



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	A fluid interface model by phase field approach applied to the diffusive solution of level-set equation
Author(s)	OSHIMA, Nobuyuki
Citation	Mechanical Engineering Letters, 3, 17-00080-17-00080 https://doi.org/10.1299/mel.17-00080
Issue Date	2017-03-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/83859
Type	journal article
File Information	JSME_MEL_3_17-00080_translation.pdf, Author' s translation



Author's translation from **A fluid interface model by phase field approach applied to the diffusive solution of level-set equation**, Mechanical Engineering Letters, vol.3, Bulletin of the JSME (2017) DOI: 10.1299/mel.17-00080

レベルセット方程式の拡散解に適用されるフェーズフィールド法による流体界面モデル
大島伸行 北海道大学 工学研究院

概要

拡散解に拡張されたレベルセット法によって流体现象の保存則と自由エネルギー理論に基づくフェーズフィールド法との関係性が研究されている。レベルセット法と再初期化手順の数学的分析を考慮して、積層した等値面によって定義される流体界面の新しい数学モデルが導入される。このとき拡張されたレベルセット方程式の一般化された定式化は、局所非平衡解のために新たに提案されたポテンシャル関数モデルによってフェーズフィールド法を用いて導出される。

キーワード: レベルセット方程式、フェーズフィールド法、保存方程式、再初期化手順

1. レベルセット方程式の拡散解と流体保存則の関係

レベルセット法は、物理界面のシミュレーションに広く適用されており (Osher et.al. 2002)、数学的解析の強力なツールとしても研究されている (Giga et.al. 2015)。Chen et.al. (1991) によって導入された拡散解の概念はレベルセット方程式の解の一意性を与える。これは、レベルセット方程式の数値的不安定性を抑制するための「再初期化」手順の基礎 (Russo et.al. 2000、Olsson et.al. 2005) にもなっている。また、石田ら(2009) は、フェーズフィールド・アプローチの最もよく知られたモデルである 1 次元 Allen-Cahn 型方程式が本質的に同じ解であることを検証した。レベルセット法とフェーズフィールド・アプローチによる 2 つの界面モデルの類似性を用いて、Liu et.al. (2011)は予混合燃焼炎のモデルを提案し、Oshima (2016)はそれをレベルセット方程式の 3 次元拡散解に拡張した。

Liu と Oshima に倣い、界面の物理的挙動は、次式で表されるスカラー保存則との関係で考察される。

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{q} \quad (1)$$

ここで、変数 ϕ は定式の右辺項によって駆動される流体の保存的スカラーである。対流フラックスは流体速度 \mathbf{V} と流体密度 ρ によって、拡散フラックスは勾配モデル $\mathbf{j} = D \nabla \phi$ (拡散係数: D) によってそれぞれ表され、生成は \dot{q} とする。もし、変数 ϕ が界面を挟んで ϕ_- から ϕ_+ に単調変化するならば、図 1 に示すように、界面は複数の等高線 (等値面)

$\phi = \phi_0$ ($\phi_- \leq \phi_0 \leq \phi_+$) が積層したものとしてモデル化できるであろう。隣接する等値面が互いに連続的な移動速度を持つ場合、等値面 $\phi = \phi_0$ の周囲の局所分布 ϕ が界面全体の ϕ_0 のレベル分布と同一であるとき、「安定した」界面を形成する可能性がある。これは、式(1)が積層近似された界面範囲 ($\phi_- \leq \phi_0 \leq \phi_+$) の任意の等値面 $\phi = \phi_0$ に対してレベルセット方程式の解を与えることを意味する。

Liu は燃焼場における保存方程式(1)からレベルセット定式化 (燃焼場では火炎伝搬をあらわす) を導くために、界面伝搬速度 (燃焼場では燃焼速度(burning velocity) と呼ばれる) を積層近似された界面に分布する局所燃焼速度 $s(\phi) = \dot{q} / |\nabla \phi|$ として定義しなおし、これを界面領域にて ϕ の線形関数で近似するモデル化を提案した。さらに、Oshima は、彼女の方法を Olsson の再初期化手順と組み合わせて、法線伝搬流と曲率流の両方を含む 3次元問題への拡張を導出した。彼らは、式(1)から導かれる流体中のレベルセット方程式の拡散解の定式化を次のように提案している。

