



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Absolutely continuous σ -finite invariant measures for Markov operators and dissipative behavior of random dynamical systems [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	豊川, 永喜
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第14349号
Issue Date	2021-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/81848
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Hisayoshi_Toyokawa_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士(理 学) 氏 名 豊 川 永 喜

学 位 論 文 題 名

Absolutely continuous σ -finite invariant measures for Markov operators and dissipative behavior of random dynamical systems
(マルコフ作用素に対する絶対連続 σ -有限不変測度とランダム力学系の散逸挙動について)

エルゴード理論は熱力学・統計力学におけるボルツマンのエルゴード仮説に端を発する数学的理論体系であるが、与えられた系における平衡状態の候補は数学的には系に対する不変確率測度と理解される。特に基本測度に絶対連続な不変確率測度は、物理的測度とも呼ばれ物理的にも意味のある重要な概念である。しかし絶対連続な不変確率測度を持たず、 σ -有限かつ無限測度を保存する自然な力学系も数多く存在し、またそれらは位相的圧力の解析性が崩壊するという意味での熱力学形式における相転移現象との関係も報告されていた [Prellberg, Slawny 1992]。そのため絶対連続な不変確率測度または σ -有限不変測度が存在するための同値条件はエルゴード理論の基本的な問題のひとつであった。本学位論文では、非特異変換に対する転送作用素の一般化であるマルコフ作用素と呼ばれる線形作用素に対して、絶対連続な不変確率測度または σ -有限不変測度が存在するための新たな同値条件を与えた。本結果はマルコフ作用素を考察することにより、決定論的な力学系のみならず、ノイズの入ったランダム力学系に対しても応用可能である。

本論文における強調すべき結果は次の3点である。1点目は求める絶対連続な不変確率または σ -有限測度に、その台が殆ど全ての軌道を吸引するという意味で、最大の台を持つことを要請した点である。この要請と作用素の弱概周期性(weak almost periodicity)と呼ばれる関数解析的観点から重要となる性質に着目することで、マルコフ作用素に対する最大の台を持つ不変確率測度の存在がその作用素の弱概周期性との同値条件を導くことに成功した(Theorem 3.5)。さらに帰結として、時間発展のもとで最終的に保存的な部分しか残らない系、eventually conservative system という新たな定義(Definition 4.9)を導入した。この定義は従来定義されている、保存的(conservative)な系と完全散逸的(totally dissipative)な系のどちらにも属さない系を特徴付ける自然な定義である。2点目は、非特異変換に対して絶対連続 σ -有限不変測度を構成する方法論としてよく知られた誘導変換/ジャンプ変換の手法を、マルコフ作用素の手法(それぞれ誘導作用素/ジャンプ作用素)に拡張した点にある。ここで、誘導作用素は[Foguel 1980]にて既に与えられているが、ジャンプ作用素は新規の方法論である。この拡張により、マルコフ作用素に対する最大の台を持つ σ -有限不変測度の存在の同値条件を誘導作用素/ジャンプ作用素それぞれを用いて与えることに成功した(Theorem 4.10)。本結果の帰結として σ -有限不変測度を通じて誘導作用素とジャンプ作用素の関係についても明らかにした。3点目は、上記の結果の応用例として、共通の中立不動点と一様に縮小的な枝を同時に持つ新たな種類のランダム力学系を構成し不変測度の密度関数を求めた点(Theorem 5.1 と Corollary 5.2)にある。このモデルは既存の先行研究の結果からは絶対連続不変測度の存在も保証できない例である。さらに不変測度の密度関数を与えたことにより、このモデルと中立不動点を持つパラメータ付けされた決定論的な変換族とでは、絶対連続不変測度が有限測度から無限測度になるパラメータの値が異なることを示した。その意味で、ランダム力学系特有の、決定論的な力学系と大きく異なる性質を示すことに成功した。

第1章では、エルゴード理論における不変測度について概説し、本論文の結果の概要を先行研究と比較しながら説明した。

第2章では、マルコフ作用素、不変測度、保存系と散逸系をはじめとした論文内で扱う基本的概念の定義を述べ、数学的準備を与えた。

第3章ではまず初めに、確率空間上のマルコフ作用素が最大の台を持つ不変確率測度を持つことと、その作用素が弱概周期性であることの同値性を証明した。さらに第3章の後半では、スペクトル分解を持つ漸近的に周期的な(asymptotically periodic)マルコフ作用素の下では、混合性(mixing)、正確性(exactness)といったエルゴード性より強い統計的性質がそれぞれ、そのマルコフ作用素の周期数が1であることと同値であるという結果を示し(Proposition 3.23)、さらにマルコフ作用素の漸近的周期性と弱概周期性との関係について論じた。

第4章では、本論文の主定理である、マルコフ作用素に対して最大の台を持つ σ -有限不変測度が存在するための同値条件を誘導作用素とジャンプ作用素を定義してそれぞれ与えた。本結果の強力さは、上記の同値条件のひとつとしてジャンプ作用素の弱概周期性を与えた点である。結果として、誘導作用素とジャンプ作用素の関係を明らかにした。第4章の後半では、誘導変換とジャンプ変換についてよく知られた結果の拡張として、誘導作用素及びジャンプ作用素のエルゴード性が元のマルコフ作用素のエルゴード性を導くことを示した(Proposition 4.15)。この結果から直ちに、有限個の共通中立不動点を持つ弱拡大的な単位区間上のランダム変換に対するエルゴード分解の要素が有限個であることが示された(Corollary 4.17)。

第5章では、本論文の主結果の応用例となるランダム変換を与え、そのランダム変換に対する不変測度の密度関数を求めた。この例は、共通の中立不動点と一様に縮小的な枝を同時に持つ変換族からなるランダム変換であり、誘導された系においても一様に縮小的な枝を持つことからこれまで扱うことが困難であった例である。第5章で扱われる例は、非一様拡大的である力学系と完全散逸的な力学系両方の性質を併せ持つランダム力学系であり、ランダム力学系における新規の研究対象となることが期待される。