



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2005年度 混沌系工学特論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	とりあげた各トピックスに関する最新情報は著者のホームページを参照ください。 http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html 他
Issue Date	2005-11-30T05:17:27Z
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/828
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	konton05_slide2.pdf, 第2回講義スライド





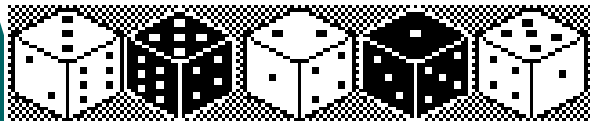
混沌系工学特論 #2

情報科学研究科 井上純一

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

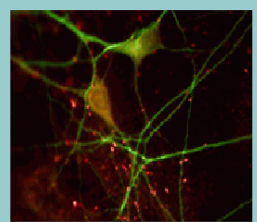
平成17年10月24日 第2回講義

確率を用いた柔らかな情報処理

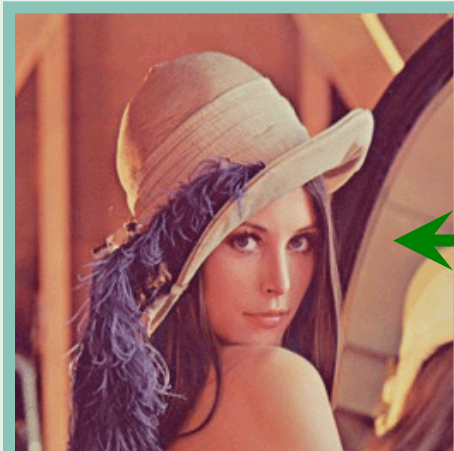