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho V(\phi, \nabla \phi) |\nabla \phi| + O(\phi, \nabla \phi) \quad (2)$$

これは、式(2)の解 ϕ が界面厚さにおいて連続的かつ単調な分布を維持するという条件下で、界面に含まれるすべての等値面に対してレベルセット方程式

$$\frac{D\phi}{Dt} = V(\phi, \nabla \phi) |\nabla \phi| \quad (3)$$

を近似的に満たすことを意味する。

ここで、式(2)の右辺第1項は界面伝搬の推進力を与え、これは Liu らによる局所火炎速度モデルに対応し、代表界面を定式化した従来のレベルセット法と同様に定義される。推進力、すなわち界面流束 ρV は一般に ϕ および $\nabla \phi$ の関数であるべきであるが、等方性流体では法線伝播流および曲率流の和

$$\rho V = s + c\kappa \quad (\text{法線流係数: } s, \text{ 曲率流係数: } c, \text{ 平均曲率: } \kappa)$$

によってモデル化することができる。

一方、式(2)の第2項がゼロに収束することで界面領域での再初期化手順として機能し、これが ϕ および $\nabla \phi$ の分布関数を与える。分布関数の解を仮定することにより、界面伝搬の2つの係数 s および c は ϕ のみによって決定される。

Liu と Oshima による既報では、式(2)のいくつかの可能な定式化が導出され、単純な燃焼火炎の数値解によって検証されたが、その物理的意味は、乱流や詳細な化学反応などのより複雑な条件、または沸騰泡や噴霧液滴の気液界面などの他の物理現象における一般化さ

れた界面問題に拡張適用できるほど十分には解析されていない。前者の場合、直接的な解や詳細な実験データが不明であり、後者の場合、連続性の仮定さえ利用できないため、単純な経験的アプローチは役に立たないと思われる。

そこで本論文では、マルチフィジクスおよびマルチスケール界面現象に広く適用できる、さまざまな界面問題に見られる相似性の背後にある一般法則は何かという問いを立て、そこで、式(1)による保存則と式(2)による拡張レベルセット法の拡散解との関係を調べる。自由エネルギー理論は、界面現象に対するフェーズフィールド法に適用された式(1)の拡散フラックス \mathbf{j} と生成項 \dot{q} の一般法則を与える可能性があるが、これまでの研究のほとんどが平衡状態に適用されていたのに対し、式(2)による積層等値面の局所解における非平衡境界条件への若干の拡張が必要である。この目的のための新しいモデルについては次節で説明する。

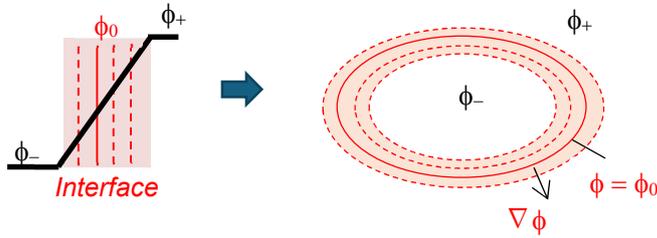


図1 積層等値面に拡張されたレベルセット法概念図

2. レベルセット拡散解に対するフェーズフィールド・アプローチの新たな定式化

自由エネルギー理論に基づくフェーズフィールドアプローチは、上述のレベルセット局所解における界面駆動力の定式化に適用される。界面問題に対するフェーズフィールドは、オイラー・ラグランジュ方程式によって定式化される。

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} \equiv \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = -M \sum \frac{\delta \Phi_i}{\delta \phi}, \quad (5)$$

