HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	統計多様体の部分多様体論
Author(s)	古畑, 仁
Description	日本数学会2021年度秋季総合分科会幾何学分科会講演アブストラクト, 2021年9月14日～17日, 千葉大学理学部（オンライン開催） https://www.mathsoc.jp/activity/meeting/chiba21sept/
Citation	日本数学会2021年度秋季総合分科会幾何学分科会講演アブストラクト
Issue Date	2021-09
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/82863
Type	conference paper
File Information	uruhata_msj_abst21sept_03_95.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

統計多様体の部分多様体論

古畑　仁　(北大理)*

概　　要

A statistical manifold is a Riemannian manifold endowed with a torsion-free affine connection satisfying the Codazzi equation. The submanifold theory in such a space is now developing. The words “statistical submanifold” can be found in the late 1980s in the context of statistical inference or information geometry. We will here introduce recent differential geometric researches in this field, for example, the counterpart of the Chen inequality in the Riemannian submanifold theory.

統計多様体というと情報幾何学における研究対象であるという印象をお持ちの読者が多いと思うが，本稿の目的の一つは必ずしもそうとは限らないことを見てもらうことにある．黒瀬俊は 2003 年北海道大学で開催された第 50 回幾何学シンポジウムの中で，統計多様体の幾何学は「現時点では分野の架け橋としての役割にとどまっており，統計多様体自身の幾何として語れるものは多くない」と述べた ([22])．ここで「分野」とよばれているのが，情報幾何学であり，アファイン微分幾何学やヘッセ幾何学である．そのころから状況は特別進展していないという気持ちもある一方，[2] [13] など以降，それらとは独立した微分幾何学的研究が多くなされるようになったことも事実であろう．ここでは，その中から最近の長谷川和泉，佐藤直飛との共同研究 [16] を中心に部分多様体論を紹介する．微分幾何学専攻の大学院生なら馴染の概念しか登場しないはずなので，広く活用していただける題材と感じていただければ幸いである．

滑らかな m 次元多様体 M とベクトル束 $E \to M$ に対して，$\Gamma(E)$ でその滑らかな切断全体をあらわす．以下，滑らかな対象を扱うこととし，いちいち断らない．また，X, Y, Z 等は M 上のベクトル場をあらわし，誤解のない場合は $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ などと明記しないことがある．

1. 統計多様体

まず，統計多様体の定義と諸概念を簡単に復習し，典型的な例をあげておく．

定義 1.1. 多様体 M 上のアファイン接続とリーマン計量の組 (∇, g) が M の統計構造 (statistical structure) であるとは，(1) ∇ が捩じれがないこと：

$$T^{\nabla}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0, \tag{1.1}$$

かつ (2) コダッチ方程式をみたすこと：

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z), \tag{1.2}$$

をいう．このとき，3 つ組 (M, ∇, g) を統計多様体 (statistical manifold) という．　□

2010 Mathematics Subject Classification: 53B25, 53C15.
キーワード：statistical manifold, sectional curvature, immersion, Chen inequality

* 〒 060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目　北海道大学大学院理学研究院数学部門
web: https://www2.sci.hokudai.ac.jp/faculty/researcher/hitoshi-furuhata

リーマン計量 g のレヴィ・チヴィタ接続とは，(1.1) および $\nabla g = 0$ で一意的に定まるアファイン接続のことであった．これを ∇^g とかくと，(∇^g, g) は統計構造であり，これをリーマン的な統計構造とよぶ．我々の興味の対象は非リーマン的な統計構造であるという言い方ができる．

例 1.2. 有限集合 $\Omega = \{1, \dots, m+1\} \subset \mathbb{Z}$ 上の正値確率分布全体の集合を M とする：

$$M = \{p : \Omega \to (0,1) \mid \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1\}.$$

これを写像

$$\eta = (\eta^1, \dots, \eta^m) : M \ni p \mapsto (p(1), \dots, p(m)) \in \mathbb{R}^m, \quad \text{i.e. } \eta^j(p) = p(j),$$

を (大域的な) 座標系にもつ多様体とみなす．M は $\mathbb{R}^m$ の領域 $\eta(M) = \{(\eta^1, \dots, \eta^m) \mid \eta^1 > 0, \dots, \eta^m > 0, \eta^{m+1} > 0\}$ と理解すればよい．ここで，$\eta^{m+1} = 1 - \sum_{j=1}^m \eta^j$ とおいた．

記号 $X \log p(\omega)$ で関数 $M \ni q \mapsto \log q(\omega) \in \mathbb{R}$ のベクトル $X_p \in T_pM$ での微分をあらわす．このような記法を用いて，M のリーマン計量 g^F とアファイン接続 $\nabla^{(m)}$ をつぎで定め，それぞれフィッシャー計量 (Fisher information metric) と混合型接続 (mixture connection) とよぶ：

$$\begin{aligned} g^F_p(X,Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} X \log p(\omega) \cdot Y \log p(\omega) \cdot p(\omega) \\ &(\quad = \sum_{\omega \in \Omega} Xp(\omega) \cdot Y \log p(\omega) \quad), \\ g^F_p(\nabla^{(m)}_X Y, Z) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(Yp(\omega)) \cdot Z \log p(\omega). \end{aligned}$$

