



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	モデル縮約法を用いた回転機の高速解析に関する研究
Author(s)	坂本, 宏紀
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第14595号
Issue Date	2021-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k14595
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/81489
Type	doctoral thesis
File Information	Hiroki_Sakamoto.pdf



博士論文

モデル縮約法を用いた
回転機の高速解析に関する研究
Study on Fast Analysis of Rotating Machines
using Model Order Reduction

坂本宏紀

2021 年 3 月

北海道大学 大学院情報科学研究院
システム情報科学専攻

本論文は北海道大学大学院情報科学研究科に
博士(工学)授与の要件として提出した博士論文である.

坂本宏紀

指導教員：		五十嵐 一	教授
審査員：	主査	五十嵐 一	教授
	副査	小笠原 慎司	教授
		北 裕幸	教授
		野口 聡	准教授

モデル縮約法を用いた回転機の高速解析に関する研究

坂本 宏紀

概要

電磁機器産業における電磁機器の設計開発においては電磁界解析が幅広く用いられている。電磁界解析を用いることは電磁機器の試作前の特性評価が容易となることから、電磁機器の性能向上のための有効な手段である。近年、電磁機器は市場の拡大に伴うプレイヤーの増加によって、競争が激化しており、高性能、高品質な製品をいち早く市場に投入する必要がある。電磁機器の高性能・高品質化のためには、膨大な繰り返し計算が必要な最適化計算や電磁界と制御、熱、振動などを考慮した連成解析が必要不可欠となっており、電磁界解析の計算時間を削減する需要が増加している。

電気自動車用モータの開発・設計において、広い駆動範囲における高効率性や高信頼性、静粛性が求められることから、開発においては、複数の物理量を含み、制御系の検討を行うことが必要となっている。その中で、動作シミュレーションは重要な役割を担っている。動作シミュレーションはいわゆるビヘイビアモデルで実施されることが多い。この解析では、FEMを用いて作成した参照テーブルや応答局面から回転子位置に対応する磁束やインダクタンスなどを取得し、回路方程式を求める。この回路方程式を解くことで電流を決定し、トルクを求め、トルクを入力とした運動方程式を解くことで、回転子の新たな位置を決定する。このように決まる回転子の回転速度が目標に近づくように、入力電圧が制御される。このアプローチによりモータの動的な振る舞いを近似的に求めることができる。ただし、モータを集中定数回路として扱うため、空間的に分布する加振力や磁界の分布から求められる高調波損失のような場の特性を求めることが難しく、電磁振動解析などに用いることは困難である。

FEMの計算時間を短縮するアプローチとして、固有直交分解（POD：Proper Orthogonal Decomposition）に基づくモデル縮約（MOR：Model Order Reduction）がある。磁界の分布のスナップショットから正規直交基底を作成することにより、磁界を少数の基底で表し、有限要素方程式を基底の係数についての小さな方程式に変換することによって行列計算の計算コストを削減することができる。しかしながら、回転機の解析においては一般に電磁鋼板の磁気飽和を考慮する必要がある。このとき縮約方程式の成分は機械角、電流振幅や電流位相角に依存することとなる。このため、状態変化毎に縮約方程式を構成し直すとともに、非線形の縮約方程式を解き直す必要がある。このことから、実時間処理で特性の算出が求められるビヘイビアモデルへは適応が難しいと考えられる。

これらの課題を解決するために本研究では回転機の電磁界解析手法として補間型モデル縮約を提案した。本手法は、PODに基づき磁界分布を圧縮して保存し、電流空間を有限要素に基づき補間する。機械角空間においては、近年流体解析など分野で注目されている動的モード分解を用いて補間を行うことによって、任意の電流、機械角に対応する磁界分布を復元することができる。本手法は、連立方程式を解くことなく、磁界分布の計算が可能であるため、有限要素法と比較して計算負荷を大幅に削減することが期待できる。また、磁界分布を復元するという特徴から、分布定数である、加振力や高調波鉄損についても計算が可能である。本手法を回転機の解析に適用し、数値実験を行うことによってトルク、トルクリプル、高調波鉄損などの集中定数、分布定数を問わず任意のモータ特性を高速かつ高精度に復元できることを示した。また、回転機の動的解析に適用するために電圧方程式との連成手法について検討し、数値検討を行い、実際に連成可能であることを示し、本手法の有効性を確認した。

キーワード： モデル縮約法，有限要素法，回転機，ビヘイビアモデル

Study on Fast Analysis of Rotating Machines

using Model Order Reduction

Hiroki Sakamoto

Abstract

Currently, in the development and design of electric motors for electric vehicles, electromagnetic field analysis using finite element method (FEM) has widely been used. Fast dynamic simulation of a motor and control system including inverters and gears has been required for such processes. It is difficult to perform the dynamic FE analysis for this purpose due to its large computing cost. Instead of the direct use of FEM, fast simulation has been performed based on the simplified approach referred to as behavior model. Although this approach is fast enough to simulate the dynamic behavior of the motor and control system, it is difficult to evaluate iron and copper losses and electromagnetic forces acting on the stator during the simulation because magnetic fields would have to be re-computed by FEM.

This paper proposes a simplified model order reduction for fast dynamic simulation of electric motors. In this method, magnetic fields expressed by reduced variables are stored into memory and restored using interpolation in the current-state space to make fast computation the properties of an electric motor. It is shown that torque, flux, electromagnetic force and the iron losses considering higher harmonics are computed by the proposed method accurately and effectively. Moreover, the proposed method is successfully coupled with the flux-based circuit equations.

Keywords: Model order reduction, Finite Element Method, Rotating machine, Behavior model.

目次

第1章 序論	1
1.1 研究の背景・目的	1
1.1.1 本研究の背景	1
1.1.2 本研究の目的	3
1.2 本論文の概要	3
第2章 電磁界有限要素法	5
2.1 有限要素法	5
2.1.1 電磁場の支配方程式	5
2.1.2 有限要素法	6
2.1.3 二次元静磁場有限要素法	8
2.1.4 四角形要素	11
2.1.5 2次元非線形有限要素法	14
2.1.6 周期境界条件	15
2.1.7 永久磁石を用いた有限要素法	18
2.1.8 電圧方程式と有限要素法との連成	19
2.2 特性計算方法	20
2.2.1 トルクの計算方法	20
2.2.2 鉄損の計算方法	21
2.3 第2章のまとめ	23
第3章 回転機の数学モデル	25
3.1 三相静止座標系モデル	25
3.2 二相静止座標系モデル(α - β 座標系)	27
3.3 二相回転座標系モデル(d - q 座標系)	28
3.4 第3章のまとめ	30
第4章 補間型モデル縮約法	31
4.1 モデル縮約法	31
4.1.1 固有値直交分解	31
4.1.2 定式化	31
4.2 提案手法（補間型モデル縮約法）	32
4.2.1 電流空間における補間	33
4.2.2 動的モード分解を用いた機械角補間	34
4.2.3 特性の算出	37
4.3 数値結果	39

4.3.1	解析条件および解析モデル	39
4.3.2	精度検証	43
4.4	縮約パラメータの影響調査	55
4.4.1	機械角スナップショット間隔に関する検討	55
4.4.2	基底ベクトル数の影響に関する検討	58
4.4.3	電流スナップショット間隔に関する検討	61
4.5	第4章のまとめ	63
第5章	補間型モデル縮約法のビヘイビアモデル化	65
5.1	ビヘイビアモデル化	65
5.1.1	鎖交磁束モデル	65
5.1.2	電圧方程式の解法	66
5.2	数値実験	68
5.2.1	計算条件	68
5.2.2	数値結果	69
5.3	第5章のまとめ	72
第6章	結論	73
6.1	補間型モデル縮約法	73
6.2	今後の展望	74
	謝辞	75
	参考文献	76
	研究業績	78

図目次

1.1	フロントローディング	1
1.2	電気自動車用モータの運転領域	2
2.1	ポテンシャルの直線による近似	6
2.2	2次元領域分割	7
2.3	三角形要素	7
2.4	四角形要素	7
2.5	面積座標	9
2.6	係数決定のための四角形要素	11
2.7	無次元化座標で表した四角形要素	13
2.8	任意形状における四角形要素	14
2.9	回転機の解析モデル	16
2.10	周期境界条件適用要素	17
2.11	外部回路との連成	20
2.12	ヒステリシスループの計算イメージ	23
3.1	回転機の等価モデル	25
3.2	回転機の等価モデル(d - q 座標系)	29
3.3	IPMSM のベクトル	30
4.1	固有値直交分解の概要	31
4.2	電流空間の補間	33
4.3	動的モード分解の概念	34
4.4	補間型モデル縮約法の計算の流れ	38
4.5	計算モデル	39
4.6	要素分割メッシュ	40
4.7	計算点と評価点	41
4.8	トルク波形比較($i_d = -2.0, i_q=6.0$)	43
4.9	トルク相対誤差($i_d = -2.0, i_q=6.0$)	43
4.10	d 軸磁束結果($i_d = -2.0, i_q=6.0$)	44
4.11	q 軸磁束結果($i_d = -2.0, i_q=6.0$)	44
4.12	トルク波形比較($i_d = -5.5, i_q=2.5$)	45

4.13	トルク相対誤差($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	45
4.14	d 軸磁束結果($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	46
4.15	q 軸磁束結果($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	46
4.16	半径方向電磁力($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	48
4.17	磁束密度分布($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	49
4.18	鉄損密度分布($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)	50
4.19	平均トルクのコンター図	52
4.20	トルクリプルのコンター図	52
4.21	鉄損のコンター図	53
4.22	平均トルク誤差のコンター図	53
4.23	鉄損誤差のコンター図	54
4.24	スナップショット間隔の影響 トルク波形($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	56
4.25	スナップショット間隔の影響 トルクの相対誤差($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	56
4.26	スナップショット間隔の影響 d 軸磁束結果($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	57
4.27	スナップショット間隔の影響 q 軸磁束結果($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	57
4.28	計算対象の s_0 と累積寄与率	58
4.29	基底ベクトル数の影響 トルク波形($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	59
4.30	基底ベクトル数の影響トルク波形誤差($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	59
4.31	基底ベクトル数の影響 d 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	60
4.32	基底ベクトル数の影響 q 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)	60
4.33	平均トルクコンター図(電流刻み 2A)	61
4.34	鉄損コンター図(電流刻み 2A)	61
4.35	平均トルク誤差(電流刻み 2A)	62
4.36	鉄損誤差(電流刻み 2A)	62
5.1	フローチャート	67
5.2	d 軸磁束の時間変化	69
5.3	q 軸磁束の時間変化	70
5.4	d 軸電流の時間変化	70
5.5	q 軸電流の時間変化	71
5.6	トルクの時間変化	71

表目次

4.1	解析パラメータ	40
4.2	縮約パラメータ	41
4.3	計算時間	43
4.4	計算対象の s_0 と累積寄与率の値	58
5.1	解析パラメータ	68

第1章 序論

本章では、本研究の背景・目的、および論文の章構成について述べる。

1.1 研究の背景・目的

本節では、研究の背景ならびに目的について述べる。

1.1.1 本研究の背景

産業界においては、高性能、高品質な製品をいち早く市場に投入する必要がある。そのため、製品の設計開発期間を短縮することが強く求められる。これに伴い、設計開発において、フロントローディングを実現することが重要な課題となる。フロントローディングは設計初期の段階で従来の試作や実験による性能評価を解析によって代替し、作業工数を削減するものである。フロントローディングを実現するために、電磁機器の設計開発においては、電磁界解析が幅広く用いられている。電磁界解析を用いることは電磁機器の試作前の特性が高精度に評価できることから、電磁機器の性能向上、設計開発期間短縮のための有効な手段である。電磁機器の高性能・高品質化のためには、膨大な繰り返し計算が必要な最適化計算[1-3]や電磁界と制御[4]、熱[5]、振動[6]などを考慮した連成解析が必要不可欠となっており、電磁界解析の計算時間を削減する必要性が高い。

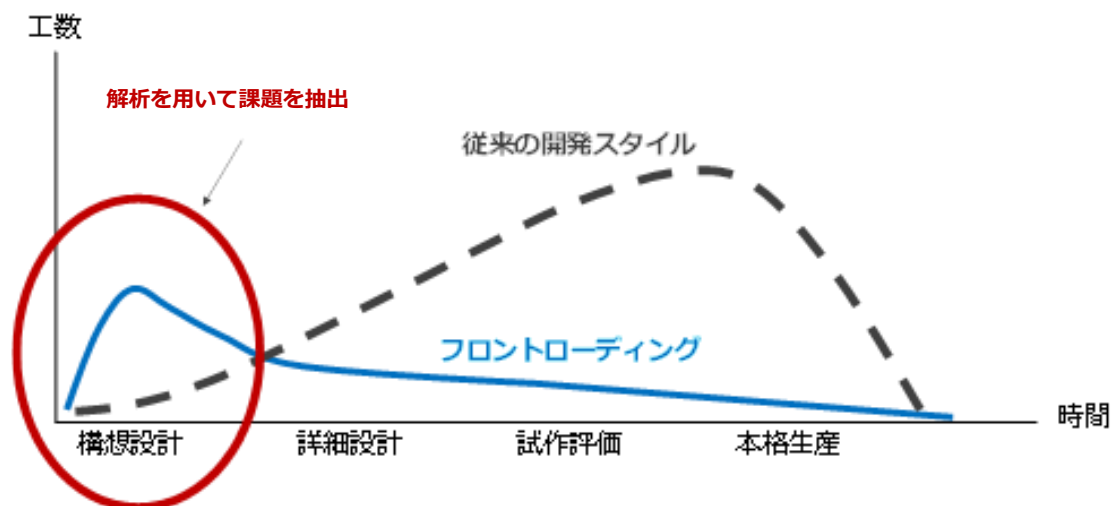


図 1.1 フロントローディング

回転機においては、環境問題などの背景から、電気自動車用モータの開発が積極的に行われている。ここで、電気自動車用モータの回転数-トルク特性を図 1.2 に示す。電気自動車用モータの運転点はその N-T 特性の内側の領域すべてに広がっている。開発・設計において、広い運転範囲における高効率や高信頼、静粛性などの要求特性を満たすことが求められる。また、運転範囲における動作状況は、制御によって決定される。そのため、電気的特性だけでなく制御と電磁界を連成させたうえで、熱や振動特性を求めることが強く求められる[7,8]。熱や振動特性を計算するためには、損失密度分布や電磁力分布などの分布量を計算する必要がある。このため、電磁界解析においては、一般的に有限要素法(Finite Element Method: FEM)[9-14]が用いられる。上述の検討を行う場合、FEM の計算時間がボトルネックとなり、FEM をそのまま適用することは困難である。そのため電磁界解析の高速化が強く求められている。

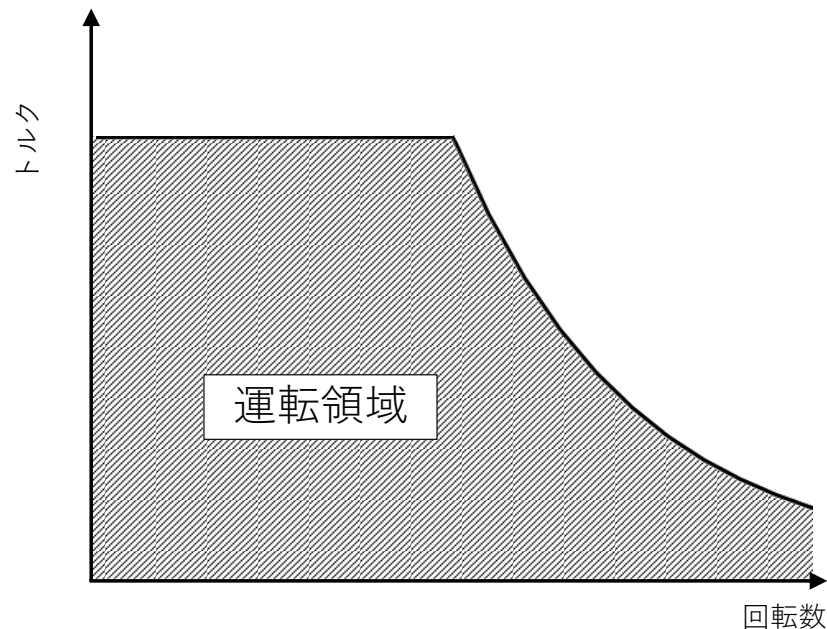


図 1.2 電気自動車用モータの運転領域

制御系を含む、検討においては従来、回転機の数学モデルを用いて行われてきた[15,16]。近年では FEM ベースとしたモータ制御系のモデル化と、そのモデルを用いた動作シミュレーションは非常に重要な役割を担っている。動作シミュレーションはいわゆるビヘイビアモデル[17-19]で実施されることが多い。この解析では、FEM を用いて作成した参照テーブルや応答局面から回転子位置に対応する磁束やインダクタンスなどを取得し、回路方程式を求める。この回路方程式を解くことで電流を決定し、トルクを求め、トルクを入力とした運動方程式を解くことで、回転子の新たな位置を決定する。このように決まる回転子の回転速度が目標に近づくように、入力電圧が制御される。このアプローチによりモータの動的な振る舞いを近似的に求めることができる。ただし、モータを集中定数回路として扱うため、空間的に分布する加振力や磁界の分布から求められる高調

波損失のような場の特性を求めることが難しく、電磁 - 振動や電磁-熱の連成解析などに用いることは困難である。

一方で FEM の計算時間を短縮するアプローチとして、固有直交分解 (POD : Proper Orthogonal Decomposition) に基づくモデル縮約 (MOR : Model Order Reduction) [21-26]がある。磁界の分布のスナップショットから正規直交基底を作成することにより、磁界を少数の基底で表し、有限要素方程式を基底の係数についての小さな方程式に変換することによって行列計算の計算コストを削減することができる。この方法は空間的に分布する場の特性も含めて計算することができる。しかしながら、回転機の解析においては一般に電磁鋼板の磁気飽和を考慮する必要がある。このとき縮約方程式の成分は機械角、電流振幅や電流位相角に依存することとなる。このため、状態変化毎に縮約方程式を構成し直すとともに、非線形の縮約方程式を解き直す必要がある。このことから、実時間処理で特性の算出が求められる動作シミュレーションへは適応が難しいと考えられる。

1.1.2 本研究の目的

本研究の目的は、上記の課題を解決し、電磁機器の設計開発を高効率に行うため、以下のような特徴を持った電磁界解析モデルを提案することを目的とする。

- ・高速に計算可能である
- ・分布量が計算可能である
- ・電気回路などと結合が可能である

本研究では、このような特徴を持った電磁界解析モデルを構築するために有限要素法とモデル縮約法を用いた、補間型モデル縮約法を提案する。

1.2 本論文の概要

以下に、本論文の内容を概説する。

第1章 序論

本章でははじめに本研究の研究背景を述べる。続いて研究目的について述べ、最後に本論文の構成について述べる。

第2章 有限要素法

本章では、本論文を読む上で必要となる FEM について述べる。まず、電磁界解析における支配方程式について記述し、その後、FEM の性質について述べる。さらに、三角形 FEM の詳細な導出過程について述べる。また、四角形要素の導出過程についてまとめる。また、非線形 FEM について述べ、回転機の解析に必要である、周期境界条件と永久磁石を含む場合の FEM や FEM と回路との結合方法について述べる。また、回転機の諸特性の計算方法についても述べる。

第3章 回転機の数学モデル

本章では、以降の章を理解するうえで重要な役割を果たす回転機の二相回転座標系の数学モデルの導出を行う。まずは物理的に存在する三相巻線に基づく三相静止座標系モデルを導出する。つぎに、三相静止座標系から変換行列を用いて、二相静止座標系モデルを導出し、最後に、二相回転座標系モデルを導出する。

第4章 補間型モデル縮約法

本章では、回転機の高速解析のために、PODに基づく補間型モデル縮約法を提案する。まず、PODについて説明を行う。その後、提案手法の詳細を述べる。FEMの結果と比較して、精度および速度についての比較を行いその有効性を示す。

第5章 補間型モデル縮約法のビヘイビアモデル化

本章では、4章で提案する補間型モデル縮約法をビヘイビアモデルへ適用するためのモデリング手法を提案する。まず電圧方程式の鎖交磁束モデル化を行い、提案手法と電圧方程式が磁束を用いて結合できることを示す。その後、電圧方程式の解法について説明する。数値検討によって、FEMと提案手法の結果比較を行い、その有効性を示す。

第6章 結論

各章の内容及び得られた結果を元に、本論文の総括を行う。

第2章 電磁界有限要素法

本章では、本論文を読む上で必要となる基礎理論について述べる。電磁界解析において一般的に用いられている有限要素法[9]について述べる。

2.1 有限要素法

有限要素法は1960年代初頭に構造力学の分野で考案された。その特徴として系が種々の媒質から成り、複雑な形状を有していても比較的簡単に解析することができることや、非線形性を有する解析に適している点があげられる。このような特徴から現在においては、構造力学、流体力学、熱力学、電磁界[10-14]などの様々な分野で最も広く使用されている。

2.1.1 電磁界の支配方程式

本節では、電磁界解析の有限要素方程式の導出に必要なマクスウェル方程式について述べる。マクスウェル方程式は以下の式で与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.4)$$

ここで、 $\mathbf{H}$ は磁界、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 $\mathbf{J}$ は電束密度、 $\mathbf{E}$ は電界、 ρ は電荷密度である。これらの方程式は、それぞれファラデーの法則、アンペールの法則、磁束密度に関するガウスの法則、電束密度に関するガウスの法則と呼ばれる。

また、 $\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ には次の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5)$$

ここで μ は透磁率である。磁束密度 $\mathbf{B}$ は磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.6)$$

よって, (2.1), (2.5), (2.6)式より, 次式を得ることができる.

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (2.7)$$

(2.7)式が静磁界における, 磁気ベクトルポテンシャルを用いた場合の支配方程式である. ここで, ν は磁気抵抗率であり,

$$\nu = \frac{1}{\mu} \quad (2.8)$$

である.

2.1.2 有限要素法

磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は, 領域内で複雑に変化しているが, 領域を細分してミクロにみたとき, 単純な関数形で近似しても大きな誤差は生じない. 図 2.1 のような一次元のポテンシャル分布を考える. 実線は, 実際のポテンシャル分布を, 破線は区間に分割し, それぞれの区間内は直線であるとして近似した場合を示す.

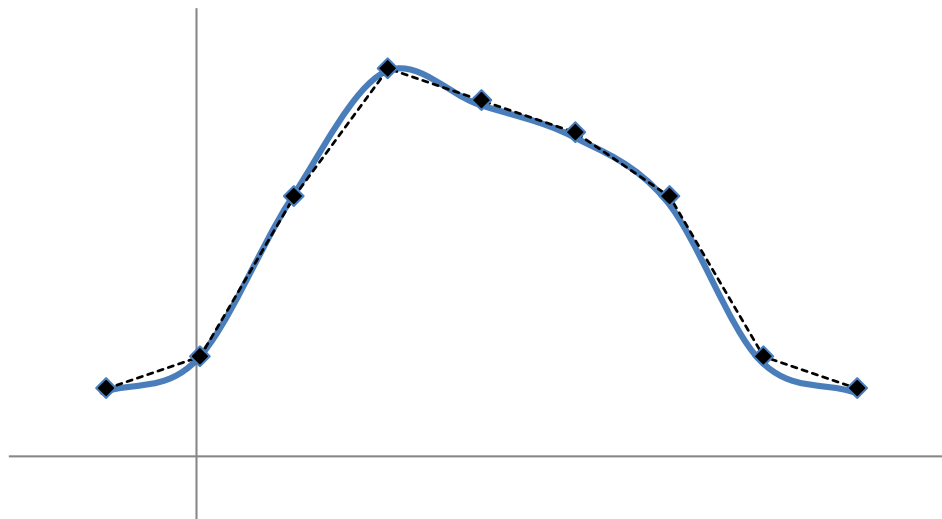


図 2.1 ポテンシャルの直線による近似

有限要素法は, 二次元問題においては領域内を多くの多角形に細分化し, 各々の領域内のポテンシャル分布を単純な関数で近似して解析する手法である. たとえば, 二次元三角形有限要素法の場合, 図 2.2 のように領域内を 3 角形の面に分割する.

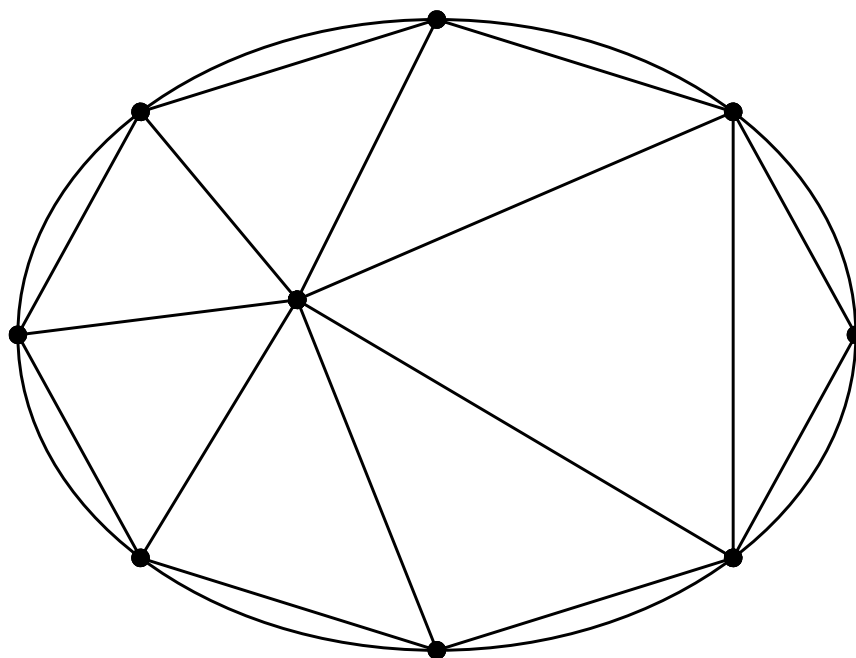


図 2.2 2次元領域分割

図 2.2 に示す各々の面素を要素(Element)と呼ぶ. 各要素には連続した番号(要素番号)を与え要素 e と呼ぶ. 2次元有限要素法において要素は主に図 2.3 に示す三角形と図 2.4 に示す四角形が用いられる. なお以下の要素はすべて一次要素である.