ここで、界面は2つの相間で変化する秩序パラメータ ϕ によって与えられ、この変数 ϕ は界面位置の等高線を示すレベルセット関数にも対応する。式(1)または式(2)による流体现象を考慮すると、左辺には実質微分が導入される。一方右辺はフェーズフィールドの考え方に従って、次のように定義される汎関数

$$\Phi_i = \int F_i dV, \quad (6)$$

の変分で評価される。界面の自由エネルギー F_i は以下の4つの成分にモデル化される。

$$F_1 = \int s(\phi) f(\phi) d\phi,$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{2} \{f(\phi)\}^2, \\
F_3 &= \{d(\phi) - c(\phi)\} f(\phi) |\nabla \phi|, \\
F_4 &= \frac{1}{2} \{d(\phi)\}^2 |\nabla \phi|^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、 \mathbf{F}_2 と \mathbf{F}_4 は局所平衡界面のフェーズフィールドアプローチに一般に適用されるアレックス・カーン方程式モデルを記述するもので、また、 \mathbf{F}_1 は非平衡界面問題に対するその拡張方程式にて Kobayashi (1993)により導入された。さらに \mathbf{F}_3 は、積層等値面の局所非平衡を考慮するために本論文で新たに提案するもので、隣接積層する等値面の安定化に寄与し、後述するように物理界面に対しては曲率流への補正を与える。

熱力学原理に基づくフェーズフィールドアプローチでは、汎関数式(6)の総和 $\Sigma \Phi_i$ を最小化することで、平衡状態への時間過程を与える変分方程式(5)を得る。ここで、各関数成分 \mathbf{F}_i の変分は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Phi_1}{\delta \phi} &= \frac{\partial F_1}{\partial \phi} = sf, \\
\frac{\delta \Phi_2}{\delta \phi} &= \frac{\partial F_2}{\partial \phi} = f \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \\
\frac{\delta \Phi_3}{\delta \phi} &= \frac{\partial F_3}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial \nabla \phi} \right) = \left(\frac{\partial (d-c)f}{\partial \phi} \right) |\nabla \phi| - \nabla \cdot \left((d-c)f \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = -(d-c)f\kappa, \\
\frac{\delta \Phi_4}{\delta \phi} &= \frac{\partial F_4}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_4}{\partial \nabla \phi} \right) = d \left(\frac{\partial d}{\partial \phi} \right) |\nabla \phi|^2 - \nabla \cdot d^2 |\nabla \phi| \mathbf{n} \\
&= d |\nabla d| |\nabla \phi| - d |\nabla \phi| (\nabla \cdot d\mathbf{n}) - d\mathbf{n} \cdot \nabla (d |\nabla \phi|) = -d^2 |\nabla \phi| \kappa - d\mathbf{n} \cdot \nabla (d |\nabla \phi|) = -d \nabla \cdot d \nabla \phi. \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\text{面法線単位ベクトル: } \mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}, \quad \text{面平均曲率: } \kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

これらをまとめると、総和は以下となる。

$$\sum \frac{\delta \Phi_i}{\delta \phi} = (s + f' + (c-d)\kappa)f - d \nabla \cdot d \nabla \phi, \quad f' = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right). \tag{9}$$

上記導出には以下のベクトル恒等式を適用した。

$$\nabla \cdot f\mathbf{n} = |\nabla f| + f\kappa = f' |\nabla \phi| + f\kappa \quad \text{および} \quad \nabla \cdot d |\nabla \phi| \mathbf{n} = (d |\nabla \phi|) \kappa + \mathbf{n} \cdot \nabla (d |\nabla \phi|)$$

ここで、汎関数式(6)は積層する等値面ごとに評価されると考えると、オイラー・ラグランジュ方程式(5)の右辺における移動係数 M は各等値面の積分体積の厚さの反比例で近似されることに注意する。すべての要素積分における等価変化 $d|\nabla\phi|$ を一定に保ち、それらの共通定式化を導出するものと考えて、積分厚さは係数 d に比例すると推定される。そこで、移動係数が $Md = 1$ で与えられると仮定すると、次式が導かれる。