このとき，これらを上の座標を用いて表すと，

$$\begin{aligned} & g^F_p(\frac{\partial}{\partial \eta^i}, \frac{\partial}{\partial \eta^j}) = (\eta^i(p))^{-1}\delta_{ij} + (1 - \sum_{l=1}^m \eta^l(p))^{-1}, \\ & \nabla^{(m)}_{\partial/\partial\eta^i} \frac{\partial}{\partial \eta^j} = 0 \end{aligned}$$

となる．$(M, \nabla^{(m)}, g^F)$ は統計多様体である． □

これは情報幾何学に現れる統計多様体のもっとも基本的な例である．情報幾何学は甘利俊一をはじめ日本の研究者が多く貢献している分野であり，優れた出版物も多い．ここでは比較的新しいものの中から，[1] [8] [9] [25] [35] をあげておく．

例 1.3. $\iota : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ をユークリッド空間内の局所凸超曲面をあらわすはめ込みとする．g を ι の誘導計量 (第 1 基本形式) とし，∇ を誘導接続，h を第 2 基本形式とする．すなわち，$\mathbb{R}^{m+1}$ の標準接続を $\widetilde{\nabla}$，ι の単位法ベクトル場を n とするとき，ガウスの公式

$$\widetilde{\nabla}_X \iota_* Y = \iota_* \nabla_X Y + h(X,Y)n \tag{1.3}$$

で定まるアファイン接続 ∇ と $h \in \Gamma(TM^{(0,2)})$ がそれである．このとき，$\nabla = \nabla^g$ であり， h は M 上のリーマン計量となる．超曲面の可積分条件の一つとして有名なコダッチ方程式 ((3.11) を参考にせよ) から，(M, ∇, h) は統計多様体である． □

ここで，第 1 基本形式が表舞台に現れていないことに注意すると，アファイン幾何学の設定でも同様の方法で統計構造が誘導されることがわかる．たとえば，[21] [24] などを参照せよ．また，統計構造の基本的な性質がアファイン微分幾何学の教科書である [29] に多く掲載されている．

補題 1.4. 統計構造 (∇, g) に対して，

$$K_X^{(\nabla,g)}Y = \nabla_X Y - \nabla^g_X Y \tag{1.4}$$

とおく．このとき，$K = K^{(\nabla,g)} \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ であり，

$$K_X Y = K_Y X, \quad g(K_X Y, Z) = g(Y, K_X Z) \tag{1.5}$$

をみたす．逆に，リーマン計量 g に対して，$K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ が (1.5) をみたせば，$(\nabla = \nabla^g + K, g)$ は統計構造になる． □

例 1.5. つぎのリーマン多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ に対して，つぎの $\widetilde{K}$ は (1.5) をみたすので，統計多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla} = \nabla^{\widetilde{g}} + \widetilde{K}, \widetilde{g})$ が定まる (あとの都合で n 次元とし，ティルダをつけてある)：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{M} = \mathbb{H}^n = \big\{y = (y^1, \dots, y^{n-1}, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid y^n > 0\big\},\\
&\widetilde{g} = (y^n)^{-2} \sum_{A=1}^{n} (dy^A)^2,\\
&\widetilde{K}(\widetilde{\partial}_i, \widetilde{\partial}_j) = \delta_{ij}(y^n)^{-1}\widetilde{\partial}_n, \qquad i, j = 1, \dots, n-1,\\
&\widetilde{K}(\widetilde{\partial}_i, \widetilde{\partial}_n) = \widetilde{K}(\widetilde{\partial}_n, \widetilde{\partial}_i) = (y^n)^{-1}\widetilde{\partial}_i,\\
&\widetilde{K}(\widetilde{\partial}_n, \widetilde{\partial}_n) = 2(y^n)^{-1}\widetilde{\partial}_n.
\end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{\partial}_A = \partial/\partial y^A$, $A = 1, \dots, n$, である． □

2. 統計多様体の諸曲率

アファイン接続 ∇ の曲率テンソル場を

$$R^\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

と定める．$R^\nabla = 0$ なる統計構造はヘッセ構造 (Hessian structure) ([32] など)，双対平坦構造 (dually flat structure) ([1] [8] [9] [28] など) とよばれ，多くの研究がある．これらもかなり大きな研究対象ではあるが，わざわざ「統計構造」とよぶときには，これらとは異なる，あるいはこれらを拡張したものに本来は興味をもつべきだろう．

補題 2.1. 統計構造 (∇, g) に対して，

$$\begin{aligned}
R^\nabla(X, Y)Z &= R^{\nabla^g}(X, Y)Z + (\nabla^g_X K)_Y Z - (\nabla^g_Y K)_X Z + [K_X, K_Y]Z \quad (2.1)\\
&= R^{\nabla^g}(X, Y)Z + (\nabla_X K)_Y Z - (\nabla_Y K)_X Z - [K_X, K_Y]Z \quad (2.2)
\end{aligned}$$