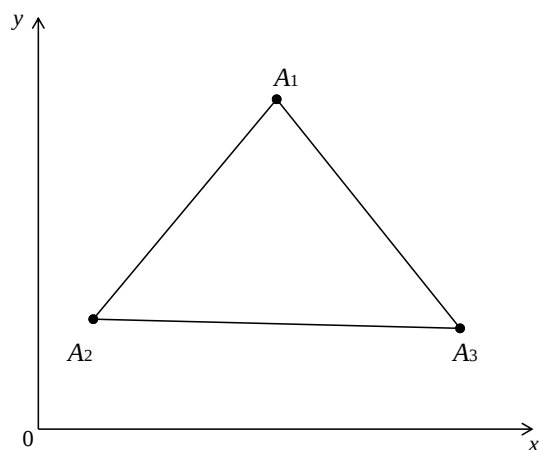


図 2.3 三角形要素

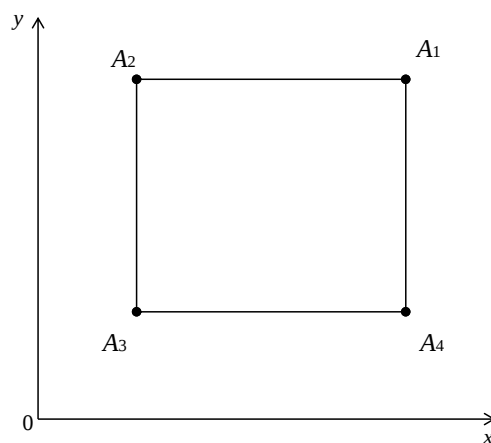


図 2.4 四角形要素

三角形要素において要素内任意点 x, y における磁気ベクトルポテンシャル A は補間関数 $N_{i(3)}$ を用いて次式で補間される.

$$A = \sum_{i=1}^3 N_{i(3)} A_i \quad (2.9)$$

また四角形要素においては補間関数 $N_{i(4)}$ を用いて次式で補間される.

$$A = \sum_{i=1}^4 N_{i(4)} A_i \quad (2.10)$$

2.1.3 二次元静磁界有限要素法

回転機の計算は二次元問題として解かれることが多い．そのため，二次元静磁界 FEM の定式化を行う．二次元問題において，支配方程式は(2.7)式より，

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = j_0 \mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

と書ける．ここで $\mathbf{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである．ここで，2次元問題において，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の z 成分 A_z を用いて $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \nabla A_z \times \mathbf{e}_z \quad (2.12)$$

と表すことができる．(2.12)式を(2.11)式に代入し，ベクトル公式によって変形すると

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A) = -j_0 \quad (2.13)$$

となる．(2.13)式は二次元静磁界における支配方程式である．

(2.13)式の両辺に重み付き残差法を用いて，重み関数 w を乗じて全領域 Ω で積分すると，

$$\int_{\Omega} w \nabla \cdot (\nu \nabla A) dS = - \int_{\Omega} w j_0 dS \quad (2.14)$$

任意の w に対して(2.14)式が成立すると逆に(2.13)式が成立する．(2.14)式に対し，部分積分を行うと，

$$\int_{\Omega} w \nabla \cdot (\nu \nabla A) dS = - \int_{\Omega} w j_0 dS \quad (2.15)$$

(2.15)式において境界でつぎの境界条件

$$A = A_0 \quad \text{on } \Gamma_e \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_n \quad (2.17)$$

が成立しているとする，弱形式である

$$\int_{\Omega} \nu \nabla w \cdot \nabla A dS = \int_{\Omega} w j_0 dS \quad (2.18)$$

を得ることができる．(2.18)式にガラーキン法を適用すると節点に重み関数 $w=N_i$ を配置すると，次式に書き直せる．

$$\int_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla A dS = \int_{\Omega} N_i j_0 dS \quad (2.19)$$

つぎに有限要素を用いて (2.19) 式を離散化する．2次元場においては一般的に三角形要素と四角形要素がある．本節では三角形要素について離散化を行う．

まず，三角形要素内でベクトルポテンシャル A を線形近似することを考える．面積座標を導入する．

$$\lambda_k = \frac{S_k}{S} \quad (2.20)$$

ここで S_k は図 2.5 に示す，頂点 k 以外の頂点と点 P がなす3角形の面積である．

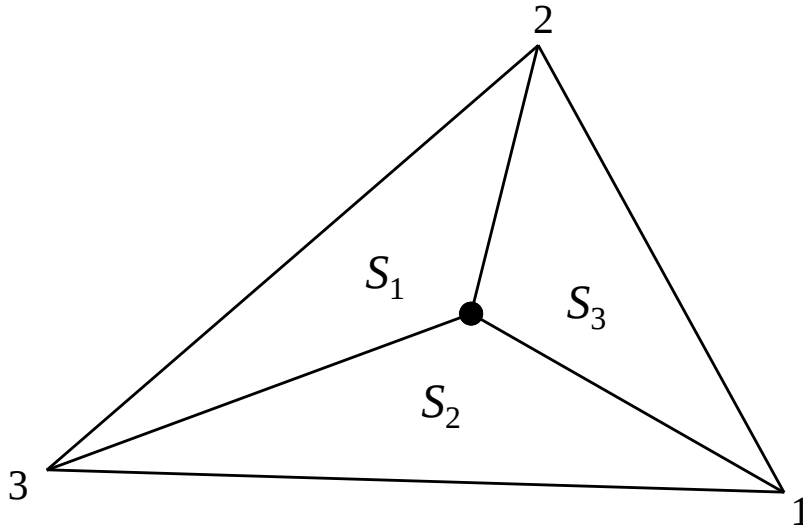


図 2.5 面積座標

点 P が三角形内にあるときは， $0 \leq \lambda_k \leq 1$ となる．また三角形外にあるときは， $\lambda_k = 0$ であり，頂点 k にあるときには $\lambda_k = 1$ ，頂点 k に向かいある辺にあるときは $\lambda_k = 0$ となる．また $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ を満たす．ここで先ほど定義した三角形要素の補間と λ_k を対応させると，

$$N_k = \lambda_k \quad (2.21)$$

となる．同様に要素内の座標を

$$x = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 \quad (2.22)$$

$$y = y_1 N_1 + y_2 N_2 + y_3 N_3 \quad (2.23)$$

と書くことができる．また，式(2.21)より座標と面積座標系の関係は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

と書ける．さらに逆の関係を求めると

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

となる．ここで S は要素の面積であり，また

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

である．このとき(2.21)式より次の関係も成立する．

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ここで，(2.19)式を(2.27)式を用いて近似すると

$$G_i = \sum_e \int_e \nu \nabla N_i \cdot (\nabla N_1 A_1 + \nabla N_2 A_2 + \nabla N_3 A_3) dS - \sum_e \int_e N_i J_0 \quad (2.28)$$

を得ることができる．ここで i は全体節点番号であり， j は局所節点番号である．

このとき 1 つの要素に注目すると，要素に含まれない節点 i の補間関数 N_i は 0 となり，第 1 項は $\mathbf{k} \mathbf{a}$ ，第 2 項 $\mathbf{j}$ と書ける． $\mathbf{k}$ は要素行列であり

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega_e} \nu \begin{bmatrix} \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_2 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_3 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_3 \end{bmatrix} dS \quad (2.29)$$

と定義される．また

$$\mathbf{j} = \int_{\Omega_e} J_0 [N_1, N_2, N_3]^t dS \quad (2.30)$$

である．ここで Ω_e はある 1 つの三角形要素を表す．また $N_k = \lambda_k$ であり，その微分は(2.27)式より求めることができる．

またこれらを積分公式

$$\int_{\Omega_e} \lambda_1^l \lambda_2^m \lambda_3^n dS = 2S \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} \quad (2.31)$$

を用いると $\mathbf{k}$ と $\mathbf{j}$ は

$$\mathbf{k} = \frac{\nu}{4S} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$j = \frac{s}{3} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_0 \\ J_0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

と求めることができる。ただし線形近似を行っているため磁気抵抗と電流密度は要素内で一定であるとした。(2.32)式の節点番号を全体節点番号に付けなおし、その重ね合わせによって

$$KA = J \quad (2.34)$$

の有限要素方程式を構築することができる。ただし K は $N \times N$ 行列、 A は N 行の未知ベクトル、 J は N 行の非同次ベクトル、 N は全節点数である。これによって静磁界の三角形要素を用いた二次元有限要素法は解くことができる。また四角形要素を用いた場合は、(2.20)式以降の手順は異なるが基本的に同様の手順を踏むことによって解くことができる。

2.1.4 四角形要素

四角形要素では、任意点 x, y のポテンシャル A を次式で近似する。

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (2.35)$$

ここで、 α は係数である。

このとき、(2.35)式をマトリクス表示すると、

$$A = [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

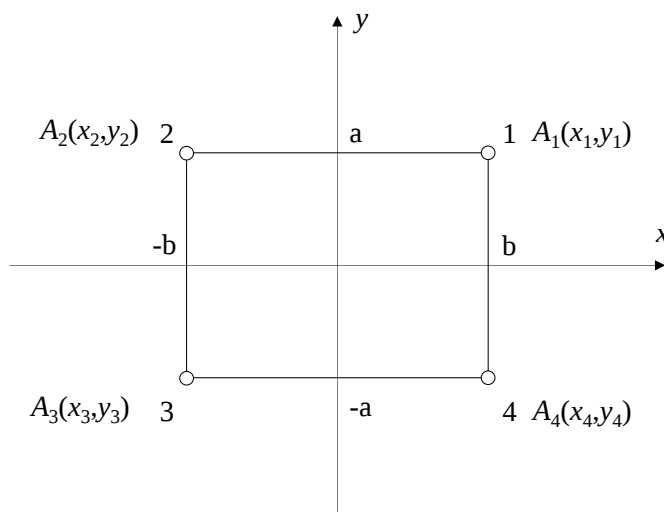


図 2.6 係数決定のための四角形要素

このとき係数 α を決定するために、各節点のポテンシャルと座標を図 2.6 のように定めると、

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

となる.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

ここで先ほど定義した四角形要素は

$$A = \sum_{i=1}^4 N_{i(4)} A_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

とかけるため、比較すると、

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.40)$$

となる. ここで図 2.6 のように、一辺の長さが $2a, 2b$ とした場合を考えると、 $x_1=a, y_1=b, \dots$ としておける. (2.41)式をとくと、四角形要素の補間関数は、

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \quad (2.41)$$

$$N_2 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) \quad (2.42)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) \quad (2.43)$$

$$N_4 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \quad (2.44)$$

となる. 上式は各辺の長さが $2a, 2b$ の場合かつ正方形における四角形補間関数である.

任意四角形要素の場合の補間関数を考えるために、次式のような無次元化座標を定義する．

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (2.45)$$

$$\eta = \frac{y}{a} \quad (2.46)$$

ここで、 $-1 \leq \xi \leq 1$ 、 $-1 \leq \eta \leq 1$ である．無次元化された座標は図 2.7 になる．

(2.45)、(2.46)式を(2.41)～(2.44)式に代入すると無次元化座標における補間関数が得られる．

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (2.47)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.48)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.49)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (2.50)$$

これによって図 2.8 のように任意形状の四角形要素においても(2.47)～(2.50)の形式で記述することができる．

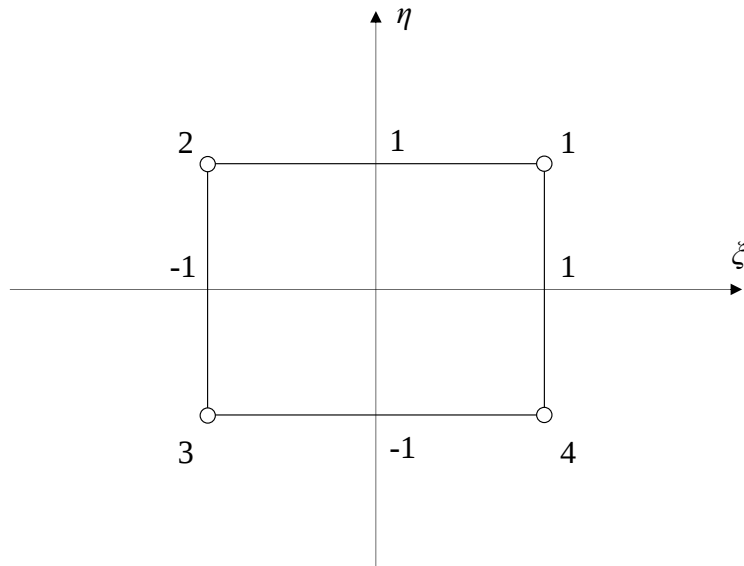


図 2.7 無次元化座標で表した四角形要素

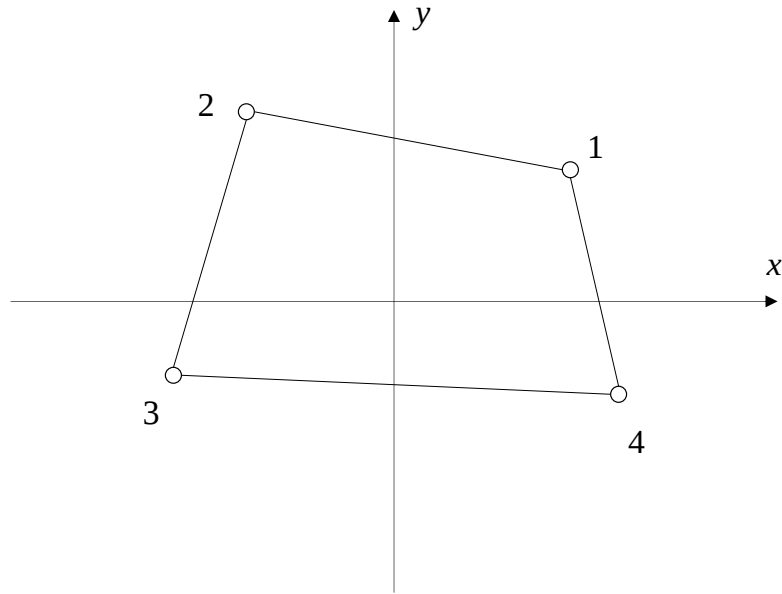


図 2.8 任意形状における四角形要素

2.1.5 2次元非線形有限要素法

前項までの有限要素方程式は線形問題に対応した式であり、磁気飽和を考慮できない。モータなどの解析において磁気飽和を考慮することは非常に重要である。そこで、本節では磁気飽和を考慮した解析を行うために、ヒステリシスが磁界に与える影響が小さいと仮定し、B-H カーブの初期磁化曲線を考慮した、ニュートン・ラフソン法を用いた非線形有限要素法の定式化を行う。

有限要素法のニュートン・ラフソン法を導出するために次式のような二変数の連立方程式を考える。

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \quad (2.51)$$

u 回目の根の推測値を $x^{(u)}$, $y^{(u)}$ とし, $f(x, y)$, $g(x, y)$ を二変数関数のテイラー展開をおこなうと

$$\begin{aligned} & f(x^{(u)} + \delta x^{(u)}, y^{(u)} + \delta y^{(u)}) \\ &= f(x^{(u)}, y^{(u)}) + \frac{\partial}{\partial x^{(u)}} f(x^{(u)}, y^{(u)}) \delta x^{(u)} + \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} f(x^{(u)}, y^{(u)}) \delta y^{(u)} + \dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$g(x^{(u)} + \delta x^{(u)}, y^{(u)} + \delta y^{(u)})$$

$$= g(x^{(u)}, y^{(u)}) + \frac{\partial}{\partial x^{(u)}} g(x^{(u)}, y^{(u)}) \delta x^{(u)} + \frac{\partial}{\partial y^{(u)}} g(x^{(u)}, y^{(u)}) \delta y^{(u)} + \dots \quad (2.53)$$

ここで2次以上の項を無視し、 $x^{(u)} + \delta x^{(u)}$ 、 $y^{(u)} + \delta y^{(u)}$ が真値であるとし、 $f(x^{(u)} + \delta x^{(u)}, y^{(u)} + \delta y^{(u)})$ 、 $g(x^{(u)} + \delta x^{(u)}, y^{(u)} + \delta y^{(u)})$ を0とおき、マトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^{(u)}, y^{(u)})}{\partial x^{(u)}} & \frac{\partial f(x^{(u)}, y^{(u)})}{\partial y^{(u)}} \\ \frac{\partial g(x^{(u)}, y^{(u)})}{\partial x^{(u)}} & \frac{\partial g(x^{(u)}, y^{(u)})}{\partial y^{(u)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x^{(u)} \\ \delta y^{(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x^{(u)}, y^{(u)}) \\ -g(x^{(u)}, y^{(u)}) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

(2.54)式を解いて、 $\delta x^{(u)}$ 、 $\delta y^{(u)}$ を求めることができれば、 $(u+1)$ 回目の反復で得られる近似値 $x^{(u+1)}$ 、 $y^{(u+1)}$ は次式で与えられる。

$$x^{(u+1)} = x^{(u)} + \delta x^{(u)}, \quad y^{(u+1)} = y^{(u)} + \delta y^{(u)} \quad (2.55)$$

(2.55)式よりニュートン・ラフソン法を用いれば、有限要素法において $u+1$ 回目の反復で得られる節点 i のポテンシャルの近似解 $A_i^{(k+1)}$ は次式で与えられる。

$$A_i^{(u+1)} = A_i^{(u)} + \delta A_i^{(u)} \quad (2.56)$$

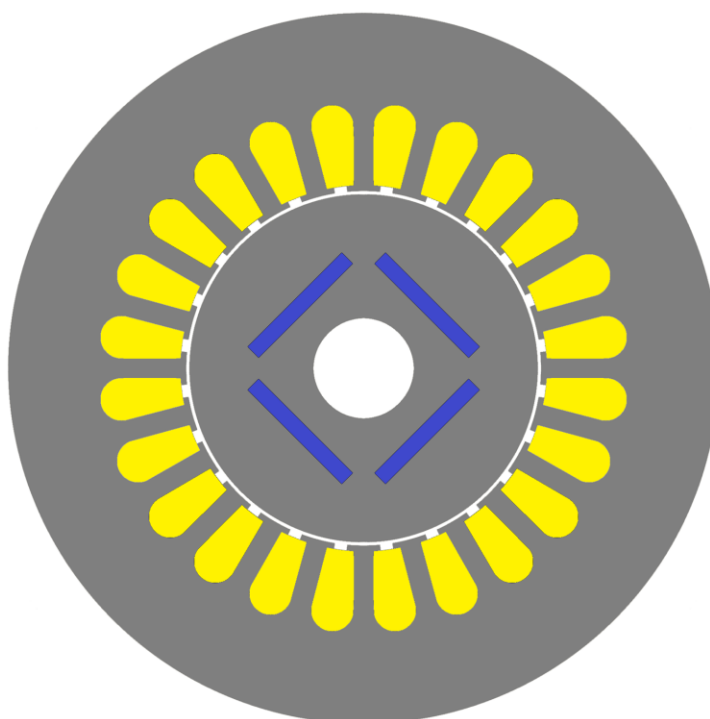
よって、(2.55)式を多変数に拡張し、(2.56)式を用いて次式を解くことによって求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial A_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial A_n} \\ \vdots & \frac{\partial G_k}{\partial A_k} & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial A_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial A_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A_1 \\ \vdots \\ \delta A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta G_1 \\ \vdots \\ \delta G_n \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

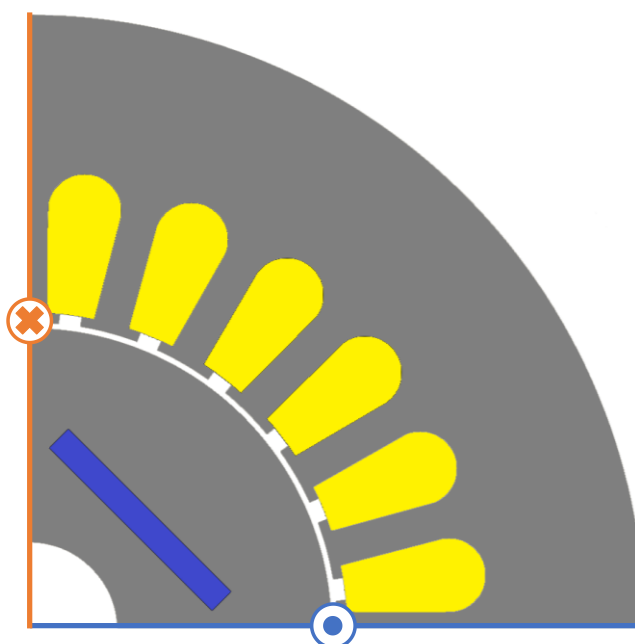
ただし、(2.57)式での A_k 、 G_k はすべて u 回目の値である、

2.1.6 周期境界条件

周期境界条件は IPM モータ解析に用いる境界条件である。モータ内には円周方向に沿って同じ磁束分布が周期的に現れる。そのため周期境界条件を用いて解析領域を削減することができる。例えば、図 2.9(a)のような4極モータがあった場合、磁束分布は1極ピッチごとに同じ分布が現れる。このため、解析領域は図 2.9(b)のように 1/4 領域とすることができるため計算コストを大幅に削減することができる。



(a) 4極モータフルモデル



(b) 1/4 領域

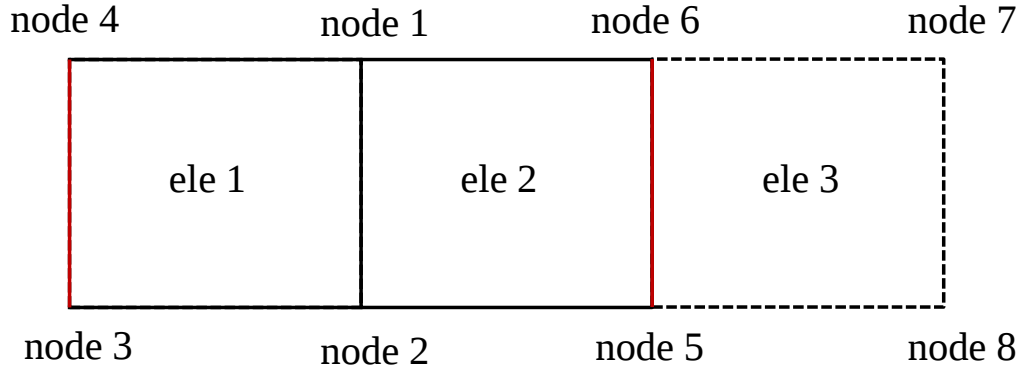
図 2.9 回転機の解析モデル

このような場合は、境界に周期境界を与えればよい。このとき 1 極ピッチ離れて対応する 2 点, node1 と node2 のベクトルポテンシャル A_1 , A_2 の間には次の関係がある。

$$A_1 = -A_2 \quad (2.58)$$

(2.58)式は1極ピッチ離れた周期境界上のベクトルポテンシャルの絶対値は等しく、符号は反対になるということを示している。

周期境界条件を考えるために図2.10のような3つの要素からなる四角形要素を考える。



周期境界条件適用部

図2.10 周期境界条件適用要素

図2.10においてele1の左側とele2の右側に周期境界条件を適用し、対応節点においては(2.58)式と同様な関係があるものとする。

まず、ele.1を考える。ガラーキン法の式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} G_1^{e1} \\ G_2^{e1} \\ G_3^{e1} \\ G_4^{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{e1} & S_{12}^{e1} & S_{13}^{e1} & S_{14}^{e1} \\ S_{21}^{e1} & S_{22}^{e1} & S_{23}^{e1} & S_{24}^{e1} \\ S_{31}^{e1} & S_{32}^{e1} & S_{33}^{e1} & S_{34}^{e1} \\ S_{41}^{e1} & S_{42}^{e1} & S_{43}^{e1} & S_{44}^{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

式(2.40)において G はガラーキン法の式、 S は要素係数マトリックス、上部添え字は要素番号、下部添え字は節点番号を示す。

つぎにele.3を考える。

$$\begin{bmatrix} G_7^{e3} \\ G_8^{e3} \\ G_5^{e3} \\ G_6^{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{77}^{e3} & S_{78}^{e3} & S_{75}^{e3} & S_{76}^{e3} \\ S_{87}^{e3} & S_{88}^{e3} & S_{85}^{e3} & S_{86}^{e3} \\ S_{57}^{e3} & S_{58}^{e3} & S_{55}^{e3} & S_{56}^{e3} \\ S_{67}^{e3} & S_{68}^{e3} & S_{65}^{e3} & S_{66}^{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_7 \\ A_8 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

ここで、周期境界条件を適用すると(2.58)式と同様に $A_3 = -A_5$ 、 $A_4 = -A_6$ となる。また、周期境界条件を適用したことによる要素の対称性からele1とele3は合同でなければならないため、 $S_{77}^{e3} = S_{11}^{e1}$ 、 $S_{78}^{e3} = S_{12}^{e1}$ 、…となることから(2.59)式と(2.60)式はまとめることができ、次式となる。

$$\begin{bmatrix} G_1^{e1} \\ G_2^{e1} \\ G_5^{e3} \\ G_6^{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{e1} & S_{12}^{e1} & -S_{13}^{e1} & -S_{14}^{e1} \\ S_{21}^{e1} & S_{22}^{e1} & -S_{23}^{e1} & -S_{24}^{e1} \\ -S_{31}^{e1} & -S_{32}^{e1} & S_{33}^{e1} & S_{34}^{e1} \\ -S_{41}^{e1} & -S_{42}^{e1} & S_{43}^{e1} & S_{44}^{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

この手順を踏むことにより、ele3 の要素係数マトリックスの計算の必要がなくなるため ele3 を考える必要がなくなる。周期境界部の計算においては、上記のとおり周期境界に接する要素の要素係数マトリックスを求め、(2.61)式のように周期境界上の節点に関する行や列の S の符号を変更し、境界上のベクトルポテンシャルを(2.58)式のように対応させればよい。

2.1.7 永久磁石を用いた有限要素法

永久磁石を有する領域を解析する場合、永久磁石は磁化 M を用いて表現する。また、その際一般の磁性体の磁気特性は μ を用いて表現する。すなわち、永久磁石の磁気特性は次式で表せる。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (2.62)$$

また、一般の磁性体は次式で表せる。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.63)$$

このように、永久磁石と一般磁性体がある領域を取り扱うときは、それぞれを別の式で取り扱う。また、磁性体の定式化は前節と変わらないため、本項においては、永久磁石の解析法について記述する。

(2.62)式にアンペアの周回積分の法則を適用すると

$$\nabla \times \nu_0 (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}) - \mathbf{J}_0 = 0 \quad (2.64)$$

となる。また、磁化によって生じる項を次式のようにおく。

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \nu_0 \mathbf{M} \quad (2.65)$$

この $\mathbf{J}_m$ は等価磁化電流密度と呼ぶ。つぎに(2.45)式に(2.46)式を代入すると、

$$\nabla \times \nu_0 (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_m \quad (2.66)$$

となる。このように、永久磁石中の磁界は、通常の方程式に等価電流密度の項を付け加えたものとなる。また $\mathbf{J}_m$ は 2 次元場において次式のように表現する。

$$j_m = \nu_0 \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (2.67)$$

ここで M_x , M_y は磁化 $\mathbf{M}$ の x 方向成分と y 方向成分, j_m は $\mathbf{J}_m$ の z 方向成分である. よって永久磁石を用いた 2 次元問題の支配方程式は次式となる.