http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

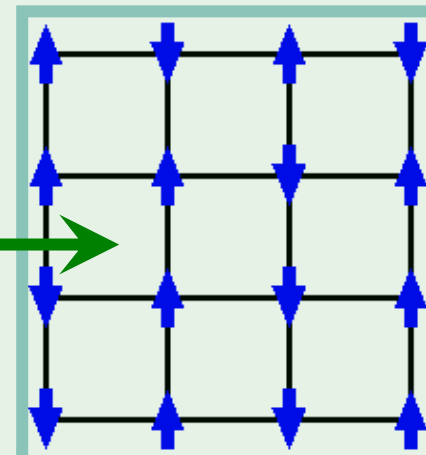
統計力学の方法に基づくアルゴリズムの構築と性能評価



単位：神経細胞
ネットワーク：脳



単位：画素
ネットワーク：デジタル画像



単位：スピン
ネットワーク：磁石

確率的にふるまう要素がネットワークをなして全体が情報処理系を形成している

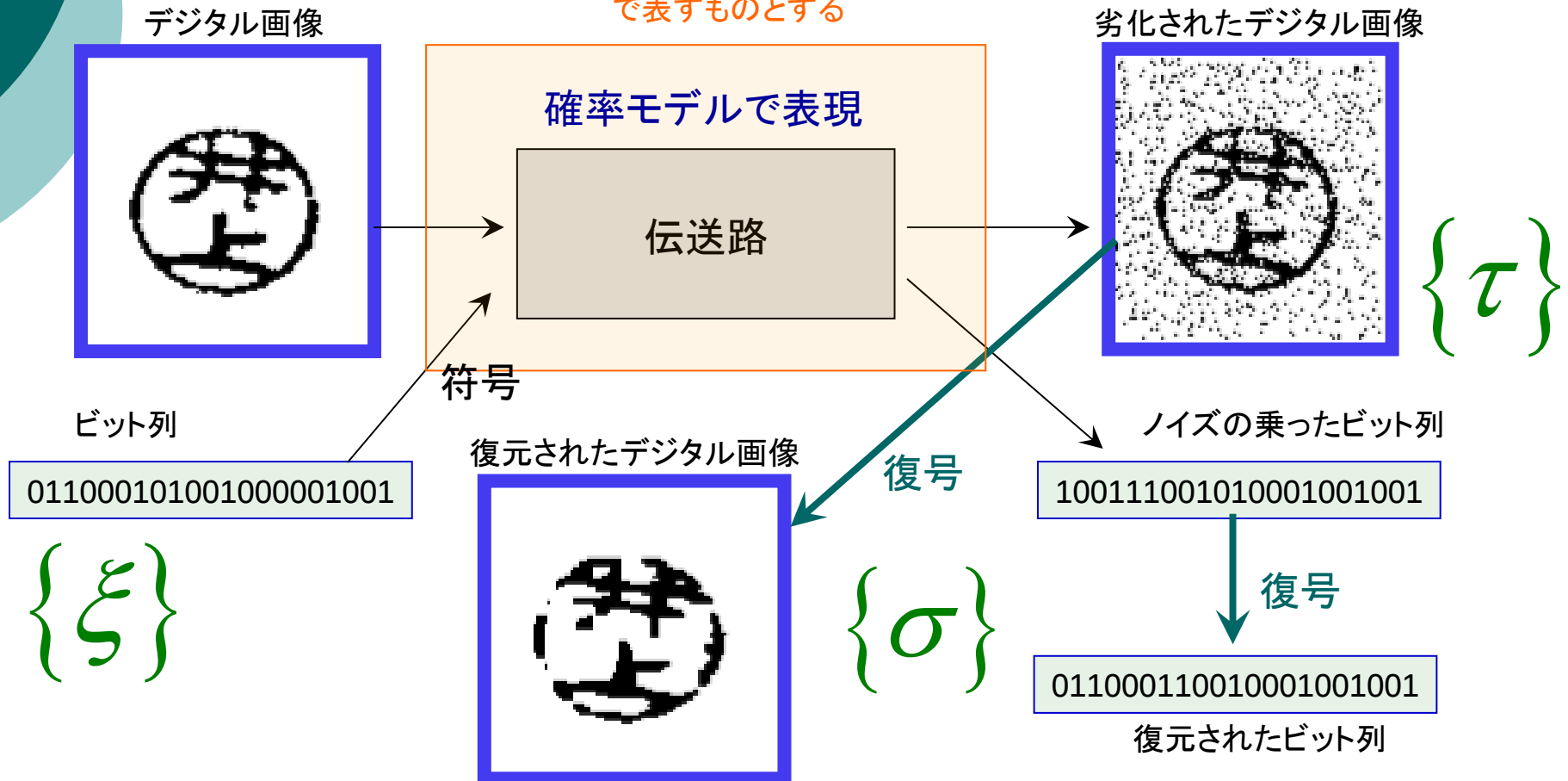
そのような題材としては・・・

今回、次回はこの関係に着目していく

ニューラルネット(連想記憶、学習)、画像修復 / 誤り訂正符号、最適化問題、スペクトル拡散通信、ゲーム理論、植物ネットワーク、etc...

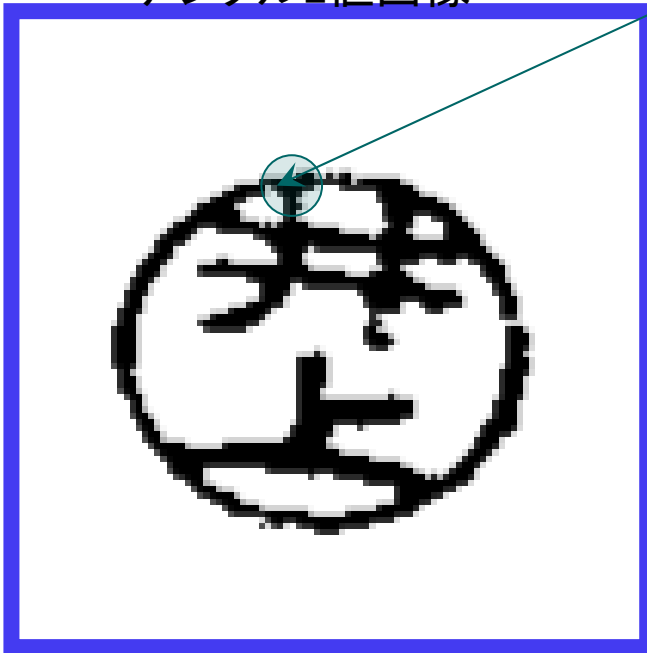
デジタルデータの転送と復元

※ 古文書/文献の復元等では
時間経過による劣化を伝送路
で表すものとする



デジタル画像の情報表現

デジタル2値画像



0001
0101
1110

白→0

黒→1

として各画像を符号

テキストファイル (inoue.pbm) の中身

P1

2値画像のタグ

200 200

画像のサイズ
(200×200)

11111111010010101
11111111111111111
10101001111111111
.....
.....