がなりたつ． □

補題 2.2. 統計構造 (∇, g) に対して，∇^* を

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \tag{2.3}$$

で定めると，(∇^*, g) も統計構造になる．∇^* を ∇ の g に関する双対接続 (dual connection) あるいは共役接続 (conjugate connection) とよぶ．$\nabla^g = (\nabla + \nabla^*)/2$ および $K^{(\nabla^*,g)} = -K^{(\nabla,g)}$ がなりたつ．また，

$$g(R^{\nabla^*}(X,Y)Z, W) = -g(Z, R^{\nabla}(X,Y)W) \tag{2.4}$$

がわかる． □

定義 2.3. 統計構造 (∇, g) が共役対称 (conjugate symmetric) であるとは，$R^{\nabla^*} = R^{\nabla}$ がなりたつことをいう． □

古くからある概念だが，たとえば [20] なども参照されたい．リーマン幾何学では断面曲率は大きな役割を果たした．断面曲率 k^g を定義するためには一次独立な $v, w \in T_pM$ に対して，

$$\frac{g_p(R^{\nabla^g}(v,w)w, v)}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2} \tag{2.5}$$

が，v, w の取り方に寄らず，それらの張る 2 次元部分空間のみにより定まることを示す必要があったが，そのためには，(2.4) においてレヴィ・チヴィタ接続が共役対称であるという事実が利いていたという言い方ができる．

共役対称と限らない統計構造に対して，(2.5) の R^{∇^g} の代わりにつぎのテンソル場を用いると，レヴィ・チヴィタ接続と同様な代数的な性質をもつことがわかり，断面に対して不変量が定義できる．

定義 2.4 ([13])**.** 統計構造 (∇, g) に対して，

$$\begin{aligned} S^{(\nabla,g)}(X,Y)Z &= \frac{1}{2}\{R^{\nabla}(X,Y)Z + R^{\nabla^*}(X,Y)Z\} && (2.6)\\ (\quad &= R^{\nabla^g}(X,Y)Z + [K_X, K_Y]Z \quad) && (2.7) \end{aligned}$$

とおき，$S = S^{(\nabla,g)} \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ を統計曲率テンソル場 (statistical curvature tensor filed) とよぶ．

$$k^{(S,g)} : \mathrm{Gr}_2 TM \ni \Pi = \mathrm{span}\{v,w\} \mapsto \frac{g_p(S(v,w)w, v)}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2} \in \mathbb{R}, \quad v, w \in T_pM,$$

は well-defined で，$k^S = k^{(S,g)} : \mathrm{Gr}_2 TM \to \mathbb{R}$ を統計構造 (∇, g) の断面曲率 (sectional curvature) とよぶ． □

なお，等号 (2.7) は，補題 2.1 と補題 2.2 による．

定義 2.5 ([16])**.** 統計構造 (∇, g) に対して，

$$\begin{aligned} U^{(\nabla,g)}(X,Y)Z &= R^{\nabla^g}(X,Y)Z - [K_X, K_Y]Z && (2.8)\\ (\quad &= 2R^{\nabla^g}(X,Y)Z - S(X,Y)Z \quad) && (2.9) \end{aligned}$$

とおき，$U = U^{(\nabla,g)} \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ に対して，

$$k^{(U,g)} : \mathrm{Gr}_2 TM \ni \Pi = \mathrm{span}\{v, w\} \mapsto \frac{g_p(U(v,w)w, v)}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2} \in \mathbb{R},$$
$$v, w \in T_pM,$$

で定まる $k^U = k^{(U,g)} : \mathrm{Gr}_2 TM \to \mathbb{R}$ を統計構造 (∇, g) の U 断面曲率 (U-sectional curvature) とよぶ．□

統計構造がリーマン的のとき，すなわち $K = 0$ のとき，$S = U = R^{\nabla^g}$ かつ $k^S = k^U = k^g$ であることに注意する．

統計曲率テンソル場 S については，同時期に B. Opozda [30] も取り上げている (さらに歴史をさかのぼれるかもしれないが筆者は知らない)．彼女は，S のほかに (U ではなく) $[K, K]$ を用いて別の断面曲率が定義できることに着目している．

定義 2.6 ([21])**.** 統計構造 (∇, g) が定曲率 (constant curvature) $k(\in \mathbb{R})$ であるとは，

$$R^\nabla(X,Y)Z = k\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

がなりたつことをいう．□

命題 2.7. 統計構造 (∇, g) が定曲率 $k(\in \mathbb{R})$ ならば，共役対称でかつ断面曲率一定 k である．実際，

$$R^{\nabla^*}(X,Y)Z = k\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}, \tag{2.10}$$
$$k^S(\mathrm{Gr}_2 TM) = \{k\} \tag{2.11}$$