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = -(s + f' + (c - d)\kappa) \frac{f}{d} + \nabla \cdot d\nabla\phi \quad (10)$$

式(10)は、界面伝搬速度 $V = (\rho V) / \rho$ の代わりに界面伝搬フラックス $\rho V = s + c\kappa$ (式(2)

を参照)を用いて Kobayashi(1993)が拡張した非平衡 Allen-Cahn 方程式と同一となる。また、稲毛 (2007)による燃焼炎モデルとも一致する。ただし、定式化(10)では界面法線流と曲率流の任意の結合($s=0$ または $c=0$ ではその一方)が定式化されている。汎関数の総和は次のようにも表されるので、

$$\sum \Phi_i = \int \left[s f d\phi - c f |\nabla\phi| + (f + d|\nabla\phi|)^2 \right] dV, \quad (11)$$

界面流がない条件 ($s=c=0$) では、自明な解

$$\frac{f}{d} + |\nabla\phi| = 0 \quad (12)$$

が与えられる。Kobayashi や稲毛による (\mathbf{F}_3 を含まない) 定式化では、曲率流については明示的に考慮されていないが、 \mathbf{F}_4 を通して暗黙的に含まれていた。(和訳補足：そのため、相変化のない気液界面などに適用する場合には、曲率流効果への付加的補正を必要とした)

ここで、式(10)が自然に界面遠方のバルク領域 ($|\nabla\phi|=0$)につながるという条件により、一般に $d(\phi) > 0$ および $f(\phi) \leq 0$ 、(ただし、 $|\nabla\phi|=0$ において $f(\phi)=0$) と仮定できる。自明解の式(12)を含むように変形すると、式(10)の右辺は次のようにも表される。

$$RH = \rho V |\nabla\phi| - (\rho V + f') \left(\frac{f}{d} + |\nabla\phi| \right) + \nabla \cdot d \left(\frac{f}{d} + |\nabla\phi| \right) \mathbf{n}, \quad \rho V = s + c\kappa, \quad (13)$$

これはレベルセット方程式の拡散解に対する式(2)の定式化を与えている。すなわち、Oshima が解析したように、式(13)の最後の項は、界面で式(12)による厚さ分布解を収束させる再初期化の役割を果たしており、 $V=0$ の場合には第2項も $f=0$ で等高線面の周りで収束する解を与えることが期待される。このような定式化は、レベルセット方程式の再初期化手順として以前の研究(Russo et.al. 2000、Olsson et.al. 2005)でも提案されている。それらは、式(13)の第2項と第3項から次のように導かれる。

Russo の再初期化式:

$$-f = d = |\phi|, \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\text{sign}(\phi) \quad (\phi \neq 0)$$

より

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\left(\frac{f}{d} + |\nabla \phi|\right) = \text{sign}(\phi)(1 - |\nabla \phi|), \quad (14)$$

Olsson の再初期化式:

$$f = \phi(\phi - 1), \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 2\phi - 1, \quad d = 1$$

より

$$\nabla \cdot (f + d|\nabla \phi|)\mathbf{n} = \nabla \cdot (-\phi(1 - \phi) + |\nabla \phi|)\mathbf{n}. \quad (15)$$

ここで、Olsson の定式はバルク領域 ($|\nabla \phi| = 0$ において $f(\phi) = 0$) に連続的に接続する条件を満たしているが、Russo のものは変数 ϕ が界面からの距離を表し線形的に増大する。最後に、大域的な界面運動のマクロ解と局所厚さ分布のミクロ解が本質的に独立していると仮定すると、マクロスケールの粗解像度でもより簡単に計算できる修正解 ϕ^* を導入することが実用的である。この修正は、本アプローチにおける「厚くなった界面(thickened interface)」(または「拡散した界面(diffused interface)」) モデルを表現し、拡大係数 $d/d^* > 1$ を導入して次のように簡明に定式化できる。