画像データ本体

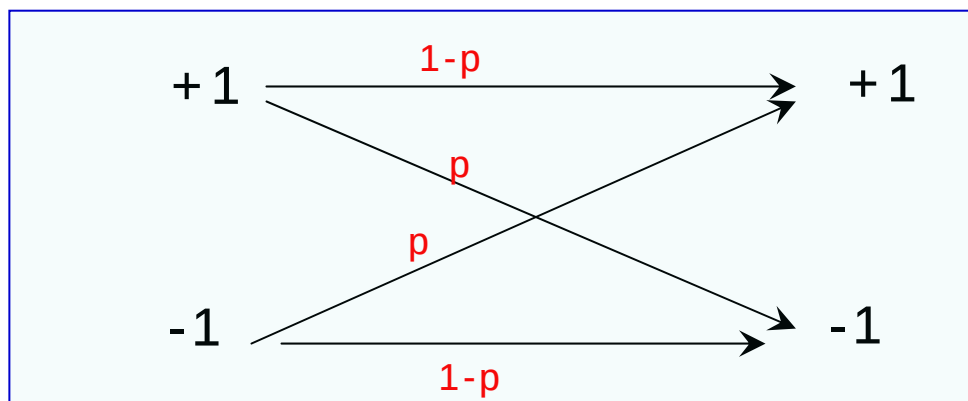
変換

$$\xi_i \rightarrow 2\xi_i - 1$$

により、白→-1、黒→+1で表現する

画像の「小磁石」による表現

劣化過程の確率モデル化



2元対称通信路のグラフ表現

条件つき確率表現

$$P(\{\tau\} | \{\xi\}) = P(\underbrace{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N}_{\text{劣化されたピクセル列}} | \underbrace{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}_{\text{原画像のピクセル列}})$$

各ピクセルの劣化過程が独立ならば

$$P(\{\tau\} | \{\xi\}) = \prod_i \frac{\exp(\beta_\tau \tau_i \xi_i)}{2 \cosh(\beta_\tau)}$$

劣化過程の確率モデル

2元対称通信路の
条件つき確率表現

$$\begin{aligned} P(\tau_i = \xi_i | \xi_i) &= e^{\beta_\tau} / 2 \cosh(\beta_\tau) = 1 - p \\ P(\tau_i = -\xi_i | \xi_i) &= e^{-\beta_\tau} / 2 \cosh(\beta_\tau) = p \\ \beta_\tau &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-p}{p} \right) \end{aligned}$$

ベイズの公式と事後確率

事後確率分布

尤度(ゆうど)

事前確率分布

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{P(\{\tau\} | \{\sigma\}) P(\{\sigma\})}{\sum_{\{\sigma\}} P(\{\tau\} | \{\sigma\}) P(\{\sigma\})}$$