がなりたつ．□

定義 2.8. 統計構造 (∇, g) に対して，統計スカラー曲率 (statistical scalar curvature) $\rho \in C^\infty(M)$ などをつぎのように定義する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^\nabla(X,Y) &= \mathrm{tr}\{Z \mapsto R^\nabla(Z,X)Y\},\\
\mathrm{Ric}^S(X,Y) &= \mathrm{tr}\{Z \mapsto S(Z,X)Y\},\\
\mathrm{Ric}^U(X,Y) &= \mathrm{tr}\{Z \mapsto U(Z,X)Y\} = 2\mathrm{Ric}^{\nabla^g}(X,Y) - \mathrm{Ric}^S(X,Y),\\
\rho &= \mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^\nabla = \mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^S = 2\sum_{1\le i<j\le m} k^S(e_i \wedge e_j),\\
\rho^U &= \mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^U = 2\sum_{1\le i<j\le m} k^U(e_i \wedge e_j) = 2\rho^g - \rho.
\end{aligned}$$

ここで，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ は 考えている点 $x \in M$ の g_x に関する T_xM の正規直交基底とし，$e_i \wedge e_j$ は $e_i, e_j\,(i \neq j)$ で張られる T_xM の2次元部分空間をあらわす．また，ρ^g はリーマン計量 g のスカラー曲率をあらわす ($\nabla = \nabla^g$ のときの ρ のこと)．また，最後の等式は (2.9) による．□

上を拡張して次のような記号も準備しておこう．L を T_xM の $l(\ge 2)$ 次元部分空間，$\{e_1, \ldots, e_l\}$ をその g_x に関する正規直交基底とし，

$$\rho^U(L) = 2\sum_{1\le i<j\le l} k^U(e_i \wedge e_j) \tag{2.12}$$

とかく．

整数 $m \geq 3,\ k \geq 1$ に対して，k 個の整数の順不同の組 $(m_1, \ldots, m_k)$ でつぎをみたすもの全体を $\mathcal{S}(m,k)$ であらわす：

$$2 \leq m_q < m \quad (q = 1, \ldots, k), \qquad m \geq l_k. \tag{2.13}$$

ここで $l_k = m_1 + \cdots + m_k$ とする．

定義 2.9. 統計構造 (∇, g) と $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathcal{S}(m,k)$ に対して，つぎのように関数 $\delta^U_{(m_1,\ldots,m_k)} : M \to \mathbb{R}$ を定め，(∇, g) の $(m_1, \ldots, m_k)$ 型 U デルタ不変量 (delta-invariant for U) とよぶ：

$$\delta^U_{(m_1,\ldots,m_k)}(x) = \frac{1}{2}\,[\ \rho^U(x) - \inf\Big\{ \sum_{q=1}^{k} \rho^U(L_q) \mid L_1, \ldots, L_k \Big\}\ ]. \tag{2.14}$$

ここで，inf を考える $L_1, \ldots, L_k$ は，$\dim L_q = m_q$ $(q = 1, \ldots, k)$ の T_xM の部分空間で互いに直交するもの全体を動く．また，

$$\delta^U_{\emptyset}(x) = \rho^U(x)/2 \tag{2.15}$$

と定める． □

統計構造がリーマン的のとき，すなわち $K = 0$ のとき，δ^U は B.-Y. Chen がリーマン多様体について定義したδ，デルタ不変量，と一致する (定義で 1/2 倍しているのはこのためである)．このデルタ不変量については，たとえば，Chen 自身による解説 [7] を参照するとよい．

例 2.10. 例 1.5 の $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ について，

$$\begin{aligned}
&R^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)Z = \widetilde{S}(X,Y)Z = 0, \qquad X, Y, Z \in \Gamma(T\widetilde{M}),\\
&\widetilde{U}(X,Y)Z = -2\{\widetilde{g}(Y,Z)X - \widetilde{g}(X,Z)Y\},\\
&\delta^{\widetilde{U}}_{\emptyset} = -n(n-1),\\
&\delta^{\widetilde{U}}_{(n_1,\ldots,n_k)} = -2b(n_1, \ldots, n_k), \qquad (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{S}(n,k),
\end{aligned}$$

がなりたつ．ここで，$b(n_1, \ldots, n_k)$ は (4.2) で与える定数である． □

3. 統計部分多様体

この節から部分多様体論に入る．外在空間となる統計多様体を $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ とし， $n = m + p$ 次元とする．

ι を m 次元多様体 M から $\widetilde{M}$ へのはめ込みとし，M 上に g と ∇ をつぎで定める：

$$g = \iota^* \widetilde{g}, \quad g(\nabla_X Y, Z) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X \iota_* Y, \iota_* Z). \tag{3.1}$$

このとき，(∇, g) は M 上の統計構造になり，これを ι によって $(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ から誘導された統計構造とよぶ．

定義 3.1. 統計多様体 (M,∇,g) から統計多様体 $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ へのはめ込み ι が，統計はめ込み(statistical immersion)であるとは，ι によって $(\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ から誘導された統計構造が (∇,g) と一致するときをいう．このとき，(M,∇,g) は $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ の統計部分多様体(statistical submanifold)という． □

このとき，誘導ベクトル束 $\iota^*T\widetilde{M}\to M$ のリーマン計量 $\widetilde{g}$ に関する直交直和分解

$$\iota^*T\widetilde{M}=TM\oplus TM^{\perp} \tag{3.2}$$

を考え，それぞれへの射影を

$$(\ )^{\top}:\Gamma(\iota^*T\widetilde{M})\to\Gamma(TM),\quad (\ )^{\perp}:\Gamma(\iota^*T\widetilde{M})\to\Gamma(TM^{\perp})$$

