{F} \right) \quad (5.47)$$

これより、次がわかります。

$$W(z) = z \frac{d}{dz} \mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}}{dt}. \quad (5.48)$$

この周期積分はコンパクトな場合と同じ形式です！

以上で、このような不完全なミラー対称性しか持たない空間の一番最初の例を解決しました。さて、この問題はどこから来たのかでしょうか？実は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ は四次元のサイクルを持たない事実のせいです。このような場合は、通常のピカル・フックス・システムは対数関数の2次式を含んだ解がありません。ミラー予想においては、対数関数の2次式を含んだ解で正則有理曲線を数えますので、確かにこのような例 ($\dim H_4(X, \mathbb{Z}) = 0$) では全て同じ問題に直面します。

なのに、このような簡単なやり方でこの問題を解決出来るのはびっくりします。ですが一般には、もっと創造的な技を使う必要があります。それで二番目の例を見ましょう。

5.2 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$

次に局所カラビ・ヤウ多様体 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考えましょう。定義方程式は

$$\begin{aligned} X &= \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : -2|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+ \\ S^1 &: (w_1, \dots, w_4) \rightarrow (e^{-2i\theta} w_1, e^{i\theta} w_2, e^{i\theta} w_3, w_4), \quad \theta \in S^1 \end{aligned} \quad (5.49)$$

です。また $Z = \{w_2 = w_3 = 0\}$ です。この多様体の正則有理曲線は自由に動ける方向があるので、いつもの局所ミラー対称性の計算法でグロモフ・ウィッテン不変量の情報を調べることはできません。この多様体のトーリック・ベクターは $(-2, 1, 1, 0)$ です。これよりピカル・フックス微分方程式の解の母関数は

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(1+n+\rho)^2 \Gamma(1-2n-2\rho)} z^{n+\rho} \quad (5.50)$$

となります。但し、今の場合の通常のピカル・フックスオペレータは

$$\theta^2 - z(-2\theta)(-2\theta - 1). \quad (5.51)$$

です。そしてその母関数の二階微分 $y_2 = \partial_\rho^2 \omega_0(z, \rho)|_{\rho=0}$, を形式的に計算してみよう。この関数をミラー予想のあたえる座標変換を用いて書き直すと、グロ

モフ・ウィッテン不変量は0になってしまいます。一方、 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の場合はこの二階のフロベニウス微分から得られる関数は本当のグロモフ・ウィッテン不変量を与えます。なので今の例では $\theta(\theta^2 - z(-2\theta)(-2\theta - 1))$ の微分オペレーターを考えることは意味がありません。

ここで少しずるいことをやります。もう一度 (4.32) を見てください。湯川結合 Y_{ttt} という関数を次で定義します：

$$Y_{ttt} = \frac{d^3 \mathcal{F}}{dt^3}, \quad (5.52)$$

ミラー予想をよく見てやりますと、これより五次超曲面のピカル・フックス・オペレーターは次のように書けることがわかります。

$$D_{quintic}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{Y_{ttt}} \frac{d^2}{dt^2} \quad (5.53)$$

さらに、前に作った、 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の拡張されたピカル・フックスオペレーターは、同じ形式をしています。つまり、 $Y = 1/(1-z)$ とおいてやればはっきり見えます。そこで、ミラー写像 $t = t(z)$ と湯川結合を知ることができれば $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の拡張されたオペレーターを作ることができます。

ミラー写像は t は (5.51) の対数の解で与えられますから、 Y_{ttt} を選ぶとオペレーターを作れます。とりあえず Y_{ttt} を

$$Y_{ttt} = -\frac{11 + e^t}{21 - e^t} \quad (5.54)$$

としましょう。後でこの関数の選び方をもっとちゃんと説明します。(5.53) で与えられた微分オペレーターをミラー写像で座標変換すると、次の拡張されたピカル・フックス・オペレーターになります：

$$D = \theta^4 - z(2\theta + 2)(2\theta + 1)^2\theta + z^2(2\theta + 4)(2\theta + 3)(2\theta + 1)2\theta \quad (5.55)$$

これより微分方程式 $Df = 0$ の解空間は $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の prepotential \mathcal{F} を用いて

$$(1, t, \frac{d\mathcal{F}}{dt}, t \frac{d\mathcal{F}}{dt} - 2\mathcal{F}), \quad (5.56)$$

に一致します。

次に、他の四次元サイクルを持たない局所カラビ-ヤウ多様体を考えましょう。

5.3 フロップについて

この様な計算する前に、もう一つのポイントを説明します。ポイントはフロップという多様体変形です。フロップはトーリック多様体に対応するポリトープに、違う頂点をもつ三角形分割を行う変形です。多様体をフロップす

ると、ホモロジーは変えませんが、トポロジーは変えます。一番普通の例は法束 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ をもつ局所 \mathbb{P}^1 です。この多様体の定義方程式はこれです：

$$\{|w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2 = r\}/S^1. \quad (5.57)$$

この多様体のフロップは上の式において $r \rightarrow -r$ という変換で表されます。違う言い方は、 $l = (1, 1, -1, -1)$ とすると、 $l \rightarrow -l$ と変換するやり方です。つまり、双対頂点の関係式の基底を変形することです。

三角形分割の言葉では、上のフロップは次のように表せます。今の例では双対頂点を考えます。双対頂点はこれですね：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

双対頂点の第三の座標を忘れて、平面上でポリトープを書いてやると、得られるグラフには三角形分割の方法がふたつあります。つまり、この空間の場合はフロップできます。

しかし、 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の例を考えると、この空間はフロップ出来ません。なぜならこの空間の双対頂点は次のようになりますが

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

この頂点のグラフを書くと、フロップできないことがはっきりわかります。違う言い方をすると、この空間のトーリック・ベクター $(-2, 1, 1, 0)$ に -1 を掛けると、射影曲面ではなくなります。

これから扱う例において、このフロップの情報をよく使います。

5.4 四次元サイクルを持たない局所カラビ-ヤウ多様体のミラー対称性

続いて前の例の拡張されたオペレーターの計算法の一般化を始めます。まずはもう一度前の例を見てください。拡張されたオペレーターは湯川結合とミラー写像だけから求められます。ミラー写像はいつも普通のピカール・フックス微分方程式の対数解で、これはいつの場合も求まります。しかも、ミラー予想以外の考察を用いた物理論文から湯川結合の正則有理曲線から来るグロモフ・ウィッテン不変量を知ることができます。なので湯川結合の定数部分を調べましょう。

また $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考えてください。この場合の拡張されたオペレーター $\theta^2(1-z)\theta^2$ はこの湯川結合から計算しました：

$$Y_{sss}(s) = 1 + \frac{e^s}{1 - e^s}. \quad (5.60)$$

1 は $(1-z)\theta^2$ による自然な選び方です。この定数部分を任意にとると：

$$Y_{sss}(s) = K + \frac{e^s}{1-e^s}. \quad (5.61)$$

となるのですが、ここで $s \rightarrow -s$ の座標変換しましょう。すると次のようになります：

$$Y_{sss}(s) + Y_{sss}(-s) = 2K - 1. \quad (5.62)$$

なので $K = 1/2$ とするとこの変換のもとで（符号を除いて）不変になります。この湯川結合を使うと、

$$D = \theta^2 \left(\frac{2(1-z)}{1+z} \right) \theta^2. \quad (5.63)$$

実は、今の場合は定数項を勝手に選べるのですが、 $K = 1/2$ という選び方が一般化の際に一番自然であることを後で説明します。

次に、 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の湯川結合の定数を説明します。前の選び方は次のようなものでした：

$$Y_{ttt}(t) = -\frac{1+e^t}{2(1-e^t)} = -\frac{1}{2} - \frac{e^t}{2(1-e^t)}; \quad (5.64)$$

この例のミラー写像は以下で与えられます：

$$t(z) = \log(z) + \sum_{n>0} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} z^n. \quad (5.65)$$

ここでミラー写像で、 $Y_{ttt}(t)$ を座標変換してやります。 $Y_{ttt}(t)$ が三階テンソルであることを忘れないでください：

$$Y_{zzz}(z) = -\left(z \frac{dt}{dz} \right)^3 \frac{1+e^t}{2(1-e^t)} = -\frac{1}{2(1-4z)^2}. \quad (5.66)$$

このように、結果は z の有理関数となります。上の定数項の $-1/2$ を変えると、 Y_{zzz} は有理関数ではなくなります。そこでこの選び方をしました。

拡張されたピカル・フックス・オペレーターの計算法を一般化する前に、上の定数項の選び方を一般化します。分かりやすいように、例で説明します。下のトーリック・ベクターで定義した X (5.67) を考えてください。トーリック・グラフは 2 です。

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

トーリック・グラフを見ると、正則有理曲線が現れます： $[C_s], [C_t] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ で、法束は $\mathcal{N}_{C_s/X} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{N}_{C_t/X} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$ です。他の正則有理曲線は $[C_{s+t}]$ 、そして法束は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ です。トーリック・ベクターだけでこの曲線の法束が見えます：

$$l^1 + l^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

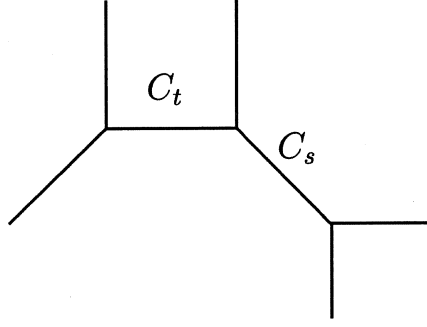


図 2: X のトーリックグラフです。

X の湯川結合を定義します。その後で湯川結合で拡張されたピカール・フックスシステムの計算法を説明します。ミラー予想以外の考察をした物理論文から湯川結合のグロモフ・ウィッテン不変量に関する部分は

$$\begin{aligned} Y_{sss}^c &= \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, & Y_{ttt}^c &= -\frac{e^t}{1-e^t} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \\ Y_{sst}^c &= Y_{stt}^c = \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

となることがわかります。この関数をよく見ると、それぞれの項は上の例と似ています。例えば $e^{s+t}/(1-e^{s+t})$ は $\mathcal{O}(-1) \oplus (-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ と同じ湯川結合です。これより定数項を求めるには、各曲線 C_s, C_t, C_{s+t} に対して対応する法束を考え、前の例で求めた定数項 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ を足してやればよいのです。そうすると、今の例の場合は次のようになります：

$$Y_{sss} = \frac{1}{2} + \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{1}{2} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}} = 1 + \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}. \quad (5.70)$$

同様に以下を得ます：

$$Y_{ttt} = -\frac{e^t}{1-e^t} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \quad Y_{sst} = Y_{stt} = \frac{1}{2} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}. \quad (5.71)$$

この定数部分の選び方はもっと理論的な証拠があります。 X のトーリック・ベクターをフロップします：

$$\begin{pmatrix} l^1 + l^2 \\ -l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

すると、 X から、別の 3 次元ノン・コンパクトカラビ-ヤウ多様体 X^{flop} が得られます。グラフは 3 で書いています。先ほどと同じ方法で、 X^{flop} の湯川結合の定数項を書けます。一方、 X の湯川結合にフロップに対応する座標変換してやりますと、 X の湯川結合の定数項は X^{flop} の湯川結合の定数項に変わります。なのでこの定数項の選び方はフロップの観点から自然な選び方であることがわかります。

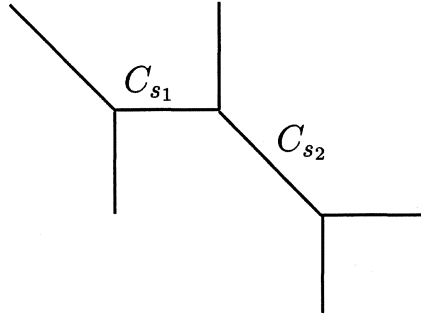


図 3: フロップされた X のグラフです。

この時点で、 X の拡張されたピカル・フックス・システムを作るための材料が全部揃いました。まず、 X の通常のピカル・フックス・システムは以下で与えられます:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1(\theta_1 - \theta_2) - z_1(-2\theta_1 + \theta_2)(-2\theta_1 + \theta_2 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= (2\theta_1 - \theta_2)\theta_2 - z_2(\theta_1 - \theta_2)\theta_2, \\ \mathcal{D}_3 &= \theta_1\theta_2 - z_1z_2(2\theta_1 - \theta_2)\theta_2. \end{aligned} \quad (5.73)$$

次に、上の湯川結合から A モデルの拡張されているピカル・フックス微分方程式を作る方法を説明します。それからミラー写像で A モデル微分方程式から B モデルに座標変換します。座標変換の目的は複素構造モジュライ空間だけでミラー対称性を理解することです。

ψ を s, t の関数とします。後 $\partial_1 = \partial_t, \partial_2 = \partial_s$ として、 $Y_{112} = Y_{sst}$ とします。ここで、以下の微分方程式のシステムを考えましょう:

$$\partial_a \psi = \psi_a^{(2)}, \quad (5.74)$$

$$\partial_a \psi_b^{(2)} = \sum_c Y_{abc} \psi_c^{(4)}, \quad (5.75)$$

$$\partial_a \psi_b^{(4)} = \delta_{ab} \psi^{(6)}, \quad (5.76)$$

$$\partial_a \psi^{(6)} = 0. \quad (5.77)$$

この微分方程式を $\psi_c^{(4)}$ について解きましょう。ここで Y_a^{bc} を湯川結合 Y_{abc} の逆マトリックスを

$$Y_{abc} Y_a^{cd} = \delta_b^d \quad (5.78)$$

と置くと、次の方程式になります:

$$\psi_c^{(4)} = \sum_b Y_a^{bc} \partial_a \partial_b \psi. \quad (5.79)$$

$\psi_c^{(4)}$ の解は一通りに決まるはずですから、上の方程式の右辺の方は a によりません。これより次の可積分条件を得ます:

$$\sum_b Y_1^{bc} \partial_1 \partial_b \psi = \sum_b Y_2^{bc} \partial_2 \partial_b \psi. \quad (5.80)$$

