



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Mean-field behavior for percolation models [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	上島, 芳倫
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第14347号
Issue Date	2021-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/81734
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Yoshinori_Kamijima_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 上島芳倫

学 位 論 文 題 名

Mean-field behavior for percolation models
(パーコレーション模型に対する平均場臨界現象)

温度や圧力などの熱力学的なパラメータを操作すると、例えば、 H_2O は水から 0°C を境に氷に変わり、 100°C を境に水蒸気になる。また、 Fe は常温では強磁性を示す（平たく言えば、磁石にくっつく）が、約 770°C を境に常磁性を示す（磁石にくっつかなくなる）。これらのように熱力学的なパラメータを変化させることで物質の性質が著しく変化する現象を相転移と呼ぶ。 H_2O の場合は液相と気相との間に、 Fe の場合は強磁性相と常磁性相との間に各相が区別できなくなるパラメータの組がある。これを臨界点と呼ぶ。臨界点の近傍では物理量が暴的に発散するなどの特異な現象（臨界現象）が観測され、その冪指数を臨界指数という。実験事実から、臨界指数は物質の詳細（固体の場合は結晶格子や原子の種類）によらずに空間次元や対称性などの少数の要素にのみ依存すると信じられている。この普遍性に基づき俯瞰的な立場から現象の分類が可能となる。したがって、臨界指数の普遍性を数学的に解明することは確率論や統計力学における重要な課題である。

さて、1957 年に Broadbent と Hammersley はパーコレーションと呼ばれる模型を導入した。これは物理的には多孔質媒体中の水の浸透現象を表し、相転移・臨界現象を示すことが知られている。穴の密度が低くて水が浸透しない状態と穴の密度が高くて水が浸透する状態とがそれぞれ相と見なされる。パーコレーションを数学的に定式化すると次のようになる。 $\mathbb{Z}^d$ のある部分集合を $\mathcal{N}^d$ とし、 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して、ランダム・ウォークの推移確率を $D(x) = \mathbb{1}_{\{x \in \mathcal{N}^d\}}/|\mathcal{N}^d|$ とする。特に、 $\mathcal{N}^d$ として $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$ と取ったものを最近接モデル、ある $L < \infty$ を固定したとき $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 < \|x\|_\infty \leq L\}$ と取ったものを spread-out モデルと呼ぶ。 $\mathbb{Z}^d$ 上のパーコレーションとは、各ボンド $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d$ に確率 $pD(y-x)$ で開、確率 $1-pD(y-x)$ で閉という状態がそれぞれ独立に与えられたモデルである。今、 $\mathbb{Z}^d$ のある 2 点間を結ぶ、開ボンドから成る経路を考える。原点 o から点 $x \in \mathbb{Z}^d$ への開ボンドから成る経路が存在する確率を $G_p(x)$ で表し、これを二点関数という。さらに、帯磁率 $\chi_p = \sum_x G_p(x)$ を定義する。原点から開ボンドから成る経路で繋がる点の集合をクラスターと呼ぶことにすれば、帯磁率はクラスターの大きさの期待値を意味する。

パーコレーションは次の意味で相転移を示す。すなわち、自明にクラスターの大きさは $p=0$ で 1（原点自身）であり、 $p=|\mathcal{N}^d|$ で ∞ になるが、実は非自明な値 $p_c < 1$ で χ_p が発散することが知られている。この p_c が臨界点であり、臨界点の近傍では帯磁率が漸近的に $(p-p_c)^{-\gamma}$ と振る舞うと予想されている。この γ を臨界指数と呼ぶ。一般に臨界指数の値を求めることは困難であるが、特に、高次元では平均場臨界指数という、対応する相互作用の無い模型の臨界指数に一致すると信じられている。パーコレーションの場合はランダム・ウォーク（経路の組同士に相互作用が無い）の臨界指数 $\gamma=1$ であり、この退化は（上部）臨界次元 $d_c=6$ より大きい次元で起こると考えられている。