とあらわす．また誘導接続 $\iota^*\widetilde{\nabla}$ は簡単のため $\widetilde{\nabla}$ と記す．分解 (3.2) に従って，$B,A,\nabla^{\perp}$ をつぎで定める：

$$\widetilde{\nabla}_X\iota_*Y=\iota_*\nabla_XY+B(X,Y),\quad X,Y\in\Gamma(TM), \tag{3.3}$$
$$\widetilde{\nabla}_X\xi=-\iota_*A_\xi X+\nabla^{\perp}_X\xi,\quad \xi\in\Gamma(TM^{\perp}),\ X\in\Gamma(TM). \tag{3.4}$$

このとき，$B\in\Gamma(T^{\perp}M\otimes TM^{(0,2)})$ を ι の $\widetilde{\nabla}$ に関する第２基本形式(second fundamental form)，$A\in\Gamma((TM^{\perp})^*\otimes TM^{(1,1)})$ を同じく型作用素(shape operator)，$\nabla^{\perp}:\Gamma(TM^{\perp})\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM^{\perp})$ を法接続(normal connection) とよぶ．

外在空間の接続として双対接続 $\widetilde{\nabla}^*$, レヴィ・チヴィタ接続 $\nabla^{\widetilde{g}}$ をとって，同様にして，$B^*,\widehat{B}$, $A^*,\widehat{A}$, $\nabla^{\perp *},\widehat{\nabla}^{\perp}$ を定義する：

$$\widetilde{\nabla}^*_X\iota_*Y=\iota_*\nabla^*_XY+B^*(X,Y),\quad \widetilde{\nabla}^*_X\xi=-\iota_*A^*_\xi X+\nabla^{\perp *}{}_X\xi, \tag{3.5}$$
$$\nabla^{\widetilde{g}}_X\iota_*Y=\iota_*\nabla^g_XY+\widehat{B}(X,Y),\quad \nabla^{\widetilde{g}}_X\xi=-\iota_*\widehat{A}_\xi X+\widehat{\nabla}^{\perp}_X\xi. \tag{3.6}$$

命題 3.2. $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ の統計部分多様体 (M,∇,g) に対してつぎがなりたつ：

$$\widetilde{g}(B(X,Y),\xi)=g(A^*_\xi X,Y),\quad \widetilde{g}(B^*(X,Y),\xi)=g(A_\xi X,Y), \tag{3.7}$$
$$X\widetilde{g}(\xi,\eta)=\widetilde{g}(\nabla^{\perp}{}_X\xi,\eta)+\widetilde{g}(\xi,\nabla^{\perp *}{}_X\eta), \tag{3.8}$$
$$\widehat{B}=\frac{1}{2}(B+B^*),\quad \widehat{A}=\frac{1}{2}(A+A^*),\quad \widehat{\nabla}^{\perp}=\frac{1}{2}(\nabla^{\perp}+\nabla^{\perp *}). \tag{3.9}$$

ここで，$X,Y\in\Gamma(TM)$, $\xi,\eta\in\Gamma(TM^{\perp})$ である． □

なお，[10] では，(3.7) (と [36] の論文) を考慮して，A などへの $*$ のつけ方が上記とは違う．ほかにもそのような論文があると思われるので注意されたい．

定義 3.3. (M,∇,g) を $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ の統計部分多様体とする．

$$H=\frac{1}{m}\mathrm{tr}_gB,\quad H^*=\frac{1}{m}\mathrm{tr}_gB^*,\quad \widehat{H}=\frac{1}{m}\mathrm{tr}_g\widehat{B}=\frac{1}{2}(H+H^*)$$

をそれぞれ (M,∇,g) の $\widetilde{\nabla},\widetilde{\nabla}^*,\nabla^{\widetilde{g}}$ に関する平均曲率ベクトル場(mean curvature vector field) とよぶ．

統計部分多様体 (M,∇,g) が双全測地的(doubly totally-geodesic) であるとは，$B=B^*=0$ がなりたつことをさし，双全臍的(doubly totally-umbilical) であるとは，$B=g\otimes H$ かつ $B^*=g\otimes H^*$ がなりたつことをいう．また，双極小(doubly minimal) であるとは，$H=H^*=0$ がなりたつことをいう． □

なお，全測地的ではなく自己平行 (auto-parallel) という用語が多く用いられるようだが，我々の設定では同じ意味になる．また，第 2 基本形式は埋め込み曲率 (embedding curvature) とよばれることがある．

命題 3.4. $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ の統計部分多様体 (M, ∇, g) に対して，つぎのガウス，コダッチ，リッチの方程式 (Equations of Gauss, Codazzi and Ricci) がなりたつ：

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\top} = R^{\nabla}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y, \tag{3.10}$$
$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z), \tag{3.11}$$
$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\overline{\nabla}_Y A)_{\xi}X - (\overline{\nabla}_X A)_{\xi}Y, \tag{3.12}$$
$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\nabla^{\perp}}(X,Y)\xi - B(X, A_{\xi}Y) + B(Y, A_{\xi}X). \tag{3.13}$$