同じ様に、もう1つの可積分条件が (5.76) から得られます：

$$\partial_2 \sum_b Y_1^{b,1} \partial_1 \partial_b = \partial_1 \sum_b Y_2^{b,2} \partial_2 \partial_b = 0. \quad (5.81)$$

最後に、ミラー写像で B モデルに座標変換すると、 X の拡張されたピカル・フックス・システムが得られます：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_1 &= (1 + z_2 + z_1 z_2^2) \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + z_2 \mathcal{D}_3, \\ \tilde{\mathcal{D}}_2 &= \theta_2 \mathcal{D}_1. \end{aligned} \quad (5.82)$$

直接計算すると、このシステム $\{\tilde{\mathcal{D}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_2\}$ の解空間は次のようになります：

$$\left(1, s, t, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, s \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} + t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} - 2\mathcal{F}\right) \quad (5.83)$$

但し、上式において

$$\mathcal{F} = \frac{s^3}{6} + \frac{s^2 t}{12} + \frac{st^2}{12} + \sum_{n>0} \frac{e^{ns} + e^{n(s+t)} - e^{nt}}{n^3}. \quad (5.84)$$

としました。この解空間はちょうどいいですね。

このようにして拡張されたシステムを作ったわけですが、残っている疑問はあります。 A モデルのグロモフ・ウィッテン不変量の情報で拡張されたピカル・フックスシステムを求めましたから新しい正則有理曲線の情報は入れてません。このポイントを説明します。拡張されたシステムの計算法の目的は正則有理曲線を数える問題をミラー予想の範囲内で処理することです。この目的のためには、通常の局所ミラー対称性のピカル・フックス・システムでは不十分です。そこで面倒な例の場合にピカル・フックスシステムを計算しました。ここで扱った面倒な例は四次元サイクルを持たない局所カラビ-ヤウ多様体です。局所ミラー対称性の最終的な形式はこのような拡張されたピカル・フックスシステムを含むべきだと思います。でもまだ上の計算法はミラー予想以外の方法によっていますから、もっと一般的な方法を望んでいます。

なお、湯川結合の定数項の予想は面白い発見だと思います。なぜなら前の物理学者の計算に (Gopakumar-Vafa) 違う双対性で同様な定数項が現れまして、上の湯川結合の定数項はその例の一般化にあたります。

5.5 他の拡張されたシステム

次に、同様な拡張されたシステムの計算法で標準束 K_S の例を調べます。 S はトーリック二次元複素多様体です。簡単に説明する為に、 K_{F_2} の例だけ使います。この局所多様体の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

K_S の場合に、拡張されたピカル・フックス・システムの作り方は簡素化します。なぜなら、四次元サイクルを持たない例、特に $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ は、普通のピカル・フックス微分方程式で動ける正則有理曲線を数えられません。なので正則有理曲線を数えるために普通のピカル・フックス・オペレーターに自明でない z_i の関数を掛ける必要がありました。

一方、 K_S の標準束は正則切断がないので、 $f: C \rightarrow S$ は S から動けません。なので、通常のピカル・フックス・微分方程式から正則有理曲線の数を知ることができるはずで、そこで自然なピカル・フックス・オペレーターの左からただ θ_i の線形和を掛けてやるだけで拡張されたシステムになることが期待できます。つまり、自明でない z_i の関数を使わなくていいという事です。そこで、実際にいくつか例を調べてやりますとこの考え方は正しいことがわかります。

K_{F_2} の通常のピカル・フックス・システムは以下で与えられます：

$$D_1 = \theta_1(\theta_1 - 2\theta_2) - z_1(2\theta_1)(2\theta_1 + 1) \quad (5.86)$$

$$D_2 = \theta_2^2 - z_2(\theta_1 - 2\theta_2)(\theta_1 - 2\theta_2 - 1). \quad (5.87)$$

\mathcal{F} をこの例の prepotential として、 ω を D_1, D_2 の表す微分方程式の解の母関数としましょう：

$$\omega(z, \rho) = \sum_{n \geq 0} c(n, \rho) z_1^{n_1 + \rho_1} z_2^{n_2 + \rho_2} \quad (5.88)$$

上式において、

$$c(n, \rho)^{-1} = \Gamma(1 - 2n_1 - 2\rho_1)\Gamma(1 + n_1 + \rho_1) \quad (5.89)$$

$$\times \Gamma(1 + n_1 + \rho_1 - 2n_2 - 2\rho_2)\Gamma(1 + n_1 + \rho_1)^2. \quad (5.90)$$

です。また $\Pi_{ij} = \partial_{\rho_1}^i \partial_{\rho_2}^j \omega|_{\rho=0}$ と定義します。ミラー写像 t_1, t_2 は上の微分方程式の対数解です。これより上の微分方程式の解空間は

$$\left(1, t_1, t_2, -2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1}\right). \quad (5.91)$$

となります。一方、 Π_{20}, Π_{11} と prepotential の関係は：

$$\begin{pmatrix} \Pi_{20} \\ \Pi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\partial \mathcal{F} / \partial t_2 \\ 2\partial \mathcal{F} / \partial t_1 - 4\partial \mathcal{F} / \partial t_2 \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

となります。これより、計算は自然に進みます。 Π_{20}, Π_{11} という二つの関数は次の拡張されたピカル・フックスシステムの解です：

$$\{\theta_1 D_1, D_2\}.$$

それからこの拡張されたシステムを使うと、拡張されたシステムの解だけで K_{F_2} の prepotential を計算できます。さらに、拡張されたシステムから出

発して、湯川結合を計算できます。このような計算は後で詳しい話をします。
計算の結果は:

$$Y_{111} = \frac{-1}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2}, \quad Y_{112} = \frac{2z_1 - \frac{1}{2}}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2},$$

$$Y_{122} = \frac{-z_2(8z_1 - 1)}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2)(1-4z_2)}, \quad Y_{222} = \frac{-z_2(24z_1z_2 + 2z_1 - 2z_2 - \frac{1}{2})}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2)(1-4z_2)^2}.$$

となります。

6 コンパクト化と局所四次元カラビ-ヤウ多様体

6.1 何で四次元カラビ-ヤウ多様体？

上の計算で、局所ミラー対称性の計算の問題は少し分かるようになりました。四次元サイクルを持たない局所カラビ-ヤウ多様体の微分方程式はいつも不十分です。なぜなら微分方程式の二重対数解でグロモフ・ウィッテン不変量を数えますが、このような多様体のミラー多様体のピカル・フックス微分方程式は二重対数解がありません。もっと一般に、 $b_2(X) \neq b_4(X)$ のような X ならば、 X の prepotential を完全に計算できません。

例えば、 K_{dP_2} の例を考えましょう。ここで、 dP_2 とは、2次元複素射影平面の異なる2点をブローアップして得られる多様体です。この多様体の定義ベクターは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

です。ベッチ数は $b_2(dP_2) = 3$, $b_4(dP_2) = 1$ です。 \mathcal{F} を K_{dP_2} のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数とします。それから K_{dP_2} のミラー多様体の周期ベクターは

$$\left(1, t_1, t_2, t_3, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_3}\right) \quad (6.94)$$

です。物理学者の考え方は t_i は K_{dP_2} の二次元サイクルの体積と解釈し、二重対数解は四次元サイクルの体積と解釈します。今の場合、四次元サイクルの数が1個なので二重対数解も1個となり、prepotential の微分 $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_i}$ を個別に得ることができません。そこで prepotential の微分を積分するために、 $b_2 = b_4$ が必要条件となります。この様な第二の簡単な例は次のような定義ベクターから得られるノン・コンパクトカラビ-ヤウ多様体です:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

この多様体のミラー多様体の周期積分は

$$\left(1, s_1, s_2, -3 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}\right) \quad (6.96)$$

です。それで、この周期積分だけを使うとグロモフ・ウィッテン不変量の母関数を計算できます。

この様に考えると、次のやり方が現れます。もし四次元サイクルが足りない多様体に新しい四次元サイクルを入れて、得られた多様体を調べると新しいグロモフ・ウィッテン不変量の情報があるはずで、それから極限をとって、元の多様体の情報を求められます。更なる証拠として、物理の論文にノンコンパクトな四次元サイクルをうまく有限体積に制限するとグロモフ・ウィッテン不変量の情報がわかると書いています。ここで行う計算は、ノンコンパクトな四次元サイクルをコンパクト化することによって有限体積に制限するという発想に基づいています。

そこで、これから色々な例を取り扱って行きましょう。

6.2 もう一度、局所 \mathbb{P}^1

局所 \mathbb{P}^1 に四次元サイクルを入れるやり方は射影コンパクト化をして、それから射影コンパクト化の標準束を取ります。ここで取り上げる例は、 \mathbb{P}^1 上の二次元複素ベクトル束 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ と $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$ です。上のコンパクト化で作った四次元カラビ-ヤウ多様体から自然に局所 \mathbb{P}^1 のグロモフ・ウィッテン不変量が読み取れます。

例 6.5 まず、なぜこの様な四次元カラビ-ヤウ多様体からもともとのノン・コンパクトカラビ-ヤウ多様体のグロモフ・ウィッテン不変量が得られるかについてもっと詳しい話しをします。 $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ のトーリック・ベクターは $(1, 1, -1, -1)$ です。ここで X にノンコンパクトな四次元多様体 $K_{\overline{X}}$ を割り当てます：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.97)$$

この複素四次元多様体のグラフは (4) です。グラフをよく見ると、この複素四次元多様体の計算の長所が見えます。 $K_{\overline{X}}$ で X のノンコンパクトな実四次元サイクルは有限体積になりました。 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ については、このコンパクトなサイクルの体積から局所 \mathbb{P}^1 のグロモフ・ウィッテン情報を得られます。なので $K_{\overline{X}}$ のミラー多様体の周期積分を調べて、それから周期積分の極限をとって、 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ のグロモフ・ウィッテン母関数を求められます。

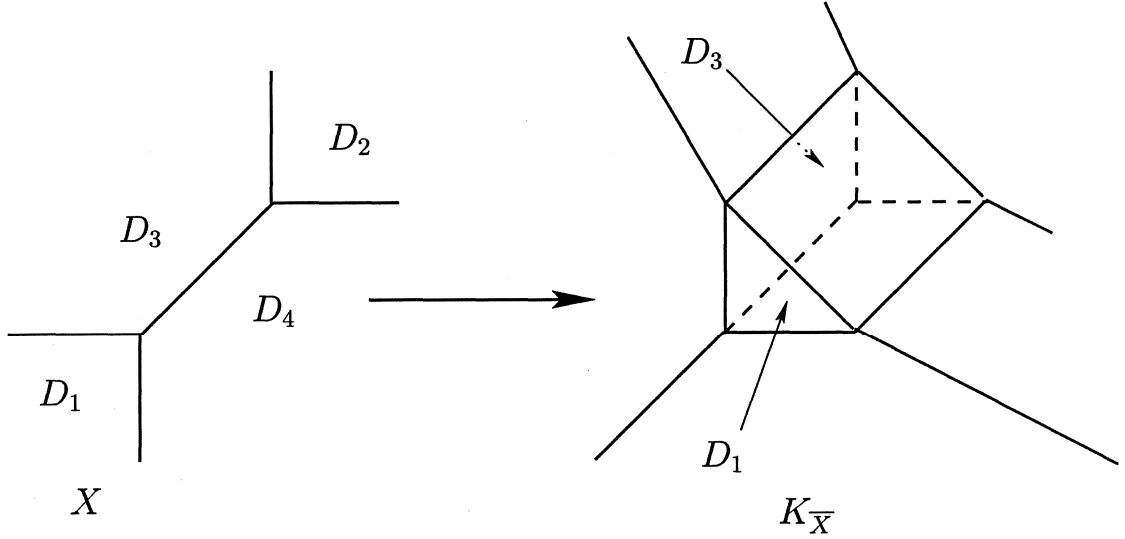


図 4: 射影コンパクト化法. $K_{\bar{X}}$ の図の外側の線は、標準束の方向を表します。

後、もう一つ注意があります。 $K_{\bar{X}}$ のミラー多様体の周期積分はピカール・フックス微分方程式の解ではありません。その微分方程式の解を対数微分すると、周期積分になります。

それでは今の例の四次元多様体の周期積分を計算しましょう。

Y を $K_{\bar{X}}$ のミラー多様体とします。これより Y はカラビ-ヤウ四次元多様体です。 Y の定義方程式は

$$Y = \{uv + 1 + y_2 + z_1 y_2^{-1} y_4 y_5 + y_4 + y_5 + z_2 y_4^{-1} y_5^{-1} = 0\} \quad (6.98)$$

上式で $u, v \in \mathbb{C}$ 、そして $y_i \in \mathbb{C}^*$ です。 Y のピカール・フックス・システムは

$$\begin{aligned} D_1 &= \theta_1^2 - z_1(-\theta_1 + \theta_2)(-\theta_1 + \theta_2) \\ D_2 &= \theta_2(\theta_2 - \theta_1)^2 - z_2(-3\theta_2)(-3\theta_2 - 1)(-3\theta_2 - 2). \end{aligned} \quad (6.99)$$