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A) = -j_0 - j_m \quad (2.68)$$

(2.68)式から有限要素方程式を導出する手順は, 2.1.3 項と同様である. また非線形問題を解く際も, 2.1.5 項のニュートン・ラフソン法を解くことによって求められる. なお本研究においては, 永久磁石の磁気特性は線形で近似している.

2.1.8 外部回路と有限要素法との連成

回転機は通常, 外部回路と連成されている. そこで, 外部回路と回転機を連成した解析を行う必要がある. また通常の FEM では, ソース項が電流入力となるため, 外部回路との連成解析のためには, 電圧入力の手法を検討する必要がある. 図 2.11 に示すような簡単な回路を考える. ここで FEM 領域と囲われている部分が FEM により解析を行う部分である. また漏れ磁束は存在しない, コイルに渦電流が発生しないと仮定する. このとき, 回路方程式は, 次式となる.

$$v = \frac{d\Psi}{dt} + Ri \quad (2.69)$$

ここで, 第一項は有限要素解析領域に内の誘起電圧であり, v は電圧, Ψ は電機子鎖交磁束, R は電機子抵抗, i は電流を表す. また, 有限要素モデル内の Ψ は

$$\Psi = \frac{n_c}{s_c} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (2.70)$$

で表現できる. ここで, n_c , s_c はコイルの巻き数, コイルの断面積である. これにより, この回路方程式と有限要素方程式を連立して解くことにより, 回路が連成されている場合においても有限要素解析が可能となる.

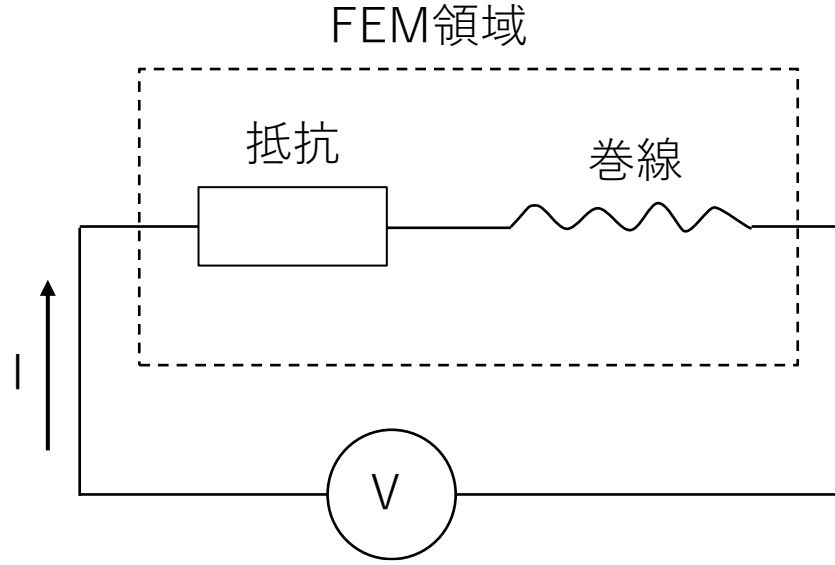


図 2.11 外部回路との連成

2.2 特性計算方法

本節では、回転機の諸特性の計算方法について記述する。

2.2.1 トルクの計算方法

本研究において、トルクの計算は節点法を用いる。節点法は磁性体内の有限要素の各節点に働く力を求める手法であり、トルク計算の際の取り扱いの簡便さや、各節点における力を求めることができるため、電磁界解析において広く用いられる。

磁界による体積力 $\mathbf{f}_v$ および表面力 $\mathbf{f}_s$ は、以下のようになる。

$$\mathbf{f}_v = \text{div} \mathbf{T} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{f}_s = (\mathbf{T}|_2 - \mathbf{T}|_1) \cdot \mathbf{n} \quad (2.72)$$

ここで、 $\mathbf{T}$ はマクスウェルの応力テンソル、 $\mathbf{n}$: 面の媒質 1 側から 2 側に向かう法線ベクトルである。また、2次元場において $\mathbf{T}$ は次式で表現される。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} B_x^2 - B_y^2 & 2B_x B_y \\ 2B_x B_y & B_y^2 - B_x^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

ここで B_x , B_y はそれぞれ x 方向, y 方向磁束密度である。

つぎに仮想変位 δu を，スカラー補間関数 N_i を用いて次式によって内挿する．

$$\delta u = \sum_i N_i \delta u_i \quad (2.74)$$

この分布仮想変位に対するエネルギーの変分 δW は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint_V \text{div} \mathbf{T} \delta u \, dV + \iint_S \{(\mathbf{T}|_2 - \mathbf{T}|_1) \cdot \mathbf{n}\} \delta u \, dS \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \delta u \, dS - \iiint_V \text{grad} \delta u \cdot \mathbf{T} \, dV + \iint_S \{(\mathbf{T}|_2 - \mathbf{T}|_1) \cdot \mathbf{n}\} \delta u \, dS \\ &= - \iiint_V \text{grad} \delta u \cdot \mathbf{T} \, dV \end{aligned} \quad (2.75)$$

(2.75)式に(2.74) 式を代入すると

$$\delta W = \sum_i \left(- \iiint_V \mathbf{T} \cdot \text{grad} N_i \cdot \delta u_i \, dV \right) \quad (2.76)$$

また， $\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i$ と置けると仮定すると，各節点毎の節点力 $\mathbf{f}_i$ は

$$\mathbf{f}_i = - \iiint_V \mathbf{T} \cdot \text{grad} N_i \, dV \quad (2.77)$$

となる．

ここで(2.73)式を用いて(2.77)式を変形すると

$$\mathbf{f}_{ix} = \frac{1}{2\mu} \iint_S \left((B_x^2 - B_y^2) \frac{\partial N_i}{\partial x} + 2B_x B_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dS \quad (2.78)$$

$$\mathbf{f}_{iy} = \frac{1}{2\mu} \iint_S \left(2B_x B_y \frac{\partial N_i}{\partial x} + (B_y^2 - B_x^2) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dS \quad (2.79)$$

となる．トルクは電磁力の総和であるため

$$T = \sum_i (-y_i f_{ix} + x_i f_{iy}) \quad (2.80)$$

となる．

2.2.2 鉄損の計算方法

鉄損の計算手法は様々な手法が提案されている[27-29]．本研究において鉄損は磁界解析の結果から文献[27]で提案されている手法を用いて，後处理的に求める．電磁鋼板に単一周波数の交番磁界が加わったとき，単位重さあたりの鉄損 w_i は近似的にステインメツツの実験式で表されることが知られている．

$$w_i = K_e f^2 B_{max}^2 + K_h f B_{max}^2 \quad (2.81)$$

ここで、 f は周波数、 K_e は渦電流損係数、 K_h はヒステリシス損係数である。ここで、全鉄損は鋼板面に平行な磁束密度 B_r 、 B_θ (それぞれ半径、周方向磁束密度) が個別に加わった時の鉄損の合計であると仮定し、渦電流損、ヒステリシス損をそれぞれ求める。

・渦電流損の導出

鋼板において、後半面と平行に通る磁束密度が時間変化した場合、単位重さ当たりの渦電流損 w_{ie} は次式となる。

$$w_e = \frac{\kappa h \sigma_{iron}}{12D} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{dB}{dt} \right| dt \quad (2.82)$$

ここで、 κ は補正係数、 h は鋼板厚さ、 σ_{iron} は鋼板の導電率、 D は鋼板の密度、 T は解析時間を表す。(2.82)式において

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{dB}{dt} \right| dt = 2\pi^2 f^2 B_{max}^2 \quad (2.83)$$

と近似したものが、(2.81)式の第一項とみなせる。ここでは(2.81)式をもとに、材料試験により求められる K_e を用いて渦電流損 W_e を表すと次式となる。

$$W_e = \frac{K_e D}{2\pi^2} \int_L \sum_{k=1}^L \left\{ \left(\frac{B_r^{k+1} - B_r^k}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{B_\theta^{k+1} - B_\theta^k}{\Delta t} \right)^2 \right\} dv \quad (2.84)$$

ここで Δt は時間刻み、 L はサンプリング回数である。

・ヒステリシス損の導出

時間高調波を含む磁界が鋼板に加わると、ヒステリシスループにはマイナーループが発生する。マイナーループを考慮しないと鉄損の過小評価につながる。ここでは、下記のような仮定を行う。

(1) 磁束密度の時間変化におけるすべての極大・極小値はヒステリシスループを作る要因となる。

(2) 各ヒステリシスループは、基本派の交番磁界によるものと相似形である

(3) ヒステリシス損は、各ヒステリシスループの面積の総和である。

上記の仮定のもとヒステリシス損の算出を行うと次式となる。

$$W_h = \frac{K_h D}{T} \sum_{i=1}^{NE} \frac{\Delta V_i}{2} \left(\sum_{j=1}^{N_{pr}^i} (B_{mr}^{ij})^2 + \sum_{j=1}^{N_{p\theta}^i} (B_{m\theta}^{ij})^2 \right) \quad (2.85)$$

ここで NE は鉄心に含まれる要素数、 ΔV_i は要素体積、 N_{pr} 、 $N_{p\theta}$ はそれぞれ半径方向、周方向の磁束密度における極大極小値の数、 B_{mr} 、 $B_{m\theta}$ は N_{pr} 、 $N_{p\theta}$ に対応する径方向および周方向磁束密度の振幅である。

鉄損は最終的に、次式として求められる。

$$W = W_e + W_h \quad (2.86)$$

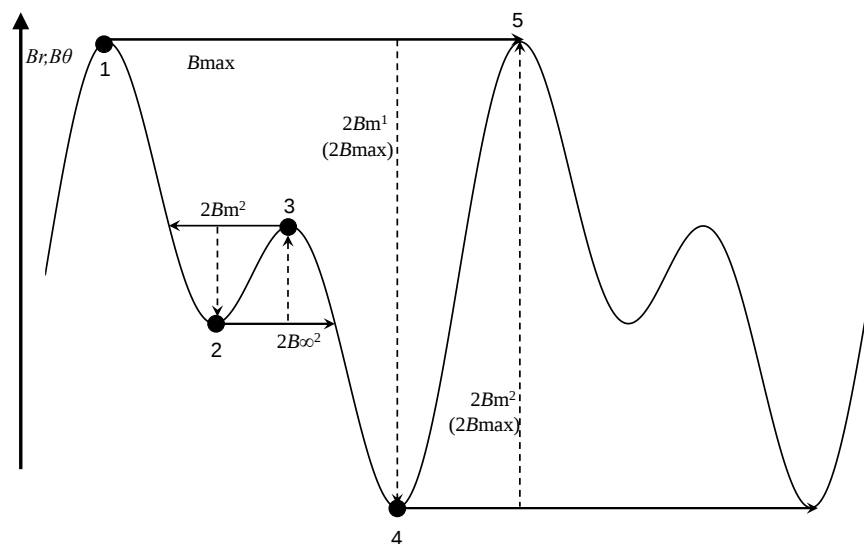


図 2.12 ヒステリシスループの計算イメージ

2.3 第2章のまとめ

第2章では、本論文を読む上で必要となる有限要素法について述べた。まず、電磁界解析における支配方程式について記述し、その後、有限要素法の性質について述べた。さらに、三角形有限要素法の詳細な導出過程について述べた。また、四角形要素の導出過程についてまとめた。また、非線形有限要素法について述べた。つぎに、回転機の解析に必要である、周期境界条件と永久磁石を含む場合のFEMやFEMと回路との結合方法について述べた。また、回転機の諸特性の計算方法についても述べた。

第3章 回転機の数学モデル

本章では，以降の章を理解するうえで重要な役割を果たす回転機の数学モデルについて記述する．埋込型磁石同期モータ (Interior Permanent magnet synchronous machine : IPMSM) の特性解析や制御手法の検討，モータドライブシステム設計にはモータの数式モデルが必須である[15],[16],[30]．物理的に存在する三相巻線に基づくモデルを基本として，座標変換を行い $d-q$ 座標系のモデルを導出する． $d-q$ 座標系のモデルは電圧，電流を直流量として扱うことができることから，解析や制御にて一般的に用いられる数学モデルである．

3.1 三相静止座標系モデル

三相静止座標系における電圧方程式の導出を行う．
まずは，IPMSM の等価モデルを図 3.1 に示す．

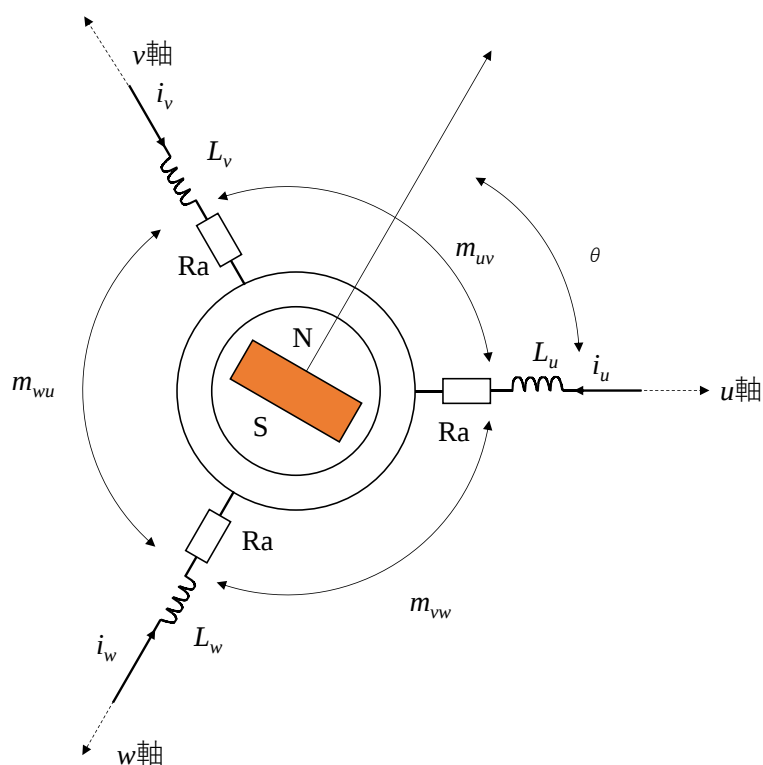


図 3.1 回転機の等価モデル

三相巻線に基づく電圧方程式は巻線抵抗による電圧低下と誘導起電力により次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_u & M_{uv} & M_{wu} \\ M_{uv} & L_v & M_{vw} \\ M_{wu} & M_{vw} & L_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_f \cos \theta \\ \Psi_f \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \Psi_f \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\Psi_{uvw} = L i_{uvw} + \Psi_f \quad (3.2)$$

ここで、 Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w は u, v, w 相の電機子鎖交磁束、 i_u, i_v, i_w は u, v, w 相の電機子電流、 L_u, L_v, L_w は u, v, w 相の自己インダクタンス、 M_{uv}, M_{vw}, M_{wu} は各層間の相互インダクタンス、 Ψ_f は一層当たりの永久磁石による電機子鎖交磁束の最大値、 θ は電気角、 Ψ_{uvw} は三相静止座標系における磁束鎖交数ベクトル、 i_{uvw} は三相静止座標系における電機子電流ベクトル、 Ψ_f は三相静止座標系における永久磁石による磁束鎖交数ベクトル、 L は三相静止座標系におけるインダクタンス行列を示す。

自己インダクタンスと相互インダクタンスは、逆突極性のある IPMSM を仮定し、その変化が回転子位置 θ に依存し、また正弦波で変化すると仮定すると

$$L_u = l_a + L_a - L_{as} \cos 2\theta \quad (3.3)$$

$$L_v = l_a + L_a - L_{as} \cos \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.4)$$

$$L_w = l_a + L_a - L_{as} \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.5)$$

$$M_{uv} = -\frac{L_a}{2} - L_{as} \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.6)$$

$$M_{vw} = -\frac{L_a}{2} - L_{as} \cos 2\theta \quad (3.7)$$

$$M_{wu} = -\frac{L_a}{2} - L_{as} \cos \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.8)$$

と表現できる。ここで、 l_a は一相あたりの漏れインダクタンス、 L_a は一相あたりの有効インダクタンスの平均値、 L_{as} は一相あたりの有効インダクタンス振幅を示す。

三相巻線に基づく電圧方程式は巻線抵抗による電圧低下と誘導起電力により次式で表現される。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} &= R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} \\
&= R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_u & M_{uv} & M_{wu} \\ M_{uv} & L_v & M_{vw} \\ M_{wu} & M_{vw} & L_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\Psi_f \sin \theta \\ -\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (3.9) \\
&= \begin{bmatrix} R_a + pL_u & pM_{uv} & pM_{wu} \\ pM_{uv} & R_a + pL_v & pM_{vw} \\ pM_{wu} & pM_{vw} & R_a + pL_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\Psi_f \sin \theta \\ -\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{uvw} = R_a \mathbf{i}_{uvw} + p \mathbf{L} \mathbf{i}_{uvw} + \mathbf{e}_{uvw} = \mathbf{Z}_{uvw} \mathbf{i}_{uvw} + \mathbf{e}_{uvw} \quad (3.10)$$

ここで v_u, v_v, v_w はu, v, w相の電機子電圧, R_a は電機子抵抗, p は微分演算子, ω は電気角速度, $\mathbf{v}_{uvw}$ は三相静止座標系における電機子電圧ベクトル, $\mathbf{e}_{uvw}$ は三相静止座標系における永久磁石による誘起起電力ベクトル, $\mathbf{Z}_{uvw}$ は三相静止座標系におけるインピーダンス行列である。

3.2 二相静止座標系モデル(α - β 座標系)

三相座標系の電圧方程式を二相静止座標系(α - β 座標系)に変換する。

この変換では次式の変換行列を用いる。

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

上式を用いると, (3.10)式は

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} \mathbf{v}_{uvw} = (\mathbf{C}_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{uvw} \mathbf{C}_{\alpha\beta}^t) (\mathbf{C}_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{uvw}) + \mathbf{C}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{uvw} \quad (3.12)$$

であることから

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + p(L_0 + L_1 \cos 2\theta) & pL_1 \sin 2\theta \\ pL_1 \sin 2\theta & R_a + p(L_0 - L_1 \cos 2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega \Psi_a \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\alpha\beta} + \mathbf{e}_{\alpha\beta} \quad (3.14)$$

が得られる。ここで, $L_0 = l_a + \frac{3L_a}{2}$, $L_1 = -\frac{3L_{as}}{2}$, $\Psi_a = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_f$ であり, v_α, v_β は電機子電圧の α, β 軸成分, i_α, i_β は電機子電流の α, β 軸成分, $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ は α - β 座標系における電機子

電圧ベクトル, $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ は α - β 座標系における電機子電圧ベクトル, $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$ は α - β 座標系における電機子電流ベクトル, $\mathbf{Z}_{\alpha\beta}$ は α - β 座標系におけるインピーダンス行列を示す.

3.3 二相回転座標系モデル(d - q 座標系)

α - β 座標系の電圧方程式を回転子と同期して回転する回転座標系である d - q 座標系に変換する.

この時, 次式の変換行列を考える.

$$\mathbf{C}_{dq} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

前節と同様に

$$\mathbf{C}_{dq}\mathbf{v}_{\alpha\beta} = (\mathbf{C}_{dq}\mathbf{Z}_{\alpha\beta}\mathbf{C}_{dq}^t)(\mathbf{C}_{dq}\mathbf{i}_{\alpha\beta}) + \mathbf{C}_{dq}\mathbf{e}_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

であることから d - q 座標系の電圧方程式は

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_d & -\omega L_q \\ \omega L_d & R_a + pL_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_a \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{v}_{dq} = \mathbf{Z}_{dq}\mathbf{i}_{dq} + \mathbf{e}_{dq} \quad (3.18)$$

となる. ここで, $L_d = L_0 + L_1$, $L_q = L_0 - L_1$ であり, d , q 軸インダクタンスと呼ぶ, また d , q 軸成分, i_d , i_q は電機子電流の d , q 軸成分, $\mathbf{v}_{dq}$ は d - q 座標系における電機子電圧ベクトル, $\mathbf{i}_{dq}$ は d - q 座標系における電機子電流ベクトル, $\mathbf{Z}_{dq}$ は d - q 座標系におけるインピーダンス行列を示す.

三相静止座標系における鎖交磁束の式を同様に d - q 座標系に変換すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Psi_{dq} = L_{dq}\mathbf{i}_{dq} + \Psi_a \quad (3.20)$$

ここで, Ψ_d , Ψ_q は電機子鎖交磁束の d , q 軸成分, Ψ_{dq} は d - q 座標系における磁束鎖交数のベクトル L_{dq} は d - q 座標におけるインダクタンス行列である. このように鎖交磁束数も簡易に計算することができる. 図 3.2 に IPMSM の d - q 座標系における等価モデルを示す. また, 定常状態における IPMSM の基本ベクトル図を図 3.3 に示す.

また, 三相静止座標系における電流ベクトルを d - q 座標系に変換する. 三相静止座標系の電流ベクトルは正弦波入力を仮定すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = I_{uvw} \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \beta) \\ -\sin\left(\theta + \beta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\left(\theta + \beta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{uvw} \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$I_a = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \quad (3.23)$$

よって相電流の電流振幅は

$$I_{uvw} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \quad (3.24)$$

となる.