ここで，

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = {\nabla^{\perp}}_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z),$$
$$(\overline{\nabla}_X A)_{\xi}Y = \nabla_X(A_{\xi}Y) - A_{{\nabla^{\perp}}_X \xi}Y - A_{\xi}\nabla_X Y$$

とし，$\widetilde{R} = R^{\widetilde{\nabla}}$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ とする． □

これらの「双対」の式，$*$ をつけたもの，もなりたつことに注意する．また，ガウスの方程式 (3.10) は， (3.7) より，

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) &= g(R^{\nabla}(X,Y)Z,W) \\ &\quad -\widetilde{g}(B(Y,Z),B^*(X,W)) + \widetilde{g}(B(X,Z),B^*(Y,W)) \end{aligned}$$

とかける．リーマン部分多様体論と違って，2 行目が B 同士あるいは B^* 同士の積になっていないところが事態を複雑にしている．極言すれば，次章の定理 4.1, 4.2 はこの式から導かれる．

4. 統計部分多様体の不等式

部分多様体論の基本的な課題の一つは，部分多様体の内在的不変量と外在的不変量の関係を調べることにある．リーマン部分多様体論で言えば，内在的不変量は誘導計量から定まる各種曲率で，外在的不変量は平均曲率ベクトル場の大きさなどを想像すればよい．統計部分多様体について同様の問題を考えよう．

定理 4.1 ([2][31]). (M, ∇, g) を $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ の統計部分多様体とする．単位ベクトル $X \in T_xM$ に対してつぎがなりたつ：

$$(\|H\|^2 + \|H^*\|^2)/2 \geq 4m^{-2}\Big\{\mathrm{Ric}^U(X,X) - \sum_{j=2}^{m} k^{\widetilde{U}}(X \wedge e_j)\Big\}. \tag{4.1}$$

ここで，$\{X = e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ は T_xM の正規直交基底とする．等号成立の必要十分条件は，$m = 2$ のとき，(M, ∇, g) は x において双全臍的，$m \geq 3$ のとき，(M, ∇, g) は x において双全測地的である． □

なお，リーマン部分多様体論においては，[5] によって得られていたこのような不等式は Chen-Ricci 不等式などとよばれることがある．また，[2][31] とも U を用いて書いているわけではない．

ここで，[6] に従ってつぎの記号を準備しておく：$(m_1,\dots,m_k)\in\mathcal{S}(m,k)$ に対して，

$$b(m_1,\dots,m_k) = \frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{k}m_q(m_q-1), \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} c(m_1,\dots,m_k) &= \frac{m^2}{2}\frac{m+k-\sum_{q=1}^{k}m_q-1}{m+k-\sum_{q=1}^{k}m_q} \\ &= \frac{m^2}{2}\frac{m+k-l_k-1}{m+k-l_k} \end{aligned} \tag{4.3}$$

とし，さらに

$$b(\emptyset)=c(\emptyset)=\frac{1}{2}m(m-1) \tag{4.4}$$

とおく．

定理 4.2 ([16])．(M,∇,g) を $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ の統計部分多様体とする．各点 $x\in M$ においてつぎがなりたつ：

$$(\|H\|^2+\|H^*\|^2)/2\geq c(m_1,\dots,m_k)^{-1}\{\delta^U_{(m_1,\dots,m_k)}-b(m_1,\dots,m_k)\max k^{\widetilde{U}}\}.$$

ここで，$(m_1,\dots,m_k)$ は記号 $\emptyset$ か $\mathcal{S}(m,k)$ の元をあらわすとする．また，$\max k^{\widetilde{U}}(x)=\max\left\{k^{\widetilde{U}}(\Pi)\mid\Pi\in\mathrm{Gr}_2T_xM\right\}$ とし，$k^{\widetilde{U}}$ は $(\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ の U 断面曲率である．

$(\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ が U 断面曲率一定のとき，等号成立の必要十分条件は以下の通り：

(i) $(m_1,\dots,m_k)=\emptyset$ のとき，(M,∇,g) は x において双全臍的である．

(ii) $(m_1,\dots,m_k)\in\mathcal{S}(m,k)$ のとき，つぎの (1) から (5) をみたす T_xM の互いに直交する部分空間 $L_1,\dots,L_k$ が存在する：

(1) $\dim L_q=m_q,\ q=1,\dots,k.$

(2) $\{e_1,\dots,e_m\}$ は T_xM の正規直交基底で $L_q=\mathrm{span}\{e_{l_{q-1}+1},\dots,e_{l_q}\}$ をみたす．

(3) $$\sum_{i=1}^{l_1}B(e_i,e_i)=\cdots=\sum_{i=l_{k-1}+1}^{l_k}B(e_i,e_i)=B(e_{l_k+1},e_{l_k+1})=\cdots=B(e_m,e_m).$$