Y のポアンカレ多項式は

$$\frac{(1-t^2)(1-t^3)}{(1-t)^2} = t^3 + 2t^2 + 2t + 1 \quad (6.100)$$

そして、これでちょうどいい偶数次元サイクル数があります。(4) ですから、 $K_{\bar{X}}$ の二次元(四次元)サイクルを表すピカール・フックス微分方程式の対数解 t_1, t_2 (二重対数解 Π_{12}, Π_{22}) が得られます。二重対数解の対数項を無視すると、次の極限を取れます：

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \Pi_{22} = \sum_{n>0} \frac{e^{nt_1}}{n^2}. \quad (6.101)$$

これで局所 \mathbb{P}^1 のグロモフ・ウィッテン不変量を見られます。しかし、この方法は的確ではありません。まずは、実は対数項はこの極限で発散します。

つぎに、ゼロでない定数をこの解に掛ける可能性もあります。つまり、二重対数解を使うと詳しい情報は見えません。運よく、もっとしっかりした計算法があります。この方法は次の話の中心で、大切なものは四点関数です。

ここで、拡張された微分システム $\{D_1, \theta_2 D_2\}$ を考えてください。このシステムのポアンカレ多項式を見てやると、このシステムの解はコンパクトな四次元多様体の周期積分を表すことがわかります。なので、 M をカラビ-ヤウ四次元多様体として、 M の周期積分は拡張されているシステムの解と同じと解釈します。これより次の定義をします。

$$\begin{aligned} Y_{(k)}^{mn} &= \int_M \Omega \wedge \nabla_{\delta_{z_1}}^m \nabla_{\delta_{z_2}}^n \Omega, \quad m+n=k, \quad k \in \{4, 5\}, \quad (6.102) \\ Y_{(k)}^{mn} &= 0, \quad k \leq 3 \end{aligned}$$

上式で Ω は M の正則形式として、 ∇ を M の複素構造モジュライ空間の連結とします。後、上式で第二の方程式はグリフィス横断性という性質にあたります。それからこの拡張されているシステムから $Y_{(4)}^{mn}$ の関係式を導き出せます。例えば、ピカルル・フックス微分方程式より、次の方程式が成り立ちますから、

$$\begin{aligned} \theta_1 \theta_1 D_1 \Omega &= 0 \\ \theta_2 \theta_2 D_1 \Omega &= 0 \\ \theta_1 \theta_2 D_1 \Omega &= 0 \\ \theta_2 D_2 \Omega &= 0 \end{aligned} \quad (6.103)$$

以下の関係式が得られます：

$$\begin{aligned} (-Y_{(4)}^{40} + 2Y_{(4)}^{31} - Y_{(4)}^{22})z_1 + Y_{(4)}^{40} &= 0 \\ (-Y_{(4)}^{22} + 2Y_{(4)}^{13} - Y_{(4)}^{04})z_1 + Y_{(4)}^{22} &= 0 \\ (-Y_{(4)}^{31} + 2 - Y_{(4)}^{22} - Y_{(4)}^{13})z_1 + Y_{(4)}^{13} &= 0 \\ 27Y_{(4)}^{04}z_2 + Y_{(4)}^{22} - 2Y_{(4)}^{13} + Y_{(4)}^{04} &= 0. \end{aligned} \quad (6.104)$$

このシステムの全部の関係式を使うと $Y_{(4)}^{mn}$ は全て $Y_{(4)}^{04}(=: S)$ を用いて書けます。それからまた拡張されたシステムを使います。今度はもう一つ θ_F を掛けてやると、 S の微分方程式を導けます。この微分方程式を解くと、 $Y_{(4)}^{mn}$ は決まります。

具体的にいうと、 $Y_{(4)}^{mn}$ の上の定義から導き出せる次の関係式を使うのです：

$$Y_{(5)}^{mn} = \frac{1}{2}(m\theta_1 Y_{(4)}^{m-1, n} + n\theta_2 Y_{(4)}^{m, n-1}). \quad (6.105)$$

ここで $\Delta_f = 1 - 54z_2 - 54z_1 z_2 + 729z_2^2 - 1458z_1 z_2^2 + 729z_1^2 z_2^2$ とします。

上の計算法を使うと、以下の結果になります：

$$Y_{(4)}^{04} = \frac{1}{\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{13} = \frac{1 - 27z_1 + 27z_1z_2}{2\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{22} = \frac{27z_1z_2}{\Delta_f}, \quad (6.106)$$

$$Y_{(4)}^{31} = \frac{z_1(-1 + 27z_2 + 81z_1z_2)}{2(z_1 - 1)\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{40} = \frac{z_1^2(-1 + 54z_2 + 54z_1z_2)}{(z_1 - 1)^2\Delta_f}.$$

この形式では、四点関数の意味はよく分かりませんが、ミラー写像で座標変換した後（また、四階テンソルのことを忘れないで下さい）、三次元の極限を取ってやりますと、以下の簡単な関数になります：

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{31} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} e^{nt_1}. \quad (6.107)$$

$C_{(4)}^{mn}$ は A モデルの四点関数で、 t_1, t_2 ピカール・フックス・システムの対数解です。今の場合求めた結果は、定数 $1/2$ が掛かっています。この計算法は二重対数関数を調べるのに比べると、自然な計算であると言えます。特に、この関数には定数項はありません。

例 6.6 次に $X' = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の例で同様な計算法をします。上の例と少ししか違いませんから詳しい説明はしません。

それでは、計算を始めましょう。用いる四次元カラビ-ヤウ多様体 $K_{X'}$ の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.108)$$

です。そして $K_{X'}$ のミラー多様体は

$$Y = \{uv + 1 + z_2y_5^{-1}y_6^{-1} + z_1z_2^2y_4^{-1}y_5^{-2}y_6^{-2} + y_4 + y_5 + y_6 = 0\} \quad (6.109)$$

で、 Y のピカール・フックスシステムはこれです：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1^2 - z_1(-2\theta_1 + \theta_2)(-2\theta_1 + \theta_2 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= (\theta_2 - 2\theta_1)\theta_2^2 - z_2(-3\theta_2)(-3\theta_2 - 1)(-3\theta_2 - 2). \end{aligned} \quad (6.110)$$

このシステムの表す微分方程式の解空間は六次元です。

前と同じ様に、拡張されたシステム $\{\mathcal{D}_1, \theta_2 \mathcal{D}_2\}$ で、四点関数を求めることができます。 A モデルの四点関数の結果は次のようになります：

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{31} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} e^{nt_1}. \quad (6.111)$$

また、前と同様に、定数 $1/2$ が湯川結合に掛かっています。

6.3 曲面上の標準束

続いて、四次元多様体の計算法の力をもっと使って、局所 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の全ての湯川結合を求めます。5章の拡張されたピカール・フックス微分方程式で湯川結合を求められますが、そうすると、例により定数項の選び方が違います。つまり、5章の拡張されたシステムはどこでも使える理論としては少々不満が残ります。一方、四次元多様体の方法はより一般性があります。さらに、曲面上の標準束の例の場合はいつもこの計算法が有効です。

例 6.7 局所 $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の標準束を考えましょう。 $X = K_{F_0}$ の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.112)$$

です。これより \bar{X} を X の射影コンパクト化として、 $K_{\bar{X}}$ の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.113)$$

Y を $K_{\bar{X}}$ のミラーカラビ-ヤウ多様体とします。 Y の定義方程式はこれです：

$$\{uv + 1 + z_2 y_5^{-1} y_6^{-1} + z_1 z_2^2 y_4^{-1} y_5^{-2} y_6^{-2} + y_4 + y_5 + y_6 = 0\}. \quad (6.114)$$

上式で $(u, v, y_4, y_5, y_6) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^3$ で、 Y は局所四次元カラビ-ヤウ多様体です。いつもと同じ様に、 Y の周期積分の微分システムは：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1^2 - z_1(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= \theta_2^2 - z_2(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 1), \\ \mathcal{D}_3 &= \theta_3(\theta_3 - 2\theta_1 - 2\theta_2) - z_3(-2\theta_3)(-2\theta_3 - 1). \end{aligned} \quad (6.115)$$

t_1, t_2, t_3 をこのシステムの表す微分方程式の対数解としましょう。前の例と同じ様に、拡張されたピカール・フックス・システム $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \theta_3 \mathcal{D}_3\}$ を考えましょう。割り当てる四次元多様体はいつも同じ拡張されたシステムを使います；つまり、ファイバーのコホモロジー類の関係式に対応するオペレーター \mathcal{D}_F を次のオペレーターに変えます： $\theta_F \mathcal{D}_F$ 。また、 M を拡張されたシステムの解と同じ周期積分のコンパクトな四次元多様体としましょう。四点関数の方程式は

$$\begin{aligned} Y_{(k)}^{mnp} &= \int_M \Omega \wedge \nabla_{\delta_{z_1}}^m \nabla_{\delta_{z_2}}^n \nabla_{\delta_{z_3}}^p \Omega, \quad m + n + p = k, \quad k \in \{4, 5\}, \\ Y_{(k)}^{mnp} &= 0, \quad k \leq 3. \end{aligned} \quad (6.116)$$

です。前の例と同じ様に Y の全ての B モデルの四点関数を求めて、微分方程式の対数解で A モデルの四点関数に座標変換します。また、ここで四点関数の四階テンソル特性を使っています。一番最後に A モデル四点関数の極限を取ります。そうすると、この結果になります（他の四点関数は対称性で計算できます）：

$$\begin{aligned}\lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{301} &= \frac{1}{8}(-2q_1 - 4q_1q_2 - 2q_1^2 - 48q_1^2q_2 - 6q_1q_2^2 - 2q_1^3 - \dots), \\ \lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{211} &= \frac{1}{8}(-4q_1q_2 - 24q_1^2q_2 - 12q_1q_2^2 - \dots),\end{aligned}\quad (6.117)$$

上式で $q_i = e^{t_i}$ としました。この方程式の表すグロモフ・ウィッテン情報は正しく求まっています。つまり、 \mathcal{F} を K_{F_0} のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数とすると、次のようになります： $\partial^3 \mathcal{F} / \partial t_1^3 = \lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{301}$ 。しかし上の掛かっている定数 $\frac{1}{8}$ は気になります。とりあえずこの定数の意味はよく分かりません。

7 標準束でない例

上の様な計算で、 X の射影コンパクト化上の標準束 $K_{\bar{X}}$ で簡単に X のグロモフ・ウィッテン不変量が計算できます。しかし、もし X を $b_4 = 0, \dim H_4(X, \mathbb{Z}) > 1$ とする、この計算法は効かないようです。なぜなら X のノンコンパクトな divisor が多すぎるので、射影コンパクト化のグロモフ・ウィッテン不変量を探すのは面倒になるからです。とくに、 $b_4 = 0, \dim H_4(X, \mathbb{Z}) > 1$ のノンコンパクトな divisor は 3 個以上ですから違う方法を探す必要があります。

この様な問題を考えながら、新しい技を求めましょう。なんと、簡単なやりかたで色々な標準束でない例を解決できます。実は、このような例に実四次元サイクルを前章とは違うやり方で加えると、標準束でない例を標準束の例に変えることができます。それから標準束の場合の計算をして、答えを元の例に変数変換してやると、うまく行きます。

一番最初に、簡単な例を計算しましょう。この例でこの様な計算法の様子がわかります。

7.1 A first example

例 7.8 また、 $X_1 = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考えましょう。違う計算法でこの例の湯川結合を求められますが、今のやり方はもっと複雑な例の練習です。

まずは、この例のピカル・フックス・システムの問題を思い出してください。この多様体は四次元サイクルがありませんから、普通の局所ミラー対

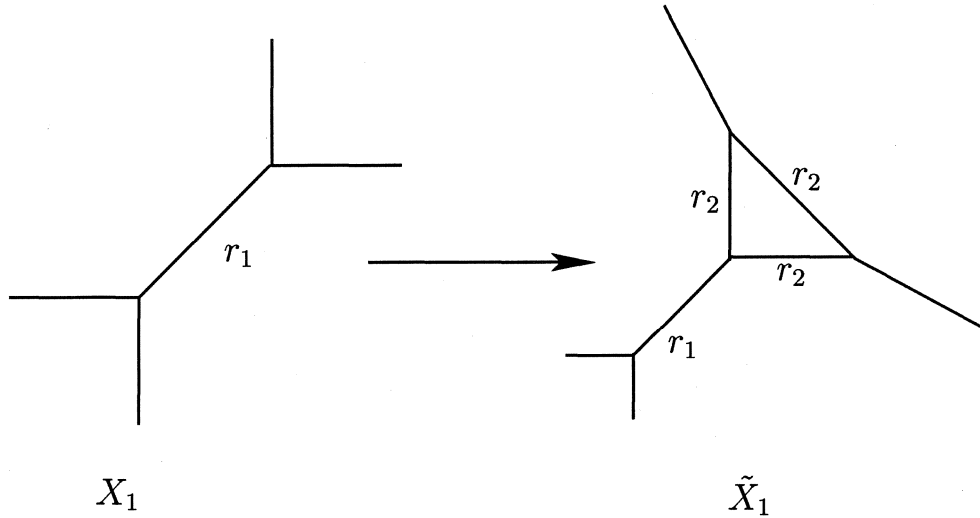


図 5: 4次元サイクルを $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ に加える場合のトーリックグラフです。