今述べたようにパーコレーションは $\mathbb{Z}^d$ 上のボンドについて定義されていた．それに対して，時空間 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ 上のボンドについても同様の模型を考えられる．これを有向パーコレーションと呼び，この模型は物理的には浸透現象の時間発展を表す．通常のパーコレーションと同様に，帯磁率とその臨界指数 γ が定義され，時空間の次元が臨界次元 $d_c + 1 = 4 + 1$ よりも大きいとき， $\gamma = 1$ となると予想されている．

現在までに，通常のパーコレーションおよび有向パーコレーションに対する臨界指数が平均場臨界指数へ退化することは，レース展開と呼ばれる手法で証明されている．レース展開とは二点関数 G_p の展開式 $G_p(x) = I_p(x) + (J_p * G_p)(x)$ を与えるものである．ただし， $I_p(x)$ と $J_p(x)$ はモデル依存の展開係数であり，各項が G_p 自身を含む交代級数になっている．このとき，平均場臨界指数へ退化するための十分条件はその交代級数が絶対収束して，かつ十分小さいことである．通常のパーコレーションでは，原と Slade が $\mathbb{Z}^d$ 上の spread-out モデル ($L \gg 1$) に対して $d > 4$ で，最近接モデルに対して $d \geq 19$ で平均場臨界指数への退化を示した．後者の結果は近年 Fitzner と van der Hofstad が non-backtracking lace expansion と呼ばれる手法を用いて $d \geq 11$ に改善した．また，有向パーコレーションでは，Nguyen と Yang が $\mathbb{Z}^d$ 上の spread-out モデル ($L \gg 1$) に対して $d > 4$ で，最近接モデルに対して $d \gg 4$ (値を特定していない) で平均場臨界指数への退化を示した (ただし，前者は問題無いが，後者の結果は本論文でも述べるように一部の計算が誤っている)．

本論文では体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ を導入し，その上でレース展開を使うことで通常のパーコレーションおよび有向パーコレーションについて平均場臨界指数への退化を証明する．結果として，通常のパーコレーションでは $\mathbb{L}^{d \geq 9}$ 上で，有向パーコレーションでは $\mathbb{L}^{d \geq 9} \times \mathbb{Z}_+$ 上でそれを証明できた (両方で空間次元が 9 なのは偶然である)．レース展開係数の絶対収束性を示すためにはそれらの定義含まれる事象の確率を精度良く評価する必要がある．そのために，その事象を注意深く排反な事象に分割することで，先行研究の評価よりも両方のパーコレーションで良い評価を得ることができた．また，レース展開にはランダム・ウォーク量 (再帰確率など) の評価も必要である．体心立方格子ではそれらの量が $\mathbb{Z}^d$ よりも簡単に一桁以上小さくなることや，数値計算の方法が簡単になることによって，先行研究よりも少ない手数でより小さい次元で証明することができた．

特に，有向パーコレーションの結果には 2 つの改良点が含まれる．Nguyen と Yang の論文では「 $(k, t) = (0, 0)$ の近傍の外では $|1 - e^{it} \hat{D}(k)|$ が下から正の定数で押さえられる」($\hat{D}$ は D の Fourier 変換) と述べている箇所があるが，これは spread-out モデルでは成立するものの，最近接モデルでは不可能である．これに対する下界を求めるべき範囲を変更することで，本論文では Nguyen と Yang の解析の問題点を特に体心立方格子上で解決した．また，Nguyen と Yang の論文の最近接モデルの部分では「重み付き開バブル」と呼ばれる量 (本文の $\hat{V}_{p,m}^{\lambda,\rho}(k)$ に対応) の収束性を $d > 8$ のみでしか示していなかった．それに対して，本論文ではそれが $d > 4$ で成り立つように改良した．これは今後本論文の結果を改良して，臨界次元 $d_c = 4$ の近くで平均場臨界指数への退化を証明するのにも役立つと考えられる．