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = (-\rho \mathbf{V} + \rho \mathbf{v} \mathbf{n}) \cdot \nabla \phi - \left(\rho \mathbf{v} + \frac{d}{d^*} f'\right) \left(\frac{f}{d^*} + |\nabla \phi|\right) + \nabla \cdot d \left(\frac{f}{d^*} + |\nabla \phi|\right) \mathbf{n}, \quad (16)$$

式(16)は式(11)と同じ界面質量流束を維持し、第2, 3項は同様に修正された厚さ分布

$$\frac{f}{d^*} + |\nabla \phi| = 0 \quad (17)$$

によって消える。

また、式(16)は保存則の定式化によっても表現することができる。

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{q}^*$$

$$\mathbf{j} = d \nabla \phi \quad \text{および} \quad \dot{q}^* = -\left(s + \frac{d}{d^*} f' + (c - d)\kappa\right) \frac{f}{d^*}. \quad (18)$$

ここでは、生成項 \dot{q}^* のみが式 (10) から修正されており、これは本質的には Inage et.al.

(2007) によるフェーズフィールドアプローチに基づく燃焼炎モデルと同じであるが、加えて曲率流れの明示的な効果が含まれていることに注意されたい。マクロな界面運動は媒質の対流および拡散フラックス ($\rho \mathbf{v}$ および $\mathbf{j} = d\nabla\phi$) と界面流フラックス $\rho V = s + c\kappa$ によって定義されるが、界面厚さにおける微視的局所解の不安定性を回避するために与える人工的な拡散によってマクロ運動を乱してはいけない。これは、過去の研究 (例: Arpit et.al. (2013)、Gong et al. (2015)) でも頻繁に議論されてきたマクロ界面モデリングとミクロ界面モデリング間の相互作用の問題を明示している。式 (18) は、界面伝播挙動を独立に定式化するため、乱流拡散モデルにもそのまま適用できる。

3. 計算結果

本研究で提案した流体界面モデルを評価するために、いくつかの数値計算例を示す。すべてのケースにおいて、一定の時間刻みによるオイラー陽解法と均一な空間格子による 2 次精度中心差分が付加的手順なしで適用される。密度は一定とした。計算条件は表 1 に示されている。まず、単調な界面プロファイルによる 1 次元定常伝播解を図 2 に示す。式(10)による基本モデルと式(16)による厚くされた界面モデルが同じ初期条件から解かれる。

$$\phi = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (19)$$

どちらの解も、1次元単調分布では曲率効果($\kappa = 0$)が現れないため、係数 s で与えられる一定の伝搬速度を示す。過渡時間($t > 0.5$)後の界面分布は、初期分布には依存せず、式(12)と式(17)で定義された解となり、 $d^* = 2d$ による後者の解は、 d による前者の解の 2 倍の厚さを与えている。