称性の計算は不十分です。なのでグロモフ・ウィッテン不変量を数えることができません。

しかし次の様に考えると、問題の解が得られます。この多様体に一番簡単に加えられる4次元サイクルは何でしょうか？この多様体を \tilde{X}_1 と呼びます。5でトーリック・グラフを書いています。 X_1 の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.118)$$

です。 X_1 はちょうど一つ新しい4次元サイクルを含んでいます。

次に、標準束の例に変換します。今の場合はずぐにできます。次のように \tilde{X}_1 を K_{F_1} にフロップしてやります：

$$\begin{pmatrix} -l^1 \\ l^1 + l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.119)$$

つまり、 $\tilde{X}_1^{flop} \cong K_{F_1}$ 。

これより、前の標準束の計算法を実行します。 $K_{\bar{K}_{F_1}}$ を K_{F_1} に対する四次元カラビ-ヤウ多様体とします。 $K_{\bar{K}_{F_1}}$ の定義トーリック・ベクターは

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.120)$$

K_{F_0} の例と同じ様に、 $K_{\bar{K}_{F_1}}$ の拡張されたピカル・フックス・オペレーターで B モデル四点関数 $Y_{(4)}^{mnp}(z_1, z_2, z_3)$ を求められます。上で (z_1, z_2, z_3) は $K_{\bar{K}_{F_1}}$ の複素構造のモジュライ空間の局所座標です。

次に、 B モデル四点関数にフロップに対応する座標変換をしてやりましょう。この座標変換は以下で定義されます：

$$z_1 = w_1^{-1}, z_2 = w_1 w_2, z_3 = w_3. \quad (7.121)$$

もちろん、また $Y_{(4)}^{mnp}(z_1, z_2, z_3)$ は四階テンソルです。これより $\tilde{Y}_{(4)}^{mnp}(w_1, w_2, w_3)$ 、つまり \tilde{X}_1 に対応する四次元多様体の四点関数が得られます。 $t_1(w), t_2(w), t_3(w)$ を \tilde{X}_1 のミラー多様体のミラー写像としましょう。

後、上のミラー写像の逆写像 $w(t)$ で $\tilde{Y}_{(4)}^{mnp}(w_1, w_2, w_3)$ を A モデルの四点関数に座標変換します。結果を $\tilde{C}_{(4)}^{mnp}$ と呼びます。そしてついに、 X_1 の湯川結合 C_{X_1} を $t_2, t_3 \rightarrow -\infty$ の極限を取ることで得ます。この極限はまず $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \tilde{X}_1$ の体積を無限大にとり、それから $(\bar{K}_{F_1})^{flop}$ の \mathbb{P}^1 ファイバーの体積を無限大にする極限をとる操作に対応します。結果は以下のようになります：

$$C_{X_1} = \lim_{t_2, t_3 \rightarrow -\infty} \tilde{C}_{(4)}^{301} = -\frac{1}{8} \frac{e^{t_1}}{1 - e^{t_1}}. \quad (7.122)$$

t_1 は $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow X_1$ の体積です。もちろん、これは X_1 の正しいグロモフ・ウィッテン不変量の母関数（定数倍を除いて）です。

Toric Mirror Symmetry

Abstract

This is a review focused on mirror symmetry for noncompact toric varieties. We first describe the connection between mirror symmetry and period integrals, using the quintic and the canonical bundle over \mathbb{P}^2 to illustrate the general theory. We then move on to two recent topics in local mirror symmetry: extended Picard-Fuchs systems, and compactifications in local mirror symmetry.

1 Calabi-Yau manifolds.

1.1 Two Basic Examples.

Since the basic objects involved in mirror symmetry are Calabi-Yau manifolds, we begin with a discussion of these. First, the definition.

Definition 1 *Let X be a Kähler manifold of complex dimension 3. Then X is called a Calabi-Yau manifold if the first Chern class of X is trivial.*

In principle, we only need to add the hypothesis that X satisfies $H^{2,1}(X) \neq 0$ in order to make a statement of mirror symmetry for X . However, it is useful to use a restricted class of Calabi-Yau manifolds to simplify our search for interesting examples.

First, the noncompact case. We will say that X is a *local toric Calabi-Yau threefold* if X is a Calabi-Yau threefold containing the algebraic torus $(\mathbb{C}^*)^3$ as an open dense subset, and the action of $(\mathbb{C}^*)^3$ extends to X . Since these notes are driven primarily by examples, we turn to our first such space.

Example 1.1 Let $X_1 = \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. X can be described as a symplectic quotient

$$X_1 = \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : -3|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 + |w_4|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

$$S^1 : (w_1, \dots, w_4) \longrightarrow (e^{-3i\theta}w_1, e^{i\theta}w_2, e^{i\theta}w_3, e^{i\theta}w_4), \quad \theta \in S^1. \quad (1.2)$$

Here the disallowed locus is $Z = \{w_2 = w_3 = w_4 = 0\}$. The reason for this is clear; in the above, $[w_2, w_3, w_4]$ are homogeneous coordinates on the \mathbb{P}^2 , and thus we cannot have all three coordinates

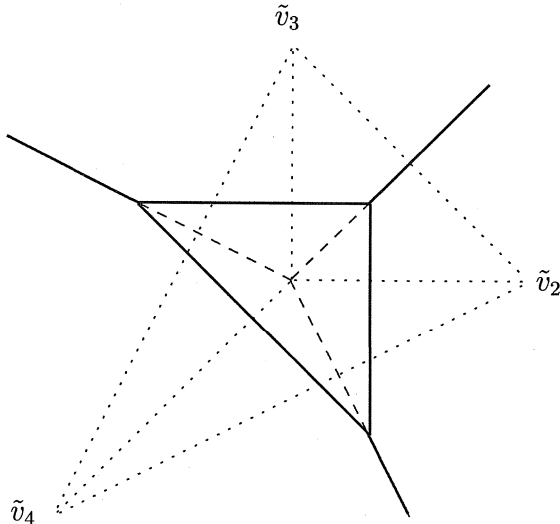


Figure 1: The toric graph of $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. The overall scaling of the boldface triangle is controlled by the real parameter r .

vanish simultaneously. Notice that in the above, all the information regarding the above geometry is captured in the single vector

$$l = (-3 \ 1 \ 1 \ 1) \quad (1.3)$$

Since we are primarily concerned with toric geometry, we note that this vector l can be realized as the single basis vector of relations among the vertices

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

That is, if $l = (l^1, l^2, l^3, l^4)$ satisfies $\sum_i l^i \hat{v}_i = 0$, then $l = (-3, 1, 1, 1)$ up to an overall multiplicative constant. We can use these vertices to produce a nice toric picture of $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. Write $\tilde{v}_i = (\hat{v}_i, 1)$, and plot the points \tilde{v}_i in \mathbb{Z}^2 . Then connect the vertices and draw the dual toric graph Γ . Γ is then a toric realization of X . This is illustrated in Figure 1.

Next, we turn to compact Calabi-Yaus. While these are not the main focus of these notes, historically they were studied first, and much of the intuition regarding the geometry of noncompact Calabi-Yaus is better illustrated through compact examples. Rather than work out the theory of compact toric CY manifolds in general, we will simply present the best known example below.

Example 1.2 We will present the toric construction of the quintic X_2 , i.e. a zero section of $\mathcal{O}(5) \rightarrow \mathbb{P}^4$. Take the following vertices in \mathbb{Z}^4

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

and let Δ be the convex hull of $\{v_1, \dots, v_5\}$. Let $t = (t_1, \dots, t_4) \in \mathbb{C}^4$ be a formal variable, and for $m = (m^1, \dots, m^4) \in \mathbb{Z}^4$, define the symbol

$$t^m = t_1^{m^1} t_2^{m^2} t_3^{m^3} t_4^{m^4}. \quad (1.6)$$

Let $\{m_1, \dots, m_s\} = \Delta \cap \mathbb{Z}^4$, and set $f(a, t) = \sum_i a_i t^{m_i}$ for arbitrary $a_i \in \mathbb{C}$. Then if we take

$$F(a, w_0, \dots, w_4) = w_0 \dots w_4 f(a, t_1 = w_1/w_0, t_2 = w_2/w_0, t_3 = w_3/w_0, t_4 = w_4/w_0), \quad (1.7)$$

we see that F is an arbitrary polynomial of degree 5 in w_0, \dots, w_4 . For example, considering the line connecting $(-1, -1, -1, -1)$ to $(4, -1, -1, -1)$, we have that $(3, -1, -1, -1)$ lies on this line, hence lies in $\Delta \cap \mathbb{Z}^4$. The homogenization of this term leads to $w_1^4 w_0$; in this way we may build every possible degree 5 polynomial from Δ . If we consider $[w_0, \dots, w_4]$ as homogeneous coordinates on \mathbb{P}^4 , then $F = 0$ defines a zero section of $\mathcal{O}(5) \rightarrow \mathbb{P}^4$, as desired. It is known that any such section is a compact CY manifold of dimension 3.

1.2 Mirror Manifolds.

In this subsection, we will exhibit the so-called ‘mirror manifolds’ to the above two examples. At this stage, we will simply present the way of computing mirror manifolds, and postpone the detailed discussion of their properties until the next section. We merely remark that the mirror manifolds given below capture many interesting features of our two examples.

Example 1.3 The mirror Y_1 of $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ can be immediately written down using the defining vector $l = (-3, 1, 1, 1)$, as follows:

$$Y_1 = \{(u, v, y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^4 : uv + a_1 y_1 + \dots + a_4 y_4 = 0, y_1^{-3} y_2 y_3 y_4 = 1\} / \mathbb{C}^*. \quad (1.8)$$

This is called the Hori-Vafa construction for local mirror symmetry. After some algebra, we can rewrite this as

$$Y_1 = \{F_1(z, u, v, y_1, y_2) = uv + a_1 + a_3 y_3 + a_4 y_4 + a_2 y_3^{-1} y_4^{-1} = 0\}. \quad (1.9)$$

Notice that if we write $Y_1 = \{uv + \sum_{i=1}^4 y_3^{m_i^1} y_4^{m_i^2} = 0\}$, and $m_i = (m_i^1, m_i^2)$, then $m_i = \tilde{v}_i, i = 1 \dots 4$.

We also want to take a brief tour into the moduli space of this equation. First notice that the above parameterization of complex structure moduli variables is redundant; if one were to rescale the variables as $y_i = a_i^{-1} u_i$, we would get

$$\{uv + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0, u_1^{-3} u_2 u_3 u_4 \frac{a_1^3}{a_2 a_3 a_4} = 1\} / \mathbb{C}^* \quad (1.10)$$

from which we could identify immediately the correct complex structure moduli variable:

$$z = \frac{a_2 a_3 a_4}{a_1^3} \quad (1.11)$$

And now, for the mirror of the quintic.

Example 1.4 This is a special case of the so-called Batyrev construction of mirror symmetry. Consider the original polytope Δ given for the quintic. For any polytope with vertices in \mathbb{Z}^4 , we have the definition of its *polar polytope*

$$\hat{\Delta} = \{v \in \mathbb{R}^4 : m \cdot v \geq -1 \ \forall m \in \Delta\}. \quad (1.12)$$

For the example we're working with, it turns out that the polar polytope $\hat{\Delta}$ has vertices

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Now, according to Batyrev, if we use the canonical procedure of associating a family of Calabi-Yau hypersurfaces to these vertices, then the resulting family is mirror to the quintic. By carrying out the same procedure of homogenization, we find only 6 terms, and thus arrive at

$$F_2 = a_0 w_0^5 + a_1 w_1^5 + a_2 w_2^5 + a_3 w_3^5 + a_4 w_4^5 + a_5 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 = 0 \quad (1.14)$$

as the family mirror to the quintic.

Now, we also want to briefly mention the moduli space discussion here. As above, through the rescalings $w_i^5 = a_i^{-1}$, we would arrive at a complex structure moduli coordinate $z^5 = a_1 \dots a_5 / a_0^5$. Also, since there is no uv factor in the polynomial for F_2 , we can also multiply the equation by a nonzero constant $F_2 \rightarrow cF_2$. This contributes nontrivially to the period integrals we will calculate.

We would also like to comment on the common features of the two examples above, e.g. on the relationship between mirror symmetry constructions on compact and noncompact manifolds. In terms of what we are computing, there is in fact only one feature which will capture all the information we need. On $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$, recall that the vertices of the *dual* polytope $\{v_1, \dots, v_4\}$ of equation (1.4) had the single relation $(-3, 1, 1, 1)$ between them. Similarly, the vertices of the dual polytope to the quintic from equation (1.11) have a single relation $(-5, 1, 1, 1, 1)$. In terms of the moduli space data we will be computing shortly, these two vectors already capture most of the information we need. There is in fact only a small difference between the computations for the compact and noncompact models. We now turn to this, and to the general predictions of mirror symmetry.

2 Period Integrals and Complex Structure Moduli Spaces

2.1 General statement of mirror symmetry.

Now that we have looked at two of the most well known examples of CY manifolds, we are interested in understanding what mirror symmetry has to say about CYs. We will first give the statement, and defer a discussion of defining its various ingredients until afterwards.

Conjecture 1 (*Mirror Symmetry Conjecture.*) *Let X be a CY threefold with complexified Kähler moduli space \mathcal{X} . Then there exists a CY threefold Y with complex structure moduli space \mathcal{Y} such that there is a local isomorphism of moduli spaces $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$.*

In order to appreciate this, we need some understanding of what the complexified Kähler and complex structure moduli spaces of various CY manifolds are. In fact, this is an extremely difficult question to answer in general. Yet, for the type of spaces we are considering, we have an explicit way of describing them, as we will see now.

