



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Differential Geometry of Statistical Submanifolds [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	佐藤, 直飛
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第14348号
Issue Date	2021-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/81844
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Naoto_Satoh_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 佐 藤 直 飛

学 位 論 文 題 名

Differential Geometry of Statistical Submanifolds
(統計部分多様体の微分幾何学)

本論文は、統計断面曲率を用いた幾何学的不等式による統計部分多様体の研究に関するものである。確率分布のパラメータ族のなす空間上には、統計学から要請されるある種の不変性を課すことにより、リーマン計量と双対的なアフライン接続のなす双対構造が自然に導入される。この幾何構造を微分幾何学的に定式化したものを統計構造といい、統計構造を備えた多様体を統計多様体という。そして、統計多様体の研究は、確率分布のパラメータ族を数理モデルとして用いる数理科学の諸分野を、双対構造や統計構造などの幾何構造を用いて研究する情報幾何学の中核をなしている。

微分幾何学において、断面曲率は最も基本的な概念の一つである。統計多様体上にも統計曲率テンソルを用いることにより、リーマン幾何学における断面曲率の変形として統計断面曲率を定義することができる。統計断面曲率に関連して、統計リッチ・テンソルや統計スカラー曲率も定義され、これらが統計多様体の主要な内在的不変量となる。

一方、情報幾何学では、確率分布のパラメータ族をより一般の空間に埋め込まれた部分多様体とみなし、そのときの部分多様体の形状が統計的推論等の性質に関係づけられる。したがって、情報幾何学の基礎理論研究として、統計多様体の部分多様体の研究が必要不可欠である。部分多様体論では、部分多様体上の内在的不変量と外在的不変量に関する幾何学的関係式を確立することが最も基本的な問題の一つとされている。しかしながら、統計多様体の部分多様体に関する統一的な幾何学的関係式は得られていないのが現状である。

本論文の目的は、統計断面曲率を用いて、統計部分多様体上の幾何学的関係式を確立することにより、情報幾何学の微分幾何学的基礎理論を構築することである。

本論文は、5つの章で構成されている。以下、各章の内容について順を追って概説する。

第1章では、本論文に必要な基礎事項をまとめる。第1.1節ではアフライン接続、第1.2節ではリーマン計量を扱い、第1.3節で統計構造及びヘッセ構造の定義を与える。さらに、確率分布のパラメータ族と統計多様体の関連について触れる。

第2章では、統計微分同相写像を導入し、その構成と存在条件について考察する。統計微分同相写像とは統計構造を保つ微分同相写像のことである。第2.1節で我々は、リーマン幾何学においてカルタン・アムブロース・ヒックスの定理として知られる定理を統計多様体に対して拡張し、統計多様体の各点の近傍での統計構造が、リーマン曲率テンソルと差テンソルの値とそれらのレヴィ・チビタ接続に関する測地線に沿った平行移動により決定されることを示した。さらに第2.2節では、ヘッセ多様体の場合を考察し、各点の近傍でのヘッセ構造が、ヘッセ曲率テンソルと差テンソルの値とそれらのレヴィ・チビタ接続に関する測地線に沿った平行移動により特徴付けられることを解明した。

第3章では、統計断面曲率について考察する。第2.1節における研究成果から、リーマン

曲率テンソルと差テンソルを用いて表される統計曲率テンソルが統計多様体の研究に適した曲率であることが示唆される。第 3.1 節では、統計曲率テンソルや統計断面曲率の基礎事項を扱う。統計断面曲率とは、統計曲率テンソルを用いて定義される断面曲率である。第 3.2 節では統計断面曲率が一定な統計多様体を紹介する。統計断面曲率が一定である統計多様体は、従来の定曲率よりも広いクラスを定めている。我々は、与えられた値を統計断面曲率にもつ統計構造を双曲空間上に構成した。

第 3.3 節では、統計断面曲率一定である統計多様体を含むクラスとして、統計アインシュタイン多様体および統計リッチソリトンを導入した。リッチ・テンソルが対称な場合、A. N. Siddiqui らにより定義された統計ソリトンは統計リッチソリトンとなることを明らかにした。

第 4 章では、統計部分多様体と統計断面曲率を用いた幾何学的不等式について考察する。第 4.1 節で統計部分多様体と統計曲率テンソルを用いた基本方程式について述べる。第 4.2 節では、オイラー不等式として知られる古典的な幾何学的不等式を、統計断面曲率を用いて統計多様体へ拡張し、統計部分多様体上の各点で成立する内在的不変量と外在的不変量に関する不等式を確立した。さらに、この不等式の等号成立の必要十分条件として、統計部分多様体の二重自己平行性が特徴付けられることを解明した。第 4.2 節の内容は、主に古畑、長谷川らとの共同研究に基づくものである。また、第 4.3 節で、二重自己平行な統計部分多様体の存在定理を示した。

第 5 章では、ワープ積統計多様体とその統計部分多様体について考察する。ワープ積統計多様体として、特に直線と統計多様体で構成されているものを考察する。第 5.1 節では、統計曲率テンソルの公式を構築し、その公式をもとに、統計断面曲率が一定となるワープ積統計多様体を構成した。また、第 5.2 節では、第 4.2 節の結果を適用し、直線と統計断面曲率一定な統計多様体との標準的ワープ積統計多様体の統計部分多様体上の各点で成立する不等式を確立した。具体例として、直線と第 3.2 節で構成した統計断面曲率一定な双曲空間との標準的ワープ積統計多様体の部分多様体を考察し、双曲空間内の二重自己平行統計部分多様体のいくつかを解明した。第 5.2 節は、主に古畑、長谷川らとの共同研究に基づく内容である。

さらに、第 5.3 節で、剣持統計多様体について考察する。まず、第 3.3 節の議論を拡張し、統計構造を備えた概接触計量多様体に対して、統計擬アインシュタイン多様体と統計擬リッチソリトンの概念を導入した。そして、剣持統計多様体で特徴ベクトル場が統計擬リッチソリトンを定めるものは統計擬アインシュタインとなることを解明した。