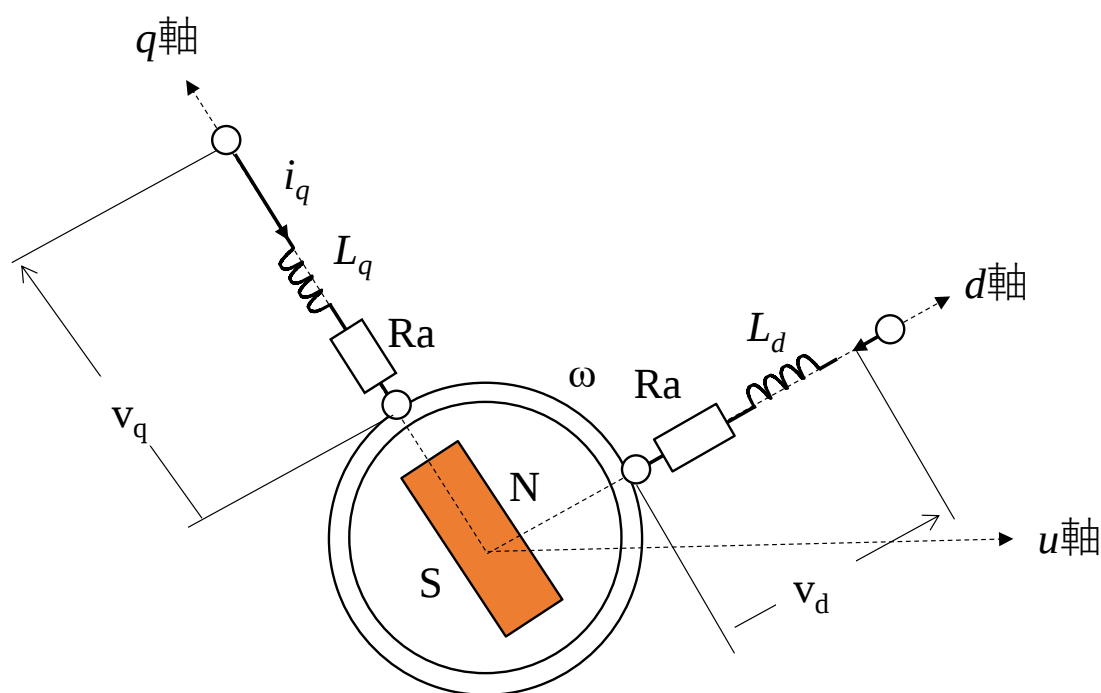


図 3.2 回転機の等価モデル(d-q 座標系)

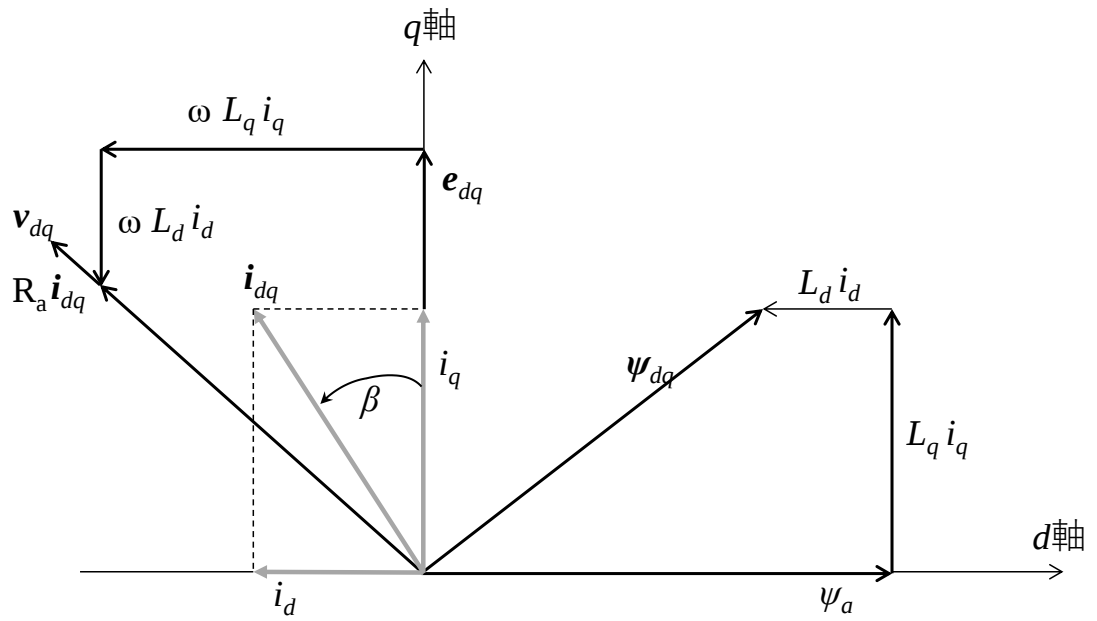


図 3.3 IPMSM のベクトル図

3.4 第3章のまとめ

本章では、以降の章を理解するうえで重要な役割を果たす回転機の d - q 座標系の数学モデルの導出を行った。まずは物理的に存在する三相巻線に基づく三相静止座標系モデルを導出した。つぎに、三相静止座標系から変換行列を用いて、二相静止座標系モデルを導出し、最後に、二相回転座標系モデルを導出した。

第4章 補間型モデル縮約法

本章では、補間型モデル縮約法を提案し、数値検討を行う。

4.1 モデル縮約法

本節では、POD を用いたモデル縮約法について説明する。

4.1.1 固有値直交分解

POD は、大規模データから主成分を引き出すのに有効な手法である。与えられたデータから適切な部分空間を求める手法である。統計学流体解析などで主に使われており、近年では、電磁界解析においても幅広く適用されている。元のデータが存在する座標系の代わりにより低次元の座標系でデータを表すことが目的である。

図 4.1 を例にすると、与えられたデータは赤い矢印の座標方向でとらえられる。この矢印が POD モードである。

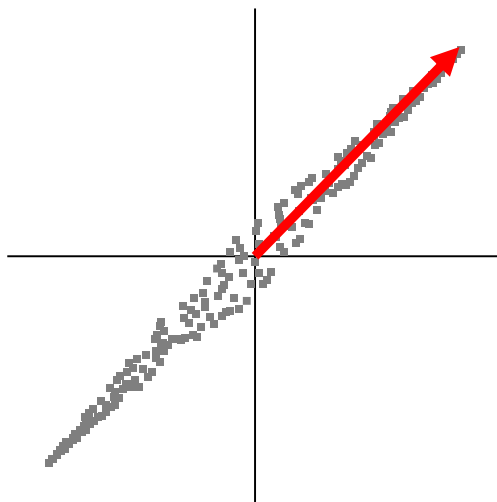


図 4.1 固有値直交分解の概要

4.1.2 定式化

POD とは、解空間を少数の正規直交基底により表現することで問題の次元数を縮約し、計算時間を短縮する手法であり、磁界解析においては、正規直交基底を構成するために、

ベクトルポテンシャルを求め（スナップショットし）、それらを並べたデータ行列を生成する．さらにこのデータ行列を特異値分解（Singular Value Decomposition : SVD）することで、場を表す少数の基底を求める．本研究では、IPMSM を対象として、FEM を使用して、機械角 θ 、 d および q 軸電流 i_d, i_q を変化させ磁界を計算する．そして、有限要素の未知数であるベクトルポテンシャルから成るデータ行列を作成する．

$$X = [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{21}, \dots, \mathbf{a}_{s1}, \mathbf{a}_{12}, \dots, \mathbf{a}_{jt}, \dots, \mathbf{a}_{sm}] \quad (4.1)$$

ここで、 $X \in \mathbb{R}^{n \times sm}$ 、 n は FEM の未知数の総数(節点数)であり、 $j=1,2,\dots,s$ および $t=1,2,\dots,m$ はそれぞれ (i_d, i_q) 平面上の格子点、機械角 θ の格子点で取られたスナップショットのインデックスを表す．次に、SVD を X に適用する．

$$X = W \Sigma V^* \quad (4.2)$$

ここで、 $W \in \mathbb{R}^{n \times sm}$ と $V \in \mathbb{R}^{s \times sm}$ は、左および右特異ベクトルから成る直交行列であり、 $\Sigma \in \mathbb{R}^{sm \times sm}$ は、 X の特異値 σ_i ($i=1,2,\dots,sm$)を降順に並べた対角行列である．ここで、上位の σ_i を s_0 個残し、それ以外を削減する低ランク近似を行うと、(4.2)式は次式のように変形できる．

$$X \approx \hat{W} C \quad (4.3)$$

ここで、 $s_0 \ll sm$ 、 $\hat{W} \in \mathbb{R}^{n \times s_0}$ 、 $C \in \mathbb{R}^{s_0 \times sm}$ である．この近似を用い、ベクトルポテンシャルを次のような支配的な特異ベクトルの線形結合によって表す．

$$\mathbf{a} = \hat{W} \mathbf{c} \quad (4.4)$$

ここで、 $\mathbf{c}$ は縮約変数ベクトルである．従来の POD に基づく磁界解析では、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{s_0}$ を未知数とする縮約方程式を解く．しかし、回転子や固定子に用いられる電磁鋼板の磁気飽和による非線形性のため、縮約方程式は非線形項を含む．任意の入力条件で解を求めるためには、有限要素方程式から再度、縮約方程式を構成し、非線形方程式を解きなおす必要がある．このため高速化の効果は限定的である．このことから、実時間処理で特性の算出が求められるビヘイビアモデルへは適応が難しいと考えられる．そこで、この問題を解決するために縮約された非線形方程式を解かない手法が提案されている [31],[32]、文献[31]では、非線形補間がグラスマン多様体に適用されている、また、文献[32]においては SVD の右辺ベクトルに基づく補間手法が提案されている．

4.2 提案手法（補間型モデル縮約法）

本節では、補間型モデル縮約法を提案する．本手法は、非線形方程式を解くことなく、少数の基底ベクトルを補完することで磁界分布を復元する手法を提案する．提案手法は

次節で示すように、縮約された有限要素方程式を解かずに、 i_d, i_q, θ の補間によって縮約変数 $\mathbf{c}$ を求める。

4.2.1 電流空間における補間

まず、 (i_d, i_q) 平面上の補間を考える。 θ を固定した場合、(4.1)式のように保存された、任意の電流状態 (i_d, i_q) の磁界は四角形要素の補間関数 N_j により表現することができる。

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{a}_j(\theta) N_j(i_d, i_q) \quad (4.5)$$

ここで $\mathbf{a}_j(\theta)$ は任意機械角における格子点でのベクトルポテンシャルである。ベクトルポテンシャルは有限要素方程式の未知数を持つため、全スナップショット点のデータを保存するとそのデータ量が膨大となる。そこで任意入力の縮約変数 $\mathbf{c}(i_d, i_q, \theta)$ の補間を考えると、(4.5)式と同様に、次式になる。

$$\mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) = \sum_{j=1}^4 \mathbf{c}_j(\theta) N_j(i_d, i_q) \quad (4.6)$$

ここで $\mathbf{c}_j(\theta)$ は任意機械角における格子点で求めた縮約変数である。(4.4)式から $\mathbf{c}$ と基底ベクトルにより $\mathbf{a}$ を計算することが可能であるため、 $\mathbf{a}$ を圧縮して保存することが可能になる。そのため、記憶すべきデータは、少数の基底ベクトルと、格子点での縮約変数となる。ここで、図 4.2 に縮約変数での電流空間の補間を示す。

(4.6)式は固定された機械角 θ での補間を表すため、(4.6)式を用いることによってある機械角における特性を計算することができる。しかしながら $\mathbf{c}_j(\theta)$ は機械角の依存性を持つ。そのため、機械角の補間手法についても検討する必要がある。本研究では、動的モード分解[33-35] (Dynamic Mode Decomposition : DMD) を用いた補間を行う。

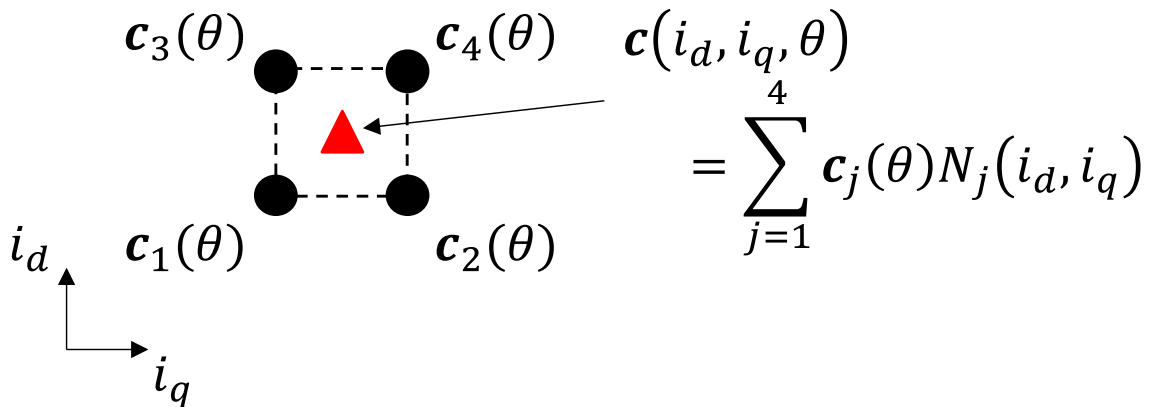


図 4.2 電流空間の補間

4.2.2 動的モード分解を用いた機械角補間

DMD は流体解析の分野で提案された手法であり，多次元時系列データのデータ解析や縮約モデリングの手法として用いられる．DMD の概念図を図 4.3 に示す．DMD は時系列データをモードの重ね合わせで表現する．

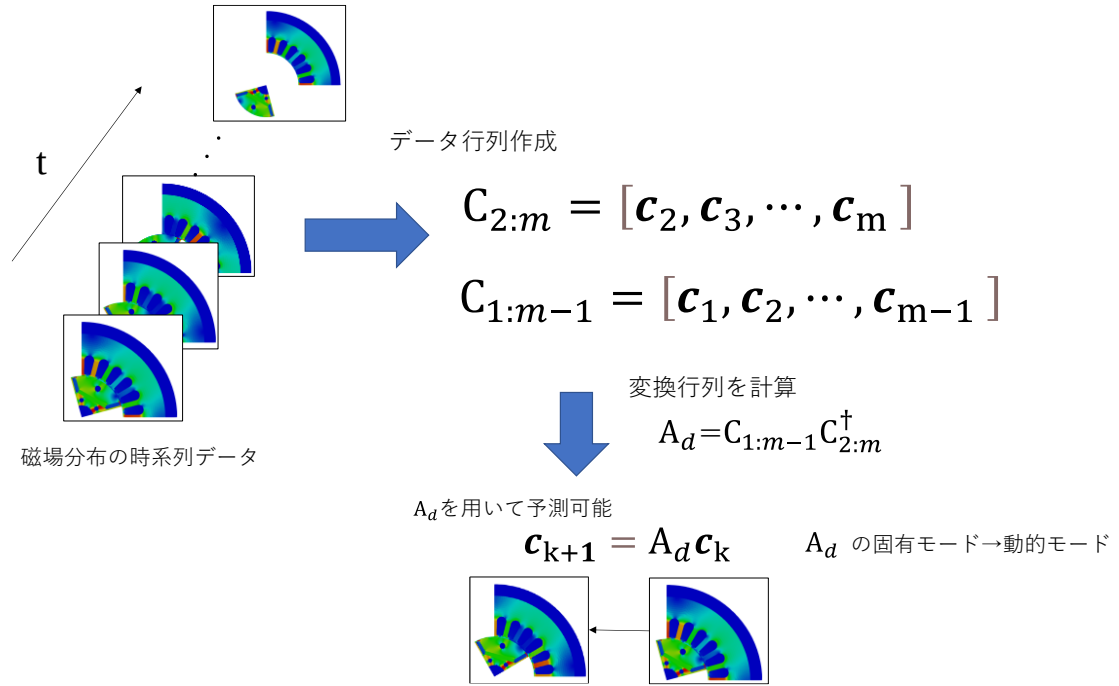


図 4.3 動的モード分解の概念図

DMD を用いた機械角補間の定式化を行う．以降の定式化においては，簡単のため i_d, i_q のインデックス j を省略する．まず $c(\theta)$ の変化が次式に従うと仮定する．

$$c(\theta + \Delta\theta) = A_d c(\theta) \quad (4.7)$$

ここで A_d は変換行列を表す．(4.7) 式に対応する連続系の式は

$$\frac{dc}{d\theta} = A_c c \quad (4.8)$$

ここで A_c はエルミート行列であるとする．(4.8) 式の解は

$$c(\theta) = e^{A_c \theta} c_0 \quad (4.9)$$

と表せる． A_c をスペクトル分解すると

$$A_c = P\Lambda P^* \quad (4.10)$$

ここで、 P と Λ はそれぞれ固有ベクトルを含む行列と対角項に固有値 λ_i を並べた対角行列である。ゆえに(4.8)式の解は

$$\mathbf{c}(\theta) = P e^{\Lambda_c \theta} P^* \mathbf{c}_0 \quad (4.11)$$

と表せる。ここで

$$e^{\Lambda_c \theta} = \text{diag}[e^{\lambda_1 \theta}, e^{\lambda_2 \theta}, \dots] \quad (4.12)$$

である。(4.7)式と(4.8)式との関係から $\mathbf{c}(\theta + \Delta\theta)$ は

$$\mathbf{c}(\theta + \Delta\theta) = e^{A_c \Delta\theta} \mathbf{c}(\theta) \quad (4.13)$$

と表せる。これは

$$A_d = e^{A_c \Delta\theta} \quad (4.14)$$

を示唆する。さらに

$$A_d P = e^{A_c \Delta\theta} P = P e^{\Lambda_c \Delta\theta} \quad (4.15)$$

(4.15)式より A_d の固有値は $e^{\lambda_i \Delta\theta}$ であり、 A_d の固有ベクトルは A_c の固有ベクトルと同一であることがわかる。逆に、 A_c の固有値 λ_i は A_d の固有値 μ_i によって

$$\lambda_i = \ln \mu_i / \Delta\theta \quad (4.16)$$

として表される。したがって(4.6)式の $\mathbf{c}(\theta)$ は

$$\mathbf{c}(\theta) = P e^{\frac{\ln \Lambda_d}{\Delta\theta} \theta} \mathbf{b} \quad (4.17)$$

と表される。ここで、

$$e^{\Lambda_d \theta} = \text{diag}[e^{\mu_1 \theta}, e^{\mu_2 \theta}, \dots] \quad (4.18)$$

$$\mathbf{b} = P^* \mathbf{c}(0) \quad (4.19)$$

である。最後に μ_i と P を求めることを考える。係数ベクトル $\mathbf{c}_{jt}$ で構成される行列 $\mathbf{C}_{j,1:m} \in \mathbb{R}^{s_0 \times m}$ を

$$\mathbf{C}_{j,1:m} = [\mathbf{c}_{j1}, \mathbf{c}_{j2}, \dots, \mathbf{c}_{jm}] \quad (4.20)$$

と表す。ここで $\mathbf{C}_j$ の時間発展を

$$\mathbf{C}_{j,2:m} = A_d \mathbf{C}_{j,1:m-1} \quad (4.21)$$

と表す. さらに, A_d を $C_{j,1:m-1}$ の POD 基底 U に射影し

$$\hat{A}_d = U^* A_d U = U^* C_{j,2:m} Z S^{-1} \quad (4.22)$$

と近似表現する. ここで行列 U, Z, S は特異値分解

$$C_{j,1:m-1} = U S Z^* \quad (4.23)$$

から求められる. なお U, Z, S はそれぞれ(4.2)式の W, V, Σ に対応する. ゆえに $\hat{A}_d$ のスペクトル分解

$$\hat{A}_d Q = Q \Lambda \quad (4.24)$$

を効率的に行うことができる. 固有値 μ_i は(4.24)式の Λ から取得できる. また, 固有ベクトル P は次式で求めることができる.

$$P = C_{j,2:m} Z S^{-1} Q \quad (4.25)$$

最終的に(4.17)式を(5)式に代入することによって得られる

$$c(i_d, i_q, \theta) = \sum_{j=1}^4 P_j e^{\frac{\ln \Lambda_{dj}}{\Delta \theta} \theta} b_j N_j(i_d, i_q) \quad (4.26)$$

から $c(i_d, i_q, \theta)$ を評価できることがわかった. (4.4)式に(4.26)式を代入すると, ベクトルポテンシャルは

$$a = \hat{W} \sum_{j=1}^4 P_j e^{\frac{\ln \Lambda_{dj}}{\Delta \theta} \theta} b_j N_j(i_d, i_q) \quad (4.27)$$

で復元可能である.

以下に提案手法の前処理アルゴリズムを示す.

- 1: i_d, i_q, θ を変化させながら, 電磁界解析を行い, その磁界分布を保存する.
- 2: 保存した磁界分布からデータ行列を作成する.
- 3: データ行列に対して SVD を実行し低ランク近似を行う.
- 4: SVD により得られた $\hat{W}$ を保存し, $C_{j,1:m}$, $C_{j,2:m}$ を作成する.
- 5: $C_{j,1:m}$, $C_{j,2:m}$ に対して DMD を実行し, 得られた P_j , Λ_{dj} , b_j を保存する.

4.2.3 特性の算出

提案手法を用いることにより，任意の電流振幅，位相，機械角に対する磁界を縮約変数 $\mathbf{c}$ から復元できる．また様々な特性を $\mathbf{c}$ から直接求めることができる．例えば，マクスウェルの応力テンソルは次式で表現できる．

$$\mathbf{T}(i_d, i_q, \theta) = \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta)^t \widehat{\mathbf{W}}^t \mathbf{N} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (4.28)$$

ここで， $\mathbf{N}$ は補間関数の微分を含む疎行列となる．

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_y^t \mathbf{N}_y - \mathbf{N}_x^t \mathbf{N}_x & -2\mathbf{N}_x^t \mathbf{N}_y \\ -2\mathbf{N}_x^t \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x^t \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_y^t \mathbf{N}_y \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{N}_u = \left[\frac{\partial N_1}{\partial u} \quad \frac{\partial N_2}{\partial u} \quad \cdots \quad \frac{\partial N_n}{\partial u} \right]^t, \quad u = \{x, y\} \quad (4.30)$$

磁束密度は，提案手法を用いて次式で求める．

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}_u \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (4.31)$$

ここで，磁束密度が復元できることから，高調波を含む鉄損の計算も容易に可能であることがわかる．さらに，回路方程式との連成の際に必要な磁束に関しては次式より求める．

$$\Psi_{uvw}(i_d, i_q, \theta) = \begin{bmatrix} l_u^t \\ l_v^t \\ l_w^t \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (4.32)$$

ここで l_u , l_v , l_w は u , v , w 相の磁束変換ベクトルである．ここで，上式を d - q 座標系で表現すると次式となる．

$$\Psi_{dq}(i_d, i_q, \theta) = C_{dq} C_{\alpha\beta} \Psi_{uvw}(i_d, i_q, \theta) = \begin{bmatrix} m_d^t \\ m_q^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_u^t \\ l_v^t \\ l_w^t \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (4.33)$$

ここで m_d , m_q は変換行列の d 軸， q 軸成分を表す．

このように有限要素法で計算することができる，様々な物理量を，縮約変数 $\mathbf{c}$ から求めることが可能である．なお，本手法は磁界を復元するため，磁気飽和による磁束密度の高調波成分や，スロット高調波を考慮可能である．また，PWM のように時間的に変化する i_d, i_q の場合についても，提案手法は原理的に適用可能である．最後に図 4.4 に提案手法の計算の流れを示す．

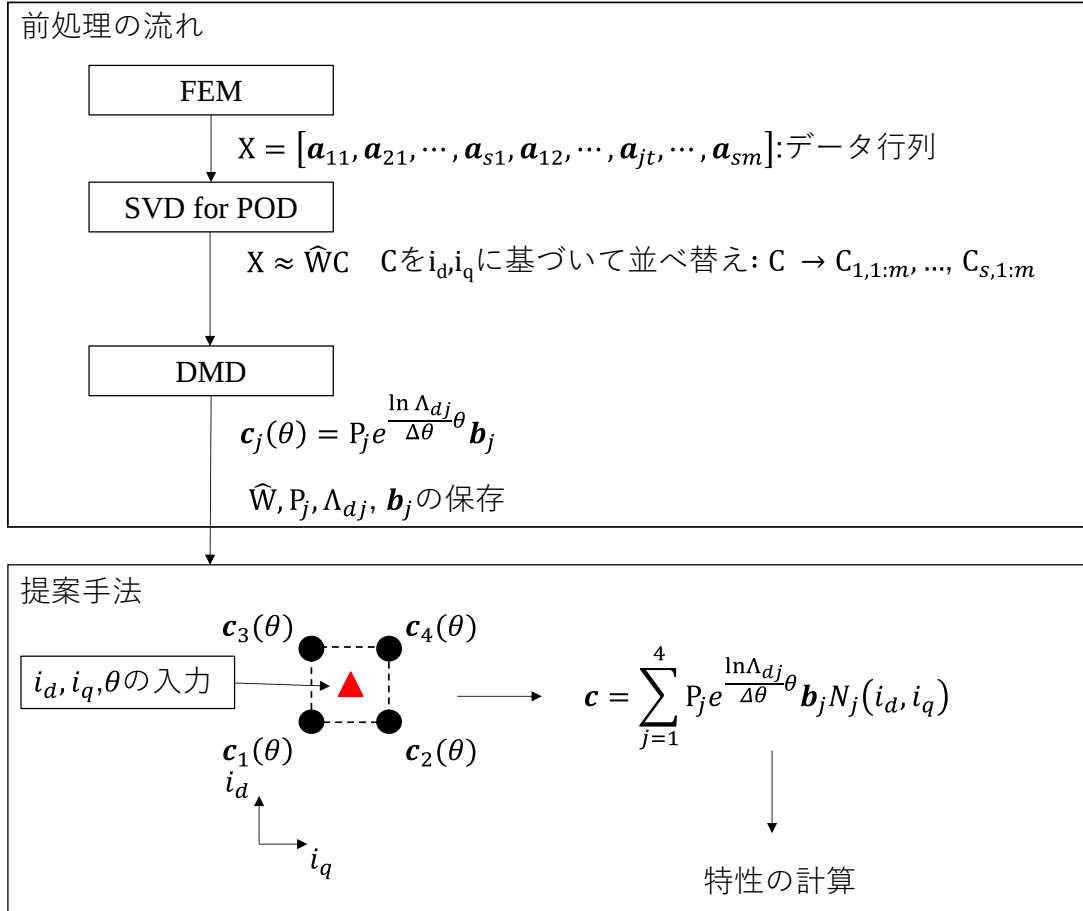


図 4.4 補間型モデル縮約法の計算の流れ

4.3 数値結果

本節では IPMSM の解析を行い，FEM の結果と比較することによって提案手法の有用性を検討する．

4.3.1 解析条件および解析モデル

IPMSM を対象に提案手法の計算精度の検証を行う．計算モデルは電気学会 D モデル [36] をベースとした．計算モデルを図 4.5，その要素分割を図 4.6 に計算モデルの諸元を表 4.1 に示す．また，縮約パラメータを表 4.2 にスナップショット点および計算に用いる計算点を図 4.7 に示す．本計算においては正弦波入力を仮定し， i_d, i_q を固定して計算している．このとき s_0 は，累積寄与率 E が 0.999 を超えるように決定した． E は縮退後のデータが縮退前のデータをどの程度再現しているかを示す指標であり，次式に基づき計算を行う．

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{s_0} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{s_m} \sigma_i} \quad (4.34)$$