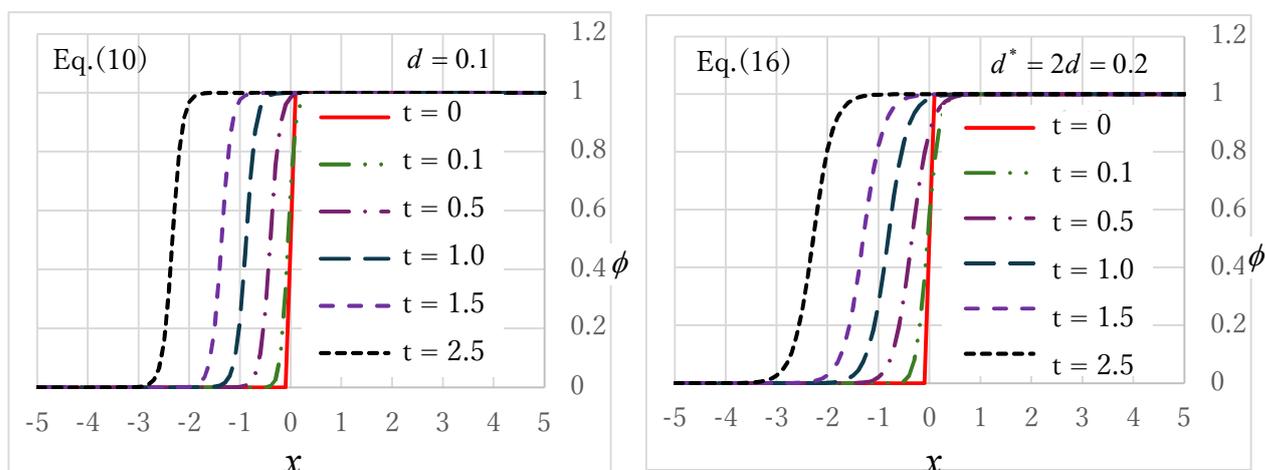


Fig.2 基本モデル式(10)と厚くされた界面のモデル式(16)による単調な単一界面伝播の 1

次元解

Table.1 計算条件

	単調分布解	非単調分布解	軸対称解
時間刻み	$dt = 0.01$		
空間刻み	$dx = 0.1$		
流出境界	$\frac{d\phi}{dx} = 0$ at $x = -5, 5$		$\frac{d\phi}{dr} = 0$ at $r = 5$
法線流係数	$s = 1$	$s = 0$	$s = 0$
曲率流係数	-	$c = 0.2, 0$	$c = 0.25, 0$
拡散係数	$d = 0.1$ Eq.(10) $d^* = 0.2$ Eq.(16)	$d = 0.2$ Eq.(10)	$d = 0.25$ Eq.(10)

次に、図 3 に示すような非単調な初期分布を適用した。局所最小値と最大値の位置での特異点を数値的に処理するために、離散化された 1 次元格子上的法線ベクトル (1 つの成分) と曲率を次のように定義した。

$$\mathbf{n} = \begin{cases} -1 & d\phi/dx < 0 \\ 0 & d\phi/dx = 0 \\ 1 & d\phi/dx > 0 \end{cases}, \quad \kappa = \begin{cases} -1/\delta x & \mathbf{n} = 0, \text{local max.} \\ 0 & \mathbf{n} \neq 0 \\ 1/\delta x & \mathbf{n} = 0, \text{local min.} \end{cases} \quad (20)$$

式(10)では法線ベクトルの特異点が現れないため、局所的な最小値または最大値の位置での曲率は初期プロファイルを修正するように働く。そのため、Kobayashi や稲毛らによる曲率流れ効果を暗黙的に考慮した従来のフェーズフィールドモデル($c=d$ 式(10))では長時間計算での非単調な定常解を維持できないが、界面速度がない条件 ($\rho V = s + c \kappa = 0$) を定義可能な本モデルでは、与えられた初期分布の下でレベルセット方程式(3)の拡散解となる定常非単調解を適切に維持できる。

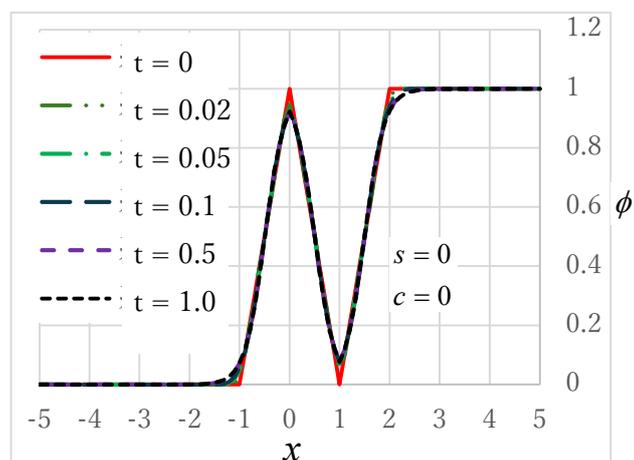
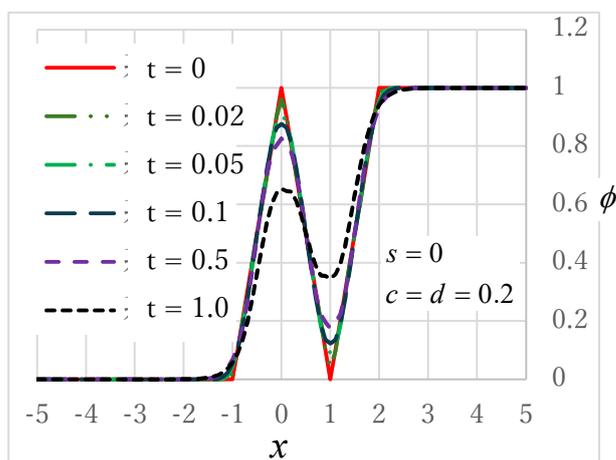