原画像のピクセル列
の推定値

ベイズの公式

尤度は劣化過程の確率モデル

2元対称通信路であることが既知ならば

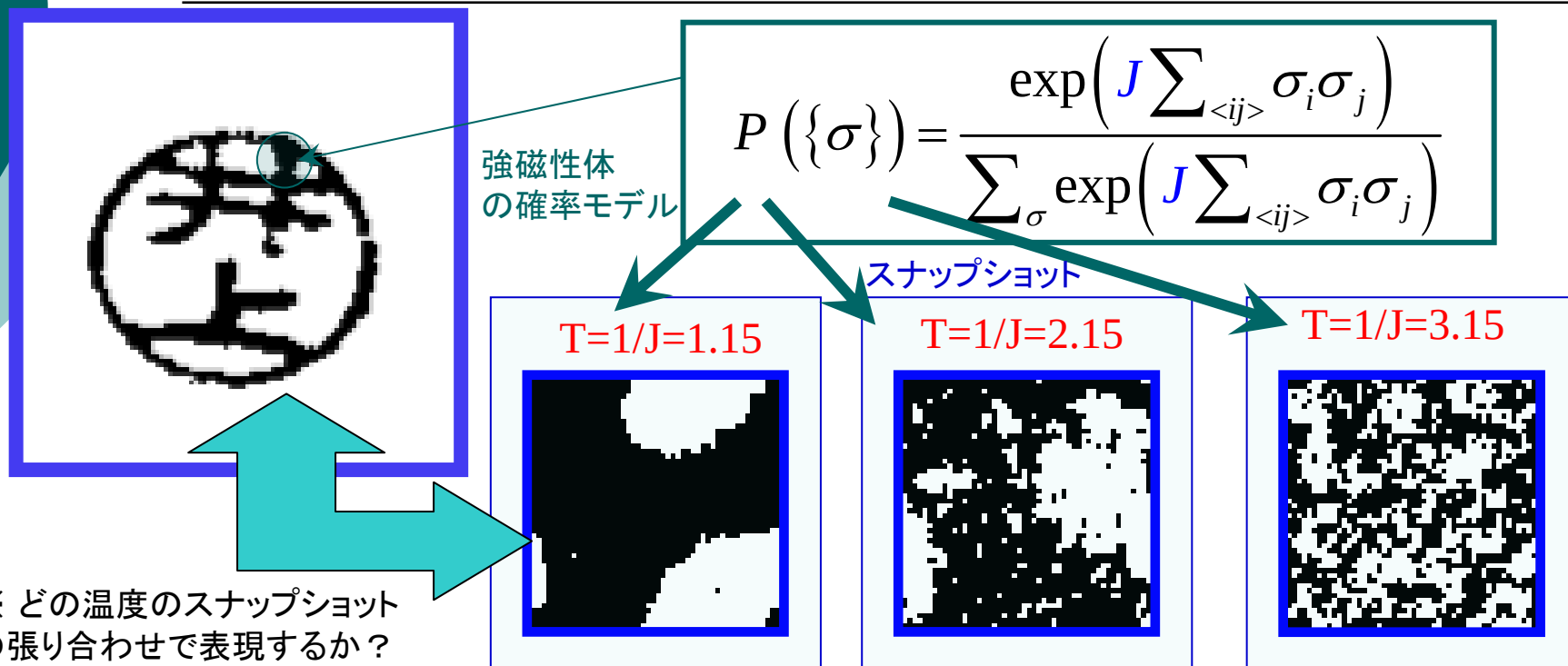
$$P(\{\tau\} | \{\sigma\}) = \prod_i \frac{\exp(h \tau_i \sigma_i)}{2 \cosh(h)}$$

未知な変数を含む

事前分布の選び方は全く任意である

画像データの特徴を生かして
適切に選択する必要がある

画像データの事前分布と事後確率



※ どの温度のスナップショットの張り合わせで表現するか？
⇒ どのように J を決めるか？
(この方法は後に説明する)

ベイズの公式から求まる事後確率

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\text{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}} \exp(-H_{\text{eff}})}, \quad H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \tau_i \sigma_i$$

画像復元問題のエネルギー関数

ノイズを利用したアルゴリズム

前回の復習

ノイズを利用したアルゴリズム

$$E = -Js_1s_2 - h_1s_1 - h_2s_2$$

エネルギーが増加
するプロセスも
ある確率で許す

- (1) 各時刻で任意に s_1, s_2 の1つを選び、その符号を変える。

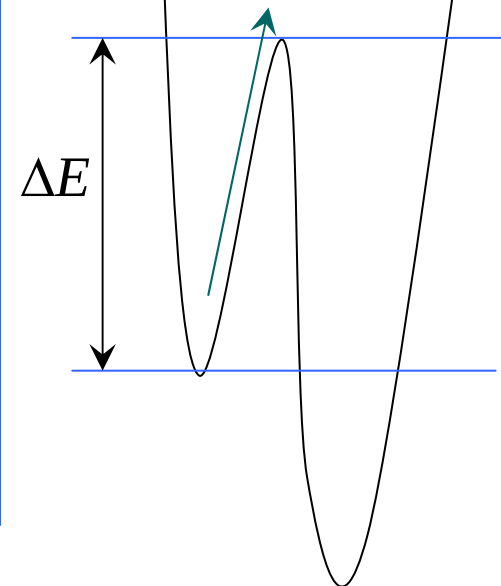
この前後の状態を $\vec{s}, \vec{s}'$ と書く。

- (2) (1)の前後でのエネルギー差: $\Delta E = E(\vec{s}') - E(\vec{s})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

- (3) (1)(2)を繰り返す



$P(s_1, s_2)$ の時間発展を調べてみる

⇒ 定常状態が存在するか？ 存在するならどのような分布か？

スナップショットの作り方

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC法)