また，計算機として AMD Ryzen 3950X@3.50Ghz メモリ 128GB を用いた．

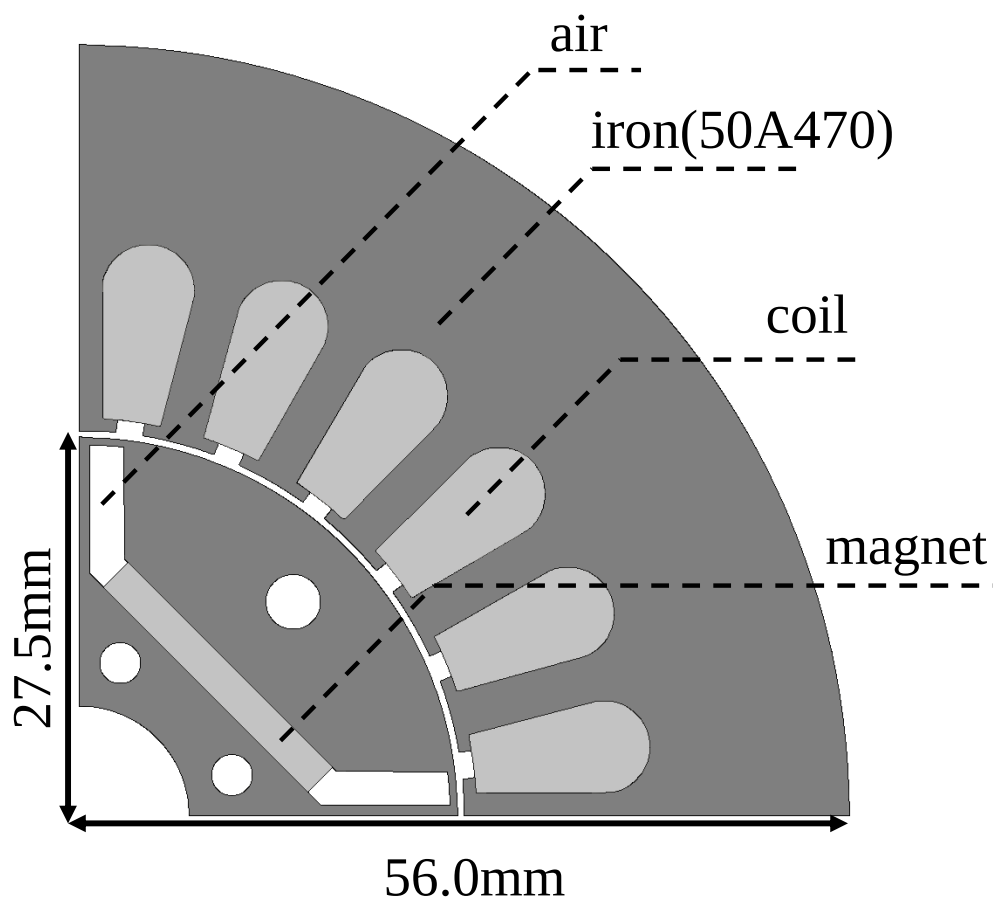


図 4.5 計算モデル

表 4.1 解析パラメータ

K_h [J/kg/T ²] : ヒステリシス損係数	0.022
K_e [mh/kg/T ²] : 渦電流損係数	0.17
range of mechanical angle[degree] : 機械角の計算範囲	0 to 180
Intervals of mechanical angle[degree] : 機械角の計算間隔	0.5
B_r : Remanence[T] : 残留磁束密度	1.25

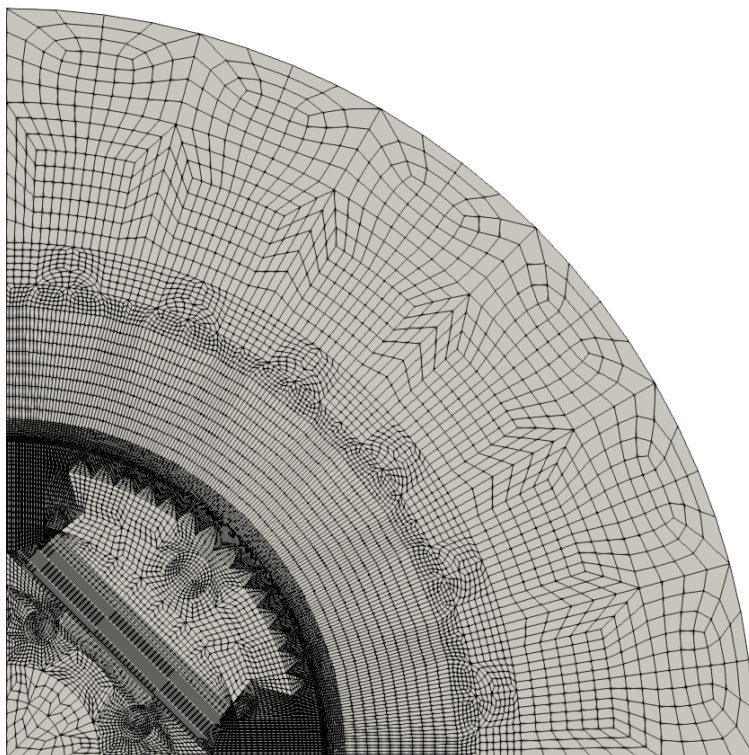


図 4.6 要素分割メッシュ

表 4.2 縮約パラメータ

n : 未知数	16557
sm : スナップショット数	11584
s_0 : 低ランク近似数	565
機械角の計算範囲	0 to 180
$\Delta\theta$: 機械角のスナップショット間隔 [degree]	1

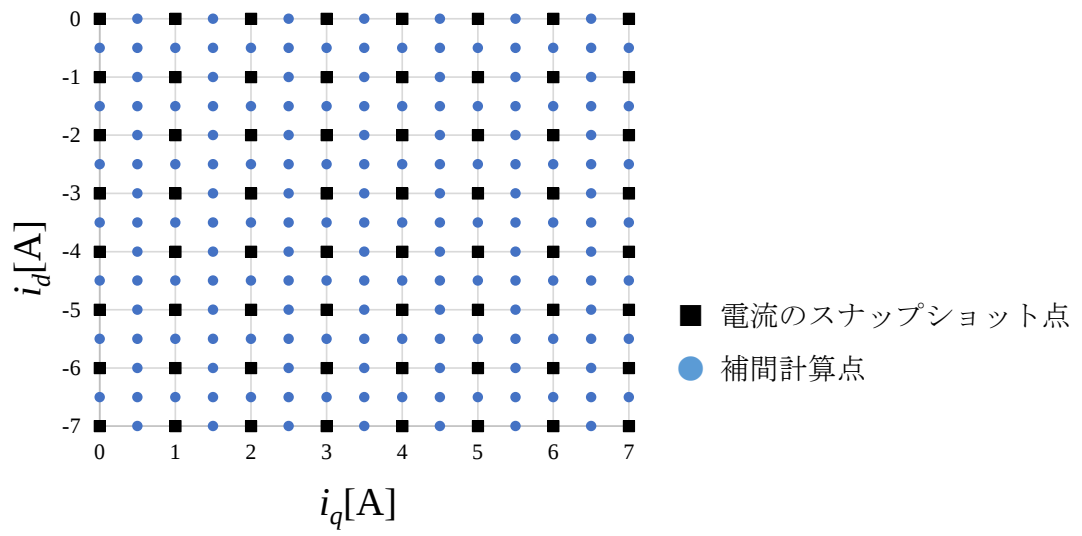


図 4.7 計算点と評価点

4.3.2 精度検証

トルク波形を比較するために, $i_d = -2.0, i_q = 6.0$ に固定して電気角一周分分の計算を行う. このときの計算時間を表 4.3 に示す. 表 4.3 の結果は, スナップショットや縮退化の時間は含まず, 括弧内は一回当たりの計算時間を示す. 表 4.3 より提案手法を用いると FEM と比較して, 50 倍以上の高速化が可能となることがわかる. また, 一回当たりの計算時間では, 100 倍近く of 高速化できていることがわかる.

この時のトルク波形を図 4.8 に示す. ここでオレンジの三角はスナップショットした機械角におけるトルクを表し, グレーの三角は補間にて計算されたトルクを表す. どちらの計算点においても精度よく計算できていることが確認できる. 図 4.9 にこの時の相対誤差を示す. このときの相対誤差の計算は次式を用いる.

$$\text{error} = \frac{\text{abs}(T_{\text{FEM}} - T_{\text{propose}})}{T_{\text{FEM}}} \quad (4.35)$$

相対誤差は最大で 0.01 程度であり十分に小さいことを確認できる.

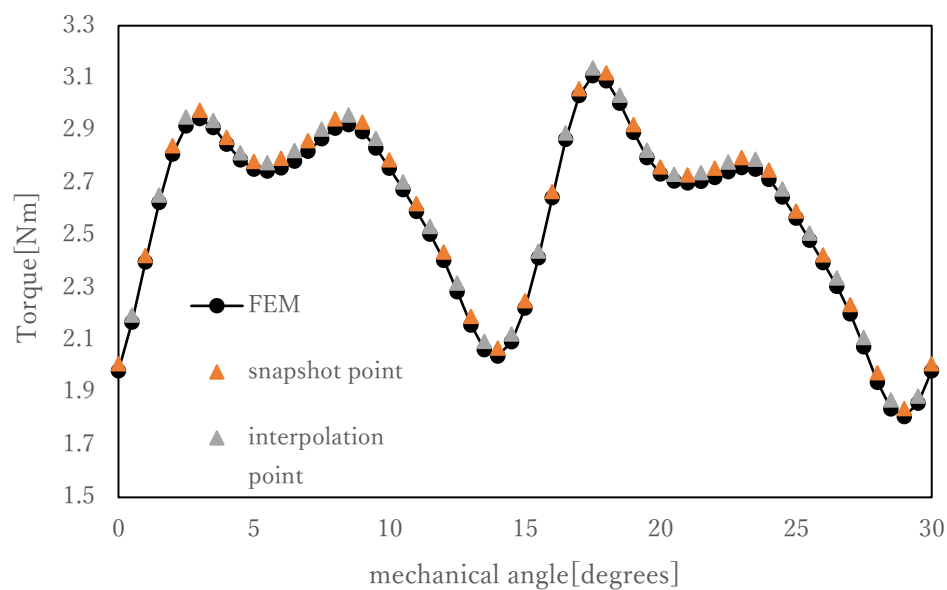
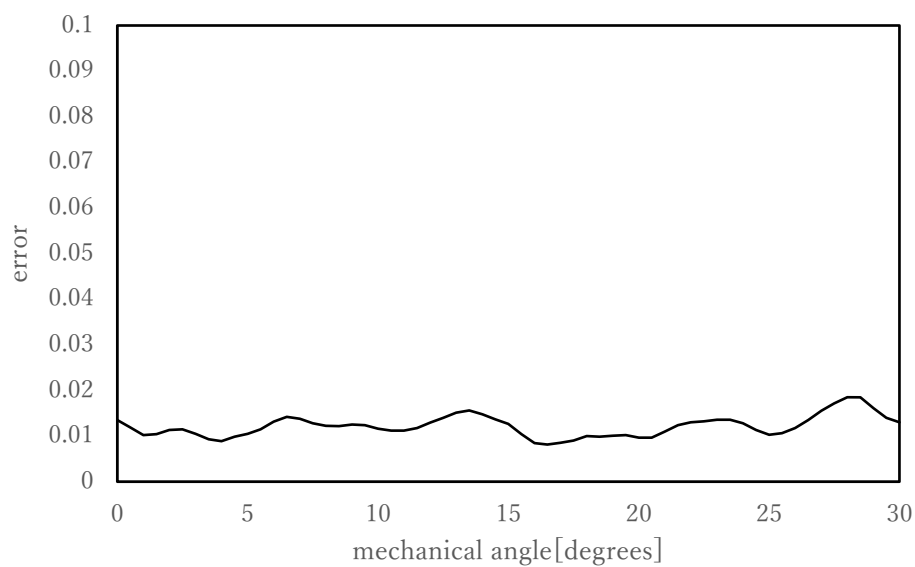
また, 同様の条件にて計算した, d 軸, q 軸磁束波形を図 4.10, 4.11 に示す. トルクと同様, 磁束についても精度よく計算できていることが確認できる.

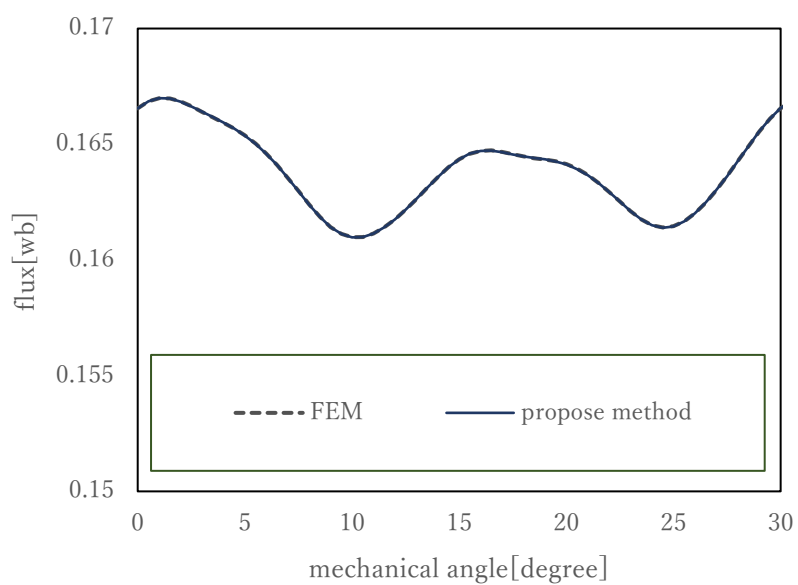
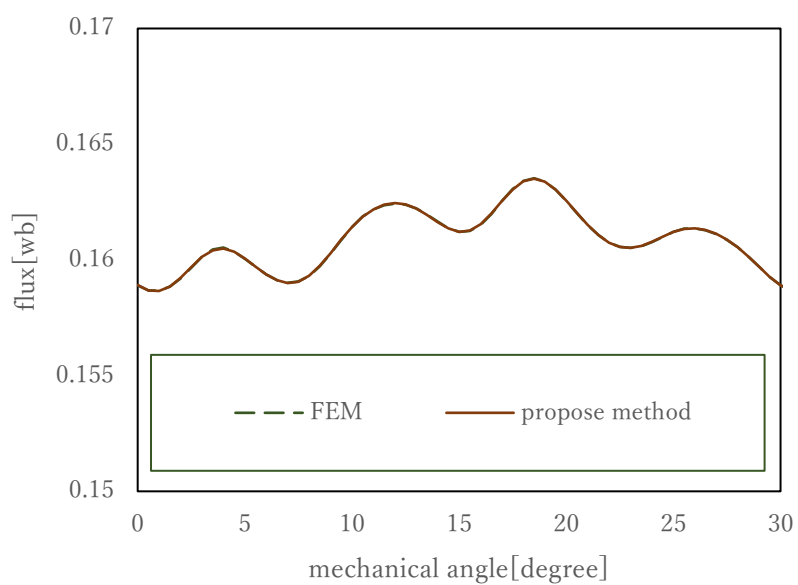
上記の結果はスナップショットされた電流値で行ったため, 補間された電流値の検討が必要である. また, 電流位相がより進んだ条件での計算も必要であることからさらに電流条件を変更して比較を行う. ここでは $i_d = -5.5, i_q = 2.5$ と固定して計算を行った. 同様にトルク波形を図 4.12 に, トルク誤差を図 4.13, また d 軸, q 軸磁束波形を図 4.14, 4.15 に示す.

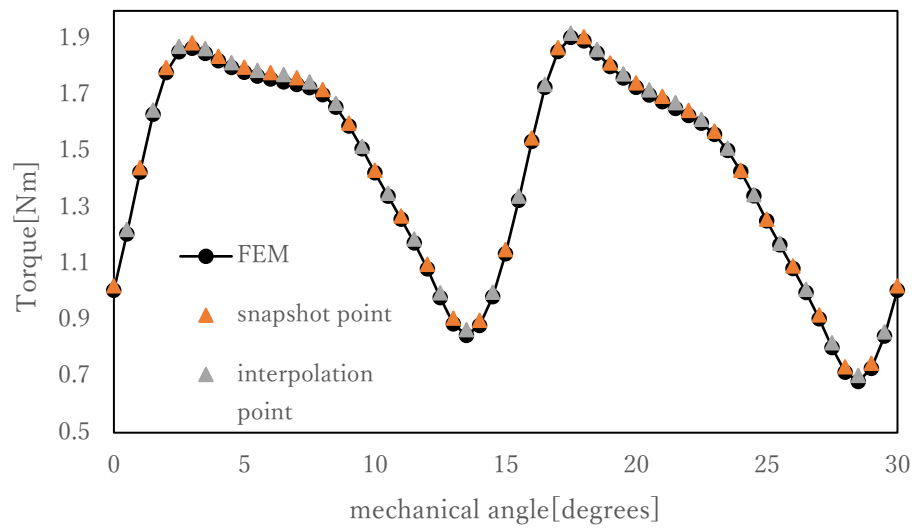
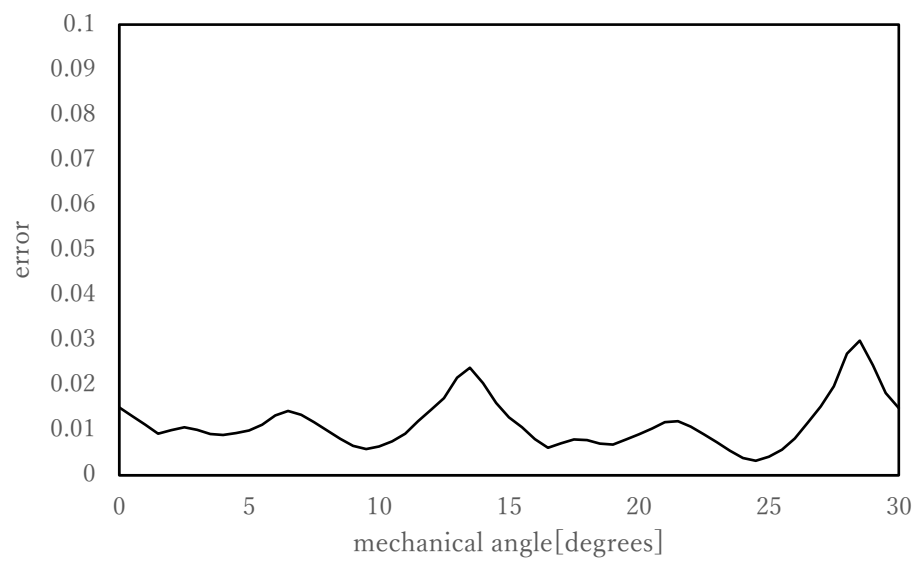
表 4.3 計算時間.

計算手法	時間[s]	速度向上率
FEM	543.8 (1.52)	-
提案手法	10.1 (1.53×10^{-2})	53.8 (99.3)

Parenthesized times is the calculation time for one step.

図 4.8 トルク波形比較($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)図 4.9 トルク相対誤差($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

図 4.10 d 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)図 4.11 q 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

図 4.12 トルク波形比較($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)図 4.13 トルク相対誤差($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)

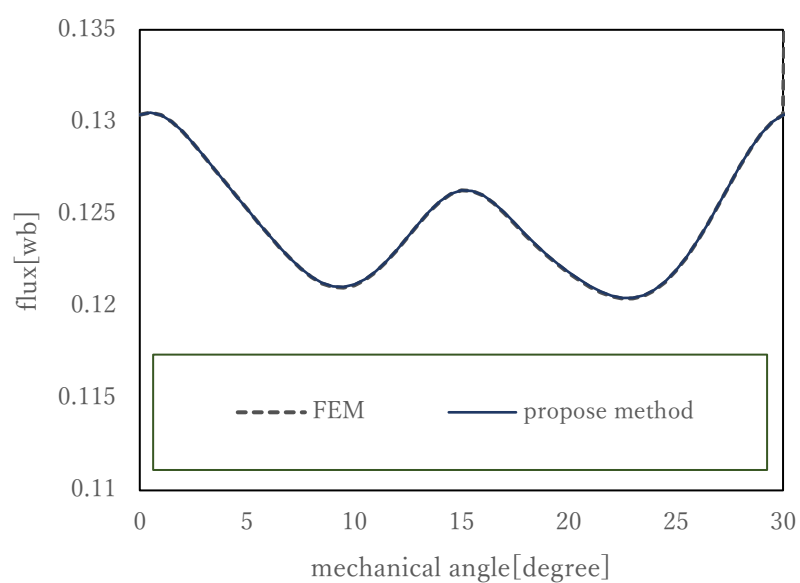


図 4.14 d 軸磁束($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)

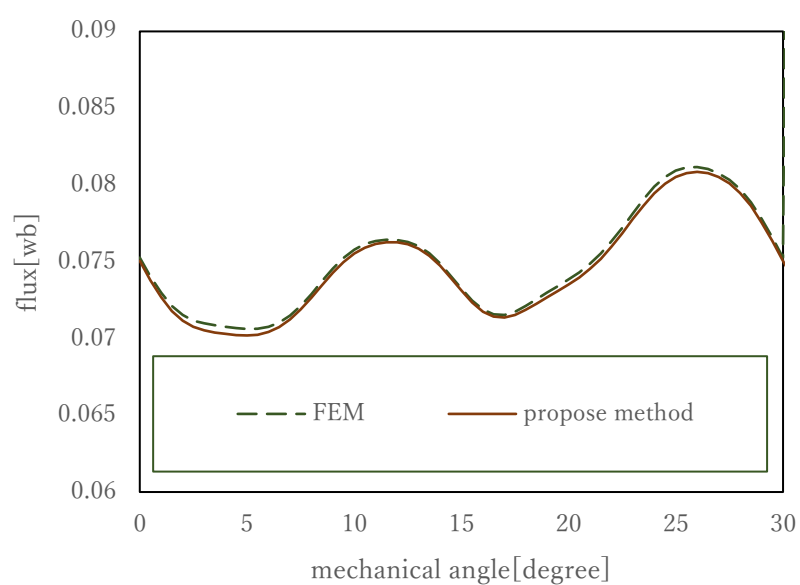


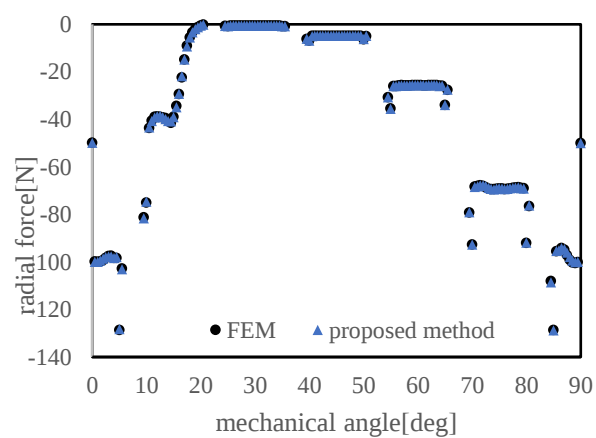
図 4.15 q 軸磁束($i_d = -5.5, i_q = 2.5$)

つぎに場の復元精度について検討を行うために電磁力分布，磁束密度分布および鉄損密度分布を比較する．このとき $i_d = -2.0, i_q = 6.0$ に固定して計算を行う．

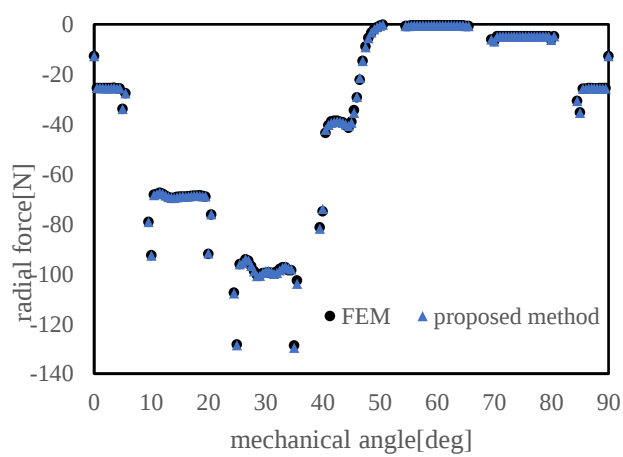
図 4.16 に $\theta=0, 30, 60$ 度のときの電磁力分布を示す．トルク波形などと同様電磁力分布に関しても十分な精度で計算できている．

磁束密度の結果を図 4.17 に示す．図 4.17 より磁束密度分布は FEM の結果とよく一致していることが確認できる．つぎに，鉄損密度の結果を図 4.18 に示す．同様に鉄損密度分布についても FEM の結果をよく再現できていることがわかる．

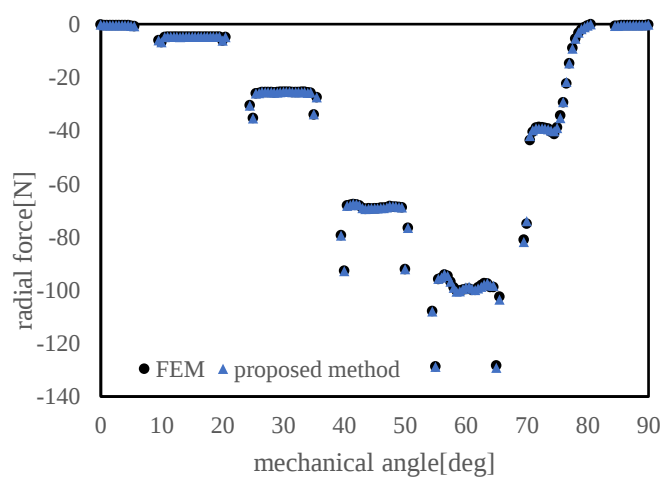
電磁力分布および鉄損密度分布は，振動解析や熱流体解析の入力となることから，提案手法は，流体解析や振動解析の連成解析にて分布量が必要な場合においても適用可能であり，連成解析の高速化において有効であることが確認できた．