Fig.3 非単調分布界面の計算解：式(10)にて曲率流($\rho v = c\kappa$)あり (左), なし (右) .

最後に、軸対称解の例を図4に示す。ここでは、式(10)を次の初期分布によって軸対称な孤立相をもつ問題に適用している。

$$\phi = \begin{cases} 1 & r < r_0 \\ 0.5 & r = r_0, \quad r_0 = 1.5 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} . \quad (21)$$

軸対称座標では平均曲率は次のように計算される。

$$\kappa = \frac{dn_r}{dr} + \frac{1}{r} \quad (22)$$

ここで、法線ベクトルの r 成分 n_r は式(20)を $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}$ として定義し、特異点に対する同様の処理が中心軸の局所的最大値に適用される。非ゼロの曲率流れ

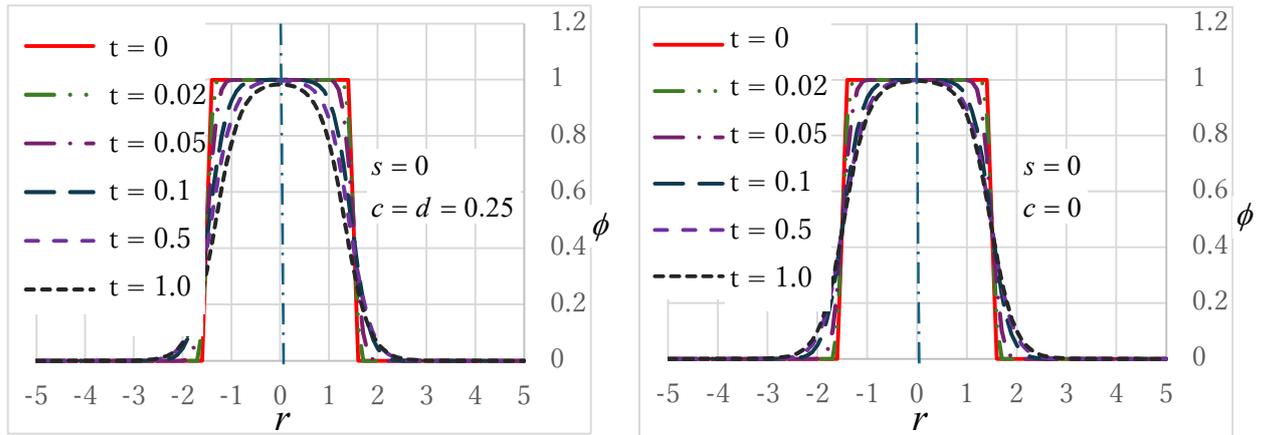


Fig.4 軸対称孤立相のの計算解：式(10)にて曲率流($\rho V = c\kappa$)あり (左), なし (右) .