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

ノイズを利用したアルゴリズムの多変数版

(1) 各時刻で任意に σ_i を1つを選び、その符号を変える。

この前後の状態を $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ と書く。

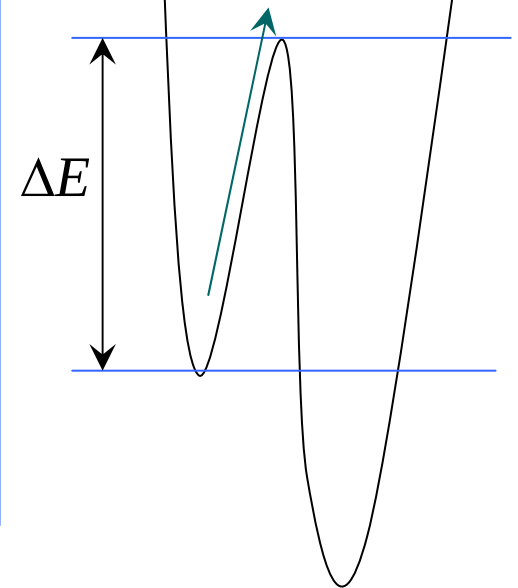
(2) (1)の前後でのエネルギー差 $\Delta E = E(\vec{\sigma}') - E(\vec{\sigma})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す

エネルギーが増加するプロセスもある確率で許す

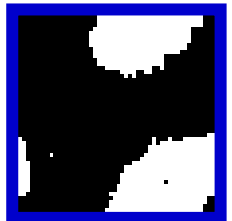


$P(\{\sigma\})$ の時間発展を調べてみる

平衡状態では

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)}$$

1/J=1.15



最大事後確率推定

事後確率

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\text{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}} \exp(-H_{\text{eff}})},$$