(a)機械角 0 度

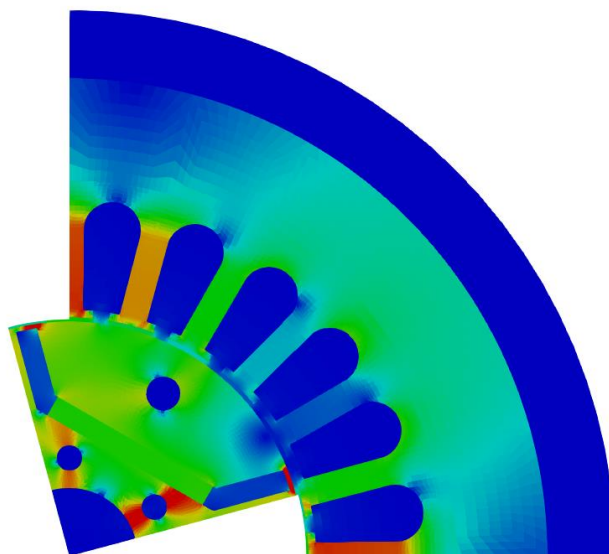


(b)機械角 30 度

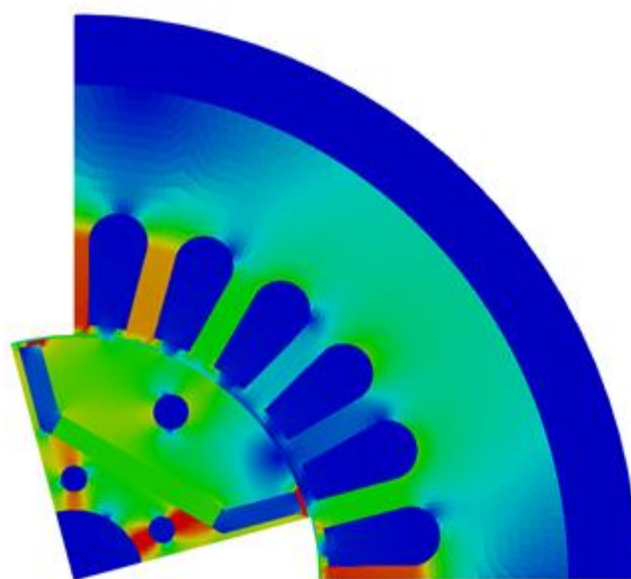


(c)機械角 60 度

図 4.16 半径方向電磁力($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

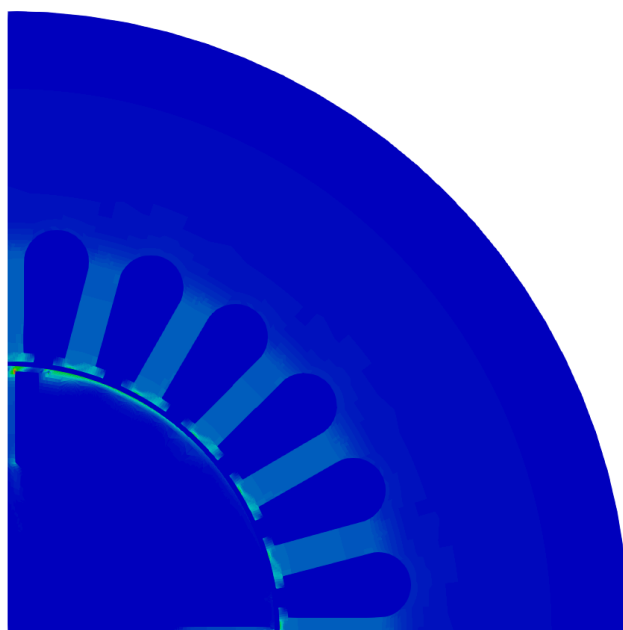


(a)FEM

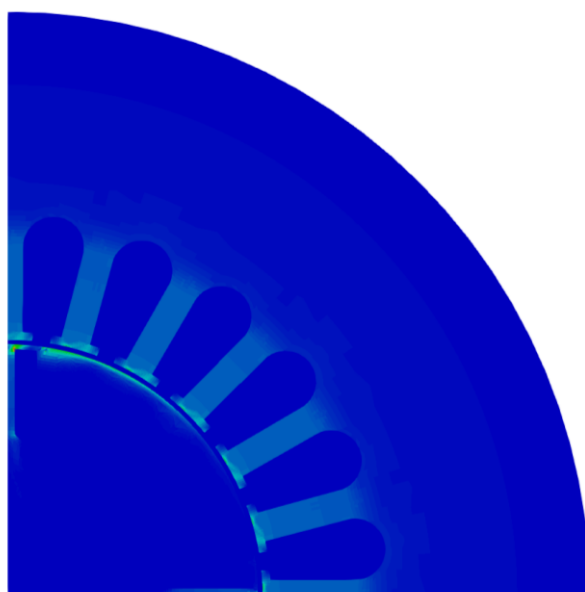


(b)提案手法

図 4.17 磁束密度分布($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)



(a)FEM



(b)提案手法

図 4.18 鉄損密度分布($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

さらに、図 4.7 に示した計算点において平均トルク、トルクリプルと損失について計算を行い、FEM の結果との比較を行う。平均トルクは次式で計算した。

$$T_{ave} = \frac{1}{N_{step}} \sum_{step=1}^{N_{step}} T_{step} \quad (4.36)$$

ここで、 N_{step} は計算したステップ数である。トルクリプルは次式に基づいて計算する。

$$\Delta T = T_{max} - T_{min} \quad (4.37)$$

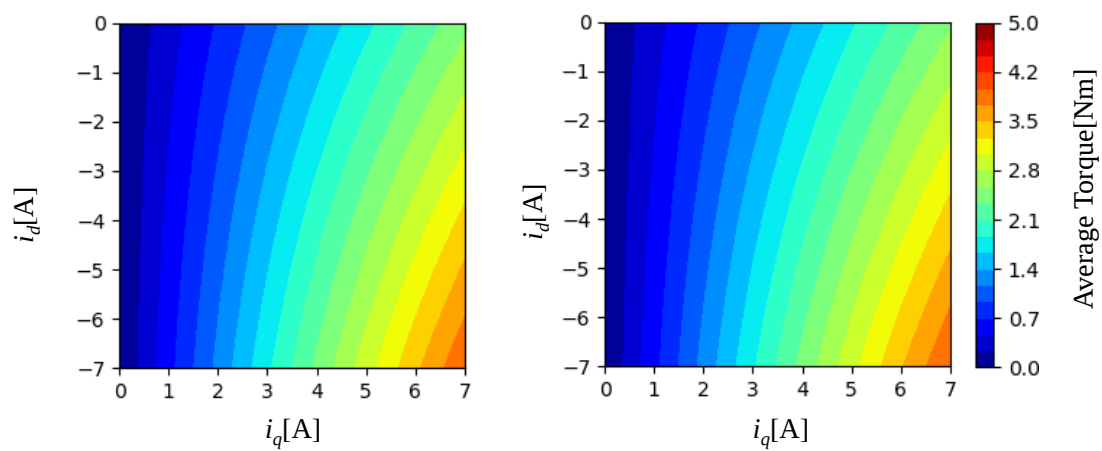
ここで T_{max} 、 T_{min} はそれぞれ最大トルクと最小トルクである。

まずは、平均トルクについて比較する。平均トルクの解析結果のコンター図の比較を図 4.19 に示す。平均トルクについてよく一致していることが確認できる。次にトルクリプルについて計算を行う。トルクリプルの解析結果を図 4.20 に示す。トルクリプルについてもよく一致していることが確認できる。このとき、FEM のトルクリプルで規格化した最大誤差は 1.0% であった。これらの結果から、トルクに関する精度は十分にあることがわかる。

また、鉄損の計算結果を図 4.21 に示す。トルクリプルと同様に規格化した鉄損の最大誤差は 0.93% であり、鉄損についても十分な計算精度を持っていることが確認できた。

さらに平均トルク・鉄損において絶対誤差を比較した結果を図 4.22, 4.23 に示す。図よりどちらも誤差が i_q に依存していることがわかる。この結果から今回対象とした回 IPMSM のモデルにおいては、計算精度を向上させるためには i_q のスナップショット間隔に特に注意を向ける必要があることがわかる。

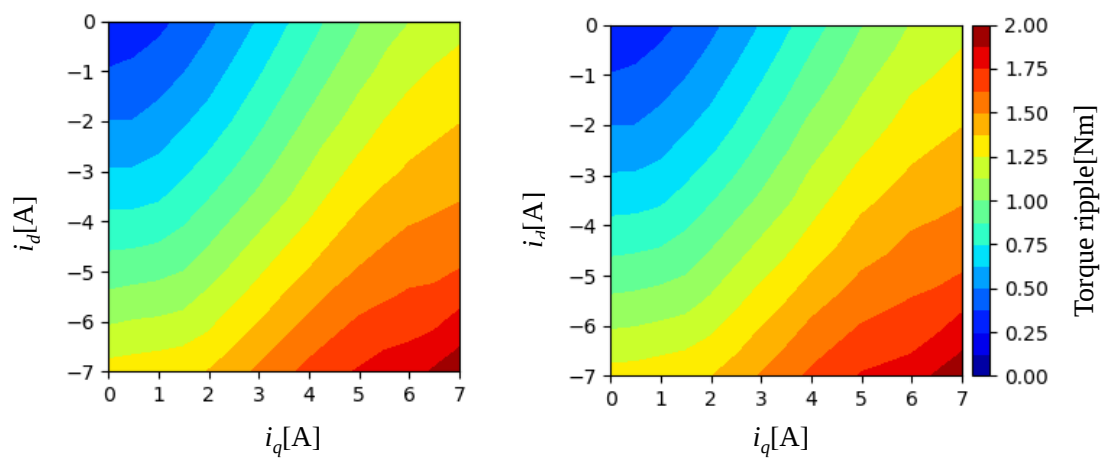
以上により、今回の縮約パラメータを用いた計算条件において、FEM と比較して高速かつ高精度で特性および分布量が計算できていることを確認できた。



(a) FEM

(b) 提案手法

図 4.19 平均トルクのコンター図



(a) FEM

(b) 提案手法

図 4.20 トルクリップルのコンター図

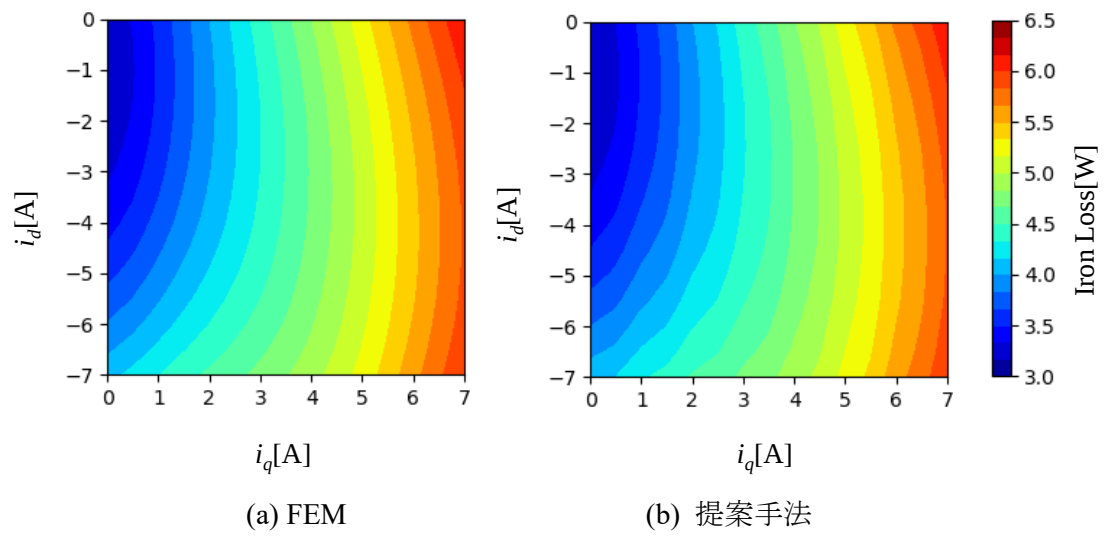


図 4.21 鉄損のコンター図

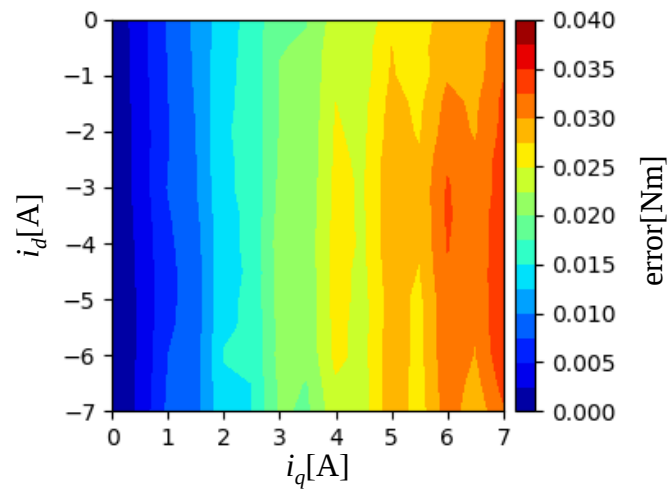


図 4.22 平均トルク誤差のコンター図

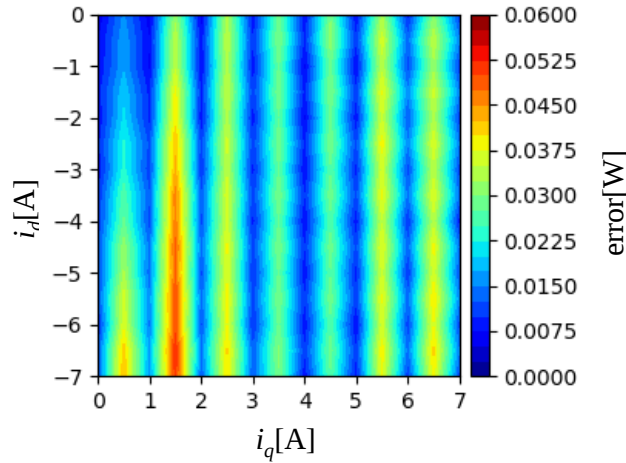


図 4.23 鉄損誤差のコンター図

4.4 縮約パラメータの影響調査

提案手法は縮約パラメータに任意性を持つ．そこで本節では，縮約パラメータが計算結果に与える影響について調査を行う．

4.4.1 機械角スナップショット間隔に関する検討

まずは，機械角のスナップショット間隔が計算結果に与える影響について調査を行う．4.2.2 節と同様 $i_d = -2.0$, $i_q = 6.0$ に固定して計算を行う．ここでは，サンプリング間隔 $\Delta\theta$ を 0.5deg , 1deg , 2deg , 3deg , と変化させて計算を行った．ここで $\Delta\theta$ の各値において， s_0 は，前節の条件と同様に $E > 0.999$ となるように決定した．この時のトルク波形を図 4.24 に示す．また，相対誤差を図 4.25 に示す．図から， $\Delta\theta$ が 2deg を超えると機械角の補間精度が悪化し，誤差が大きくなり， 5deg では最大 0.25 程度となることがわかる．今回の解析モデルにおいては， $\Delta\theta \leq 1\text{deg}$ であればトルク波形の再現が十分であることがわかる．これは，空間高調波のトルク波形への寄与度に依存すると考えられ，トルクリプル等を精度よく計算するためには，機械角のスナップショット間隔は空間高調波を十分に考慮できるように決定する必要がある．また， d, q 軸磁束について図 4.26 と図 4.27 に示す．磁束についてはトルクと異なり機械角スナップショット間隔影響が少ないことが確認できる．

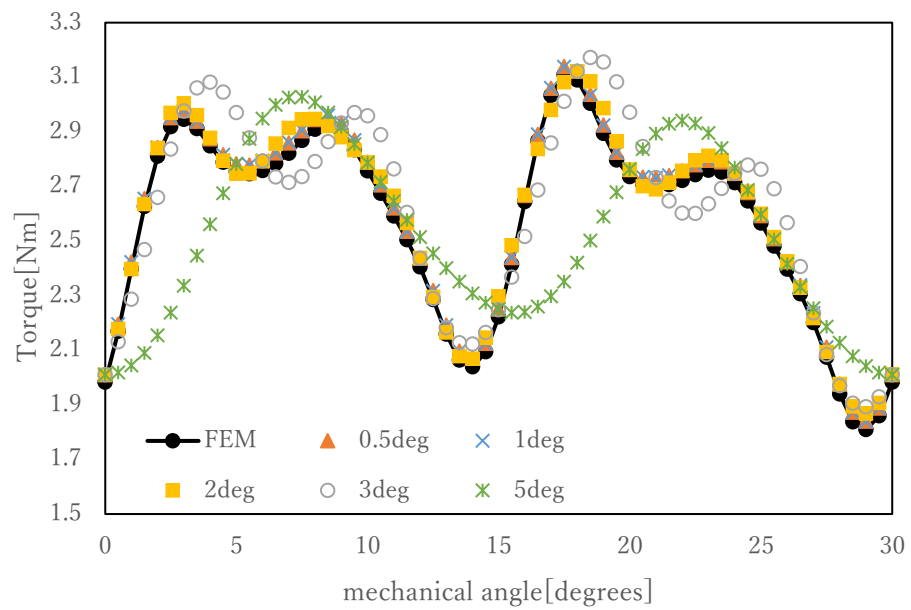


図 4.24 スナップショット間隔の影響 トルク波形 ($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

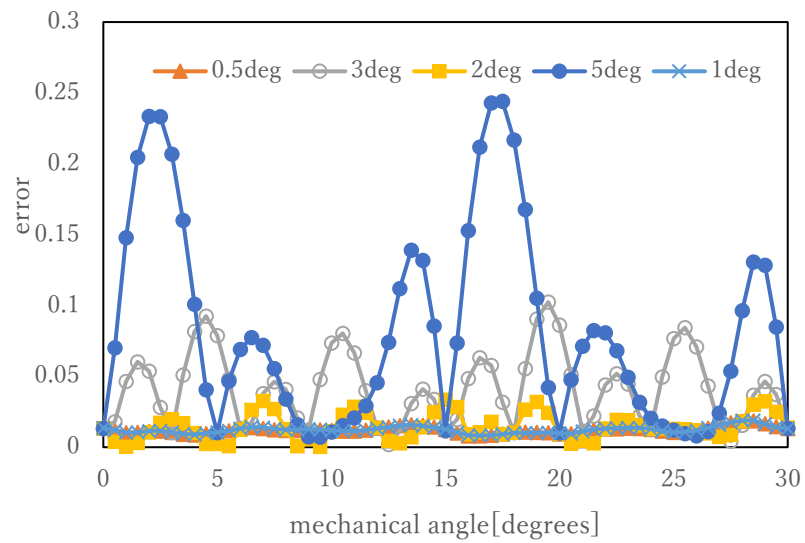


図 4.25 スナップショット間隔の影響 トルクの相対誤差 ($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

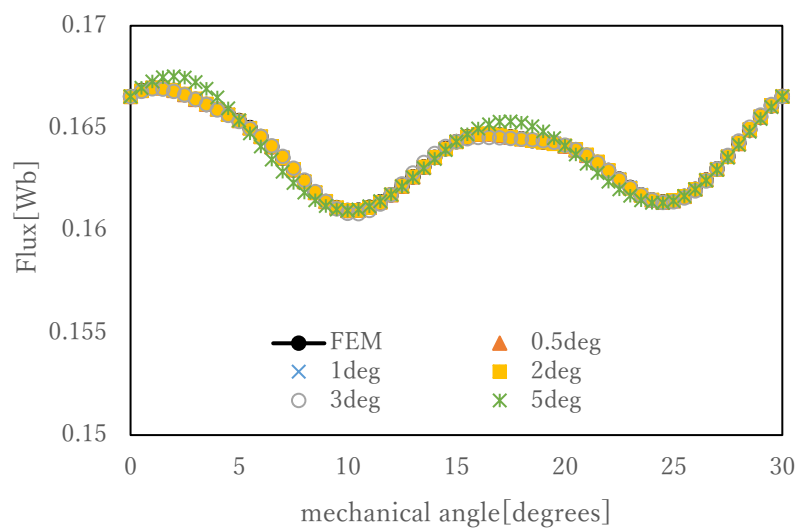


図 4.26 スナップショット間隔の影響 d 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

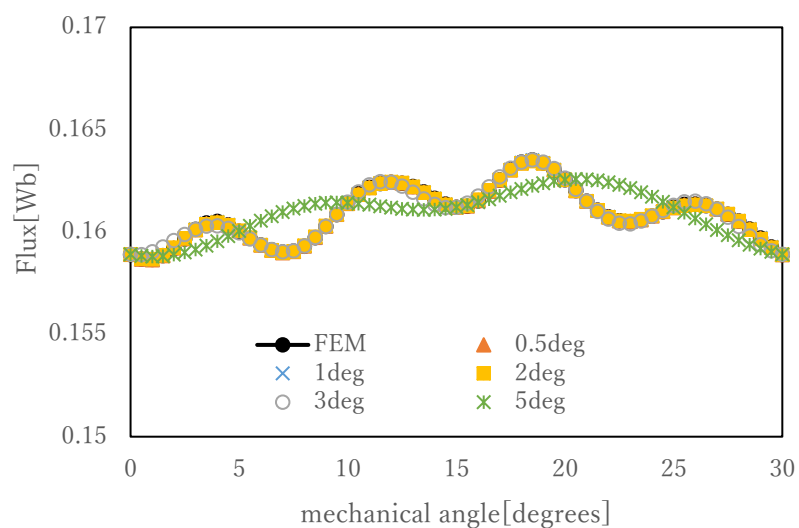


図 4.27 スナップショット間隔の影響 q 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

4.4.2 基底ベクトル数の影響に関する検討

基底ベクトル数の影響を調査するために $s_0=100, 200, 300, 400, 565$ で計算した結果を比較する. このときの累積寄与率の E のグラフを図 4.28 に示す. 表 4.4 に値を示す.

図 4.29 に, トルク波形の比較を示す. このとき, s_0 を 100 に減らしても, トルク波形が十分に復元されていることが確認できる. また, この時の誤差を図 4.30 に示す. s_0 が 300~565 までは誤差がほぼ同じである. それよりも小さくなると誤差は大きくなっていくが, 機械角のスナップショット間隔の影響とは異なり, $s_0=100$ の時で最大で 0.03 程度である. また d 軸磁束, q 軸磁束についての比較を図 4.31, 4.32 にそれぞれ示す. 磁束についても差が小さいことがわかる. これらの結果から, 今回のモデルについては, $s_0=300$ あれば精度よく計算できることが確認できた. 機械角のスナップショット数ほど感度は高くない. これは図 4.28 から, E は s_0 が小さい段階から急激に増加し $s_0=100$ のときに 0.995 となり, かなりの精度で元のデータ行列を再現できているためである.