曲率のある界面においてゼロでない曲率流係数 (図4左) は、界面等値面の半径 ($\phi = 0.5$) と内部相領域の体積 ($\phi > 0.5$) を減少させる。曲率流をゼロとした界面速度条件 ($\rho V = s + c\kappa = 0$ 図4右) は初期界面位置と内部相体積を適切に保持している。

ここで、すべての計算ケースが風上スキーム、人工拡散、あるいは数値解を安定化するための追加手順などを用いずに安定に計算されていることに再度留意する必要がある。これは、複雑な界面現象の正確な解を得る際に、本提案の定式化モデルがもつ重要な利点といえる。

4. まとめ

本論文では、流体現象の保存則と関係づける拡散解に拡張されたレベルセット法と自由エネルギー理論に基づくフェーズフィールドアプローチについて検討した。その結果、3つの主要な成果が導かれた。

- 1) 複数等値面の積層で定義される流体界面の新しい数学モデルが導入される。
- 2) 局所界面の非平衡解のために新たに提案されたポテンシャル関数モデルを用いた自由エネルギー理論に基づくフェーズフィールドアプローチを使用して、拡張レベルセット方程式の一般化された定式化を導出される。
- 3) 風上スキームやなどの安定化人工手順なしでの単純な数値法が適用できる明示的かつ保存的な拡散項を持つ微分方程式による定式化が得られる。

これらは、厚く近似された界面モデルや平均化乱流モデルの数学的基礎を調査するためにも利用できる。

謝辞

本研究は科研費（15H3912）の助成を受けて行われた。

引用文献

[Arpit Tiwari, Jonathan, B. Freund and Carlos Pantano](#), A diffuse interface model with immiscibility preservation, *Journal of Computational Physics* Vol.252 (2013) pp.290-309, DOI: [10.1016/j.jcp.2013.06.021](#)

Chen Y., Giga Y. and Goto S., Uniqueness and existence of viscosity solution of generalized mean curvature flow equations, *Journal of differential geometry*, Vol.33 (1991) pp. 749-786

Giga Y. and Chen Y., Chasing a curved surface to move, Nihon hyoron sha (2015), ISBN:978-4-535-78598-4 (儀我, 陳, 動く界面を追いかけて, 日本評論社)

Gong J., Oshima N. and Tabe Y., Reduction of spurious velocity in the free-energy-based lattice Boltzmann method for large density ratio, *Journal of Thermal Science and Technology* Vol.10, No.1 (2015), DOI: [10.1299/jtst.2015jtst0004](#)

Ishida, A. and Tonegawa, Y., A relation between a mean curvature equation and a phase transform of parabolic equations in an equation for the premixed combustion flames, *Proceedings of Annual Meeting of Mathematical Society of Japan* (2009) 2p, (石田, 利根川, 日本数学会年会梗概)

Inage, A Proposal of United Combustion Model for Premixed and Diffusion Flames and Its Evaluation (1st Report: Estimation of the Fundamental Model), *Journal of the Combustion Society of Japan* Vol. 49 No. 150 (2007) pp.267-276.

(稲毛, 予混合～拡散燃焼場に適用可能な統一的燃焼モデルの提案とその評価－第一報 基本モデルの構築, 日本燃焼学会誌)

Kobayashi, Modeling and numerical simulations of dendritic crystal grows, *Physica D* 63 (1993) pp.410-423.

Liu Y. and Oshima N., A level set approach for a premixed flame based on a new concept of flame speed, *Journal of Thermal Science and Technology*, Vol.6, No.1 (2011) pp. 140-153

Olsson E. and Kreiss G., A conservative level set method for two phase flow, *Journal of computational physics*, vol.210 (2005) pp. 225-246.

Osher S. and Fedkiw R., *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Springer (2002) ISBN-13: 978-0387954820

Oshima N., An extensional formulation for a diffusive solution of the level-set equation by considering a relation to the scalar conservation equation, *Mechanical Engineering Letters*, Vol.2 (2016) DOI: 10.1299/mel.16-00220.

Russo, G. and Smereka, P., A remark on computing distance functions, *Journal of Computation Physics*, Vol.164, (2000), pp. 51-67.