We will first give an exposition of the meaning of the complex moduli space, as it applies to the examples we are working with.

Example 2.5 To begin with, let's consider the mirror to the quintic, defined by the hypersurface equation $F_2 = 0$ in \mathbb{P}^4 . Since this is a compact CY threefold, the theorem of Bogomolov-Tian-Todorov states that the complex structure is determined by the period integrals of Y_2 . We note that Y_2 depends on the single complex parameter z , and thus the period integrals of Y_2 will move in a 1-parameter family. This family is in fact the complex structure moduli space \mathcal{Y} of Y_2 , at least as far as local deformations are concerned.

Now take a basis $\{\gamma_1(z), \dots, \gamma_n(z)\}$ of $H_3(Y_2, \mathbb{Z})$, and let Ω_0 be the standard $(4, 0)$ form on \mathbb{P}^4 . Then we can define the period integrals of Y_2 by

$$\Pi_i(z) = \int_{T(\gamma_i(z))} \frac{\Omega_0}{F_2(z, w_0, \dots, w_4)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

where $T(\gamma_i(z))$ is a tube over $\gamma_i(z)$.

In principle, then, we only need to know the $\Pi_i(z)$ in order to determine the complex structure moduli space of the quintic.

Example 2.6 We can also do the same thing for the local mirror geometry Y_1 of $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. Unfortunately, for noncompact cases we are no longer guaranteed that the period integrals determine the complex structure; nonetheless, we may formally carry out computations similar to the compact case. In fact, in all examples studied to date, it is known that this formalism produces the correct results, in a sense to be made more precise later in this article.

From recent work of Hosono, we may define the noncompact period integrals for Y_1 as

$$\Pi_\Gamma(z) = \int_{\Gamma(z)} \frac{dudvdy_3dy_4/(y_3y_4)}{F_1(z, u, v, y_3, y_4)} \quad (2.16)$$

for all $\Gamma \in H_4(\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 - Y_1, \mathbb{Z})$.

Thus, at least formally, we have achieved our goal of understanding the (local) complex structure moduli space. By studying the behavior of the period integrals under infinitesimal deformations of the complex structure parameter z , we expect to be able to recover local information of the complex structure moduli space of Y_1 and Y_2 . Next, we will develop techniques for evaluating the period integrals presented in this subsection.

2.2 Generalized Hypergeometric Series and Period Integrals.

The period integrals of the previous subsection may be quite difficult to compute directly. Thankfully, there is a simple way to recover this information on toric varieties, through the so-called GKZ differential system. As usual, rather than describe the general theory, we will carefully go through the details on each of our two examples.

Example 2.7 These computations were traditionally performed in the compact setting, so we will first go through the process on the quintic mirror. Rather than use the period integrals from eqn. (2.14), it is in fact simpler to use the ones with ‘too many’ complex structure variables. Let

$$F_2(a, w_0, \dots, w_4) = a_0 w_0^5 + a_1 w_1^5 + a_2 w_2^5 + a_3 w_3^5 + a_4 w_4^5 + a_5 w_0 w_1 w_2 w_3 w_4. \quad (2.17)$$

Then we want to work out

$$\Pi_\gamma = \int_\gamma \frac{\Omega_0}{F_2(a, w_0, \dots, w_4)}. \quad (2.18)$$

In fact, we can arrive at the answer easily, once we realize that the cycles γ should be locally constant. It is obvious that

$$\left(\partial_{a_0} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} \partial_{a_4} - \partial_{a_5}^5 \right) \frac{\Omega_0}{F_2(a, w_0, \dots, w_4)} = 0. \quad (2.19)$$

Hence, we convert the question of computing the period integrals of $F_2(a)$ into that of finding the solutions of $\mathcal{L}_2 f = 0$, where $\mathcal{L}_2 = \partial_{a_0} \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} \partial_{a_4} - \partial_{a_5}^5$. We remark that the differential operator \mathcal{L}_2 is completely specified by the vector $(1, 1, 1, 1, 1, -5)$, which was the vector of relations among the vertices of the polytope $\hat{\Delta}$ dual to the polytope of the quintic.

Now, we are not quite done, because the solutions of our operator \mathcal{L}_2 are not really the period integrals, since they have too many moduli variables. Thus we need to reduce \mathcal{L}_2 to an ordinary differential operator; this is also automatically taken care of through the GKZ formalism, as follows. First, the vector $(1, 1, 1, 1, 1, -5)$ determines a single complex structure variable

$$z = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}{a_5^5}. \quad (2.20)$$

We want to rewrite \mathcal{L}_2 in terms of this single variable. To be more precise, \mathcal{L}_2 also requires a slight modification before we can sensibly pass to the quotient. This is because, in the definition of period integrals in eqn. (2.17), we are actually free to multiply the denominator by an arbitrary $c \in \mathbb{C}^*$, $F_2 \rightarrow cF_2$. In order to fix this invariance, we divide a_5 out of the denominator. The end result is that the real operator we want to convert to an ordinary differential operator is

$$\mathcal{L}_2 a_5^{-1}. \quad (2.21)$$

It is then a matter of simple calculation to finally rewrite this as the relevant operator

$$\mathcal{D}'_2 = \theta^5 - z(5\theta + 1)(5\theta + 2)(5\theta + 3)(5\theta + 4)(5\theta + 5), \quad \theta = z \frac{d}{dz} \quad (2.22)$$

For this specific example, it is in fact the case that there is one more solution to $\mathcal{D}'_2 f = 0$ than we are interested in. Hence we factor the operator, which yields the familiar Picard-Fuchs operator for the mirror to the quintic

$$\mathcal{D}_2 = \theta^4 - 5z(5\theta + 1)(5\theta + 2)(5\theta + 3)(5\theta + 4). \quad (2.23)$$

Now that we at long last have our differential operator in hand, we need to know its solutions in order to give the period integrals for the mirror to the quintic. The GKZ formalism is also equipped for this, and we can once again simply write down the solutions simply by using the vector $(1, 1, 1, 1, 1, -5)$. We can immediately write down the generating function

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 5n + 5\rho)}{\Gamma(1 + n + \rho)^5} (-z)^{n+\rho}. \quad (2.24)$$

Then the general theory of GKZ systems tells us that the solutions of $\mathcal{D}_2 f = 0$ are given by

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \omega_0(z, \rho)|_{\rho=0}, \quad k = 0 \dots 4. \quad (2.25)$$

We will explore the meaning of these solutions, and their relation to mirror symmetry, in the next section.

Example 2.8 We also want to carry out the same procedure on Y_1 . Since this computation is nearly identical to the above, we will merely point out the differences. Firstly, the period integrals we use here

$$\int_{\Gamma} \frac{dudvdy_3dy_4/(y_3y_4)}{uv + a_0 + a_1y_3 + a_2y_4 + a_3y_3y_4} \quad (2.26)$$

no longer have invariance under multiplication by elements of \mathbb{C}^* , since u and v are \mathbb{C} variables. Thus, the GKZ operator

$$\mathcal{L}_1 = \partial_{a_1} \partial_{a_2} \partial_{a_3} - \partial_{a_0}^3 \quad (2.27)$$

coming from the vector of relations $(1, 1, 1, -3)$ descends to the quotient unmodified. This results in a Picard-Fuchs differential operator

$$\theta^3 - z(-3\theta)(-3\theta - 1)(-3\theta - 2). \quad (2.28)$$

We have a modified generating function of solutions in the noncompact case

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1 + n + \rho)^3 \Gamma(1 - 3n - 3\rho)} z^{n+\rho} \quad (2.29)$$

and the solutions are given as the 0,1,2 derivatives of this series with respect to ρ , as in the compact case. The main difference between the noncompact and compact cases in terms of solutions of the PF differential operators is that in the compact case, there is always a constant solution. This simplifies many calculations, as we will see in the sequel.

3 Enumerative Predictions via Period Integrals.

We now turn to the topic which ultimately fueled the interest of many mathematicians in mirror symmetry. Namely, physics conjectures that we should be able use computations of the type performed above to enumerate rational curves on the quintic and $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. We will first demonstrate this on the classical example of the quintic.

3.1 Rational Curves on the Quintic.

Let ω_0 be the generating function (2.24) for periods of the quintic, and set $y_i = \partial_{\rho_i} \omega_0|_{\rho=0}$. With the tools developed so far, we can now formulate one of the most impressive consequences of mirror symmetry. First, we need to define a notion of the number of rational curves on the quintic. Following Kontsevich, let $\overline{\mathcal{M}}(d, \mathbb{P}^4)$ be the moduli space of degree d stable maps with no marked points into \mathbb{P}^4 . We note briefly that the bundle $\mathcal{O}(5) \rightarrow \mathbb{P}^4$ induces an obstruction bundle U_d on $\overline{\mathcal{M}}(d, \mathbb{P}^4)$, such that the fiber over $(f, C) \in \overline{\mathcal{M}}(d, \mathbb{P}^4)$ is $H^0(C, f^* \mathcal{O}(5))$. Kontsevich and Manin have then defined the numbers

$$N_d = \int_{\overline{\mathcal{M}}(d, \mathbb{P}^4)} c_{5d+1}(U_d) \quad (3.30)$$

which we take to be the number of rational curves on the quintic. In fact, it is known that this interpretation is not always the right one; the above is actually counting a physical instanton number, whose definition we will not elaborate upon.

Then inspired by physics, we can then define a generating function of these numbers

$$\mathcal{F}(t) = \frac{5t^3}{6} + \sum_{d>0} N_d e^{dt} \quad (3.31)$$

where t is a formal complex parameter.

Then the mirror symmetry theorems, proved by Givental and Lian-Liu-Yau, state the following. Consider the periods y_0, \dots, y_3 for the mirror to the quintic. Then if we arrange these in a period vector

$$\Pi = (y_0, \dots, y_3),$$

then we can factor this period vector, with the result

$$\Pi = y_0 \left(1, t, \frac{d\mathcal{F}}{dt}, t \frac{d\mathcal{F}}{dt} - 2\mathcal{F} \right). \quad (3.32)$$

Here t and \mathcal{F} are exactly the same functions as in the Kontsevich-Manin formulation of rational curves on the quintic. That is to say, the period integrals on the mirror to the quintic have all the information about the number of rational curves on the quintic. The function t above is called the mirror map, which tells us how to change information on the mirror of the quintic into information on the quintic.

Of course, we can then recover the function \mathcal{F} directly from the period integrals on the mirror to the quintic as

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2y_0}(y_1y_2 - y_3). \quad (3.33)$$

And this is precisely the basic consequence of mirror symmetry.

3.2 The noncompact setting.

Using the above compact calculations as a template, we would now like to carry out the same sort of computations for $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$. In fact, the computations on this space and its mirror are simpler than the quintic, but the meaning of the resulting numbers is more subtle.

Recall that the generating function ω_0 from (2.29) satisfies $\omega_0|_{\rho=0} = \text{const}$, and moreover that there are a total of 3 solutions, since the relevant Picard-Fuchs operator for this case is order 3. As in the compact case, we arrange these solutions in a period vector

$$\Pi(z) = (1, t(z), W(z)) \quad (3.34)$$

where $t(z)$ is the mirror map and $W(z)$ is a function which we want to interpret as a generating function of Gromov-Witten invariants. There is in fact a simple way to do this, as we now explain. Let \mathcal{F} denote the generating function of Gromov-Witten invariants for this case, and recall that the single relation vector for $X = \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ is $(-3, 1, 1, 1)$. Notice that there is exactly one compact divisor, $D \cong \mathbb{P}^2$, and that this satisfies $\mathbb{P}^1 \cap \mathbb{P}^2 = -3$. From the predictions of mirror symmetry, we then have that the above period vector is equal to

$$\Pi(z) = \left(1, t(z), -3 \frac{d\mathcal{F}}{dt}\right), \quad (3.35)$$

so that we need only use $-W/3$ in order to find the Gromov-Witten invariants for this example. And indeed, this produces the expected invariants.

4 Extended Picard-Fuchs systems.

We now move on to discuss our recent work, which was done at Hokkaido University in collaboration with Professor M. Jinzenji. We begin by motivating the study with a basic case, and proceed afterward towards the general method of solution.

4.1 Origin of the Problem.

The story of mirror symmetry presented in the previous sections presents a compelling and neatly told story. And in fact, on the surface it may seem as though most of the mathematical structures of local mirror symmetry have been well understood. However, there is a class of examples for which the constructs of local mirror symmetry break down, and new techniques must be introduced.

To understand the simplest example of this phenomenon, consider the classical example $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$, which is called the conifold in the physics literature. This space admits a symplectic quotient description

$$\begin{aligned} X &= \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : |w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+ \\ S^1 &: (w_1, \dots, w_4) \rightarrow (e^{i\theta}w_1, e^{i\theta}w_2, e^{-i\theta}w_3, e^{-i\theta}w_4), \quad \theta \in S^1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

and $Z = \{w_1 = w_2 = 0\}$. This is perhaps the simplest model of local mirror symmetry, in the sense that we know clearly that X contains exactly one holomorphic curve. Thus, we expect a formulation of local mirror symmetry to be exceedingly simple in this case.