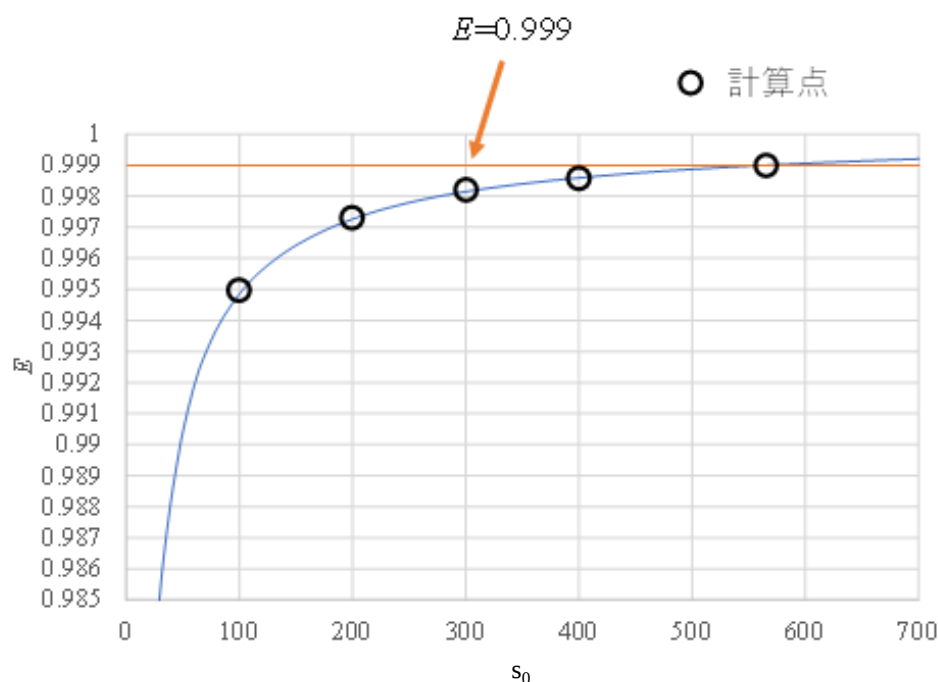


図 4.28 計算対象の s_0 と累積寄与率

表 4.4 計算対象の s_0 と累積寄与率の値

s_0	100	200	300	400	565
E	0.9949	0.9973	0.9981	0.9986	0.9990

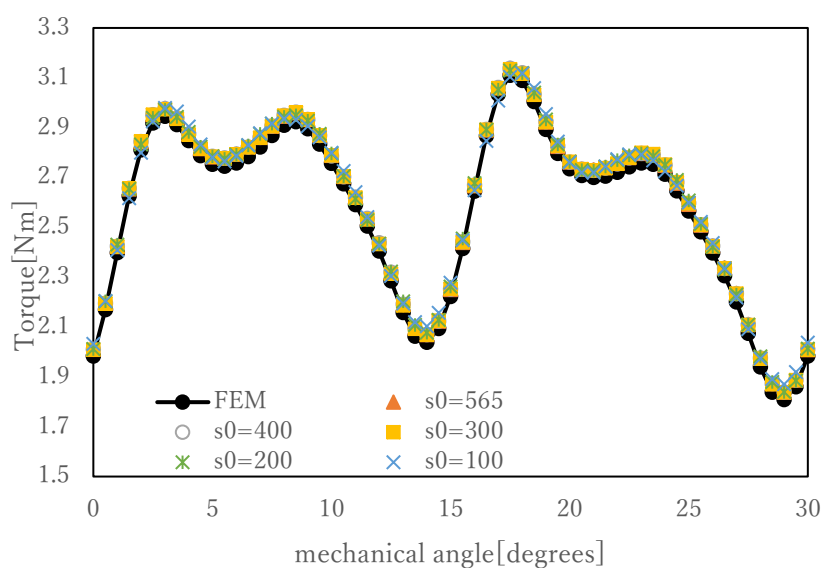


図 4.29 基底ベクトル数の影響 トルク波形($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

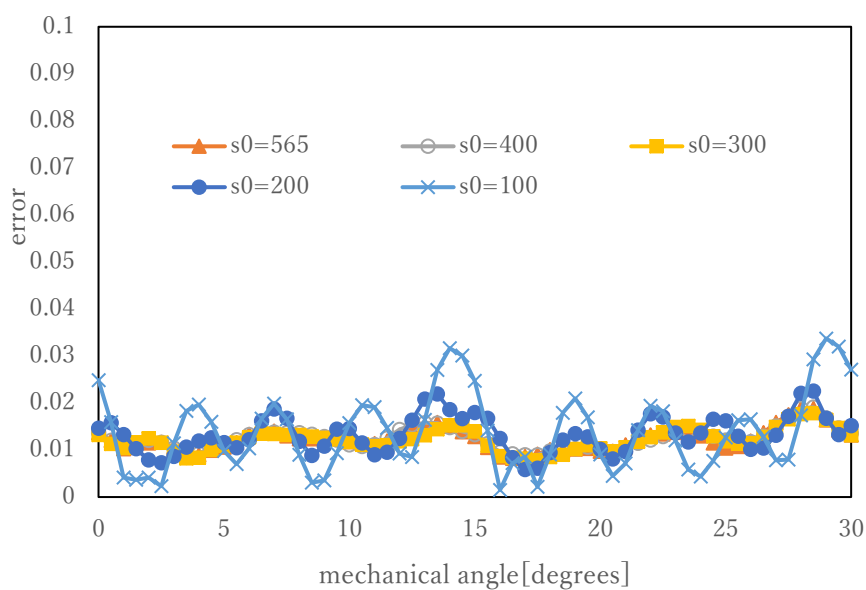


図 4.30 基底ベクトル数の影響トルク波形誤差($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

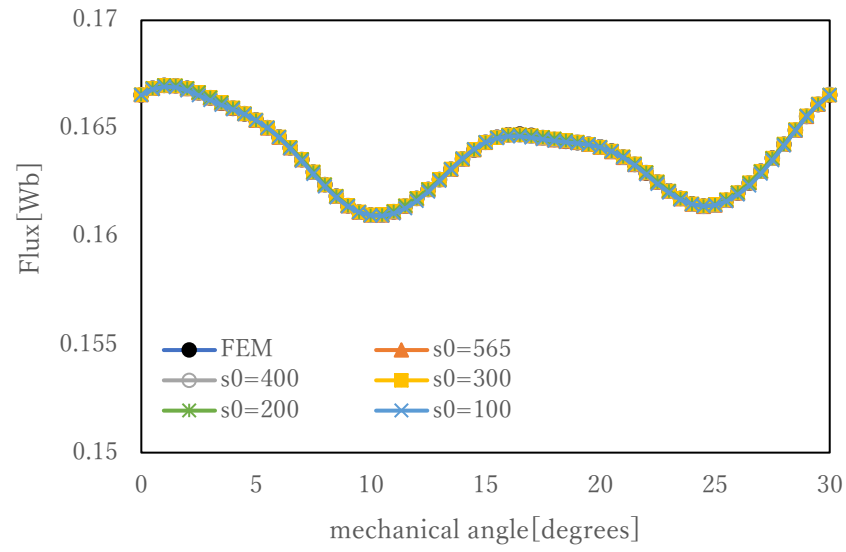


図 4.31 基底ベクトル数の影響 d 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

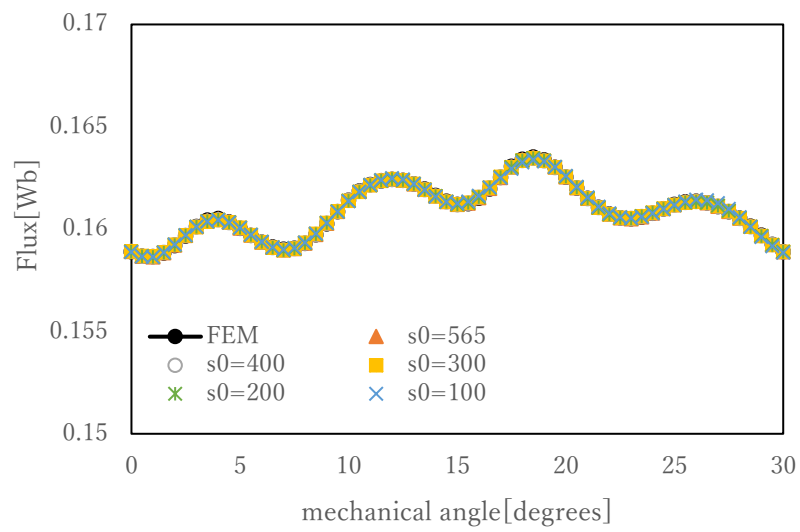


図 4.32 基底ベクトル数の影響 q 軸磁束($i_d = -2.0, i_q = 6.0$)

4.4.3 電流スナップショット間隔に関する検討

電流のスナップショット間隔が計算結果に与える影響について調査を行う。ここでは、2A 刻みで電流のスナップショットを取得した。その他のパラメータは表 4.2 と同様に決定する。計算点は図 4.7 と同様に設定した。図 4.33 に平均トルクのコンター図を示す。平均トルクについては図 4.7 のスナップショットと同様よく一致していることが確認できる。さらに、鉄損のコンター図を図 4.34 に示す。鉄損は $i_q=1.5$ 付近で不自然な折れ目が発生しており精度が悪化していることがわかる。平均トルク、鉄損の誤差コンターを図 4.35 および図 4.36 に示す。平均トルクの誤差は図 4.22 と比べて大きく変化してないことがわかる。一方で鉄損誤差は図 4.23 と比べて最大 2 倍となっていることがわかる。鉄損は平均トルクと比較して、場の非線形性に強く影響を受けるためであると考えられる。そのため、鉄損などを精度よく計算したい場合は、電流のスナップショット間隔を小さく決定する必要がある。

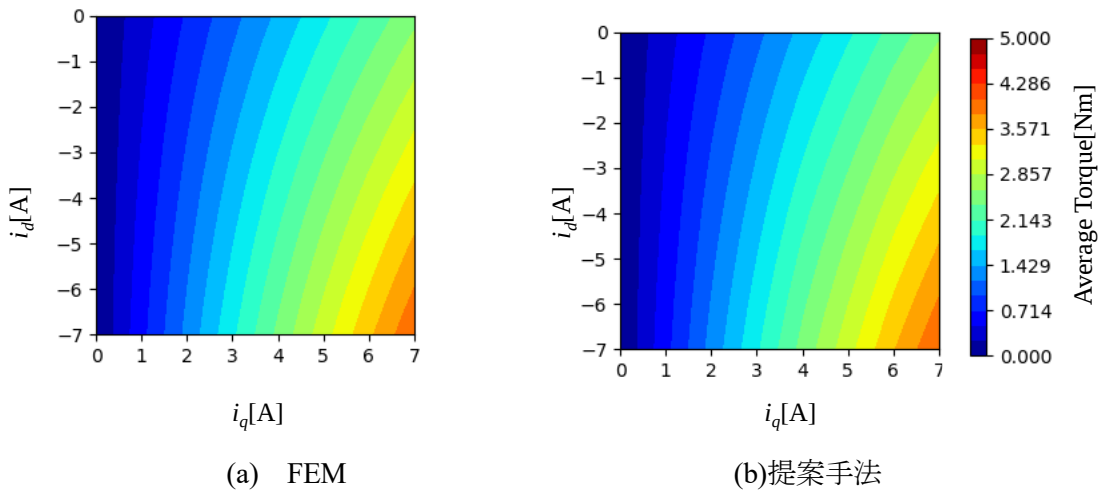


図 4.33 平均トルクコンター図(電流刻み 2A)

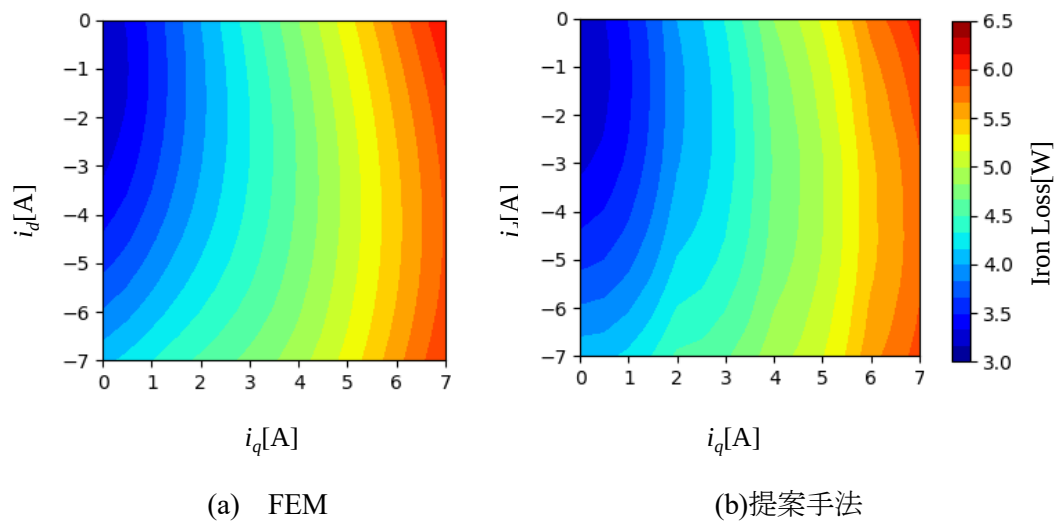


図 4.34 鉄損コンター図(電流刻み 2A)

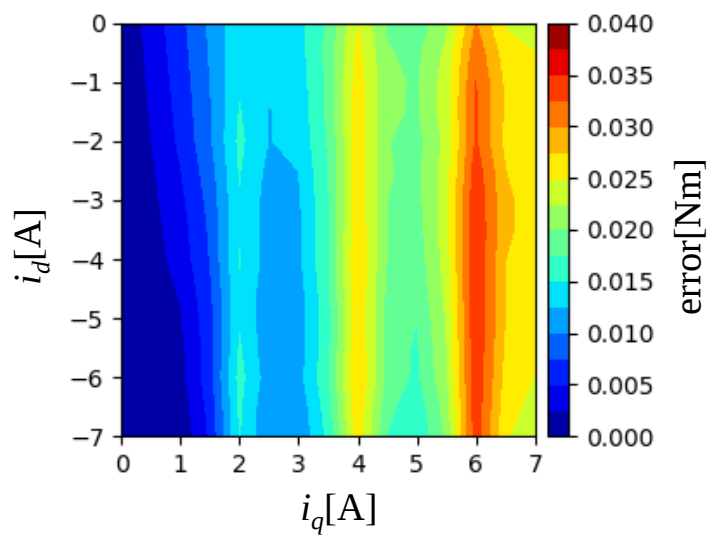


図 4.35 平均トルク誤差(電流刻み 2A)

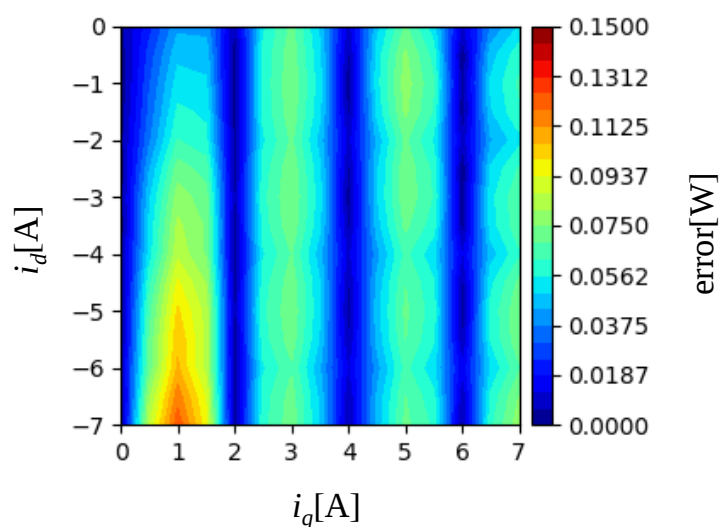


図 4.36 鉄損誤差(電流刻み 2A)

4.4 第4章のまとめ

本章では、回転機の高速解析のために、PODに基づく補間型モデル縮約法を提案した。本手法はPODを用いて求めた場を表す少数の基底を保存し、 $id-iq$ 平面における有限要素補間と動的モード分解に基づく機械角の補間によって、場の特性や分布を求める。このため、非線形方程式を解くことなくトルクや損失などの特性および場の分布を高速に求めることができる。数値実験を行い、FEMの結果と比較することによって、提案手法は精度よく計算できていることを確認した。また、速度についてもFEMと比較して大幅な向上を確認した。また、縮約パラメータの影響を調査し、スナップショット数の感度が大きく、基底ベクトル数については、スナップショット数よりも感度が小さいことを確認した。

第5章 補間型モデル縮約法のビヘイビアモデル化

本章では、4章で提案した補間型モデル縮約法をビヘイビアモデルへ適用するためのモデリング手法を提案する。

5.1 ビヘイビアモデル化

本節では、4章で提案した補間型モデル縮約法をビヘイビアモデルへ適用することを考える。ビヘイビアモデルは電圧方程式と結合されることから、補間型モデル縮約法の電圧方程式との結合手法について検討する。

5.1.1 鎖交磁束モデル

電圧方程式について検討を行う。(3.17)式の電圧方程式は、インダクタンスモデルと呼ばれる[19]。インダクタンスモデルは、計算の簡便さからよく用いられるが、電機子鎖交磁束をコイル鎖交磁束と永久磁石による鎖交磁束に分離していることからその分離精度が問題となる。本手法においては、4章での検討の通り、磁束を直接計算可能であることから、分離せずに電機子鎖交磁束のままで取り扱ったほうが簡便である。そのため鎖交磁束を用いた回転機モデルの定式化を行う。

d - q 座標系における鎖交磁束は(3.19)式を用いて表される。ここで(3.19)式を用いて(3.17)式を書き直すと、鎖交磁束で表現された d - q 座標で表現された電圧方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d(i_d, i_q, \theta) \\ \psi_q(i_d, i_q, \theta) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ここで、ビヘイビアモデルに提案手法を適用するために、(4.32)式の磁束変換行列と W の行列積 W_l を事前に求める。

$$W_l = \begin{bmatrix} l_u^t \\ l_v^t \\ l_w^t \end{bmatrix} \hat{W} \quad (5.2)$$

ここで、 $W_l \in \mathbb{R}^{3 \times s_0}$ である。 $\hat{W} \in \mathbb{R}^{n \times s_0}$ であることから、大幅に行列の次元を削減できる。また、行列ベクトル積を省くことができるため計算量を削減できる。(5.2)式を用いて(4.32),(4.33)式を書き直すと、

$$\Psi_{uvw}(i_d, i_q, \theta) = W_l \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (5.3)$$

$$\Psi_{dq}(i_d, i_q, \theta) = \begin{bmatrix} \Psi_d(i_d, i_q, \theta) \\ \Psi_q(i_d, i_q, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_d^t \\ \mathbf{m}_q^t \end{bmatrix} W_l \mathbf{c}(i_d, i_q, \theta) \quad (5.4)$$

となる． (5.4)式を用いることによって(5.1)式の鎖交磁束項の計算が可能である．

5.1.2 電圧方程式の解法

ここで電圧方程式は i_d, i_q に関して非線形性を持つため，非線形反復法を用いて解く必要がある．このためニュートンラフソン法を

$$\mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)}) = \frac{1}{R_a} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_d^{(k)} \\ i_q^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{R_a} \begin{bmatrix} p & -\omega \\ \omega & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_d^{(k)}(i_d, i_q, \theta) \\ \Psi_q^{(k)}(i_d, i_q, \theta) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

に適用する．ここで $\mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)})$ は残差， k は非線形反復回数を示す．(5.5)式にテーラー展開を適用すると次式となる．

$$\mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k+1)}) = \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)} + \delta \mathbf{i}^{(k)}) = \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)})}{\partial \mathbf{i}^{(k)}} \delta \mathbf{i}^{(k)} + O(\delta \mathbf{i}^{(k)^2}) \quad (5.6)$$

2 次以上の項 $O(\delta \mathbf{i}^{(k)^2})$ を無視すると，非線形反復 k 回目の補正量 $\delta \mathbf{i}^{(k)}$ に関する残差 $\mathbf{r}(\delta \mathbf{i}^{(k)})$ は次式となる．

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\delta \mathbf{i}^{(k)}) &= \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)})}{\partial \mathbf{i}^{(k)}} \delta \mathbf{i}^{(k)} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{i}^{(k)}) - \frac{1}{R_a} \begin{bmatrix} p \frac{d\Psi_d^{(k)}(i_d, i_q, \theta)}{di_d^{(k)}} & -\omega \frac{d\Psi_q^{(k)}(i_d, i_q, \theta)}{di_q^{(k)}} \\ \omega \frac{d\Psi_d^{(k)}(i_d, i_q, \theta)}{di_d^{(k)}} & p \frac{d\Psi_q^{(k)}(i_d, i_q, \theta)}{di_q^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_d^{(k)} \\ \delta i_q^{(k)} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる．ここで $d\Psi_d/di_d$ および $d\Psi_q/di_q$ は，(5.8)式から次式で計算できる．

$$\frac{d\Psi_d(i_d, i_q, \theta)}{di_d} = \mathbf{m}_d^t W_l \sum_{j=1}^4 \mathbf{c}_j(\theta) \frac{dN_j(i_d, i_q)}{di_d} \quad (5.9)$$

$$\frac{d\Psi_q(i_d, i_q, \theta)}{di_q} = \mathbf{m}_q^t W_l \sum_{j=1}^4 \mathbf{c}_j(\theta) \frac{dN_j(i_d, i_q)}{di_q} \quad (5.10)$$

上式より， (i_d, i_q) 平面の補間関数の微分から $d\Psi_d/di_d$ ， $d\Psi_q/di_q$ を計算できることがわかる．図 5.1 に計算手法のフローチャートを示す．

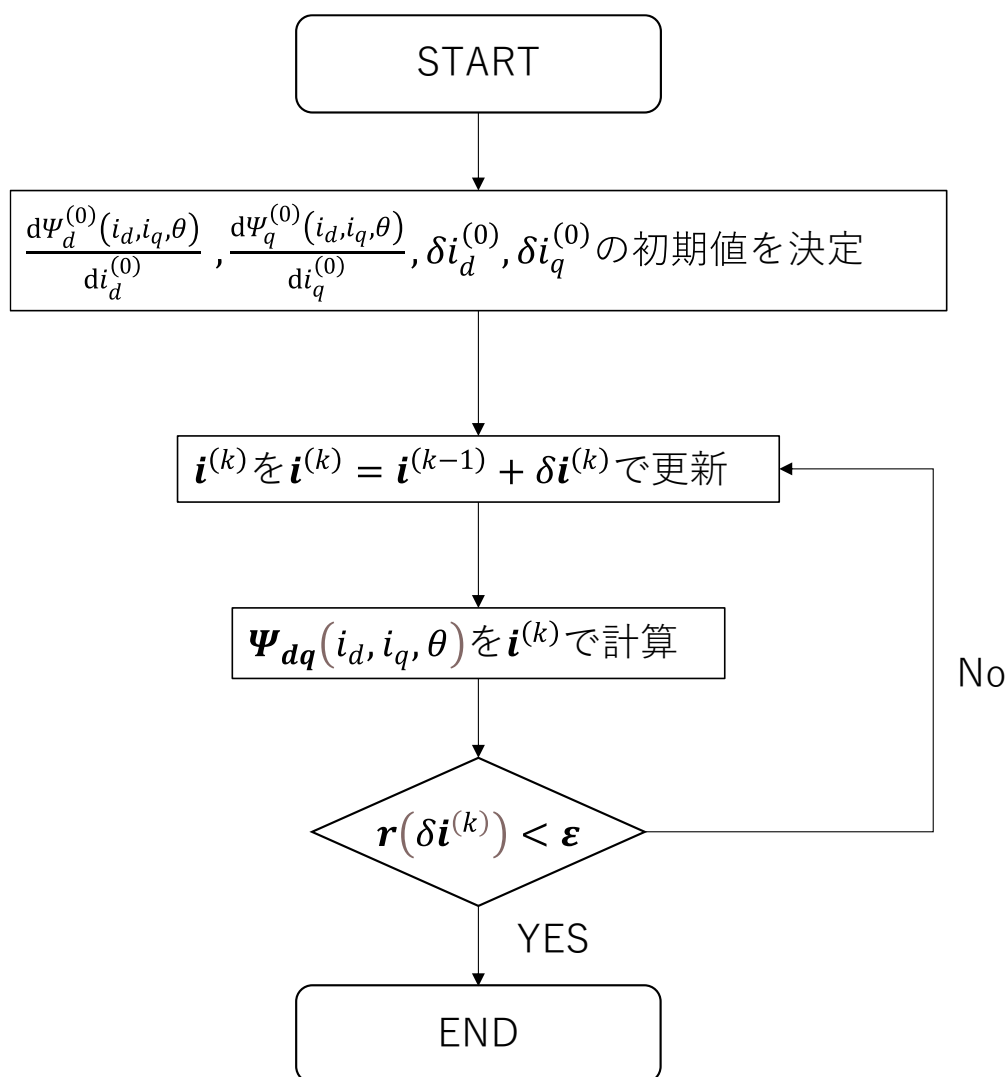


図 5.1 フローチャート

5.2 数値実験

本節では、数値実験によって提案手法の計算精度について検討を行う。

5.2.1 計算条件

提案したビヘイビアモデルの計算精度を確認するために数値検討を行う。4 章と同様に FEM と提案手法の結果とを比較する。このとき、モータの回転数は次式で示すような運動方程式によって計算する。

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = T - Z\omega_r \quad (5.11)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_r \quad (5.12)$$

ここで、 ω_r [rad/s]は機械角速度、 J [kg・m²]はモータ慣性、 Z [N・m/(rad/s)]は粘性摩擦係数である。このときトルク T は 4 章と同様に求める。

$t=0$ の際の、 ω_r の初期値を $\omega_r = 0$ とし、1ms 刻みで 0.1s 間の動解析を実行した。このとき、表 5.1 に示すようにパラメータを設定した。また、解析モデルは 4.3 節のモデルを用いる。縮約パラメータについても表 4.2 と同一とした。

表 5.1 解析パラメータ

J	kg・m ²	0.0043
Z	N・m/(rad.s)	0.001
v_d	V	-4
v_q		10.0
R_a	Ω	1.5

5.2.2 数値結果

d 軸, q 軸磁束の時間応答の比較を図 5.2, 5.3 に示す. また, d 軸, q 軸電流の時間応答を図 5.4, 5.5 に示す. 磁束, 電流ともに FEM と提案手法の結果はよく一致していることが確認できる. また, トルクの時間応答を図 5.6 に示す. こちらも FEM と提案手法の結果はよく一致していることが確認できる. この結果から鎖交磁束モデルを用いたビヘイビアモデル化を行うことができることを示した. また, 時間ステップ毎に必要な計算時間は表 4.3 と同様なため, FEM と比較して計算時間も大幅に短縮できる.