(4) $$\sum_{i=1}^{l_1}B^*(e_i,e_i)=\cdots=\sum_{i=l_{k-1}+1}^{l_k}B^*(e_i,e_i)=B^*(e_{l_k+1},e_{l_k+1})=\cdots=B^*(e_m,e_m).$$

(5) $$B(e_i,e_j)=B^*(e_i,e_j)=0\ \text{ for }\ i\leq l_q<l_q+1\leq j,\quad q=1,\dots,k.$$
$$\text{or}\quad l_k+1\leq i<j\leq m.$$

□

なお，リーマン部分多様体論においては，同様の主張が [6] によって得られている．A. Mihai and I. Mihai の最近の論文 [26] にはデルタ不変量を定義していないものの同じ趣旨の不等式がある．また，もともとの [6] にある順序で不等式を略記しておくと，

$$\delta^U\leq c\,(\|H\|^2+\|H^*\|^2)/2+b\,\max k^{\widetilde{U}}$$

となる．こちらのほうが見やすい場面もあるだろう．

系 4.3. $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ を U 断面曲率非正である統計多様体とする．m 次元統計多様体 (M,∇,g) が，$\delta^U_\emptyset(x)$ が正となるような点 $x\in M$ をもつ，あるいは $(m_1,\dots,m_k)\in\mathcal{S}(m,k)$ に対して $\delta^U_{(m_1,\dots,m_k)}(x)$ が正となるような点 $x\in M$ をもつ，ということがわかれば，(M,∇,g) から $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ への双極小統計はめ込みは存在しない． □

例 1.5 (例 2.10) は上の条件をみたす $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ となっている．また，双極小統計はめ込みについては，今後の興味深い研究課題と思われる．

例 4.4. $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g})$ を例 1.5 の $n=m+p$ 次元統計多様体とする．
(1) $(a^1,\dots,a^p)\in\mathbb{R}^p$ に対して，包含写像

$$\iota_1:\mathbb{H}^m\ni(x^1,\dots,x^{m-1},x^m)\mapsto(a^1,\dots,a^p,x^1,\dots,x^{m-1},x^m)\in\mathbb{H}^n \tag{4.5}$$

は双全測地的である： $B=B^*=0$．$\mathbb{H}^m$ 上の誘導統計構造 (∇,g) は例 1.5 で与えられているものと一致する．すべての点 $x\in\mathbb{H}^m$ で定理 4.1, 4.2 の等号が成立する．
(2) $(a^1,\dots,a^{p-1},a^p)\in\mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}^+$ に対して，包含写像

$$\iota_2:\mathbb{R}^m\ni(x^1,\dots,x^m)\mapsto(x^1,\dots,x^m,a^1,\dots,a^{p-1},a^p)\in\mathbb{H}^n \tag{4.6}$$

は双全臍的である．実際，$\mathbb{R}^m$ 上の誘導統計構造および第 2 基本形式はつぎのようになる：

$$g=(a^p)^{-2}\sum_{j=1}^m(dx^j)^2,\qquad \nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=\nabla^g_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=0,$$
$$B\ =2a^pg\otimes\frac{\partial}{\partial y^n}=g\otimes H,\quad B^*=0.$$

定理 4.1 については，$m=2$ のとき，すべての点で等号が成立する例になっている．定理 4.2 については，$(\|H\|^2+\|H^*\|^2)/2=2$ となり，右辺は $2c(m_1,\dots,m_k)^{-1}b(m_1,\dots,m_k)$ となるから，$(m_1,\dots,m_k)=\emptyset$ のとき，すべての点で等号が成立する例になっている． □

なお，超曲面のとき，すなわち $p=1$ のとき，上の (2) のはめ込み ι_2 は誘導統計構造がリーマン的なヘッセ構造になるものとして特徴づけられていた ([10])．

そのほか，外在空間として付加構造を備えた統計多様体 (のよい曲率をもったもの) を選んで，特殊な部分多様体や各種の不等式を研究した成果がいくつか発表されている ([3], [4] [23] [27] など)．付加構造 (ケーラー構造，佐々木構造，剱持構造，群構造) については，[12] [18] などを参照してほしい．これらは，付加構造に適合した統計構造を定式化したものであるが，統計構造を利用して新たな付加構造を定式化するというアイディアで付加構造をもった統計多様体を考察している研究もあることに注意する ([34] など)．

筆者の力不足で触れられなかったことが多いが，すでに [33] のようなサーベイも存在しているので，そちらも参考にしていただきたい．また，「統計多様体の幾何学とその周辺」の研究として，毎年ワークショップを開催して細々と交流の機会を設けている．ご自身の研究と関連のあるかたはぜひお気軽に参画されたい．

参考文献

[1] Ay, N., Jost, J., Lê, H.V. and Schwachhöfer, L., Information geometry. Springer, 2017.

[2] Aydin, M.E., Mihai, A. and Mihai, I., Some inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature. Filomat 29 (2015), no. 3, 465-476.

[3] Aydin, M.E., Mihai, A. and Mihai, I., Generalized Wintgen inequality for statistical submanifolds in statistical manifolds of constant curvature. Bull. Math. Sci. 7 (2017), no. 1, 155-166.