So, we go forward and set the usual machinery of local mirror symmetry into motion. The mirror manifold Y to X can be realized as the hypersurface

$$Y = \{(u, v, y_3, y_4) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 : uv + 1 + y_3 + y_4 + zy_3y_4 = 0\} \quad (4.37)$$

where z is the single complex structure moduli variable. As in the previous sections, we write down a period integral involving an enlarged moduli space:

$$\Pi_\Gamma(a) = \int_\Gamma \frac{dudvd y_3 dy_4 / (y_3 y_4)}{uv + a_1 + a_2 y_3 + a_3 y_4 + a_4 y_3 y_4} \quad (4.38)$$

for $\Gamma \in H_4(\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 - Y, \mathbb{Z})$. Then it's clear that we have

$$\mathcal{L}\Pi_\Gamma(a) = (\partial_{a_1} \partial_{a_4} - \partial_{a_2} \partial_{a_3}) \Pi_\Gamma(a) = 0 \quad (4.39)$$

from which we derive the vector of relations $(1, -1, -1, 1)$ and the complex structure variable $z = a_1 a_4 / (a_2 a_3)$. Reducing as before to the single variable z , we arrive at

$$\mathcal{D} = (1 - z)\theta^2, \quad \theta = z \frac{d}{dz}. \quad (4.40)$$

This is clearly a problematic situation. The operator \mathcal{D} has a two dimensional solution space, spanned by $\{1, \log(z)\}$. As we have seen in previous sections, it is generally the case that the third solution is the one relevant for enumeration of rational curves. Since there is one rational curve in X , one would expect that the curve-counting function we'd encounter would be

$$W(z) = \frac{\log(z)^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}. \quad (4.41)$$

Now we come to the point which suggests a method of resolving this problem. Notice that if we apply the order 2 operator \mathcal{D} to W , we get $\mathcal{D}W = 1$. This means that if we were to work with a higher order operator

$$\theta(1 - z)\theta^2, \quad (4.42)$$

then the solution space for $\theta(1 - z)\theta^2 f = 0$ would be $\{1, \log(z), W(z)\}$. Moreover, $W(z)$ is the right function to enumerate the single rational curve in the geometry.

In fact, there is more we can do. If we work with an operator of just one higher order,

$$\theta^2(1-z)\theta^2, \quad (4.43)$$

then we find a remarkable solution space:

$$\left(1, \log(z), z\frac{d}{dz}\mathcal{F}, \log(z)\left(z\frac{d}{dz}\mathcal{F}\right) - 2\mathcal{F}\right) \quad (4.44)$$

where we have set

$$W(z) = z\frac{d}{dz}\mathcal{F}. \quad (4.45)$$

Note that this is the *same* form as the compact period vector (3.32)!

Thus, we have demonstrated a method of fixing local mirror symmetry for this simplest possible case. The basic reason that the natural Picard-Fuchs operator failed to contain the relevant enumerative data is that the space $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ contains no 4 cycle. In such a situation, it is expected that the Picard-Fuchs system will have no double logarithmic solutions; since we use double logarithmic solutions to count curves, we see that any space X satisfying $\dim H_4(X, \mathbb{Z}) = 0$ must have the same problem.

Nonetheless, it is still surprising that we were able to remedy the situation by such a trivial modification, i.e. by simply multiplying the original Picard-Fuchs operator on the left by another factor of θ . We will see that in the next simplest case, this is indeed not sufficient. It will turn out that we can complete enumerative data by this trivial modification of Picard-Fuchs operators exactly when the missing curves are rigid, as the single curve was in this case.

4.2 A nonrigid \mathbb{P}^1 .

Now consider the local Calabi-Yau $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$, given as the quotient

$$\begin{aligned} X &= \{(w_1, \dots, w_4) \in \mathbb{C}^4 - Z : -2|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 = r\} / S^1, \quad r \in \mathbb{R}^+ \\ S^1 &: (w_1, \dots, w_4) \rightarrow (e^{-2i\theta}w_1, e^{i\theta}w_2, e^{i\theta}w_3, w_4), \quad \theta \in S^1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

with $Z = \{w_2 = w_3 = 0\}$. Note that this is a local K3 surface times a trivial \mathbb{C} factor. It is known that there are no instanton corrections on this space; this means that we expect to be unable to recover any information on Gromov-Witten invariants via standard techniques. To exhibit this phenomenon, note that the vector defining this geometry is $(-2, 1, 1, 0)$, which gives rise to a generating function of Picard-Fuchs solutions

$$\omega_0(z, \rho) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(1+n+\rho)^2 \Gamma(1-2n-2\rho)} z^{n+\rho}. \quad (4.47)$$

We note that the Picard-Fuchs operator here is

$$\theta^2 - z(-2\theta)(-2\theta - 1). \quad (4.48)$$

Then if we formally consider the second derivative of the above, $y_2 = \partial_\rho \omega_0(z, \rho)|_{\rho=0}$, we find that y_2 has no instanton part. This is to be contrasted with the case of $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$, in which the second Frobenius derivative reproduces the correct instanton expansion. What this means in the present example is that we cannot possibly recover our missing instanton information by considering e.g. $\theta(\theta^2 - z(-2\theta)(-2\theta - 1))$ and its solution space.

However, we can cheat a bit here, and simply use the form of the known answer to produce the operator we are looking for. Recall the period vector of solutions (3.32) for the compact case. If we define a function Y by

$$Y = \frac{d^3 \mathcal{F}}{dt^3}, \quad (4.49)$$

the so-called Yukawa coupling, then (3.32) implies that the differential operator for the mirror to the quintic (written in the variable t) must be

$$\mathcal{D}_{\text{quintic}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{Y} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (4.50)$$

Recall, furthermore, that our extended Picard-Fuchs operator on $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ is also of exactly this form, if we make the identification $Y = 1/(1 - z)$. Thus, it's clear that there are only two things we need to construct our operator on $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$: (1) a choice for Y and (2) the mirror map $t = t(z)$.

(2) is trivial; the logarithmic solution of the Picard-Fuchs operator (4.48) is the same as t . Thus we only need Y . For reasons to be discussed more thoroughly in the next section, we will take

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{1 + e^t}{1 - e^t}. \quad (4.51)$$

Then putting these together and transforming into B model variables, we find the differential operator

$$\mathcal{D} = \theta^4 - z(2\theta + 2)(2\theta + 1)^2\theta + z^2(2\theta + 4)(2\theta + 3)(2\theta + 1)2\theta \quad (4.52)$$

which gives the solution space as we would expect for the mirror of $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

We turn next to methods of generalizing this procedure for all local Calabi-Yaus X such that $\dim H_4(X) = 0$.

4.3 Mirror symmetry without four cycles.

We next turn to the question of performing this same computation for the general case. First, we must make one more observation regarding the above two cases. Note that in both, in order to give the Picard-Fuchs operator we are interested in, all that is needed is a choice of Yukawa coupling and the mirror map. The mirror map is always given as solutions to the regular Picard-Fuchs system, and we can get the instanton part of the Yukawa coupling just based on the curve information, which is nearly trivial in all cases with no 4 cycles. Hence, the only thing that we really need is a choice of constant term for the Yukawa coupling.

Let's consider once again $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$. The extended PF operator we used above, $\theta^2(1-z)\theta^2$, is constructed, basically, from the A model Yukawa coupling

$$Y(s) = 1 + \frac{e^s}{1 - e^s}. \quad (4.53)$$

The constant term of 1 in the front was chosen because it corresponded most naturally to the GKZ derived PF operator $(1-z)\theta^2$. Let us now set this parameter to be arbitrary,

$$Y(s) = K + \frac{e^s}{1 - e^s}. \quad (4.54)$$

We want to consider the behavior of this function under analytic continuation $s \rightarrow -s$. We find the following formula:

$$Y(s) + Y(-s) = 2K - 1. \quad (4.55)$$

This means that in the context of this transformation, in order to preserve the instanton sum we should take $K = 1/2$. This choice results in a PF operator

$$\mathcal{D} = \theta^2 \left(\frac{2(1-z)}{1+z} \right) \theta^2. \quad (4.56)$$

Note that, since the constant term has an interpretation as a triple intersection number for the \mathbb{P}^1 , and there is no such intersection number unless we consider a compactified model, there are many possible choices. The above choice of 1/2 will be shown to be natural from the point of view of generalization.

We also briefly mention the derivation of the constant term on $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$. The choice we made before was

$$Y(t) = -\frac{1+e^t}{2(1-e^t)} = -\frac{1}{2} - \frac{e^t}{2(1-e^t)}; \quad (4.57)$$

that is, we picked a triple intersection number of $-1/2$. The motivation for this is as follows. The mirror map for this case is

$$t(z) = \log(z) + \sum_{n>0} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} z^n. \quad (4.58)$$

Using this, we can transform $Y(t)$ into the B model Yukawa coupling, keeping in mind $Y(t)$ is a rank 3 tensor:

$$Y_B(z) = -\left(z \frac{dt}{dz}\right)^3 \frac{1+e^t}{2(1-e^t)} = \frac{1}{2(1-4z)^2}. \quad (4.59)$$

It turns out that with any other choice of constant term, the B model coupling is not a nice rational function, as we have above. This is the basis of our choice of $-1/2$ for this geometry.

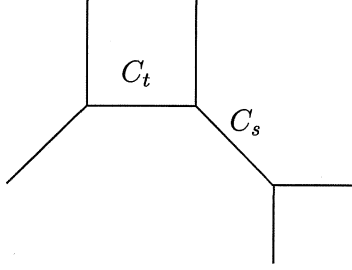


Figure 2: Toric diagram for X .

Now, we only need to make one more observation in order to generalize to the case of an arbitrary number of 2 cycles. That is, we need to see how we can take the intersection theory of the two spaces above and derive intersection theory for the general case. For definiteness, we will illustrate the procedure through an example. Consider the local threefold X defined by the vectors in eq. (4.60). The toric skeleton is depicted in Figure 2.

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

It is evident from the defining vectors that there are two curves $[C_s], [C_t] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ satisfying $\mathcal{N}_{C_s/X} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{N}_{C_t/X} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$. We can also exhibit a third curve $[C_{s+t}]$ with normal bundle $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. To see that this is in fact the normal bundle, note that

$$l^1 + l^2 = (-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1). \quad (4.61)$$

Now, we would like to define A model Yukawa couplings for this geometry. As we will show shortly, this is all we need to work out a complete Picard-Fuchs system. The nonconstant parts of the Yukawa couplings are known to be

$$Y_{sss}^c = \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \quad Y_{ttt}^c = -\frac{e^t}{1-e^t} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \quad Y_{sst}^c = Y_{stt}^c = \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}. \quad (4.62)$$

Note that each individual term of the couplings is exactly the same as was found on our two one parameter cases above. This leads one to conjecture that in order to work out the constant terms of the above couplings, we should just add the results from the one parameter cases based on the number of $(-1, -1)$ and $(-2, 0)$ curves in the geometry. Thus, for example,

$$Y_{sss} = \frac{1}{2} + \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{1}{2} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}} = 1 + \frac{e^s}{1-e^s} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}} \quad (4.63)$$

and similarly

$$Y_{ttt} = -\frac{e^t}{1-e^t} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}, \quad Y_{sst} = Y_{stt} = \frac{1}{2} + \frac{e^{s+t}}{1-e^{s+t}}. \quad (4.64)$$

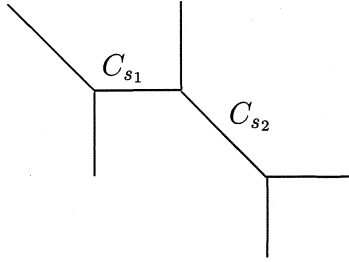


Figure 3: The flopped X .

To add further evidence in favor of this choice of intersection theory, note that this geometry admits a flop to a distinct toric diagram 4.65

$$\begin{pmatrix} l^1 + l^2 \\ -l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

The toric diagram is given in Figure 3. Then, similarly to the above, we can write down the would-be intersection numbers on the flopped X . What we find is that if we follow the Yukawa couplings on X through the flop, they exactly equal the couplings on the flopped X , including the constant term. Thus, we have a unique choice. Moreover, we have also demonstrated that this holds on more general examples.

For the present purposes, we now have all we need to exhibit an extended Picard-Fuchs system for X . We first note the usual Picard-Fuchs system on X :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1(\theta_1 - \theta_2) - z_1(-2\theta_1 + \theta_2)(-2\theta_1 + \theta_2 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= (2\theta_1 - \theta_2)\theta_2 - z_2(\theta_1 - \theta_2)\theta_2, \\ \mathcal{D}_3 &= \theta_1\theta_2 - z_1z_2(2\theta_1 - \theta_2)\theta_2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Now, we want to explain the general procedure for going from the above Yukawa couplings to a system of partial differential equations on the A model. We will then use the mirror map to take these to the B model, in order to get an understanding of what kinds of differential operators will be featured in a more complete version of local mirror symmetry.