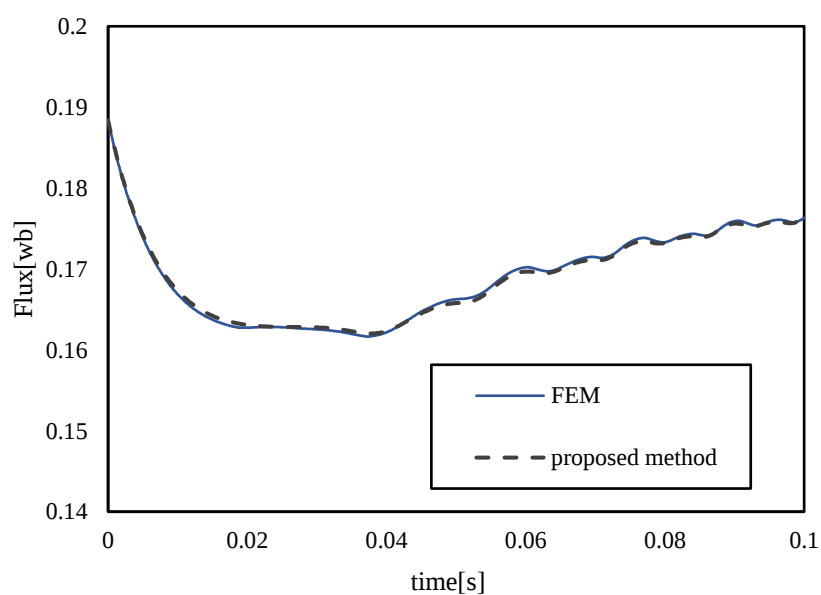
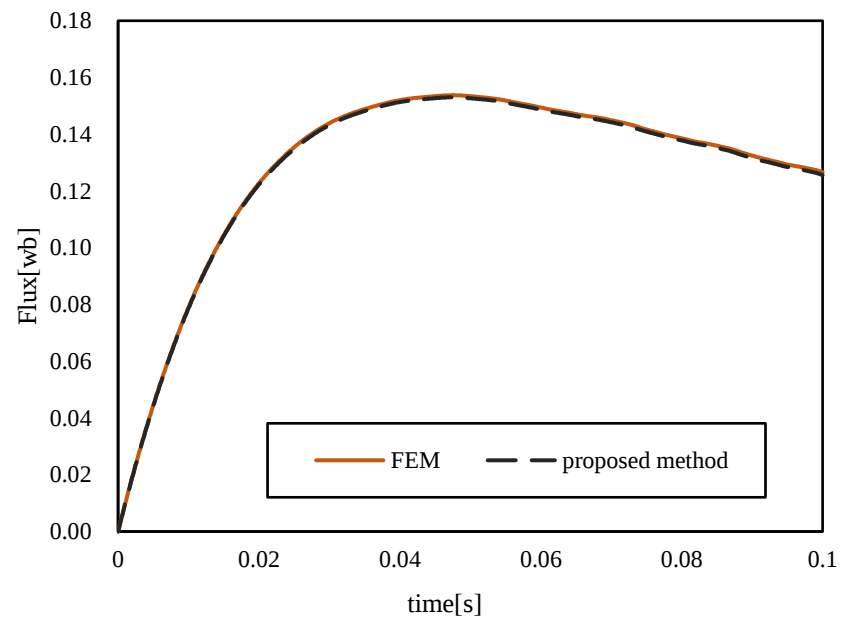
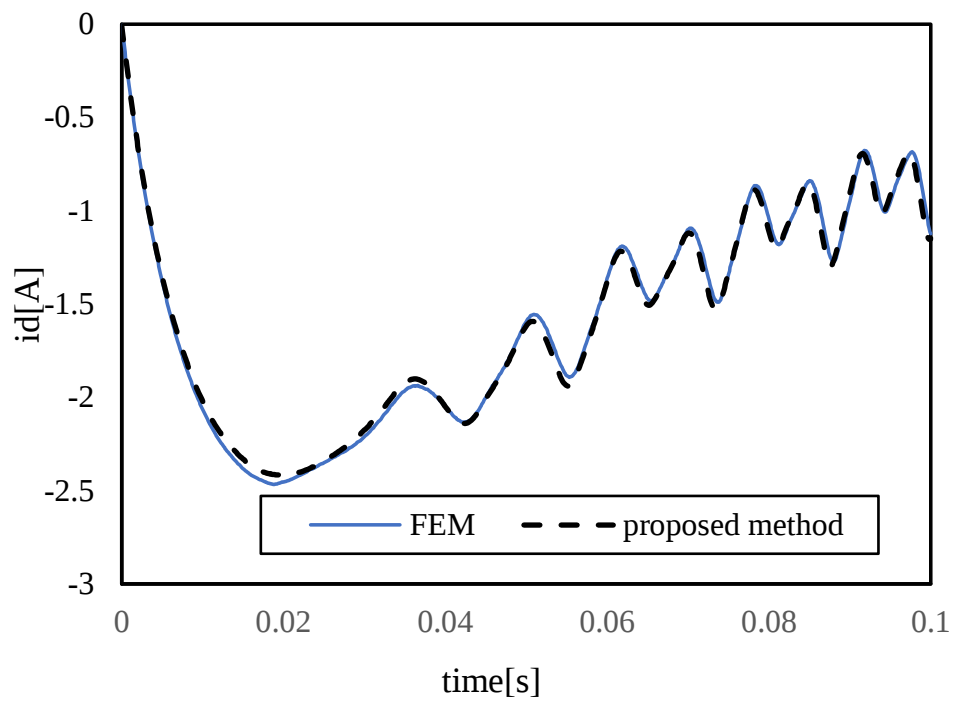


図 5.2 d 軸磁束の時間変化

図 5.3 q 軸磁束の時間変化図 5.4 d 軸電流の時間変化

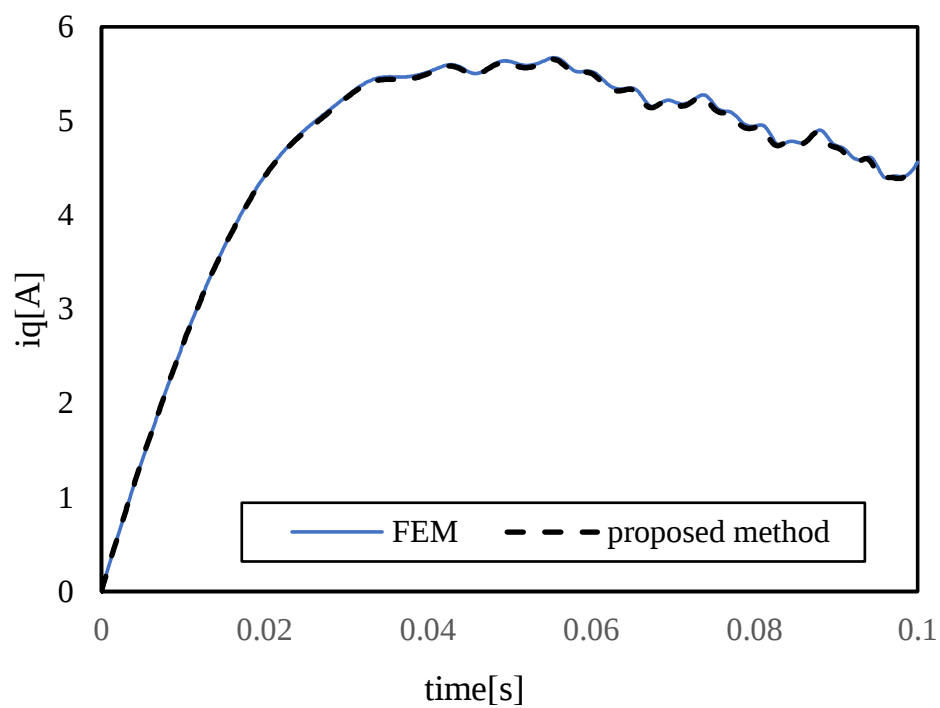
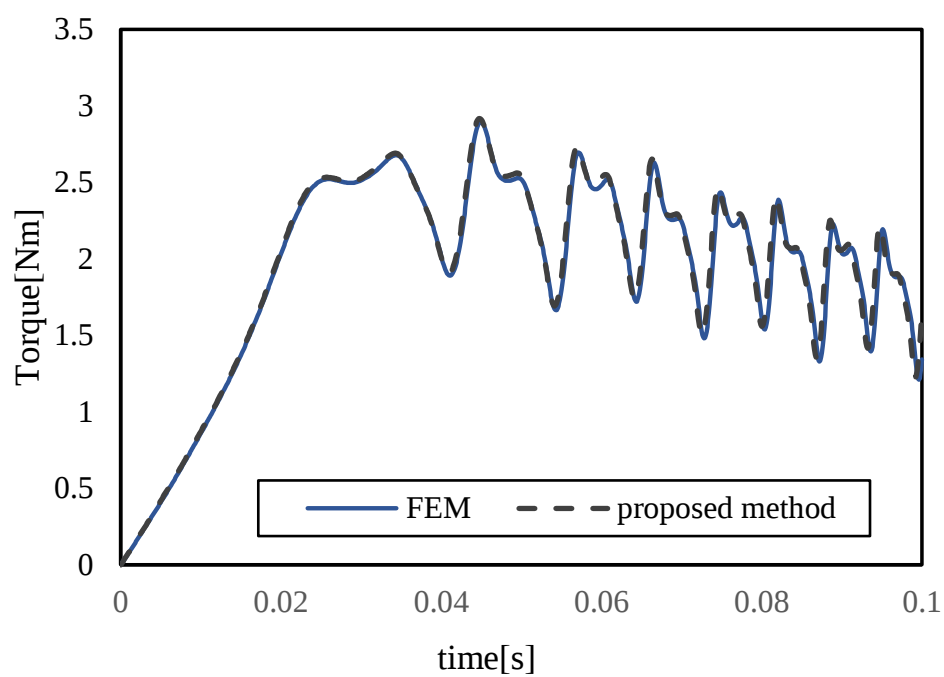
図 5.5 q 軸電流の時間変化

図 5.6 トルクの時間変化

5.2 第5章のまとめ

4章で提案した補間型モデル縮約法をビヘイビアモデルへ適用するためのモデリング手法を提案した。まず電圧方程式の鎖交磁束モデル化を行い、提案手法と電圧方程式が磁束を用いて結合できることを示した。また、行列積を事前に計算することによって、計算コストが削減できることを示した。その後、電圧方程式の解法について説明した。数値検討の結果、FEMと提案手法はよく一致していることが確認できその有効性が確認できた。

第 6 章 結論

本論文では、有限要素法の説明、回転機の数学モデルの説明を行ったのちに、電磁機器の高性能化のため、計算負荷が軽い、分布定数として計算できる、電気回路などと結合が容易に可能である電磁界解析モデルの提案を行った。

6.1 補間型モデル縮約法

FEM をベースとしたモータ制御系のモデル化と、そのモデルを用いた動作シミュレーションは重要な役割を担っている。動作シミュレーションはいわゆるビヘイビアモデルで実施される。この解析では、FEM を用いて作成した参照テーブルや応答局面から回転子位置に対応する磁束やインダクタンスなどを取得し、回路方程式を求める。この回路方程式を解くことで電流を決定し、トルクを求め、トルクを入力とした運動方程式を解くことで、回転子の新たな位置を決定する。このように決まる回転子の回転速度が目標に近づくように、入力電圧が制御される。このアプローチによりモータの動的な振る舞いを近似的に求めることができる。ただし、モータを集中定数回路として扱うため、空間的に分布する加振力や磁界の分布から求められる高調波損失のような場の特性を求めることが難しく、電磁振動解析などに用いることは困難である。FEM の計算時間を短縮するアプローチとして、POD に基づく MOR がある。磁界の分布のスナップショットから正規直交基底を作成することにより、磁界を少数の基底で表し、有限要素方程式を基底の係数についての小さな方程式に変換することによって行列計算の計算コストを削減することができる。しかしながら、回転機の解析においては一般に電磁鋼板の磁気飽和を考慮する必要がある。このとき縮約方程式の成分は機械角、電流振幅や電流位相角に依存することとなる。このため、状態変化毎に縮約方程式を構成し直すとともに、非線形の縮約方程式を解き直す必要がある。このことから、実時間処理で特性の算出が求められるビヘイビアモデルへは適応が難しい。

4 章では、ビヘイビアモデルで決定された電流振幅・位相角に対応する磁界分布を高速に復元する手法である補間型モデル縮約法を提案した。非線形方程式を解くことなく、記憶した POD 基底から補間処理で磁界を復元する。補間型モデル縮約法では、磁界分布を圧縮して保存しているため、集中定数だけでなく磁束密度や損失密度などの分布定数についても高速に計算することが可能となる。数字実験により FEM の結果との比較を行い、トルクなどの集中定数や電磁力など分布定数の精度および計算速度を比較することによって補間型モデル縮約法の有効性を確認した。

5 章では、補間型モデル縮約法を回路方程式と結合し計算する方法を提案した。鎖交磁束に基づく定式化を行い、補間型モデル縮約法が電圧方程式と結合できることを示し

た. また, FEM との計算結果と比較して, 補間型モデル縮約法を用いた場合でも精度よく計算できることを示した.

本手法は, 高速に計算可能である, 分布量が計算可能である, 電気回路などと結合が可能であるという特徴を持つことから, 従来は計算時間の関係で十分に検討することができなかった, 制御-電磁-振動や制御-電磁-熱流体連成解析による特性検討が高速に行えるようになる可能性がある. そのため, 本手法を発展させていくことによって, 今後の回転機の性能向上に大きく寄与する可能性があると考ええる.

6.2 今後の展望

本論文では, 回転機の電磁界解析の高速化のために補間型モデル縮約法の提案を行い, その有効性を確認した. 一方で, モータの設計においては制御を含んだモータのドライブシステムでの検討が必要である. 今後は, 補間型モデル縮約法をモータドライブシステムでの検討を行うことが必要である. そのため, トルク最大制御や弱め界磁制御下でのモータの動的特性解析や, PWM 波形を入力した場合の挙動についても詳細に検討する必要があると考える. また, 本論文では熱, 振動などほかの物理現象との連成解析についての検討を十分に行うことができなかった. 特に振動問題については, モータ開発を行う上で避けられない課題となってきた[38-40]. 電磁界解析だけではなく, 振動解析についても高速化の検討を行う必要があり, 振動解析のモデル縮約についても今後取り組むべき課題である.

本論文では文献[27]で提案された損失モデリングを用いて損失の計算を行った. しかしながら, 現在においてはプレイモデル[29]などのより高度なヒステリシス損モデルが提案されている. 原理的には本手法に適用可能であると考えているため, 高精度化のためには, 取り組む必要があると考える. また, 今回の検討では, 巻線内のうず電流については未考慮であるが, 巻線内の渦電流についても検討する必要があると考える.

本論文では, 数値実験のみによってその有効性を確認したが実験データとの適合についても今後取り組んでいく必要があると考える.

謝辞

本研究を遂行するに、たいへん多くの方々にお世話になりました。ここに深く感謝の意を表します。

本論文をまとめるにあたり、終止懇切丁寧なご指導・ご鞭撻をいただいた北海道大学大学院情報科学研究院、五十嵐一教授に心より深く感謝申し上げます。五十嵐教授には学部・修士時代から研究に関する基本的な姿勢を教えていただきました。お世話になりました。学位論文審査において、貴重なご指導とご助言をいただいた北海道大学大学院情報科学研究院の、小笠原 悟司教授、北 裕幸教授、野口 聡 准教授に心より感謝申し上げます。先生方のご助言により、本論文の完成度が高まりました。

また、野口聡 准教授には、学部・修士時代に様々なことをご教授いただきました。深く感謝いたします。

本研究は、筆者が勤務している株式会社明電舎において実施した研究成果の一部をまとめたものであり、その間多くの方にご指導ご協力をいただきました。社会人博士課程に進学する機会を与えてくださりました、当時の研究開発本部長 鉢呂友康氏、博士課程での研究活動を進めるにあたりご助力賜りました、基盤技術研究所長 小倉和也氏、解析センター長 姉川憲永氏にはここに深く感謝いたします。

また、研究活動の遂行にあたり、業務内容の調整などで多大なご尽力をいただきました、解析センターのみなさまには心より感謝いたします。

コロナ禍のためなかなか研究室に行く機会はありませんでしたが、明るい雰囲気のもとで研究させて頂き、数々のご助言、ご協力を頂きました同研究室の皆様に御礼申し上げます。また、昨年度まで共同研究として本研究活動にご協力いただいた岡本和也氏に深く感謝いたします。

最後に、忙しい中支えてくれた妻と、いつも笑顔でいてくれた義人に感謝いたします。

2021 年 2 月
坂本 宏紀

参考文献

- [1] T. Ishikawa, K. Nakayama, N. Kurita, F. P. Dawson, “Optimization of Rotor Topology in PM Synchronous Motors by Genetic Algorithm Considering Cluster of Materials and Cleaning Procedure,” IEEE Trans. Mang., vol. 50, no. 2, 2014, 7015704.
- [2] T. Sato, K. Watanabe, and H. Igarashi, “Multimaterial Topology Optimization of Electric Machines Based on Normalized Gaussian Network,” IEEE Trans. Magn., vol. 51, no. 3, 7202604, 2015.
- [3] 佐々木秀徳, 五十嵐一, 「フーリエ級数を用いた IPM モータのトポロジー最適化」, 電気学会論文誌 B, vol. 137, no. 3, pp.245-253, 2017.
- [4] 加納 善明, 渡邊 恭平, 小坂 卓, 松井 信行, 「埋込磁石同期モータの回路-磁場連携解析のための新しいモデリング法」, 電気学会論文誌 D, vol.128, No.10, pp.1203-1210, 2008
- [5] 元吉研太, 米谷晴之, 前田進, 空信之, 「大規模電磁界解析技術とタービン発電機への適用例」三菱電機技報, vol.91, No.11, pp44-48, 2017
- [6] 坂下善行, 服部哲弥, 山田隆, 井戸浩登他, 「永久磁石電動機の磁界-構造連成解析結果と実験 結果の比較(第二報)」, 電気学会回転機研究会資料, RM-12-126, 2012
- [7] 山崎克巳, 大木俊治, 根津章, 池見健: 「弱め界磁制御時の高調波鉄損を低減した IPM モータ の開発」, 電学論 D, Vol.127, No.8, pp.837-843, 2007
- [8] 兼松正人, 宮島孝幸, 藤本博志, 堀洋一他: 「IPMSM の磁束分布を考慮した d 軸電流によるラジアル力抑制の負荷時における実験的評価」平 24 年電学産業応用部門大会 (JIAS2012), 3-42, pp.215 – 218, 2012
- [9] G. ダット, G. トゥゾー, “有限要素法全解”, パーソナルメディア, 1990.
- [10] 中田高義, 高橋則雄, “電気工学の有限要素法 第2版”, 森北出版, 1986.
- [11] 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹, “数値電磁力学”, 森北出版, 2002.
- [12] 高橋則雄, “三次元有限要素法”, 電気学会, 2006.
- [13] 高橋則雄, “磁気工学の有限要素法,” 朝倉書店, 2013.
- [14] 五十嵐一, 亀有昭久, 加川幸雄, 西口磯春, A. ボサビ, “新しい計算電磁気学,” 培風館, 2003.
- [15] 森本茂雄, 真田雅之, “埋込磁石同期モータの設計と制御” オーム社, 2001.
- [16] リラクタンストルク応用電動機の技術に関する調査専門委員会編, “リラクタンストルク応用モータ” 電気学会, 2016

- [17] O.A. Mohammed, S. Liu, and Z. Liu, "Phase-variable model of PM synchronous machines for integrated motor drives," IEEE Trans. Magn., vol.151, no.6, 423 - 429, 2004.
- [18] O.A. Mohammed, S. Liu, and Z. Liu, "A Phase-variable model of Brushless dc Motors Based on Finite Element Analysis and Its Coupling With External Circuit," IEEE Trans. Magn., vol.41, no.5, 1576-1579, 2005.
- [19] H. Kaimori, and K. Akatsu, "Behavior Modeling of Permanent Magnet Synchronous Motors Using Flux Linkages for Coupling with Circuit Simulation," IEEE J. Industry Applications, vol.7, no.1, 56-63, 2018.
- [20] T. Henneron and S. Clenet, "Model order reduction applied to the numerical study of electrical motor based POD method taking into account rotation movement," Int. J. Num. Model, Vol.27, No.3, pp.485-494, 2014.
- [21] T. Shimotani, Y. Sato, T. Sato, H. Igarashi, "Fast Finite-Element Analysis of Motors Using Block Model Order Reduction," IEEE Trans. Magn., vol. 52, no. 3, art no.7207004, 2016.
- [22] 下谷俊人, 佐藤佑樹, 五十嵐一:「ブロックモデル縮約法によるモータ解析の高速化」, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-15-099, RM-15-137, 高知, 9月, 2015年.
- [23] Y. Sato and H. Igarashi, "Model Reduction of Three-Dimensional Eddy Current Problems Based on the Method of Snapshots," IEEE Trans. Magn., Vol. 49, No. 5, pp. 1697-1700, 2013.
- [24] Y. Sato, F. Campelo and H. Igarashi, "Meander Line Antenna Design Using an Adaptive Genetic Algorithm," IEEE Trans. Magn., Vol. 49, No. 5, pp. 1889-1892, 2013.
- [25] T. Shimotani, Y. Sato and H. Igarashi, "Equivalent-Circuit Generation from Finite Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition," IEEE Trans. Magn., Vol. 52, No. 3, 2016.
- [26] T. Shimotani, Y. Sato, T. Sato and H. Igarashi, "Fast Finite Element Analysis of Motors Using Block Model Order Reduction," IEEE Trans. Magn., Vol. 52, No. 3, 2016.
- [27] 山崎克己:「固定子及び回転子の高調波電磁界を考慮した誘導電動機の損失算定」, 電学論D, vol.123, No.4, pp.392-400, 2003
- [28] I. Mayergoyz: "Mathematical Models of Hysteresis", Springer 1991
- [29] 北尾ほか, プレイモデルのヒステリシス磁界解析への適用に関する検討, 電学静止器・回転機合同研資, SA-12-16, RM-12-16, 2012
- [30] 森本茂雄, 真田雅之, "省エネモータの原理と設計法 ～永久磁石モータの基礎から設計制御まで～" 科学技術出版, 2013.
- [31] Y. Paquay, O. Bruls, and C. Geuzaine, "Nonlinear Interpolation on Manifold of Reduced-Order Models in Magnetodynamic Problems," IEEE Trans. Magn., vol.52, no.3, art no.7204804, 2016.
- [32] M. Farzamfar, F. Martin, A. Belahcen, L. Monnier, and T. Henneron, "Orthogonal Interpolation Method for Order Reduction of a Synchronous Machine Model," IEEE Trans. Magn., vol.54, no.2, art no 8100506, 2018.

- [33] S. Paul, J. Chang, “Fast Numerical Analysis of Electric Motor Using Nonlinear Model Order Reduction,” IEEE Trans. Magn., vol. 54, no. 3,
- [34] P.J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data”, J. Fluid Mechanics, Vol. 656, 2010, pp. 5–28
- [35] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. “On dynamic mode decomposition: Theory and applications,” Journal of Computational Dynamics, 1(2):391421, 1014
- [36] 回転機のためのバーチャルエンジニアリングのための電磁界解析技術調査専門委員会編:「回転機のためのバーチャルエンジニアリングのための電磁界解析技術」 電気学会技術報告第 776 号, 2000.
- [37] 梨木 政行, 井上 芳光, 川井 庸市, 大熊 繁, 「シンクロナスリラクタンスモータの磁束鎖交数を用いたインダクタンス算定法とモデル化の提案」, 電気学会論文誌D, vol 127, No.8, pp.158-166, 2007
- [38] 高畑 良一, 湧井 真一, 宮田 健治, 野間 啓二, 妹尾 正治, 「インバータの変調方式が永久磁石同期モータの特性に及ぼす影響」, 電気学会論文誌D, vol 134, No.12, pp. 997-1005, 2014
- [39] 谷口 峻, 上條 芳武, 安井 和也, 松下 真琴, 結城 和明, 若尾 真治, 「モータ電磁騒音低減のための新しい PWM キャリア分散手法」, 電気学会論文誌D, vol 135, No.12, pp. 1144-1152, 2015
- [40] 原 崇文, 安島 俊幸, 渡部 眞徳, 星野 勝洋, 「電圧型インバータの PWM 方式による分布巻永久磁石同期モータの振動に関する検討」, 電気学会論文誌D, vol 137, No.9, pp. 704-712, 2017

研究業績

1.

I 査読付学会誌等

- (1) H. Sakamoto, K. Okamoto, H. Igarashi, "Fast Analysis of Rotating Machine Using Simplified Model-Order Reduction Based on POD" IEEE Trans Mags., vol.56, no.2, art no.7506104, 2020.
- (2) 坂本 宏紀, 五十嵐 一, "補間型モデル縮約法によるモータ特性の高速解析" (2020年8月電気学会D部門論文誌投稿)

II. 査読付き国際会議プロシーディング

- (1) H. Ito, K. Watanabe and H. Igarashi, "An Improvement of Convergence in Finite Element Analysis With Infinite Element Using Deflation," COMPUMAG2011, 2011
- (2) H. Sakamoto, K. Okamoto, H. Igarashi, "Fast Analysis of Rotating Machine Using Simplified Model-Order Reduction Based on POD" COMPUMAG2019, 2019

2. 論文(その他)

- (1) H. Ito, K. Watanabe and H. Igarashi, "An Improvement of Convergence in Finite Element Analysis With Infinite Element Using Deflation," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 48, no. 2, pp. 667-670, Feb. 2012

3. 講演(学位論文関係)

- (1) H. Sakamoto, K. Okamoto, H. Igarashi, "Fast Analysis of Rotating Machine Using Simplified Model-Order Reduction Based on POD" COMPUMAG2019, 2019 France Paris
- (2) 坂本宏紀, 岡本和也, 五十嵐一 "モデルリダクションを用いた回転機の電磁振動の高速解析に関する検討" 電気学会全国大会 令和2年度
- (3) 岡本和也, 坂本宏紀, 五十嵐一, IPM モータのモデル縮約の基礎検討, 第30 回算力学講演会, OS15-2-274, 徳島, 10 月, 2018.
- (4) 岡本和也, 坂本宏紀, 五十嵐一, 簡易化された固有直交分解法によるIPM モータの高速解析, 電気学会静止器回転機合同研究会, SA-19-085, RM-19-105, 仙台, 9月, 2019.
- (5) 岡本和也, 坂本宏紀, 五十嵐一, 簡易化された固有直交分解法によるIPM モータの高速解析-高調波鉄損算出-, 電気学会全国大会, 東京, 3 月, 2020.
- (6) 坂本宏紀, 岡本和也, 五十嵐一, モデルリダクションを用いた回転機の電磁振

動の高速解析に関する検討，電気学会全国大会，東京，3 月，2020.

4. その他：論文・講演

- (1) H. Ito, K. Watanabe and H. Igarashi, "An Improvement of Convergence in Finite Element Analysis With Infinite Element Using Deflation," COMPUMAG2011, 2011 Australia Sydney
- (2) 坂本宏紀，渡邊浩太，五十嵐 一"グラム行列へのデフレーション法適用による無限要素を用いた有限要素法の収束性改善", 平成23年度 電気・情報関係学会北海道支部連合大会，2011年10月，北海道・函館
- (3) 坂本 宏紀，五十嵐 一，“トポロジー最適化を用いた永久磁石型同期電動機のフラックスバリア設計,” 平成24年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会，2012