[4] Aytimur, H., Kon, M., Mihai, A., Özgür, C. and Takano, K., Chen Inequalities for statistical submanifolds of Kähler-like statistical manifolds. Math. 7 (2019), no.12, 1202, 19pp.

[5] Chen, B.-Y., Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions. Glasg. Math. J. 41 (1999), no. 1, 33-41.

[6] Chen, B.-Y., A general optimal inequality for arbitrary Riemannian submanifolds. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6 (2005), no. 3, Article 77, 10 pp.

[7] Chen, B-Y., A tour through δ-invariants: from Nash's embedding theorem to ideal immersions, best ways of living and beyond. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 94(108) (2013), 67-80.

[8] 藤岡敦，入門情報幾何–統計的モデルをひもとく微分幾何学，共立出版，2021.

[9] 藤原彰夫，情報幾何学の基礎–情報の内的構造を捉える新たな地平，共立出版，2021.

[10] Furuhata, H., Hypersurfaces in statistical manifolds. Differential Geom. Appl. 27 (2009), no. 3, 420-429.

[11] Furuhata, H., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero. Differential Geom. Appl. 29 (2011), suppl. 1, S86-S90.

[12] Furuhata, H., Sasakian statistical manifolds II. Geometric science of information, 179-185, Lecture Notes in Comput. Sci., 10589, Springer, 2017.

[13] Furuhata, H. and Hasegawa, I., Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds. Geometry of Cauchy-Riemann submanifolds, 179-215, Springer, 2016.

[14] Furuhata, H., Hasegawa, I., Okuyama, Y. and Sato, K., Kenmotsu statistical manifolds and warped product. J. Geom. 108 (2017), no. 3, 1175-1191.

[15] Furuhata, H., Hasegawa, I., Okuyama, Y., Sato, K. and Shahid, M.H., Sasakian statistical manifolds. J. Geom. Phys. 117 (2017), 179-186.

[16] Furuhata, H., Hasegawa, I. and Satoh, N., Chen invariants and statistical submanifolds. Preprint.

[17] Furuhata, H., Hu, N. and Vrancken, L., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero II. Pure and Applied Differential Geometry - PADGE 2012 In Memory of Franki Dillen, 136-142, Shaker, 2013.

[18] Furuhata, H., Inoguchi, J. and Kobayashi, S., A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions. to appear in Inf. Geom.

[19] Furuhata, H. and Kurose, T., Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature. Tohoku Math. J. (2) 65 (2013), no. 1, 31-42.

[20] Kobayashi, S. and Ohno, Y., On a constant curvature statistical manifold. Preprint.

[21] Kurose, T., Dual connections and affine geometry. Math. Z. 203 (1990), no. 1, 115-121.

[22] 黒瀬俊，統計多様体の幾何学，２１世紀の数学–幾何学の未踏峰，34-43, 日本評論社，2004.

[23] Lee, C.W., Yoon, D.W. and Lee, J.W., A pinching theorem for statistical manifolds with Casorati curvatures. J. Nonlinear Sci. Appl. 10 (2017), no. 9, 4908-4914.

[24] Matsuzoe, H., Statistical manifolds and affine differential geometry. Probabilistic approach to geometry, 303-321, Adv. Stud. Pure Math., 57, Math. Soc. Japan, 2010.

[25] 松添博，統計多様体の幾何学の新展開，数理解析研究所講究録 1916，京都大学数理解析研究所，2014.

[26] Mihai, A. and Mihai, I., The $\delta(2,2)$-invariant on statistical submanifolds in Hessian manifolds of constant hessian curvature. Entropy 22 (2020), no. 2, Paper No. 164, 8 pp.

[27] Milijević, M., CR statistical submanifolds. Kyushu J. Math. 73 (2019), no. 1, 89-101.

[28] Nakajima, N. and Ohmoto, T. The dually flat structure for singular models. to appear in Inf. Geom.

[29] 野水克己・佐々木武，アファイン微分幾何学，裳華房，1994.

[30] Opozda, B., A sectional curvature for statistical structures. Linear Algebra Appl. 497 (2016), 134-161.

[31] Satoh, N., Furuhata, H., Hasegawa, I., Nakane, T., Okuyama, Y., Sato, K., Shahid, M.H. and Siddiqui, A.N., Statistical submanifolds from a viewpoint of the Euler inequality. to appear in Inf. Geom.

[32] 志磨裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房，2001.

[33] Singh, A.P., Survey on geometry of statistical submanifolds. Int. J. Math. Sci. 17(2018), no. 3-4, 171-189.

[34] Takano, K., Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions. Tensor (N.S.) 65 (2004), no. 2, 128-142.

[35] 田中勝，エントロピーの幾何学，コロナ社，2019.

[36] Vos, P.W., Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction. Ann. Inst. Statist. Math. 41 (1989), no. 3, 429-450.

脱稿後，田中勝氏 (福岡大) の突然の訃報が届いた．[35] の著者であり，本文にある札幌でのワークショップの常連として勉強会を牽引してくれた．故人に深く感謝するとともに謹んで哀悼の意を表したい．

(2021 年 6 月)