Let ψ be a function of s, t . Also, set $\partial_1 = \partial_t, \partial_2 = \partial_s$, and e.g. $Y_{112} = Y_{sst}$. We consider a system of partial differential equations, as follows:

$$\partial_a \psi = \psi_a^{(2)}, \quad (4.67)$$

$$\partial_a \psi_b^{(2)} = \sum_c Y_{abc} \psi_c^{(4)}, \quad (4.68)$$

$$\partial_a \psi_b^{(4)} = \delta_{ab} \psi^{(6)}, \quad (4.69)$$

$$\partial_a \psi^{(6)} = 0. \quad (4.70)$$

Now, suppose that we want to solve for $\psi_c^{(4)}$ in the above system. If we take Y_a^{bc} as the inverse of Y_{abc} , we get an equation

$$\psi_c^{(4)} = \sum_b Y_a^{bc} \partial_a \partial_b \psi. \quad (4.71)$$

In order for the solution $\psi_c^{(4)}$ to be well defined, the right hand side of the above equation should be independent of a . This leads to an integrability condition

$$\sum_b Y_1^{bc} \partial_1 \partial_b \psi = \sum_b Y_2^{bc} \partial_2 \partial_b \psi \quad (4.72)$$

Similarly, from the third line we find

$$\partial_2 \sum_b Y_1^{b,1} \partial_1 \partial_b = \partial_1 \sum_b Y_2^{b,2} \partial_2 \partial_b = 0. \quad (4.73)$$

After finally performing the coordinate change to the B model, we arrive at the following set of operators, the extended Picard-Fuchs operators for X :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_1 &= (1 + z_2 + z_1 z_2^2) \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + z_2 \mathcal{D}_3, \\ \tilde{\mathcal{D}}_2 &= \theta_2 \mathcal{D}_1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

By explicit computation, we can check that the solution space of $\{\tilde{\mathcal{D}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_2\}$ is given by

$$\left(1, s, t, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, s \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} + t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} - 2\mathcal{F}\right) \quad (4.75)$$

where

$$\mathcal{F} = \frac{s^3}{6} + \frac{s^2 t}{12} + \frac{st^2}{12} + \sum_{n>0} \frac{e^{ns} + e^{n(s+t)} - e^{nt}}{n^3} \quad (4.76)$$

which is exactly the form of the solution space we would find in the compact case.

A few remarks are in order here. One question that arises is, what exactly is gained by this construction? After all, we took for granted the instanton expansion of the A model, and one of the main demonstrations of the power of mirror symmetry is the counting of rational curves via the B model. In this sense, we have not introduced anything new. We see the advantages of the above to be twofold. First, it is certainly a fact that the GKZ differential system, which is the only tool available from the perspective of toric B model mirror symmetry, does not give us curve information in this case. This is precisely because there are no 4 cycles on the A model side. Thus, we have first of all gained some hint as to what sort of systems of differential equations will be involved in a general construction of local mirror symmetry. Secondly, we have the conjecture regarding triple intersection theory. We remark that the early work of Gopakumar and Vafa also discovered the same triple intersection number on the conifold, through the consideration of geometric transitions. We view our conjecture as a prediction of the numbers one might find if similar geometric transition calculations were carried out on the more general geometries we work with here.

4.4 More general geometries.

In this section, we briefly go over what kind of information is available by extending the above techniques to cases of type K_S , where S is a toric complex surface. For simplicity of exposition,

we concentrate on only one case, which is K_{F_2} . This is defined by the charge vectors

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

In K_S cases, the construction of the extended Picard-Fuchs system simplifies dramatically. The reason for this is as follows. As noted in the $b_4 = 0$ cases, and in particular $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$, the information on non-rigid curves is not available from the Picard-Fuchs system. What this amounts to is that we must multiply the usual PF operators by nontrivial functions in z_i in order to ‘fill in’ missing curve information.

In contrast, on K_S , all maps $f : C \rightarrow S$ cannot move off the surface, since the canonical bundle has no sections. Hence, we expect that the PF system already has all enumerative information regarding curves mapped to S . What this means is that we should be able to derive the full set of prepotential derivatives for these cases by multiplying the ordinary PF operators by linear combinations of θ_i only, i.e. there are no functions of z_i that we need to worry about. An in fact, in all cases we have checked this turns out to be the case.

On K_{F_2} , the PF system is

$$\mathcal{D}_1 = \theta_1(\theta_1 - 2\theta_2) - z_1(2\theta_1)(2\theta_1 + 1) \quad (4.78)$$

$$\mathcal{D}_2 = \theta_2^2 - z_2(\theta_1 - 2\theta_2)(\theta_1 - 2\theta_2 - 1). \quad (4.79)$$

Let \mathcal{F} be the prepotential for this model, and ω the generating function of solutions of $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$. Then

$$\omega(z, \rho) = \sum_{n \geq 0} c(n, \rho) z_1^{n_1 + \rho_1} z_2^{n_2 + \rho_2} \quad (4.80)$$

where

$$c(n, \rho)^{-1} = \Gamma(1 - 2n_1 - 2\rho_1)\Gamma(1 + n_1 + \rho_1) \quad (4.81)$$

$$\times \Gamma(1 + n_1 + \rho_1 - 2n_2 - 2\rho_2)\Gamma(1 + n_1 + \rho_1)^2. \quad (4.82)$$

Let $\Pi_{ij} = \partial_{\rho_1}^i \partial_{\rho_2}^j \omega|_{\rho=0}$. Also, take t_1, t_2 to be the logarithmic solutions of this system. Then the solutions of the ordinary Picard-Fuchs system are

$$\left(1, t_1, t_2, -2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1}\right). \quad (4.83)$$

By direct computation, we can show that

$$\begin{pmatrix} \Pi_{20} \\ \Pi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\partial \mathcal{F} / \partial t_2 \\ 2\partial \mathcal{F} / \partial t_1 - 4\partial \mathcal{F} / \partial t_2 \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

From these relations, it is natural to proceed as follows. We note that the functions Π_{20}, Π_{11} are solutions of the higher order set of differential operators $\{\theta_1 \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}$. And taking this as an extended PF system, we indeed find that we are able to fully reconstruct the prepotential on

K_{F_2} from solutions of this system alone. Moreover, we can actually use the relations of these differential operators to calculate Yukawa couplings for this model. From techniques that will be more carefully addressed in the sequel, we find the following result:

$$\begin{aligned} Y_{111} &= \frac{-1}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2}, & Y_{112} &= \frac{2z_1 - \frac{1}{2}}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2}, \\ Y_{122} &= \frac{-z_2(8z_1 - 1)}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2)(1-4z_2)}, & Y_{222} &= \frac{-z_2(24z_1z_2 + 2z_1 - 2z_2 - \frac{1}{2})}{(1-4z_1)^2 - 64z_1^2)(1-4z_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

5 Compactifications and Calabi-Yau Fourfolds.

This is the first of two parts of the most recent collaborative work of the author and Professor Masao Jinzenji. The focus is the use of compactifications in local mirror symmetry.

5.1 Motivation for Compactifications.

In the preceding sections, there has emerged a single guiding principle regarding the problems we encounter with local mirror symmetry. Namely, local mirror symmetry fails precisely when we have a breakdown of Poincaré duality between two and four cycles, i.e. for any space X such that $b_2(X) \neq b_4(X)$.

As a simple demonstration of this, consider the canonical bundle over the del Pezzo surface K_{dP_2} . This is defined by the vectors

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.86)$$

It is well known that $b_2(dP_2) = 3$, $b_4(dP_2) = 1$. Let \mathcal{F} be the generating function of Gromov-Witten invariants on dP_2 . Then the solutions of the Picard-Fuchs equations for dP_2 can be written as

$$\left(1, t_1, t_2, t_3, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_3}\right). \quad (5.87)$$

Physicists would argue that each t_i measures the volume of a 2 cycle, while the double log solution measures the 4 cycle volume. Thus, in order to have enough double log solutions to be able to integrate them to a single prepotential, we need $b_2 = b_4$. The second simplest example of this latter case is provided by the local Calabi-Yau threefold defined by the vectors

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

As expected, the solution space here is found to be

$$\left(1, s_1, s_2, -3\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} - 2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}\right). \quad (5.89)$$

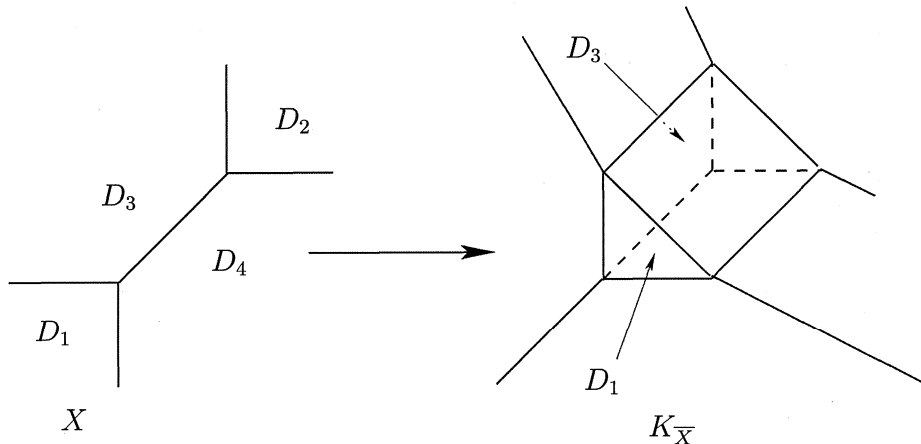


Figure 4: The projective closure procedure. The external lines on the $K_{\bar{X}}$ picture represent the canonical bundle direction.

Thus, all information regarding the prepotential is contained in the period vectors alone.

With these examples in mind, one might hope that by adding extra 4-cycles to the geometry, we may have some hope of recovering missing Gromov-Witten data. This idea is given further credence if one considers the claim of Hori and Vafa that the instanton expansions are provided by the regulated volume of the noncompact 4-cycles which are dual to the 2-cycles. Let's see how these ideas work in one particularly simple example.

5.2 Application to local \mathbb{P}^1 (two examples).

We will here apply the canonical bundle over the projective completion technique to a local \mathbb{P}^1 with normal bundle either $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ or $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$. In both cases, we find that the resulting noncompact fourfold contains the instanton data in a natural way.

Example 5.9 First, we note in greater detail why it is that one might see missing instanton information in the noncompact fourfold geometry. Consider $X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$, which is determined by the vector $(1, 1, -1, -1)$. We associate to X the noncompact fourfold $K_{\bar{X}}$, described by the vectors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.90)$$

There is a nice graphical representation of this procedure, as illustrated in Figure 4. By looking at this picture, we can gain an understanding about what the projective closure does for us computationally. Recall [?] that on the geometry $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$, we are supposed to be able to recover the instanton data by computing the 'volume of the noncompact 4-cycle dual to the \mathbb{P}^1 '. This is made into a sensible calculation in that paper by introducing a cutoff parameter on this 4-cycle and performing the regulated integral. Yet, from our picture here, we can see that the noncompact 4-cycle is given a finite volume; and moreover, we can recover that volume simply

by analyzing the period integrals on the mirror of $K_{\overline{X}}$. We can then recover the data originally coming from $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ by taking the large fiber limit on the relevant integrals.

Let us now carry this out for the present example. We will find that the threefold limit of the fourfold periods indeed reproduces what we expect. More importantly, we are able to apply the machinery of extended Picard-Fuchs systems to recover the correct Yukawa coupling.

Denote the mirror of $K_{\overline{X}}$ by Y . Then Y is a CY fourfold which can be described by the equation

$$Y = \{uv + 1 + y_2 + z_1 y_2^{-1} y_4 y_5 + y_4 + y_5 + z_2 y_4^{-1} y_5^{-1} = 0\} \quad (5.91)$$

where $u, v \in \mathbb{C}$ and $y_i \in \mathbb{C}^*$. The Picard-Fuchs differential operators for period integrals on Y are

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1^2 - z_1(-\theta_1 + \theta_2)(-\theta_1 + \theta_2) \\ \mathcal{D}_2 &= \theta_2(\theta_2 - \theta_1)^2 - z_2(-3\theta_2)(-3\theta_2 - 1)(-3\theta_2 - 2). \end{aligned} \quad (5.92)$$

The Poincare polynomial is

$$\frac{(1-t^2)(1-t^3)}{(1-t)^2} = t^3 + 2t^2 + 2t + 1 \quad (5.93)$$

which gives exactly the right number of 0,2,4 and 6 cycles, as is clear from Figure 4. Corresponding to the two two cycles in the A model geometry, there are two logarithmic solutions t_1, t_2 of the system (5.92), and two double logarithmic ones for the four cycles, Π_{12} and Π_{22} . What we find is that

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} \Pi_{22} = \sum_{n>0} \frac{e^{nt_1}}{n^2}. \quad (5.94)$$

While this reconstructs instanton data on the threefold from taking the limit of appropriate periods of the fourfold, it is difficult to determine from the Picard-Fuchs solutions alone exactly which solution should correspond to the volume of which four cycle, thus obscuring the overall multiplicative constant for the instanton expansion. More importantly, technically we cannot even take the above limit, because, because we have disregarded the logarithmic terms of Π_{22} , and these actually turn out to be divergent. There is, happily, another approach we can take in the analysis of this system. The following is in fact the main computational technique we work with in this paper.