エネルギー関数

$$H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \tau_i \sigma_i$$

事後確率最大



エネルギー関数最小
⇒ シミュレーテッド・アニーリングで最適化

画像復元が最適化問題として定式化される

このパラメータ T を温度としたアニーリング

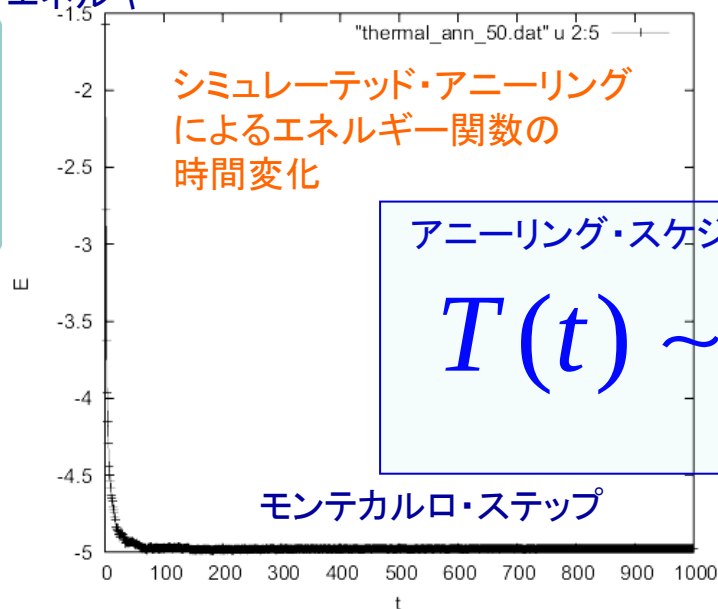
劣化画像データは与えられている

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}$$

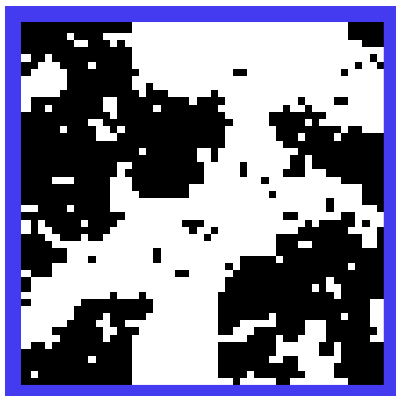
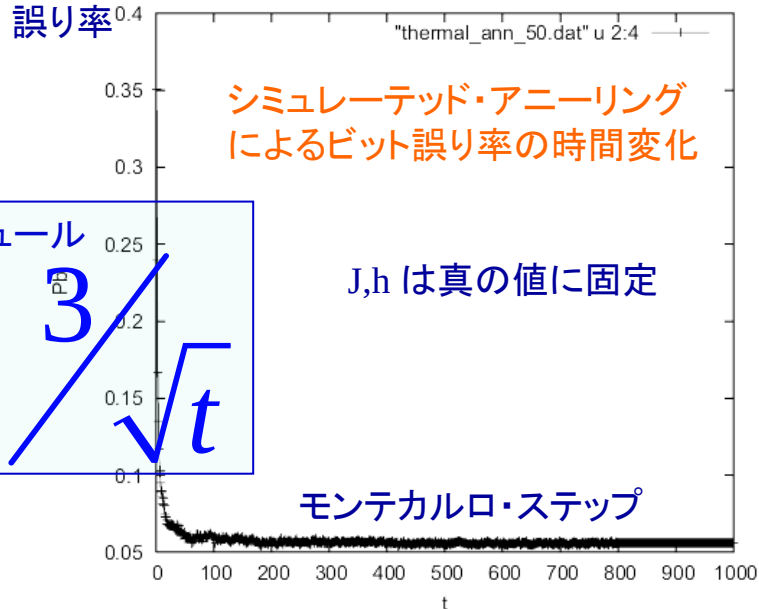
※ J および h の決め方は次回。今回は既知とする

アニーリング法による画像復元の実例

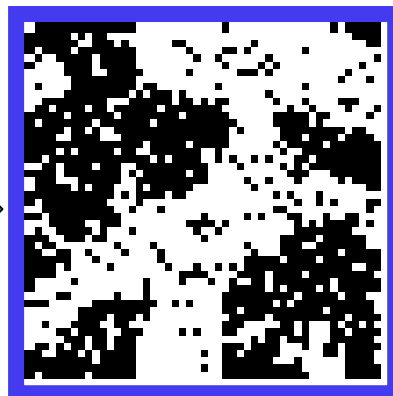
エネルギー



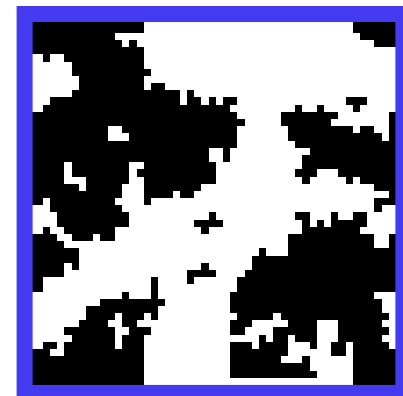
誤り率



原画像



劣化画像

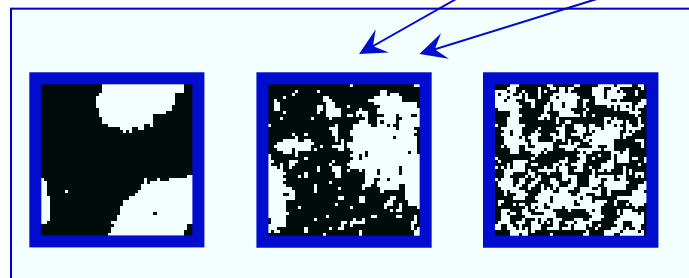


復元画像

確率モデルのパラメータ推定

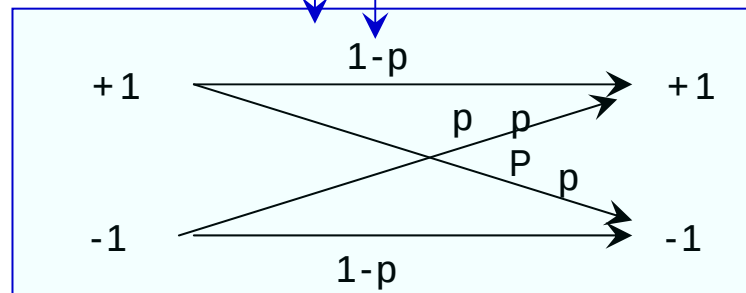
事後確率は次のように書けるが...

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i\tau_i\sigma_i\right\}\right)}{\sum_{\sigma}\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i\tau_i\sigma_i\right\}\right)}$$



どの J で指定されるスナップショット
の張り合わせで画像を表現するのか

未知



この決め方は
次回説明する

劣化率 h がどのくらいなのか

未知

用いることのできるのは劣化画像についての情報のみ