Consider the extended system of differential operators $\{\mathcal{D}_1, \theta_2 \mathcal{D}_2\}$. The Poincare polynomial of this system indicates that we should expect its solutions to behave as a compact Calabi-Yau fourfold. With this as motivation, assume there exists a compact fourfold M whose period integrals coincide with the solutions of $\{\mathcal{D}_1, \theta_2 \mathcal{D}_2\}$. We make the definitions

$$\begin{aligned} Y_{(k)}^{mn} &= \int_M \Omega \wedge \nabla_{\delta_{z_1}}^m \nabla_{\delta_{z_2}}^n \Omega, \quad m+n=k, \quad k \in \{4, 5\}, \\ Y_{(k)}^{mn} &= 0, \quad k \leq 3 \end{aligned} \quad (5.95)$$

where Ω is the (4,0) form on M and ∇ is the connection on the complex structure moduli space of M . The condition in the second line above is Griffiths transversality. We can then use the extended Picard-Fuchs equations to derive relations among the $Y_{(4)}^{mn}$. To illustrate this in the present case, note that the two equations

$$\begin{aligned}\theta_1\theta_2\mathcal{D}_1f &= 0 \\ \theta_2\mathcal{D}_2f &= 0\end{aligned}\tag{5.96}$$

imply the following relations for four point functions:

$$\begin{aligned}(-Y_{(4)}^{31} + 2 - Y_{(4)}^{22} - Y_{(4)}^{13})z_1 + Y_{(4)}^{13} &= 0 \\ 27Y_{(4)}^{04} + Y_{(4)}^{22} - 2Y_{(4)}^{13} + Y_{(4)}^{04} &= 0.\end{aligned}\tag{5.97}$$

The full set of such relations (there are 5 in this example) completely determine the $Y_{(4)}^{mn}$ up to the overall multiplicative function $S = Y_{(4)}^{04}$. We can then use the PF system again (this time with one higher power of derivatives) to derive a system of partial differential equations for S . To see how this works, note that the assumption of the existence of M made above implies a relationship between four point and five point functions:

$$Y_{(5)}^{mn} = \frac{1}{2}(m\theta_1Y_{(4)}^{m-1,n} + n\theta_2Y_{(4)}^{m,n-1}).\tag{5.98}$$

Set $\Delta_f = 1 - 54z_2 - 54z_1z_2 + 729z_2^2 - 1458z_1z_2^2 + 729z_1^2z_2^2$. Then the four point functions derived using the above method read

$$\begin{aligned}Y_{(4)}^{04} &= \frac{1}{\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{13} = \frac{1 - 27z_1 + 27z_1z_2}{2\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{22} = \frac{27z_1z_2}{\Delta_f}, \\ Y_{(4)}^{31} &= \frac{z_1(-1 + 27z_2 + 81z_1z_2)}{2(z_1 - 1)\Delta_f}, \quad Y_{(4)}^{40} = \frac{z_1^2(-1 + 54z_2 + 54z_1z_2)}{(z_1 - 1)^2\Delta_f}.\end{aligned}\tag{5.99}$$

These are not terribly enlightening in this form, but if we perform a coordinate change to the A model using the inverse mirror map (and treat the above functions as rank 4 tensors), we find a surprisingly simple result:

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{31} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} e^{nt_1}.\tag{5.100}$$

Here $C_{(4)}^{mn}$ represents the A model four point function, and t_1, t_2 are the logarithmic solutions of the PF system. The above of course the right expansion (up to the factor of 1/2) and moreover behaves in the way we expect, in terms of recovering threefold data as a limit of fourfold four point functions [?]. We note that there is no constant term in the above expansion.

Example 5.10 We now present the details of carrying out this same idea on $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \rightarrow \mathbb{P}^1$. Since this is nearly the same as the above, we give only the briefest overview. We mention, however, that the process of taking the projective completion adds *more* information than in example 1.

This is because in example 1, there was already a rigid curve which could in principle be counted through other means. Here, we have additionally compactified the curve family, which amounts to a nontrivial addition of Gromov-Witten information.

Recall that the defining vectors are

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.101)$$

The mirror geometry is

$$Y = \{uv + 1 + z_2 y_5^{-1} y_6^{-1} + z_1 z_2^2 y_4^{-1} y_5^{-2} y_6^{-2} + y_4 + y_5 + y_6 = 0\} \quad (5.102)$$

and the PF operators are

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1^2 - z_1(-2\theta_1 + \theta_2)(-2\theta_1 + \theta_2 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= (\theta_2 - 2\theta_1)\theta_2^2 - z_2(-3\theta_2)(-3\theta_2 - 1)(-3\theta_2 - 2). \end{aligned} \quad (5.103)$$

The double logarithmic solutions are exactly the same as in Example 1, reflecting that both cases have the same instanton expansion.

By using, once again, the extended PF system $\{\mathcal{D}_1, \theta_2 \mathcal{D}_2\}$, we are able to find four point functions, and translating these to the A model as in example 1, we arrive at

$$\lim_{t_2 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{31} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} e^{nt_1}. \quad (5.104)$$

5.3 K_S cases.

We now demonstrate more fully the power of this approach by using the Calabi-Yau fourfold calculation to find the full set of Yukawa couplings on K_{F_0} . In a previous work, the authors used a classical cohomology argument to produce extended Picard-Fuchs differential operators on K_S . These operators were then shown to reproduce the expected Yukawa couplings via the same techniques we used above on local \mathbb{P}^1 . The disadvantage of the extended PF system is that there is not a simple closed form for the extended system on K_S . We will now show that through the fourfold formalism, all Yukawa couplings are produced automatically. We believe that this method should remain valid on every canonical bundle case.

Example 5.11 We work with the second most trivial example in this class, namely the canonical bundle over $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. The charge vectors for $X = K_{F_0}$ are

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

The canonical bundle over the projective closure \overline{X} has the toric description

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

Let Y be the mirror to $K_{\overline{X}}$. Then Y is the family of hypersurfaces

$$\{(u, v, y_4, y_5, y_6) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^3 : uv + 1 + z_2 y_5^{-1} y_6^{-1} + z_1 z_2^2 y_4^{-1} y_5^{-2} y_6^{-2} + y_4 + y_5 + y_6 = 0\}. \quad (5.107)$$

As usual, there is a Picard-Fuchs system of differential operators whose solutions are the period integrals of Y :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \theta_1^2 - z_1(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 1), \\ \mathcal{D}_2 &= \theta_2^2 - z_2(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)(-2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 1), \\ \mathcal{D}_3 &= \theta_3(\theta_3 - 2\theta_1 - 2\theta_2) - z_3(-2\theta_3)(-2\theta_3 - 1). \end{aligned} \quad (5.108)$$

We let t_1, t_2, t_3 denote the logarithmic solutions. Similarly to the local \mathbb{P}^1 cases we worked out above, consider the extended Picard-Fuchs system $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \theta_3 \mathcal{D}_3\}$. This is always the canonical procedure of associated and extended Picard-Fuchs system; simply raise the power of the differential operator from the compactification fiber by 1. We suppose that there is a compact fourfold M whose period integrals coincide with the solutions of $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \theta_3 \mathcal{D}_3\}$, and define

$$\begin{aligned} Y_{(k)}^{mnp} &= \int_M \Omega \wedge \nabla_{\delta_{z_1}}^m \nabla_{\delta_{z_2}}^n \nabla_{\delta_{z_3}}^p \Omega, \quad m+n+p=k, \quad k \in \{4, 5\}, \\ Y_{(k)}^{mnp} &= 0, \quad k \leq 3. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Using the procedure detailed above, we can fully determine all 14 of the B model Yukawa couplings $Y_{(4)}^{mnp}$ on M . As in the local \mathbb{P}^1 case, we have to convert these couplings to the A model (remembering that these functions transform as rank 4 tensors) and then take the limit $t_3 \rightarrow -\infty$ in order to recover the correct Yukawa couplings. Let $C_{(4)}^{ijk}$ denote the A model couplings obtained this way. We obtain, in particular,

$$\begin{aligned} \lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{301} &= \frac{1}{8}(-2q_1 - 4q_1 q_2 - 2q_1^2 - 48q_1^2 q_2 - 6q_1 q_2^2 - 2q_1^3 - \dots), \\ \lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{211} &= \frac{1}{8}(-4q_1 q_2 - 24q_1^2 q_2 - 12q_1 q_2^2 - \dots), \end{aligned} \quad (5.110)$$

where we have set $q_i = e^{t_i}$. These have exactly the instanton expansion expected. That is, if \mathcal{F} is the prepotential for K_{F_0} , then e.g. $\partial^3 \mathcal{F} / \partial t_1^3 = \lim_{t_3 \rightarrow -\infty} C_{(4)}^{301}$. Of course, there are two other couplings $C_{(4)}^{121}$ and $C_{(4)}^{031}$, and these also have the correct instanton expansions.

There is also, as above, the overall multiplicative factor of $1/8$, which appears as an artifact of the fourfold construction.

6 Fourfold constructions for threefolds with $b_4 = 0$.

From the above, we have seen that while we can recover much additional information by using the projective closure plus canonical bundle technique, this seems to be unsuitable if there are too many noncompact divisors in the uncompactified geometry. This is because the dimension of the compactification fiber gets too large, resulting in a complicated PF system on the fourfold. In

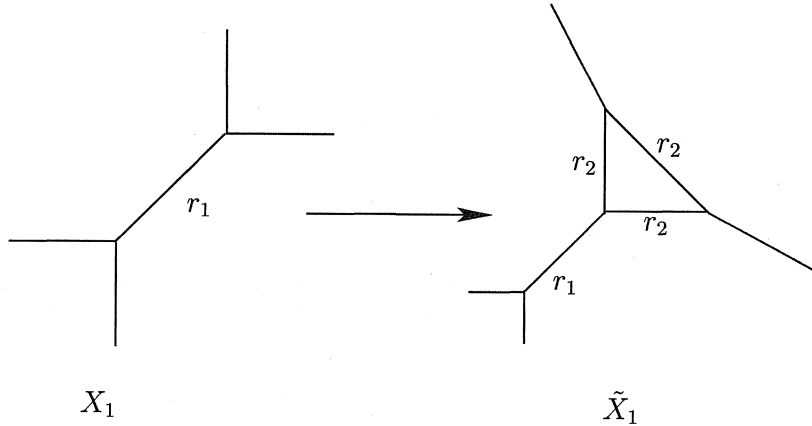


Figure 5: Toric diagram for the addition of a 4 cycle to $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

particular, for any local Calabi-Yau with $\dim H_2(X, \mathbb{Z}) > 1$ and $\dim H_4(X, \mathbb{Z}) = 0$, there are at least three noncompact divisors, making our computations unwieldy.

With these difficulties in mind, we will develop tools tailor made to address such cases. In fact, we are able to show that for a large class of examples, by performing a partial compactification followed by a flop, we can reduce the problem to a K_S type case. Then we have only to refer back to the methods introduced in the preceding sections on K_S , flop the resulting Yukawas back and take the appropriate limits to recover the Yukawa couplings on the geometry of interest. We will work through one example to get a feel for the computational techniques.

6.1 A first example.

Example 6.12 We begin with the conifold, $X_1 = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$. While the Yukawa coupling for the conifold can be recovered through possibly simpler means, we present this example as a template for the types of methods we'll be using.

First, we need to realize that the basic reason that local mirror symmetry (that is, local mirror symmetry via Picard-Fuchs systems) breaks down for the conifold is that there is no 4 cycle on this space. Hence, the PF system on the mirror cannot have a double log solution, and therefore we cannot recover the instanton expansion as we would like.

With this as motivation, we consider the most basic operation we can perform on the conifold in order to add a 4 cycle without destroying the original geometry. The candidate 'compactification', which we call \tilde{X}_1 , is depicted in Figure 5, and is defined by the toric charge vectors

$$\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.111)$$

Now, we want to connect this to our previous constructions, i.e. the canonical bundle over a surface case. But this is easy, because \tilde{X}_1 admits a flop to K_{F_1} :

$$\begin{pmatrix} -l^1 \\ l^1 + l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.112)$$

That is, $\tilde{X}_1^{flop} \cong K_{F_1}$. Now we use the machinery of previous sections. Let $K_{\bar{K}_{F_1}}$ be the noncompact fourfold associated to K_{F_1} , defined by charge vectors

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.113)$$

This procedure is summarized by the following sequence of operations:

$$X_1 \longrightarrow \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_1^{flop} \cong K_{F_1} \longrightarrow K_{\bar{K}_{F_1}}$$

Then exactly as in the K_{F_0} case, we can compute B model fourpoint functions $Y_{(4)}^{mnp}(z_1, z_2, z_3)$ using the Picard-Fuchs system from the mirror manifold to $K_{\bar{K}_{F_1}}$. Here (z_1, z_2, z_3) are the local variables on the complex structure moduli space of the mirror of $K_{\bar{K}_{F_1}}$.

The next step is to carry the B model fourpoint functions across the flop on the B model, defined by the change of variables

$$z_1 = w_1^{-1}, \quad z_2 = w_1 w_2, \quad z_3 = w_3. \quad (6.114)$$

Here, we have to remember that the $Y_{(4)}^{mnp}(z_1, z_2, z_3)$ transform as rank 4 tensors. Then, we have fourpoint functions $\tilde{Y}_{(4)}^{mnp}(w_1, w_2, w_3)$ on the mirror of the fourfold associated to \tilde{X}_1 . Let t_1, t_2, t_3 be the logarithmic solutions of the Picard-Fuchs system on the mirror to the fourfold over \tilde{X}_1 .

Next, use the inverse mirror map $w(t)$ to convert the $\tilde{Y}_{(4)}^{mnp}(w_1, w_2, w_3)$ into A model fourpoint functions $\tilde{C}_{(4)}^{mnp}$ on the fourfold over \tilde{X}_1 , again taking the tensor property into account. And then finally, we can recover the expected Yukawa threepoint function C_{X_1} on X_1 in the limit as $t_2, t_3 \rightarrow -\infty$. These two limits are to be understood as first taking the size of the $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \tilde{X}_1$ to infinity, and then taking the limit of the large compactification fiber (that is, the limit in which the noncompact fourfold becomes a noncompact threefold). The result of this is

$$C_{X_1} = \lim_{t_2, t_3 \rightarrow -\infty} \tilde{C}_{(4)}^{301} = -\frac{1}{8} \frac{e^{t_1}}{1 - e^{t_1}}. \quad (6.115)$$

Here t_1 is the volume of $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow X_1$. This is, of course, exactly the expected instanton expansion for X_1 . As in all previous cases, we find an overall multiplicative constant in the instanton sum. This is an artifact of the fourfold compactification that we are using.

